Primera Tarea-Examen

Conjuntos Abstractos

Los ejercicios de esta sección se deben resolver en la categoría de conjuntos abstractos, $\mathscr{S}$, a menos que se indique lo contrario.

Ejercicio 1 Demuestra que $f\colon A \to B$ es mono si y sólo si f es inyectiva.

Ejercicio 2 Sea $m\colon S \rightarrowtail A$ un subobjeto y considera su flecha característica $\chi_m\colon A \to \Omega$. Demuestra que para cualquier elemento generalizado $x\colon X \to A$ se satisface:

$$x \in_A m \iff \chi_m x = \nu_X,$$

donde ν_X es la composición de $!_X\colon X \to 1$ con $\nu\colon 1 \to \Omega$.

ZFC

Ejercicio 3 Los siguientes enunciados son versiones "débiles" de los axiomas de par y potencia, respectivamente. Demuestra que éstos son equivalentes a sus contrapartes, los axiomas "no débiles" del par y potencia, respectivamente. En cada inciso indica claramente cuáles axiomas de ZFC se utilizan para probar la equivalencia.

I) $\forall x \forall y \exists p \forall w((w = x \vee w = y) \to w \in p)$ es al axioma débil del par.

II) $\forall x \exists p \forall w(\forall z(z \in x \to z \in w) \to w \in p)$ es el axioma débil del potencia.

Ejercicio 4 Es un hecho que todas las colecciones de este ejercicio son conjuntos. Demuestra o refuta (con un contraejemplo) cuatro de los siguientes incisos, prueba todas tus afirmaciones.

I) $\bigcup\{\{x\},\{y\}\} = \{x, y\}$.

II) $\bigcup\bigcup\bigcup\{\{\{x\}\}\} = x$.

III) $\bigcup\{x\} = \varnothing$ y $x = \varnothing$ son equivalentes.

IV) Se da la igualdad $(x, y) = (a, b)$ únicamente si $x = a$ y $y = b$.

V) $\{x, y\} = \{a, b\}$ si y sólo si $x = a$ y $y = b$.

VI) $\mathscr{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$.

VII) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \notin \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

VIII) Se tiene $\{\{x\},\{x, y\},\{x, y, z\}\} = \{\{a\},\{a, b\},\{a, b, c\}\}$ sólo cuando $x = a$, $y = b$ y $z = c$.