Tarea 1

Álgebra Superior 1, 2025-4

Profesor: Luis Jesús Trucio Cuevas.
Ayudante: Hugo Víctor García Martínez.

Instrucciones. *Resuelve los siguientes ejercicios. Esta tarea es individual y deberá ser entregada presencialmente, durante la clase del* ***lunes 16 de junio****.*

Ej. 1 (1 pt) Demuestra las siguientes equivalencias lógicas.

i) $\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \equiv \alpha$.

ii) $\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \equiv \alpha$.

iii) $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$.

iv) $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$.

Ej. 2 (1 pt) Escribe fórmulas lógicas (de primer orden) que, a tu criterio, capturen mejor cada una de las siguientes afirmaciones.

i) Cada persona viva respira.

ii) 2 es el único primo par.

iii) Existe un hombre inmortal.

iv) No existen estudiantes en Ciudad Universitaria que sean felices.

v) Todos los peces del acuario de la facultad se aparean algún un individuo.

Ej. 3 (1 pt) Escribe la negación de las siguientes proposiciones. Si el inciso está en español, escribe tu respuesta en español.

i) $\alpha \leftrightarrow \beta$.

ii) $\neg\alpha \to \gamma$.

iii) $\gamma \to (\delta \to \gamma)$.

iv) $\exists x\big(\alpha(x) \wedge \big(\beta(x) \wedge \gamma(x)\big)\big)$.

v) $\forall a\big(\alpha(a) \to \exists b\big(\beta(a,b)\big)\big)$.

vi) $\exists b \forall x\big(\forall y(\alpha(y)) \leftrightarrow \big(Q(x,y) \wedge R(b)\big)\big)$.

vii) Si x es un número primo y es mayor que 4, n es impar.

viii) Hay cierto elemento de A que es real, pero no entero.

Ej. 4 (1 pt) Indica cuáles de las siguientes proposiciones son tautologías o contradicciones. Para aquellas que sean contingentes, da una equivalencia lógica que utilice únicamente los conectivos negación y disyunción. No es necesario justificar.

i) $\neg(\gamma \wedge \gamma)$.

ii) $\alpha \to \alpha$.

iii) $\alpha \wedge (\alpha \vee \beta)$.

iv) $\alpha \vee (\alpha \wedge \beta)$.

v) $\beta \to (\alpha \to \beta)$.

vi) $\big(\neg\gamma \wedge (\neg\gamma \vee \beta)\big) \leftrightarrow \gamma$.

vii) $\neg\delta \leftrightarrow \delta$.

viii) $(\gamma \to \eta) \to (\neg\eta \to \neg\gamma)$.

ix) $\beta \wedge \alpha$.

Ej. 5 (1 pt) Traduce las siguientes equivalencias lógicas a igualdades entre conjuntos. Demuestra las igualdades que propusiste.

i) $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$.

ii) $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$.

Ej. 6 (1 pt) Sean A y X conjuntos de modo que $A \subseteq X$. Demuestra *un inciso* de cada una de las siguientes columnas (tres igualdades en total).

i) $A \cap \varnothing = \varnothing$.

ii) $A \cup \varnothing = A$.

iii) $A \cup A = A$.

iv) $A \cap X = A$.

v) $A \cup X = X$.

vi) $A \cap A = A$.

vii) $A \cap (X \setminus A) = \varnothing$.

viii) $A \cup (X \setminus A) = X$.

ix) $X \setminus (X \setminus A) = A$.

Ej. 7 (1 pt) Denotamos por $A \vartriangle B$ a la diferencia simétrica entre los conjuntos A y B. Demuestra que $A \cup B = (A \vartriangle B) \vartriangle (A \cap B)$.

Ej. 8 (1 pt) Sean A y B conjuntos. Demuestra que:

i) $A \subseteq A \cap B$ si y sólo si $A \subseteq B$.

ii) $A \cup B \subseteq B$ si y sólo si $A \subseteq B$.

Ej. 9 (1 pt) Sean A y B conjuntos. Prueba que $A \subseteq B$ si y sólo si $\mathscr{P}(A) \subseteq \mathscr{P}(B)$.

Ej. 10 (1 pt) Muestra que, en general, *no se da* la igualdad $\mathscr{P}(A \setminus B) = \mathscr{P}(A) \setminus \mathscr{P}(B)$.

Ej. 11 (+1 pt) Denotamos por $\mathbb{R}$ al conjunto de números reales, por $\mathbb{Q}$ al conjunto de racionales y por $\mathbb{Z}$ al conjunto de números enteros.

Sea $A := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Para cada número real $y \in \mathbb{R}$ se define el conjunto $B(y)$ como $B(y) := \{x \in \mathbb{R} : |x - y| < 0.15\}$. Utilizando operaciones de conjuntos, escribe en términos de los conjuntos anteriores, el conjunto cuyos elementos sean:

i) Todos los enteros menores o iguales a 0.

ii) Todos los irracionales cuya distancia a π es mayor o igual a 0.15.

iii) Los reales negativos mayores a -0.15.

iv) Todos los racionales que distan de algún entero en menos de 0.15.