Tarea 2

Álgebra Superior 1, 2025-4

Profesor: Luis Jesús Trucio Cuevas.
Ayudante: Hugo Víctor García Martínez.

Instrucciones. *Resuelve los siguientes ejercicios. Esta tarea es individual y deberá ser entregada presencialmente, durante la clase del* ***martes 24 de junio****.*

Ej. 1 (1 pt) Sean I, J, K conjuntos no vacíos y supongamos que $J \cup K = I$. Si $\{X_i \mid i \in I\}$ es una familia indexada de conjuntos, demuestra que:

$$\bigcap_{i\in I} X_i = \Big(\bigcap_{i\in J} X_i\Big) \cap \Big(\bigcap_{i\in K} X_i\Big)$$

Ej. 2 (1 pt) Sean A, B, X y Y conjuntos no vacíos. Demuestra:

i) $A \times B \subseteq X \times Y$ si y sólo si $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$.

ii) $A \times B = X \times Y$ si y sólo si $A = X$ y $B = Y$.

iii) $(A \setminus X) \times B = (A \times B) \setminus (X \times B)$.

Sugerencia: Para (ii), utiliza el inciso (i) y el hecho de que dos conjuntos son iguales si y sólo si, uno está contenido en el otro y el otro en el uno.

Ej. 3 (1 pt) Sean A un conjunto y $R, S \subseteq A \times A$ relaciones sobre A. Demuestra que:

i) $R \cap S$ es reflexiva si y solamente si R y S son reflexivas.

ii) R es simétrica si y sólo si $R = R^{-1}$.

Ej. 4 (1 pt) Sea R una relación cualquiera. Prueba que, si $\mathrm{dom}(R) \cap \mathrm{im}(R) = \varnothing$, entonces R es antisimétrica. ¿Qué ocurre con el recíproco de lo anterior? Es decir, ¿Si R es antisimétrica, entonces $\mathrm{dom}(R) \cap \mathrm{im}(R) = \varnothing$?

Ej. 5 (1 pt) En cada inciso R es una relación sobre un conjunto A. Indica en cada caso, si R es: reflexiva, simétrica, transitiva, antireflexiva o antisimétrica. Si en algún caso R es relación de orden parcial, o de equivalencia, indícalo. No es necesario justificar.

i) A es el conjunto $\{0, 1, 2\}$ y $R := \{(1, 1), (2, 2), (0, 1), (1, 0)\}$.

ii) A es el conjunto {Piedra, Papel, Tijeras} y $R \subseteq A \times A$ la relación:

$$R := \{(\text{Piedra}, \text{Tijeras}), (\text{Tijeras}, \text{Papel}), (\text{Papel}, \text{Piedra})\}$$

iii) A es cualquier conjunto y $R = \mathrm{id}_A$.

iv) A es el conjunto de todas las rectas del plano (digamos, $\mathbb{R}^2$) y $R \subseteq A \times A$ es la relación $R := \{(x, y) \in A \times A \mid x \text{ es paralela a } y\}$.

v) $A = \mathbb{Z}$ y $R \subseteq A \times A$ está dada por: $n\ R\ m$ si y sólo si $n^2 \leq m^2$.

vi) $A = \mathscr{P}(\{0, 1, 2, \dots, 1534\})$ y R está dada por: $a\ R\ b$ si y sólo si a tiene (estrictamente) menos elementos que b.

Ej. 6 (1 pt) Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A. Demuestra que R es la diagonal de A si y sólo si para cualesquiera $a, b \in A$ se tiene que $[a] = [b]$ implica $a = b$.

Ej. 7 (1 pt) Sean A, B conjuntos y $\{f_i \mid i \in I\}$ una familia indexada de funciones tal que para cada $i \in I$, f_i es una función de A en B. Demuestra que la relación R sobre A definida por:

$$x\ R\ y \text{ si y sólo si } \forall i \in I\big(f_i(x) = f_i(y)\big)$$

es de equivalencia.

Ej. 8 (1 pt) Sean A, B, C cualesquiera conjuntos y $f : A \to B$, $g : B \to C$ funciones arbitrarias. Entre las siguientes implicaciones, hay una que es falsa, demuestra las dos verdaderas y da un contraejemplo para la falsa.

i) Si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva.

ii) Si f es biyectiva, entonces $g \circ f$ es biyectiva.

iii) Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.

Ej. 9 (1 pt) En cada inciso f es una función de A en B. Indica en cada caso, si f es: inyectiva, sobreyectiva o biyectiva. No es necesario justificar.

i) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}$ y, para cada $a \in A$, $f(a) = a$.

ii) $A = \mathscr{P}(\{0, 2, 4, 6, \dots, 30\})$, $B = A$ y, para cada $a \in A$, $f(a)$ es el mínimo de a.

iii) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Z}$ y, para cada $a \in A$, $f(a) = a$.

iv) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ y, para cada $a \in A$, $f(a) = a^2$.

v) $A = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $B = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ y, para cada $a \in A$, $f(a) = a^2$.

vi) $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}$ y, para cada $(a, b) \in A$, $f(a, b) = 2^a \cdot 3^b$.

vii) $A = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$, $B = \mathscr{P}(\mathbb{R}^2)$ y, para cada $a \in A$, $f(a) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 2\}$.

viii) $A = \mathbb{R}$, $B = \{0, 1\}$ y, para cada $a \in A$; si $a \in \mathbb{Q}$, $f(a) = 1$; y, si $a \notin \mathbb{Q}$, $f(a) = 0$.

Ej. 10 (1 pt) Sean A, B conjuntos y $f : A \to B$ una función. La relación $\sim \subseteq A \times A$ definida por $x \sim y \iff f(x) = f(y)$ es de equivalencia (*¿por qué?*). Sea $q : A \to {}^{A}/_{\sim}$ definida por $q(x) = [x]$. Demuestre que q es biyectiva si y sólo si $\sim = \mathrm{id}_A$.