“Definicionario” de funciones.

Profesor: Luis Jesús Trucio Cuevas.
Ayudante: Hugo Víctor García Martínez.

Índice

1. Definiciones básicas

Definición 1. *Sean A y B conjuntos. Una* ***función*** *de A a B es una relación $f \subseteq A \times B$ tal que:*

i) $\operatorname{dom}(f) = A$.

ii) *Para todo $a \in A$, existe un único $b \in B$ tal que $a\ f\ b$, como tal b es único, se le puede dar una notación especial: $f(a)$.*

Cuando f sea función de A en B, se escribirá $f : A \to B$. Además, se conviene que:

iv) ***UN codominio*** *para f es cualquier conjunto Y de modo que* $\operatorname{ima}(f) \subseteq Y$.

En virtud del punto (ii) de la definición anterioro, debe ser claro que si $f : A \to B$, entonces $f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$.

Pese a la "definición formal" de función, en la práctica, pensaremos a la función como un objeto que cuenta con un nombre, un dominio, un codominio (esto es, cualquier conjunto B tal que $\operatorname{ima}(f) \subseteq B$), y una "regla de correspondencia" (la instrucción que dicta cómo actúa la función en cada elemento del dominio).

Observación 2. *Una función puede tener varios codominios, por ejemplo, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(n) = 4n + 5$ también puede ser pensada como función con codominio $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$, etcétera; pues, todos estos conjuntos contienen a la imagen de f: $\{4n + 5 \mid n \in \mathbb{N}\}$. Entonces, es válido pensar a f como:*

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q},\ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ o\ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ etc...$$

Sin embargo el dominio de cualquier función sí es único (al igual que su imagen).

Rara vez verificaremos la igualdad de funciones mediante doble contención o métodos similares, se tiene el siguiente criterio:

Recordatorio 3. *Si $f : A \to B$ y $g : X \to Y$ son funciones, entonces $f = g$ si y solamente si se cumplen las siguientes dos condiciones:*

i) $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)$*; es decir, $A = X$; y*

ii) Para cada $x \in \mathrm{dom}(f)$, se cumple que $f(x) = g(x)$.

Definición 4. *Sean A, B conjuntos y $f : A \to B$ una función. Se dice que:*

i) f es ***inyectiva*** *si y sólo si $\forall x, y \in A\big(f(x) = f(y) \to x = y\big)$.*

ii) f es ***sobreyectiva*** *(en B) si y sólo si $\forall b \in B\, \exists a \in \big(b = f(a)\big)$. El término “sobreyectiva” (a secas) se refiere a la sobreyectividad en el codominio indicado al momento de dar la función.*

iii) f es ***biyectiva*** *si y sólo si es inyectiva y sobreyectiva.*

2. Funciones y subconjuntos

Cuando se tenga una función $f : A \to B$, evidentemente, se le puede aplicar f a cada punto (elemento) a de su dominio, A. Es decir, la función toma puntos de A y devuelve puntos de B.

Una idea interesante es la siguiente: £se le puede “aplicar” f a un subconjunto X de su dominio A?. La respuesta corta es *no*, pues la función *sólo se aplica a puntos de su dominio*, no a subconjuntos del mismo. Sin embargo, se puede recuperar parte de esta idea:

Definición 5. *Sean $f : A \to B$ una función (así redactado, es claro que A y B son conjuntos arbitrarios) y $X \subseteq A$. Se define la* ***imagen directa de*** *X (**bajo** f) como el conjunto:*

$$f[X] := \{f(x) \in B \mid x \in X\}$$

Es decir, $f[X] := \{l \in B \mid \exists x \in X(l = f(x))\}$.

Estos dos conjuntos son exactamente iguales, pero la notación es distinta, se puede tomar la que mejor se entienda (pues, de nuevo, son exactamente lo mismo).

La siguiente observación es fundamental para escribir correctamente las demostraciones que involucren imágenes directas en ellas.

Observación 6. *Tomar elementos en cualquier imagen directa* $f[\bigstar]$ *se traduce a lo siguiente:*

$$l \in f[\bigstar] \iff \exists x \in \bigstar(l = f(x))$$

Además, siempre que se tenga un elemento $y \in A$ *se cumplirá:*

$$y \in \bigstar \Rightarrow f(y) \in f[\bigstar]$$

equivalentemente (usando contrapuesta): $f(y) \notin f[\bigstar] \Rightarrow y \notin \bigstar$.

En clase se demostró lo siguiente:

Teorema 7. *Sean* $f : A \to B$ *una función y* $X, Y \subseteq A$ *arbitrario. Entonces:*

i) $f[\varnothing] = \varnothing$.

ii) $f[A] = f[\mathrm{dom}(f)] = \mathrm{ima}(f)$.

iii) Si $X \subseteq Y$, *entonces* $f[X] \subseteq f[Y]$.

iv) $f[X \cup Y] = f[X] \cup f[Y]$.

v) $f[X \cap Y] \subseteq f[X] \cap f[Y]$, *pero* ***no siempre*** $f[X] \cap f[Y] \subseteq f[X \cap Y]$.

vi) $f[X] \setminus f[Y] \subseteq f[X \setminus Y]$, *pero* ***no siempre*** $f[X \setminus Y] \subseteq f[X] \setminus f[Y]$.

Una idea "dual" a la anterior es la imagen inversa, cabe aclarar que, pese a lo sugerente que es la siguiente notación en ningún momento se está haciendo referencia a la función inversa de f (y tampoco, a la relación inversa, pensando a f como relación).

Definición 8. *Sean $f : A \to B$ una función y $Y \subseteq B$. Se define la* ***imagen inversa de*** *Y (**bajo** f) como el conjunto:*

$$f^{-1}[Y] := \{x \in X \mid f(x) \in Y\}$$

3. Composición de funciones

Definición 9. *Sean* $f : A \to B$ *y* $g : B \to C$ *funciones. Se define la función* $g \circ f : A \to C$*, para cada* $a \in A$*, por medio de:*

$$\big(g \circ f\big)(a) = g\big(f(a)\big)$$

Observación 10. *Para que dos funcines* f *y* g *se puedan componer, aplicando (por ejemplo) primero* f *y luego* g*, tal composición debe tener sentido; y para ello, es requisito que:*

$$\operatorname{ima}(f) \subseteq \operatorname{dom}(g)$$

Es decir, basta que algún codominio de f *(recordemos que hay muchos codominios), esté contenido en el dominio de* g*.*