

Tarea 1

Seminario de Álgebra B

Exercise 1

Sean \mathbf{A} y \mathbf{B} dos categorías y $F: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ y $G: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$ dos funtores. Si $F \dashv G$, entonces demuestra que la counidad $\varepsilon: FG \rightarrow \text{Id}_{\mathbf{B}}$ es una transformación natural y que para cada $B \in \mathbf{B}$ la componente $\varepsilon_B: FGB \rightarrow B$ es una flecha universal de F en B , es decir, que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} FGB & \xrightarrow{\varepsilon_B} & B \\ \uparrow Fg & \nearrow \forall f & \\ FA & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} GB & & \\ \exists! \uparrow g & & \\ A & & \end{array}$$

Exercise 2

Dado un orden parcial (P, \leq) podemos formar una categoría \mathbf{P} cuyos objetos son los elementos de P y hay una flecha $p \rightarrow q$ si y sólo si $p \leq q$. Ahora considera dos órdenes parciales vistos como categorías, \mathbf{P} y \mathbf{Q} .

- ¿Qué es funtor $F: \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}$?
- Si $F, G: \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}$ son funtores, entonces ¿que se debe satisfacer para que haya una transformación natural $\tau: F \rightarrow G$?
- Si $F: \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}$ y $G: \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{P}$ son funtores, entonces ¿que condición se debe satisfacer para que $F \dashv G$? *Sugerencia: en este caso lo más fácil es describir la biyección de flechas.*