

# Pruebas sencillas de igualdades entre conjuntos

Álgebra Superior 1, 2025-4

Profesor: Luis Jesús Trucio Cuevas.  
Ayudante: Hugo Víctor García Martínez.

Veamos que, utilizando equivalencias lógicas, se pueden demostrar igualdades básicas entre conjuntos. La técnica es siempre: Traducir (utilizando las definiciones de las entre de conjuntos) lo que significa que un elemento arbitrario,  $x$ , sea elemento de cierto conjunto; después, utilizar equivalencias lógicas de modo que nos acerquemos al objetivo de la prueba (y demostrarlas, si es necesario), y finalmente, volver a traducir las proposiciones en notación de conjuntos; por ejemplo, “ $x \in A \wedge x \in B$ ” se traduce a “ $x \in A \cap B$ ”.

Veremos un ejemplo de prueba a continuación, los comentarios en gris no forman parte de la demostración, pero ayudan a explicar el proceso. Queremos demostrar que:

$$A \setminus (A \cap B) = A \setminus B \quad (1)$$

Pero antes de comenzar la prueba, veamos el siguiente lema. El motivo de probar este lema será explicado más adelante, durante la demostración de (1)

**Lema 1.**  $\alpha \wedge (\neg\alpha \vee \neg\beta) \equiv \alpha \wedge \neg\beta$

**Demostración.** Revisemos la tabla de verdad de ambas proposiciones.

$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\wedge$	$(\alpha)$	$A \underline{\vee} B$	$A B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1	0	0	0



**Demostración.** Se empieza a hacer la “cadena de equivalencias”, se sugiere empezar por el lado *más complicado*.

$$\begin{aligned}
 x \in A \setminus (A \cap B) &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin A \cap B && \text{Def. de } \setminus \\
 &\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in A \cap B) && \text{Def. de } \notin \\
 &\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B) && \text{Def. de } \cap
 \end{aligned}$$

Una vez que todo está en “proposiciones sencillas” (es decir, que ya no se pueden hacer más simples) como las anteriores:  $x \in A$ ,  $x \in B$ , etcétera; aplicamos las equivalencias lógicas pertinentes (con la práctica quedará claro cuáles se deben usar).

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge (\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)) \quad \text{Leyes de De Morgan}$$

A la expresión que llegamos es una fórmula (o proposición) de la forma “ $\alpha \wedge (\neg\alpha \vee \neg\beta)$ ” (donde  $\alpha$  se corresponde con  $x \in A$  y  $\beta$  con  $x \in B$ ). Lo que queremos es hacer que la cadena de equivalencias termine en “ $x \in A \setminus B$ ”, es decir, en “ $x \in A \wedge \neg(x \in B)$ ”, o lo que es lo mismo, “ $\alpha \wedge \neg\beta$ ”.

Por lo tanto, suena natural demostrar que  $\alpha \wedge (\neg\alpha \vee \neg\beta) \equiv \alpha \wedge \neg\beta$ , por ello tal demostración se realizó previamente, para poder utilizarlo en la cadena de equivalencias. De nuevo, con la práctica quedará claro el proceso de pensamiento para estas pruebas sencillas.

Finalizando la demostración:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B) & \quad \alpha \wedge (\neg\alpha \vee \neg\beta) \equiv \alpha \wedge \neg\beta \\ \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B & \quad \text{Def. de } \notin \\ \Leftrightarrow x \in A \setminus B & \quad \text{Def. de } \setminus \end{aligned}$$

Es decir, se ha probado que  $x \in A \setminus (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \setminus B$ , por lo tanto,  $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$ . ■