

Tarea 2

Seminario de Álgebra B

Ejercicio 1 Sea $C \in \mathcal{C}$. Muestra que C^C es un objeto monoide en \mathcal{C} . Esto es, existen flechas $e : 1 \rightarrow C^C$ y $m : C^C \times C^C \rightarrow C^C$ tales que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{array}{ccc}
 C^C \times C^C \times C^C & \xrightarrow{\text{id} \times m} & C^C \times C^C \\
 m \times \text{id} \downarrow & & \downarrow m \\
 C^C \times C^C & \xrightarrow{m} & C^C
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccc}
 1 \times C^C & \xrightarrow{e \times \text{id}} & C^C \times C^C & \xleftarrow{\text{id} \times e} & C^C \times 1 \\
 & \searrow p_{C^C} & \downarrow m & \swarrow p_{C^C} & \\
 & & C^C & &
 \end{array}$$

Ejercicio 2 Demuestra que la biyección $\mathcal{C}(A, \Omega) \cong \text{Sub}_{\mathcal{C}}(A)$ es natural en A .

Ejercicio 3 Si $f : \Omega \rightarrow \Omega$ es un mono, entonces $ff = \text{id}_{\Omega}$.

Ejercicio 4 El par núcleo de una flecha $f : A \rightarrow B$ consta de dos flechas $a, b : R \rightarrow A$ tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 R & \xrightarrow{a} & A \\
 b \downarrow & & \downarrow f \\
 A & \xrightarrow{f} & B
 \end{array}$$

es un producto fibrado. Demuestra que el par núcleo cumple lo siguiente:

- a) la flecha $(a, b) : R \rightarrow A \times A$ es mono,
- b) la diagonal $\Delta_A : A \rightarrow A \times A$ está contenida en (a, b) , es decir, existe $\rho : A \rightarrow R$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\quad \rho \quad} & R \\
 \Delta_A \searrow & & \swarrow (a,b) \\
 & A \times A &
 \end{array}$$

- c) (b, a) está contenida en (a, b) , es decir, existe una flecha $\sigma : R \rightarrow R$ que hace conmutar al diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 R & \xrightarrow{\quad \sigma \quad} & R \\
 (b,a) \searrow & & \swarrow (a,b) \\
 & A \times A &
 \end{array}$$

- d) Si consideramos el producto fibrado de abajo a la izquierda, entonces existe una flecha $\tau : T \rightarrow R$ tal que el diagrama de abajo a la izquierda conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 T & \xrightarrow{q} & R \\
 p \downarrow & & \downarrow a \\
 R & \xrightarrow{b} & A
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 T & \xrightarrow{\quad \tau \quad} & R \\
 (ap,bq) \searrow & & \swarrow (a,b) \\
 & A \times A &
 \end{array}$$