

Ejercicios de Práctica 2

Profesor: Luis Jesús Trucio Cuevas.
Ayudantes: Jesús Angel Cabrera Labastida,
Hugo Víctor García Martínez.

Conjuntos Abstractos

Los ejercicios de esta sección se deben resolver en la categoría de conjuntos abstractos, \mathcal{S} , a menos que se indique lo contrario.

Ej 1 Sea \mathbf{A} una categoría con productos fibrados. Demuestra que un producto fibrado de $f: A \rightarrow C \leftarrow B: g$ es único salvo iso.

Ej 2 Muestra que el clasificador de subobjetos Ω es coseparador, es decir, dadas $f, g: A \rightarrow B$ si para cualquier $\varphi: B \rightarrow \Omega$ el diagrama

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B \xrightarrow{\varphi} \Omega$$

conmuta, entonces $f = g$.

Ej 3 Sea \mathbf{A} una categoría localmente pequeña con coproductos. Demuestra que

$$\mathbf{A}(A, C) \times \mathbf{A}(B, C) \cong \mathbf{A}(A + B, C).$$

Ej 4 Sean $\text{ev}: A \times \Omega^A \rightarrow \Omega$, $x: X \rightarrow A$ y $m: S \rightarrow A$. Además, considera la característica de m y su nombre en la exponencial, $\ulcorner \chi_m \urcorner: 1 \rightarrow \Omega^A$. Muestra que $x \in_A m$ si y sólo si $\text{ev}(x \times \ulcorner \chi_m \urcorner) = v_{x \times 1}$.

Ej 5 Demuestra las siguientes leyes exponenciales:

i) $A^0 = 1$

ii) $A^1 = A$

iii) $A^{B+C} \cong A^B \times A^C$

iv) $A^{B \times C} \cong (A^B)^C$

Sugerencia: usa, sin demostrar, que la biyección generada por la exponencial es natural en todas las entradas y el lema de Grothendieck-Yoneda.

Ej 6 Considera la categoría de espacios vectoriales sobre un campo k , **Vect**. Da un ejemplo que muestre que el dual de un espacio no es natural, es decir, que el siguiente diagrama no conmuta:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{(\)^*} & V^* \\ \tau \downarrow & & \uparrow \tau^* \\ W & \xrightarrow{(\)^*} & W^* \end{array}$$

Además, muestra que doble dual sí es natural, es decir, que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{(\)^{**}} & V^{**} \\ \tau \downarrow & & \downarrow \tau^{**} \\ W & \xrightarrow{(\)^{**}} & W^{**} \end{array}$$

ZFC

Resuelvan los ejercicios de esta sección utilizando únicamente los axiomas de ZFC vistos en clase (aún NO se puede usar el axioma del infinito)

Ej 7 Dada una relación R , demuestra las siguientes equivalencias:

- i) R es reflexiva si y solo si $\Delta_{\text{dom}(R)} \subseteq R$.
- ii) R es reflexiva en un conjunto A si y solo si $\Delta_A \subseteq R$.
- iii) R es simétrica si y solo si $R^{-1} \subseteq R$.
- iv) R es transitiva si y solo si $R \circ R \subseteq R$.
- v) R es irreflexiva si y solo si $R \cap \Delta_V = \emptyset$.
- vi) R es antisimétrica si y solo si $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_V$.
- vii) R es asimétrica si y solo si $R \cap R^{-1} = \emptyset$.

Ej 8 Para cada inciso, da un ejemplo de relacion R (sobre algún conjunto A) de modo que:

- i) R sea simétrica y antisimétrica a la vez. ¿Tal relación es única?
- ii) R sea reflexiva y antireflexiva a la vez. ¿Tal relación es única?

Ej 9 Si R es un orden parcial sobre A , definimos $R' = R \cup \Delta_A$ como el orden parcial reflexivo asociado; por otro lado si R es reflexivo, definimos $R^* = R \setminus \Delta_A$ como su orden estricto asociado.

Demuestra los siguientes puntos:

- i) Si $A \subseteq B$, entonces $(B \setminus A) \cup A = B$.
- ii) $A \cap B = \emptyset$, entonces $(B \cup A) \setminus A = B$.
- iii) R' es efectivamente un orden parcial reflexivo sobre A .
- iv) R^* es efectivamente un orden estricto sobre A .
- v) $R'^* = R$ cuando R es estricto.
- vi) $R'^* = R$ cuando R es reflexivo. Esto junto al inciso anterior prueba que los órdenes estrictos y reflexivos están asociados mediante una biyección.

Ej 10 Dadas R, S relaciones transitivas y antisimétricas, definimos $R \sim S$ como $\exists A(R \Delta S = \Delta_A)$. Además, definamos al conjunto $\mathcal{X}_A = \{R \subseteq A^2 \mid R \text{ es transitiva y antisimétrica}\}$.

Demuestra los siguientes incisos:

- i) \sim es reflexiva, transitiva y simétrica.
- ii) $\sim|_{\mathcal{X}_A}$ es una relación de equivalencia sobre \mathcal{X}_A . A partir de aquí, nos referiremos a esta relación como \sim .
- iii) Dada $R \in \mathcal{X}_A$, $([R]_{\sim}, \subseteq)$ es un retículo completo. Prueba que el infimo y supremo son la intersección y unión respectivamente siempre que el conjunto es no vacío.
- iv) Prueba que el mínimo es un orden estricto y que el máximo es un orden reflexivo.
- v) Prueba que el el mínimo y máximo están asociados.
- vi) Si $R \sim S$, aRb y bSc entonces $a(R \cap S)c$.

Ej 11 Sean $(P, <)$ y (Q, \sqsubset) conjuntos totalmente ordenados. Sea $X := P \times Q$ y defínase la relación R en X como sigue:

$$(p, q) R (x, y) \quad \text{si y sólo si} \quad ((p < x) \vee (p = x \wedge q \sqsubset y))$$

Demuestre que (X, R) es un conjunto totalmente ordenado.

Ej 12 Sean $(P, <)$ y (Q, \sqsubset) conjuntos totalmente ordenados. Sea $X := (P \times \{0\}) \cup (Q \times \{1\})$ y defínase la relación R en X como sigue:

$$(x, s) R (y, t) \quad \text{si y sólo si} \quad ((s = 0 \wedge t = 1))$$

Demuestre que (X, R) es un conjunto totalmente ordenado.

Ej 13 Sean P un conjunto y \leq un orden parcial reflexivo en P . Encuentra una función $f : P \rightarrow \mathcal{P}(P)$ inyectiva de modo que para cualesquiera $p, q \in P$ se tenga $p \leq q$ si y sólo si $f(p) \subseteq f(q)$.

Ej 14 Sean $(P, <)$ y (Q, \sqsubset) conjuntos parcialmente ordenados y $f : P \rightarrow Q$ tal que para cualesquiera $x, y \in P$: si x, y , entonces $f(x) \sqsubset f(y)$ (estas funciones se llaman “*morfismos de orden*”). Demuestra; o refuta mediante un contraejemplo, las siguientes afirmaciones.

- i) Si $p \in P$ es el mínimo de $(P, <)$, entonces $f(p)$ es el mínimo de (Q, \sqsubset) .
- ii) Si $p \in P$ $<$ -minimal de P , entonces $f(p)$ es \sqsubset -minimal de Q .
- iii) Si f es biyectiva, entonces f^{-1} es un morfismo de orden.
- iv) Si $(P, <)$ es un conjunto totalmente ordenado, entonces f es inyectiva.

Ej 15 Sean (A, \leq) una retícula y X un conjunto. Se define en A^X la relación:

$$\preceq := \{(f, g) \in (A^X)^2 \mid \forall x(x \in X \rightarrow f(x) \leq g(x))\}$$

Demuestra que (A^X, \preceq) es una retícula.

Ej 16 Sea P un conjunto. Se dice que un orden parcial (antirreflexivo) R en P es *fuertemente inductivo* si y sólo si se satisface:

$$\forall A (\forall a (R^{-1}[\{a\}] \subseteq A \rightarrow a \in A) \rightarrow P \subseteq A)$$

Demuestra que para todo orden parcial (antirreflexivo) R en P son equivalentes:

- i) R es total y fuertemente inductivo.
- ii) R es buen orden.