

Equivalencias lógicas

Álgebra Superior 1, 2025-4

Profesor: Luis Jesús Trucio Cuevas.

Ayudante: Hugo Víctor García Martínez.

Estas no son notas como tal, la intención es tener a la mano algunas equivalencias e implicaciones lógicas.

1. Estructurales

La conjunción y la disyunción son conmutativas:

$$\begin{array}{ll} \blacksquare \alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha & \blacksquare \alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha. \end{array}$$

La conjunción y la disyunción son asociativas:

$$\begin{array}{ll} \blacksquare \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma & \blacksquare \alpha \vee (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \vee \gamma. \end{array}$$

La conjunción y la disyunción son idempotentes:

$$\begin{array}{ll} \blacksquare \alpha \wedge \alpha \equiv \alpha & \blacksquare \alpha \vee \alpha \equiv \alpha. \end{array}$$

La conjunción y la disyunción son absorbentes:

$$\begin{array}{ll} \blacksquare \alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \equiv \alpha & \blacksquare \alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \equiv \alpha. \end{array}$$

La conjunción y la disyunción son distributivas:

$$\begin{array}{ll} \blacksquare \alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma) & \blacksquare \alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma). \end{array}$$

Denotemos con \top a una tautología y con \perp a una contradicción. Así, \top es neutro para la conjunción y \perp es neutro para la disyunción:

$$\begin{array}{ll} \blacksquare \alpha \wedge \top \equiv \alpha & \blacksquare \alpha \vee \perp \equiv \alpha. \end{array}$$

2. Lógica clásica

Leyes de De Morgan:

$$\begin{array}{ll} \blacksquare \neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta & \blacksquare \neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta. \end{array}$$

Doble negación:

$$\blacksquare \neg\neg\alpha \equiv \alpha.$$

Complementos:

$$\begin{array}{ll} \blacksquare (\text{tercero excluido}) \top \equiv \alpha \vee \neg\alpha & \blacksquare \perp \equiv \alpha \wedge \neg\alpha. \end{array}$$

3. Conjuntos mínimos de conectivos

Con las siguientes equivalencias es posible expresar cualquier proposición lógica con sólo conectivos \vee y \neg :

- $\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$
- $\alpha \wedge \beta \equiv \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$
- $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha).$

¿Puedes escribir las equivalencias necesarias para escribir toda proposición con sólo \wedge y \neg (o con sólo \vee y \neg)?

4. Métodos de demostración

- Contrapuesta: $\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg\beta \rightarrow \neg\alpha.$
- Contradicción: $\alpha \rightarrow \beta \equiv (\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \perp.$
- Dem de una negación: $\neg\alpha \equiv \alpha \rightarrow \perp.$
- Dem de una conjunción: $\alpha \rightarrow (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\alpha \rightarrow \gamma).$
- Dem de una disyunción: $\alpha \rightarrow (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \neg\beta \rightarrow \gamma).$
- Dem de un condicional: $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \equiv (\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma.$
- Dem de una bicondicional: $(\alpha \leftrightarrow \beta) \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha).$
- Dem por casos: $(\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma \equiv (\alpha \rightarrow \gamma) \wedge (\beta \rightarrow \gamma).$