Conjuntos

Axiomas Básicos

Ej. 1. Demuestra que el enunciado $\varphi \leftrightharpoons \forall x \exists y(x \in y \wedge \forall z \forall w((z \in w \wedge w \in y) \to z \in y))$ implica el axioma de unión. *Indica claramente cuáles axiomas de ZFC utilizas en la demostración.*

Ej. 2. Sea $\psi(x)$ una fórmula de la teoría de conjuntos. Demuestre que, si $z := \{y \mid \exists x\,(\psi(x) \to y \in x)\}$ es un conjunto, entonces $\{x \mid \psi(x)\}$ es un conjunto. *Indica claramente cuáles axiomas de ZFC utilizas en la demostración.*

Relaciones y Funciones

Ej. 3. Demuestra que toda relación es una unión de funciones.

Ej. 4. Sean $f : \omega \to 2$ y $P := \{f \restriction n \in \mathscr{P}(\omega \times 2) \mid n \in \omega\}$. Demuestra que $(P, \subseteq)$ es un conjunto bien ordenado.

Dominancia y CSB

Ej. 5. Prueba que 2^ω y ω^ω son equipotentes.

Ej. 6. Sean $(B, <)$ un conjunto bien ordenado y x, A conjuntos con $x \subseteq A$. Prueba que, si existe $f : B \to A$ sobreyectiva, entonces $x \preccurlyeq B$.

Copos

Ej. 7. Sea $(A, <)$ una retícula (latiz). Demuestra que si $(A, <)$ no es distributiva, entonces existe un subconjunto $B = \{a, b, c, d, e\} \subseteq A$ de modo que $<\restriction B$ es alguno de los siguientes:

a) Diamante: $\{(a, b), (b, e), (a, c), (c, e), (a, d), (d, e), (a, e)\}$

b) Pentagono: $\{(a, e), (a, d), (d, e), (a, c), (c, e), (a, b), (b, c), (b, e)\}$

Ej. 8. Pruebe que si un orden parcial $(P, <)$ es fuertemente inductivo, entonces cada $A \subseteq P$ no vacío posee un $<$-minimal.

Naturales e Inducción

Ej. 9. Sean $f : X \to \omega$ y $Y \subseteq X$ cualesquiera. Demuestra que si para cada $x \in X$ se satisface la proposición: $\forall y \in X(f(y) < f(x) \to y \in Y) \to x \in Y$, entonces $Y = X$.

Ej. 10. Un conjunto X es Tarski-finito si y sólo si para cada $A \subseteq X$ no vacío, existe $y \in A$ de modo que para cada $a \in A$, no ocurre $y \subsetneq a$. Demuestra que todo natural $n \in \omega$ es Tarski-finito.

Ej. 11. Sea X un conjunto. Una $\in, X$-cadena es una función f con dominio algún natural $n \in \omega$ que cumple: $f(0) \in X$; y, para cualesquiera $m, k \in n$ con $m < k$, se cumple $f(k) \in f(m)$.

Es un hecho que $C = \bigcup\{\mathrm{ima}(f) \mid f \text{ es } \in, X \text{ cadena}\}$ es un conjunto. Pruebe que C es un conjunto transitivo tal que $X \subseteq C$.

Recursión

Ej. 12. Utilizando *únicamente* el Primer Teorema de Recursión (1TR), demuestre que existe una función $F : \omega \to \omega$ de modo que $F(0) = 1$; y, para cada $n \in \omega$, $F(s(n)) = s(n) \cdot F(n)$.

Hint: Considere $X := \omega \times \omega$ *en el 1TR, con el punto inicial* $(1,1)$ *y defina una dinámica adecuada* $g : X \to X$ *de modo que al proyectar* g *a la primera entrada, consiga la función* F.

Ej. 13. Sean X un conjunto y $f : X \to X$. Demuestre que existe una función $g : \omega \times X \to X$ de modo que para cada $(n, x) \in \omega \times X$ se cumplen $g(0, x) = x$ y $g(s(n), x) = g(n, f(x))$.

Ej. 14. Sea $f\colon X \to X$ una función y $A \subseteq X$. Consideremos, mediante el teorema de recursión, la (única) función $g\colon \mathbb{N} \to \mathscr{P}(X)$ de modo que $g(0) = A$ y, para cada $n \in \omega$, $g(s(n)) = g(n) \cup f[g(n)]$. Definimos a los conjuntos $A_* = \bigcup \mathrm{im}(g)$, y $A^* = \bigcap\{B \subseteq X \mid A \subseteq B \wedge f[B] \subseteq B\}$ (*llamados las cerraduras inferiores y superiores de* A *bajo* f*, respectivamente*). Demuestra que:

$$A^* = A_* \ , \quad A \subseteq A^* \quad \text{y} \quad f[A^*] \subseteq A^*$$

Conjuntos Abstractos

Los ejercicios de esta sección se deben resolver en la categoría de conjuntos abstractos, $\mathscr{S}$, a menos que se indique lo contrario.

Ej. 1. Sea $f\colon A \to B$. Definimos la gráfica de f como

$$\begin{tikzcd}
A & A \times B \arrow[l, "p_A"'] \arrow[r, "p_B"] & B \\
& A. \arrow[ul, "id"] \arrow[u, dashed, "G_f"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Demuestra que G_f es mono.

Ej. 2. Sean $f, g\colon A \to B$ tales que $G_f = G_g$. Demuestra que $f = g$.

Ej. 3. Demuestra que $A + 0 \cong A$.

Ej. 4. Demuestra que toda flecha de la forma $0 \to A$ es inyectiva (por lo tanto mono). Además muestra que si A no tiene un elementos globales, entonces $0 \to A$ es biyectiva (por lo tanto iso).

Ej. 5. Una flecha $f\colon A \to B$ es constante si se factoriza a través de 1, es decir, existe $b\colon 1 \to B$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "!_A"'] & & B \\
& 1. \arrow[ur, "b"'] &
\end{tikzcd}$$

Demuestra que f es constante si y sólo si para cualesquiera $a_1, a_2\colon 1 \to A$ se satisface $fa_1 = fa_2$.

Ej. 6. Demuestra que las inclusiones a un coproducto son monos. Esto es, si $i_A : A \to A + B \leftarrow B : i_B$ es un diagrama de coproducto, entonces i_A es mono.

Ej. 7. Sea $m \colon T \rightarrowtail B$ un subobjeto y $f \colon A \to B$. Encuentra la flecha característica de la imagen inversa de m.

Ej. 8. Sea **A** una categoría. Considera flechas $f \colon A \to B$ y $r, s \colon B \to A$ tales que $rf = id_A$ y $fs = id_B$. Demuestra que $r = s$.

Ej. 9. Sea **A** una categoría. Si $fs = id_B$ y f es mono, entonces s es inversa, por los dos lados, de f.

Ej. 10. Sea $f \colon A \to B$. La fibra de $b \colon 1 \to B$ es el producto fibrado

$$\begin{tikzcd} f^{-}1(b) \arrow[r, "m"'] \arrow[d, tail] & 1 \arrow[d, "b"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B. \end{tikzcd}$$

Demuestra que si s es una sección de f, entonces $sb \in_A m$, pra todo $b \colon 1 \to B$.

Ej. 11. Demuestra las siguientes leyes exponenciales:

I) $A^0 = 1$

II) $A^1 = A$

III) $A^{B+C} \cong A^B \times A^C$

IV) $A^{B \times C} \cong (A^B)^C$

Ej. 12. Sea **A** una categoría localmente pequeña con coproductos. Demuestra que

$$\mathbf{A}(A, C) \times \mathbf{A}(B, C) \cong \mathbf{A}(A + B, C).$$

Ej. 13. Demuestra que $f \colon A \to B$ es epi si y sólo si $\Omega^f \colon \Omega^B \to \Omega^A$ es mono.