Equivalencias e implicaciones lógicas

Álgebra Superior 1, 2025-4

Profesor: Luis Jesús Trucio Cuevas.
Ayudante: Hugo Víctor García Martínez.

Estas no son notas como tal, la intensión es tener a la mano algunas equivalencias e implicaciones lógicas.

1. Equivalencias

1.1. Estructurales

La conjunción y la disyunción son conmutativas:

- $\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$
- $\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$.

La conjunción y la disyunción son asociativas:

- $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$
- $\alpha \vee (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \vee \gamma$.

La conjunción y la disyunción son idempotentes:

- $\alpha \wedge \alpha \equiv \alpha$
- $\alpha \vee \alpha \equiv \alpha$.

La conjunción y la disyunción son absorbentes:

- $\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \equiv \alpha$
- $\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \equiv \alpha$.

La conjunción y la disyunción son distributivas:

- $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$
- $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$.

Denotemos con $\top$ a una tautología y con $\perp$ a una contradicción. Así, $\top$ es neutro para la conjunción y $\perp$ es neutro para la disyunción:

- $\alpha \wedge \top \equiv \alpha$
- $\alpha \vee \perp \equiv \alpha$.

1.2. Lógica clásica

Leyes de De Morgan:

- $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$
- $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$.

Doble negación:

- $\neg\neg\alpha \equiv \alpha$.

Complementos:

- (tercero excluido) $\top \equiv \alpha \vee \neg\alpha$
- $\bot \equiv \alpha \wedge \neg\alpha$.

1.3. Conjuntos mínimos de conectivos

Con las siguientes equivalencias es posible expresar cualquier proposición lógica con sólo conectivos $\vee$ y $\neg$ (nota que para definir $\bot$ es necesario usar $\neg$):

- $\alpha \to \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$
- $\alpha \wedge \beta \equiv \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$
- $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$.

¿Puedes escribir las equivalencias necesarias para escribir toda proposición con sólo $\wedge$ y $\neg$ (o con sólo $\vee$ y $\neg$)?

1.4. Métodos de demostración

- Contrapuesta: $\alpha \to \beta \equiv \neg\beta \to \neg\alpha$.
- Contradicción: $\alpha \to \beta \equiv (\alpha \wedge \neg\beta) \to \bot$.
- Dem de una negación: $\neg\alpha \equiv \alpha \to \bot$.
- Dem de una conjunción: $\alpha \to (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \to \beta) \wedge (\alpha \to \gamma)$.
- Dem de una disyunción: $\alpha \to (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \neg\beta \to \gamma)$.
- Dem de un condicional: $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \equiv (\alpha \wedge \beta) \to \gamma$.
- Dem de una bicondicional: $(\alpha \leftrightarrow \beta) \equiv (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$.
- Dem por casos: $(\alpha \vee \beta) \to \gamma \equiv (\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \gamma)$.