Conjuntos

Axiomas Básicos

Ej. 1. Demuestra que el enunciado $\varphi \leftrightharpoons \forall x \exists y (x \in y \wedge \forall z \forall w ((z \in w \wedge w \in y) \to z \in y))$ implica el axioma de unión. *Indica claramente cuáles axiomas de ZFC utilizas en la demostración.*

$$\varphi \leftrightharpoons \forall x \exists y \forall z \forall w ((z \in w \wedge w \in x) \to z \in y)$$

Ej. 2. Sea $\psi(x)$ una fórmula de la teoría de conjuntos. Demuestre que, si $z := \{y \mid \exists x\, (\psi(x) \to y \in x)\}$ es un conjunto, entonces $\{x \mid \psi(x)\}$ es un conjunto. *Indica claramente cuáles axiomas de ZFC utilizas en la demostración.*

Relaciones y Funciones

Ej. 3. Demuestra que toda relación es una unión de funciones.

Ej. 4. Sean $f : \omega \to 2$ y $P := \{f \restriction n \in \mathscr{P}(\omega \times 2) \mid n \in \omega\}$. Demuestra que $(P, \subseteq)$ es un conjunto bien ordenado.

Dominancia y CSB

Ej. 5. Prueba que 2^ω y ω^ω son equipotentes.

Ej. 6. Sean $(B, <)$ un conjunto bien ordenado y x, A conjuntos con $x \subseteq A$. Prueba que, si existe $f : B \to A$ sobreyectiva, entonces $x \preccurlyeq B$.

Copos

Ej. 7. Sea $(A, <)$ una retícula (latiz). Demuestra que si $(A, <)$ no es distributiva, entonces existe un subconjunto $B = \{a, b, c, d, e\} \subseteq A$ de modo que $< \restriction B$ es alguno de los siguientes:

a) Diamante: $\{(a, b), (b, e), (a, c), (c, e), (a, d), (d, e), (a, e)\}$

b) Pentagono: $\{(a, e), (a, d), (d, e), (a, c), (c, e), (a, b), (b, c), (b, e)\}$

Ej. 8. Pruebe que si un orden parcial $(P, <)$ es fuertemente inductivo, entonces cada $A \subseteq P$ no vacío posee un $<$-minimal.

Naturales e Inducción

Ej. 9. Sean $f : X \to \omega$ y $Y \subseteq X$ cualesquiera. Demuestra que si para cada $x \in X$ se satisface la proposición: $\forall y \in X (f(y) < f(x) \to y \in Y) \to x \in Y$, entonces $Y = X$.

Ej. 10. Un conjunto X es Tarski-finito si y sólo si para cada $A \subseteq X$ no vacío, existe $y \in A$ de modo que para cada $a \in A$, no ocurre $y \subsetneq a$. Demuestra que todo natural $n \in \omega$ es Tarski-finito.

Ej. 11. Sea X un conjunto. Una $\in, X$-cadena es una función f con dominio algún natural $n \in \omega$ que cumple: $f(0) \in X$; y, para cualesquiera $m, k \in n$ con $m < k$, se cumple $f(k) \in f(m)$.

Es un hecho que $C = \bigcup\{\mathrm{ima}(f) \mid f \text{ es } \in, X \text{ cadena}\}$ es un conjunto. Pruebe que C es un conjunto transitivo tal que $X \subseteq C$.

Recursión

Ej. 12. Utilizando *únicamente* el Primer Teorema de Recursión (1TR), demuestre que existe una función $F : \omega \to \omega$ de modo que $F(0) = 1$; y, para cada $n \in \omega$, $F(s(n)) = s(n) \cdot F(n)$.

Hint: Considere $X := \omega \times \omega$ *en el 1TR, con el punto inicial* $(1, 1)$ *y defina una dinámica adecuada* $g : X \to X$ *de modo que al proyectar* g *a la primera entrada, consiga la función* F.

Ej. 13. Sean X un conjunto y $f : X \to X$. Demuestre que existe una función $g : \omega \times X \to X$ de modo que para cada $(n, x) \in \omega \times X$ se cumplen $g(0, x) = x$ y $g(s(n), x) = g(n, f(x))$.

Ej. 14. Sea $f \colon X \to X$ una función y $A \subseteq X$. Consideremos, mediante el teorema de recursión, la (única) función $g \colon N \to \mathscr{P}(X)$ de modo que $g(0) = A$ y, para cada $n \in \omega$, $g(s(n)) = g(n) \cup f[g(n)]$. Definimos a los conjuntos $A_* = \bigcup \mathrm{im}(g)$, y $A^* = \bigcap\{B \subseteq X \mid A \subseteq B \wedge f[B] \subseteq B\}$ (*llamados las cerraduras inferiores y superiores de* A *bajo* f, *respectivamente*). Demuestra que:

$$A^* = A_* \,, \quad A \subseteq A^* \quad \text{y} \quad f[A^*] \subseteq A^*$$