

Segunda Tarea Examen

Profesor: Luis Jesús Trucio Cuevas.

Ayudantes: Jesús Angel Cabrera Labastida,
Hugo Víctor García Martínez.

- i) Se pueden usar resultados vistos en clase, **siempre y cuando** se mencione claramente cuándo y dónde se usan.
- ii) Cada ejercicio tiene un valor de **dos puntos** para un total de diez. Hay un ejercicio adicional con valor de **un punto**, éste se calificará únicamente con cero o su valor total.

Conjuntos Abstractos

Los ejercicios de esta sección se deben resolver en la categoría de conjuntos abstractos, \mathcal{S} .

Ej 1 Muestra que el clasificador de subobjetos Ω es coseparador, es decir, dadas $f, g: A \rightarrow B$ si para cualquier $\varphi: B \rightarrow \Omega$ el diagrama

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B \xrightarrow{\varphi} \Omega \quad (1)$$

conmuta, entonces $f = g$.

Ej 2 Sean $ev: A \times \Omega^A \rightarrow \Omega$, $x: X \rightarrow A$ y $m: S \rightarrow A$. Además, considera la característica de m y su nombre en la exponencial, $\lceil \chi_m \rceil: 1 \rightarrow \Omega^A$. Muestra que $x \in_A m$ si y sólo si $ev(x \times \lceil \chi_m \rceil) = v_{X \times 1}$.

ZFC

Resuelvan los ejercicios de esta sección utilizando únicamente los axiomas de ZFC vistos en clase (aún NO se puede usar el axioma del infinito)

Ej 3 Si R es un orden parcial sobre A , definimos $R' = R \cup \Delta_A$ como el orden parcial reflexivo asociado; por otro lado si R es reflexivo, definimos $R^* = R \setminus \Delta_A$ como su orden estricto asociado.

Demuestra los siguientes puntos:

- i) Si $A \subseteq B$, entonces $(B \setminus A) \cup A = B$.
- ii) $A \cap B = \emptyset$, entonces $(B \cup A) \setminus A = B$.
- iii) R' es efectivamente un orden parcial reflexivo sobre A .
- iv) R^* es efectivamente un orden estricto sobre A .
- v) $R'^* = R$ cuando R es estricto.
- vi) $R^{**} = R$ cuando R es reflexivo. Esto junto al inciso anterior prueba que los órdenes estrictos y reflexivos están asociados mediante una biyección.

Ej 4 Sean $(P, <)$ y (Q, \sqsubset) conjuntos totalmente ordenados. Sea $X := P \times Q$ y defínase la relación R en X como sigue:

$$(p, q) R (x, y) \quad \text{si y sólo si} \quad ((p < x) \vee (p = x \wedge q \sqsubset y))$$

Demuestre que (X, R) es un conjunto totalmente ordenado.

Ej 5 Sean $(P, <)$ y (Q, \sqsubset) conjuntos parcialmente ordenados y $f : P \rightarrow Q$ tal que para cualesquiera $x, y \in P$: si $x < y$, entonces $f(x) \sqsubset f(y)$ (estas funciones se llaman “*morfismos de orden*”). Demuestra; o refuta mediante un contraejemplo, las siguientes afirmaciones.

- i) Si $p \in P$ es el mínimo de $(P, <)$, entonces $f(p)$ es el mínimo de (Q, \sqsubset) .
- ii) Si $p \in P$ $<$ -minimal de P , entonces $f(p)$ es \sqsubset -minimal de Q .
- iii) Si f es biyectiva, entonces f^{-1} es un morfismo de orden.
- iv) Si $(P, <)$ es un conjunto totalmente ordenado, entonces f es inyectiva.

Ej 6 Sea P un conjunto. Se dice que un orden parcial (antirreflexivo) R en P es *fuertemente inductivo* si y sólo si se satisface:

$$\forall A \subseteq P \left(\forall a \in P \left(R^{-1}[[a]] \subseteq A \rightarrow a \in A \right) \rightarrow P = A \right)$$

Demuestra que para todo orden parcial (antirreflexivo) R en P son equivalentes:

- i) R es total y fuertemente inductivo.
- ii) R es buen orden.

Ej Extra Sea $(P, <)$ un conjunto parcialmente ordenado con $P \neq \emptyset$. Supóngase que f y g son funciones con dominio P de modo que para cada $p \in P$ el conjunto $g(p)$ es orden parcial en $f(p)$ y que $f(p) \neq \emptyset$. En el conjunto $X := \bigcup \{f(p) \times \{p\} \mid p \in P\}$ defínase \sqsubset como la relacion:

$$(x, p) \sqsubset (y, q) \quad \text{si y sólo si} \quad (p < q \vee (p = q \wedge x g(p) y))$$

- i) Demuestre que \sqsubset es una relación de orden parcial en X .
- ii) Demuestre que \sqsubset es un orden total en X y sólo si $(P, <)$ es un conjunto totalmente ordenado y para cada $p \in P$, $g(p)$ es orden total en $f(p)$.

Solutions to the Exercises

Solution 1

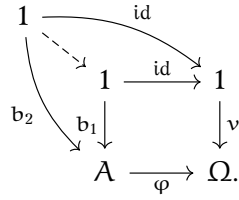
Primero veamos que el enunciado es cierto cuando $A = 1$. Esto es, si suponemos que $b_1, b_2 : 1 \rightarrow B$ son tales que

$$1 \xrightarrow[b_2]{b_1} B \xrightarrow{\varphi} \Omega \quad (2)$$

conmuta, entonces veamos que $b_1 = b_2$.

Como toda flecha que sale del terminal es mono y Ω es clasificador de subobjetos, entonces b_1 tiene una característica, digamos $\varphi : B \rightarrow \Omega$. Por la hipótesis en (2) y la propiedad universal del

producto fibrado tenemos que el siguiente diagrama conmuta:



Como la única flecha del terminal a sí mismo es la identidad, entonces $b_1 = b_2$.

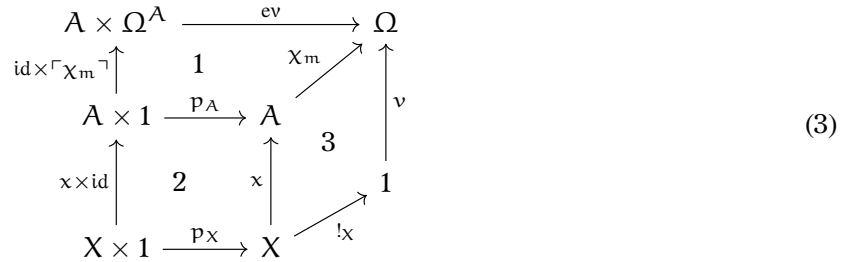
Ahora sea A arbitrario y supongamos que $f, g: A \rightarrow B$ son tales que para cualquier $\varphi: B \rightarrow \Omega$ el diagrama (1) conmuta. Para ver que $f = g$ usaremos que 1 es separador, es decir, veremos que para cualquier $\alpha: 1 \rightarrow A$ se satisface $f\alpha = g\alpha$. Por la hipótesis sobre f y g tenemos que el siguiente diagrama conmuta:

$$1 \xrightarrow[\text{ga}]{\text{fa}} B \xrightarrow{\varphi} \Omega.$$

Así, por lo que hicimos antes podemos concluir que $f\alpha = g\alpha$.

Solution 2

Primero consideramos el siguiente diagrama



La parte 1 conmuta por la definición de γ_m y la parte 2 por definición de la flecha $x \times \text{id}$. Si el diagrama 3 conmuta, entonces el diagrama exterior es conmutativo. Viceversa, si el diagrama exterior es conmutativo, entonces el diagrama 3 conmuta. En efecto, para ver que 3 conmuta es suficiente ver que conmuta desde $X \times 1$, ya que p_X es iso. Si seguimos el diagrama podemos obtener la conmutatividad que queremos. Las ecuaciones que lo muestran son:

$$\begin{aligned} v!x p_X &= \text{ev} (x \times \gamma_m) (x \times \text{id}) && \text{diagrama exterior} \\ &= \gamma_m p_A (x \times \text{id}) && \text{parte 1} \\ &= \gamma_m x p_X && \text{parte 2.} \end{aligned}$$

Con esto hemos concluido que 3 conmuta si y sólo si el exterior conmuta.

Ahora, si suponemos que $x \in_A m$, entonces existe $h: X \rightarrow S$ que hace conmutar al siguiente diagrama



De esto tenemos que la parte 3 de diagrama (3) conmuta. Así, el exterior conmuta. Por lo tanto $ev(x \times \lceil \chi_m \rceil) = v_{X \times 1}$.

Por el lado contrario, si $ev(x \times \lceil \chi_m \rceil) = v_{X \times 1}$, entonces el exterior del diagrama (3) conmuta. Así, la parte 3 del mismo diagrama es conmutativa. Esta parte es el exterior del diagrama (4). Por lo que podemos usar la propiedad universal del producto fibrado para obtener la existencia de $h: X \rightarrow S$ que hace conmutar el diagrama (4). Por lo tanto, $x \in_A m$.