

Tarea Examen 1

Profesor: Luis Jesús Turcio Cuevas

Ayudantes: Jesús Angel Cabrera Labastida,
Hugo Víctor García Martínez

- i) La tarea se entrega de forma **presencial** durante la clase del **7 de marzo**.
 - ii) Los equipos para realizar la tarea deberán contar con **mínimo 4** integrantes y **máximo 6**.
 - iii) Se pueden usar resultados vistos en clase, **siempre y cuando** se mencione claramente cuándo y dónde se usan.
 - iv) Cada ejercicio tiene un valor de **dos puntos** para un total de diez. Hay un ejercicio adicional con valor de **un punto**, éste se calificará únicamente con cero o su valor total.
-

Conjuntos Abstractos

Los ejercicios de esta sección se deben resolver en la categoría de conjuntos abstractos, \mathcal{S} , a menos que se indique lo contrario.

Ejercicio 1 Demuestra que $f: A \rightarrow B$ es mono si y sólo si f es inyectiva.

Ejercicio 2 Sea $m: S \rightarrow A$ un subobjeto y considera su flecha característica $\chi_m: A \rightarrow \Omega$. Demuestra que para cualquier elemento generalizado $x: X \rightarrow A$ se satisface: $x \in_A m \iff \chi_m x = v_x$, donde v_x es la composición de $!_X: X \rightarrow 1$ con $v: 1 \rightarrow \Omega$.

ZFC

Para los ejercicios de esta sección se podrán utilizar únicamente los axiomas de ZFC vistos hasta el momento en clase.

Ejercicio 3 Demuestre las siguientes equivalencias o implicaciones. En cada inciso indique claramente qué axiomas de ZFC se utilizan durante la prueba.

- i) El axioma de extensionalidad implica el enunciado $\forall x \forall y (\forall w (x \in w \leftrightarrow y \in w) \rightarrow x = y)$.
- ii) El enunciado $\forall x \exists p \forall w (\forall z (z \in x \rightarrow z \in w) \rightarrow w \in p)$ es equivalente al axioma de potencia.
- iii) El enunciado $\forall x \forall y \exists p \forall w (w \in p \leftrightarrow (p \in x \vee p = y))$ implica el axioma del par.

Ejercicio 4 Todas las colecciones de este ejercicio son conjuntos. Prueba dos de los siguientes incisos:

- i) $x \subseteq \mathcal{P}(y)$ si y sólo si $\bigcup x \subseteq y$.
- ii) Si $x \neq \emptyset$, entonces $y \in \bigcap \{\mathcal{P}(a) \mid a \in x\}$ ocurre sólo si $y \subseteq \bigcap x$.
- iii) $\bigcup \{\mathcal{P}(a) \mid a \in x\} \subseteq \mathcal{P}(\bigcup x)$ pero no siempre $\bigcup \{\mathcal{P}(a) \mid a \in x\} \neq \mathcal{P}(\bigcup x)$.
- iv) $(\bigcup x) \cap (\bigcup y) = \bigcup \{a \cap b \mid (a, b) \in x \times y\}$.

Ejercicio 5 Sean x un conjunto y f una función con dominio x . Prueba lo siguiente:

- i) Si $A \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ es no vacío, entonces $f[\bigcap A] \subseteq \bigcap \{f[a] \mid a \in A\}$.
- ii) f es inyectiva si y sólo si para cada $A \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ no vacío se tiene que $\bigcap \{f[a] \mid a \in A\} \subseteq f[\bigcap A]$.

Adicional

Ejercicio Sean X, Y conjuntos y $f : X \rightarrow Y$. Se define la función $g : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ para cada $a \in \mathcal{P}(X)$ como $g(a) = \{y \in Y \mid f^{-1}[\{y\}] \subseteq a\}$.

- i) Demuestra que si $a \in \mathcal{P}(X)$ y $b \in \mathcal{P}(Y)$, entonces $b \subseteq g(a)$ si y sólo si $f^{-1}[b] \subseteq a$.
- ii) Prueba que para todo $A \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \setminus \{\emptyset\}$ se tiene $g(\bigcap A) = \bigcap \{g(a) \mid a \in A\}$.