“Definicionario” de funciones.

Profesor: Luis Jesús Trucio Cuevas.
Ayudante: Hugo Víctor García Martínez.

Índice

1 Definiciones básicas 2

2 Funciones y subconjuntos 3

3 Composición de funciones 6

4 Algunas Tareas Morales (que recordamos, je je) 9

1. Definiciones básicas

Definición 1. *Sean A y B conjuntos. Una* ***función*** *de A a B es una relación $f \subseteq A \times B$ tal que:*

i) $\operatorname{dom}(f) = A$.

ii) *Para todo $a \in A$, existe un único $b \in B$ tal que $a\ f\ b$, como tal b es único, se le puede dar una notación especial: $f(a)$.*

Cuando f sea función de A en B, se escribirá $f : A \to B$. Además, se conviene que:

iii) ***UN codominio*** *para f es cualquier conjunto Y de modo que* $\operatorname{ima}(f) \subseteq Y$.

En virtud del punto (ii) de la definición anterioro, debe ser claro que si $f : A \to B$, entonces $f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$.

Pese a la "definición formal" de función, en la práctica, pensaremos a la función como un objeto que cuenta con un nombre, un dominio, un codominio (esto es, cualquier conjunto B tal que $\operatorname{ima}(f) \subseteq B$), y una "regla de correspondencia" (la instrucción que dicta cómo actúa la función en cada elemento del dominio).

Observación 2. *Una función puede tener varios codominios, por ejemplo, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(n) = 4n + 5$ también puede ser pensada como función con codominio $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$, etcétera; pues, todos estos conjuntos contienen a la imagen de f: $\{4n + 5 \mid n \in \mathbb{N}\}$. Entonces, es válido pensar a f como:*

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q},\ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ o\ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ etc...$$

Sin embargo el dominio de cualquier función sí es único (al igual que su imagen).

Rara vez verificaremos la igualdad de funciones mediante doble contención o métodos similares, se tiene el siguiente criterio:

Recordatorio 3. *Si $f : A \to B$ y $g : X \to Y$ son funciones, entonces $f = g$ si y solamente si se cumplen las siguientes dos condiciones:*

i) $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)$*; es decir, $A = X$; y*

ii) Para cada $x \in \mathrm{dom}(f)$, se cumple que $f(x) = g(x)$.

Definición 4. *Sean A, B conjuntos y $f : A \to B$ una función. Se dice que:*

i) f es ***inyectiva*** *si y sólo si $\forall x, y \in A\big(f(x) = f(y) \to x = y\big)$.*

ii) f es ***sobreyectiva*** *(en B) si y sólo si $\forall b \in B\, \exists a \in \big(b = f(a)\big)$. El término "sobreyectiva" (a secas) se refiere a la sobreyectividad en el codominio indicado al momento de dar la función.*

iii) f es ***biyectiva*** *si y sólo si es inyectiva y sobreyectiva.*

Observación 5. *Para todo conjunto A, la función identidad $\mathrm{id}_A : A \to A$ definida por $\mathrm{id}_A(x) = x$ es biyectiva, pues es inyectiva y sobreyectiva (en A).*

Lo anterior funciona incluso si $A = \varnothing$ (¿por qué?).

2. Funciones y subconjuntos

Cuando se tenga una función $f : A \to B$, evidentemente, se le puede aplicar f a cada punto (elemento) a de su dominio, A. Es decir, la función toma puntos de A y devuelve puntos de B.

Una idea interesante es la siguiente: ¿se le puede "aplicar" f a un subconjunto X de su dominio A?. La respuesta corta es *no*, pues la función *sólo se aplica a puntos de su dominio*, no a subconjuntos del mismo. Sin embargo, se puede recuperar parte de esta idea:

Definición 6. *Sean $f : A \to B$ una función (así redactado, es claro que A y B son conjuntos arbitrarios) y $X \subseteq A$. Se define la* ***imagen directa de*** *X (**bajo** f) como el conjunto:*

$$f[X] := \{f(x) \in B \mid x \in X\}$$

Es decir, $f[X] := \big\{l \in B \,\big|\, \exists x \in X\big(l = f(x)\big)\big\}$.

Estos dos conjuntos son exactamente iguales, pero la notación es distinta, se puede tomar la que mejor se entienda (pues, de nuevo, son exactamente lo mismo).

La siguiente observación es fundamental para escribir correctamente las demostraciones que involucren imágenes directas en ellas.

Observación 7. *Tomar elementos en cualquier imagen directa $f[\bigstar]$ se traduce a lo siguiente:*

$$l \in f[\bigstar] \iff \exists x \in \bigstar\big(l = f(x)\big) \tag{1}$$

Además, siempre que se tenga un elemento $y \in A$ se cumplirá:

$$y \in \bigstar \Rightarrow f(y) \in f[\bigstar]$$

equivalentemente (usando contrapuesta): $f(y) \notin f[\bigstar] \Rightarrow y \notin \bigstar$.

En clase se demostró lo siguiente:

Teorema 8. *Sean $f : A \to B$ una función y $X, Y \subseteq A$ arbitrarios. Entonces:*

i) $f[\varnothing] = \varnothing$.

ii) $f[A] = f[\mathrm{dom}(f)] = \mathrm{ima}(f)$.

iii) *Si $X \subseteq Y$, entonces $f[X] \subseteq f[Y]$.*

iv) $f[X \cup Y] = f[X] \cup f[Y]$.

v) $f[X \cap Y] \subseteq f[X] \cap f[Y]$, *pero* ***no siempre*** $f[X] \cap f[Y] \subseteq f[X \cap Y]$.

vi) $f[X] \setminus f[Y] \subseteq f[X \setminus Y]$, *pero* ***no siempre*** $f[X \setminus Y] \subseteq f[X] \setminus f[Y]$.

Una idea "dual" a la anterior es la imagen inversa, cabe aclarar que, pese a lo sugerente que es la siguiente notación en ningún momento se está haciendo referencia a la función inversa de f (y tampoco, a la relación inversa, pensando a f como relación).

Definición 9. *Sean $f : A \to B$ una función y $Y \subseteq B$. Se define la **imagen inversa de** Y (**bajo** f) como el conjunto:*

$$f^{-1}[Y] := \{x \in X \mid f(x) \in Y\}$$

Desde ya se nota que la imagen inversa es más "amigable" que la imagen directa, pues si se tiene un elemento x en una imagen inversa $f^{-1}[\bigstar]$, no hay necesidad de "involucrar" un tercer elemento (además de x y $\bigstar$), como sí ocurre en la equivalencia 1.

Observación 10. *Tomar elementos en una imagen inversa $f^{-1}[\bigstar]$ se traduce a lo siguiente:*

$$x \in f^{-1}[\bigstar] \iff f(x) \in \bigstar \tag{2}$$

Pensando muy, muy, muuuuuy informalmente, la equivalencia anterior se puede pensar como un "depeje" de f en las pertenencias correspondientes.

Como muestra de que la imagen inversa se comporta "mejor" que la imagen directa, consideremos el siguiente argumento: Si $f : A \to B$ y $X, Y \subseteq B$, entonoces debe ocurrir que $f^{-1}[X \cap Y] = f^{-1}[X] \cap f^{-1}[Y]$, pues para todo (objeto matemático) x se tiene:

$$\begin{aligned}
x \in f^{-1}[X \cap Y] &\Leftrightarrow f(x) \in X \cap Y && \text{Def. de imagen inversa} \\
&\Leftrightarrow f(x) \in X \wedge f(x) \in Y && \text{Def. de intersección} \\
&\Leftrightarrow x \in f^{-1}[X] \wedge x \in f^{-1}[X] && \text{Def. de imagen inversa} \\
&\Leftrightarrow x \in f^{-1}[X] \cap f^{-1}[X] && \text{Def. de intersección}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\forall x\big(x \in f^{-1}[X \cap Y] \leftrightarrow x \in f^{-1}[X] \cap f^{-1}[X]\big)$, mostrando la igualdad deseada.

Nótese que en la justificación anterior, itercambiar $\cap$ por $\cup$ y $\wedge$ por $\vee$, resultaría en una argumentación suficiente para mostrar que $f^{-1}[X \cup Y] = f^{-1}[X] \cup f^{-1}[Y]$. De razonamientos similares a este se desprende lo siguiente (también demostrado en clase):

Teorema 11. *Sean $f : A \to B$ una función y $X, Y \subseteq B$ arbitrarios. Entonces:*

i) $f^{-1}[\varnothing] = \varnothing$.

ii) $f^{-1}[A] = f^{-1}[B] = \mathrm{dom}(f)$.

iii) $f^{-1}[A] = f^{-1}[\mathrm{ima}(f)] = \mathrm{dom}(f)$.

iv) *Si $X \subseteq Y$, entonces $f^{-1}[X] \subseteq f^{-1}[Y]$.*

v) $f^{-1}[X \cup Y] = f^{-1}[X] \cup f^{-1}[Y]$.

vi) $f^{-1}[X \cap Y] = f^{-1}[X] \cap f^{-1}[Y]$.

vii) $f^{-1}[X] \setminus f^{-1}[Y] = f^{-1}[X \setminus Y]$.

3. Composición de funciones

Definición 12. *Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones. Se define la función $g \circ f : A \to C$, para cada $a \in A$, por medio de:*

$$(g \circ f)(a) = g\big(f(a)\big)$$

Algo que parece insignnificante es el orden de las funciones en la composición, y, cuándo tiene sentido cmponer doos funciones. Sin embargo, es bueno meditar sobre esto:

Observación 13. *Para que dos funcines f y g se puedan componer, aplicando (por ejemplo) primero f y luego g, tal composición debe tener sentido; y para ello, es requisito que:*

$$\operatorname{ima}(f) \subseteq \operatorname{dom}(g)$$

Es decir, basta que algún codominio de f (recordemos que hay muchos codominios), esté contenido en el dominio de g. Esto es, basta que $f : A \to B$ y $g : B \to Y$; o bien, que $f : A \to B$ y $g : X \to C$ bajo la condición $B \subseteq X$

Ejemplo 14. *Si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son las funciones definidas por:*

$$f(n) = n + 1 \quad y \quad g(x) = x^6$$

entonces se puede realizar la composición de f y luego g (pues $\mathbb{Z}$, un codominio de f, está contenido en el dominio de g, $\mathbb{R}$). Así, $g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, y g estará dada, para cada $n \in \mathbb{N}$, por $\big(g \circ f\big)(n) = (n+1)^6$.

En clase se demostró que:

Teorema 15. *Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to D$ funciones. Entonces:*

i) $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

por lo que tiene sentido escribir $h \circ g \circ f$ (sin paréntesis), pues no hay riesgo de ambigüedades.

Teorema 16. *Si $f : A \to B$ es cualquier función, entonces $f \circ \mathrm{id}_A = f$, y también $\mathrm{id}_B \circ f = f$.*

Además se tienen los siguientes resultados en relación a la sobreyectividad e inyectividad de las funciones en términos de composicioines. Lo siguiente también se probó durante las clases:

Teorema 17. *Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ cualesquiera funciones, entonces:*

- *i) Si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.*
- *ii) Si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva. ¿Puedes encontrar un ejemplo donnde $g \circ f$ sea sobreyectiva, pero f no lo sea?*
- *iii) Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.*
- *iv) Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva. ¿Puedes encontrar un ejemplo donnde $g \circ f$ sea innyectiva, pero g no lo sea?*

Además, si $A \neq \emptyset$, para todo unitario (conjunto de la forma $\{*\}$) se tiene:

- *v) Cualquier función $f : A \to \{*\}$ es sobreyectiva.*
- *vi) Cualquier función $g : \{*\} \to A$ es innyectiva.*

Se tienen las siguientes definiciones:

Definición 18. *Si $f : A \to B$ es una función, se conviene que:*

- *i) Una **inversa derecha para** f es una función $g : B \to A$ tal que $f \circ g = \mathrm{id}_B$.*
- *ii) Una **inversa izquierda para** f es una función $h : B \to A$ tal que $h \circ f = \mathrm{id}_A$.*
- *iii) f es **cancelable por izquierda** si para cualesquiera funciones $i, j : X \to A$ se tiene que: $f \circ i = f \circ j \Rightarrow i = j$.*
- *iv) f es **cancelable por derecha** si para cualesquiera funciones $k, l : B \to Y$ se tiene que: $k \circ f = l \circ f \Rightarrow k = l$.*

El siguiente teorema se demostró en clase y es clave para tener distintas formas de pensar a las funciones sobreyectivas:

Teorema 19. *Sean $f : A \to B$ una función. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) *f es sobreyectiva.*

ii) *Existe una inversa derecha para f.*

iii) *f es cancelable por derecha.*

4. Algunas Tareas Morales (que recordamos, je je)

Ejercicio Moral 20. *Demostrar que si $f : A \to B$ es una función, entonces:*

i) *Para cualquier familia indexada $\{X_i \mid i \in I\}$ de subconjuntos de A, se tiene que:*

$$f\left[\bigcup_{i\in I} X_i\right] = \bigcup_{i\in I} f[X_i]$$

ii) *Para cualquier familia indexada $\{Y_i \mid j \in J\}$ de subconjuntos de B, se tiene que:*

$$f^{-1}\left[\bigcup_{i\in I} X_i\right] = \bigcup_{i\in I} f^{-1}[X_i]$$

y, si la familia es no vacía:

$$f^{-1}\left[\bigcap_{i\in I} X_i\right] = \bigcap_{i\in I} f^{-1}[X_i]$$

Ejercicio Moral 21. *Sea $f : A \to B$ cualquiera, demostrar que:*

i) Para cada $X \subseteq A$ se tiene $X \subseteq f^{-1}\big[f[X]\big]$, pero no siempre ocurre que $f^{-1}\big[f[X]\big] \subseteq X$ (dar un contraejemplo para esto último).

ii) Para cada $Y \subseteq B$ se tiene $f\big[f^{-1}[Y]\big] \subseteq Y$, pero no siempre ocurre que $Y \subseteq f\big[f^{-1}[Y]\big]$ (dar un contraejemplo para esto último).

Se dejó pensar en el teorema análogo al Teorema 19, es decir:

Ejercicio Moral 22. *Sean $f : A \to B$ una función. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) f es inyectiva.

ii) Existe una inversa izquierda para f.

iii) f es cancelable por izquierda.

Recordemos que (i) $\Leftrightarrow$ (ii) ya se probó en clase, así que basta verificar la equivalencia de cualquiera de ellas con (iii).