Tercer Examen Parcial

Álgebra Superior 1, 2025-4

Profesor: Luis Jesús Trucio Cuevas.
Ayudante: Hugo Víctor García Martínez.

Ej. 1 (4 pts) Pruebe que para cualquier natural n se cumple $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Demostración. Sea $\varphi(n)$ la propiedad:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Veamos por inducción que $\forall n \in \mathbb{N}\big(\varphi(n)\big)$.

Base. Se cumple $\varphi(0)$; efectivamente:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{0} k^2 &= 0^2 \\ &= 0 \\ &= \frac{0 \cdot (0+1) \cdot (2 \cdot 0 + 1)}{6}\end{aligned}$$

Paso inductivo. Sea $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que $\varphi(n)$ (H.I.), esto es:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Veamos que $\varphi(n+1)$, es decir:

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 && \text{(por H.I.)} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple $\varphi(n+1)$; finalizando el paso inductivo.

Debido al primer principio de inducción, se concluye que $\forall n \in \mathbb{N}\big(\varphi(n)\big)$. ■

Ej. 2 (3 pts) Sean A y B conjuntos, con $B \subseteq A$. Prueba que, si B es finito y A infinito, entonces $A \setminus B$ es infinito.

Demostración. Por contradicción, supongamos que A es infinito, $B \subseteq A$ finito y que $A \setminus B$ es finito. Dado que $B \subseteq A$, entonces $A = (A \setminus B) \cup B$, de donde, A es unión de dos conjuntos finitos (y ajenos), con ello, A es finito. Esto contradice la hipótesis de que A es infinito; por lo tanto ocurre la negación de "A es infinito, $B \subseteq A$ finito y $A \setminus B$ es finito"; equivalentemente, "si B es finito y A infinito, entonces $A \setminus B$ es infinito". ■

Ej. 3 (3 pts) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y $a_{900}, a_{899}, \dots, a_1, a_0$ son los coeficientes (en orden) del polinomio $(x+y)^{900}$; es decir $(x+y)^{900} = a_{900}x^{900} + a_{899}x^{899}y + \cdots + a_1xy^{899} + a_0y^{900}$. ¿Cuál de los siguientes números es mayor, a_{100} o a_{798}? Demuestra todas tus afirmaciones.

Solución. Se afirma que $a_{100} < a_{798}$. Por el Teorema del Binomio de Newton, se tiene que:

$$a_{100} = \binom{900}{100} \quad \text{y} \quad a_{798} = \binom{900}{798}$$

Y por propiedades de los coeficientes binomiales: $a_{798} = \binom{900}{798} = \binom{900}{900-798} = \binom{900}{102}$. Ahora, notemos que:

$$
\begin{aligned}
\frac{a_{100}}{a_{798}} &= \frac{\binom{900}{100}}{\binom{900}{102}} \\
&= \frac{900!}{100!(900-100)!} \cdot \frac{102!(900-102)!}{900!} \\
&= \frac{102!}{100!} \cdot \frac{(900-102)!}{(900-100)!} \\
&= \frac{102 \cdot 101}{(900-100)(900-102)} \\
&= \frac{102 \cdot 101}{800 \cdot 798} \\
&< 1
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $a_{100} < a_{798}$. $\Diamond$

Ej. 4 (+1 pts) Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ y supongamos que $\forall x\big(x \in A \to x+1 \in A\big)$. Prueba que si $m \in \mathbb{N} \cap A$, entonces $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq m\} \subseteq A$.

Demostración. Sea $\varphi(n)$ la propiedad: $n \in A$. Observemos que:

$$
\begin{aligned}
\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq m\} \subseteq A &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\big(n \geq m \to n \in A\big) \\
&\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\big(n \geq m \to n \in A\big) \\
&\Leftrightarrow \forall n \geq m\big(n \in A\big)
\end{aligned}
$$

Por tanto, para demostrar lo que nos ataña, basta probar por inducción (a partir de un punto) que $\forall n \geq m\big(\varphi(n)\big)$.

> Base. Se cumple $\varphi(m)$; efectivamente, esto es simplemente porque "$m \geq m$" es verdadera y "$m \in A$" también (pues por hipótesis general, $m \in \mathbb{N} \cap A$).
>
> Paso inductivo. Sea $n \geq m$ y supongamos que $\varphi(n)$ (H.I.), esto es, $n \in A$. Veamos que $\varphi(n+1)$, es decir, que $n+1 \in A$. Esto es inmediato de la hipótesis general, recordemos que $\forall x\big(x \in A \to x+1 \in A\big)$. Lo cual prueba el paso inductivo.

Debido al primer principio de inducción, se concluye que $\forall n \geq m\big(\varphi(n)\big)$, es decir, se cumple la contención $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq m\} \subseteq A$. $\blacksquare$