Conjuntos Abstractos

Los ejercicios de esta sección se deben resolver en la categoría de conjuntos abstractos, $\mathscr{S}$, a menos que se indique lo contrario.

Ej 1 Sea $\mathbf{A}$ una categoría con productos fibrados. Demuestra que un producto fibrado de $f\colon A \to C \leftarrow B : g$ es único salvo iso.

Ej 2 Muestra que el clasificador de subobjetos Ω es coseparador, es decir, dadas $f, g\colon A \to B$ si para cualquier $\varphi\colon B \to \Omega$ el diagrama

$$A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{\varphi} \Omega$$

conmuta, entonces $f = g$.

Ej 3 Sea $\mathbf{A}$ una categoría localmente pequeña con coproductos. Demuestra que

$$\mathbf{A}(A, C) \times \mathbf{A}(B, C) \cong \mathbf{A}(A + B, C).$$

Ej 4 Sean $ev\colon A \times \Omega^A \to \Omega$, $x\colon X \to A$ y $m\colon S \rightarrowtail A$. Además, considera la característica de m y su nombre en la exponencial, $\ulcorner \chi_m \urcorner\colon 1 \to \Omega^A$. Muestra que $x \in_A m$ si y sólo si $ev(x \times \ulcorner \chi_m \urcorner) = \nu_{X \times 1}$.

Ej 5 Demuestra las siguientes leyes exponenciales:

I) $A^0 = 1$	II) $A^1 = A$
III) $A^{B+C} \cong A^B \times A^C$	IV) $A^{B \times C} \cong (A^B)^C$

Sugerencia: usa, sin demostrar, que la biyección generada por la exponencial es natural en todas las entradas y el lema de Grothendieck-Yoneda.

Ej 6 Considera la categoría de espacios vectoriales sobre un campo k, **Vect**. Da un ejemplo que muestre que el dual de un espacio no es natural, es decir, que el siguiente diagrama no conmuta:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "()^*"] \arrow[d, "T"'] & V^* \\ W \arrow[r, "()^*"'] & W^* \arrow[u, "T^*"'] \end{tikzcd}$$

Además, muestra que doble dual sí es natural, es decir, que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "()^{**}"] \arrow[d, "T"'] & V^{**} \arrow[d, "T^{**}"] \\ W \arrow[r, "()^{**}"'] & W^{**}. \end{tikzcd}$$

ZFC

Resuelvan los ejercicios de esta sección utilizando únicamente los axiomas de ZFC vistos en clase (aún NO se puede usar el axioma del infinito)

Ej 7 Dada una relación R, demuestra las siguientes equivalencias:

I) R es reflexiva si y solo si $\Delta_{\mathrm{dom}(R)} \subseteq R$.

II) R es reflexiva en un conjunto A si y solo si $\Delta_A \subseteq R$.

III) R es simétrica si y solo si $R^{-1} \subseteq R$.

IV) R es transitiva si y solo si $R \circ R \subseteq R$.

V) R es irreflexiva si y solo si $R \cap \Delta_V = \varnothing$.

VI) R es antisimétrica si y solo si $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_V$.

VII) R es asimétrica si y solo si $R \cap R^{-1} = \varnothing$.

Ej 8 Para cada inciso, da un ejemplo de relacion R (sobre algún conjunto A) de modo que:

I) R sea simétrica y antisimétrica a la vez. ¿Tal relación es única?

II) R sea reflexiva y antireflexiva a la vez. ¿Tal relación es única?

Ej 9 Si R es un orden parcial sobre A, definimos $R' = R \cup \Delta_A$ como el orden parcial reflexivo asociado; por otro lado si R es reflexivo, definimos $R^* = R \setminus \Delta_A$ como su orden estricto asociado.

Demuestra los siguientes puntos:

I) Si $A \subseteq B$, entonces $(B \setminus A) \cup A = B$.

II) $A \cap B = \varnothing$, entonces $(B \cup A) \setminus A = B$.

III) R' es efectivamente un orden parcial reflexivo sobre A.

IV) R^* es efectivamente un orden estricto sobre A.

V) $R'^* = R$ cuando R es estricto.

VI) $R^{*\prime} = R$ cuando R es reflexivo. Esto junto al inciso anterior prueba que los órdenes estrictos y reflexivos están asociados mediante unaa biyección.

Ej 10 Dadas R, S relaciones transitivas y antisimétricas, definimos $R \sim S$ como $\exists A(R \Delta S = \Delta_A)$. Además, definamos al conjunto $\mathcal{X}_A = \{R \subseteq A^2 \mid R \text{ es transitiva y antisimétrica}\}$.

Demuestra los siguientes incisos:

I) $\sim$ es reflexiva, transitiva y simétrica.

II) $\sim_{|\mathcal{X}_A}$ es una relación de equivalencia sobre $\mathcal{X}_A$. A partir de aquí, nos referiremos a esta relación como $\sim$.

III) Dada $R \in \mathcal{X}_A$, $([R]_\sim, \subseteq)$ es un retículo completo. Prueba que el infimo y supremo son la intersección y unión respectivamente siempre que el conjunto es no vacío.

IV) Prueba que el mínimo es un orden estricto y que el máximo es un orden reflexivo.

V) Prueba que el el mínimo y máximo están asociados.

VI) Si $R \sim S$, aRb y bSc entonces $a(R \cap S)c$.

Ej 11 Sean $(P, <)$ y $(Q, \sqsubset)$ conjuntos totalmente ordenados. Sea $X := P \times Q$ y defínase la relación R en X como sigue:

$$(p, q) \; R \; (x, y) \quad \text{si y sólo si} \;\; ((p < x) \vee (p = x \wedge q \sqsubset y))$$

Demuestre que (X, R) es un conjunto totalmente ordenado.

Ej 12 Sean $(P, <)$ y $(Q, \sqsubset)$ conjuntos totalmente ordenados. Sea $X := (P \times \{0\}) \cup (Q \times \{1\})$ y defínase la relación R en X como sigue:

$$(x, s) \; R \; (y, t) \quad \text{si y sólo si} \;\; ((s = 0 \wedge t = 1))$$

Demuestre que (X, R) es un conjunto totalmente ordenado.

Ej 13 Sean P un conjunto y $\leqslant$ un orden parcial reflexivo en P. Encuentra una función $f : P \to \mathscr{P}(P)$ inyectiva de modo que para cualesquiera $p, q \in P$ se tenga $p \leqslant q$ si y sólo si $f(p) \subseteq f(q)$.

Ej 14 Sean $(P, <)$ y $(Q, \sqsubset)$ conjuntos parcialmente ordenados y $f : P \to Q$ tal que para cualesquiera $x, y \in P$: si x, y, entonces $f(x) \sqsubset f(y)$ (estas funciones se llaman "*morfismos de orden*"). Demuestra; o refuta mediante un contraejemplo, las siguientes afirmaciones.

I) Si $p \in P$ es el mínimo de $(P, <)$, entonces $f(p)$ es el mínimo de $(Q, \sqsubset)$.

II) Si $p \in P$ $<$-minimal de P, entonces $f(p)$ es $\sqsubset$-minimal de Q.

III) Si f es biyectiva, entonces f^{-1} es un morfismo de orden.

IV) Si $(P, <)$ es un conjunto totalmente ordenado, entonces f es inyectiva.

Ej 15 Sean $(A, \leqslant)$ una reticula y X un conjunto. Se define en A^X la relación:

$$\preccurlyeq := \{(f, g) \in (A^X)^2 \mid \forall x(x \in X \to f(x) \leqslant g(x))\}$$

Demuestra que $(A^X, \preccurlyeq)$ es una retícula.

Ej 16 Sea P un conjunto. Se dice que un orden parcial (antirreflexivo) R en P es *fuertemente inductivo* si y sólo si se satisface:

$$\forall A \left(\forall a \left(R^{-1}[\{a\}] \subseteq A \to a \in A\right) \to P \subseteq A\right)$$

Demuestra que para todo orden parcial (antirreflexivo) R en P son equivalentes:

I) R es total y fuertemente inductivo.

II) R es buen orden.