# Primera Tarea-Examen

## Conjuntos Abstractos

Los ejercicios de esta sección se deben resolver en la categoría de conjuntos abstractos, $\mathscr{S}$, a menos que se indique lo contrario.

**Ejercicio 1** Demuestra que $f\colon A \to B$ es mono si y sólo si $f$ es inyectiva.

**Ejercicio 2** Sea $m\colon S \rightarrowtail A$ un subobjeto y considera su flecha característica $\chi_m\colon A \to \Omega$. Demuestra que para cualquier elemento generalizado $x\colon X \to A$ se satisface:

$$x \in_A m \iff \chi_m x = \nu_X,$$

donde $\nu_X$ es la composición de $!_X\colon X \to 1$ con $\nu\colon 1 \to \Omega$.

## ZFC

**Ejercicio 3** Demuestre las siguientes equivalencias o implicaciones. En cada inciso indique claramente qué axiomas de ZFC se utilizan durante la prueba.

I) El axioma de extensionalidad implica el enunciado $\forall x \forall y (\forall w (x \in w \leftrightarrow y \in w) \to x = y)$.

II) El enunciado $\forall x \forall y \exists p \forall w ((w = x \vee w = y) \to w \in p)$ es equivalente al axioma del par.

III) El enunciado $\forall x \exists p \forall w (\forall z (z \in x \to z \in w) \to w \in p)$ es equivalente al Axioma de potencia.

IV) El enunciado $\forall x \forall y \exists p \forall w (w \in p \leftrightarrow (p \in x \vee p = y))$ implica el axioma del par.

**Ejercicio 4** Todas las colecciones de este ejercicio son conjuntos. Prueba dos de los siguientes incisos:

I) $x \subseteq \mathscr{P}(y)$ si y sólo si $\bigcup x \subseteq y$.

II) Si $x \neq \varnothing$, $y \in \bigcap\{\mathscr{P}(a) \mid a \in x\}$ ocurre sólo si $y \subseteq \bigcup x$.

III) $\bigcup\{\mathscr{P}(a) \mid a \in x\} \subseteq \mathscr{P}(\bigcup x)$ pero no siempre $\bigcup\{\mathscr{P}(a) \mid a \in x\} \neq \mathscr{P}(\bigcup x)$.

IV) $\big(\bigcup x\big) \cap (\bigcup y) = \bigcup\{a \cap b \mid (a, b) \in x \times y\}$.