Tarea 4 (Solución)

Álgebra Superior 1, 2025-4

Profesor: Luis Jesús Trucio Cuevas.
Ayudante: Hugo Víctor García Martínez.

Ej. 1 (1 pt) Demuestra que la función $\hat{f}: A \to f[A]$ siempre es función sobreyectiva; y concluye que, si $f: A \to B$ es inyectiva, entonces $\hat{f}: A \to f[A]$ es biyectiva.

Demostración. Para la primera parte, veamos que $\hat{f}: A \to f[A]$ es una sobreyección. Efectivamente, sea $y \in f[A]$ cualquiera, entonces por definición de imagen directa, existe $a \in A$ tal que $y = f(a) = \hat{f}$; así, $a \in \text{ima}(\hat{f})$. Por lo tanto $\text{ima}(\hat{f} \subseteq f[A])$; y, como $f[A]$ es codominio de $\hat{f}$, entonces $\text{ima}(\hat{f}) \subseteq f[A]$. Esto prueba que $\text{ima}(\hat{f}) = f[A]$; es decir, $\hat{f}: A \to f[A]$ es sobreyectiva.

Para la segunda parte, notemos que si f es inyectiva y $x, y \in A$ son tales que $\hat{f}(x) = \hat{f}(y)$, entonces $f(x) = f(y)$ (por la definición de $\hat{f}$), y con ello $x = y$. Por lo tanto $\hat{f}$ es inyectiva; así también, biyectiva. ∎

Ej. 2 (1.5 pts) Demuestra que:

i) Si $X \subseteq Y$, entonces $i_{X,Y}: X \to Y$ es inyectiva.

ii) $f = i_{f[A],B} \circ \hat{f}$.

Demostración. (i) Supongamos que $X \subseteq Y$. Veamos que $i_{X,Y}$ es inyectiva; efectivamente, sean $x, y \in \text{dom}(i_{X,Y}) = X$ ysupongamos que $i_{X,Y}(x) = i_{X,Y}(y)$; así, $x = y$ (por definición de $i_{X,Y}$). Lo cual prueba que $i_{X,Y}$ es inyectiva.

(ii) Como el dominio de $\hat{f}$ es X; el dominio de la composición $f = i_{f[A],B} \circ \hat{f}$ es X; además, el dominio de f es X. Por lo tanto, para verificar la igualdad entre las funciones f y $i_{f[A],B} \circ \hat{f}$; basta verificar que:

$$\forall x \in X \left(f(x) = \left(i_{f[A],B} \circ \hat{f} \right)(x) \right)$$

En efecto, si $x \in X$ es cualquiera, entonces:

$$\begin{aligned}
\left(i_{f[A],B} \circ \hat{f} \right)(x) &= i_{f[A],B}\left(\hat{f}(x) \right) && \text{(Definición de composición)} \\
&= i_{f[A],B}\left(f(x) \right) && \text{(Definición de } \hat{f}) \\
&= f(x) && \text{(Definición de } i_{f[A],B})
\end{aligned}$$

finalizando la prueba de la igualdad funcional deseada. ∎

Ej. 3 (1.5 pts) Por un ejercicio de las tareas (*¿cuál?*), la relación $\sim$ es de equivalencia. Demuestra la igualdad de conjuntos: $A/_{\sim} = \{f^{-1}[\{b\}] \mid b \in f[A]\}$.

Demostración. La relación $\sim$ es de equivalencia en virtud del *Ejercio 10* (*o un caso particular del Ejrcicio 7*) de la *Tarea 2*. Ahora, demostraremos la igualdad ${}^{A}/_{\sim} = \{f^{-1}[\{b\}] \mid b \in f[A]\}$ por doble contención.

($\subseteq$) Sea $[x] \in {}^{A}/_{\sim}$ cualquiera. Sea $b := f(x) \in f[A]$, se afirma que $[x] = f^{-1}[\{b\}]$; en efecto, note que para cada y se cumple:

$$\begin{aligned} y \in [x] &\Leftrightarrow y \sim x && \text{(Definición de clase de equivalencia)} \\ &\Leftrightarrow f(y) = f(x) && \text{(Definición de } \sim\text{)} \\ &\Leftrightarrow f(y) = b && \text{(Definición de } b\text{)} \\ &\Leftrightarrow y \in f^{-1}[\{b\}] && \text{(Definición de } b\text{)} \end{aligned}$$

lo cual prueba que $\forall y\big(y \in [x] \leftrightarrow y \in f^{-1}[\{b\}]\big)$, esto es, $[x] = f^{-1}[\{b\}]$. Por lo tanto $[x] \in \{f^{-1}[\{b\}] \mid b \in f[A]\}$, probando ${}^{A}/_{\sim} \subseteq \{f^{-1}[\{b\}] \mid b \in f[A]\}$.

($\supseteq$) Ahora, sea $f^{-1}[\{b\}] \in \{f^{-1}[\{b\}] \mid b \in f[A]\}$ cualquier elemento, entonces $b \in f[A]$. Por definición de imagen directa, existe $a \in A$ de modo que $b = f(a)$. Se afirma que $f^{-1}[\{b\}] = [a]$. Efectivamente, para cada y:

$$\begin{aligned} y \in f^{-1}[\{b\}] &\Leftrightarrow f(y) \in \{b\} && \text{(Definición de imagen inversa)} \\ &\Leftrightarrow f(y) = b && \text{(Conjunto unitario)} \\ &\Leftrightarrow f(y) = f(a) && \text{(Pues } a = f(b)\text{)} \\ &\Leftrightarrow y \sim a && \text{(Definición de } \sim\text{)} \\ &\Leftrightarrow y \in [a] && \text{(Definición de clase de equivalencia)} \end{aligned}$$

por lo que $f^{-1}[\{b\}] = [a]$, así que $f^{-1}[\{b\}] \in {}^{A}/_{\sim}$. Esto prueba la contención restante, $\{f^{-1}[\{b\}] \mid b \in f[A]\} \subseteq {}^{A}/_{\sim}$. ■

Ej. 4 (1.5 pts) En términos de la definición previa:

i) Demuestra que q_f es sobreyectiva.

ii) Prueba que si f es inyectiva, entonces para cada $x \in X$, $[x] = \{x\}$.

iii) Concluye que, si f es inyectiva, entonces q_f es biyectiva.

Demostración. (i) Sea $[a] \in {}^{A}/_{\sim}$ cualquiera, entonces $q(a) = [a]$; esto es, para cada elemento $x = [a]$ de ${}^{A}/_{\sim}$, existe un elemento $y := a \in A$ de modo que $q(y) = x$; luego q_f es sobreyectiva.

(ii) Supongamos que f es inyectiva y sea $x \in A$ cualquiera. Para cada y se tiene que:

$$\begin{aligned} y \in [x] &\Leftrightarrow y \sim x && \text{(Definición de clase de equivalencia)} \\ &\Leftrightarrow f(y) \sim f(x) && \text{(Definición de } \sim\text{)} \\ &\Leftrightarrow y = x && (f \text{ es función y es inyectiva}) \\ &\Leftrightarrow y \in \{x\} && \text{(Conjunto unitario)} \end{aligned}$$

lo cual demuestra que $[x] = \{x\}$.

(iii) Supongamos (otra vez) que f es inyectiva. Por el inciso previo, para cada $y \in A$ se tiene que:

$$\begin{aligned} y \sim x &\Leftrightarrow y \in [x] && \text{(Definición de clase de equivalencia)} \\ &\Leftrightarrow y \in \{x\} && \text{(Inciso previo)} \\ &\Leftrightarrow y = x && \text{(Conjunto unitario)} \\ &\Leftrightarrow y \ \mathrm{id}_A \ x && \text{(Conjunto unitario)} \end{aligned}$$

lo cual demuestra que $\sim = \mathrm{id}_A$. Así, se obtiene del *Ejericio 10* de la *Tarea 2*, que q_f es biyectiva. ■

Ej. 5 (1.5 pts) Haciendo uso de la terminología definida hasta ahora, para cada inciso da un ejemplo particular de:

i) Una función $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \to \{0, 1, 2\}$ tal que q_f sea constante.

ii) Una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de modo que $\mathbb{N}/\sim$ posea exactamente 5 elementos.

iii) Una función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que para cada $z \in \mathbb{Z}$ se cumple $q_f(z) = q_f(z + 7)$ y $q_f(z) \neq q_f(z + 1)$.

Solución. (i) Definamos f para cada $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ como $f(x) = 2$. Por definición de función constante, hay que verificar que:

$$\forall x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \left(q_f(x) = q_f(y)\right)$$

En efecto, sean $x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ cualesquiera, entonces $f(x) = f(y)$ (pues ambos son 2); con ello $x \in y$, esto es $[x] = [y]$; o equivalentemente $q(x) = q(y)$. Lo anterior prueba que q_f es una función constante.

(ii) Definamos $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por medio de la regla:

$$f(n) = \begin{cases} 2 & ; n < 1 \\ 4 & ; 1 \leq n < 2 \\ 6 & ; 2 \leq n < 3 \\ 8 & ; 3 \leq n < 4 \\ 10 & ; 4 \leq n \end{cases}$$

De esta manera, se tiene lo siguiente para cada $n \in \mathbb{N}$:

i) Si $n < 1$ entonces $n = 0$ y entonces $[n] = [0]$.

ii) Si $1 \leq n < 2$ entonces $n = 1$ y entonces $[n] = [1]$.

iii) Si $2 \leq n < 3$ entonces $n = 2$ y entonces $[n] = [2]$.

iv) Si $3 \leq n < 4$ entonces $n = 3$ y entonces $[n] = [3]$.

v) Si $4 \leq n$ entonces $n = 2$ y entonces $f(n) = 10$. Como $f(4) = 10$, entonces $f(n) = f(4)$, y con ello $[n] = [4]$.

Esto demuestra que ${}^{\mathbb{N}}/_{\sim} = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$. Lo único que falta para verificar que este conjunto cuenta con exactamente cinco elementos es verificar que sus elementos son distintos dos a dos, es decir que $[0] \neq [1]$, $[0] \neq [2]$, $[0] \neq [3]$, $[0] \neq [4]$; que $[1] \neq [2]$, $[1] \neq [3]$, $[1] \neq [4]$; que $[2] \neq [3]$, $[2] \neq [4]$; y, que $[3] \neq [4]$. Pero esto resulta innmediato de la definición de la relación de equivalencia $\sim$, y de que: $f(0) \neq f(1)$, $f(0) \neq f(2)$, $f(0) \neq f(3)$, $f(0) \neq f(4)$; que $f(1) \neq f(2)$, $f(1) \neq f(3)$, $f(1) \neq f(4)$; que $f(2) \neq f(2)$, $f(2) \neq f(4)$; y que $f(3) \neq f(4)$.

(iii) Definamos $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ como:

$$f(z) = \begin{cases} 0 & ; \exists k \in \mathbb{Z}(n = 7k) \\ 1 & ; \exists k \in \mathbb{Z}(n = 7k + 1) \\ 2 & ; \exists k \in \mathbb{Z}(n = 7k + 2) \\ 3 & ; \exists k \in \mathbb{Z}(n = 7k + 3) \\ 4 & ; \exists k \in \mathbb{Z}(n = 7k + 4) \\ 5 & ; \exists k \in \mathbb{Z}(n = 7k + 5) \\ 6 & ; \exists k \in \mathbb{Z}(n = 7k + 6) \end{cases}$$

de modo que $f(z) = 0$ si z es múltiplo de 7 (es decir, si es de la forma $7k$, con k entero); y, $f(z) = z$ si z no es múltiplo de 7. Sea $z \in \mathbb{Z}$ cualquiera, veamos que $q_f(z) = q_f(z + 7)$; y, que $q_f(z) \neq q_f(z + 1)$. Observemos que lo primero es lo mismo a demostrar $[z] = [z + 7]$, es decir, $z \sim z + 7$; o equivalentemente, $f(z) \neq f(z + 7)$; similarmente, lo segundo es equivalente a demostrar que $f(z) \neq f(z+1)$, así que esto sera lo que demostraremos. Sea $m := f(z)$, entonces existe k entero tal que $z = 7k + m$.

i) Para lo primero, notemos que se lo antrior se desprende que $z + 7 = (7k + m) + 7 = 7(k + 1) + m$; es decir, existe $l = k + 1 \in \mathbb{Z}$ de modo que $z + 7 = 7l + m$, probando que $f(z) = f(z + 1)$ (ambos son m).

ii) Ahora, por contradicción, supongamos que $f(z) = f(z + 1)$, como ambos son m, entonces existe un entero k' de modo que $z + 1 = 7k' + m$. Puesto que $z = 7k + m$, entonces $(7k + m) + 1 = 7k' + m$, de donde $7k + 1 = 7k'$, o bien $1 = 7(k - k')$. Pero esto mostraría que 1 es múltiplo de 7, lo cual claramente es absurdo. Por lo tanto, $f(z) \neq f(z + 1)$.

Por lo tanto, esta función cumple con el requisito deseado. $\Diamond$

Ej. 6 (1.5 pts) Completa la demostración empezada en el párrafo anterior; es decir, prueba que f^* es función de ${}^{A}/_{\sim}$ en $f[A]$ mostrando que:

$$\forall [x] \in {}^{A}/_{\sim}\ \forall b, b' \in f[A] \left(\left([x] f^* b \wedge [x] f^* b' \right) \to b = b' \right).$$

Demostración. Sean $[x] \in {}^{A}/_{\sim}$, $b, b' \in f[A]$ y supongamos que $[x]f^*b$ y $[x]f^*b'$, habremos de demostrar que $b = b'$.

Como $[x]f^*b$, existe $y \in [x]$ de forma que $b = f(y)$; similarmente, existe $y' \in [x]$ de manera que $b' = f(y')$. Ahora, como $y \in [x]$ y $y' \in [x]$, entonces $y \sim x$ y $y' \sim x$, respectivamente. De lo anterior, $f(y) = f(x)$ y $f(y') = f(x)$, respectivamente. Por lo tanto $b = f(y) = f(y') = b'$, es decir $b = b'$. Se finaliza así la demostración de que f^* es función. ■

Ej. 7 (1 pt) Demuestra que $f^* : {}^{A}/_{\sim} \to f[A]$ es biyectiva.

Demostración. (Inyectividad) Sean $[x], [y] \in {}^{A}/_{\sim}$ y supongamos que $f^*(x) = f^*(y)$. Dado que $f^*([x]) = f(x)$ y $f^*([y]) = f(y)$ (esto es, en esencia, lo que se probó en el ejrecicio anterior), entonces $f(x) = f(y)$; con ello $x \sim y$, o equivalentemente, $[x] = [y]$. Así, f^* es inyectiva.

(Sobreyectividad) Sea $l \in f[A]$ cualquier elemento, por definición de imagen directa, existe $a \in A$ con $l = f(a)$. Notemos que $f^*([a]) = f(a) = l$, es decir, para cada elemento l de $f[A]$, existe $x = [a] \in {}^{A}/_{\sim}$ de manera que $f^*(x) = l$. Por lo tanto, f^* es sobreyectiva, y así mismo, inyectiva. ■

Ej. 8 (.5 pts) Demuestra el Primer Teorema de Isomorfismo para conjuntos; es decir, prueba que:

$$f = i_{f[A],B} \circ f^* \circ q_f$$

(f es composición de una sobreyección, una biyección y una inyección).

Demostración. Notemos que A es el dominino dee f, pero, como también es el dominio de q_f, entonces también lo es de la composición $f^* \circ q_f$; y con ello, de la composición $i_{f[A],B} \circ f^* \circ q_f = i_{f[A],B} \circ (f^* \circ q_f)$. Por lo tanto, para verificar la igualdad funcional deseada, habremos de hacer la demostración de que:

$$\forall x \in A\Big(f(x) = \big(i_{f[A],B} \circ f^* \circ q_f\big)(x)\Big)$$

En efecto, si $x \in A$ es cualquier elemento, entonces:

$$\begin{aligned}
\big(i_{f[A],B} \circ f^* \circ q_f\big)(x) &= \Big(i_{f[A],B} \circ \big(f^* \circ q_f\big)\Big)(x) && \text{La composición es asociativa} \\
&= \Big(i_{f[A],B} \circ \big(f^* \circ q_f\big)\Big)(x) && \text{(Definición de composición)} \\
&= i_{f[A],B}\Big(\big(f^* \circ q_f\big)(x)\Big) && \text{(Definición de composición)} \\
&= i_{f[A],B}\Big(f^*\big(q_f(x)\big)\Big) && \text{(Definición de composición)} \\
&= i_{f[A],B}\big(f^*([x])\big) && \text{(Definición de } q_f\text{)} \\
&= i_{f[A],B}\big(f(x)\big) && \text{(Propiedad de } f^*\text{)} \\
&= i_{f[A],B}\big(f(x)\big) && \text{(Propiedad de } f^*\text{)} \\
&= f(x) && \text{(Definición de } i_{f[A],B}\text{)}
\end{aligned}$$

lo cual finaliza la demostración de este ejercicio (y, del Primer Teorema de Isomorfismo para Conjuntos). $\blacksquare$

- -

Ej. 9 (+1 pt) Prueba que para cualesquiera funciones $i, j : {}^{A}/_{\sim} \to B$, si se tiene que $j \circ q_f = f$ y $i \circ q_f = f$, entonces $i = j$.

Demostración. Supongamos que $i, j : {}^{A}/_{\sim} \to B$ son funciones tales que se dan las igualdades $j \circ q_f = f$ y $i \circ q_f = f$. Como q_f es una función sobreyectiva, tiene inveresa derecha (visto en clase), a saber, existe $u : f[A] \to {}^{A}/_{\sim}$ de manera que $q_f \circ u = \mathrm{id}_{f[A]}$. Por lo tanto, de $j \circ q_f = f$ se obtiene que:

$$\begin{aligned}
j &= j \circ \mathrm{id}_{f[A]} && \text{(La identidad es neutro de la composición)}\\
&= j \circ (q_f \circ u) && \text{(u es inversa derecha de q_f)}\\
&= (j \circ q_f) \circ u && \text{(La composición es asociativa)}\\
&= f \circ u && \text{(Pues $j \circ q_f = f$)}\\
&= (i \circ q_f) \circ u && \text{(Pues $i \circ q_f = f$)}\\
&= i \circ (q_f \circ u) && \text{(La composición es asociativa)}\\
&= i \circ \mathrm{id}_{f[A]} && \text{(u es inversa derecha de q_f)}\\
&= i && \text{(La identidad es neutro de la composición)}
\end{aligned}$$

finalizando la demostración. $\blacksquare$

Ej. 10 (+1 pt) A partir del ejercicio anterior, concluye que si $k : {}^{A}/_{\sim} \to f[A]$ es biyección y $f = i_{f[A],B} \circ k \circ q_f$, entonces $k = f^*$.

Demostración. Supongamos que $k : {}^{A}/_{\sim} \to f[A]$ es biyección y que $f = i_{f[A],B} \circ k \circ q_f$. Por el Primer Teorema de Isomorfismo, se tiene que $f = i_{f[A],B} \circ f^* \circ q_f$; así, a consecuencia del ejercicio anterior, se tiene que $i_{f[A],B} \circ f^* = i_{f[A],B} \circ k$.

Ahora, $i_{f[A],B}$ es inyectiva (algo demostrado en esta tarea); por lo que tiene inveras izquerda (visto en clase); a saber, existe $v : B \to f[A]$ de modo que $v \circ i_{f[A],B} = \mathrm{id}_{f[A]}$; de donde:

$$\begin{aligned}
f^* &= \mathrm{id}_{f[A]} \circ f^* && \text{(La identidad es neutro de la composición)}\\
&= (v \circ i_{f[A],B}) \circ f^* && \text{(v es inversa izquierda de $i_{f[A],B}$)}\\
&= v \circ (i_{f[A],B} \circ f^*) && \text{(La composición es asociativa)}\\
&= v \circ (i_{f[A],B} \circ k) && \text{(Pues $f = i_{f[A],B} \circ f^* \circ q_f$)}\\
&= (v \circ i_{f[A],B}) \circ k && \text{(La composición es asociativa)}\\
&= \mathrm{id}_{f[A]} \circ k && \text{(v es inversa izquierda de $i_{f[A],B}$)}\\
&= k && \text{(La identidad es neutro de la composición)}
\end{aligned}$$

probando lo deseado. $\blacksquare$

Ej. 11 (+2 pts) Definimos los conjuntos:

$$\mathscr{F} := \{g \mid g \text{ es función } \wedge \operatorname{dom}(g) = A \wedge g \text{ es sobreyectiva}\}$$
$$\mathscr{R} := \{R \mid R \subseteq A \times A \wedge R \text{ es relación de equivalencia}\}$$

Encuentra una biyección entre $\mathscr{F}$ y $\mathscr{R}$.

Demostración. Definimos $\Psi : \mathscr{F} \to \mathscr{R}$ por medio de $\Psi(g) = \sim_g$; donde, $\sim_g$ es la relación dada por: $x \sim_g y$ si y sólo si $g(x) = g(y)$. Sabemos (por lo realizado en esta tarea) que $\sim_g$ es de equivalencia; así que Ψ está bien definida, veamos que es una biyección.

(Inyectividad) Sean $f, g \in \mathscr{F}$ y supongamos que $\Psi(g) = \Psi(f)$; esto es, $\sim_g = \sim_h$; esto significa que, para cualesquiera $x, y \in A$ se tiene que (por definición de las relaciones de equivalencia):

$$g(x) = g(y) \Leftrightarrow x \sim_g y \Leftrightarrow x \sim_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

y como f y g tienen el mismo dominio, A, esto demuestra que $f = g$. Por ende, Ψ es inyectiva.

(Sobreyectividad) Sea $R \in \mathscr{R}$; esto es, $R \subseteq A \times A$ es una relación de equivalencia. Consideremos $g : A \to {}^{A}/_{R}$ como la función dada por $g(x) = [x]$. Se afirma que $\Psi(g) = R$. Efectivamente, sean $x, y \in A$ cualesquiera, entonces:

$$\begin{aligned} xRy &\Leftrightarrow [x] = [y] && \text{(Comportamiento de las clases de equivalencia)} \\ &\Leftrightarrow g(x) = g(y) && \text{(Comportamiento de las clases de equivalencia)} \\ &\Leftrightarrow x \sim_g y && \text{(Definición de } \sim_g\text{)} \end{aligned}$$

Como $R \subseteq A \times A$ y $\sim_g \subseteq A \times A$, lo anterior prueba que $R = \sim_g$; o bien, por definición de Ψ, se ha mostrado que $R = \Phi(g)$. Esto es, para cada elemento R de $\mathscr{R}$, existe un elemento g de $\mathscr{F}$ de manera tal que $\Psi(g) = R$; es decir, Φ es sobreyectiva; y, por lo tanto biyectiva. ∎