Tarea 3

Seminario de Álgebra B

Ejercicio 1 Sean $\mathscr{E}$ uun topos, $E, F \in \mathscr{E}$ y $f : E \to F$ en $\mathscr{E}$.

a) Demuestra que el operador cerradura $\overline{(-)} : \operatorname{Sub}(E) \to \operatorname{Sub}(E)$ es natural en E, es decir, que $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$.

b) Si $A, B \in \operatorname{Sub} E$ son tales que $A \subseteq_E B$, entonces $\overline{A} \subseteq_E \overline{B}$.

Ejercicio 2 Sean $A, B \in \operatorname{Sub}(E)$. Muestra que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \cap B \arrow[r, rightarrowtail] \arrow[d, rightarrowtail] & B \arrow[d, rightarrowtail] \\ A \arrow[r, rightarrowtail] & A \cup B \end{tikzcd}$$

es un producto y coproducto fibrado.

Ejercicio 3 Dadas dos topologías de Lawvere-Tierney $j, k : \Omega \to \Omega$, definimos $j \leq k$ si y sólo si $j \wedge k = j$. Demuestra que $j \leq k$ si y sólo si $kj = j$.