Cuantificadores y conectivos

Álgebra Superior 1, 2025-4

Profesor: Luis Jesús Trucio Cuevas.
Ayudante: Hugo Víctor García Martínez.

Este documento es sólo una lista de equivalencias e implicaciones que muestran cómo se comportan los cuantificadores con los conectivos lógicos.

1. Cuantificadores y negación

Estas equivalencias son las más usuales, así que empezamos con ellas:

- $\neg\exists x\varphi(x) \iff \forall x\neg\varphi(x)$
- $\neg\forall x\varphi(x) \iff \exists x\neg\varphi(x)$.

2. Con existencial

En este caso diremos que no se lleva bien con la conjunción y sí se lleva bien con la disyunción:

- $\exists x(\varphi(x)\wedge\psi(x)) \implies \exists x\varphi(x)\wedge\exists x\psi(x)$
- $\exists x(\varphi(x)\vee\psi(x)) \iff \exists x\varphi(x)\vee\exists x\psi(x)$.

En la primera implicación no se da el regreso. Para dar un ejemplo de eso, tomamos como contexto $\mathbb{N}$. Consideramos $\varphi(x)$ como x es par y $\psi(x)$ como x es impar. En este caso, $\exists x(\varphi(x)\wedge\psi(x))$ es falso ya que no hay números que sean pares e impares al mismo tiempo, pero $\exists x\varphi(x)\wedge\exists x\psi(x)$ es cierto ya que hay números pares e impares.

3. Con universal

En este caso diremos que se lleva bien con la conjunción y no se lleva bien con la disyunción:

- $\forall x(\varphi(x)\wedge\psi(x)) \iff \forall x\varphi(x)\wedge\forall x\psi(x)$
- $\forall x\varphi(x)\vee\forall x\psi(x) \implies \forall x(\varphi(x)\vee\psi(x))$.

De nuevo, para ver que la implicación no es una equivalencia hay que tomar el ejemplo de los pares e impares en $\mathbb{N}$. En este caso el antecedente dice que todo número es par o impar, lo cual es cierto. Sin embargo, el consecuente dice que todo número es par o todo número es impar, lo cual es falso.

4. Addendum

En las secciones 2 y 3 hemos visto que el cuantificador existencial no se lleva bien con la conjunción y que el universal no se lleva bien con la disyunción. Sin embargo, hay casos en los que sí se llevan bien. Por ejemplo, si una fórmula no tiene nada que ver con la variable de cuantificación. Sea ψ una fórmula que no depende de x, entonces

- $\exists x(\varphi(x) \wedge \psi) \iff (\exists x \varphi(x)) \wedge \psi$
- $\forall x(\varphi(x) \vee \psi) \iff (\forall x \varphi(x)) \vee \psi$.

5. Universal e implicación

Posiblemente no sea tan común ver esta implicación, la añadimos por completud:

- $\forall x(\varphi(x) \to \psi(x)) \implies (\forall x \varphi(x)) \to (\forall x \psi(x))$.

¿Puedes dar un ejemplo donde $(\forall x \varphi(x)) \to (\forall x \psi(x))$ sea verdadero y $\forall x(\varphi(x) \to \psi(x))$ falso? *Sigerencia:* De nuevo considera el contexto $\mathbb{N}$. Luego, intenta que $(\forall x \varphi(x)) \to (\forall x \psi(x))$ sea verdadero porque el antecedente es falso.