Pruebas sencillas de igualdades entre conjuntos

Álgebra Superior 1, 2025-4

Profesor: Luis Jesús Trucio Cuevas.
Ayudante: Hugo Víctor García Martínez.

Veamos que, utilizando equivalencias lógicas, se pueden demostrar igualdades básicas entre conjuntos. La técnica es siempre: Traducir (utilizando las definiciones de las operaciones entre de conjuntos) lo que significa que un elemento arbitrario, x, sea elemento de cierto conjunto; después, utilizar equivalencias lógicas de modo que nos acerquemos al objetivo de la prueba (y demostrarlas, si es necesario), y finalmente, volver a traducir las proposiciones en notación de conjuntos; por ejemplo, "$x \in A \wedge x \in B$" se traduce a "$x \in A \cap B$".

Veremos un ejemplo de prueba a continuacion, los *comentarios en gris* no forman parte de la demostración, pero ayudan a exlpicar el proceso. Queremos demostrar que:

$$A \setminus (A \cap B) = A \setminus B \tag{1}$$

Antes de comenzar la prueba, veamos el siguiente lema. El motivo de probar este lema será explicado más adelante, durante la demostración de (1).

Lema 1. $\alpha \wedge (\neg\alpha \vee \neg\beta) \equiv \alpha \wedge \neg\beta$.

Demostración. Revisemos la tabla de verdad de ambas proposiciones.

α	β	α	$\wedge$	$(\neg\alpha$	$\vee$	$\neg\beta)$	α	$\wedge$	$\neg\beta$
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	1	0	0	1

Como ambas proposiciones (o fórmulas) tienen *los mismos valores de verdad*, se concluye que $\alpha \wedge (\neg\alpha \vee \neg\beta) \equiv \alpha \wedge \neg\beta$. ∎

Ahora sí, veamos la demostración de (1):

Demostración. *Se empieza a hacer la "cadena de equivalencias", se sugiere empezar por el lado más complicado.*

$$\begin{aligned} x \in A \setminus (A \cap B) &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin (A \cap B) && \text{Def. de } \setminus \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in A \cap B) && \text{Def. de } \notin \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B) && \text{Def. de } \cap \end{aligned}$$

Una vez que todo está en "proposiciones sencillas" (es decir, que ya no se pueden hacer más simples) como las anteriores: $x \in A$, $x \in B$, etcétera; aplicamos las equivalencias lógicas pertinentes (con la práctica quedará claro cuáles se deben usar).

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge (\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)) \qquad \text{Leyes de De Morgan}$$

A la expresión que llegamos es una proposición de la forma "$\alpha \wedge (\neg\alpha \vee \neg\beta)$" (donde α se corresponde con $x \in A$ y β con $x \in B$). Lo que queremos es hacer que la cadena de equivalencias termine en"$x \in A \setminus B$", es decir, en "$x \in A \wedge \neg(x \in B)$", o lo que es lo mismo, "$\alpha \wedge \neg\beta$".

Así que suena natural demostrar que $\alpha \wedge (\neg\alpha \vee \neg\beta) \equiv \alpha \wedge \neg\beta$, por ello tal demostración se realizó en el Lema 1. De nuevo, con la práctica quedará claro el proceso de pensamiento para este tipo de pruebas.

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B) && \text{Por el Lema 1}\\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B && \text{Def. de } \notin\\
&\Leftrightarrow x \in A \setminus B && \text{Def. de } \setminus
\end{aligned}$$

Es decir, se ha probado que $x \in A\setminus(A\cap B) \Leftrightarrow x \in A\setminus B$, por lo tanto, $A\setminus(A\cap B) = A\setminus B$. ■

Veamos un ejemplo distinto, pero esta vez sin comentarios. De nuevo, la idea es "traducir" una equivalencia lógica en una igualdad entre conjuntos. Demostraremos la siguiente igualdad de conjuntos (asociatividad de la unión):

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \tag{2}$$

Como es necesario, habrá que probar el siguiente lema (asociatividad de la disyunción).

Lema 2. $\alpha \vee (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \vee \gamma$.

Demostración. Revisemos la tabla de verdad de ambas proposiciones.

α	β	γ	α	$\vee$	$(\beta$	$\vee$	$\gamma)$	$(\alpha$	$\vee$	$\beta)$	$\vee$	γ
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0
1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0
0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Como ambas proposiciones (o fórmulas) tienen *los mismos valores de verdad*, se concluye que $\alpha \vee (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \vee \gamma$. ■

Una vez demostrada la equivalencia lógica que utilizaremos, demostraremos la igualdad de conjuntos que escribimos en (2):

Demostración.

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \vee x \in (B \cup C) && \text{Def. de } \cup \\ &\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) && \text{Def. de } \cup \end{aligned}$$

Como la última es una proposición de la forma "$\alpha \vee (\beta \vee \gamma)$", podemos aplicar el Lema 2:

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C && \text{Por el Lema 2} \\ &\Leftrightarrow x \in A \cup B \vee x \in C && \text{Def. de } \cup \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cup C && \text{Def. de } \cup \end{aligned}$$

Hemos mostrado que $x \in A \cup (B \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cup C$, por lo tanto, se ha probado la igualdad $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$. ■