

Tarea 1

Álgebra Superior 1, 2025-4

Profesor: Luis Jesús Trucio Cuevas.
Ayudante: Hugo Víctor García Martínez.

Instrucciones. Resuelve los siguientes ejercicios. Esta tarea es individual y deberá ser entregada presencialmente, durante la clase del **lunes 16 de junio**.

Ej. 1 (1 pt) Demuestra las siguientes equivalencias lógicas.

i) $\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \equiv \alpha$.

iii) $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$.

ii) $\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \equiv \alpha$.

iv) $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$.

Ej. 2 (1 pt) Escribe fórmulas lógicas (de primer orden) que, a tu criterio, capturen mejor cada una de las siguientes afirmaciones.

i) Cada persona viva respira.

iv) No existen estudiantes en Ciudad Universitaria que sean felices.

ii) 2 es el único primo par.

v) Todos los peces del acuario de la facultad se aparean al-
gún un individuo.

iii) Existe un hombre inmortal.

Ej. 3 (1 pt) Escribe la negación de las siguientes proposiciones. Si el inciso está en español, escribe tu respuesta en español.

i) $\alpha \leftrightarrow \beta$.

iv) $\exists x(\alpha(x) \wedge (\beta(x) \wedge \gamma(x)))$.

vii) Si x es un número primo y es mayor que 4, n es impar.

ii) $\neg\alpha \rightarrow \gamma$.

v) $\forall a(\alpha(a) \rightarrow \exists b(\beta(a, b)))$.

viii) Hay cierto elemento de A que es real, pero no entero.

iii) $\gamma \rightarrow (\delta \rightarrow \gamma)$.

vi) $\exists b\forall x(\forall y(\alpha(y)) \leftrightarrow (Q(x, y) \wedge R(b)))$.

Ej. 4 (1 pt) Indica cuáles de las siguientes proposiciones son tautologías o contradicciones. Para aquellas que sean contingentes, da una equivalencia lógica que utilice únicamente los conectivos negación y disyunción. No es necesario justificar.

i) $\neg(\gamma \wedge \gamma)$.

iv) $\alpha \vee (\alpha \wedge \beta)$.

vii) $\neg\delta \leftrightarrow \delta$.

ii) $\alpha \rightarrow \alpha$.

v) $\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$.

viii) $(\gamma \rightarrow \eta) \rightarrow (\neg\eta \rightarrow \neg\gamma)$.

iii) $\alpha \wedge (\alpha \vee \beta)$.

vi) $(\neg\gamma \wedge (\neg\gamma \vee \beta)) \leftrightarrow \gamma$.

ix) $\beta \wedge \alpha$.

Ej. 5 (1 pt) Traduce las siguientes equivalencias lógicas a igualdades entre conjuntos. Demuestra las igualdades que propusiste.

i) $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma).$

ii) $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta.$

Ej. 6 (1 pt) Sean A y X conjuntos de modo que $A \subseteq X$. Demuestra *un inciso* de cada una de las siguientes columnas (tres igualdades en total).

i) $A \cap \emptyset = \emptyset.$

iv) $A \cap X = A.$

vii) $A \cap (X \setminus A) = \emptyset.$

ii) $A \cup \emptyset = A.$

v) $A \cup X = X.$

viii) $A \cup (X \setminus A) = X.$

iii) $A \cup A = A.$

vi) $A \cap A = A.$

ix) $X \setminus (X \setminus A) = A.$

Ej. 7 (1 pt) Denotamos por $A \Delta B$ a la diferencia simétrica entre los conjuntos A y B . Demuestra que $A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B).$

Ej. 8 (1 pt) Sean A y B conjuntos. Demuestra que:

i) $A \subseteq A \cap B$ si y sólo si $A \subseteq B.$

ii) $A \cup B \subseteq B$ si y sólo si $A \subseteq B.$

Ej. 9 (1 pt) Sean A y B conjuntos. Prueba que, si $A \subseteq B$, entonces $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B).$

Ej. 10 (1 pt) Muestra que, en general, *no se da* la igualdad $\mathcal{P}(A \setminus B) = \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B).$

Ej. 11 (1 pt) Sea $A := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Para cada $y \in \mathbb{R}$ se define el conjunto $B(y)$ (pues depende de y), como $B(y) := \{x \in \mathbb{R} : |x - y| < 0.15\}$. Utilizando operaciones de conjuntos, escribe en términos de los conjuntos anteriores, la colección cuyos elementos sean:

- i) Todos los enteros menores o iguales a 0.
- ii) Los reales negativos mayores a -0.15 .
- iii) Todos los irracionales cuya distancia a 2 es mayor o igual a 0.15.
- iv) Todos los racionales que distan de algún entero en menos de 0.15.