

Tarea 1

Teoría de Conjuntos 1

23 de febrero de 2025

Conjuntos Abstractos

Ejercicio 1 Sean \mathcal{C} una categoría con objeto terminal 1 y sea $A \in \mathcal{C}$ un objeto. Muestra que toda flecha de la forma $m : 1 \rightarrow A$ es mono.

Ejercicio 2 Sean \mathcal{C} una categoría y $T \in \mathcal{C}$ cualquier objeto. Demuestra que si T tiene un elemento global, entonces T es separador.

Ejercicio 3 Sean \mathcal{S} la categoría de conjuntos abstractos y $A \xrightarrow{f} B \in \mathcal{S}$. Demuestra que f es mono si y sólo si f es inyectiva. Es decir, en \mathcal{S} , mono es equivalente a inyectiva.

Fórmulas y Clases

Ejercicio 4 Los siguientes enunciados son versiones “débiles” de los axiomas de par y potencia, respectivamente. Demuestra que éstos son equivalentes a sus contrapartes, los axiomas “no débiles” del par y potencia, respectivamente. En cada inciso indica claramente cuáles axiomas de ZFC se utilizan para probar la equivalencia.

- I) $\forall x \forall y \exists p \forall w ((w = x \vee w = y) \rightarrow w \in p)$ es al axioma débil del par.
- II) $\forall x \exists p \forall w (\forall z (z \in x \rightarrow z \in w) \rightarrow w \in p)$ es el axioma débil del potencia.

Ejercicio 5 Sea A un conjunto. Da condiciones necesarias y suficientes sobre cómo debe ser A para que la cualesquiera $\{x \mid \forall z \forall y ((z \in A \wedge y \in z) \rightarrow x \in y)\}$ sea conjunto.

Ejercicio 6 Para cada inciso escribe una fórmula de primer orden en la teoría de conjuntos que describa el correspondiente concepto. En las fórmulas *únicamente* se pueden utilizar símbolos lógicos, paréntesis, cuantificadores, variables y el símbolo ‘ \in ’; sin abreviaturas de lenguaje como ‘ \subseteq ’, ‘ $x = \emptyset$ ’, ‘ $x = \{y\}$ ’, etcétera. Se puede abreviar una fórmula *sólo si* ésta ya se escribió en un inciso anterior.

- | | |
|--|---|
| I) x es el conjunto par de y y z . | VIII) x es el campo de la relación y . |
| II) x es el par ordenado de y y z . | IX) $x = 0$. |
| III) x es par ordenado. | X) $x = 1$. |
| IV) x es la primera entrada del par ordenado y . | XI) $x = 4$. |
| V) x es la segunda entrada de un par ordenado. | XII) x es la intersección de y . |
| VI) x es una relación. | XIII) x es elemento de la intersección de y . |
| VII) x es el dominio de la relación y . | XIV) x es la intersección de la intersección de y . |

Sólo hay que dar las fórmula, no es necesario ningún tipo de justificación.

Conjuntos y álgebra de conjuntos

Ejercicio 7 Es un hecho que todas las colecciones de este ejercicio son conjuntos. Demuestra o refuta (con un contraejemplo) cuatro de los siguientes incisos, prueba todas tus afirmaciones.

- | | |
|---|--|
| I) $\bigcup \{\{x\}, \{y\}\} = \{x, y\}$. | V) $\{x, y\} = \{a, b\}$ si y sólo si $x = a$ y $y = b$. |
| II) $\bigcup \bigcup \{\{\{x\}\}\} = x$. | VI) $(\emptyset) = \{\emptyset\}$. |
| III) $\bigcup \{x\} = \emptyset$ y $x = \emptyset$ son equivalentes. | VII) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \notin \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. |
| IV) Se da la igualdad $(x, y) = (a, b)$ únicamente si $x = a$ y $y = b$. | VIII) Se tiene $\{\{x\}, \{x, y\}, \{x, y, z\}\} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ sólo cuando $x = a$, $y = b$ y $z = c$. |

Ejercicio 8 Determina cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas, justifica tu respuesta con una demostración o un contraejemplo. Demuestra todas tus afirmaciones.

- I) Para todo conjunto x existe un conjunto y tal que $x \not\subseteq y$
- II) Para todo conjunto x existe un conjunto y tal que $x \notin y$

Ejercicio 9 Todas las colecciones de este ejercicio son conjuntos. Prueba dos de los siguientes incisos:

- I) $x \subseteq (y)$ si y sólo si $\bigcup x \subseteq y$.
- II) Si $x \neq \emptyset$, $y \in \bigcap \{(a) \mid a \in x\}$ ocurre sólo si $y \subseteq \bigcup x$.
- III) $\bigcup \{(a) \mid a \in x\} \subseteq (\bigcup x)$ pero no siempre $\bigcup \{(a) \mid a \in x\} \neq (\bigcup x)$.
- IV) $(\bigcup x) \cap (\bigcup y) = \bigcup \{a \cap b \mid (a, b) \in x \times y\}$.