Tarea 2

Seminario de Álgebra B

Ejercicio 1 Sea $C \in \mathscr{E}$. Muestra que C^C es un objeto monoide en $\mathscr{E}$. Esto es, existen flechas $e : 1 \to C^C$ y $m : C^C \times C^C \to C^C$ tales que los siguientes diagramas conmutan

$$
\begin{tikzcd}
C^C \times C^C \times C^C \arrow[r, "\mathrm{id}\times m"] \arrow[d, "m\times\mathrm{id}"'] & C^C \times C^C \arrow[d, "m"] \\
C^C \times C^C \arrow[r, "m"'] & C^C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
1 \times C^C \arrow[r, "e\times\mathrm{id}"] \arrow[dr, "p_{C^C}"'] & C^C \times C^C \arrow[d, "m"] & C^C \times 1 \arrow[l, "\mathrm{id}\times e"'] \arrow[dl, "p_{C^C}"] \\
& C^C &
\end{tikzcd}
$$

Ejercicio 2 Demuestra que la biyección $\mathscr{E}(A, \Omega) \cong \mathrm{Sub}_{\mathscr{E}}(A)$ es natural en A.

Ejercicio 3 Si $f : \Omega \to \Omega$ es un mono, entonces $ff = \mathrm{id}_\Omega$.

Ejercicio 4 El par núcleo de una flecha $f : A \to B$ consta de dos flechas $a, b : R \to A$ tales que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"'] & A \arrow[d, "f"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
$$

es un producto fibrado. Demuestra que el par núcleo cumple lo siguiente:

a) la flecha $(a, b) : R \to A \times A$ es mono,

b) la diagonal $\Delta_A : A \to A \times A$ está contenida en (a, b), es decir, existe $\rho : A \to R$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, dashed, "\rho"] \arrow[dr, "\Delta_A"'] & & R \arrow[dl, "{(a,b)}"] \\
& A \times A &
\end{tikzcd}
$$

c) (b, a) está contenida en (a, b), es decir, existe una flecha $\sigma : R \to R$ que hace conmutar al diagrama

$$
\begin{tikzcd}
R \arrow[rr, dashed, "\sigma"] \arrow[dr, "{(b,a)}"'] & & R \arrow[dl, "{(a,b)}"] \\
& A \times A &
\end{tikzcd}
$$

d) Si consideramos el producto fibrado de abajo a la izquierda, entonces existe una flecha $\tau : T \to R$ tal que el diagrama de abajo a la izquierda conmuta

$$
\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & R \arrow[d, "a"] \\
R \arrow[r, "b"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T \arrow[rr, dashed, "\tau"] \arrow[dr, "{(ap,bq)}"'] & & R \arrow[dl, "{(a,b)}"] \\
& A \times A. &
\end{tikzcd}
$$