Tarea 2

Seminario de Álgebra B

Ejercicio 1 Sea $C \in \mathcal{E}$. Muestra que C^C es un objeto monoide en \mathcal{E} . Esto es, existen flechas $e: 1 \to C^C$ y $m: C^C \times C^C \to C^C$ tales que los siguientes diagramas conmutan

$$C^{C} \times C^{C} \times C^{C} \xrightarrow{\operatorname{id} \times m} C^{C} \times C^{C} \qquad 1 \times C^{C} \xrightarrow{\operatorname{exid}} C^{C} \times C^{C} \xrightarrow{\operatorname{id} \times e} C^{C} \times 1$$

$$m \times \operatorname{id} \downarrow \qquad \qquad \downarrow m \qquad \qquad \downarrow m$$

$$C^{C} \times C^{C} \xrightarrow{m} C^{C} \qquad C^{C}$$

Ejercicio 2 Demuestra que la biyección $\mathscr{C}(A,\Omega)\cong \operatorname{Sub}_{\mathscr{C}}(A)$ es natural en A.

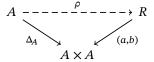
Ejercicio 3 Si $f: \Omega \to \Omega$ es un mono, entonces $ff = id_{\Omega}$.

Ejercicio 4 El par núcleo de una flecha $f:A\to B$ consta de dos flechas $a,b:R\to A$ tales que el diagrama

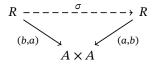
$$\begin{array}{ccc}
R & \xrightarrow{a} & A \\
b \downarrow & & \downarrow f \\
A & \xrightarrow{f} & B
\end{array}$$

es un producto fibrado. Demuestra que el par núcleo cumple lo siguiente:

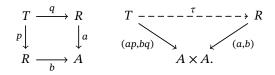
- a) la flecha (a, b): $R \to A \times A$ es mono,
- b) la diagonal $\Delta_A: A \to A \times A$ está contenida en (a,b), es decir, existe $\rho: A \to R$ tal que el siguiente diagrama conmuta



c) (b,a) está contenida en (a,b), es decir, existe una flecha $\sigma: R \to R$ que hace conmutar al diagrama



d) Si consideramos el producto fibrado de abajo a la izquierda, entonces existe una flecha $\tau: T \to R$ tal que el diagrama de abajo a la izquierda conmuta



1

Primero se forman los productos fibrados

$$\begin{array}{cccc} U & \longrightarrow & 1 & & V & \longrightarrow & 1 \\ g \downarrow & & \downarrow v & & \downarrow & & \downarrow v \\ \Omega & \xrightarrow{f} & \Omega & & U & \xrightarrow{g} & \Omega. \end{array}$$

Así, U es subobjeto de 1 y V es otro subobjeto de 1 contenido en U. Ahora consideramos el p.f.

Como el exterior es un p.f. entonces la composición de abajo debe ser g. Por lo tanto ffg=fvU=g, es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\mathrm{id}} & U \\ g \downarrow & & \downarrow g \\ \Omega & \xrightarrow{ff} & \Omega. \end{array}$$

Como ff es mono, entonces debe ser un p.f. y así fff = f ya que las dos clasifican a g. Finalmente, como f es mono se tiene $ff = \mathrm{id}$.