Tarea 4

Álgebra Superior 1, 2025-4

Profesor: Luis Jesús Trucio Cuevas.
Ayudante: Hugo Víctor García Martínez.

Instrucciones. *Resuelve los siguientes ejercicios. Esta tarea es individual y deberá ser entregada* ***presencialmente****, durante la clase del* ***lunes 28 de julio.***

La idea de esta tarea es demostrar la versión para conjuntos de uno de los resultados más importantes en matemáticas; el Primer Teorema de Isomorfismo de Noether[1]. Existen versiones de este teorema para áreas como la Teoría de Grupos, la Teoría de Anillos, la Topología, etcétera; pero la formulación que se deemostrará en esta tarea es la siguiente:

Teorema 1. *[Primero de Isomorfismo de Noehter] Cualquier función $f\colon A \to B$ se puede escribir como composición "no obvia" de: una sobreyección, una biyección y una inyección. Es decir, existen conjuntos U y V, y funciones $s\colon A \to U$ sobreyectiva, $b\colon U \to V$ biyectiva e $i\colon V \to B$ inyectiva, tales que $f = i{\circ}s{\circ}b$,*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & B \\ U \arrow[r, "b"'] & V. \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd} \tag{1}$$

Nota: *Desde ahora, y durante toda la tarea, los conjuntos A, B y la función $f\colon A \to B$ serán fijos (pero arbitrarios).*

Caso sencillo

Notemos que si $f\colon A \to B$ es una biyección, entonces el Teorema 1 es sencillo, pues podemos escribir a f como $\mathrm{id}_B{\circ}f{\circ}\mathrm{id}_A$ (y las identidades de A y B son sobreyectiva e inyectiva, respectivamente). Por lo que el verdadero problema es sabér qué ocurre si f no es sobreyectiva, o, si no es inyectiva.

[1] Emmy Noether (1882-1935) fue una matemática alemana reconocida por sus contribuciones fundamentales en la física; y claro, en las matemáticas, particularlemten en álgebra abstracta. Existen muchos resultados que llevan su nombre en su honor, y el de esta tarea es la versión para conjuntos de uno de ellos.

Como, por definición, un codominio para una función es cualquier conjunto que contenga a la imagen de la función, siempre se puede pensar que una función tiene por codominio a su imagen. En este sentido, $f : A \to B$ puede ser pensada con codominio $f[A]$; lo cual permite pensar a f como una función sobreyectiva. A la función f pensada así, se le denotará por $\hat{f}$, esto es:

Definición 2. *Se define $\hat{f} : A \to f[A]$ como la función f pensada con codominio $f[A]$, es decir, para cada $x \in A$, $\hat{f}(x) = f(x)$.*

Entonces, como conjuntos f y $\hat{f}$ son iguales, pues:

I) $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(\hat{f}) = A$.

II) Para cada $x \in A$, $f(x) = \hat{f}(x)$.

La única diferencia es el codominio con el que las pensamos.

Ej 1. (1 pt) Demuestra que la función $\hat{f} : A \to f[A]$ siempre es función sobreyectiva; y concluye que, si $f : A \to B$ es inyectiva, entonces $\hat{f} : A \to f[A]$ es biyectiva.

Por lo tanto, la no sobreyectividad de f no representa un obstáculo grande al momento de demostrar el Teorema 1; esto es porque, $f : A \to B$ se puede pensar como primero aplicar $\hat{f} : A \to f[A]$ y luego una función que tome cada punto en $f[A]$ y, sin hacerele nada, lo piense como punto de B. Las funciones que se encargan de esto último se llaman "inclusiones", y su definición es la siguiente:

Definición 3. *Si X y Y son conjuntos tales que $X \subseteq Y$, definimos la inclusión de X en Y como la función $i_{X,Y} : X \to Y$ definida para cada $x \in X$ como $i_{X,Y}(x) = x$.*

Como conjunto, $i_{X,Y} = \mathrm{id}_X$, así que esta función no tendría que depender de Y; sin embargo, escribimos las inclusiones así para dejar en claro cuál es el codominio con el que las pensamos.

Ej 2. (1.5 pts) Demuestra que:

I) Si $X \subseteq Y$, entonces $i_{X,Y} : X \to Y$ es inyectiva.

II) $f = i_{f[A],B} \circ \hat{f}$.

Por lo tanto, ya hemos resuelto una pqueña parte del problema que nos atañe, pues hemos demostrado que cualquier función $f : A \to B$ se puede escribir como composición de una sobreyección y una inyección, es decir, en términos del Diagrama 1, tenemos descubierto quiénes deberían ser V e i:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] \arrow[dr, "\hat{f}" description] & B \\
U \arrow[r, "b"'] & f[A]. \arrow[u, "i_{f[A],B}"']
\end{tikzcd}
\tag{2}
$$

Obsrevación: *La parte del Teorema 1 que indica que la descomposición debe ser "no obvia", en el sentido de evitar una descomposición de f que sea del estilo: aplicar $\hat{f} : A \to f[A]$ (sobreyectiva), luego* $\mathrm{id}_{F[A]}$ *(biyectiva), y por último* $\mathrm{i}_{f[A],B}$ *(inyectiva).*

Regresando al diagrama anterior, falta probar que $\hat{f}$ se puede descomponer como composición (no obvia) de una sobreyección, y luego, una biyección; es decir, falta descubrir quiénes son s, b y U en el Diagrama 2.

"Inyectivizando" una función

Una vez resuelto el problema de la sobreyectividad, el siguiente obstáculo es la inyectividad. ¿Cómo se puede transformar una función no inyectiva en otra que sí sea biyectiva? Imaginemos el siguiente caso particular:

$$X = \{0, 1, 2, 3, 4\} \xrightarrow{g} Y = \{a, b, c\}$$

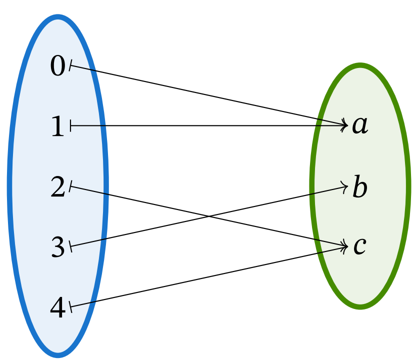

Figura 1: Ejemplo particular de función

Aunque el dominio de g conste de cinco puntos, se puede pensar que g aplica únicamente tres reglas: *mandar hacia a*, *mandar hacia b* o *mandar hacia c*, según sea el caso. Por lo cual, podemos clasificar a los elementos de X en tres *clases*: los que se mandan a a, los que se mandan a b y los que se mandan a c bajo g. Tal clasificación resulta en: $\{0,1\} = g^{-1}[\{a\}]$, $\{3\} = g^{-1}[\{b\}]$ y $\{2,4\} = g^{-1}[\{c\}]$, respectivamente.

Definición 4. *Definimos la relación $\sim$ en A como: $x \sim y$ si y sólo si $f(x) = f(y)$.*

Ej 3. (1.5 pts) Por un ejercicio de las tareas (*¿cuál?*), la relación $\sim$ es de equivalencia. Demuestra la igualdad de conjuntos: ${}^{A}/_{\sim} = \{f^{-1}[\{b\}] \mid b \in f[A]\}$.

Retomando el ejemplo particular de g Figura 1, se nota que:

I) Se puede mandar cada elemento $x \in X$ a su clase de equivalencia, por ejemplo 1 a $\{0,1\}$.

II) Cada clase surge de agrupar los elementos de X según g actúa en ellos. Luego, a la clase $\{0,1\} = g^{-1}[\{a\}]$ se le puede asignar el valor $a \in Y$ (pues esta clase se construyó como todos aquellos elementos de X que al aplicarles g daban a).

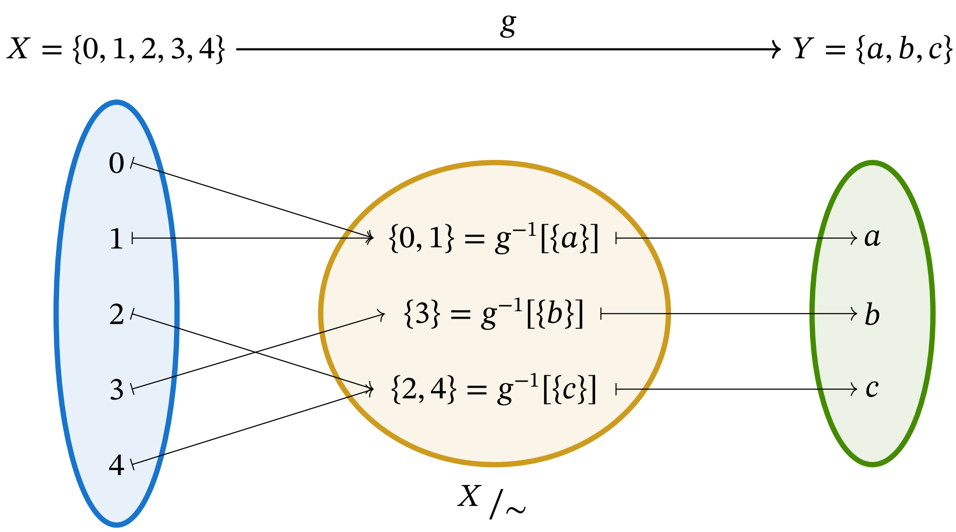

Figura 2: Descomposición de g en dos procesos (o funciones).

La imagen anterior describe dos procesos (o funciones) cuya aplicación seguida resulta en hacer exactamente lo mismo que g; estudiaremos ambas funciones con detenimiento a través de los siguientes ejercicios.

Definición 5. *Definimos* $q_f : A \to {}^{A}/_{\sim}$ *por medio de:* $q_f(x) = [x]$.

Ej 4. (1.5 pts) En términos de la definición previa:

I) Demuestra que q_f es sobreyectiva.

II) Prueba que si f es inyectiva, entonces para cada $x \in X$, $[x] = \{x\}$.

III) Concluye que, si f es inyectiva, entonces q_f es biyectiva.

Ej 5. (1.5 pts) Haciendo uso de la terminología definida hasta ahora, para cada inciso da un ejemplo particular de:

I) Una función $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \to \{0, 1, 2\}$ tal que q_f sea constante.

II) Una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de modo que ${}^{\mathbb{N}}/_{\sim}$ posea exactamente 5 elementos.

III) Una función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que para cada $z \in \mathbb{Z}$ se cumple $q_f(z) = q_f(z + 7)$ y $q_f(z) \neq q_f(z + 1)$.

Con lo hecho hasta el momento, se sugiere que el conjunto U del Diagrama 2 debe ser el cociente ${}^{A}/_{\sim}$, y, la función s debe ser q_f; resultando en:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q_f"'] \arrow[dr, "\hat{f}"] & B \\ {}^{A}/_{\sim} \arrow[r, "b"'] & f[A]. \arrow[u, "i_{f[A],B}"'] \end{tikzcd} \tag{3}$$

Únicamente resta definir $b : {}^{A}/_{\sim} \to f[A]$ biyectiva, de modo que se tenga la composición que queremos, esto es justamente lo que representa la segunda función aplicada en la Figura 2 del ejemplo particular. Éste puede ser pensado como asignarle a cada clase $g^{-1}[\{y\}]$ el elemento

y. Por supuesto, hay que verificar que tal cosa es función, es decir, está bien definida. Así que a continuación la definiremos únicamente como relación; y, posteriormente se verificará que es función:

Definición 6. *Definimos* $f^* \subseteq {}^{A}/_{\sim} \times f[A]$ *como la relación:*

$$[x]f^*b \quad \textit{si y sólo si} \quad \exists y \in [x]\big(b = f(y)\big).$$

Nada (aún) garantiza que f^* sea función, es decir, podría existir cierto $[x] \in {}^{A}/_{\sim}$ que se relacione con dos elementos diferentes $b, b' \in f[A]$, es decir $[x]f^*b$ y $[x]f^*b'$, lo cual prohibiría que f^* sea función.

Lo anterior no debería ocurrir, notemos que si $[x] \in {}^{A}/_{\sim}$, $[x]f^*b$ y $[x]f^*b'$; por definición de f^*, existe $y \in [x]$ de modo que $b = f(y)$; simimilarmente, $b' = f(y')$ para algún $y' \in [x]$, a partir de aquí ¿Cómo se tiene la garantía de que $b = b'$? ...

Ej 6. (1.5 pts) Completa la demostración empezada en el párrafo anterior; es decir, prueba que f^* es función de ${}^{A}/_{\sim}$ en $f[A]$ mostrando que:

$$\forall [x] \in {}^{A}/_{\sim}\ \forall b, b' \in f[A]\ \Big(\big([x]f^*b \wedge [x]f^*b'\big) \to b = b'\Big).$$

Juntando todo

Es bueno (y necesario) meditar que, lo que demuestra el ejercicio anterior en el fondo es que, para cada $x \in A$:

$$f^*([x]) = f(x). \tag{4}$$

Notemos que $[x]$*; al ser una clase de equivalencia, podría "tener otro nombre", como* $[u]$ *o* $[z]$ *con* $u, z \neq x$*, lo cual imposibilita definir al inicio* f^* *como en (4), esto es algo que se debía demostrar.*

Se concluye esta tarea juntanto todo lo que tenemos, esto es, mostrando que hacer $f : A \to B$ es lo mismo que primero hacer $q_f : A \to {}^{A}/_{\sim}$, luego $f^* : {}^{A}/_{\sim} \to f[A]$, y por últimio, $i_{f[A],B}$. Esto es, se compelta el Diagrama 3 descubriendo quiénes son exactamente todos los objetos que no conocíamos al inicio, en el Diagrama 1:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q_f"'] & B \\
A/\sim \arrow[r, "f^*"'] & f[A]. \arrow[u, "i_{f[A],B}"']
\end{tikzcd}
\tag{5}
$$

Lo único que falta probar es que f^* es biyectiva, para esto, en lugar de usar la definición cruda de f^*, se sugiere utilizar la igualdad de la regla de correspondencia para f^* dada en (4).

Ej 7. (1 pt) Demuestra que $f^* : A/\sim \to f[A]$ es biyectiva.

Finalmente:

Ej 8. (.5 pts) Demuestra el Primer Teorema de Isomorfismo para conjuntos; es decir, prueba que:

$$f = i_{f[A],B} \circ f^* \circ q_f$$

(f es composición de una sobreyección, una biyección y una inyección).

Por puntos extra…

Tras realizar todo lo que acabamos de hacer, quedan varias dudas que sólo los más avispados podrían plantearse. La primera de ellas es la siguiente: ¿La notación $(-)^*$ es buena? es decir, ¿para cada $f : A \to B$, f^* es la única función biyectiva $b : A/\sim \to B$ que cumple $f = i_{f[A],B} \circ b \circ q_f$?, en efecto:

Ej 9. (+1 pt) Prueba que para cualesquiera funciones $i, j : A/\sim \to B$, si se tiene que $j \circ q_f = f$ y $i \circ q_f = f$, entonces $i = j$.

Ej 10. (+1 pt) A partir del ejercicio anterior, concluye que si $k : A/\sim \to f[A]$ Es biyección y $f = i_{f[A],B} \circ k \circ q_f$, entonces $k = f^*$.

Una reflexión más profunda sobre todo lo que se realizó a lo largo de esta tarea es que, e conjuntos, dar una sobreyección con dominio A es esencialmente lo mismo a dar una relación de equivalencia sobre A. Esto es, dada cualquier función sobreyectiva con dominio A, existe una forma de asignarle una relación de equivalencia en A; y, tal asignación es biyectiva.

Ej 11. (+2 pts) Definimos los conjuntos:

$$\begin{aligned} \mathscr{F} &:= \{g \mid g \text{ es función } \wedge \operatorname{dom}(g) = A \wedge g \text{ es sobreyectiva}\} \\ \mathscr{R} &:= \{R \mid R \subseteq A \times A \wedge R \text{ es relación de equivalencia}\} \end{aligned}$$

Encuentra una biyección entre $\mathscr{F}$ y $\mathscr{R}$.