Segunda Tarea Examen

Profesor: Luis Jesús Trucio Cuevas. Ayudantes: Jesús Angel Cabrera Labastida,
Hugo Víctor García Martínez.

I) Se pueden usar resultados vistos en clase, **siempre y cuando** se mencione claramente cuándo y dónde se usan.

II) Cada ejercicio tiene un valor de **dos puntos** para un total de diez. Hay un ejercicio adicional con valor de **un punto**, éste se calificará únicamente con cero o su valor total.

Conjuntos Abstractos

Los ejercicios de esta sección se deben resolver en la categoría de conjuntos abstractos, $\mathscr{S}$.

Ej 1 Muestra que el clasificador de subobjetos Ω es coseparador, es decir, dadas $f, g\colon A \to B$ si para cualquier $\varphi\colon B \to \Omega$ el diagrama

$$A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{\varphi} \Omega \tag{1}$$

conmuta, entonces $f = g$.

Ej 2 Sean $ev\colon A \times \Omega^A \to \Omega$, $x\colon X \to A$ y $m\colon S \rightarrowtail A$. Además, considera la característica de m y su nombre en la exponencial, $\ulcorner \chi_m \urcorner\colon 1 \to \Omega^A$. Muestra que $x \in_A m$ si y sólo si $ev(x \times \ulcorner \chi_m \urcorner) = v_{X\times 1}$.

ZFC

Resuelvan los ejercicios de esta sección utilizando únicamente los axiomas de ZFC vistos en clase (aún NO se puede usar el axioma del infinito)

Ej 3 Si R es un orden parcial sobre A, definimos $R' = R \cup \Delta_A$ como el orden parcial reflexivo asociado; por otro lado si R es reflexivo, definimos $R^* = R \setminus \Delta_A$ como su orden estricto asociado.

Demuestra los siguientes puntos:

I) Si $A \subseteq B$, entonces $(B \setminus A) \cup A = B$.

II) $A \cap B = \varnothing$, entonces $(B \cup A) \setminus A = B$.

III) R' es efectivamente un orden parcial reflexivo sobre A.

IV) R^* es efectivamente un orden estricto sobre A.

V) $R'^* = R$ cuando R es estricto.

VI) $R^{*\prime} = R$ cuando R es reflexivo. Esto junto al inciso anterior prueba que los órdenes estrictos y reflexivos están asociados mediante unaa biyección.

Ej 4 Sean $(P, <)$ y $(Q, \sqsubset)$ conjuntos totalmente ordenados. Sea $X := P \times Q$ y defínase la relación R en X como sigue:

$$(p, q)\ R\ (x, y) \quad \text{si y sólo si} \quad ((p < x) \vee (p = x \wedge q \sqsubset y))$$

Demuestre que (X, R) es un conjunto totalmente ordenado.

Ej 5 Sean $(P,<)$ y $(Q,\sqsubset)$ conjuntos parcialmente ordenados y $f : P \to Q$ tal que para cualesquiera $x, y \in P$: si $x < y$, entonces $f(x) \sqsubset f(y)$ (estas funciones se llaman *"morfismos de orden"*). Demuestra; o refuta mediante un contraejemplo, las siguientes afirmaciones.

i) Si $p \in P$ es el mínimo de $(P,<)$, entonces $f(p)$ es el mínimo de $(Q,\sqsubset)$.

ii) Si $p \in P$ $<$-minimal de P, entonces $f(p)$ es $\sqsubset$-minimal de Q.

iii) Si f es biyectiva, entonces f^{-1} es un morfismo de orden.

iv) Si $(P,<)$ es un conjunto totalmente ordenado, entonces f es inyectiva.

Ej 6 Sea P un conjunto. Se dice que un orden parcial (antirreflexivo) R en P es *fuertemente inductivo* si y sólo si se satisface:

$$\forall A \subseteq P \left(\forall a \in P \left(R^{-1}[\{a\}] \subseteq A \to a \in A\right) \to P = A\right)$$

Demuestra que para todo orden parcial (antirreflexivo) R en P son equivalentes:

i) R es total y fuertemente inductivo.

ii) R es buen orden.

Ej Extra Sea $(P,<)$ un conjunto parcialmente ordenado con $P \neq \varnothing$. Supóngase que f y g son funciones con dominio P de modo que para cada $p \in P$ el conjunto $g(p)$ es orden parcial en $f(p)$ y que $f(p) \neq \varnothing$. En el conjunto $X := \bigcup\{f(p) \times \{p\} \mid p \in P\}$ defínase $\sqsubset$ como la relacion:

$$(x,p) \sqsubset (y,q) \quad \text{si y sólo si} \quad (p < q \vee (p = q \wedge x\ g(p)\ y))$$

i) Demuestre que $\sqsubset$ es una relación de orden parcial en X.

ii) Demuestre que $\sqsubset$ es un orden total en X y sólo si $(P,<)$ es un conjunto totalmente ordenado y para cada $p \in P$, $g(p)$ es orden total en $f(p)$.

Solutions to the Exercises

Solution 1

Primero veamos que el enunciado es cierto cuando $A = 1$. Esto es, si suponemos que $b_1, b_2 \colon 1 \to B$ son tales que

$$1 \underset{b_2}{\overset{b_1}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{\varphi} \Omega \tag{2}$$

conmuta, entonces veamos que $b_1 = b_2$.

Como toda flecha que sale del terminal es mono y Ω es clasificador de subobjetos, entonces b_1 tiene una característica, digamos $\varphi \colon B \to \Omega$. Por la hipótesis en (2) y la propiedad universal del producto fibrado tenemos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[ddr, bend right, "b_2"'] & & \\
& 1 \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "b_1"'] & 1 \arrow[d, "\nu"] \\
& A \arrow[r, "\varphi"'] & \Omega.
\end{tikzcd}$$

Como la única flecha del terminal a sí mismo es la identidad, entonces $b_1 = b_2$.

Ahora sea A arbitrario y supongamos que $f, g \colon A \to B$ son tales que para cualquier $\varphi \colon B \to \Omega$ el diagrama (1) conmuta. Para ver que $f = g$ usaremos que 1 es separador, es decir, veremos que para cualquier $a \colon 1 \to A$ se satisface $fa = ga$. Por la hipótesis sobre f y g tenemos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, shift left, "fa"] \arrow[r, shift right, "ga"'] & B \arrow[r, "\varphi"] & \Omega.
\end{tikzcd}$$

Así, por lo que hicimos antes podemos concluir que $fa = ga$.

Solution 2

Primero consideramos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \times \Omega^A \arrow[rr, "\mathrm{ev}"] & & \Omega \\
A \times 1 \arrow[u, "\mathrm{id} \times \ulcorner \chi_m \urcorner"] \arrow[r, "p_A"] \arrow[ur, phantom, "1"] & A \arrow[ur, "\chi_m"] \arrow[dr, phantom, "3"] & \\
& & 1 \arrow[uu, "\nu"'] \\
X \times 1 \arrow[uu, "x \times \mathrm{id}"] \arrow[r, "p_X"] \arrow[uur, phantom, "2"] & X \arrow[uu, "x"'] \arrow[ur, "!_X"'] &
\end{tikzcd} \tag{3}$$

La parte 1 conmuta por la definición de $\ulcorner \chi_m \urcorner$ y la parte 2 por definición de la flecha $x \times \mathrm{id}$. Si el diagrama 3 conmuta, entonces el diagrama exterior es conmutativo. Viceversa, si el diagrama exterior es conmutativo, entonces el diagrama 3 conmuta. En efecto, para ver que 3 conmuta es suficiente ver que conmuta desde $X \times 1$, ya que p_X es iso. Si seguimos el diagrama podemos obtener la conmutatividad que queremos. Las ecuaciones que lo muestran son:

$$\begin{aligned}
\nu\, !_X\, p_X &= \mathrm{ev}\,(x \times \ulcorner \chi_m \urcorner)\,(x \times \mathrm{id}) && \text{diagrama exterior} \\
&= \chi_m\, p_A\, (x \times \mathrm{id}) && \text{parte 1} \\
&= \chi_m\, x\, p_X && \text{parte 2.}
\end{aligned}$$

Con esto hemos concluido que 3 conmuta si y sólo si el exterior conmuta.

Ahora, si suponemos que $x \in_A m$, entonces existe $h \colon X \to S$ que hace conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "h"] \arrow[drr, bend left, "!_X"] \arrow[ddr, bend right, "x"'] & & \\
& S \arrow[r, "!_S"] \arrow[d, tail, "m"'] & 1 \arrow[d, "\nu"] \\
& A \arrow[r, "\chi_m"'] & \Omega.
\end{tikzcd} \tag{4}$$

De esto tenemos que la parte 3 de diagrama (3) conmuta. Así, el exterior conmuta. Por lo tanto $ev(x \times \ulcorner \chi_m \urcorner) = v_{X\times 1}$.

Por el lado contrario, si $ev(x \times \ulcorner \chi_m \urcorner) = v_{X\times 1}$, entonces el exterior del diagrama (3) conmuta. Así, la parte 3 del mismo diagrama es conmutativa. Esta parte es el exterior del diagrama (4). Por lo que podemos usar la propiedad universal del producto fibrado para obtener la existencia de $h\colon X \to S$ que hace conmutar el diagrama (4). Por lo tanto, $x \in_A m$.