Segunda Tarea Examen

Profesor: Luis Jesús Trucio Cuevas.

Ayudantes: Jesús Angel Cabrera Labastida,
Hugo Víctor García Martínez.

De la siguiente lista de ejercicios, se les pedirá exponer uno (o dos). Al momento de empezar la exposicion se les indicará cuál(es). Las exposiciones serán individuales y de modo presencial.

Conjuntos Abstractos

Los ejercicios de esta sección se deben resolver en la categoría de conjuntos abstractos, $\mathscr{S}$, a menos que se indique lo contrario.

Ej. 1. Sea $f\colon A \to B$. Definimos la gráfica de f como

$$\begin{tikzcd} A & A \times B \arrow[l, "p_A"'] \arrow[r, "p_B"] & B \\ & A. \arrow[ul, "id"] \arrow[u, dashed, "G_f"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Demuestra que G_f es mono.

Ej. 2. Sean $f, g\colon A \to B$ tales que $G_f = G_g$. Demuestra que $f = g$.

Ej. 3. Demuestra que $A + 0 \cong A$.

Ej. 4. Demuestra que toda flecha de la forma $0 \to A$ es inyectiva (por lo tanto mono). Además muestra que si A no tiene un elementos globales, entonces $0 \to A$ es biyectiva (por lo tanto iso).

Ej. 5. Sea A un objeto que admite un objeto global. Una flecha $f\colon A \to B$ es constante si se factoriza a través de 1, es decir, existe $b\colon 1 \to B$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "!_A"'] & & B \\ & 1. \arrow[ur, "b"'] & \end{tikzcd}$$

Demuestra que f es constante si y sólo si para cualesquiera $a_1, a_2\colon 1 \to A$ se satisface $fa_1 = fa_2$.

Ej. 6. Demuestra que las inclusiones a un coproducto son monos. Esto es, si $i_A\colon A \to A + B \leftarrow B : i_B$ es un diagrama de coproducto, entonces i_A es mono.

Ej. 7. Sea $m\colon T \rightarrowtail B$ un subobjeto y $f\colon A \to B$. Encuentra la flecha característica de la imagen inversa de m.

Ej. 8. Sea $\mathbf{A}$ una categoría. Considera flechas $f\colon A \to B$ y $r, s\colon B \to A$ tales que $rf = id_A$ y $fs = id_B$. Demuestra que $r = s$.

Ej. 9. Sea $\mathbf{A}$ una categoría. Si $fs = id_B$ y f es mono, entonces s es inversa, por los dos lados, de f.

Ej. 10. Sea $f\colon A \to B$. La fibra de $b\colon 1 \to B$ es el producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(b) \arrow[r, "!"] \arrow[d, tail, "m"'] & 1 \arrow[d, "b"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B. \end{tikzcd}$$

Demuestra que si s es una sección de f, entonces $sb \in_A m$, pra todo $b\colon 1 \to B$.

Ej. 11. Demuestra las siguientes leyes exponenciales:

I) $A^0 = 1$

II) $A^1 = A$

III) $A^{B+C} \cong A^B \times A^C$

IV) $A^{B\times C} \cong (A^B)^C$

Ej. 12. Sea $\mathbf{A}$ una categoría localmente pequeña con coproductos. Demuestra que

$$\mathbf{A}(A, C) \times \mathbf{A}(B, C) \cong \mathbf{A}(A + B, C).$$

Ej. 13. Demuestra que $f\colon A \to B$ es epi si y sólo si $\Omega^f\colon \Omega^B \to \Omega^A$ es mono.

Conjuntos (no tan abstractos)

Resuelva los siguientes ejercicios utilizando los axiomas de ZFC vistos en clase (Vacío, Extensionalidad, Par, Unión, Esq. de Separación, Potencia, Infinito)

Ej. 14. Demuestra que el enunciado $\varphi \leftrightharpoons \forall x \exists y (x \in y \wedge \forall z \forall w ((z \in w \wedge w \in y) \to z \in y))$ implica el axioma de unión. *Indica claramente cuáles axiomas de ZFC utilizas en la demostración.*

Ej. 15. Sea $\psi(x)$ una fórmula de la teoría de conjuntos. Demuestre que, si $z := \{y \mid \exists x\, (\psi(x) \wedge y \in x)\}$ es un conjunto, entonces $\{x \mid \psi(x)\}$ es un conjunto. *Indica claramente cuáles axiomas de ZFC utilizas en la demostración.*

Ej. 16. Demuestra que toda relación es una unión de funciones.

Ej. 17. Sean $f : \omega \to 2$ y $P := \{f \restriction n \in \mathscr{P}(\omega \times 2) \mid n \in \omega\}$. Demuestra que $(P, \subseteq)$ es un conjunto bien ordenado.

Ej. 18. Prueba que 2^ω y ω^ω son equipotentes.

Ej. 19. Sean $(B, <)$ un conjunto bien ordenado y x, A conjuntos con $x \subseteq A$. Prueba que, si existe $f : B \to A$ sobreyectiva, entonces $x \preccurlyeq B$.

Ej. 20. Sea $(A, <)$ una retícula (latiz). Demuestra que si $(A, <)$ no es distributiva, entonces existe un subconjunto $B = \{a, b, c, d, e\} \subseteq A$ de modo que $< \restriction B$ es alguno de los siguientes:

a) Diamante: $\{(a, b), (b, e), (a, c), (c, e), (a, d), (d, e), (a, e)\}$

b) Pentagono: $\{(a, e), (a, d), (d, e), (a, c), (c, e), (a, b), (b, c), (b, e)\}$

Ej. 21. Pruebe que si un orden parcial $(P, <)$ es fuertemente inductivo, entonces cada $A \subseteq P$ no vacío posee un $<$-minimal.

Ej. 22. Sean $f : X \to \omega$ y $Y \subseteq X$ cualesquiera. Demuestra que si para cada $x \in X$ se satisface la proposición: $\forall y \in X(f(y) < f(x) \to y \in Y) \to x \in Y$, entonces $Y = X$.

Ej. 23. Un conjunto X es Tarski-finito si y sólo si para cada $A \subseteq \mathscr{P}(X)$ no vacío, existe $y \in A$ de modo que para cada $a \in A$, no ocurre $y \subsetneq a$. Demuestra que todo natural $n \in \omega$ es Tarski-finito.

Ej. 24. Sea X un conjunto. Una $\in, X$-cadena es una función f con dominio algún natural $n \in \omega$ que cumple: $f(0) \in X$; y, para cualesquiera $m, k \in n$ con $m < k$, se cumple $f(k) \in f(m)$.

Es un hecho que $C = \bigcup\{\text{ima}(f) \mid f \text{ es } \in, X \text{ cadena}\}$ es un conjunto. Pruebe que C es un conjunto transitivo tal que $X \subseteq C$.

Ej. 25. Utilizando *únicamente* el Primer Teorema de Recursión (1TR), demuestre que existe una función $F : \omega \to \omega$ de modo que $F(0) = 1$; y, para cada $n \in \omega$, $F(s(n)) = s(n) \cdot F(n)$.

Hint: Considere $X := \omega \times \omega$ *en el 1TR, con el punto inicial* $(1, 1)$ *y defina una dinámica adecuada* $g : X \to X$ *de modo que al proyectar* g *a la primera entrada, consiga la función* F.

Ej. 26. Sean X un conjunto y $f : X \to X$. Demuestre que existe una función $g : \omega \times X \to X$ de modo que para cada $(n, x) \in \omega \times X$ se cumplen $g(0, x) = x$ y $g(s(n), x) = g(n, f(x))$.

Ej. 27. Sea $f\colon X \to X$ una función y $A \subseteq X$. Consideremos, mediante el teorema de recursión, la (única) función $g\colon N \to \mathscr{P}(X)$ de modo que $g(0) = A$ y, para cada $n \in \omega$, $g(s(n)) = g(n) \cup f[g(n)]$. Definimos a los conjuntos $A_* = \bigcup \text{im}(g)$, y $A^* = \bigcap\{B \subseteq X \mid A \subseteq B \wedge f[B] \subseteq B\}$ (*llamados las cerraduras inferiores y superiores de* A *bajo* f, *respectivamente*). Demuestra que:

$$A^* = A_* \;, \quad A \subseteq A^* \quad \text{y} \quad f[A^*] \subseteq A^*$$