Primera Tarea-Examen

Conjuntos Abstractos

Ejercicio 1 Sean $\mathcal{C}$ una categoría con objeto terminal 1 y sea $A \in \mathcal{C}$ un objeto. Muestra que toda flecha de la forma $m : 1 \to A$ es mono.

Ejercicio 2 Sean $\mathcal{C}$ una categoría y $T \in \mathcal{C}$ cualquier objeto. Demuestra que si T tiene un elemento global, entonces T es separador.

Ejercicio 3 Sean $\mathcal{S}$ la categoría de conjuntos abstractos y $f\colon A \to B \in \mathcal{S}$. Demuestra que f es mono si y sólo si f es inyectiva. Es decir, en $\mathcal{S}$, mono es equivalente a inyectiva.

ZFC

Fórmulas y Clases

Ejercicio 4 Los siguientes enunciados son versiones "débiles" de los axiomas de par y potencia, respectivamente. Demuestra que éstos son equivalentes a sus contrapartes, los axiomas "no débiles" del par y potencia, respectivamente. En cada inciso indica claramente cuáles axiomas de ZFC se utilizan para probar la equivalencia.

i) $\forall x \forall y \exists p \forall w((w = x \lor w = y) \to w \in p)$ es al axioma débil del par.

ii) $\forall x \exists p \forall w(\forall z(z \in x \to z \in w) \to w \in p)$ es el axioma débil del potencia.

Ejercicio 5 Sea A un conjunto. Da condiciones necesarias y suficientes sobre cómo debe ser A para que la cualesquiera $\{x \mid \forall z \forall y((z \in A \land y \in z) \to x \in y)\}$ sea conjunto.

Ejercicio 6 Para cada inciso escribe una fórmula de primer orden en la teoría de conjuntos que describa el correspondiente concepto. En las fórmulas *únicamente* se pueden utilizar símbolos lógicos, paréntesis, cuantificadores, variables y el símolo '$\in$'; sin abreviaturas de lenguaje como '$\subseteq$', '$x = \varnothing$', '$x = \{y\}$', etcétera. Se puede abreviar una fórmuila *sólo si* ésta ya se escribió en un inciso anterior.

i) x es el conjunto par de y y z.

ii) x es el par ordenado de y y z.

iii) x es par ordenado.

iv) x es la primera entrada del par ordenado y.

v) x es la segunda entrada de un par ordenado.

vi) x es una relación.

vii) x es el dominio de la relación y.

viii) x es el campo de la relación y.

ix) $x = 0$.

x) $x = 1$.

xi) $x = 4$.

xii) x es la intersección de y.

xiii) x es elemento de la intersección de y.

xiv) x es la intersección de la intersección de y.

Sólo hay que dar las fórmula, no es necesario ningún tipo de justificación.

Conjuntos y álgebra de conjuntos

Ejercicio 7 Es un hecho que todas las colecciones de este ejercicio son conjuntos. Demuestra o refuta (con un contraejemplo) cuatro de los siguientes incisos, prueba todas tus afirmaciones.

i) $\bigcup\{\{x\}, \{y\}\} = \{x, y\}$.

ii) $\bigcup\bigcup\bigcup\{\{\{x\}\}\} = x$.

iii) $\bigcup\{x\} = \varnothing$ y $x = \varnothing$ son equivalentes.

iv) Se da la igualdad $(x, y) = (a, b)$ únicamente si $x = a$ y $y = b$.

v) $\{x, y\} = \{a, b\}$ si y sólo si $x = a$ y $y = b$.

vi) $\mathscr{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$.

vii) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \notin \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

viii) Se tiene $\{\{x\}, \{x, y\}, \{x, y, z\}\} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ sólo cuando $x = a$, $y = b$ y $z = c$.

Ejercicio 8 Determina cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas, justifica tu respuesta con una demostración o un contraejemplo. Demuestra todas tus afirmaciones.

i) Para todo conjunto x existe un conjunto y tal que $x \not\subseteq y$

ii) Para todo conjunto x existe un conjunto y tal que $x \notin y$

Ejercicio 9 Todas las colecciones de este ejercicio son conjuntos. Prueba dos de los siguientes incisos:

I) $x \subseteq \mathscr{P}(y)$ si y sólo si $\bigcup x \subseteq y$.

II) Si $x \neq \varnothing$, $y \in \bigcap\{\mathscr{P}(a) \mid a \in x\}$ ocurre sólo si $y \subseteq \bigcup x$.

III) $\bigcup\{\mathscr{P}(a) \mid a \in x\} \subseteq \mathscr{P}(\bigcup x)$ pero no siempre $\bigcup\{\mathscr{P}(a) \mid a \in x\} \neq \mathscr{P}(\bigcup x)$.

IV) $(\bigcup x) \cap (\bigcup y) = \bigcup\{a \cap b \mid (a, b) \in x \times y\}$.