Tarea 2 - Solución

Profesor: Luis Jesús Turcio Cuevas
Ayudantes: Jesús Angel Cabrera Labastida,
Hugo Víctor García Martínez

Ej 1. Muestra que el clasificador de subobjetos Ω es coseparador, es decir, dadas $f, g\colon A \to B$ si para cualquier $\varphi\colon B \to \Omega$ el diagrama

$$A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{\varphi} \Omega \tag{1}$$

conmuta, entonces $f = g$.

Demostración. Primero veamos que el enunciado es cierto cuando $A = 1$. Esto es, si suponemos que $b_1, b_2\colon 1 \to B$ son tales que

$$1 \underset{b_2}{\overset{b_1}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{\varphi} \Omega \tag{2}$$

conmuta, entonces veamos que $b_1 = b_2$.

Como toda flecha que sale del terminal es mono y Ω es clasificador de subobjetos, entonces b_1 tiene una característica, digamos $\varphi\colon B \to \Omega$. Por la hipótesis en (2) y la propiedad universal del producto fibrado tenemos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[ddr, bend right, "b_2"'] & & \\
& 1 \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "b_1"'] & 1 \arrow[d, "\nu"] \\
& A \arrow[r, "\varphi"'] & \Omega.
\end{tikzcd}$$

Como la única flecha del terminal a sí mismo es la identidad, entonces $b_1 = b_2$.

Ahora sea A arbitrario y supongamos que $f, g\colon A \to B$ son tales que para cualquier $\varphi\colon B \to \Omega$ el diagrama (1) conmuta. Para ver que $f = g$ usaremos que 1 es separador, es decir, veremos que para cualquier $a\colon 1 \to A$ se satisface $fa = ga$. Por la hipótesis sobre f y g tenemos que el siguiente diagrama conmuta:

$$1 \underset{ga}{\overset{fa}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{\varphi} \Omega.$$

Así, por lo que hicimos antes podemos concluir que $fa = ga$. Lo cual prueba que $f = g$. ■

Ej 2. Sean $\mathrm{ev}\colon A \times \Omega^A \to \Omega$, $x\colon X \to A$ y $m\colon S \rightarrowtail A$. Además, considera la característica de m y su nombre en la exponencial, $\ulcorner \chi_m \urcorner\colon 1 \to \Omega^A$. Muestra que $x \in_A m$ si y sólo si $\mathrm{ev}(x \times \ulcorner \chi_m \urcorner) = \nu_{X \times 1}$.

Demostración. Primero consideramos el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
A \times \Omega^A \arrow[rr, "ev"] & & \Omega \\
A \times 1 \arrow[u, "\mathrm{id}\times\ulcorner\chi_m\urcorner"] \arrow[r, "p_A"] \arrow[ur, phantom, "1"] & A \arrow[ur, "\chi_m"] \arrow[dr, phantom, "3"] & \\
& & 1 \arrow[uu, "\nu"'] \\
X \times 1 \arrow[uu, "x\times\mathrm{id}"] \arrow[r, "p_X"] \arrow[uur, phantom, "2"] & X \arrow[uu, "x"'] \arrow[ur, "!_X"'] &
\end{tikzcd}
\tag{3}
$$

La parte 1 conmuta por la definición de $\ulcorner\chi_m\urcorner$ y la parte 2 por definición de la flecha $x \times \mathrm{id}$. Si el diagrama 3 conmuta, entonces el diagrama exterior es conmutativo. Viceversa, si el diagrama exterior es conmutativo, entonces el diagrama 3 conmuta. En efecto, para ver que 3 conmuta es suficiente ver que conmuta desde $X \times 1$, ya que p_X es iso. Si seguimos el diagrama podemos obtener la conmutatividad que queremos. Las ecuaciones que lo muestran son:

$$
\begin{aligned}
\nu\,!_X\,p_X &= ev\,(x \times \ulcorner\chi_m\urcorner)\,(x \times \mathrm{id}) && \text{diagrama exterior}\\
&= \chi_m\,p_A\,(x \times \mathrm{id}) && \text{parte 1}\\
&= \chi_m\,x\,p_X && \text{parte 2.}
\end{aligned}
$$

Con esto hemos concluido que 3 conmuta si y sólo si el exterior conmuta.

Ahora, si suponemos que $x \in_A m$, entonces existe $h\colon X \to S$ que hace conmutar al siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "h"] \arrow[drr, bend left, "!_X"] \arrow[ddr, bend right, "x"'] & & \\
& S \arrow[r, "!_S"] \arrow[d, tail, "m"'] & 1 \arrow[d, "\nu"] \\
& A \arrow[r, "\chi_m"'] & \Omega.
\end{tikzcd}
\tag{4}
$$

De esto tenemos que la parte 3 de diagrama (3) conmuta. Así, el exterior conmuta. Por lo tanto $ev(x \times \ulcorner\chi_m\urcorner) = \nu_{X\times 1}$.

Por el lado contrario, si $ev(x \times \ulcorner\chi_m\urcorner) = \nu_{X\times 1}$, entonces el exterior del diagrama (3) conmuta. Así, la parte 3 del mismo diagrama es conmutativa. Esta parte es el exterior del diagrama (4). Por lo que podemos usar la propiedad universal del producto fibrado para obtener la existencia de $h\colon X \to S$ que hace conmutar el diagrama (4). Por lo tanto, $x \in_A m$. ■

Ej 3. Sean $(P, <)$ y $(Q, \sqsubset)$ conjuntos totalmente ordenados. Sea $X := P \times Q$ y defínase la relación R en X como sigue:

$$(p, q)\ R\ (x, y) \quad \text{si y sólo si} \quad ((p < x) \vee (p = x \wedge q \sqsubset y))$$

Demuestre que (X, R) es un conjunto totalmente ordenado.

Demostración. Se habrá de demostrar que R es antireflexiva, transitiva y que cualesquiera dos elementos de $P \times Q$ son R-comparables.

Para la primera parte, sea $(x, y) \in P \times Q$ cualquiera. Como $<$ es antireflexiva (por ser orden parcial), entonces $x \not< x$; y similarmente, $y \not\sqsubset y$. De esto último, la proposición "$x = x \wedge y \sqsubset y$" es falsa. Por lo tanto, "$x < x \vee (x = x \wedge y \sqsubset y)$" es falsa y con ello $(x, y) \not R (x, y)$, mostrando que R es antireflexiva.

Ahora, supóngase que $(x, y), (a, b), (u, v) \in P \times Q$ satisfacen $(x, y)\ R\ (a, b)$ y $(a, b)\ R\ (u, v)$. Entonces las proposiciones "$x < a \vee (x = a \wedge y \sqsubset b)$" y "$a < u \vee (a = u \wedge b \sqsubset v)$" son verdaderas. Pruébese la proposición "$x < u \vee (x = u \wedge y \sqsubset v)$" mediante los casos:

I) $x < u \wedge a < u$.

II) $x < u \wedge (a = u \wedge b \sqsubset v)$.

III) $(x = a \wedge y \sqsubset b) \wedge a < u$.

IV) $(x = a \wedge y \sqsubset b) \wedge (a = u \wedge b \sqsubset v)$.

En los casos (i)-(iii) se obtiene de la transitividad de $<$ que $x < u$ y con ello que $(x, y)\ R\ (u, v)$. Por otro lado; si se cumple (iv), entonces $x = u$ y de la transitividad de $\sqsubset$ se sigue que $y \sqsubset v$, probando también que $(x, y)\ R\ (u, v)$. En cualquier caso, se verifica que R es transitiva, y con ello, orden parcial en $P \times Q$.

Finalmente, sean $(x, y), (a, b) \in P \times Q$ distintos. Entonces por tricotomía del orden $<$ se tiene que $x < a$, $a < x$ o $x = a$. Si ocurren los dos primeros casos, entonces por definición de R, se obtiene $(x, y)\ R\ (a, b)$ o $(a, b)\ R\ (x, y)$. En el caso restante, $x = a$ y aplicando la tricotomía de $\sqsubset$ se da $y = b$, $y \sqsubset b$ o $b \sqsubset y$. Nótese que el primer caso no ocurre pues por hipótesis $(x, y) \neq (a, b)$. Así que $y \sqsubset b$ o $b \sqsubset y$ y como $x = a$, se obtiene de la definición de R que $y \sqsubset b$ o $b \sqsubset y$. Por lo tanto R es un orden parcial tricotómico, esto es, un orden total. ■

Ej 4. Sean $(P, <)$ y $(Q, \sqsubset)$ conjuntos parcialmente ordenados y $f : P \to Q$ tal que para cualesquiera $x, y \in P$: si $x < y$, entonces $f(x) \sqsubset f(y)$ (estas funciones se llaman "*morfismos de orden*"). Demuestra; o refuta mediante un contraejemplo, las siguientes afirmaciones.

I) Si $p \in P$ es el mínimo de $(P, <)$, entonces $f(p)$ es el mínimo de $(Q, \sqsubset)$.

II) Si $p \in P$ es $<$-minimal de P, entonces $f(p)$ es $\sqsubset$-minimal de Q.

III) Si f es biyectiva, entonces f^{-1} es un morfismo de orden.

IV) Si $(P, <)$ es un conjunto totalmente ordenado, entonces f es inyectiva.

Solución. (i) Es *falso en general*. Considere los conjuntos parcialmente ordenados $(P, <)$ y $(Q, \sqsubset)$, con $P := \{0\}$, $< := \varnothing$, $Q := \{0, 1\}$ y $\sqsubset := \{(0, 1)\}$. Sea $f : P \to Q$ dada por $f(0) = 1$ y nótese que vacuamente f es morfismo de orden. Además 0 es el es el mínimo de $(P, <)$ pero $f(0) = 1$ no es el mínimo de $(Q, \sqsubset)$. En efecto, nótese que existe un elemento $x_0 := 0 \in Q$ de modo que $1 \not\sqsubset 0$. De lo contrario, la transitividad de $\sqsubset$ obligaría a que $1 \sqsubset 1$, y esto contradiría su antireflexividad.

(ii) Es también *falsa en general*. Basta considerar el ejemplo anterior, nótese que 0 es $<$-minimal de P (todo mínimo es minimal). Sin embargo $f(0) = 1$ no es $\sqsubset$-minimal de Q, pues el elemento $0 \in Q$ cumple $0 \sqsubset 1 = f(0)$.

(iii) De nuevo, esta afirmacion *es falsa en general*. Considere el conjunto $X := \{0, 1, 2\}$ y las relaciones binarias $< := \{(0, 1), (0, 2)\}$ y $\sqsubset := \{(0, 1), (1, 2), (0, 2)\}$, es calro que ambos son órdenes parciales en X. Sea $f : X \to X$ la identidad en X y nótese que f es morfismo de orden. Lo anterior, pues $0 < 1$, $f(0) = 0 \sqsubset 1 = f(1)$ y $0 < 2$, $f(0) = 0 \sqsubset 2 = f(2)$. Sin embargo, f^{-1} no es morfismo de orden, pues f^{-1} es la identidad en X y $1 \sqsubset 2$ pero $f^{-1}(1) = 1 \not< 2 = f^{-1}(2)$.

(iv) Esta afirmación *es verdadera*. En efecto, si f no es inyectiva, entonces existen $x, y \in P$ distintos y tales que $f(x) = f(y)$. De lo anterior, como $<$ es orden total, se tiene que $x < y$ o $y < x$. Sin embargo, como f es morfismo de orden, se obtiene que $f(x) \sqsubset f(y)$ o $f(y) \sqsubset f(x)$, lo cual contradice la antireflexividad del orden $\sqsubset$. Por lo tanto, f es inyectiva. ■

Ej 5. Sea P un conjunto. Se dice que un orden parcial (antirreflexivo) R en P es *fuertemente inductivo* si y sólo si se satisface:

$$\forall A \subseteq P \left(\forall a \in P \left(R^{-1}[\{a\}] \subseteq A \to a \in A\right) \to P = A\right)$$

Demuestra que para todo orden parcial (antirreflexivo) R en P son equivalentes:

I) R es total y fuertemente inductivo.

II) R es buen orden.

Demostración. (i) $\to$ (ii). Por contradiccion, supóngase que R es total, fuertemente inductivo y que no es buen orden, es decir, existe un subconjunto $A \subseteq P$ no vacío sin R-mínimo. Esto último significa que la proposición "$\forall p \in A\ \exists a \in A\ \neg(p\ R\ a \vee p = a)$" es verdadera, y como R es tricotómica, se tiene que entonces "$\forall p \in A\ \exists a \in A\ (a\ R\ p)$" se satisface. Ahora, se afirma que se cumple:

$$\forall a \in P \left(R^{-1}[\{a\}] \subseteq P \setminus A \to a \in P \setminus A\right)$$

Por contrapuesta, si $a \in P$ y $a \in A$, a consecuencia de que A no tiene R-mínimo, se garantiza la existencia de cierto $b \in A$ con $a\ R\ b$, probando que $R^{-1}[\{a\}] \nsubseteq P \setminus A$. Por lo tanto la proposicion "$\forall a \in P \left(R^{-1}[\{a\}] \subseteq P \setminus A \to a \in P \setminus A\right)$" es verdadera y como R es fuertemente inductivo, se tiene que $P = P \setminus A$. Esto contradice la hipótesis de que A no es vacío. Por lo tanto R es buen orden.

(ii) $\to$ (i). Supóngase que R es buen orden, claramente R es orden total, pues si $x, y \in P$ son cualesquiera, entonces existe el mínimo de $\{x, y\}$. Veamos que R es fuertemente inductivo. Sea $A \subseteq P$ cualquiera y supóngase que "$\forall a \in P \left(R^{-1}[\{a\}] \subseteq A \to a \in A\right)$" es verdadera.

Si $A \neq P$, entonces $P \setminus A$ es no vacío y por lo tanto tiene R-mínimo; a saber, cierto $m \in P \setminus A$. Por contrapuesta en "$\forall a \in P \left(R^{-1}[\{a\}] \subseteq A \to a \in A\right)$" se tiene que $R^{-1}[\{m\}] \nsubseteq A$, lo que significa que existe cierto $a \in P$ tal que $m\ R\ a$ y $a \in P \setminus A$. Lo último contradice que m sea el mínimo de $P \setminus A$. Por lo tanto $P = A$ y R es fuertemente inductivo. ■

Ej 6 Sea $(P, <)$ un conjunto parcialmente ordenado con $P \neq \varnothing$. Supóngase que f y g son funciones con dominio P de modo que para cada $p \in P$ el conjunto $g(p)$ es orden parcial en $f(p)$ y que $f(p) \neq \varnothing$. En el conjunto $X := \bigcup\{f(p) \times \{p\} \mid p \in P\}$ defínase $\sqsubset$ como la relacion:

$$(x, p) \sqsubset (y, q) \quad \text{si y sólo si} \quad (p < q \vee (p = q \wedge x\ g(p)\ y))$$

I) Demuestre que $\sqsubset$ es una relación de orden parcial en X.

II) Demuestre que $\sqsubset$ es un orden total en X y sólo si $(P, <)$ es un conjunto totalmente ordenado y para cada $p \in P$, $g(p)$ es orden total en $f(p)$.

Demostración. (i) Se mostrará que $\sqsubset$ es antireflexiva y transitiva. Para la primera parte, si $(x, p) \in X$, entonces $p \not< p$ dado que $<$ es antireflexiva. Por otra parte, $g(p)$ es un órden parcial en $f(p)$ y $x \in f(p)$, por lo que $x \not{g}(p)\ x$. Por lo tanto, la proposición "$p < p \vee (p = p \wedge x\ g(p)\ x)$" es falsa y con ello $(x, p) \not\sqsubset (x, p)$. Para la transitividad, sean $(x, p), (y, q), (u, v) \in X$ tales que $(x, p) \sqsubset (y, q)$ y $(y, q) \sqsubset (u, v)$. Entonces las proposiciones "$p < q \vee (p = q \wedge x\ g(p)\ y)$" y "$q < v \vee (q = v \wedge y\ g(q)\ u)$" son verdaderas. Se probará la proposición "$p < v \vee (p = v \wedge x\ g(p)\ u)$" mediante los casos:

I) $p < q \wedge q < v$.

II) $p < q \wedge (q = v \wedge y \; g(q) \; u)$.

III) $(p = q \wedge x \; g(p) \; y) \wedge q < v$.

IV) $(p = q \wedge x \; g(p) \; y) \wedge (q = v \wedge y \; g(q) \; u)$.

En los casos (i)-(iii) se obtiene de la transitividad de $<$ que $p < v$ y con ello que $(x, p) \sqsubset (u, v)$. Por otro lado; si se cumple (iv), entonces $p = v$ y además $x \; g(p) \; u$ (por la transitividad del órden parcial $g(p) = g(q) = g(u)$). Por lo tanto, se obtiene que $(x, p) \sqsubset (u, v)$. En cualquier caso, se verifica que $\sqsubset$ es transitiva, y con ello, orden parcial en X.

(ii) $(\rightarrow)$ Supóngase que $\sqsubset$ es orden total. En primer lugar, si $p, q \in P$ son cualesquiera entonces existen $x_0 \in f(p)$ y $y_0 \in f(q)$ pues tales conjuntos son no vacíos. Por lo tanto, como $\sqsubset$ es relación tricotómica, se tiene que $(x_0, p) \sqsubset (y_0, q)$, $(y_0, p) \sqsubset (x_0, q)$ o $(x_0, p) = (y_0, q)$. Pero por definición de $\sqsubset$ se tiene que entonces que $p < q$, $q < p$ o $p = q$. Por lo tanto, P es tricotómica.

Ahora, sea $p \in P$ cualquier elemento. Si $x, y \in f(p)$ son cualesquiera, entonces por ser $\sqsubset$ tricotómico, se tiene que $x = y$, $x \sqsubset y$ o $y \sqsubset x$. Dada la definicion de $\sqsubset$ resulta que $x = y$, $x \; g(p) \; y$ o $y \; g(p) \; x$. En cualquier caso, se concluye que $g(p)$ es un orden total en $f(p)$. Por lo tanto, $g(p)$ es un orden total en $f(p)$ para cada $p \in P$.

$(\leftarrow)$ Supóngase que $<$ es orden total y que para cada $p \in P$, $g(p)$ es un orden total en $f(p)$. Ahora, supóngase que $(x, p), (y, q) \in X$ son distintos, entonces $p \neq q$ o $x \neq y$. Si $p \neq q$, entonces por ser $<$ tricotómico, se tiene que $p < q$, $q < p$. En el primer caso, se obtiene que $(x, p) \sqsubset (y, q)$ y en el segundo caso, se obtiene que $(y, q) \sqsubset (x, p)$. Ahora, si $p = q$, es necesario que $x \neq y$. Por lo tanto, como $g(p) = g(q)$ es un orden total en $f(p) = f(q)$ y $x, y \in f(p)$, se tiene que $x \; g(p) \; y$ o $y \; g(p) \; x$, lo cual muestra por definicion de $\sqsubset$ que $(x, p) \sqsubset (y, q)$ o $(y, q) \sqsubset (x, p)$. En cualquier caso, se concluye que $\sqsubset$ es un tricotómico; y por lo tanto, es orden total. ∎