“Definicionario” de funciones.

Álgebra Superior 1, 2025-4

Profesor: Luis Jesús Trucio Cuevas.
Ayudante: Hugo Víctor García Martínez.

Definición 1. *Sean A y B conjuntos. Una* ***función*** *de A a B es una relación $f \subseteq A \times B$ tal que:*

i) $\mathrm{dom}(f) = A$.

ii) *Para todo $a \in A$, existe un único $b \in B$ tal que $a\ f\ b$, como tal b es único, se le puede dar una notación especial: $f(a)$.*

Cuando f sea función de A en B, se escribirá $f : A \to B$. Además, se conviene que:

iv) ***UN codominio*** *para f es cualquier conjunto Y de modo que* $\mathrm{ima}(f) \subseteq Y$.

En virtud del punto (ii) de la definición anterioro, debe ser claro que si $f : A \to B$:

$$f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

Pese a la “definición formal” de función, en la práctica, pensaremos a la función como un objeto que cuenta con:

i) Un nombre,

ii) Un dominio,

iii) Una codominio (esto es, cualquier conjunto B tal que $\mathrm{ima}(f) \subseteq B$), y

iv) Una “regla de correspondencia” (la instrucción que dicta cómo actúa la función en cada elemento del dominio).

Observación 2. *Una función puede tener varios codominios, por ejemplo, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(n) = 4n+5$ también puede ser pensada como función con codominio $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$, etcétera; pues, todos estos conjuntos contienen a la imagen de f: $\{4n + 5 \mid n \in \mathbb{N}\}$. Entonces, es válido pensar a f como:*

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q},\ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ o\ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\ etc..$$

Sin embargo el dominio de cualquier función sí es único (al igual que su imagen), esto es un hecho inmediato a las definiciones de estos conjuntos.

En la práctica, rara vez verificaremos la igualdad de funciones mediante doble contención o métodos similares, recordemos que se tiene el siguiente criterio:

Recordatorio 3. *Si $f : A \to B$ y $g : X \to Y$ son funciones, entonces $f = g$ si y solamente si se cumplen las siguientes dos condiciones:*

i) $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)$*; es decir, $A = X$; y*

ii) Para cada $x \in \mathrm{dom}(f)$, se cumple que $f(x) = g(x)$.

Definición 4. *Sean A, B conjuntos y $f : A \to B$ una función. Se dice que:*

*i) f es **inyectiva** si y sólo si $\forall x, y \in A\big(f(x) = f(y) \to x = y\big)$.*

*ii) f es **sobreyectiva** (en B) si y sólo si $\forall b \in B\, \exists a \in \big(b = f(a)\big)$. El término "sobreyectiva" (a secas) se refiere a la sobreyectividad en el codominio indicado al momento de dar la función.*

*iii) f es **biyectiva** si y sólo si es inyectiva y sobreyectiva.*

Definición 5. *Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones. Se define la función $g \circ f : A \to C$, para cada $a \in A$, por medio de:*

$$\big(g \circ f\big)(a) = g\big(f(a)\big)$$

Observación 6. *Para que dos funcines f y g se puedan componer, aplicando (por ejemplo) primero f y luego g, tal composición debe tener sentido; y para ello, es requisito que:*

$$\mathrm{ima}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$$

Es decir, basta que algún codominio de f (recordemos que hay muchos codominios), esté contenido en el dominio de g.