Tarea 1 (Solución)

Álgebra Superior 1, 2025-4

Profesor: Luis Jesús Trucio Cuevas.
Ayudante: Hugo Víctor García Martínez.

Ej. 1 (1 pt) Demuestra las siguientes equivalencias lógicas.

i) $\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \equiv \alpha$.

ii) $\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \equiv \alpha$.

iii) $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$.

iv) $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$.

Demostración. Se probará cada inciso utilizando la definición de equivalencia lógica, esto es, coincidencia total en las tablas de verdad.

i) $\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \equiv \alpha$.

α	β	α	$\wedge$	$(\alpha$	$\vee$	$\beta)$
1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	0
0	1	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0

ii) $\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \equiv \alpha$.

α	β	α	$\vee$	$(\alpha$	$\wedge$	$\beta)$
1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0

iii) $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$.

α	β	γ	α	$\vee$	$(\beta$	$\wedge$	$\gamma)$	$(\alpha$	$\vee$	$\beta)$	$\wedge$	$(\alpha$	$\vee$	$\gamma)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0
1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

iv) $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$.

α	β	$\neg$	$(\alpha$	$\wedge$	$\beta)$	$\neg\alpha$	$\vee$	$\neg\beta$
1	1	0	1	1	1	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	0
0	0	1	0	0	0	1	1	1

Finalizando la demostración de cada inciso. ■

Ej. 2 (1 pt) Escribe fórmulas lógicas (de primer orden) que, a tu criterio, capturen mejor cada una de las siguientes afirmaciones.

i) Cada persona viva respira.

ii) 2 es el único primo par.

iii) Existe un hombre inmortal.

iv) No existen estudiantes en Ciudad Universitaria que sean felices.

v) Todos los peces del acuario de la facultad se aparean con otro pez.

Solución. (i) Tomando $\alpha(x)$: "x es persona", $\beta(x)$: "x está viva" y $\gamma(x)$: "x respira", se tiene que:

$$\begin{aligned}\text{“Cada persona viva respira”} &\Leftrightarrow \text{“Para todo } x\text{, si } x \text{ es persona y } x \text{ está viva, entonces } x \text{ respira”}\\ &\Leftrightarrow \forall x\big((\alpha(x) \wedge \beta(x)) \to \gamma(x)\big)\end{aligned}$$

(ii) Considerando las propiedades $\alpha(x)$: "x es primio" y $\beta(x)$: "x es par", la traducción de este inciso queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}2\text{“ es el único primo par.”} &\Leftrightarrow 2\text{“ es primo y par y, para todo } n\text{, si } n \text{ es primo y par, entonces } n \text{ es 2”}\\ &\Leftrightarrow \big(\alpha(2) \wedge \beta(2)\big) \wedge \forall n\Big(\big(\alpha(n) \wedge \beta(n)\big) \to n = 2\Big)\end{aligned}$$

(iii) Si $\alpha(x)$: "x es hombre" y $\gamma(x)$: "x es mortal", entonces:

$$\text{“Existe un hombre inmortal”} \Leftrightarrow \exists x\big(\alpha(x) \wedge \neg\gamma(x)\big)$$

(iv) Tomemos $\alpha(x)$: "x es estudiante de Ciudad Universitaria" y $\beta(x)$: "x es feliz", así:

$$\begin{aligned}&\text{“No existen estudiantes en Ciudad Universitaria que sean felices”} \Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow \text{“Es falso que existe cierto } x \text{ tal que: } x \text{ es estudiante de Ciudad Universitaria y } x \text{ es feliz”}\\ &\Leftrightarrow \neg\Big(\exists x\big(\alpha(x) \wedge \beta(x)\big)\Big)\end{aligned}$$

(iv) Si $\alpha(x)$: "x es un pez del acuario de la facultad" y $\beta(x,y)$: "x y y se aparean", la traducción queda de la siguiente forma:

"Todos los peces del acuario de la facultad se aparean con otro pez" $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ "Para cualquier x, si x es un pez del acuario de la facultad, entonces existe w tal que w es pez del acuario de la facultad, y, x se aparea con w"
$$\Leftrightarrow \forall x\Big(\alpha(x) \to \exists w\big(\alpha(w) \land \beta(x,w)\big)\Big)$$

*Si se considera que cada pez del acuario de la facultad se aparea con un pez **distinto**, la traducción queda como:*

$$\forall x\Big(\alpha(x) \to \exists w\big(\alpha(w) \land \beta(x,w) \land x \neq w\big)\Big)$$

y también es válida. $\Diamond$

Ej. 3 (1 pt) Escribe la negación de las siguientes proposiciones. Si el inciso está en español, escribe tu respuesta en español.

i) $\alpha \leftrightarrow \beta$.

ii) $\neg\alpha \to \gamma$.

iii) $\gamma \to (\delta \to \gamma)$.

iv) $\exists x\big(\alpha(x) \land \big(\beta(x) \land \gamma(x)\big)\big)$.

v) $\forall a\big(\alpha(a) \to \exists b\big(\beta(a,b)\big)\big)$.

vi) $\exists b \forall x\big(\forall y(\alpha(y)) \leftrightarrow \big(Q(x,y) \land R(b)\big)\big)$.

vii) Si n es un número primo y es mayor que 4, n es impar.

viii) Hay cierto elemento en A que es real, pero no entero.

Solución. (i) Como $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \to \beta) \land (\beta \to \alpha)$, entonces:

$$\begin{aligned}
\neg(\alpha \land \beta) &\equiv \neg\big((\alpha \to \beta) \land (\beta \to \alpha)\big) && \text{Equivalencia de } \leftrightarrow \\
&\equiv \neg(\alpha \to \beta) \lor \neg(\beta \to \alpha) && \text{Ley de De Morgan} \\
&\equiv \big(\alpha \land \neg\beta\big) \lor \big(\beta \land \neg\alpha\big) && \text{Negación de } \to
\end{aligned}$$

(ii) Utilizando la negación de la implicación:

$$\neg(\neg\alpha \to \gamma) \equiv \neg\alpha \land \neg\gamma \qquad \text{Negación de } \to$$

(iii) De nuevo, utilizando la negación de la implicación:

$$\begin{aligned}
\neg\big(\gamma \to (\delta \to \gamma)\big) &\equiv \gamma \land \neg(\delta \to \gamma) && \text{Negación de } \to \\
&\equiv \gamma \land \big(\delta \land \neg\gamma\big) && \text{Negación de } \to \\
&\equiv \gamma \land \big(\neg\gamma \land \delta\big) && \text{Conmutatividad de } \land \\
&\equiv \big(\gamma \land \neg\gamma\big) \land \delta && \text{Asociatividad de } \land \\
&\equiv \bot \land \delta && \gamma \land \neg\gamma \text{ siempre es contradicción} \\
&\equiv \bot && \bot \land P \text{ siempre es contradicción}
\end{aligned}$$

(iv) La negación de $\exists x\big(\alpha(x) \wedge \big(\beta(x) \wedge \gamma(x)\big)\big)$ es:

$$\begin{aligned} \neg\Big(\exists x\big(\alpha(x) \wedge \big(\beta(x) \wedge \gamma(x)\big)\big)\Big) &\equiv \forall x\Big(\neg\big(\alpha(x) \wedge \big(\beta(x) \wedge \gamma(x)\big)\big)\Big) && \text{Negación de } \exists \\ &\equiv \forall x\Big(\neg\alpha(x) \vee \neg\big(\beta(x) \wedge \gamma(x)\big)\Big) && \text{Ley de De Morgan} \\ &\equiv \forall x\Big(\neg\alpha(x) \vee \big(\neg\beta(x) \vee \neg\gamma(x)\big)\Big) && \text{Ley de De Morgan} \\ &\equiv \forall x\Big(\alpha(x) \to \big(\neg\beta(x) \vee \neg\gamma(x)\big)\Big) && \neg P \vee Q \equiv P \to Q \end{aligned}$$

(v) La negación de $\forall a\big(\alpha(a) \to \exists b\big(\beta(a,b)\big)\big)$ es:

$$\begin{aligned} \neg\Big(\forall a\big(\alpha(a) \to \exists b\big(\beta(a,b)\big)\big)\Big) &\equiv \exists a\Big(\neg\big(\alpha(a) \to \exists b\big(\beta(a,b)\big)\big)\Big) && \text{Negación de } \forall \\ &\equiv \exists a\Big(\neg\alpha(a) \wedge \neg\big(\exists b\big(\beta(a,b)\big)\big)\Big) && \text{Negación de } \to \\ &\equiv \exists a\big(\neg\alpha(a) \wedge \forall b(\neg\beta(a,b))\big) && \text{Negación de } \exists \end{aligned}$$

(vi) La negación de $\exists b\forall x\big(\forall y(\alpha(y)) \leftrightarrow \big(Q(x,y) \wedge R(b)\big)\big)$ es:

$$\begin{aligned} &\neg\Big(\exists b\forall x\big(\forall y(\alpha(y)) \leftrightarrow \big(Q(x,y) \wedge R(b)\big)\big)\Big) \equiv \\ &\equiv \forall b\Big(\neg\forall x\big(\forall y(\alpha(y)) \leftrightarrow \big(Q(x,y) \wedge R(b)\big)\big)\Big) && \text{Negación de } \exists \\ &\equiv \forall b\exists x\Big(\neg\Big(\forall y(\alpha(y)) \leftrightarrow \big(Q(x,y) \wedge R(b)\big)\Big)\Big) && \text{Negación de } \forall \\ &\equiv \forall b\exists x\Big(\Big(\forall y\big(\alpha(y)\big) \wedge \neg\big(Q(x,y) \wedge R(b)\big)\Big) \vee \Big(\big(Q(x,y) \wedge R(b)\big) \wedge \neg\big(\forall y\big(\alpha(y)\big)\big)\Big)\Big) \\ & && \text{Negación de } \leftrightarrow\text{, inciso (i)} \\ &\equiv \forall b\exists x\Big(\Big(\forall y\big(\alpha(y)\big) \wedge \big(\neg Q(x,y) \vee \neg R(b)\big)\Big) \vee \Big(\big(Q(x,y) \wedge R(b)\big) \wedge \neg\big(\forall y\big(\alpha(y)\big)\big)\Big)\Big) \\ & && \text{Ley de De Morgan} \\ &\equiv \forall b\exists x\Big(\Big(\forall y\big(\alpha(y)\big) \wedge \big(\neg Q(x,y) \vee \neg R(b)\big)\Big) \vee \Big(\big(Q(x,y) \wedge R(b)\big) \wedge \exists y\big(\neg\alpha(y)\big)\Big)\Big) && \text{Negación de } \forall \end{aligned}$$

(vii) "Si n es un número primo y es mayor que 4, n es impar" es una proposición de la forma "$(\alpha(n) \wedge \beta(n)) \to \gamma(n)$"; donde $\alpha(x)$: "x es número primo", $\beta(x)$: "$x > 4$" y $\gamma(x)$: "x es impar". Dado que:

$$\neg\big((\alpha(n) \wedge \beta(n)) \to \gamma(n)\big) \equiv (\alpha(n) \wedge \beta(n)) \wedge \neg\gamma(n) \qquad \text{Negación de } \to$$

la negación del enunciado original es: "n es un número primo, mayor que 4 y es par".

(v) “Hay cierto elemento en A que es real, pero no entero” es una proposición (o fórmula) de la forma “$\exists x\big(x \in A \wedge \big(\alpha(x) \wedge \neg\beta(x)\big)\big)$”; donde, $\alpha(x)$: “x es real” y $\beta(x)$: “x es entero”. Dado que:

$$\begin{aligned}
\neg\Big(\exists x\big(x \in A \wedge \big(\alpha(x) \wedge \neg\beta(x)\big)\big)\Big) &\equiv \forall x\Big(\neg\big(x \in A \wedge \big(\alpha(x) \wedge \neg\beta(x)\big)\big)\Big) && \text{Negación de } \exists \\
&\equiv \forall x\Big(x \in A \to \neg\big(\alpha(x) \wedge \neg\beta(x)\big)\Big) && \neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \alpha \to \neg\beta \\
&\equiv \forall x\Big(x \in A \to \big(\alpha(x) \to \beta(x)\big)\Big) && \neg(\alpha \wedge \neg\beta) \equiv \alpha \to \beta \\
&\equiv \forall x\Big(\big(x \in A \wedge \alpha(x)\big) \to \beta(x)\Big) && P \to (Q \to R) \equiv (P \wedge Q) \to R
\end{aligned}$$

la negación del enunciado original es: “Todo elemento de A que sea real, es entero”. ♢

Ej. 4 (1 pt) Indica cuáles de las siguientes proposiciones son tautologías, cuáles son contradicciones, y, para las contingentes, da una equivalencia lógica que utilice únicamente los conectivos negación ($\neg$) y disyunción ($\vee$). No es necesario justificar.

i) $\neg(\gamma \wedge \gamma)$.

ii) $\alpha \to \alpha$.

iii) $\alpha \wedge (\alpha \vee \beta)$.

iv) $\alpha \vee (\alpha \wedge \beta)$.

v) $\beta \to (\alpha \to \beta)$.

vi) $\big(\neg\gamma \wedge (\neg\gamma \vee \beta)\big) \leftrightarrow \gamma$.

vii) $\neg\delta \leftrightarrow \delta$.

viii) $(\gamma \to \eta) \to (\neg\eta \to \neg\gamma)$.

ix) $\beta \wedge \alpha$.

Solución. Las proposiciones (ii), (v) y (viii) son tautologías; mientras que, (vi) y (vii) son contradicciones; además:

i) $\neg(\gamma\gamma) \equiv \neg\gamma$.

iii) $\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \equiv \alpha$.

iv) $\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \equiv \alpha$.

ix) $\beta \wedge \alpha \equiv \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$.

son equivalencias lógicas para (iii), (iv) y (ix) que utilizan únicamente negación y disyunción. ♢

Ej. 5 (1 pt) Traduce las siguientes equivalencias lógicas a igualdades entre conjuntos. Demuestra las igualdades que propusiste.

i) $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$.

ii) $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$.

Solución. (i) Si A, B, C son conjuntos, esta equivalencia se traduce como:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Para probar tal igualdad, consideremos cualquier objeto matemático x, entonces:

$$\begin{aligned}
x \in A \cup (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \cap C && \text{Definición de } \cup \\
&\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) && \text{Definición de } \cap \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \vee \in C) && \alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C) && \text{Definición de } \cap \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup x \in (A \cap C) && \text{Definición de } \cup
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\forall x(x \in A \cup (B \cap C) \leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup x \in (A \cap C))$ es verdadera, probando que $A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup x \in (A \cap C)$.

(ii) Si A, B y X son conjuntos, esta equivalencia se traduce a la igualdad:

$$X \setminus (X \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$$

Y su demostración consiste en considerar cualquier objeto x y observar que:

$$\begin{aligned}
x \in X \setminus (A \cap B) &\Leftrightarrow x \in X \wedge \neg(x \in (A \cap B)) && \text{Definición de } \setminus \\
&\Leftrightarrow x \in X \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B) && \text{Definición de } \cap \\
&\Leftrightarrow x \in X \wedge \big(\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)\big) && \neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta \\
&\Leftrightarrow \big(x \in X \wedge \neg(x \in A)\big) \vee \big(x \in X \wedge \neg(x \in B)\big) && \text{Distribución de } \wedge \text{ en } \vee \\
&\Leftrightarrow x \in X \setminus A \vee x \in X \setminus B && \text{Definición de } \setminus \\
&\Leftrightarrow x \in (X \setminus A) \cup (X \setminus B) && \text{Definición de } \cup
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\forall x(x \in X \setminus (A \cap B) \leftrightarrow x \in (X \setminus A) \cup (X \setminus B))$ es verdadera, demostrando así la igualdad de conjuntos: $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$. $\Diamond$

Ej. 6 (1 pt) Sean A y X conjuntos de modo que $A \subseteq X$. Demuestra *un inciso* de cada una de las siguientes columnas (tres igualdades en total).

i) $A \cap \varnothing = \varnothing$.	iv) $A \cap X = A$.	vii) $A \cap (X \setminus A) = \varnothing$.
ii) $A \cup \varnothing = A$.	v) $A \cup X = X$.	viii) $A \cup (X \setminus A) = X$.
iii) $A \cup A = A$.	vi) $A \cap A = A$.	ix) $X \setminus (X \setminus A) = A$.

Demostración. Probaremos (ii), (iv) y (ix). Para ser ilustrativos, en cada inciso utilizaremos un "método" distinto, pero en cada inciso se puede emplear el método que se desee.

(i) Para verificar que $A \cup \varnothing = A$, habrá de mostrarse que:

$$\forall x(x \in A \cup \varnothing \leftrightarrow x \in A) \equiv \forall x\big((x \in A \vee x \in \varnothing) \leftrightarrow x \in A\big)$$

es verdadera.

Y efectivamente, sea x cualquier objeto. Por definición de vacío "$x \in \varnothing$" es siempre falsa, por ello, los renglones primero y tercero de la siguiente tabla nunca ocurren:

$x \in A$	$x \in \varnothing$	$(x \in A \vee x \in \varnothing)$	$\leftrightarrow$	$x \in A$
1	1	1	1	1
1	0	1	1	1
0	1	1	0	0
0	0	0	1	0

Como en los demás renglones, "$(x \in A \vee x \in \varnothing) \leftrightarrow x \in A$" es verdadera, se ha mostrado que "$\forall x\big((x \in A \vee x \in \varnothing) \leftrightarrow x \in A\big)$" es verdadera. Por lo tanto, "$\forall x(x \in A \cup \varnothing \leftrightarrow x \in A)$" es verdadera; y así, se tiene que $A \cup \varnothing = A$.

(ii) Se demostrará por doble contención que:

$$A \cap X = A$$

($\subseteq$) Supongamos que $x \in A \cap X$, entonces por definición de intersección $x \in A$ y $x \in X$. Particularmente, $x \in A$. Así, "$x \in A \cap X \to x \in A$" es verdadera. Como x fue cualquier objeto, entonces "$\forall x(x \in A \cap X \to x \in A)$" es verdadera; es decir, $A \cap X \subseteq A$.

($\supseteq$) Supongamos que $x \in A$. Dado que $A \subseteq X$ y

(iii) Sea x cualquier objeto, entonces:

$$\begin{aligned}
x \in X \setminus (X \setminus A) &\Leftrightarrow x \in X \wedge \neg(x \in X \setminus A) && \text{Definición de } \setminus \\
&\Leftrightarrow x \in X \wedge \neg\big(x \in X \wedge \neg(x \in A)\big) && \text{Definición de } \setminus \\
&\Leftrightarrow x \in X \wedge \big(\neg(x \in X) \vee \neg\neg(x \in A)\big) && \text{Ley de De Morgan} \\
&\Leftrightarrow x \in X \wedge \big(\neg(x \in X) \vee x \in A\big) && \text{Doble negación} \\
&\Leftrightarrow \big(x \in X \wedge \neg(x \in X)\big) \vee \big(x \in X \wedge x \in A\big) && \text{Distribución de } \wedge \text{ en } \vee \\
&\Leftrightarrow \bot \vee \big(x \in X \wedge x \in A\big) && \gamma \wedge \neg\gamma \text{ es contradicción} \\
&\Leftrightarrow x \in X \wedge x \in A && \bot \vee \gamma \equiv \gamma \\
&\Leftrightarrow x \in X \cap A && \text{Definición de } \cap \\
&\Leftrightarrow x \in A && \text{Como } A \subseteq X \text{, se puede aplicar el inciso anterior}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\forall x(x \in X \setminus (X \setminus A) \leftrightarrow x \in A)$ es verdadera, mostrando así que $X \setminus (X \setminus A) = A$. ■

Ej. 7 (1 pt) Denotamos por $A \triangle B$ a la diferencia simétrica entre los conjuntos A y B. Demuestra que $A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)$.

Demostración. Utilizaremos la siguiente equivalencia vista (y probada) en clase:

$$x \in X \vartriangle Y \;\Leftrightarrow\; x \in X | x \in Y \tag{*}$$

donde | denota el *"o exclusivo"*. Ademas utilizarmos el siguiente Lema:

Lema. $(\alpha|\beta)|(\alpha \wedge \beta) \equiv \alpha \vee \beta$.

Demostración. Basta verificar la tabla de verdad de ambas proposiciones.

α	β	$(\alpha$	$\vert$	$\beta)$	$\vert$	$(\alpha$	$\wedge$	$\beta)$	α	$\vee$	β
1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Lo cual finaliza la prueba del Lema. ⊠

De esta manera, para cualquier objeto x, se tiene:

$$\begin{aligned}
x \in (A \vartriangle B) \vartriangle (A \cap B) &\Leftrightarrow x \in A \vartriangle B | x \in A \cap B && \text{Por (*)}\\
&\Leftrightarrow (x \in A | x \in B) | x \in A \cap B && \text{Por (*)}\\
&\Leftrightarrow (x \in A | x \in B) | (x \in A \wedge x \in B) && \text{Definición de } \cap\\
&\Leftrightarrow x \in A \vee x \in B && \text{Lema}\\
&\Leftrightarrow x \in A \cup B && \text{Definición de } \cup
\end{aligned}$$

Por lo tanto, "$\forall x\big(x \in (A \vartriangle B) \vartriangle (A \cap B) \leftrightarrow x \in A \cup B\big)$" es verdadera, esto es, $(A \vartriangle B) \vartriangle (A \cap B) = A \cup B$. ■

Ej. 8 (1 pt) Sean A y B conjuntos. Demuestra que:

i) $A \subseteq A \cap B$ si y sólo si $A \subseteq B$.

ii) $A \cup B \subseteq B$ si y sólo si $A \subseteq B$.

Demostración. (i) Veamos que $A \subseteq A \cap B$ si y sólo si $A \subseteq B$. ($\Rightarrow$) Supongamos que $A \subseteq A \cap B$, veamos por definición que $A \subseteq B$. Sea $x \in A$ cualquier elementom, como $A \subseteq A \cap B$, entonces $x \in A$ y $x \in B$. Particularmente $x \in B$. Así, hemos mostrado que $x \in A \rightarrow x \in B$ es verdadera, y esto, para cualquier objeto x. Por lo tanto $A \subseteq B$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $A \subseteq B$, veamos por definición que $A \subseteq A \cap B$. Sea $x \in A$ cualquier elemento, como $A \subseteq B$, entonces $x \in B$. Por ello, $x \in A$ y $x \in B$son verdaderas, así que $x \in A \wedge x \in B$ también es verdadera. Luego, hemos probado que $x \in A \rightarrow (x \in A \wedge x \in B)$ es verdadera, y esto, para todo objeto x. Por lo tanto $A \subseteq A \cap B$.

(ii) Este inciso se puede haver de forma similar al anterior, pero veamos otra manera.

Sea $X := A \cup B$, entonces $A \subseteq X$ y $B \subseteq X$. Entonces:

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\Leftrightarrow X \setminus B \subseteq X \setminus A && \text{Probado en calse} \\ &\Leftrightarrow X \setminus B \subseteq (X \setminus B) \cap (X \setminus A) && \text{Inciso anterior} \\ &\Leftrightarrow X \setminus B \subseteq X \setminus (B \cup A) && \text{Probado en clase} \\ &\Leftrightarrow B \cup A \subseteq B && \text{Probado en clase} \\ &\Leftrightarrow A \cup B \subseteq B && \text{Probado en clase} \end{aligned}$$

Mostrando la equivalencia deseada. ■

Ej. 9 (1 pt) Sean A y B conjuntos. Prueba que $A \subseteq B$ si y sólo si $\mathscr{P}(A) \subseteq \mathscr{P}(B)$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que $A \subseteq B$, veamos por definición que $\mathscr{P}(A) \subseteq \mathscr{P}(B)$. Sea $X \in \mathscr{P}(A)$ cualquier elemento, entonces $X \subseteq A$. Puesto que $A \subseteq B$, entonces $X \subseteq B$ y con ello $X \in \mathscr{P}(B)$. Se ha mostrado que "$\forall X(X \in \mathscr{P}(A) \to X \in \mathscr{P}(B))$" es verdadera, es decir, que ocurre $\mathscr{P}(A) \subseteq \mathscr{P}(B)$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $\mathscr{P}(A) \subseteq \mathscr{P}(B)$, veamos que $A \subseteq B$. De la hipótesis y la definición del conjunto potencia, se tiene que:

$$\forall X(X \subseteq A \to X \subseteq B)$$

Y, dado que $A \subseteq A$, entonces de lo anterior se obtiene $A \subseteq B$. ■

Ej. 10 (1 pt) Muestra que, en general, *no se da* la igualdad $\mathscr{P}(A \setminus B) = \mathscr{P}(A) \setminus \mathscr{P}(B)$.

Solución. Daremos un contrajemplo, es decir, encontraremos conjuntos A y B de modo que $\mathscr{P}(A \setminus B) = \mathscr{P}(A) \setminus \mathscr{P}(B)$.

Consideremos $A = \{0, x\}$ y $B := \{x\}$ (con $0 \neq x$). Entonces $A \setminus B = \{0\}$. Notamos que:

i) $A \subseteq A$. ii) $A \nsubseteq B$. iii) $A \nsubseteq A \setminus B$.

Efectivamente, (i) es claro. (ii) ocurre pues $0 \in A$ pero $0 \notin B$ por lo que "$\forall x(x \in A \to x \in B)$" es falsa. Y (iii) ocurre debido a que $x \in A$ pero $x \notin A \setminus B$ (esto último pues $x \in A \wedge x \notin B$ es falsa, ya que $x \in B$), así que "$\forall x(x \in A \to x \in A \setminus B)$" es falsa.

Traduciendo, (i) dice que $A \in \mathscr{P}(A)$ y (ii) dice que $A \notin \mathscr{P}(B)$, por lo que $A \in \mathscr{P}(A) \setminus \mathscr{P}(B)$. Sin embargo, (iii) indica que $A \notin \mathscr{P}(A \setminus B)$. Así que $\mathscr{P}(A) \setminus \mathscr{P}(B)$ y $\mathscr{P}(A \setminus B)$ no tienen los mismos elementos, es decir, son conjuntos distintos. ◊