Tarea 1

Álgebra Superior 1, 2025-4

Profesor: Luis Jesús Trucio Cuevas.
Ayudante: Hugo Víctor García Martínez.

Instrucciones. *Resuelve los siguientes ejercicios. Esta tarea es individual y deberá ser entregada presencialmente, durante la clase del* ***lunes 16 de junio****.*

Ej. 1 (1 pt) Demuestra las siguientes equivalencias lógicas.

i) $\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \equiv \alpha$.

ii) $\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \equiv \alpha$.

iii) $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$.

iv) $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$.

Ej. 2 (1 pt) Escribe fórmulas lógicas (de primer orden) que, a tu criterio, capturen mejor cada una de las siguientes afirmaciones.

i) Cada persona viva respira.

ii) 2 es el único primo par.

iii) Existe un hombre inmortal.

iv) No existen estudiantes en Ciudad Universitaria que sean felices.

v) Todos los peces del acuario de la facultad se aparean algún un individuo.

Ej. 3 (1 pt) Escribe la negación de las siguientes proposiciones. Si el inciso está en español, escribe tu respuesta en español.

i) $\alpha \leftrightarrow \beta$.

ii) $\neg\alpha \to \gamma$.

iii) $\gamma \to (\delta \to \gamma)$.

iv) $\exists x\big(\alpha(x) \wedge \big(\beta(x) \wedge \gamma(x)\big)\big)$.

v) $\forall a\big(\alpha(a) \to \exists b\big(\beta(a,b)\big)\big)$.

vi) $\exists b \forall x\big(\forall y(\alpha(y)) \leftrightarrow \big(Q(x,y) \wedge R(b)\big)\big)$.

vii) Si x es un número primo y es mayor que 4, n es impar.

viii) Hay cierto elemento de A que es real, pero no entero.

Ej. 4 (1 pt) Indica cuáles de las siguientes proposiciones son tautologías o contradicciones. Para aquellas que sean contingentes, da una equivalencia lógica que utilice únicamente los conectivos negación y disyunción.

i) $\neg(\gamma \wedge \gamma)$.

ii) $\alpha \to \alpha$.

iii) $\alpha \wedge (\alpha \vee \beta)$.

iv) $\alpha \vee (\alpha \wedge \beta)$.

v) $\beta \to (\alpha \to \beta)$.

vi) $\big(\neg\gamma \wedge (\neg\gamma \vee \beta)\big) \leftrightarrow \gamma$.

vii) $\neg\delta \leftrightarrow \delta$.

viii) $(\gamma \to \eta) \to (\neg\eta \to \neg\gamma)$.

ix) $\beta \wedge \alpha$.

Ej. 5 (1 pt) Traduce las siguientes equivalencias lógicas a igualdades entre conjuntos. Demuestra las igualdades que propusiste.

i) $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$.

ii) $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$.

Ej. 6 (1 pt) Sean A y X conjuntos de modo que $A \subseteq X$. Demuestra *un inciso* de cada una de las siguientes columnas (tres igualdades en total).

i) $A \cap \varnothing = \varnothing$.	iv) $A \cap X = A$.	vii) $A \cap (X \setminus A) = \varnothing$.
ii) $A \cup \varnothing = A$.	v) $A \cup X = X$.	viii) $A \cup (X \setminus A) = X$.
iii) $A \cup A = A$.	vi) $A \cap A = A$.	ix) $X \setminus (X \setminus A) = A$.

Ej. 7 (1 pt) Denotamos por $A \vartriangle B$ a la diferencia simétrica entre los conjuntos A y B. Demuestra las siguientes propiedades de esta operación.

i) $A \vartriangle \varnothing = A$.

ii) $A \cup B = (A \vartriangle B) \vartriangle (A \cap B)$.

Ej. 8 (1 pt) Sean A y B conjuntos. Demuestra que:

i) $A \subseteq A \cap B$ si y sólo si $A \subseteq B$.

ii) $A \cup B \subseteq B$ si y sólo si $A \subseteq B$.

iii) Concluye que $A \in \mathscr{P}(A \cap B)$ ocurre si y sólo si $A \cup B \in \mathscr{P}(B)$.

Ej. 9 (1 pt) Sea $A := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Para cada $y \in \mathbb{R}$ se define el conjunto $B(y)$ (pues depende de y), como $B(y) := \{x \in \mathbb{R} : |x - y| < 0.15\}$. Utilizando operaciones de conjuntos, escribe en términos de los conjuntos anteriores, la colección cuyos elementos sean:

i) Todos los enteros menores o iguales a 0.

ii) Los reales negativos mayores a -0.15.

iii) Todos los irracionales cuya distancia a 2 es mayor o igual a 0.15.

iv) Todos los racionales que distan de algún entero en menos de 0.15.