

# Segunda Tarea Examen

Profesor: Luis Jesús Trucio Cuevas.

Ayudantes: Jesús Angel Cabrera Labastida,  
Hugo Víctor García Martínez.

- i) La tarea se entrega de forma **presencial** durante la clase del **7 de marzo**.
- ii) Los equipos para realizar la tarea deberán contar con **mínimo 4** integrantes y **máximo 6**.
- iii) Se pueden usar resultados vistos en clase, **siempre y cuando** se mencione claramente cuándo y dónde se usan.
- iv) Cada ejercicio tiene un valor de **dos puntos** para un total de diez. Hay un ejercicio adicional con valor de **un punto**, éste se calificará únicamente con cero o su valor total.

## Conjuntos Abstractos

Los ejercicios de esta sección se deben resolver en la categoría de conjuntos abstractos,  $\mathcal{S}$ .

**Ej 1** Muestra que el clasificador de subobjetos  $\Omega$  es coseparador, es decir, dadas  $f, g: A \rightarrow B$  si para cualquier  $\varphi: B \rightarrow \Omega$  el diagrama

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B \xrightarrow{\varphi} \Omega$$

conmuta, entonces  $f = g$ .

**Ej 2** Sean  $ev: A \times \Omega^A \rightarrow \Omega$ ,  $x: X \rightarrow A$  y  $m: S \rightarrow A$ . Además, considera la característica de  $m$  y su nombre en la exponencial,  $\lceil \chi_m \rceil: 1 \rightarrow \Omega^A$ . Muestra que  $x \in_A m$  si y sólo si  $ev(x \times \lceil \chi_m \rceil) = v_{X \times 1}$ .

## ZFC

Resuelvan los ejercicios de esta sección utilizando únicamente los axiomas de ZFC vistos en clase (aún NO se puede usar el axioma del infinito)

**Ej 3** Sean  $(P, <)$  y  $(Q, \sqsubset)$  conjuntos totalmente ordenados. Sea  $X := P \times Q$  y defínase la relación  $R$  en  $X$  como sigue:

$$(p, q) R (x, y) \quad \text{si y sólo si} \quad ((p < x) \vee (p = x \wedge q \sqsubset y))$$

Demuestre que  $(X, R)$  es un conjunto totalmente ordenado.

**Ej 4** Sean  $(P, <)$  y  $(Q, \sqsubset)$  conjuntos parcialmente ordenados y  $f: P \rightarrow Q$  tal que para cualesquiera  $x, y \in P$ : si  $x, y$ , entonces  $f(x) \sqsubset f(y)$  (estas funciones se llaman “*morfismos de orden*”). Demuestra; o refuta mediante un contraejemplo, las siguientes afirmaciones.

- i) Si  $p \in P$  es el mínimo de  $(P, <)$ , entonces  $f(p)$  es el mínimo de  $(Q, \sqsubset)$ .
- ii) Si  $p \in P$   $<$ -minimal de  $P$ , entonces  $f(p)$  es  $\sqsubset$ -minimal de  $Q$ .
- iii) Si  $f$  es biyectiva, entonces  $f^{-1}$  es un morfismo de orden.
- iv) Si  $(P, <)$  es un conjunto totalmente ordenado, entonces  $f$  es inyectiva.

**Ej 5** Sea  $P$  un conjunto. Se dice que un orden parcial (antirreflexivo)  $R$  en  $P$  es *fuertemente inductivo* si y sólo si se satisface:

$$\forall A \subseteq P \left( \forall a \in P \left( R^{-1}[[a]] \subseteq A \rightarrow a \in A \right) \rightarrow P = A \right)$$

Demuestra que para todo orden parcial (antirreflexivo)  $R$  en  $P$  son equivalentes:

- i)  $R$  es total y fuertemente inductivo.
- ii)  $R$  es buen orden.

**Ej Extra** Sea  $(P, <)$  un conjunto parcialmente ordenado. Supóngase que  $f$  y  $g$  son funciones con dominio  $P$  de modo que para cada  $p \in P$  el conjunto  $g(p)$  es orden parcial en  $f(p)$ . En el conjunto  $X := \bigcup \{f(p) \times \{p\} \mid p \in P\}$  defínase  $\sqsubset$  como la relacion:

$$(x, p) \sqsubset (y, q) \quad \text{si y sólo si} \quad (p < q \vee (p = q \wedge x g(p) y))$$

- i) Demuestre que  $\sqsubset$  es una relación de orden parcial en  $X$ .
- ii) Demuestre que  $\sqsubset$  es un orden total en  $X$  y sólo si  $(P, <)$  es un conjunto totalmente ordenado y para cada  $p \in P$ ,  $g(p)$  es orden total en  $f(p)$ .