Tarea 2

Seminario de Álgebra B

Ejercicio 1 Sea $C \in \mathscr{E}$. Muestra que C^C es un objeto monoide en $\mathscr{E}$. Esto es, existen flechas $e: 1 \to C^C$ y $m: C^C \times C^C \to C^C$ tales que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd} C^C \times C^C \times C^C \arrow[r, "\mathrm{id}\times m"] \arrow[d, "m\times \mathrm{id}"'] & C^C \times C^C \arrow[d, "m"] \\ C^C \times C^C \arrow[r, "m"'] & C^C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \times C^C \arrow[r, "e\times \mathrm{id}"] \arrow[dr, "p_{C^C}"'] & C^C \times C^C \arrow[d, "m"] & C^C \times 1 \arrow[l, "\mathrm{id}\times e"'] \arrow[dl, "p_{C^C}"] \\ & C^C & \end{tikzcd}$$

Ejercicio 2 Demuestra que la biyección $\mathscr{E}(A, \Omega) \cong \mathrm{Sub}_{\mathscr{E}}(A)$ es natural en A.

Ejercicio 3 Si $f: \Omega \to \Omega$ es un mono, entonces $ff = \mathrm{id}_\Omega$.

Ejercicio 4 El par núcleo de una flecha $f: A \to B$ consta de dos flechas $a, b: R \to A$ tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"'] & A \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado. Demuestra que el par núcleo cumple lo siguiente:

a) la flecha $(a, b): R \to A \times A$ es mono,

b) la diagonal $\Delta_A : A \to A \times A$ está contenida en (a, b), es decir, existe $\rho: A \to R$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, dashed, "\rho"] \arrow[dr, "\Delta_A"'] & & R \arrow[dl, "(a,b)"] \\ & A \times A & \end{tikzcd}$$

c) (b, a) está contenida en (a, b), es decir, existe una flecha $\sigma: R \to R$ que hace conmutar al diagrama

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, dashed, "\sigma"] \arrow[dr, "(b,a)"'] & & R \arrow[dl, "(a,b)"] \\ & A \times A & \end{tikzcd}$$

d) Si consideramos el producto fibrado de abajo a la izquierda, entonces existe una flecha $\tau: T \to R$ tal que el diagrama de abajo a la izquierda conmuta

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & R \arrow[d, "a"] \\ R \arrow[r, "b"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T \arrow[rr, dashed, "\tau"] \arrow[dr, "(ap,bq)"'] & & R \arrow[dl, "(a,b)"] \\ & A \times A. & \end{tikzcd}$$

Primero se forman los productos fibrados

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[r] \arrow[d, tail, "g"'] & 1 \arrow[d, "v"] \\
\Omega \arrow[r, "f"'] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
V \arrow[r] \arrow[d, tail] & 1 \arrow[d, "v"] \\
U \arrow[r, "g"'] & \Omega.
\end{tikzcd}
$$

Así, U es subobjeto de 1 y V es otro subobjeto de 1 contenido en U. Ahora consideramos el p.f.

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r] \arrow[d, tail] & V \arrow[r] \arrow[d, tail] & U \arrow[r] \arrow[d, tail] & 1 \arrow[d, tail, "v"] \\
U \arrow[r] & 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega \arrow[r, "f"'] & \Omega.
\end{tikzcd}
$$

Como el exterior es un p.f. entonces la composición de abajo debe ser g. Por lo tanto $ffg = fvU = g$, es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, tail, "g"'] & U \arrow[d, tail, "g"] \\
\Omega \arrow[r, "ff"'] & \Omega.
\end{tikzcd}
$$

Como ff es mono, entonces debe ser un p.f. y así $fff = f$ ya que las dos clasifican a g. Finalmente, como f es mono se tiene $ff = \mathrm{id}$.