Tarea 1 - Solución

Profesor: Luis Jesús Turcio Cuevas
Ayudantes: Jesús Angel Cabrera Labastida,
Hugo Víctor García Martínez

EJ 1. Demuestra que $f\colon A \to B$ es mono si y sólo si f es inyectiva.

Solución. $(\rightarrow)$ Supongamos que f es mono y supóngase que $a_1, a_2\colon 1 \to A$ cumplen que $fa_1 = fa_2$. Entonces, por ser f mono se tiene que $a_1 = a_2$, mostrando que f es mono.

$(\leftarrow)$ Supongamos que f es inyectiva y sean $g, h\colon X \to A$ cualesquiera flechas tales que $fg = fh$. Se utilizará que 1 es separador para verificar que $g = h$. Supóngase que $x\colon 1 \to X$ es cualquiera, entonces como $fg = fh$ se tiene que $fgx = fhx$, por lo que $gx = hx$. Por lo tanto, de que 1 es separador, se desprende que $g = h$, mostrando que f es mono. $\blacksquare$

EJ 2. Sea $m\colon S \rightarrowtail A$ un subobjeto y considera su flecha característica $\varphi_m\colon A \to \Omega$. Demuestra que para cualquier elemento generalizado $x\colon X \to A$ se satisface: $x \in_A m \iff \varphi_m x = \nu_X$, donde ν_X es la composición de $!_X\colon X \to 1$ con $\nu\colon 1 \to \Omega$.

Solución. Sean $x : X \to A$ cualquier elemento generalizado y $\nu_X := \nu\, !_X$.

$(\rightarrow)$ Supóngase que $x \in_A m$, entonces por definición de la pertenencia relativa a A, existe $y : X \to S$ tal que $my = x$. Además $!_X =!_S y$; por ser 1 objeto terminal, y $\nu\, !_S = \varphi_m\, m$; por definición de flecha característica, todas las "partes internas" del siguiente diagrama conmutan:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "y"] \arrow[drr, bend left, "!_X"] \arrow[ddr, bend right, "x"'] & & \\
& S \arrow[r, "!_S"] \arrow[d, tail, "m"'] & 1 \arrow[d, "\nu"] \\
& A \arrow[r, "\varphi_m"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Por lo que el "exterior" del diagrama conmuta, y por lo tanto $\varphi_m\, x = \nu\, !_X = \nu_X$. Pero si el "movimiento de manos" no basta:

$$\begin{aligned}
\nu_X &= \nu\, !_X && \text{Def. de } \nu_X \\
&= \nu\, !_S\, y && \text{pues } !_X =!_S\, y \\
&= \varphi_m\, m\, y && \text{Def. de } \varphi_m \\
&= \varphi_m\, x && \text{Pues } my = x
\end{aligned}$$

$(\leftarrow)$ Supóngase que $\varphi_m x = \nu_X$, dado que $\nu_X = \nu!_X$, a consecuencia de lo anterior el siguiente diagrama conmuta "exteriormente":

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, bend left, "!_X"] \arrow[ddr, bend right, "x"'] & & \\
& S \arrow[r, "!_S"] \arrow[d, tail, "m"'] & 1 \arrow[d, "\nu"] \\
& A \arrow[r, "\varphi_m"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Siguéndose de la propiedad universal del producto fibrado (de nuevo, recordando la definición de la flecha característica φ_m), existe una única $h\colon X \to S$ de modo que:

$$m\, h = x \text{ , y}$$
$$!_S\, h =!_x$$

En particular $mh = x$, mostrando por definición de pertenencia relativa a A, que $x \in_A m$. $\blacksquare$

EJ 3. Demuestre las siguientes equivalencias o implicaciones. En cada inciso indique claramente qué ax.s de ZFC se utilizan durante la prueba.

i) El ax. de extensionalidad implica el enunciado $\forall x \forall y (\forall w (x \in w \leftrightarrow y \in w) \to x = y)$.

ii) El enunciado $\forall x \exists p \forall w (\forall z (z \in x \to z \in w) \to w \in p)$ es equivalente al ax. de potencia.

iii) El enunciado $\forall x \forall y \exists p \forall w (w \in p \leftrightarrow (w \in x \vee w = y))$ implica el ax. del par.

Demostración. **(i)** Supóngase el axioma de extensionalidad y sean x, y conjuntos cualesquiera tales que para todo conjunto w se tiene que $x \in w$ si y sólo si $y \in w$. Por el **axioma del par**, existe el conjunto $z = \{x, x\} = \{x\}$, así que en particular $x \in z$ si y sólo si $y \in z$. Dado que $x \in z$, entonces $y \in z$ y esto último ocurre sólo si $y = x$. Por lo tanto $x = y$.

*En esta prueba sólo se usa el **axioma del par**.*

(ii) $(\to)$ Supóngase que el enunciado $\forall x \exists p \forall w (\forall z (z \in x \to z \in w) \to w \in p)$ es verdadero y sea x cualquier conjunto. Por hipótesis, existe p tal que "$\forall w (\forall z (z \in x \to z \in w) \to w \in p)$" se satisface. Utilizando el **esquema de separación**, existe $p' := \{w \in p \mid \forall z (z \in x \to z \in w)\}$. Así:

$$\forall w (\forall z (z \in x \to z \in w) \leftrightarrow w \in p')$$

En efecto, sea w cualquier conjunto. Si "$\forall z (z \in x \to z \in w)$" se satisface, entonces $w \in p$ y debido a la definición de p' se tiene que $w \in p'$. Por otro lado, si $w \in p'$, entonces por definición de p', resulta que "$\forall z (z \in x \to z \in w)$" se satisface. Lo anterior es, el axioma de potencia.

$(\leftarrow)$ Supóngase el axioma de potencia y sea x cualquier conjunto. Por hipótesis, existe un conjunto p de tal modo que "$\forall w (\forall z (z \in x \to z \in w) \leftrightarrow w \in p')$" se satisface, en particular "$\forall w (\forall z (z \in x \to z \in w) \to w \in p')$" es verdadera.

*En esta prueba sólo se usa el **esquema de separación**.*

(iii) Supóngase que el enunciado "$\forall x \forall y \exists p \forall w (w \in p \leftrightarrow (w \in x \vee w = y))$" se satisface y sean x, y conjuntos cualesquiera. Por **axioma de existencia (vacío)**, existe un conjunto v tal que "$\forall w (w \in v \leftrightarrow w \neq w)$" se satisface.

Utilizando la hipótesis, existe un conjunto q de modo que "$\forall w (w \in q \leftrightarrow (w \in v \vee w = y))$" es verdadera. Como para cada conjunto w se tiene que "$w \in v$" es falsa (pues de lo contrario $w \neq w$), la anterior fórmula es equivalente a "$\forall w (w \in q \leftrightarrow w = y)$", es decir que $q = \{y\}$. Ahora, como q y x son conjuntos, por hipótesis existe un conjunto p de modo que la fórmula "$\forall w (w \in p \leftrightarrow (w \in q \vee w = x))$" se satisface. Pero como "$\forall w (w \in q \leftrightarrow w = y)$" es verdadera, de lo anterior se obtiene que "$\forall w (w \in p \leftrightarrow (w = y \vee w = x))$". Lo anterior demuestra el axioma del par.

*En esta prueba sólo se utilizó el **axioma de existencia (vacío)**.* ■

EJ 4. Todas las colecciones de este ejercicio son conjuntos. Prueba dos de los siguientes incisos:

i) $x \subseteq \mathscr{P}(y)$ si y sólo si $\bigcup x \subseteq y$.

ii) Si $x \neq \varnothing$, entonces $y \in \bigcap \{\mathscr{P}(a) \mid a \in x\}$ ocurre sólo si $y \subseteq \bigcap x$.

iii) $\bigcup\{\mathscr{P}(a) \mid a \in x\} \subseteq \mathscr{P}(\bigcup x)$ pero no siempre $\bigcup\{\mathscr{P}(a) \mid a \in x\} = \mathscr{P}(\bigcup x)$.

iv) $(\bigcup x) \cap (\bigcup y) = \bigcup\{a \cap b \mid (a, b) \in x \times y\}$.

Demostración. Demostraremos todos los incisos. Sean x y y conjuntos cualesquiera.

(i) ($\rightarrow$) Supóngase que $x \subseteq \mathscr{P}(y)$ y sea $k \in \bigcup x$ cualquier elemento. Por definición de la unión de un conjunto, existe $h \in x$ de modo que $k \in h$. Así que de la hipótesis, se obtiene $h \in \mathscr{P}(y)$, esto es, $h \subseteq y$ y con ello $k \in y$. Por lo tanto $\bigcup x \subseteq y$.

($\leftarrow$) Supóngase que $\bigcup x \subseteq y$ y sea $h \in x$ cualquier elemento. Verificar que $h \in \mathscr{P}(y)$ es equivalente a verificar que $h \subseteq y$. En efecto, sea $k \in h$ cualquier elemento, entonces $k \in \bigcup x$ por definición de la unión de un conjunto. Así que por hipótesis $k \in y$, esto demuestra que $h \subseteq y$; y a su vez, que $x \subseteq \mathscr{P}(y)$.

(ii) Asúmase que $x \neq \varnothing$.

($\rightarrow$) Supóngase que $y \in \bigcap\{\mathscr{P}(a) \mid a \in x\}$ y sea $b \in y$ cualquier elemento. Verifiquemos que $y \in \bigcap x$, en efecto, si $a \in x$ es cualquiera, entonces $y \in \mathscr{P}(a)$ debido a la hipótesis. Consecuentemente $y \subseteq a$ y $k \in a$, lo que demuestra que $k \in \bigcap x$ y así $y \subseteq \bigcap x$.

($\leftarrow$) Supóngase que $y \subseteq \bigcap x$. Verifiquemos que $y \in \bigcap\{\mathscr{P}(a) \mid a \in x\}$, en efecto, sea $a \in x$ cualquier elemento. De este modo, considerando cualquier $b \in y$ se obtiene de la hipótesis que $b \in \bigcap a$, así que $y \subseteq a$, o equivalentemente, $y \in \mathscr{P}(a)$. Lo anterior; al ser $a \in x$ cualquiera, es una prueba de que $y \in \bigcap\{\mathscr{P}(a) \mid a \in x\}$.

(iii) Considérese un elemento $k \in \bigcup\{\mathscr{P}(a) \mid a \in x\}$ cualquiera. Así, existe cierto $a \in x$ de modo que $k \in \mathscr{P}(X)$; esto es, $k \subseteq a$. Como $a \in x$, entonces $a \subseteq \bigcup x$, por lo que $k \subseteq \bigcup x$, o equivalentemente, $k \in \mathscr{P}(x)$. Demostrando que $\bigcup\{\mathscr{P}(a) \mid a \in x\} \subseteq \mathscr{P}(\bigcup x)$.

Para la segunda parte utilizaremos que $0 \neq 1$ (*moral: ¿por qué?*), sean $a := \{0\}$, $b := \{1\}$ y $x := \{a, b\}$. Todas estas colecciones son conjuntos (*moral: ¿por qué?*). Nótese que el conjunto $w := \{0, 1\}$ es subconjunto de la unión de x; en efecto, basta notar que $0 \in a$, $a \in x$, $1 \in b$ y $b \in x$, por lo que $w \in \mathscr{P}(x)$. Sin embargo $w \nsubseteq a$; pues $1 \in w$ y $1 \notin a$, así que $w \notin \mathscr{P}(a)$. Y $w \nsubseteq b$; pues $0 \in w$ y $0 \notin b$, así que $w \notin \mathscr{P}(b)$, demostrando que para cada $u \in x$ se tiene que $w \notin \mathscr{P}(u)$, o equivalentemente, $w \notin \bigcup\{\mathscr{P}(a) \mid a \in x\}$.

De lo anterior se tiene que $\bigcup\{\mathscr{P}(a) \mid a \in x\} \neq \mathscr{P}(\bigcup x)$ y esto no usa extensionalidad (al menos la parte "útil" de extensionalidad).

(iv) Como ambas colecciones son conjuntos, verifiquemos por extensionalidad (doble contencion) que $(\bigcup x) \cap (\bigcup y) = \bigcup\{a \cap b \mid (a, b) \in x \times y\}$.

($\subseteq$) Supóngase que $k \in (\bigcup x) \cap (\bigcup y)$ es cualquier elemento. Entonces $k \in \bigcup x$, $k \in \bigcup y$ y por definición de la unión de un conjunto, existen a, b con juntos con $a \in x$, $b \in y$ y $k \in a, b$. De lo anterior, $k \in a \cap b$ y además $(a, b) \in x \times y$ por la definición del producto cartesiano de dos conjuntos. Mostrando que $k \in \bigcup\{a \cap b \mid (a, b) \in x \times y\}$.

($\supseteq$) Supóngase ahora que $k \in \bigcup\{a \cap b \mid (a, b) \in x \times y\}$ es arbitrario. Entonces por definición de la unión de un conjunto, existe un elemento $(a, b) \in x \times y$ de modo que $k \in a \cap b$. De lo anterior se tiene que $k \in a$ y $k \in b$; más aún, dado que $a \in x$ y $b \in y$, se tiene que $x \in \bigcup x$ y $x \in \bigcup y$, respectivamente. Lo que prueba que $k \in (\bigcup x) \cap (\bigcup y)$. ■

EJ 5. Sean X un conjunto y f una función con dominio X. Prueba lo siguiente:

i) Si $A \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(X))$ es no vacío, entonces $f[\bigcap A] \subseteq \bigcap\{f[a] \mid a \in A\}$.

ii) f es inyectiva si y sólo si para cada $A \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(X))$ no vacío se da la contención $\bigcap\{f[a] \mid a \in A\} \subseteq f[\bigcap A]$.

Demostración. **(i)** Supóngase que $A \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(X))$ es no vacío y sea $y \in f[\bigcap A]$ cualquier elemento. Sea $a \in A$ cualquiera, como $y \in f[\bigcap A]$, existe $h \in \bigcap A$ de modo que $y = f(h)$. Obsérvese que así $h \in a$, implicando que $y = f(h) \in f[a]$. Por lo que $k \in \bigcap\{f[a] \mid a \in A\}$ y con ello $f[\bigcap A] \subseteq \bigcap\{f[a] \mid a \in A\}$.

(ii) $(\rightarrow)$ Supóngase que f es inyectiva y sea $A \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(X))\setminus\{\varnothing\}$ cualquiera, fíjese un elemento $a_0 \in A$. Sea $y \in \bigcap\{f[a] \mid a \in A\}$ cualquier elemento, como $a_0 \in A$, entonces $k \in f[a_0]$ y existe cierto $h \in a_0$ de modo que $y = f(h)$. Basta probar que $h \in \bigcap A$, en efecto, si $a \in A$ es cualquier elemento, entonces $y \in f[a]$ y con elllo, existe $h' \in a$ de modo que $y = f(h')$. De lo anterior se obtiene que $f(h) = f(h')$ y $h = h'$ dada la inyectividad de f, mostrando que $h \in a$, y por lo tanto $h \in \bigcap A$. Asi que $h \in f[\bigcap A]$ y en consecuencia $\bigcap\{f[a] \mid a \in A\} \subseteq f[\bigcap A]$.

$(\leftarrow)$ Recíprocamente prócedase por contrapuesta suponiendo que f es no inyectiva, entonces existen $x, y \in X$ tales que $x \neq y$ pero $f(x) = f(y)$. Así, $A := \{\{x\}, \{y\}\} \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(X)) \setminus \{\varnothing\}$ y:

$$\bigcap\{f[a] \mid a \in A\} \nsubseteq f\left[\bigcap A\right]$$

En efecto, nótese que $f(x) \in f[\{x\}]$ y $f(x) = f(y) \in f[\{y\}]$, por lo que para cada $a \in A$ se cumple $f(x) \in f[a]$, esto es $f(x) \in \bigcap\{f[a] \mid a \in A\}$. Sin embargo, de ocurrir $f(x) \in f[\bigcap A]$ se tendría que existe $h \in \bigcap A$ de modo que $f(x) = f(h)$. Pero esto es absurdo, pues como $x \neq y$, entonces $\bigcap A = \varnothing$. Por lo tanto $f(x) \notin f[\bigcap A]$ y por ende $\bigcap\{f[a] \mid a \in A\} \nsubseteq f[\bigcap A]$. ■

EJ 6. Sean X, Y conjuntos y $f : X \to Y$. Se define la función $g : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(Y)$ para cada $a \in \mathscr{P}(X)$ como $g(a) = \{y \in Y \mid f^{-1}[\{y\}] \subseteq a\}$.

i) Demuestra que si $a \in \mathscr{P}(X)$ y $b \in \mathscr{P}(Y)$, entonces $b \subseteq g(a)$ si y sólo si $f^{-1}[b] \subseteq a$.

ii) Prueba que para todo $A \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(X)) \setminus \{\varnothing\}$ se tiene $g(\bigcap A) = \bigcap\{g(a) \mid a \in A\}$.

Demostración. **(i)** Sean $a \in \mathscr{P}(X)$ y $b \in \mathscr{P}(Y)$ cualesquiera. $(\rightarrow)$ Si $b \subseteq g(a)$ entonces para cada $y \in b$ se tiene que $f^{-1}[\{y\}] \subseteq a$. Luego, si $x \in f^{-1}[b]$ es cualquiera entonces $f(x) \in B$; es decir, existe $y_0 \in B$ de modo que $f(x) = y_0$, con ello $x \in f^{-1}[\{y_0\}]$ y así $x \in a$, demostrando que $f^{-1}[b] \subseteq a$.

$(\leftarrow)$ Supóngase que $f^{-1}[b] \subseteq a$ y sea $k \in b$ cualquiera. Si $x \in f^{-1}[\{k\}]$ es arbitrario, entonces $f(x) = k \in B$ y entonces $x \in f^{-1}[b]$. Por hipótesis, se sigue de lo anterior que $x \in a$ y por lo tanto $f^{-1}[\{k\}] \subseteq a$. Lo anterior; probadao para cada $k \in b$, demuestra que $b \subseteq g(a)$.

(ii) Sea $A \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(X))\setminus\{\varnothing\}$ cualquiera, se verificará que $g(\bigcap A) = \bigcap\{g(a) \mid a \in A\}$ utilizando extensionalidad (doble contención), pues estos objetos son conjuntos.

$(\subseteq)$ Como $A \neq \varnothing$, dado el *Inciso ii) del Ejercicio 4 de esta Tarea*, para esta contención basta verificar que $g(\bigcap A) \in \bigcap\{\mathscr{P}(g(a)) \mid a \in A\}$. En efecto, si $a \in A$ es cualquiera entonces $\bigcap A \subseteq a$, siendo claro de la definición de g que $g(\bigcap A) \subseteq g(a)$, esto es $g(\bigcap A) \in \mathscr{P}(g(a))$.

($\supseteq$) Nótese que si $a \in \mathcal{A}$ es cualquiera, entonces $g(a) \subseteq g(a)$ y, por el *Inciso i) de este ejercicio*, se tiene $f^{-1}[g(a)] \subseteq a$. Así, $\bigcap\{f^{-1}[g(a)] \mid a \in \mathcal{A}\} \subseteq \bigcap \mathcal{A}$ y como se mostró en clase, *la imagen inversa preserva intersecciones*, con lo cual $f^{-1}[\bigcap\{g(a) \mid a \in \mathcal{A}\}] \subseteq \bigcap \mathcal{A}$. Por el *Inciso i) de este ejercicio* esto prueba que $\bigcap\{g(a) \mid a \in \mathcal{A}\} \subseteq g(\bigcap \mathcal{A})$. ■