Ejercicios de Práctica 2

Profesor: Luis Jesús Trucio Cuevas.
Ayudantes: Jesús Angel Cabrera Labastida,
Hugo Víctor García Martínez.

I) La tarea se entrega de forma **presencial** durante la clase del **7 de marzo**.

II) Los equipos para realizar la tarea deberan contar con **mínimo 4** integrantes y **máximo 6**.

III) Se pueden usar resultados vistos en clase, **siempre y cuando** se mencione claramente cuándo y dónde se usan.

IV) Cada ejercicio tiene un valor de **dos puntos** para un total de diez. Hay un ejercicio adicional con valor de **un punto**, éste se calificará únicamente con cero o su valor total.

- -

Conjuntos Abstractos

Los ejercicios de esta sección se deben resolver en la categoría de conjuntos abstractos, $\mathscr{S}$, a menos que se indique lo contrario.

Ej 1 Muestra que el clasificador de subobjetos Ω es coseparador, es decir, dadas $f, g\colon A \to B$ si para cualquier $\varphi\colon B \to \Omega$ el diagrama

$$A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{\varphi} \Omega$$

conmuta, entonces $f = g$.

Ej 2 Sean $ev\colon A \times \Omega^A \to \Omega$, $x\colon X \to A$ y $m\colon S \rightarrowtail A$. Además, considera la característica de m y su nombre en la exponencial, $\ulcorner \chi_m \urcorner\colon 1 \to \Omega^A$. Muestra que $x \in_A m$ si y sólo si $ev(x \times \ulcorner \chi_m \urcorner) = v_{X\times 1}$.

ZFC

Resuelvan los ejercicios de esta sección utilizando únicamente los axiomas de ZFC vistos en clase (aún NO se puede usar el axioma del infinito)

Ej 3 Si R es un orden parcial sobre A, definimos $R' = R \cup \Delta_A$ como el orden parcial reflexivo asociado; por otro lado si R es reflexivo, definimos $R^* = R \setminus \Delta_A$ como su orden estricto asociado.

Demuestra los siguientes puntos:

I) Si $A \subseteq B$, entonces $(B \setminus A) \cup A = B$.

ii) $A \cap B = \varnothing$, entonces $(B \cup A) \setminus A = B$.

iii) R' es efectivamente un orden parcial reflexivo sobre A.

iv) R^* es efectivamente un orden estricto sobre A.

v) $R'^* = R$ cuando R es estricto.

vi) $R^{*\prime} = R$ cuando R es reflexivo. Esto junto al inciso anterior prueba que los órdenes estrictos y reflexivos están asociados mediante unaa biyección.

Solutions to the Exercises

Solution 2

Primero consideramos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \times \Omega^A \arrow[rr, "ev"] & & \Omega \\
A \times 1 \arrow[u, "id \times \ulcorner \chi_m \urcorner"] \arrow[r, "p_A"] \arrow[ur, phantom, "1"] & A \arrow[ur, "\chi_m"] \arrow[dr, phantom, "3"] & \\
& & 1 \arrow[uu, "v"'] \\
X \times 1 \arrow[uu, "x \times id"] \arrow[r, "p_X"] \arrow[uur, phantom, "2"] & X \arrow[uu, "x"] \arrow[ur, "!_X"'] &
\end{tikzcd} \tag{1}$$

La parte 1 conmuta por la definición de $\ulcorner \chi_m \urcorner$ y la parte 2 por definición de la flecha $x \times id$. Si el diagrama 3 conmuta, entonces el diagrama exterior es conmutativo. Viceversa, si el diagrama exterior es conmutativo, entonces el diagrama 3 conmuta. En efecto, para ver que 3 conmuta es suficiente ver que conmuta desde $X \times 1$, ya que p_X es iso. Si seguimos el diagrama podemos obtener la conmutatividad que queremos. Las ecuaciones que lo muestran son:

$$\begin{aligned}
v\,!x\, p_X &= ev\,(x \times \ulcorner \chi_m \urcorner)\,(x \times id) && \text{diagrama exterior} \\
&= \chi_m\, p_A\,(x \times id) && \text{parte 1} \\
&= \chi_m\, x\, p_X && \text{parte 2.}
\end{aligned}$$

Con esto hemos concluido que 3 conmuta si y sólo si el exterior conmuta.

Ahora, si suponemos que $x \in_A m$, entonces existe $h\colon X \to S$ que hace conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "h"] \arrow[drr, bend left, "!_X"] \arrow[ddr, bend right, "x"'] & & \\
& S \arrow[r, "!_S"] \arrow[d, tail, "m"'] & 1 \arrow[d, "v"] \\
& A \arrow[r, "\chi_m"'] & \Omega.
\end{tikzcd} \tag{2}$$

De esto tenemos que la parte 3 de diagrama 1 conmuta. Así, el exterior conmuta. Por lo tanto $ev(x \times \ulcorner \chi_m \urcorner) = v_{X \times 1}$.

Por el lado contrario, si $ev(x \times \ulcorner \chi_m \urcorner) = v_{X \times 1}$, entonces el exterior del diagrama 1 conmuta. Así, la parte 3 del mismo diagrama es conmutativa. Esta parte es el exterior del diagrama 2. Por lo que podemos usar la propiedad universal del producto fibrado para obtener la existencia de $h\colon X \to S$ que hace conmutar el diagrama 2. Por lo tanto, $x \in_A m$.