Tarea 5

Álgebra Superior 1, 2025-4

Profesor: Luis Jesús Trucio Cuevas.
Ayudante: Hugo Víctor García Martínez.

Instrucciones. *Resuelve los siguientes ejercicios. Esta tarea es individual y deberá ser entregada presencialmente, durante la clase del **viernes 8 de agosto**.*

Ej. 1 (2 pts) Utilizando inducción, demuestra que para todo natural $n \in \mathbb{N}$, se cumple que:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

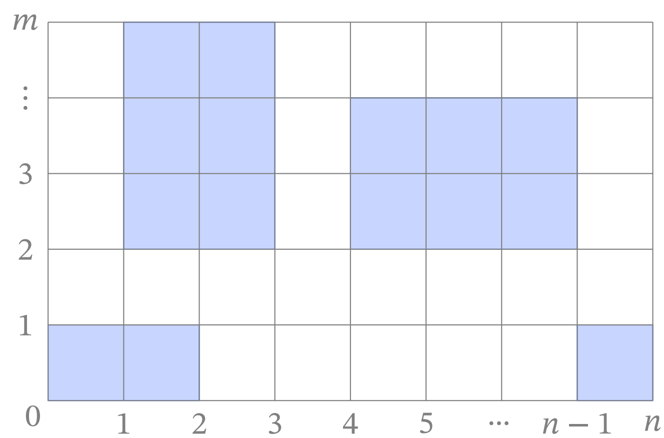
Ej. 2 (2 pts) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que cumple que para todo real y, $f(y) = f(y+2)$. Demuestra que para todo natural $n \in \mathbb{N}$, se tiene que para todo real x, $f(x) = f(x - 2n)$.

Ej. 3 (1 pt) Da dos ejemplos de funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$; una que sea sobreyectiva, pero no inyectiva; y otra, que sea inyectiva, pero no sobreyectiva. Demuestra todas tus afirmaciones.

Ej. 4 (2 pts) Un natural $m \geq 2$ se dice *compuesto* si existen naturales a y b tales que $1 < a < m$, $1 < b < m$ y $m = ab$; de lo contraro, decimos que m es *primo*. Demuestra que todo natural $n \geq 2$ es producto de números primos.

Hint. Utilice inducción "fuerte".

Ej. 5 (1 pt) ¿Cuantos rectángulos (incluyendo cuadrados) distintos, que téngan sus véretices en una cuadrícula de n por m, existen?.



Ej. 6 (2 pts) Pruebe, sin utilizar el Teorema del Binomio que, para todo $n \in \mathbb{N}$, que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.