Segunda Tarea Examen

Profesor: Luis Jesús Trucio Cuevas.

Ayudantes: Jesús Angel Cabrera Labastida,
Hugo Víctor García Martínez.

I) Se pueden usar resultados vistos en clase, **siempre y cuando** se mencione claramente cuándo y dónde se usan.

II) Cada ejercicio tiene un valor de **dos puntos** para un total de diez. Hay un ejercicio adicional con valor de **un punto**, éste se calificará únicamente con cero o su valor total.

Conjuntos Abstractos

Los ejercicios de esta sección se deben resolver en la categoría de conjuntos abstractos, $\mathscr{S}$.

Ej 1 Muestra que el clasificador de subobjetos Ω es coseparador, es decir, dadas $f, g\colon A \to B$ si para cualquier $\varphi\colon B \to \Omega$ el diagrama

$$A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{\varphi} \Omega$$

conmuta, entonces $f = g$.

Ej 2 Sean $\mathrm{ev}\colon A \times \Omega^A \to \Omega$, $x\colon X \to A$ y $m\colon S \rightarrowtail A$. Además, considera la característica de m y su nombre en la exponencial, $\ulcorner\chi_m\urcorner\colon 1 \to \Omega^A$. Muestra que $x \in_A m$ si y sólo si $\mathrm{ev}(x \times \ulcorner\chi_m\urcorner) = \nu_{X\times 1}$.

ZFC

Resuelvan los ejercicios de esta sección utilizando únicamente los axiomas de ZFC vistos en clase (aún NO se puede usar el axioma del infinito)

Ej 3 Sean $(P, <)$ y $(Q, \sqsubset)$ conjuntos totalmente ordenados. Sea $X := P \times Q$ y defínase la relación R en X como sigue:

$$(p, q)\ R\ (x, y) \quad \text{si y sólo si} \quad ((p < x) \vee (p = x \wedge q \sqsubset y))$$

Demuestre que (X, R) es un conjunto totalmente ordenado.

Ej 4 Sean $(P, <)$ y $(Q, \sqsubset)$ conjuntos parcialmente ordenados y $f : P \to Q$ tal que para cualesquiera $x, y \in P$: si $x < y$, entonces $f(x) \sqsubset f(y)$ (estas funciones se llaman "*morfismos de orden*"). Demuestra; o refuta mediante un contraejemplo, las siguientes afirmaciones.

I) Si $p \in P$ es el mínimo de $(P, <)$, entonces $f(p)$ es el mínimo de $(Q, \sqsubset)$.

II) Si $p \in P$ $<$-minimal de P, entonces $f(p)$ es $\sqsubset$-minimal de Q.

III) Si f es biyectiva, entonces f^{-1} es un morfismo de orden.

IV) Si $(P, <)$ es un conjunto totalmente ordenado, entonces f es inyectiva.

Ej 5 Sea P un conjunto. Se dice que un orden parcial (antirreflexivo) R en P es *fuertemente inductivo* si y sólo si se satisface:

$$\forall A \subseteq P \left(\forall a \in P \left(R^{-1}[\{a\}] \subseteq A \to a \in A\right) \to P = A\right)$$

Demuestra que para todo orden parcial (antirreflexivo) R en P son equivalentes:

I) R es total y fuertemente inductivo.

II) R es buen orden.

Ej Extra Sea $(P, <)$ un conjunto parcialmente ordenado con $P \neq \emptyset$. Supóngase que f y g son funciones con dominio P de modo que para cada $p \in P$ el conjunto $g(p)$ es orden parcial en $f(p)$ y que $f(p) \neq \emptyset$. En el conjunto $X := \bigcup\{f(p) \times \{p\} \mid p \in P\}$ defínase $\sqsubset$ como la relacion:

$$(x, p) \sqsubset (y, q) \quad \text{si y sólo si} \quad (p < q \vee (p = q \wedge x \; g(p) \; y))$$

I) Demuestre que $\sqsubset$ es una relación de orden parcial en X.

II) Demuestre que $\sqsubset$ es un orden total en X y sólo si $(P, <)$ es un conjunto totalmente ordenado y para cada $p \in P$, $g(p)$ es orden total en $f(p)$.