

Tarea 1 (Solución)

Álgebra Superior 1, 2025-4

Profesor: Luis Jesús Trucio Cuevas.
Ayudante: Hugo Víctor García Martínez.

Ej. 1 (1 pt) Demuestra las siguientes equivalencias lógicas.

i) $\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \equiv \alpha$.

iii) $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma).$

ii) $\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \equiv \alpha$.

iv) $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$.

Demostración. Se probará cada inciso utilizando la definición de equivalencia lógica, esto es, coincidencia total en las tablas de verdad.

i) $\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \equiv \alpha$.

α	β	α	\wedge	$(\alpha$	\vee	$\beta)$
1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	0
0	1	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0

ii) $\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \equiv \alpha$.

α	β	α	\vee	$(\alpha$	\wedge	$\beta)$
1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0

iii) $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma).$

α	β	γ	α	\vee	$(\beta \wedge \gamma)$	$(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

iv) $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$.

α	β	\neg	$(\alpha$	\wedge	$\beta)$	$\neg\alpha$	\vee	$\neg\beta$
1	1	0	1	1	1	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	0
0	0	1	0	0	0	1	1	1

Finalizando la demostración de cada inciso. ■

Ej. 2 (1 pt) Escribe fórmulas lógicas (de primer orden) que, a tu criterio, capturen mejor cada una de las siguientes afirmaciones.

- | | |
|---------------------------------|------------------------------------------------------------------------|
| i) Cada persona viva respira. | iv) No existen estudiantes en Ciudad Universitaria que sean felices. |
| ii) 2 es el único primo par. | |
| iii) Existe un hombre inmortal. | v) Todos los peces del acuario de la facultad se aparean con otro pez. |

Solución. (i) Tomando $\alpha(x)$: “ x es persona”, $\beta(x)$: “ x está viva” y $\gamma(x)$: “ x respira”, se tiene que:

$$\begin{aligned} \text{“Cada persona viva respira”} &\Leftrightarrow \text{“Para todo } x, \text{ si } x \text{ es persona y } x \text{ está viva, entonces } x \text{ respira”} \\ &\Leftrightarrow \forall x((\alpha(x) \wedge \beta(x)) \rightarrow \gamma(x)) \end{aligned}$$

(ii) Considerando las propiedades $\alpha(x)$: “ x es primio” y $\beta(x)$: “ x es par”, la traducción de este inciso queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{“2 es el único primo par.”} &\Leftrightarrow \text{“2 es primo y par y, para todo } n, \text{ si } n \text{ es primo y par, entonces } n \text{ es 2”} \\ &\Leftrightarrow (\alpha(2) \wedge \beta(2)) \wedge \forall n((\alpha(n) \wedge \beta(n)) \rightarrow n = 2) \end{aligned}$$

(iii) Si $\alpha(x)$: “ x es hombre” y $\gamma(x)$: “ x es mortal”, entonces:

$$\text{“Existe un hombre inmortal”} \Leftrightarrow \exists x(\alpha(x) \wedge \neg\gamma(x))$$

(iv) Tomemos $\alpha(x)$: “ x es estudiante de Ciudad Universitaria” y $\beta(x)$: “ x es feliz”, así:

$$\begin{aligned} \text{“No existen estudiantes en Ciudad Universitaria que sean felices”} &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \text{“Es falso que existe cierto } x \text{ tal que: } x \text{ es estudiante de Ciudad Universitaria y } x \text{ es feliz”} \\ &\Leftrightarrow \neg(\exists x(\alpha(x) \wedge \beta(x))) \end{aligned}$$

(iv) Si $\alpha(x)$: “ x es un pez del acuario de la facultad” y $\beta(x, y)$: “ x y y se aparean”, la traducción queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \text{“Todos los peces del acuario de la facultad se aparean con otro pez”} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \text{“Para cualquier } x, \text{ si } x \text{ es un pez del acuario de la facultad, entonces existe } w \\ & \text{tal que } w \text{ es pez del acuario de la facultad, y, } x \text{ se aparea con } w\text{”} \\ & \Leftrightarrow \forall x (\alpha(x) \rightarrow \exists w (\alpha(w) \wedge \beta(x, w))) \end{aligned}$$

Si se considera que cada pez del acuario de la facultad se aparea con un pez **distinto**, la traducción queda como:

$$\forall x (\alpha(x) \rightarrow \exists w (\alpha(w) \wedge \beta(x, w) \wedge x \neq w))$$

y también es válida. ◇

Ej. 3 (1 pt) Escribe la negación de las siguientes proposiciones. Si el inciso está en español, escribe tu respuesta en español.

- | | | |
|---------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| i) $\alpha \leftrightarrow \beta$. | iv) $\exists x (\alpha(x) \wedge (\beta(x) \wedge \gamma(x)))$. | vii) Si n es un número primo y es mayor que 4, n es impar. |
| ii) $\neg \alpha \rightarrow \gamma$. | v) $\forall a (\alpha(a) \rightarrow \exists b (\beta(a, b)))$. | viii) Hay cierto elemento en A que es real, pero no entero. |
| iii) $\gamma \rightarrow (\delta \rightarrow \gamma)$. | vi) $\exists b \forall x (\forall y (\alpha(y)) \leftrightarrow (Q(x, y) \wedge R(b)))$. | |

Solución. (i) Como $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$, entonces:

$$\begin{aligned} \neg(\alpha \wedge \beta) &\equiv \neg((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)) && \text{Equivalencia de } \leftrightarrow \\ &\equiv \neg(\alpha \rightarrow \beta) \vee \neg(\beta \rightarrow \alpha) && \text{Ley de De Morgan} \\ &\equiv (\alpha \wedge \neg\beta) \vee (\beta \wedge \neg\alpha) && \text{Negación de } \rightarrow \end{aligned}$$

(ii) Utilizando la negación de la implicación:

$$\neg(\neg\alpha \rightarrow \gamma) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\gamma \quad \text{Negación de } \rightarrow$$

(iii) De nuevo, utilizando la negación de la implicación:

$$\begin{aligned} \neg(\gamma \rightarrow (\delta \rightarrow \gamma)) &\equiv \gamma \wedge \neg(\delta \rightarrow \gamma) && \text{Negación de } \rightarrow \\ &\equiv \gamma \wedge (\delta \wedge \neg\gamma) && \text{Negación de } \rightarrow \\ &\equiv \gamma \wedge (\neg\gamma \wedge \delta) && \text{Conmutatividad de } \wedge \\ &\equiv (\gamma \wedge \neg\gamma) \wedge \delta && \text{Asociatividad de } \wedge \\ &\equiv \perp \wedge \delta && \gamma \wedge \neg\gamma \text{ siempre es contradicción} \\ &\equiv \perp && \perp \wedge P \text{ siempre es contradicción} \end{aligned}$$

(iv) La negación de $\exists x(\alpha(x) \wedge (\beta(x) \wedge \gamma(x)))$ es:

$$\begin{aligned}
 \neg(\exists x(\alpha(x) \wedge (\beta(x) \wedge \gamma(x)))) &\equiv \forall x(\neg(\alpha(x) \wedge (\beta(x) \wedge \gamma(x)))) && \text{Negación de } \exists \\
 &\equiv \forall x(\neg\alpha(x) \vee \neg(\beta(x) \wedge \gamma(x))) && \text{Ley de De Morgan} \\
 &\equiv \forall x(\neg\alpha(x) \vee (\neg\beta(x) \vee \neg\gamma(x))) && \text{Ley de De Morgan} \\
 &\equiv \forall x(\alpha(x) \rightarrow (\neg\beta(x) \vee \neg\gamma(x))) && \neg P \vee Q \equiv P \rightarrow Q
 \end{aligned}$$

(v) La negación de $\forall a(\alpha(a) \rightarrow \exists b(\beta(a, b)))$ es:

$$\begin{aligned}
 \neg(\forall a(\alpha(a) \rightarrow \exists b(\beta(a, b)))) &\equiv \exists a(\neg(\alpha(a) \rightarrow \exists b(\beta(a, b)))) && \text{Negación de } \forall \\
 &\equiv \exists a(\neg\alpha(a) \wedge \neg(\exists b(\beta(a, b)))) && \text{Negación de } \rightarrow \\
 &\equiv \exists a(\neg\alpha(a) \wedge \forall b(\neg\beta(a, b))) && \text{Negación de } \exists
 \end{aligned}$$

(vi) La negación de $\exists b\forall x(\forall y(\alpha(y)) \leftrightarrow (Q(x, y) \wedge R(b)))$ es:

$$\begin{aligned}
 \neg(\exists b\forall x(\forall y(\alpha(y)) \leftrightarrow (Q(x, y) \wedge R(b)))) &\equiv \\
 &\equiv \forall b(\neg\forall x(\forall y(\alpha(y)) \leftrightarrow (Q(x, y) \wedge R(b)))) && \text{Negación de } \exists \\
 &\equiv \forall b\exists x(\neg(\forall y(\alpha(y)) \leftrightarrow (Q(x, y) \wedge R(b)))) && \text{Negación de } \forall \\
 &\equiv \forall b\exists x((\forall y(\alpha(y)) \wedge \neg(Q(x, y) \wedge R(b))) \vee ((Q(x, y) \wedge R(b)) \wedge \neg(\forall y(\alpha(y)))))) && \text{Negación de } \leftrightarrow, \text{ inciso (i)} \\
 &\equiv \forall b\exists x((\forall y(\alpha(y)) \wedge (\neg Q(x, y) \vee \neg R(b))) \vee ((Q(x, y) \wedge R(b)) \wedge \neg(\forall y(\alpha(y)))))) && \text{Ley de De Morgan} \\
 &\equiv \forall b\exists x((\forall y(\alpha(y)) \wedge (\neg Q(x, y) \vee \neg R(b))) \vee ((Q(x, y) \wedge R(b)) \wedge \exists y(\neg\alpha(y)))) && \text{Negación de } \forall
 \end{aligned}$$

(vii) “Si n es un número primo y es mayor que 4, n es impar” es una proposición de la forma “ $(\alpha(n) \wedge \beta(n)) \rightarrow \gamma(n)$ ”; donde $\alpha(x)$: “ x es número primo”, $\beta(x)$: “ $x > 4$ ” y $\gamma(x)$: “ x es impar”. Dado que:

$$\neg((\alpha(n) \wedge \beta(n)) \rightarrow \gamma(n)) \equiv (\alpha(n) \wedge \beta(n)) \wedge \neg\gamma(n) \quad \text{Negación de } \rightarrow$$

la negación del enunciado original es: “ n es un número primo, mayor que 4 y es par”.

(v) “Hay cierto elemento en A que es real, pero no entero” es una proposición (o fórmula) de la forma “ $\exists x(x \in A \wedge (\alpha(x) \wedge \neg\beta(x)))$ ”; donde, $\alpha(x)$: “ x es real” y $\beta(x)$: “ x es entero”. Dado que:

$$\begin{aligned}\neg(\exists x(x \in A \wedge (\alpha(x) \wedge \neg\beta(x)))) &\equiv \forall x(\neg(x \in A \wedge (\alpha(x) \wedge \neg\beta(x)))) && \text{Negación de } \exists \\ &\equiv \forall x(x \in A \rightarrow \neg(\alpha(x) \wedge \neg\beta(x))) && \neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \alpha \rightarrow \neg\beta \\ &\equiv \forall x(x \in A \rightarrow (\alpha(x) \rightarrow \beta(x))) && \neg(\alpha \wedge \neg\beta) \equiv \alpha \rightarrow \beta \\ &\equiv \forall x((x \in A \wedge \alpha(x)) \rightarrow \beta(x)) && P \rightarrow (Q \rightarrow R) \equiv (P \wedge Q) \rightarrow R\end{aligned}$$

la negación del enunciado original es: “Todo elemento de A que sea real, es entero”. \diamond

Ej. 4 (1 pt) Indica cuáles de las siguientes proposiciones son tautologías, cuáles son contradicciones, y, para las contingentes, da una equivalencia lógica que utilice únicamente los conectivos negación (\neg) y disyunción (\vee). No es necesario justificar.

- | | | |
|--------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| i) $\neg(\gamma \wedge \gamma)$. | iv) $\alpha \vee (\alpha \wedge \beta)$. | vii) $\neg\delta \leftrightarrow \delta$. |
| ii) $\alpha \rightarrow \alpha$. | v) $\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$. | viii) $(\gamma \rightarrow \eta) \rightarrow (\neg\eta \rightarrow \neg\gamma)$. |
| iii) $\alpha \wedge (\alpha \vee \beta)$. | vi) $(\neg\gamma \wedge (\neg\gamma \vee \beta)) \leftrightarrow \gamma$. | ix) $\beta \wedge \alpha$. |

Solución. Las proposiciones (ii), (v) y (viii) son tautologías; mientras que, (vi) y (vii) son contradicciones; además:

- i) $\neg(\gamma \wedge \gamma) \equiv \neg\gamma$.
- iii) $\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \equiv \alpha$.
- iv) $\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \equiv \alpha$.
- ix) $\beta \wedge \alpha \equiv \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$.

son equivalencias lógicas para (iii), (iv) y (ix) que utilizan únicamente negación y disyunción. \diamond

Ej. 5 (1 pt) Traduce las siguientes equivalencias lógicas a igualdades entre conjuntos. Demuestra las igualdades que propusiste.

- | | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| i) $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$. | ii) $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$. |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|

Solución. (i) Si A, B, C son conjuntos, esta equivalencia se traduce como:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Para probar tal igualdad, consideremos cualquier objeto matemático x , entonces:

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \cap C && \text{Definición de } \cup \\ &\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) && \text{Definición de } \cap \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \vee x \in C) && \alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C) && \text{Definición de } \cap \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup x \in (A \cap C) && \text{Definición de } \cup \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\forall x(x \in A \cup (B \cap C) \leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup x \in (A \cap C))$ es verdadera, probando que $A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup x \in (A \cap C)$.

(ii) Si A, B y X son conjuntos, esta equivalencia se traduce a la igualdad:

$$X \setminus (X \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$$

Y su demostración consiste en considerar cualquier objeto x y observar que:

$$\begin{aligned} x \in X \setminus (A \cap B) &\Leftrightarrow x \in X \wedge \neg(x \in (A \cap B)) && \text{Definición de } \setminus \\ &\Leftrightarrow x \in X \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B) && \text{Definición de } \cap \\ &\Leftrightarrow x \in X \wedge (\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)) && \neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta \\ &\Leftrightarrow (x \in X \wedge \neg(x \in A)) \vee (x \in X \wedge \neg(x \in B)) && \text{Distribución de } \wedge \text{ en } \vee \\ &\Leftrightarrow x \in X \setminus A \vee x \in X \setminus B && \text{Definición de } \setminus \\ &\Leftrightarrow x \in (X \setminus A) \cup (X \setminus B) && \text{Definición de } \cup \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\forall x(x \in X \setminus (A \cap B) \leftrightarrow x \in (X \setminus A) \cup (X \setminus B))$ es verdadera, demostrando así la igualdad de conjuntos: $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$. \diamond

Ej. 6 (1 pt) Sean A y X conjuntos de modo que $A \subseteq X$. Demuestra *un inciso* de cada una de las siguientes columnas (tres igualdades en total).

- | | | |
|-------------------------------------|----------------------|---------------------------------------------|
| i) $A \cap \emptyset = \emptyset$. | iv) $A \cap X = A$. | vii) $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$. |
| ii) $A \cup \emptyset = A$. | v) $A \cup X = X$. | viii) $A \cup (X \setminus A) = X$. |
| iii) $A \cup A = A$. | vi) $A \cap A = A$. | ix) $X \setminus (X \setminus A) = A$. |

Demostración. Probaremos (ii), (iv) y (ix). Para ser ilustrativos, en cada inciso utilizaremos un “método” distinto, pero en cada inciso se puede emplear el método que se desee.

(i) Para verificar que $A \cup \emptyset = A$, habrá de mostrarse que:

$$\forall x(x \in A \cup \emptyset \leftrightarrow x \in A) \equiv \forall x((x \in A \vee x \in \emptyset) \leftrightarrow x \in A)$$

es verdadera.

Y efectivamente, sea x cualquier objeto. Por definición de vacío “ $x \in \emptyset$ ” es siempre falsa, por ello, los renglones primero y tercero de la siguiente tabla nunca ocurren:

$x \in A$	$x \in \emptyset$	$(x \in A \vee x \in \emptyset)$	\leftrightarrow	$x \in A$
1	1	1	1	1
1	0	1	1	1
0	1	1	0	0
0	0	0	1	0

Como en los demás renglones, “ $(x \in A \vee x \in \emptyset) \leftrightarrow x \in A$ ” es verdadera, se ha mostrado que “ $\forall x((x \in A \vee x \in \emptyset) \leftrightarrow x \in A)$ ” es verdadera. Por lo tanto, “ $\forall x(x \in A \cup \emptyset \leftrightarrow x \in A)$ ” es verdadera; y así, se tiene que $A \cup \emptyset = A$.

(ii) Se demostrará por doble contención que:

$$A \cap X = A$$

(\subseteq) Supongamos que $x \in A \cap X$, entonces por definición de intersección $x \in A$ y $x \in X$. Particularmente, $x \in A$. Así, “ $x \in A \cap X \rightarrow x \in A$ ” es verdadera. Como x fue cualquier objeto, entonces “ $\forall x(x \in A \cap X \rightarrow x \in A)$ ” es verdadera; es decir, $A \cap X \subseteq A$.

(\supseteq) Supongamos que $x \in A$. Dado que $A \subseteq X$ y

(iii) Sea x cualquier objeto, entonces:

$$\begin{aligned}
 x \in X \setminus (X \setminus A) &\Leftrightarrow x \in X \wedge \neg(x \in X \setminus A) && \text{Definición de } \setminus \\
 &\Leftrightarrow x \in X \wedge \neg(x \in X \wedge \neg(x \in A)) && \text{Definición de } \setminus \\
 &\Leftrightarrow x \in X \wedge (\neg(x \in X) \vee \neg\neg(x \in A)) && \text{Ley de De Morgan} \\
 &\Leftrightarrow x \in X \wedge (\neg(x \in X) \vee x \in A) && \text{Doble negación} \\
 &\Leftrightarrow (x \in X \wedge \neg(x \in X)) \vee (x \in X \wedge x \in A) && \text{Distribución de } \wedge \text{ en } \vee \\
 &\Leftrightarrow \perp \vee (x \in X \wedge x \in A) && \gamma \wedge \neg\gamma \text{ es contradicción} \\
 &\Leftrightarrow x \in X \wedge x \in A && \perp \vee \gamma \equiv \gamma \\
 &\Leftrightarrow x \in X \cap A && \text{Definición de } \cap \\
 &\Leftrightarrow x \in A && \text{Como } A \subseteq X, \text{ se puede aplicar el inciso anterior}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\forall x(x \in X \setminus (X \setminus A) \leftrightarrow x \in A)$ es verdadera, mostrando así que $X \setminus (X \setminus A) = A$. ■

Ej. 7 (1 pt) Denotamos por $A \Delta B$ a la diferencia simétrica entre los conjuntos A y B . Demuestra que $A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$.

Demostración. Utilizaremos la siguiente equivalencia vista (y probada) en clase:

$$x \in X \Delta Y \Leftrightarrow x \in X | x \in Y \quad (*)$$

donde $|$ denota el “o exclusivo”. Además utilizaremos el siguiente Lema:

Lema. $(\alpha | \beta) | (\alpha \wedge \beta) \equiv \alpha \vee \beta$.

Demostración. Basta verificar la tabla de verdad de ambas proposiciones.

α	β	$(\alpha$	$ $	$\beta)$	$ $	$(\alpha$	\wedge	$\beta)$	α	\vee	β
1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Lo cual finaliza la prueba del Lema. \square

De esta manera, para cualquier objeto x , se tiene:

$$\begin{aligned}
 x \in (A \Delta B) \Delta (A \cap B) &\Leftrightarrow x \in A \Delta B | x \in A \cap B && \text{Por } (*) \\
 &\Leftrightarrow (x \in A | x \in B) | x \in A \cap B && \text{Por } (*) \\
 &\Leftrightarrow (x \in A | x \in B) | (x \in A \wedge x \in B) && \text{Definición de } \cap \\
 &\Leftrightarrow x \in A \vee x \in B && \text{Lema} \\
 &\Leftrightarrow x \in A \cup B && \text{Definición de } \cup
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, “ $\forall x(x \in (A \Delta B) \Delta (A \cap B) \leftrightarrow x \in A \cup B)$ ” es verdadera, esto es, $(A \Delta B) \Delta (A \cap B) = A \cup B$. \blacksquare

Ej. 8 (1 pt) Sean A y B conjuntos. Demuestra que:

i) $A \subseteq A \cap B$ si y sólo si $A \subseteq B$.

ii) $A \cup B \subseteq B$ si y sólo si $A \subseteq B$.

Demostración. (i) Veamos que $A \subseteq A \cap B$ si y sólo si $A \subseteq B$. (\Rightarrow) Supongamos que $A \subseteq A \cap B$, veamos por definición que $A \subseteq B$. Sea $x \in A$ cualquier elementom, como $A \subseteq A \cap B$, entonces $x \in A$ y $x \in B$. Particularmente $x \in B$. Así, hemos mostrado que $x \in A \rightarrow x \in B$ es verdadera, y esto, para cualquier objeto x . Por lo tanto $A \subseteq B$.

(\Leftarrow) Supongamos que $A \subseteq B$, veamos por definición que $A \subseteq A \cap B$. Sea $x \in A$ cualquier elemento, como $A \subseteq B$, entonces $x \in B$. Por ello, $x \in A$ y $x \in B$ son verdaderas, así que $x \in A \wedge x \in B$ también es verdadera. Luego, hemos probado que $x \in A \rightarrow (x \in A \wedge x \in B)$ es verdadera, y esto, para todo objeto x . Por lo tanto $A \subseteq A \cap B$.

(ii) Este inciso se puede haver de forma similar al anterior, pero veamos otra manera. Sea $X := A \cup B$, entonces $A \subseteq X$ y $B \subseteq X$. Entonces:

$A \subseteq B \Leftrightarrow X \setminus B \subseteq X \setminus A$	Probado en clase
$\Leftrightarrow X \setminus B \subseteq (X \setminus B) \cap (X \setminus A)$	Inciso anterior
$\Leftrightarrow X \setminus B \subseteq X \setminus (B \cup A)$	Probado en clase
$\Leftrightarrow B \cup A \subseteq B$	Probado en clase
$\Leftrightarrow A \cup B \subseteq B$	Probado en clase

Mostrando la equivalencia deseada.

Ej. 9 (1 pt) Sean A y B conjuntos. Prueba que $A \subseteq B$ si y sólo si $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos que $A \subseteq B$, veamos por definición que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$. Sea $X \in \mathcal{P}(A)$ cualquier elemento, entonces $X \subseteq A$. Puesto que $A \subseteq B$, entonces $X \subseteq B$ y con ello $X \in \mathcal{P}(B)$. Se ha mostrado que “ $\forall X(X \in \mathcal{P}(A) \rightarrow X \in \mathcal{P}(B))$ ” es verdadera, es decir, que ocurre $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

(\Leftarrow) Supongamos que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$, veamos que $A \subseteq B$. De la hipótesis y la definición del conjunto potencia, se tiene que:

$$\forall X(X \subset A \rightarrow X \subset B)$$

Y, dado que $A \subseteq A$, entonces de lo anterior se obtiene $A \subseteq B$.

Ej. 10 (1 pt) Muestra que, en general, *no se da* la igualdad $\mathcal{P}(A \setminus B) = \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$.

Solución. Daremos un contraejemplo, es decir, encontraremos conjuntos A y B de modo que $\mathcal{P}(A \setminus B) = \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$.

Consideremos $A = \{0, x\}$ y $B := \{x\}$ (con $0 \neq x$). Entonces $A \setminus B = \{0\}$. Notamos que:

- i) $A \subseteq A$. ii) $A \not\subseteq B$. iii) $A \not\subseteq A \setminus B$.

Efectivamente, (i) es claro. (ii) ocurre pues $0 \in A$ pero $0 \notin B$ por lo que “ $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$ ” es falsa. Y (iii) ocurre debido a que $x \in A$ pero $x \notin A \setminus B$ (esto último pues $x \in A \wedge x \notin B$ es falsa, ya que $x \in B$), así que “ $\forall x(x \in A \rightarrow x \in A \setminus B)$ ” es falsa.

Traduciendo, (i) dice que $A \in \mathcal{P}(A)$ y (ii) dice que $A \notin \mathcal{P}(B)$, por lo que $A \in \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$. Sin embargo, (iii) indica que $A \notin \mathcal{P}(A \setminus B)$. Así que $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$ y $\mathcal{P}(A \setminus B)$ no tienen los mismos elementos, es decir, son conjuntos distintos. \diamond