Prefacio

Los orígenes de este libro se pueden rastrear hasta una serie de seis seminarios, los cuales di en Cambridge en el invierno de 1973/74, y que forman el núcleo de los capítulos 1–6 del presente. Más seminarios en la misma serie, cubriendo partes de los capítulos 0, 7 y 9, fueron dados por Barry Tennison y Robert Seely. Por petición popular, las notas de esos seminarios fueron escritas y tuvieron una circulación limitada. En el verano de 1974, empecé a revisar y expandir esas notas, con la idea de que podrían formar un libro en algún día. Durante el invierno y primavera de 1975, mientras estaba en la Universidad de Liverpool, pude dar un curso cubriendo el material de los capítulos 0–5 y 8 con algo de detalle. Al final de este período, tenía una imagen suficientemente clara de la forma en general de este libro; y (motivado por Michael Butler) empecé la escritura de este en julio de 1975. De octubre de 1975 a marzo de 1976 estaba en la Universidad de Chicago, donde había un seminario semanal sobre teoría de topos organizado por Saunders Mac Lane y yo; el material cubierto durante este período se extrajo principalmente de los capítulos 2, 4, 5, 6 y 9, y los expositores (además de mí) fueron Kathy Edwards, Steve Harris y Steve Landsburg. También durante este período, escribí el texto de los capítulos 2–5 y la mayoría del capítulo 6; el resto del texto fue completado durante mayo–junio de 1976 después de mi regreso a Cambridge.

Las lecturas y seminarios mencionadas arriba tuvieron una influencia muy directa en el texto del libro, y todos aquellos que asistieron a ellos (en particular aquellos cuyos nombres aparecen arriba) merecen mi agradecimiento por la papel que jugaron en su formación. También me he beneficiado de contactos informales con muchos matemáticos en conferencias y otros lados. Entre aquellos cuyas (mayormente no publicadas) ideas he tomado con mucho gusto prestadas están Julian Cole, Radu Diaconescu, Mike Fourman, Peter Freyd, André Joyal y Chris Mulvey. John Gray me dio valiosos concejos sobre las partes 2-categóricas, y Jack Duskin y Barry Tennison me ayudaron a mejorar mi entendimiento sobre cohomología. Debo agradecer a Jean Bénabou por las muchas ideas que he tomado prestadas consciente o inconscientemente de él, y a Tim Brook por la compilación de la bibliografía.

Los cuatro matemáticos restantes con quienes estoy en deuda y deben ser mencionados individualmente son los siguientes. Myles Tierney me introdujo a la teoría de topos a través de sus lecturas en Varenna en 1971; buscando la versión sin publicar [TV], encuentro increíble que me haya enseñado tanto en ocho lecturas cortas. La ayuda de

Gavin Wraith y su ánimo han significado mucho para mí y sus lecturas en Bangor [WB] sirvieron como modelo para algunas partes de este libro. Como cualquier otra persona que trabaje en teoría de topos, tengo una deuda abrumadora con Bill Lawvere, por sus puntos de vista precursores; también me he beneficiado en un nivel más personal de sus ideas y conversaciones. Sobre todo, debo expresar mi deuda con Saunders Mac Lane: pero para él nunca debí convertirme en un teórico de topos en primer lugar; y el cuidado con el que leyó el manuscrito original y dio sugerencias para mejorar en casi cada párrafo, en conjunto ha sido fuera de lo común. Si aún permanece algún error o algo que no sea claro en el texto, son seguramente testimonio de mi perversidad en lugar de su falta de cuidado.

En un nivel diferente, pero no menos importante, debo agradecer a las Universidades de Liverpool y Chicago, además de St John's College y Cambridge por emplearme durante la escritura del libro; Paul Cohn, por aceptarlo aceptarlo para su publicación en la serie L.M.S Monographs; y al equipo del Academic Press por la eficiencia con la cual transformaron mi manuscrito amateur en el libro que ves frente a ti.

Cambridge, Junio de 1977

Índice general

Introducción

La teoría de topos tiene sus orígenes en dos líneas separadas del desarrollo matemático, las cuales permanecieron separadas durante diez años. Para tener una apreciación balanceada de la importancia del tema, creo necesario considerar la historia de estas dos líneas, y entender porque se unieron cuando lo hicieron. Por lo tanto, inicio esta introducción con un pasaje histórico (personal, y sin duda muy sesgado).

La primera de las dos líneas comienza con el surgimiento de la *teoría de gavillas*, originada en 1945 por J. Leray, desarrollada por H. Cartan y A. Weil entre otros, y culminando en el trabajo publicado por J. P. Serre [107], A. Grothendieck [42] y R. Godement [TF]. Como una buena parte del álgebra homológica, la teoría de gavillas originalmente fue concebida como una herramienta para la topología algebraica, para axiomatizar la noción de "sistema local de coeficientes" el cual era esencial para una buena teoría de cohomología de espacios que no son simplemente conexos; y el título completo del libro de Godement índica que aún era vista así en 1958. Sin embargo, antes de esta fecha, la potencia de la teoría de gavillas había sido reconocida por geómetras algebraicos y analíticos; y en años más recientes, su influencia se ha extendido a muchas otras áreas de las matemáticas. (Para tener dos ejemplos bastante diferentes ver [49] y [106].)

Sin embargo, en geometría algebraica fue descubierto rápidamente que la noción topológica de gavilla no era del todo adecuada, ya que la única topología disponible en variedades algebraicas abstractas o esquemas, la topología Zariski, no tenía "suficientes abiertos" para proveer de una buena noción geométrica de localización. En su trabajo sobre técnicas de descenso [43] y el grupo fundamental étale [44], A. Grothendieck observó que reemplazar "inclusión abierta de Zariski" por "morfismo étale" era un paso en la dirección correcta; pero desafortunadamente los esquemas que son étale sobre un esquema dado en general no forman un conjunto parcialmente ordenado. Fue entonces necesario inventar la noción de "topología de Grothendieck" sobre una categoría arbitraria, y la noción generalizada de gavilla para tal topología para dar un marco para el desarrollo de la cohomología étale.

Este marco fue construido durante el "Seminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie" durante 1963–64 por Grothendieck con la asistencia de M. Artin, J. Giraud, J. L. Verdier, y otros. (Las actas de este seminario fueron publicadas en una versión muy alargada [GV], incluyendo algunos resultados notables de P. Deligne, ocho años después.)

Entre los resultados más importantes del seminario original fue el teorema de Giraud, que muestra que las categorías de gavillas generalizadas que surgen de esta manera pueden ser completamente caracterizadas por propiedades de exactitud y condiciones de tamaño; a la vista de este resultado, rápidamente se hizo evidente que estas categorías de gavillas eran un tema de estudio más importante que los sitios (= categorías + topologías) que les dan origen. A la vista de esto y dado que una categoría con una topología puede ser vista como un "espacio topológico generalizado", el (ligeramente desafortunado) nombre de *topos* fue dado a las categorías que satisfacen los axiomas de Giraud.

No obstante, los topos seguían considerándose como vehículos primarios para acarrear teorías de cohomología; no sólo cohomología étale, sino también la "fppf", cohomologías cristalinas, entre otras. La potencia de la maquinaria desarrollada por Grothendieck fue ampliamente demostrada por los sustanciales resultados geométricos obtenidos usando estas teorías de cohomología en los años siguientes, culminando en la demostración de P. Deligne [149] de las famosas "conjeturas de Weil" —el análogo $\bmod p$ de la hipótesis de Riemann—. La maquinaria en sí fue desarrollada aún más, por ejemplo en el trabajo de J. Giraud [38] en cohomología no abeliana. Pero el significado completo de la sentencia "el topos es más importante que el sitio" parece que nunca fue apreciado por la escuela de Grothendieck. Por ejemplo, aunque eran conscientes de la estructura cartesiana cerrada de los topos ([GV, IV 10]), nunca explotaron al máximo esta idea siguiendo las líneas marcadas por Eilenberg y Kelly [160]. Fue, por lo tanto, necesario que una segunda línea de desarrollo proveyera el ímpetu para la teoría elemental de topos.

El punto de partida de esta segunda línea se considera generalmente que es el artículo pionero de F. W. Lawvere de 1964 sobre la teoría elemental de la categoría de conjuntos [71]. Sin embargo, considero que es necesario ir un poco más atrás, a la demostración del teorema del encaje de Lubkin, Heron Freyd y Mitchell para categorías abelianas [AC]. Fue este teorema el cual, mostrando que hay un conjunto explícito de axiomas elementales que implican todas las propiedades de exactitud (finitas) de categorías de módulos, pavimento el camino para un verdadero desarrollo autónomo de la teoría de categorías como fundamento de las matemáticas.

(Casualmente el teorema del encaje de Freyd y Mitchell se considera frecuentemente como una culminación en lugar de un punto de partida; esto es porque me parece una mala interpretación (o al menos una inversión) de su verdadero significado. Comunmente se piensa que dice "si quieres demostrar algo acerca de una categoría abeliana, puedes asumir que es una categoría de módulos"; mientras que yo creo que su verdadera importancia es "si quieres demostrar algo acerca de categoría de módulos, puedes trabajar en una categoría abeliana en general" —el teorema del encaje asegura que tu resultado será válido en esta generalidad, y olvidando la estructura explícita de la categoría de módulos serás forzado a concentrarte en los aspectos esenciales del problema—. Como ejemplo, compara la demostración módulo teórica del lema de la serpiente en HA con la demostración en categorías abelianas en [CW].)

Este teorema pronto fue seguido por el artículo de Lawvere [71], estableciendo una lista de axiomas elementales los cuales, agregando los axiomas no elementales de completud y pequeñez local, son suficientes para caracterizar a la categoría de conjuntos. (En un artículo subsecuente [72], Lawvere provee una axiomatización similar para la categoría de categorías pequeñas, y D. Schlomiuk [105] hizo lo mismo para la categoría de espacios topológicos.)

Uno bien puede preguntar por qué este artículo no fue seguido inmediatamente por la explosión de actividad que supuso la introducción de los topos elementales seis años después. En retrospectiva, la respuesta es que los axiomas de Lawvere son demasiado especializados: la categoría de conjuntos es un objeto extremadamente útil como fundamento de las matemáticas, pero como objeto de estudio axiomático no es (¡*ritmo* de la actividad de Martin, Solovay, et. al!) tremendamente interesante —es demasiado "rígida" como para tener una estructura interna—. De manera similar, si los axiomas de categorías abelianas hubieran aplicado sólo a la categoría de grupos abelianos, y no a la categoría de módulos o a la de gavillas abelianas, ellos también habrían sido rechazados. Así, lo que se necesitaba para la categoría de conjuntos era una axiomatización que también cubriera a las categorías de functores con valores en conjuntos y categorías de gavillas con valores en conjuntos —es decir, los axiomas de topos elementales—.

En sus artículos subsecuentes ([73] y [75]), Lawvere comienza a investigar la idea de que el conjunto con dos elementos $\{\top,\bot\}$ puede ser visto como un "objeto de valores de verdad" en la categoría de conjuntos; en particular, observó que la presencia de tal objeto en una categoría arbitraria nos permite reducir al axioma de comprensión a un enunciado elemental acerca de funtores adjuntos. La misma idea es el corazón del trabajo de H. Volger ([125] y [126]) sobre lógica y categorías semánticas.

Mientras tanto, el lado del teorema del encaje de esto fue desarrollado por M. Barr [2], quien formuló la noción de *categoría exacta* y la usó como base para un teorema de encaje no aditivo. La noción cercanamente relacionada de *categoría regular* fue formulada independientemente por P. A. Grillet [41] y D. H. Van Osdol [122], quienes la usaron en sus investigaciones sobre teoría general de gavillas; el mismo Barr obsrevó que el teorema de Giraud puede ser visto como algo más que un caso especial de este teorema de encaje. Esto quizás represente (lógicamente, si no cronológicamente) el primer acercamiento de las dos líneas de desarrollo mencionadas antes.

Sin embargo, cerca del mismo tiempo la atención de Lawvere dió un giro hacia los topos de Grothendieck; él observó que todo topos de Grothendieck tiene un objeto de valores de verdad Ω, y que la noción de topología de Grothendieck está cercanamente conectada con endomorfismos de Ω (ver [LH]). Durante los años 1969–70, Lawvere y M. Tierney (quien antes había contribuido a la teoría de categorías exactas) comenzaron a investigar las consecuencias de tomar "existe un objeto de valores de verdad" como un axioma; el resultado fue la teoría elemental de topos. Una proporsión notablemente grande de la teoría básica fue desarrollada en ese período de 12 meses, como se hará evidente del gran número de teoremas en los capítulos 1–4 de este libro en cuya demostración se hará referencia a Lawvere y Tierney.

Una vez que estos teoremas fueron conocidos por los matemáticos en general (es decir, después de las lecturas de Lawvere en Zürich y Niece [LN] en el verano de 1970 y la conferencia en Dalhousie [LH] en enero de 1971), fueron inmediatamente aceptados y desarrollados por varias personas. Uno de los primeros y más importantes fue P. Freyd, cuyas lecturas en University of New South Wales [FK] exploraron la teoría de encajes de topos; en retrospectiva esto parece haber sido algo como un callejón sin salida, de que la inversión del metateorema usual, mencionado arriba respecto a categorías abelianas, aplica con incluso más fuerza en la teoría de topos —ya que la gran virtud de los axiomas de topos es su carácter elemental, uno no tiene que apelar a un teorema de encaje no elemental para demostrar hechos elementales acerca de topos. (El teorema de encaje de Freyd no será encontrado en este libro; pero la parte más importante (y elemental) de él que muestra que todo topos puede ser encajado en un topos booleano, es demostrado en 7.5). No obstante, el trabajo de Freyd contiene muchos resultados técnicos importantes; en particular su teorema de caracterización de objetos de números naturales es de suma importancia.

Entre otros primeros trabajadores en teoría de topos, uno debe mencionar a J. Bénabou y su estudiante J. Celeyrette en París [BC], y A. Kock y G. C. Wraith en Arhaus [KW]. C. J. Mikkelsen, un estudiante de Kock, fue el primero en demostrar que uno de los axiomas de Lawvere y Tierney, el de colímites finitos, se puede deducir de los otros; su tesis [84] también tiene muchas contribuciones importantes a la teoría de retículas en un topos.

En vista de la demostración de Lawvere y Tierney de la independencia de la hipótesis del continuo [117] se volvió un asunto importante determinar de manera precisa la relación entre la teoría de topos elemental y la teoría de conjuntos. La respuesta fue encontrada independientemente por J. C. Cole [18], W. Mitchell [85] y G. Osius [92]. W. Mitchell también introdujo una idea que se ha vuelto central en el tema: que en todo topos surge un lenguaje interno que puede ser usado para hacer enunciados "casi conjuntistas" acerca de los objetos y morfismos del topos. Aunque la idea original se debe a Mitchell, su defensor más entusiasta ha sido indudablemente J. Bénabou, sus estudiantes han usado extensivamente el lenguaje interno en años recientes.

El siguiente avance importante fue hecho por R. Diaconescu, un estudiante de Tierney cuya tesis fue completada en 1973. El teorema de Diaconescu [30] fue importante no sólo que le dió a la estructura de 2-categoría a $\mathfrak{Top}$ sino porque también representó el primer uso importante de la teoría de categorías interna. (Esta teoría se ha desarrollado a lo largo de los años de manera azarosa, mayormente en trabajo no publicado de J. Bénabou.) Como bis, Diaconescu demostró el teorema de Giraud relativo; el mismo Giraud [39] había demostrado una versión relativa de su teorema (por medios no elementales) para topos de Grothendieck, y W. Mitchell formuló la forma elementalmente correcta. Sin embargo, Mitchell sólo pudo demostrar esto en el caso especial cuando el "objeto de generadores" (ver **??**) es 1; resultó que el teorema de Diaconescu fue la herramienta esencial para demostrar el caso general. Cerca del mismo tiempo, P. T. Johnstone [52] también usó categorías internas para demostrar que la construcción de Grothendieck del funtor gavilla asociada se puede hacer en términos elementales.

El siguiente desarrollo (que de hecho se solapa con los anteriores) fue el surgimiento de la noción de topos como teorías y el concepto de topos clasificante. En cierto sentido, esto regresa al trabajo de Lawvere [176] sobre teorías algebraicas, pero su conexión con teoría de topos inició con el trabajo de M. Hakim [45], una estudiante de Grothendieck, sobre esquemas relativos en el cual construyó el clasificador para anillos y anillos locales, y estableció sus propiedades fundamentales. En 1972 A. Joyal y G. E. Reyes [RM] aislaron la noción de "teoría coherente" (= teoría geométrica finitaria, en nuestra terminología), y demostraron que toda teoría de ese tipo tiene un topos clasificante; su trabajo fue extendido después por Reyes y M. Makkai [82] cubriendo teorías geométricas infinitarias.

Fue F. W. Lawvere [LB] quien observó primero que, dado el trabajo de Reyes y Joyal, el teorema de Deligne sobre puntos de topos coherentes era precisamente equivalente al teorema de completud de Gödel y Henkin para teorías geométricas finitarias; y también Lawvere conjeturó el "teorema de completud booleano valuado" para teorías infinitarias cuya demostración en teoría de topos fue hecha por M. Barr [4].

Una vez más, el teorema de Diaconescu proveyó la clave para la "relativización" de los resultados de Joyal y Reyes; el paso decisivo fue dado en 1973 por G. C. Wraith, quien construyó un objeto clasificador sobre un topos arbitrario con objeto de números naturales. De ahí el teorema general de existencia de topos clasificantes era poco más que una formalidad; fue logrado independientemente por A. Joyal, M. Tierney [119] y J. Bénabou [8].

Esto pone al día nuestro viaje histórico, al menos en lo que concierne a los resultados más importantes. Ahora consideremos la posición presente de la teoría de topos, y sus perspectivas futuras.

La primera cosa que debe ser dicha es que la parte básica de la topos elementales (es decir, el contenido de los capítulos 1–5 de este libro) parece estar completamente terminada. De hecho, sólo sé de una pregunta abierta sustancial que surge de estos cinco capítulos (a saber, la existencia de pseudo colímites finitos en $\mathfrak{Top}$ vistos en la sección 4.2); sin duda hay muchos otros puntos menores que deben ser clarificados, y muchos teoremas cuyas demostraciones serán mejoradas y simplificadas con el tiempo, pero los fundamentos del tema parecen estar firmemente establecidos. Esto es por supuesto algo malo: es vital para la salud de un tema su continua revisión y mejoramiento, y estoy incómodamente consiente de que escribiendo este libro he contribuido mayormente a la concretación de estos fundamentos. Mi una defensa en contra de este cargo es que de cualquier forma la solidificación está sucediendo, y es mejor que sea impresa que en folklore no publicado accesible sólo a iniciados.

El matemático promedio, quien considera la teoría de categorías como "abstracción sin sentido generalizada", tiende a considerar la teoría de topos teoría de categorías abstracta generalizada. (No hay duda de que ha heredado esta reputación de su padre, la aproximación de Grothendieck a la geometría algenraica.) Sin embargo S. Mac Lane [179] considera el surgimiento de la teoría de topos como un *decline* de abstracción en teoría de categorías, y en álgebra abstracta en general. Estoy convencido de que

Mac Lane eta en lo correcto, y de que su visión señala el camino al futuro más probable del desarrollo de la teoría de topos; en casi todo el trabajo *reciente* de importancia en teoría de topos no conciernen a los topos como un área abstracta y asilada de las matemáticas, sino a los topos como ayuda al entendimiento y clarificación de los conceptos en otras áreas. (ver, por ejemplo, [36], [57], [63], [79], [88], [90], [112], [130].)

Para tomar un ejemplo específico considera el teorema general de existencia de topos clasificantes (**??**). Una primera reacción al ver este teorema es admirar su elegancia y generalidad; la segunda reacción (la cual viene mucho tiempo después) es darse cuenta de su fundamental inutilidad —una cualidad que, por cierto, comparte con el teorema general del funtor adjunto—. Ya que el único posible uso de tal teorema es reducir el estudio de una teoría geométrica particular al estudio de su modelo genérico (o a la inversa, reducir el estudio de un topos particular a la teoría del modelo genérico que tiene), y el teorema como es demostrado en la sección 6.5 simplemente no provee un medio efectivo para pasar de una a la otra. Por tanto la demostración "sintáctica" del mismo teorema en la sección 7.4, aunque es apreciablemente más desordenada, es más valiosa en la práctica —y es esta demostración, no la otra en el capítulo anterior, la que mayoría del trabajo siguiente en el tema.

Al decir que el futuro de la teoría de topos recae en la clarificaciónde otras áreas de las matemáticas a través de la aplicación de las ideas de teoría de topos, no quiero implicar que, como Grothendieck, veo a la teoría de topos como una máquina de demolición de problemas abiertos en geometría algebraica o en cualquier otro lado. Por el contrario, creo que es poco probable que la teoría de topos elemental por sí misma resuelva algún problema mayor en matemáticas, pero creo que la dispersión de la perspectiva de la teoría de topos en muchas áreas de actividad matemática inevitablemente llevará a un entendimiento más profundo de las características reales de los problemas, el cual es un preludio esencial para su correcta solución.

¿Cuál es, entonces, la perspectiva de la teoría de topos? Brevemente, consiste en el rechazo de la idea de que hay un universo fijo de conjuntos "constantes" dentro del cual las matemáticas pueden y deben ser desarrolladas, y el reconocimiento de que la noción de "estructura variable" puede ser manejada más convenientemente en un universo de conjuntos *continuamente variables* que por el método, tradicional desde el surgimiento de la teoría de conjuntos abstracta, de considerar separadamente un dominio de variación (es decir, un espacio topológico) y una sucesión de estructuras constantes adjuntadas a los puntos de su dominio. En palabras de F. W. Lawvere [LB], "Toda noción de constancia es relativa, siendo derivada perceptual o conceptualmente como un caso límite de variación y el indiscutido valor de tales nociones para aclarar variación siempre está limitado por su origen. Esto aplica en particular a la noción de conjunto constante, y explica por qué gran parte de la teoría intuitiva de conjuntos lleva de alguna forma a la teoría de conjuntos variables". Es esta generalización de la ideas desde conjuntos constantes a variables la que cae en el corazón de la teoría de topos; y el lector que lo mantiene en mente, como objetivo último, mientras lee este libro, ganará una gran comprensión.

Ahora, algunas palabras acerca de aquellas cosas que no hice en este libro.

(1) En la definición de topos, he tomado cartesiana cerrada y la existencia de Ω como dos axiomas separados, en lugar de combinarlos un un sólo axioma de objetos potencia como sugiere A. Kock [66]. (La equivalencia del axioma de Kock esta, sin embargo, cubierta en los ejercicios del capítulo 1.) A un nivel práctico defendería esta decisión por dos lados: (a) que hay un gran número de resultados en el libro (significativamente en el capítulo 2) que usan sólo la estructura cartesiana cerrada y no los axiomas completos de topos, y algunos (por ejemplo, el teorema **??**) donde las exponenciales y Ω son usados de formas esencialmente distintas en la misma demostración; y (b) que si uno toma la definición con objetos potencia, se ve obligado (como en[WB]) a continuar inmediatamente con la demostración un tanto técnica de que esta definición implica ser cartesiana cerrada, y se pone en peligro de perder a los lectores en este punto crítico. En un nivel más filosófico, añadiría (c) que la definición mediante objetos potencia es realmente teórico conjuntista en lugar de una definición teórico categórica de topos, en el sentido que subordina la noción de "función" a la de "subconjunto" mediante el aparato teórico conjuntista de identificar funciones con sus gráficas. Una de las principales propiedades de la teoría de categorías es que toma "morfismo" como noción primitiva al mismo nivel (*no*, por cierto, superior a) que "objeto"; por lo tanto es correcto que la definición de topos deba incluir la estructura cartesiana cerrada.

(2) No he introducido el lenguaje de Mitchell y Bénabou hasta que el libro está algo avanzado, al final del capítulo 5. Sé que hay algunas personas cuyo libro de texto ideal sobre teoría de topos empezaría con la definición y sólo suficientes desarrollos de propiedades de exactitud para introducir el lenguaje la correctud de su interpretación; a partir de entonces todas las demostraciones se conducirían con el lenguaje formal. No estoy de acuerdo con este enfoque; creo que es imposible apreciar la potencia del lenguaje de Mitchell y Bénabou hasta que tengas algo de experiencia demostrando cosas sin él (de hecho, este es técnicamente el único lugar en el libro donde he seguido conscientemente un orden particular del material por razones pedagógicas en lugar de lógicas). También está el punto de que la aproximación con el lenguaje formal se rompe cuando se confronta con el teorema de Giraud relativo (**??**); mientras que el lenguaje de Mitchell y Bénabou es una herramienta bastante poderosa en demostraciones en un sólo topos, no está bien adaptada a demostraciones en las cuales tenemos que pasar hacia adelante y hacia atrás entre dos topos mediante un morfismo geométrico. (Es posible que la demostración de **??** pueda hacerse más corta usando el lenguaje de categorías localmente internas, pero eso es un asunto diferente.)

(3) Ya he mencionado que el teorema de encaje de Freyd [FK] no será encontrado en este libro. En consecuencia, el concepto de Freyd de topos bien punteado juega un rol menor; no es introducido hasta la sección **??**.

(4) No he incluido ninguna referencia al trabajo más reciente de Freyd (no publicado aún) sobre la teoría de *alegorías*. Esta teoría hace para la categoría de conjuntos y relaciones lo que los topos hacen para conjuntos y funciones; es sabido que Freyd mantiene que esto provee una base más simple y natural que la teoría de topos para

muchas de las ideas desarrolladas en este libro, pero personalmente no estoy convencido de esto.

(5) No he mencionado el trabajo hecho por D. Bourn [13], R. Street [113], [114] y otros, sobre el desarrollo de un análogo 2-categórico de la teoría de topos. Me parece que los fundamentos de esta teoría no han alcanzado un estado suficientemente definitivo para su tratamiento en forma de libro.

(6) Una generalización de la teoría de topos cuya omisión me hace arrepentirme un poco es la noción de J. Penon de *quasitopos* [99]. Sin embargo, siento que introducirla al principio este libro simplemente habría introducido complicaciones extra en las demostraciones sin beneficios en la forma de ejemplos adicionales bien conocidos; e introducirla más adelante habría involucrado una gran cantidad de duplicación. Espero, sin embargo, que las notas O. Wyler sobre quasitopos (prometidas en [130]) ayuden a llenar esta grieta.

(7) La frase "universo de Grothendieck" no aparece en ningún lugar de este libro. Esto es intencional; he sido deliberadamente tan vago como sea posible (excepto en la sección 9.3) acerca de las propiedades de la teoría de conjuntos que estoy usando, ya que realmente no importa. La teoría de topos es una teoría elemental, y sus teoremas principales no son —o no deben ser— dependientes de axiomas recónditos de la teoría de conjuntos. (De hecho soy miembro con todas las cuotas pagadas del Movimiento de Liberación Matemática fundado por J. H. Conway [157].) Sin embargo, si soy presionado usaría un tipo de teoría de conjuntos de Bernays y Gödel para tener una distinción entre categorías pequeñas (conjuntos) y categorías grandes (clases propias); pero también quiero considerar ciertas 2-categorías "muy grandes" (sustancialmente $\mathfrak{Cat}$ y $\mathfrak{Top}$) cuyos objetos son categorías grandes. Si quisiera ser estrictamente formal acerca de esto, necesitaría introducir al menos un universo de Grothendieck; pero como todos los enunciados que quiero hacer acerca de $\mathfrak{Cat}$ y $\mathfrak{Top}$ son (equivalentes a) enunciados elementales, no hay necesidad *real* de hacerlo. Con el fin de mantener cierta respetabilidad en el ámbito de la teoría de conjuntos, me he limitado a considerar gavillas sólo sobre sitios pequeños; esto tiene la desventaja de que no podemos enunciar el teorema de Giraud en su forma más hábil (una categoría es un topos de Grothendieck si y sólo si es equivalente a la categoría de gavillas canónicas sobre sí mismo), pero por lo demás no es tan molesto como los autores de [GV] quieren hacernos creer.

Finalmente, tengo que exponer mi postura sobre la pregunta más controversial en toda la teoría de topos: ¿como decir el plural de topos? El lector ya habrá observado que uso el plural del inglés;[1] lo hago porque (en sentido matemático) la palabra topos no se deriva directamente de su raíz griega, sino que es una formación en reversa de topología. No tengo nada más que decir al respecto, excepto preguntar a aquellos topósofos[2] quienes prefieren decir topoi, cuando ellos van a divagar en un día frío, ¿llevan provisiones de té

[1] En esta traducción se ha usado el plural que se ha convenido en español, topos.

[2] Estoy en deuda con Miles Reid por sugerir los términos "topósofos" y "toposofía"; e insisto a mis colegas topósofos que los adopten.

caliente con ellos en termoi?

Notas al Lector

A lo largo de este libro, us sólo sistema de numeración es usado para definiciones, lemas, teoremas, observaciones, etc.; el número $n.p.q$ normalmente denota la q-ésima referencia numerada en la sección p del capítulo n. Por el momento he cambiado el estilo de numeración por las razones que se comentan en el libro, parece no tener una buena lógica. Por ejemplo, 8.20 es la decima referencia en la sección 8.1. Johnstone afirma que no hy un número que refiera a dos referencias, aún así preferí usar el sistema de numeración que usa LaTeX por defecto.

Al final de cada capítulo se encontrarán algunos ejercicios: cerca de diez en cada uno de los primeros capítulos, más en los últimos. Ellos varías considerablemente en dificultad, algunos son completamente rutinarios, mientras otros son un tanto sustanciales. No he dado ninguna indicación de cuáles ejercicios considero más fáciles (el orden es el del material del capítulo al cual refieren), pero he dado muchas pistas en la mayoría de los difíciles. En varios casos, el resultado de un ejercicio es usado ya sea en los ejercicios o el texto de un capítulo posterior; estos ejercicios se distinguen con una daga (†).

El siguiente resumen de interdependencia lógica de varios capítulos puede ser útil para el lector que esté interesado en un tópico en particular. El capítulo 0 contiene un resumen de cierto material de fondo que es requerido para motivar la definición de topos, o para dar una fuente de ejemplos. Los capítulos 1–5 forman el núcleo del libro; de estos capítulos 1–4 siguen un camino más o menos geodésico (con algunas desviaciones como la sección 4.2) de la definición de topos (**??**) al teorema relativo de Giraud (**??**) y la existencia de productos fibrados en $\mathfrak{BTop}/\mathscr{E}$ (**??**). La dependencia lógica entre estos cuatro capítulos es entonces bastante cercana a ser un orden lineal.

Sin embargo, la mayoría del material del capítulo 2 (sobre categoría internas) es algo técnico, y algunos lectores lo encontrar difícil en la primera lectura. Recomiendo a esos lectores que omitan todo el capítulo 2, excepto por el teorema **??** (el cual es importante, y tiene aplicaciones en otras áreas además de teoría de categorías internas), y continúen con el capítulo 3. (Hay algunas referencias al capítulo 2 en la sección 3.3, pero puedes regresar a ellas cuando sea necesario.) Luego puedes continuar con la primera sección del capítulo 4, todo el capítulo 5, excepto por algunas partes de la sección 5.3, e incluso las primeras dos secciones del capítulo 6 antes de regresar al capítulo 2.

El capítulo 5 introduce un gran número de conceptos los cuales, aunque son parte de la corriente principal de la teoría de topos, no se involucran en la demostración del teorema de Giraud relativo. En particular, contiene una descripción del lenguaje interno de un topos, el cual es usado libremente en la segunda mitad del libro.

Los últimos cuatro capítulos presentan varias extensiones y aplicaciones de la teoría básica; originalmente esperaba hacerlos lógicamente independientes, de tal forma que pudieran ser leídos en cualquier orden, pero inevitablemente algunos cruces y conexiones se han establecido entre ellos.. La siguiente tabla resume los importantes:

Antes de leer	se recomienda leer
7.4	6.3 y 6.5
8.1	7.5
8.4	6.2
9.1	6.2 y 6.4

Hay mś conexiones entre los ejercicios de estos últimos cuatro capítulos (ver, por ejemplo, los ejercicios **??**, **??**, **??** y **??**).

El apéndice es una presentación de un material que originalmente se pensaba incluir en el capítulo 2; se removió de ahí porque, parece seguro que pronto se convertirá en parte de la corriente principal de la teoría de los topos, es posible que la definición básica de "categoría localmente interna" aún no ha alcanzado su forma final. Puede ser leído en cualquier momento después del capítulo 2; aunque hace muchas referencias a capítulos siguientes.

A lo largo del libro, las referencias a la bibliografía están encerradas entre corchetes. La bibliografía está dividida en cuatro secciones: la sección A consiste de "referencias estándar" a otras áreas de las matemáticas (por ejemplo, a teoría de retículas o topología algebraica) que son usadascuando un teorema o definición de esa área es citado en el texto. La sección B tiene trabajos de naturaleza general sobre teoría de topos, y algunos artículos introductorios escritos para lectores no especialistas (por ejemplo, [BM] y [WI]). La sección C tiene el resto de las referencias sobre teoría de topos y un número de artículos cercanamente relacionados sobre teoría de categorías, teoría de gavillas, etc. Las secciones B y C juntas tienen como objetivo presentar una lista completa de los artículos publicados hasta ahora en teoría de topos; sin embargo, no incluyo resúmenes de pláticas, ni tesis de doctorado a menos que tengan resultados importantes no publicado en ningún otro lado. La sección D tiene el resto de las referencias citadas en el texto. Las referencias en las secciones A y B están indicadas por un código de dos letras; aquellas en las secciones C y D están enumeradas consecutivamente. En las cuatro secciones, he indicado los *Mathematical Reviews* y números, donde ellos están.

Capítulo 0

Preliminares

0.1. Teoría de categorías

Esta sección no tiene la intención de dar una introducción detallada a las ideas básicas de la teoría de categorías; nuestra intensión más bien es indicar algunos de los conceptos y teoremas que serán asumidos como familiares, y establecer algunas nociones estándar. El lector que no se considere familiarizado con estos conceptos básicos será bien aconsejado a consultar el excelente libro de Mac Lane [CW], o cualquier otro texto estándar sobre teoría de categorías antes de proceder más adelante con este libro.

Normalmente usaremos letras mayúsculas en script ($\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$,...) para denotar categorías "grandes". Cuando afirmemos "$\mathcal{C}$ es una categoría" sin ningún calificativo adicional, se entenderá que $\mathcal{C}$ es un modelo de la "teoría elemental de categorías" [72], es decir, $\mathcal{C}$ es una *metacategoría* en el sentido de [CW], capítulo I. Esto significa que no pensamos a $\mathcal{C}$ siendo formalmente definida dentro de un modelo particular de la teoría de conjuntos; en particular, si X y Y son objetos de $\mathcal{C}$ no pedimos que los morfismos de X a Y en $\mathcal{C}$ formen un conjunto.

Sin embargo, a excepción del capítulo 9, normalmente asumiremos que tenemos un modelo (fijo) de la teoría de conjuntos (incluyendo el axioma de elección cuando sea necesario); y usaremos la letra $\mathscr{S}$ para denotar la *categoría de conjuntos y funciones* que obtenemos de él. Usamos el término *categoría pequeña* para una categoría cuyos morfismos forman un conjunto. Si $\mathbf{C}$ es una categoría pequeña, escribimos $\mathscr{S}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ para la categoría de *pregavillas* sobre $\mathbf{C}$, es decir, funtores contravariantes de $\mathbf{C}$ en $\mathscr{S}$; entre los objetos de $\mathscr{S}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$, tenemos los funtores *representables* h_U, donde U es un objeto de $\mathbf{C}$, definido como $h_U(V) = \hom_{\mathbf{C}}(V, U)$. (Por razones tipográficas, a veces escribiremos $h(U)$ en lugar de h_U; además escribiremos h^U para el funtor covariante representable $\hom_{\mathbf{C}}(U, -)$.) Frecuentemente haremos uso de los siguientes dos resultados:

Lema 0.1.1 (Yoneda [187])**.** *Dados U y X objetos de $\mathbf{C}$ y $\mathscr{S}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ respectivamente, hay una biyección (natural en las dos variables) entre morfismos $h_U \to X$ en $\mathscr{S}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ y elementos del conjunto $X(U)$.*

Lema 0.1.2. *Cualquier objeto de $\mathscr{S}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ se puede expresar como un colímite de un diagrama cuyos vértices son funtores representables.*

Demostración. Sea X un objeto de $\mathscr{S}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$, y sea $(\mathbf{C} \downarrow X)$ la *categoría coma* (pequeña) cuyos objetos son pares U, α, con U un objeto de $\mathbf{C}$ y $\alpha : h_U \to X$ en $\mathscr{S}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$, y cuyos morfismos son triángulos conmutativos

$$\begin{tikzcd}
h_U \arrow[rr] \arrow[dr] & & h_V \arrow[dl] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

en $\mathscr{S}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$.

Así, tenemos un diagrama obvio $(\mathbf{C} \downarrow X) \to \mathscr{S}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ obvio que "olvida" dado por $(U, \alpha) \mapsto h_U$; se puede ver que el colímite de este diagrama es X. $\square$

0.2. Teoría de gavillas

0.3. Topologías de Grothendieck

0.4. Teorema de Giraud

Ejercicios 0

Capítulo 1

Topos Elementales

1.1. Definición y ejemplos

Definición 1.1.1. Test de definición.

1.2. Relaciones de equivalencia y morfismos parciales

1.3. La categoría $\mathscr{E}^{\mathrm{op}}$

1.4. Funtores producto fibrado

1.5. Factorización con imagen

Ejercicios 1

Capítulo 2

Teoría de Categorías Interna

2.1. Categorías internas y diagramas

2.2. Límites y colímites internos

2.3. Diagramas en un topos

2.4. Profuntores internos

2.5. Categorías filtrantes

Ejercicios 2

Capítulo 3

Topología y gavillas

3.1. Topología

3.2. Gavillas

3.3. El funtor gavilla asociada

3.4. $\mathscr{E}_j$ como categoría de fracciones

3.5. Ejemplos de topologías

Ejercicios 3

Capítulo 4

Morfismos geométricos

4.1. El teorema de factorización

4.2. La construcción de pegado

4.3. Teorema de Diaconescu

4.4. Morfismos acotados

Ejercicios 4

Capítulo 5

Aspectos lógicos de la teoría de topos

5.1. Topos booleanos

5.2. El axioma de elección

5.3. El axioma (SG)

5.4. El lenguaje de Mitchell y Bénabou

Ejercicios 5

Capítulo 6

Objetos de números naturales

6.1. Definición y propiedades básicas

6.2. Cardinales finitos

6.3. El objeto clasificador

6.4. Teorías algebraicas

6.5. Teorías geométricas

6.6. Objetos de números reales

Ejercicios 6

Capítulo 7

Teoremas de Deligne y Barr

7.1. Puntos

7.2. Topos espaciales

7.3. Topos coherentes

7.4. Teorema de Deligne

7.5. Teorema de Barr

Ejercicios 7

Capítulo 8

Cohomología

8.1. Definiciones básicas

8.2. Cohomología de Čech

8.3. Torsores

8.4. Grupos fundamentales profinitos

Ejercicios 8

Capítulo 9

Teoría de topos y teoría de conjuntos

Apéndice A

Categorías localmente internas