Conjuntos Abstractos

Los ejercicios de esta sección se deben resolver en la categoría de conjuntos abstractos, $\mathscr{S}$, a menos que se indique lo contrario.

Ejercicio 1 Sea $\mathbf{A}$ una categoría con productos fibrados. Demuestra que un producto fibrado de $f\colon A \to C \leftarrow B : g$ es único salvo iso.

Ejercicio 2 Muestra que el clasificador de subobjetos Ω es coseparador, es decir, dadas $f, g\colon A \to B$ si para cualquier $\varphi\colon B \to \Omega$ el diagrama

$$A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{\varphi} \Omega$$

conmuta, entonces $f = g$.

Ejercicio 3 Sea $\mathbf{A}$ una categoría localmente pequeña con coproductos. Demuestra que

$$\mathbf{A}(A, C) \times \mathbf{A}(B, C) \cong \mathbf{A}(A + B, C).$$

Ejercicio 4 Sean $ev\colon A \times \Omega^A \to \Omega$, $x\colon X \to A$ y $m\colon S \rightarrowtail A$. Además, considera la característica de m y su nombre en la exponencial, $\ulcorner \chi_m \urcorner\colon 1 \to \Omega^A$. Muestra que $x \in_A m$ si y sólo si $ev(x \times \ulcorner \chi_m \urcorner) = v_{X\times 1}$.

Ejercicio 5 Demuestra las siguientes leyes exponenciales:

I) $A^0 = 1$

II) $A^1 = A$

III) $A^{B+C} \cong A^B \times A^C$

IV) $A^{B\times C} \cong (A^B)^C$

Sugerencia: usa, sin demostrar, que la biyección generada por la exponencial es natural en todas las entradas y el lema de Grothendieck-Yoneda.

Ejercicio 6 Considera la categoría de espacios vectoriales sobre un campo k, **Vect**. Da un ejemplo que muestre que el dual de un espacio no es natural, es decir, que el siguiente diagrama no conmuta:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "()^*"] \arrow[d, "T"'] & V^* \\ W \arrow[r, "()^*"'] & W^*. \arrow[u, "T^*"'] \end{tikzcd}$$

Además, muestra que doble dual sí es natural, es decir, que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "()^{**}"] \arrow[d, "T"'] & V^{**} \arrow[d, "T^{**}"] \\ W \arrow[r, "()^{**}"'] & W^{**}. \end{tikzcd}$$

Ejercicio 7 Sean x un conjunto y f una función con dominio x. Prueba lo siguiente:

I) Si $A \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(X))$ es no vacío, entonces $f[\bigcap A] \subseteq \bigcap\{f[a] \mid a \in A\}$.

II) f es inyectiva si y sólo si para cada $A \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(X))$ no vacío se tiene que $\bigcap\{f[a] \mid a \in A\} \subseteq f[\bigcap A]$.

Ejercicio 8 Dada una relación R, demuestra las siguientes equivalencias:

- R es reflexiva si y solo si $\Delta_{\mathrm{dom}(R)} \subseteq R$.
- R es reflexiva en un conjunto A si y solo si $\Delta_A \subseteq R$.
- R es simétrica si y solo si $R^{-1} \subseteq R$.
- R es transitiva si y solo si $R \circ R \subseteq R$.
- R es irreflexiva si y solo si $R \cap \Delta_V = \varnothing$.
- R es antisimétrica si y solo si $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_V$.
- R es asimétrica si y solo si $R \cap R^{-1} = \varnothing$.

Ejercicio 9 Si R es un orden parcial sobre A, definimos $R' = R \cup \Delta_A$ como el orden parcial reflexivo asociado; por otro lado si R es reflexivo, definimos $R^* = R \setminus \Delta_A$ como su orden estricto asociado.

Demuestra los siguientes puntos:

- $A \subseteq B \to (B \setminus A) \cup A = B$.
- $A \cap B = \varnothing \to (B \cup A) \setminus A = B$.
- R' es efectivamente un orden parcial reflexivo sobre A.
- R^* es efectivamente un orden estricto sobre A.
- $R'^* = R$ cuando R es estricto.
- $R^{*\prime} = R$ cuando R es reflexivo. Esto junto al inciso anterior prueba que los órdenes estrictos y reflexivos están asociados mediante unaa biyección.

Ejercicio 10 Dadas R, S relaciones transitivas y antisimétricas, definimos $R \sim S$ como $\exists A(R \Delta S = \Delta_A)$. Además, definamos al conjunto $\mathcal{X}_A = \{R \subseteq A^2 R \text{ es transitiva y antisimétrica.}\}$.

Demuestra los siguientes incisos:

1. $\sim$ es reflexiva, transitiva y simétrica.

2. $\sim_{|\mathcal{X}_A}$ es una relación de equivalencia sobre $\mathcal{X}_A$. A partir de aquí, nos referiremos a esta relación como $\sim$.

3. Dada $R \in \mathcal{X}_A$, $([R]_\sim, \subseteq)$ es un retículo completo. Prueba que el infimo y supremo son la intersección y unión respectivamente siempre que el conjunto es no vacío.

4. Prueba que el mínimo es un orden estricto y que el máximo es un orden reflexivo.

5. Prueba que el el mínimo y máximo están asociados.

6. Si $R \sim S$, aRb y bSc entonces $a(R \cap S)c$.

Ejercicio 11 Un morfismo de órdenes $f\colon (A, \leqslant_A) \to (B, \leqslant_B)$ es una función creciente, es decir, si $a \leqslant_A b$ implica $f(a) \leqslant_B f(b)$. Considerando que los órdenes parciales junto con las funciones crecientes forman una categoría, tenemos una definición de isomorfismo.

Con esto en cuenta, demuestra o refuta con un contraejemplo la siguiente afirmación: $(A, \leqslant_A)$ es isomorfo a $(B, \leqslant_B)$ si y solo si existe un morfismo de orden biyectivo.

Ejercicio 12 Sea $(A, \leqslant)$ una reticula y X un conjunto, definimos la siguiente relación sobre A^X:

$$\preccurlyeq = \{(f, g) \in (A^X)^2 \forall x(x \in X \to f(x) \leqslant g(x))\}$$

Demuestra que $(A^X, \preccurlyeq)$ es una retícula.

Ejercicio 13 Demuestra que todo orden parcial reflexivo es isomorfo a un conjunto ordenado por contención.