Primera Tarea-Examen

Conjuntos Abstractos

Los ejercicios de esta sección se deben resolver en la categoría de conjuntos abstractos, $\mathscr{S}$, a menos que se indique lo contrario.

Ejercicio 1 Demuestra que $f\colon A \to B$ es mono si y sólo si f es inyectiva.

Ejercicio 2 Una flecha $f\colon A \to B$ es constante si se puede factorizar a través del terminal, es decir, existe $b\colon 1 \to B$ que hace conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "!_A"'] & & B \\ & 1. \arrow[ur, "b"'] & \end{tikzcd}$$

Muestra que $f\colon A \to B$ es constante si y sólo si para cualesquiera $a_1, a_2\colon 1 \to A$ se satisface $fa_1 = fa_2$.

Ejercicio 3 Sean $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$ flechas. Demuestra lo siguiente:

i) Si f y g son epi, entonces gf es epi.

ii) Si gf es epi, entonces g es epi.

Ejercicio 4 Sea $\mathbf{P}$ la categoría generada por el orden parcial $(P, \leq)$. Muestra que toda flecha en $\mathbf{P}$ es mono y epi. Con esto, da un ejemplo de una categoría en la que no se cumple que mono y epi implica iso.

Ejercicio 5 Dadas una categoría $\mathbf{A}$ y un objeto $A \in \mathbf{A}$, se define la categoría rebanada $\mathbf{A}/A$ mediante lo siguiente: los objetos son flechas en $\mathbf{A}$ de la forma $f\colon X \to A$ y dados dos objetos $f\colon X \to A$ y $g\colon Y \to A$, una flecha de f a g es una flecha $h\colon X \to Y$ en $\mathbf{A}$ tal que $g = hf$. Demuestra que $\mathbf{A}/A$ es una categoría.

Ejercicio 6 Muestra que para cualquier objeto A, la rebanada $\mathscr{S}/A$ tiene objetos terminal e inicial.

Ejercicio 7 Sea $m\colon S \rightarrowtail A$ un subobjeto y considera su flecha característica $\chi_m\colon A \to \Omega$. Demuestra que para cualquier elemento generalizado $x\colon X \to A$ se satisface:

$$x \in_A m \iff \chi_m x = \nu_X,$$

donde ν_X es la composición de $!_X\colon X \to 1$ con $\nu\colon 1 \to \Omega$.

Ejercicio 8 Sean $f\colon A \to B$ y $n\colon T \rightarrowtail B$. Usa el lema del producto fibrado para encontrar la característica de la imagen inversa $f^{-1}n$.

ZFC

Fórmulas y Clases

Ejercicio 9 Los siguientes enunciados son versiones "débiles" de los axiomas de par y potencia, respectivamente. Demuestra que éstos son equivalentes a sus contrapartes, los axiomas "no débiles" del par y potencia, respectivamente. En cada inciso indica claramente cuáles axiomas de ZFC se utilizan para probar la equivalencia.

i) $\forall x \forall y \exists p \forall w((w = x \lor w = y) \to w \in p)$ es al axioma débil del par.

ii) $\forall x \exists p \forall w(\forall z(z \in x \to z \in w) \to w \in p)$ es el axioma débil del potencia.

Ejercicio 10 Sea A un conjunto. Da condiciones necesarias y suficientes sobre cómo debe ser A para que la cualesquiera $\{x \mid \forall z \forall y((z \in A \land y \in z) \to x \in y)\}$ sea conjunto.

Ejercicio 11 Para cada inciso escribe una fórmula de primer orden en la teoría de conjuntos que describa el correspondiente concepto. En las fórmulas *únicamente* se pueden utilizar símbolos lógicos, paréntesis, cuantificadores, variables y el símolo '$\in$'; sin abreviaturas de lenguaje como '$\subseteq$', '$x = \varnothing$', '$x = \{y\}$', etcétera. Se puede abreviar una fórmuila *sólo si* ésta ya se escribió en un inciso anterior.

i) x es el conjunto par de y y z.

ii) x es el par ordenado de y y z.

iii) x es par ordenado.

iv) x es la primera entrada del par ordenado y.

v) x es la segunda entrada de un par ordenado.

vi) x es una relación.

vii) x es el dominio de la relación y.

viii) x es el campo de la relación y.

ix) $x = 0$.

x) $x = 1$.

xi) $x = 4$.

xii) x es la intersección de y.

xiii) x es elemento de la intersección de y.

xiv) x es la intersección de la intersección de y.

Sólo hay que dar las fórmula, no es necesario ningún tipo de justificación.

Conjuntos y álgebra de conjuntos

Ejercicio 12 Es un hecho que todas las colecciones de este ejercicio son conjuntos. Demuestra o refuta (con un contraejemplo) cuatro de los siguientes incisos, prueba todas tus afirmaciones.

i) $\bigcup\{\{x\},\{y\}\} = \{x, y\}$.

ii) $\bigcup\bigcup\bigcup\{\{\{x\}\}\} = x$.

iii) $\bigcup\{x\} = \varnothing$ y $x = \varnothing$ son equivalentes.

iv) Se da la igualdad $(x, y) = (a, b)$ únicamente si $x = a$ y $y = b$.

v) $\{x, y\} = \{a, b\}$ si y sólo si $x = a$ y $y = b$.

vi) $\mathscr{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$.

vii) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \notin \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

viii) Se tiene $\{\{x\}, \{x, y\}, \{x, y, z\}\} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ sólo cuando $x = a$, $y = b$ y $z = c$.

Ejercicio 13 Determina cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas, justifica tu respuesta con una demostración o un contraejemplo. Demuestra todas tus afirmaciones.

i) Para todo conjunto x existe un conjunto y tal que $x \not\subseteq y$

ii) Para todo conjunto x existe un conjunto y tal que $x \notin y$

Ejercicio 14 Todas las colecciones de este ejercicio son conjuntos. Prueba dos de los siguientes incisos:

I) $x \subseteq \mathscr{P}(y)$ si y sólo si $\bigcup x \subseteq y$.

II) Si $x \neq \varnothing$, $y \in \bigcap\{\mathscr{P}(a) \mid a \in x\}$ ocurre sólo si $y \subseteq \bigcup x$.

III) $\bigcup\{\mathscr{P}(a) \mid a \in x\} \subseteq \mathscr{P}(\bigcup x)$ pero no siempre $\bigcup\{\mathscr{P}(a) \mid a \in x\} \neq \mathscr{P}(\bigcup x)$.

IV) $(\bigcup x) \cap (\bigcup y) = \bigcup\{a \cap b \mid (a, b) \in x \times y\}$.

Ejercicio 15 Sean $X, Y, \mathscr{F}$ conjuntos tales que $\mathscr{F} \neq \varnothing$ y $f\colon X \to Y$ una función. Demuestra que las siguientes clases son conjuntos

I) $\langle \bigcup \mathscr{G} \mid \mathscr{G} \in \mathscr{F} \rangle$

II) $\langle x \mid \exists v \exists w \exists y \exists z (v \in \mathscr{F} \wedge w \in v \wedge y \in w \wedge z \in y \wedge x \in z) \rangle$

III) $\langle x \mid \forall \mathscr{G} \in \mathscr{F} \exists A \in \mathscr{G} (x \in A) \rangle$

IV) $\langle \mathscr{P}(A) \mid A \in \mathscr{F} \rangle$

V) $\langle A \times \mathscr{P}(A) \mid A \in \mathscr{F} \rangle$

VI) $\langle B \setminus (f[A]) \mid A \subseteq X \wedge B \in \mathscr{F} \rangle$