Tarea Examen 1

Profesor: Luis Jesús Turcio Cuevas

Ayudantes: Jesús Angel Cabrera Labastida, Hugo Víctor García Martínez

i) La tarea se entrega de forma **presencial** durante la clase del **7 de marzo**.

ii) Los equipos para realizar la tarea deberan contar con **mínimo 4** integrantes y **máximo 6**.

iii) Se pueden usar resultados vistos en clase, **siempre y cuando** se mencione claramente cuándo y dónde se usan.

iv) Cada ejercicio tiene un valor de **dos puntos** para un total de diez. Hay un ejercicio adicional con valor de **un punto**, éste se calificará únicamente con cero o su valor total.

_ _

Conjuntos Abstractos

Los ejercicios de esta sección se deben resolver en la categoría de conjuntos abstractos, $\mathscr{S}$, a menos que se indique lo contrario.

Ejercicio 1 Demuestra que $f\colon A \to B$ es mono si y sólo si f es inyectiva.

Ejercicio 2 Sea $m\colon S \rightarrowtail A$ un subobjeto y considera su flecha característica $\chi_m\colon A \to \Omega$. Demuestra que para cualquier elemento generalizado $x\colon X \to A$ se satisface: $x \in_A m \iff \chi_m x = \nu_X$, donde ν_X es la composición de $!_X\colon X \to 1$ con $\nu\colon 1 \to \Omega$.

ZFC

Para los ejercicios de esta sección se podrán utilizar únicamente los axiomas de ZFC vistos hasta el momento en clase.

Ejercicio 3 Demuestre las siguientes equivalencias o implicaciones. En cada inciso indique claramente qué axiomas de ZFC se utilizan durante la prueba.

i) El axioma de extensionalidad implica el enunciado $\forall x \forall y(\forall w(x \in w \leftrightarrow y \in w) \to x = y)$.

ii) El enunciado $\forall x \exists p \forall w(\forall z(z \in x \to z \in w) \to w \in p)$ es equivalente al axioma de potencia.

iii) El enunciado $\forall x \forall y \exists p \forall w(w \in p \leftrightarrow (p \in x \vee p = y))$ implica el axioma del par.

Ejercicio 4 Todas las colecciones de este ejercicio son conjuntos. Prueba dos de los siguientes incisos:

I) $x \subseteq \mathscr{P}(y)$ si y sólo si $\bigcup x \subseteq y$.

II) Si $x \neq \varnothing$, entonces $y \in \bigcap\{\mathscr{P}(a) \mid a \in x\}$ ocurre sólo si $y \subseteq \bigcap x$.

III) $\bigcup\{\mathscr{P}(a) \mid a \in x\} \subseteq \mathscr{P}(\bigcup x)$ pero no siempre $\bigcup\{\mathscr{P}(a) \mid a \in x\} \neq \mathscr{P}(\bigcup x)$.

IV) $\left(\bigcup x\right) \cap \left(\bigcup y\right) = \bigcup\{a \cap b \mid (a, b) \in x \times y\}$.

Ejercicio 5 Sean x un conjunto y f una función con dominio x. Prueba lo siguiente:

I) Si $A \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(X))$ es no vacío, entonces $f[\bigcap A] \subseteq \bigcap\{f[a] \mid a \in A\}$.

II) f es inyectiva si y sólo si para cada $A \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(X))$ no vacío se tiene que $\bigcap\{f[a] \mid a \in A\} \subseteq f[\bigcap A]$.

Adicional

Ejercicio Sean X, Y conjuntos y $f : X \to Y$. Se define la función $g : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(Y)$ para cada $a \in \mathscr{P}(X)$ como $g(a) = \{y \in Y \mid f^{-1}[\{y\}] \subseteq a\}$.

I) Demuestra que si $a \in \mathscr{P}(X)$ y $b \in \mathscr{P}(Y)$, entonces $b \subseteq g(a)$ si y sólo si $f^{-1}[b] \subseteq a$.

II) Prueba que para todo $A \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(X)) \setminus \{\varnothing\}$ se tiene $g(\bigcap A) = \bigcap\{g(a) \mid a \in A\}$.

Soluciones de los Ejercicios

Solución 1

Supongamos que $f\colon A \to B$ es mono y consideremos dos elementos globales $a_1, a_2\colon 1 \to A$ tales que el siguiente diagrama conmuta

$$1 \underset{a_2}{\overset{a_1}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{f} B.$$

Como f es mono se sigue que $a_1 = a_2$. Por lo tanto, f es inyectiva.

Supongamos ahora que $f\colon A \to B$ es inyectiva y supongamos que el siguiente diagrama conmuta

$$T \underset{y}{\overset{x}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{f} B. \tag{1}$$

Para mostrar que $x = y$ usamos que 1 es separador. Así, tomemos un elemento global $t\colon 1 \to T$ y veamos que $xt = yt$. Como el diagrama en (1) conmuta, se sigue que

$$1 \xrightarrow{t} T \underset{y}{\overset{x}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{f} B \;=\; 1 \underset{yt}{\overset{xt}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{f} B.$$

conmuta. Como f es inyectiva, se sigue que $xt = yt$. Por lo tanto, $x = y$ y así f es mono.

Solución 2

Supongamos que $x \in_A m$, es decir, existe $h\colon X \to S$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "x"'] & & S \arrow[dl, tail, "m"] \\ & A. & \end{tikzcd}$$

Con esto la igualdad que queremos se sigue de la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "h"] \arrow[drr, bend left, "!_X"] \arrow[ddr, bend right, "x"'] & & \\ & S \arrow[r, "!_S"] \arrow[d, tail, "m"'] & 1 \arrow[d, "v"] \\ & A \arrow[r, "\chi_m"'] & \Omega. \end{tikzcd}$$

Ahora supongamos que $\chi_m x = v_X$. Esto significa que el cuadrado exterior del siguiente diagrama conmuta y por la propiedad universal del producto fibrado existe $h\colon X \to S$ que hace conmutar al triangulo de la derecha del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, bend left, "!_X"] \arrow[ddr, bend right, "x"'] & & \\ & S \arrow[r, "!_S"] \arrow[d, tail, "m"'] & 1 \arrow[d, "v"] \\ & A \arrow[r, "\chi_m"'] & \Omega. \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $x \in_A m$.