Tarea 3 (Solución)

Álgebra Superior 1, 2025-4

Profesor: Luis Jesús Trucio Cuevas.
Ayudante: Hugo Víctor García Martínez.

Ej. 1 (2.5 pts) Se dice que una función $h : X \to Y$ es **constante** si y sólo si para cualesquiera $x, y \in X$ se tiene que $h(x) = h(y)$.

i) Demuestra que la composición de funciones constantes es una función constante.

ii) Encuentra dos funciones *no* constantes; $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ y $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, cuya composición (la función $g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$) sea constante.

Solución. (i) Supongamos que $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son funciones constantes. Como $g \circ f$ tiene dominio A y codominio C, habremos de verificar que:

$$\forall x, y \in A\big((g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)\big)$$

En efecto, sean $x, y \in A$ cualesquiera, entonces:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g\big(f(x)\big) && \text{Def. de composición} \\ &= g\big(f(y)\big) && f \text{ es constante} \\ &= (g \circ f)(y) && \text{Def. de composición} \end{aligned}$$

por lo que $g \circ f$ es constante.

(ii) Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida como $f(n) = 0$ si n es par; y, $f(n) = 1$ si n es impar. Y definimos $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ como $g(z) = z(z-1)$.

Notemos que f no es constante, ya que $f(2) = 0$, $f(1) = 1$ y $2 \neq 1$; y, g tampoco es constante, ya que $g(2) = 2$, $g(3) = 6$ y $2 \neq 3$. Sin embargo, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:

a) Si n es par, entonces $f(n) = 0$ y $g\big(f(n)\big) = g(0) = 0$.

b) Si n es impar, entonces $f(n) = 0$ y $g\big(f(n)\big) = g(1) = 0$.

Por lo tanto, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{N}$, $(g \circ f)(x) = 0 = (g \circ f)(y)$, probando que $g \circ f$ es constante. $\Diamond$

Ej. 2 (2.5 pts) En cada inciso, determina si la correspondiente función es inyectiva, sobreyectiva, o biyectiva. Demuestra la conclusión a la que llegaste (es decir, prueba si la función tiene o no la propiedad que se afrima).

i) $h : \{0,1,2\} \to \{x,y\}$ definida como $h = \{(0,x),(1,x),(2,y)\}$, aquí $x \neq y$.

ii) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada, para cada $x \in \mathbb{R}$, por $g(x) = 4x + 55$.

iii) $f : \mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ dada, para cada $n \in \mathbb{N}$, por $f(n) = \{0,n\}$.

Solución. (i) Notese que $x \in \text{ima}(h)$ ya que $x = h(0)$; y, $y \in \text{ima}(h)$ pues $y = h(1)$. Por lo tanto $\{x,y\} \subseteq \text{ima}(h)$, y como $\{x,y\}$ es codominio de h, $\text{ima}(h) \subseteq \{x,y\}$. Así que $\text{ima}(h) = \{x,y\}$, esto es, h **es sobreyectiva**.

Pero h **no es inyectiva**, pues $h(0) = h(1) = x$ y $0 \neq 1$. Así, h **tampoco es biyectiva**.

(ii) Esta funcion es biyectiva, en efecto, si $x, y \in \mathbb{R}$ son tales que $g(x) = g(y)$, entonces $4x+55 = 4y + 55$, de donde $4x = 4y$ y con ello $x = y$; esto es, g **es inyectiva**.

Por otra parte, si $r \in \mathbb{R}$ es cualquiera, $t := \frac{r-55}{4}$ es un elemento de $\text{dom}(g) = \mathbb{R}$ que satisface:

$$g(t) = g\Big(\frac{r-55}{4}\Big) = 4\Big(\frac{r-55}{4}\Big) + 55 = (r-55) + 55 = r$$

lo cual prueba, por la arbitrariedad de r, que g **es sobreyectiva**. Así, g **es biyectiva**.

(iii) Por último, f no es sorbeyectiva. Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $0 \in f(n) = \{0,n\}$, esto implica que $f(n) \neq \varnothing$, así que $\forall n \in f(n) \neq \varnothing$, lo cual muestra que $\varnothing$ no está en la imagen de f. Pero $\varnothing$ es un eleemento de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, ya que $\varnothing \subseteq \mathbb{N}$, de forma que $\text{ima}(f) \neq \mathscr{P}(\mathbb{N})$, mostrando que f **no es sobreyectiva**, así, **tampoco es biyectiva**.

Ahora, f sí es inyectiva. En efecto, sean $n, m \in \mathbb{N}$ y supongamos que $f(n) = f(m)$, entonces $\{0,n\} = \{0,m\}$[1], como $n \in \{0,m\}$ entonces $n = 0$ o $n = m$ (por definición de par) y se tienen dos casos:

i) Si $n = 0$, $\{0,n\} = \{0,0\} = \{0\}$; pero por hipótesis, $\{0,n\} = \{0,m\}$; asi que $\{0,m\} = \{0\}$. Como $m \in \{0,m\} = \{0\}$, es necesario que $m = 0$. En este caso $n = m$ (ambos son 0).

ii) Si $n = m$, entonces en este caso $n = m$.

En cualquier caso $n = m$, mostrando que $\forall n, m \in \mathbb{N}\big(f(n) = f(m) \to n = m\big)$, es decir f **es inyectiva**. $\Diamond$

Ej. 3 (2.5 pts) Sean A y B conjuntos arbitrarios y $f : A \to B$. Demuestra que las siguientes proposiciones son equivalentes:

i) $\forall X \subseteq A\ \forall Y \subseteq A\ \big(f[X \setminus Y] \subseteq f[X] \setminus f[Y]\big)$.

ii) $\forall U \subseteq A\ \forall V \subseteq A\ \big(f[U] \cap f[V] \subseteq f[U \cap V]\big)$.

[1] Como esta igualdad *no es de pares ordenados* no se puede concluir directo que $0 = 0$ y $n = m$, hay que hacer algo mas.

Demostración. (i) $\to$ (ii) Supongamos que $\forall X \subseteq A\ \forall Y \subseteq A\ \big(f[X \setminus Y] \subseteq f[X] \setminus f[Y]\big)$. Veamos que $\forall U \subseteq A\ \forall V \subseteq A\ \big(f[U] \cap f[V] \subseteq f[U \cap V]\big)$

Sean U, V subconjuntos de A, veamos que ocurre la contención $f[U] \cap f[V] \subseteq f[U \cap V]$. Efectivamente, sea $l \in f[U] \cap f[V]$ cualquier elemento. Así, existen $u \in U$ y $v \in V$ tales que $l = f(u)$ y $l = f(v)$. Como $\{u\}, \{v\} \subseteq A$, por hipótesis se tiene que:

$$f[\{u\} \setminus \{v\}] \subseteq f[\{u\}] \setminus f[\{v\}]$$

pero $f[\{u\}] \setminus f[\{v\}] = \{l\} \setminus \{l\} = \varnothing$, por lo que $f[\{u\} \setminus \{v\}] = \varnothing$ y así $\{u\} \setminus \{v\} = \varnothing$, luego $\{u\} \subseteq \{v\}$ y por lo tanto $u = v$. Esto prueba que $u \in V$, así que $u \in U \cap V$ y como $l = f(u)$, entonces $l \in f[U \cap V]$. Por lo que $f[U] \cap f[V] \subseteq f[U \cap V]$.

(ii) $\to$ (i) Supongamos que $\forall U \subseteq A\ \forall V \subseteq A\ \big(f[U] \cap f[V] \subseteq f[U \cap V]\big)$, veamos que se satisface $\forall X \subseteq A\ \forall Y \subseteq A\ \big(f[X \setminus Y] \subseteq f[X] \setminus f[Y]\big)$.

Supongamos que $X, Y \subseteq A$, verifiquemos que $f[X \setminus Y] \subseteq f[X] \setminus f[Y]$. Sea $l \in f[X \setminus Y]$ cualquiera, entonces existe $x \in X \setminus Y$ tal que $l = f(x)$. Esto muestra que $l \in f[X]$ (ya que $x \in X$), resta ver entonces que $l \notin f[Y]$.

Por contradicción, supongamos que $l \in f[Y]$, entonces existe $y \in Y$ tal que $l = f(y)$, pero, como $\{x\}, \{y\} \subseteq A$, aplicando la hipótesis se tiene que:

$$f[\{x\}] \cap f[\{y\}] \subseteq f[\{x\} \cap \{y\}]$$

pero $l \in f[\{x\}] \cap f[\{y\}]$, entonces $l \in f[\{x\} \cap \{y\}]$, lo cual implica que $\{x\} \cap \{y\} \neq \varnothing$, por lo que $x = y$. Esto es un absurdo, ya que $x \in X \setminus Y$ y $y \ni Y$. El absurdo surge de suponer que $l \in f[Y]$, por lo tanto $l \notin f[Y]$, y asi $l \in f[X] \setminus f[Y]$, lo cual demuestra $f[X \setminus Y] \subseteq f[X] \setminus f[Y]$. ■

Ej. 4 (2.5 pts) Sean X, Y y A conjuntos tales que $A \subseteq X$ y sea $f : X \to Y$ cualquier función. Definamos $i : A \to X$ para cada $a \in A$ como $i(a) = a$. Demuestra que para cualquier subconjunto $B \subseteq Y$ se da la igualdad $(f \circ i)^{-1}[B] = A \cap f^{-1}[B]$.

Demostración. Sea $B \subseteq Y$ cualquera, veamos que $(f \circ i)^{-1}[B] = A \cap f^{-1}[B]$.

($\subseteq$) Sea $x \in (f \circ i)^{-1}[B]$, entonces $\big(f \circ i\big)(x) \in B$. Por definición de composición y de i: $\big(f \circ i\big)(x) = f\big(i(x)\big) = f(x)$, así que $f(x) \in B$ y con ello $x \in f^{-1}[B]$. Además, como $\mathrm{dom}(f \circ i) = A$, entonces $(f \circ i)^{-1}[B] \subseteq A$, por lo que $x \in A$. Esto es, $x \in A \cap f^{-1}[B]$, por lo que:

$$(f \circ i)^{-1}[B] \subseteq A \cap f^{-1}[B]$$

($\supseteq$) Sea $y \in A \cap f^{-1}[B]$ cualquiera. Entonces $y \in A$ y $y \in f^{-1}[B]$, de esto último $f(y) \in B$. Además, dado que $y \in A$, entonces $\big(f \circ i\big)(y) = f\big(i(y)\big) = f(y)$, por lo que $\big(f \circ i\big)(y) \in B$, mostrando que $y \in (f \circ i)^{-1}[B]$.

$$A \cap f^{-1}[B] \subseteq (f \circ i)^{-1}[B]$$

■