Tarea 1

Seminario de Álgebra B

Ejercicio 1 Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos categorías y $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ y $G\colon \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ dos funtores. Si $F \dashv G$, entonces demuestra que la counidad $\varepsilon\colon FG \to \mathrm{Id}_{\mathbf{B}}$ es una transformación natural y que para cada $B \in \mathbf{B}$ la componente $\varepsilon_B\colon FGB \to B$ es una flecha universal de F en B, es decir, que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} FGB \arrow[r, "\varepsilon_B"] & B \\ FA \arrow[u, dashed, "Fg"] \arrow[ur, "\forall f"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} GB \\ A. \arrow[u, "\exists!"', "g"] \end{tikzcd}$$

Ejercicio 2 Dado un orden parcial $(P, \leq)$ podemos formar una categoría $\mathbf{P}$ cuyos objetos son los elementos de P y hay una flecha $p \to q$ si y sólo si $p \leq q$. Ahora considera dos órdenes parciales vistos como categorías, $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$.

a) ¿Qué es funtor $F\colon \mathbf{P} \to \mathbf{Q}$?

b) Si $F, G\colon \mathbf{P} \to \mathbf{Q}$ son funtores, entonces ¿que se debe satisfacer para que haya una transformación natural $\tau\colon F \to G$?

c) Si $F\colon \mathbf{P} \to \mathbf{Q}$ y $G\colon \mathbf{Q} \to \mathbf{P}$ son funtores, entonces ¿que condición se debe satisfacer para que $F \dashv G$? *Sugerencia: en este caso lo más fácil es describir la biyección de flechas.*

Ejercicio 3 Sean $F\colon \mathbf{P} \to \mathbf{Q}$ y $G\colon \mathbf{Q} \to \mathbf{P}$ tales que $F \dashv G$. Demuestra que GF es una operación de cerradura en $\mathbf{P}$, es decir,

a) $p \leq GF(p)$,

b) $GF(GF(p)) = GF(p)$,

c) $p \leq p' \implies GF(p) \leq GF(p')$.

De manera dual, demuestra que FG es una operación de interior en $\mathbf{Q}$, esto es,

d) $FG(q) \leq q$,

e) $FG(FG(q)) = FG(q)$,

f) $q \leq q' \implies FG(q) \leq FG(q')$.

Ejercicio 4 Continuando con el ejercicio 3, diremos que un objeto $p \in \mathbf{P}$ es cerrado si $p = GF(p)$ y un objeto $q \in \mathbf{Q}$ es abierto si $q = FG(q)$. Denotamos con $\mathbf{P}_0$ a la subcategoría plena de objetos cerrados en $\mathbf{P}$ y con $\mathbf{Q}_0$ a la subcategoría plena de objetos abiertos en $\mathbf{Q}$. Demuestra que $\mathbf{P}_0$ es equivalente a $\mathbf{Q}_0$.

Ejercicio 5 Ahora toma $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ como la categoría generada por los enteros no negativos con el orden usual. Considera

$$F(a) = \text{el } a\text{-esimo número primo, si } a > 0 \text{ y } F(0) = 0,$$
$$G(a) = \text{el número de primos} \leq \text{b.}$$

Usa los ejercicios anteriores para demostrar qua hay una cantidad infinita de primos.