Tarea 2

Álgebra Superior 1, 2025-4

Profesor: Luis Jesús Trucio Cuevas.
Ayudante: Hugo Víctor García Martínez.

Instrucciones. *Resuelve los siguientes ejercicios. Esta tarea es individual y deberá ser entregada presencialmente, durante la clase del* ***martes 24 de junio****.*

Ej. 1 (1 pt) Sean I, J, K conjuntos no vacíos y supongamos que $J \cup K = I$. Si $\{X_i \mid i \in I\}$ es una familia indexada de conjuntos, demuestra que:

$$\bigcap_{i\in I} X_i = \Big(\bigcap_{i\in J} X_i\Big) \cap \Big(\bigcap_{i\in K} X_i\Big)$$

Ej. 2 (1 pt) Sean A, B, X y Y conjuntos no vacíos. Demuestra:

i) $A \times B \subseteq X \times Y$ si y sólo si $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$.

ii) $A \times B = X \times Y$ si y sólo si $A = X$ y $B = Y$.

iii) $(A \setminus X) \times B = (A \times B) \setminus (X \times B)$.

Sugerencia: Para (ii), utiliza el inciso (i) y el hecho de que dos conjuntos son iguales si y sólo si, uno está contenido en el otro.

Ej. 3 (3 pts) Sean A un conjunto y $R, S \subseteq A \times A$ relaciones sobre A. Demuestra que:

i) $R \cap S$ es reflexiva si y solamente si R y S son reflexivas.

ii) R es simétrica si y sólo si $R = R^{-1}$.

Ej. 4 (1 pt) Sea R una relación cualquiera. Prueba que, si $\mathrm{dom}(R) \cap \mathrm{ima}(R) = \varnothing$, entonces R es antisimétrica. £Qué ocurre con el recíproco de lo anterior?, es decir, £Si R es antisimétrica, entonces $\mathrm{dom}(R) \cap \mathrm{ima}(R) = \varnothing$?

Ej. 5 (1 pt) En cada inciso R es una relación sobre un conjunto A. Indica en cada caso, si R es: reflexiva, simétrica, transitiva, antireflexiva o antisimétrica. Si en algún caso R es relación de orden parcial, o de equivalencia, indícalo. No es necesario justificar.

i) A es el conjunto {Piedra, Papel, Tijeras} y $R \subseteq A \times A$ la relación:

$$R := \{(\text{Piedra}, \text{Tijeras}), (\text{Tijeras}, \text{Papel}), (\text{Papel}, \text{Piedra})\}$$

ii) A es el conjunto de todas las posibles rectas en el plano (digamos, $\mathbb{R}^2$) y $R \subseteq A \times A$ es la relación $R := \{(x, y) \in A \times A \mid x \text{ es paralela a } y\}$.

iii) $A = \mathbb{Z}$ y $R \subseteq A \times A$ está dada por $n \; R \; m$ si y sólo si $n^2 \leq m^2$.

iv)