Tarea 3

Álgebra Superior 1, 2025-4

Profesor: Luis Jesús Trucio Cuevas.
Ayudante: Hugo Víctor García Martínez.

Instrucciones. *Resuelve los siguientes ejercicios. Esta tarea es individual y deberá ser entregada presencialmente, durante la clase del* ***lunes 30 de junio****.*

Ej. 1 (1 pt) En cada inciso, determine si la correspondiente función es inyectiva, sobreyectiva, o biyectiva. Demuestra la conclusión a la que llego (es decir, prueba si la función tiene o no la propiedad que se afrima).

i) $h : \{0,1,2\} \to \{x,y\}$ definida por $h = \{(0,x),(1,x),(2,y)\}$, aquí $x \neq y$.

ii) $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada para cada $x \in \mathbb{R}$ por $A(x) = 4x + 55$.

iii) $f : \mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ dada para cada $n \in \mathbb{N}$ como $f(n) = \{0, n\}$.

Ej. 2 (1 pt) Se dice que una función $g : X \to Y$ es **constante** si y sólo si para cualesquiera $x, y \in X$ se tiene $g(x) = g(y)$. Encuentra dos funciones no constantes, cuya composición sí sea constante.

Ej. 3 (1.5 pts) Sean X, Y y A conjuntos tales que $A \subseteq X$; $f : X \to Y$ cualquier función; y, definamos $i : A \to X$ para cada $a \in A$ como $i(a) = a$. Demuestra que para cualquier subconjunto $B \subseteq Y$ se da la igualdad $(f \circ i)^{-1}[B] = A \cap f^{-1}[B]$.

Ej. 4 (2 pts) Sean A y B conjuntos, y $f : A \to B$ cualesquiera. Definimos $F : \mathscr{P}(B) \to \mathscr{P}(A)$ para cada $X \in \mathscr{P}(B)$ como $F(X) = f^{-1}[X]$. Demuestra que si F es inyectiva, entonces f es sobreyectiva.

Ej. 5 (1 pt) Prueba que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $2^{n+1} > n^2$.

Ej. 6 (1.5 pts) Muestra que 7 divide a cualquier natural de la forma $9^n - 2^n$. Es decir, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un entero $k \in \mathbb{Z}$ de modo que $9^n - 2^n = 7k$.

Ej. 7 (2 pts) Supongamos que solo hay monedas de 4$ y 7$. Demuestre que sólo con este tipo de monedas se puede conseguir cualquier cantidad de dinero mayor o igual a 18$. Por ejemplo: 20$ son 5 monedas de 4$; 21$ son 3 monedas de 7$ y 22$ son 2 monedas de 7$ y 2 monedas de 4$.