Tarea 3

Álgebra Superior 1, 2025-4

Profesor: Luis Jesús Trucio Cuevas.
Ayudante: Hugo Víctor García Martínez.

Instrucciones. *Resuelve los siguientes ejercicios. Esta tarea es individual y deberá ser entregada presencialmente, durante la clase del* ***viernes 4 de julio****.*

Ej. 1 (2.5 pts) Se dice que una función $h : X \to Y$ es **constante** si y sólo si para cualesquiera $x, y \in X$ se tiene que $h(x) = h(y)$.

i) Demuestra que la composición de funciones constantes es una función constante.

ii) Encuentra dos funciones *no* constantes; $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ y $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, cuya composición (la función $g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$) sea constante.

Solución. (i) Supongamos que $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son funciones constantes. Como $g \circ f$ tiene dominio A y codominio C, habremos de verificar que:

$$\forall x, y \in A\big((g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)\big)$$

En efecto, sean $x, y \in A$ cualesquiera, entonces:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g\big(f(x)\big) && \text{Def. de composición} \\ &= g\big(f(y)\big) && f \text{ es constante} \\ &= (g \circ f)(y) && \text{Def. de composición} \end{aligned}$$

por lo que $g \circ f$ es constante.

(ii) Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida como $f(n) = 0$ si n es par; y, $f(n) = 1$ si n es impar. Y definimos $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ como $g(z) = z(z-1)$.

Notemos que f no es constante, ya que $f(2) = 0$, $f(1) = 1$ y $2 \neq 1$; y, g tampoco es constante, ya que $g(2) = 2$, $g(3) = 6$ y $2 \neq 3$. Sin embargo, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:

a) Si n es par, entonces $f(n) = 0$ y $g\big(f(n)\big) = g(0) = 0$.

b) Si n es impar, entonces $f(n) = 0$ y $g\big(f(n)\big) = g(1) = 0$.

Por lo tanto, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{N}$, $(g \circ f)(x) = 0 = (g \circ f)(y)$, probando que $g \circ f$ es constante. $\Diamond$

Ej. 2 (2.5 pts) En cada inciso, determina si la correspondiente función es inyectiva, sobreyectiva, o biyectiva. Demuestra la conclusión a la que llegaste (es decir, prueba si la función tiene o no la propiedad que se afrima).

i) $h : \{0, 1, 2\} \to \{x, y\}$ definida como $h = \{(0, x), (1, x), (2, y)\}$, aquí $x \neq y$.

ii) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada, para cada $x \in \mathbb{R}$, por $g(x) = 4x + 55$.

iii) $f : \mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ dada, para cada $n \in \mathbb{N}$, por $f(n) = \{0, n\}$.

Solución. (i) Se afirma que h es sobreyectiva, pero no inyectiva (por tanto, no biyectiva).

$\Diamond$

Ej. 3 (2.5 pts) Sean A y B conjuntos arbitrarios y $f : A \to B$. Demuestra que las siguientes proposiciones son equivalentes:

i) $\forall X \subseteq A\ \forall Y \subseteq A\ \big(f[X \setminus Y] \subseteq f[X] \setminus f[Y]\big)$.

ii) $\forall U \subseteq A\ \forall V \subseteq A\ \big(f[U] \cap f[V] \subseteq f[U \cap V]\big)$.

Ej. 4 (2.5 pts) Sean X, Y y A conjuntos tales que $A \subseteq X$ y sea $f : X \to Y$ cualquier función. Definamos $i : A \to X$ para cada $a \in A$ como $i(a) = a$. Demuestra que para cualquier subconjunto $B \subseteq Y$ se da la igualdad $(f \circ i)^{-1}[B] = A \cap f^{-1}[B]$.