# Primera Tarea-Examen

## Conjuntos Abstractos

**Ejercicio 1** Sean $\mathcal{C}$ una categoría con objeto terminal $1$ y sea $A \in \mathcal{C}$ un objeto. Muestra que toda flecha de la forma $m : 1 \to A$ es mono.

**Ejercicio 2** Sean $\mathcal{C}$ una categoría y $T \in \mathcal{C}$ cualquier objeto. Demuestra que si $T$ tiene un elemento global, entonces $T$ es separador.

**Ejercicio 3** Sean $\mathcal{S}$ la categoría de conjuntos abstractos y $f\colon A \to B \in \mathcal{S}$. Demuestra que $f$ es mono si y sólo si $f$ es inyectiva. Es decir, en $\mathcal{S}$, mono es equivalente a inyectiva.

# ZFC

## Fórmulas y Clases

**Ejercicio 4** Los siguientes enunciados son versiones "débiles" de los axiomas de par y potencia, respectivamente. Demuestra que éstos son equivalentes a sus contrapartes, los axiomas "no débiles" del par y potencia, respectivamente. En cada inciso indica claramente cuáles axiomas de ZFC se utilizan para probar la equivalencia.

I) $\forall x\forall y\exists p\forall w((w = x \lor w = y) \to w \in p)$ es al axioma débil del par.

II) $\forall x\exists p\forall w(\forall z(z \in x \to z \in w) \to w \in p)$ es el axioma débil del potencia.

**Ejercicio 5** Sea $A$ un conjunto. Da condiciones necesarias y suficientes sobre cómo debe ser $A$ para que la cualesquiera $\{x \mid \forall z\forall y((z \in A \land y \in z) \to x \in y)\}$ sea conjunto.

**Ejercicio 6** Para cada inciso escribe una fórmula de primer orden en la teoría de conjuntos que describa el correspondiente concepto. En las fórmulas *únicamente* se pueden utilizar símbolos lógicos, paréntesis, cuantificadores, variables y el símolo '$\in$'; sin abreviaturas de lenguaje como '$\subseteq$', '$x = \varnothing$', '$x = \{y\}$', etcétera. Se puede abreviar una fórmuila *sólo si* ésta ya se escribió en un inciso anterior.

I) $x$ es el conjunto par de $y$ y $z$.

II) $x$ es el par ordenado de $y$ y $z$.

III) $x$ es par ordenado.

IV) $x$ es la primera entrada del par ordenado $y$.

V) $x$ es la segunda entrada de un par ordenado.

VI) $x$ es una relación.

VII) $x$ es el dominio de la relación $y$.

VIII) $x$ es el campo de la relación $y$.

IX) $x = 0$.

X) $x = 1$.

XI) $x = 4$.

XII) $x$ es la intersección de $y$.

XIII) $x$ es elemento de la intersección de $y$.

XIV) $x$ es la intersección de la intersección de $y$.

Sólo hay que dar las fórmula, no es necesario ningún tipo de justificación.

## Conjuntos y álgebra de conjuntos

**Ejercicio 7** Es un hecho que todas las colecciones de este ejercicio son conjuntos. Demuestra o refuta (con un contraejemplo) cuatro de los siguientes incisos, prueba todas tus afirmaciones.

I) $\bigcup\{\{x\},\{y\}\} = \{x, y\}$.

II) $\bigcup\bigcup\bigcup\{\{\{x\}\}\} = x$.

III) $\bigcup\{x\} = \varnothing$ y $x = \varnothing$ son equivalentes.

IV) Se da la igualdad $(x, y) = (a, b)$ únicamente si $x = a$ y $y = b$.

V) $\{x, y\} = \{a, b\}$ si y sólo si $x = a$ y $y = b$.

VI) $\mathscr{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$.

VII) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \notin \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

VIII) Se tiene $\{\{x\}, \{x, y\}, \{x, y, z\}\} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ sólo cuando $x = a$, $y = b$ y $z = c$.

**Ejercicio 8** Determina cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas, justifica tu respuesta con una demostración o un contraejemplo. Demuestra todas tus afirmaciones.

I) Para todo conjunto $x$ existe un conjunto $y$ tal que $x \not\subseteq y$

II) Para todo conjunto $x$ existe un conjunto $y$ tal que $x \notin y$

**Ejercicio 9** Todas las colecciones de este ejercicio son conjuntos. Prueba dos de los siguientes incisos:

I) $x \subseteq \mathscr{P}(y)$ si y sólo si $\bigcup x \subseteq y$.

II) Si $x \neq \varnothing$, $y \in \bigcap\{\mathscr{P}(a) \mid a \in x\}$ ocurre sólo si $y \subseteq \bigcup x$.

III) $\bigcup\{\mathscr{P}(a) \mid a \in x\} \subseteq \mathscr{P}(\bigcup x)$ pero no siempre $\bigcup\{\mathscr{P}(a) \mid a \in x\} \neq \mathscr{P}(\bigcup x)$.

IV) $(\bigcup x) \cap (\bigcup y) = \bigcup\{a \cap b \mid (a, b) \in x \times y\}$.

**Ejercicio 10** Sean $X, Y, \mathscr{F}$ conjuntos tales que $\mathscr{F} \neq \varnothing$ y $f \colon X \to Y$ una función. Demuestra que las siguientes clases son conjuntos

I) $\langle \bigcup \mathscr{G} \mid \mathscr{G} \in \mathscr{F} \rangle$

II) $\langle x \mid \exists v \exists w \exists y \exists z (v \in \mathscr{F} \wedge w \in v \wedge y \in w \wedge z \in y \wedge x \in z) \rangle$

III) $\langle x \mid \forall \mathscr{G} \in \mathscr{F} \exists A \in \mathscr{G} (x \in A) \rangle$

IV) $\langle \mathscr{P}(A) \mid A \in \mathscr{F} \rangle$

V) $\langle A \times \mathscr{P}(A) \mid A \in \mathscr{F} \rangle$

VI) $\langle B \setminus (f[A]) \mid A \subseteq X \wedge B \in \mathscr{F} \rangle$