Índice general

Prefacio — **v**

Introducción — **vii**

Notas al Lector — **xi**

0 Preliminares — **1**
- 0.1. Teoría de categorías 1
- 0.2. Teoría de gavillas 1
- 0.3. Topologías de Grothendieck 1
- 0.4. Teorema de Giraud 1
- Ejercicios 0 1

1 Topos Elementales — **3**
- 1.1. Definición y ejemplos 3
- 1.2. Relaciones de equivalencia y morfismos parciales 3
- 1.3. La categoría $\mathcal{E}^{\mathrm{op}}$ 3
- 1.4. Funtores producto fibrado 3
- 1.5. Factorización con imagen 3
- Ejercicios 1 3

2 Teoría de Categorías Interna — **5**
- 2.1. Categorías internas y diagramas 5
- 2.2. Límites y colímites internos 5
- 2.3. Diagramas en un topos 5
- 2.4. Profuntores internos 5
- 2.5. Categorías filtrantes 5
- Ejercicios 2 5

3 Topología y gavillas — **7**
- 3.1. Topología 7
- 3.2. Gavillas 7

3.3. El funtor gavilla asociada 7
3.4. $\mathcal{E}_j$ como categoría de fracciones 7
3.5. Ejemplos de topologías 7
Ejercicios 3 7

4 Morfismos geométricos 9
4.1. El teorema de factorización 9
4.2. La construcción de pegado 9
4.3. Teorema de Diaconescu 9
4.4. Morfismos acotados 9
Ejercicios 4 9

5 Aspectos lógicos de la teoría de topos 11
5.1. Topos booleanos 11
5.2. El axioma de elección 11
5.3. El axioma (SG) 11
5.4. El lenguaje de Mitchell y Bénabou 11
Ejercicios 5 11

6 Objetos de números naturales 13
6.1. Definición y propiedades básicas 13
6.2. Cardinales finitos 13
6.3. El objeto clasificador 13
6.4. Teorías algebraicas 13
6.5. Teorías geométricas 13
6.6. Objetos de números reales 13
Ejercicios 6 13

7 Teoremas de Deligne y Barr 15
7.1. Puntos 15
7.2. Topos espaciales 15
7.3. Topos coherentes 15
7.4. Teorema de Deligne 15
7.5. Teorema de Barr 15
Ejercicios 7 15

8 Cohomología 17
8.1. Definiciones básicas 17
8.2. Cohomología de Čech 17
8.3. Torsores 17
8.4. Grupos fundamentales profinitos 17
Ejercicios 8 17

9 Teoría de topos y teoría de conjuntos **19**
9.1. Finitud de Kuratowski 19
9.2. Objetos transitivos 19
9.3. Teoremas de equiconsistencia 19
9.4. La construcción filtro-potencia 19
9.5. Independencia de la hipótesis del continuo 19
Ejercicios 9 19

A Categorías localmente internas **21**

Prefacio

Introducción

La teoría de topos tiene sus orígenes en dos líneas separadas del desarrollo matemático, las cuales permanecieron separadas durante diez años. Para tener una apreciación balanceada de la importancia del tema, creo necesario considerar la historia de estas dos líneas, y entender porque se unieron cuando lo hicieron. Por lo tanto, inicio esta introducción con un pasaje histórico (personal, y sin duda muy sesgado).

La primera de las dos líneas comienza con el surgimiento de la *teoría de gavillas*, originada en 1945 por J. Leray, desarrollada por H. Cartan y A. Weil entre otros, y culminando en el trabajo publicado por J. P. Serre [107], A. Grothendieck [42] y R. Godement [TF]. Como una buena parte del álgebra homológica, la teoría de gavillas originalmente fue concebida como una herramienta para la topología algebraica, para axiomatizar la noción de “sistema local de coeficientes” el cual era esencial para una buena teoría de cohomología de espacios que no son simplemente conexos; y el título completo del libro de Godement índica que aún era vista así en 1958. Sin embargo, antes de esta fecha, la potencia de la teoría de gavillas había sido reconocida por geómetras algebraicos y analíticos; y en años más recientes, su influencia se ha extendido a muchas otras áreas de las matemáticas. (Para tener dos ejemplos bastante diferentes ver [49] y [106].)

Sin embargo, en geometría algebraica fue descubierto rápidamente que la noción topológica de gavilla no era del todo adecuada, ya que la única topología disponible en variedades algebraicas abstractas o esquemas, la topología Zariski, no tenía “suficientes abiertos” para proveer de una buena noción geométrica de localización. En su trabajo sobre técnicas de descenso [43] y el grupo fundamental étale [44], A. Grothendieck observó que reemplazar “inclusión abierta de Zariski” por “morfismo étale” era un paso en la dirección correcta; pero desafortunadamente los esquemas que son étale sobre un esquema dado en general no forman un conjunto parcialmente ordenado. Fue entonces necesario inventar la noción de “topología de Grothendieck” sobre una categoría arbitraria, y la noción generalizada de gavilla para tal topología para dar un marco para el desarrollo de la cohomología étale.

Este marco fue construido durante el “Seminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie” durante 1963–64 por Grothendieck con la asistencia de M. Artin, J. Giraud, J. L. Verdier, y otros. (Las actas de este seminario fueron publicadas en una versión muy alargada [GV], incluyendo algunos resultados notables de P. Deligne, ocho años después.)

Entre los resultados más importantes del seminario original fue el teorema de Giraud, que muestra que las categorías de gavillas generalizadas que surgen de esta manera pueden ser completamente caracterizadas por propiedades de exactitud y condiciones de tamaño; a la vista de este resultado, rápidamente se hizo evidente que estas categorías de gavillas eran un tema de estudio más importante que los sitios (= categorías + topologías) que les dan origen. A la vista de esto y dado que una categoría con una topología puede ser vista como un "espacio topológico generalizado", el (ligeramente desafortunado) nombre de *topos* fue dado a las categorías que satisfacen los axiomas de Giraud.

No obstante, los topos seguían considerándose como vehículos primarios para acarrear teorías de cohomología; no sólo cohomología étale, sino también la "fppf", cohomologías cristalinas, entre otras. La potencia de la maquinaria desarrollada por Grothendieck fue ampliamente demostrada por los sustanciales resultados geométricos obtenidos usando estas teorías de cohomología en los años siguientes, culminando en la demostración de P. Deligne [149] de las famosas "conjeturas de Weil" —el análogo $\mod p$ de la hipótesis de Riemann—. La maquinaria en sí fue desarrollada aún más, por ejemplo en el trabajo de J. Giraud [38] en cohomología no abeliana. Pero el significado completo de la sentencia "el topos es más importante que el sitio" parece que nunca fue apreciado por la escuela de Grothendieck. Por ejemplo, aunque eran conscientes de la estructura cartesiana cerrada de los topos ([GV, IV 10]), nunca explotaron al máximo esta idea siguiendo las líneas marcadas por Eilenberg y Kelly [160]. Fue, por lo tanto, necesario que una segunda línea de desarrollo proveyera el ímpetu para la teoría elemental de topos.

El punto de partida de esta segunda línea se considera generalmente que es el artículo pionero de F. W. Lawvere de 1964 sobre la teoría elemental de la categoría de conjuntos [71]. Sin embargo, considero que es necesario ir un poco más atrás, a la demostración del teorema del encaje de Lubkin, Heron Freyd y Mitchell para categorías abelianas [AC]. Fue este teorema el cual, mostrando que hay un conjunto explícito de axiomas elementales que implican todas las propiedades de exactitud (finitas) de categorías de módulos, pavimento el camino para un verdadero desarrollo autónomo de la teoría de categorías como fundamento de las matemáticas.

(Casualmente el teorema del encaje de Freyd y Mitchell se considera frecuentemente como una culminación en lugar de un punto de partida; esto es porque me parece una mala interpretación (o al menos una inversión) de su verdadero significado. Comunmente se piensa que dice "si quieres demostrar algo acerca de una categoría abeliana, puedes asumir que es una categoría de módulos"; mientras que yo creo que su verdadera importancia es "si quieres demostrar algo acerca de categoría de módulos, puedes trabajar en una categoría abeliana en general" —el teorema del encaje asegura que tu resultado será válido en esta generalidad, y olvidando la estructura explícita de la categoría de módulos serás forzado a concentrarte en los aspectos esenciales del problema—. Como ejemplo, compara la demostración módulo teórica del lema de la serpiente en HA con la demostración en categorías abelianas en [CW].)

Este teorema pronto fue seguido por el artículo de Lawvere [71], estableciendo una lista de axiomas elementales los cuales, agregando los axiomas no elementales de completud y pequeñez local, son suficientes para caracterizar a la categoría de conjuntos. (En un artículo subsecuente [72], Lawvere provee una axiomatización similar para la categoría de categorías pequeñas, y D. Schlomiuk [105] hizo lo mismo para la categoría de espacios topológicos.)

Uno bien puede preguntar por qué este artículo no fue seguido inmediatamente por la explosión de actividad que supuso la introducción de los topos elementales seis años después. En retrospectiva, la respuesta es que los axiomas de Lawvere son demasiado especializados: la categoría de conjuntos es un objeto extremadamente útil como fundamento de las matemáticas, pero como objeto de estudio axiomático no es (¡*ritmo* de la actividad de Martin, Solovay, et. al!) tremendamente interesante —es demasiado "rígida" como para tener una estructura interna—. De manera similar, si los axiomas de categorías abelianas hubieran aplicado sólo a la categoría de grupos abelianos, y no a la categoría de módulos o a la de gavillas abelianas, ellos también habrían sido rechazados. Así, lo que se necesitaba para la categoría de conjuntos era una axiomatización que también cubriera a las categorías de functores con valores en conjuntos y categorías de gavillas con valores en conjuntos —es decir, los axiomas de topos elementales—.

En sus artículos subsecuentes ([73] y [75]), Lawvere comienza a investigar la idea de que el conjunto con dos elementos $\{\top, \bot\}$ puede ser visto como un "objeto de valores de verdad" en la categoría de conjuntos; en particular, observó que la presencia de tal objeto en una categoría arbitraria nos permite reducir al axioma de comprensión a un enunciado elemental acerca de funtores adjuntos. La misma idea es el corazón del trabajo de H. Volger ([125] y [126]) sobre lógica y categorías semánticas.

Mientras tanto, el lado del teorema del encaje de esto fue desarrollado por M. Barr [2], quien formuló la noción de *categoría exacta* y la usó como base para un teorema de encaje no aditivo. La noción cercanamente relacionada de *categoría regular* fue formulada independientemente por P. A. Grillet [41] y D. H. Van Osdol [122], quienes la usaron en sus investigaciones sobre teoría general de gavillas; el mismo Barr obsrevó que el teorema de Giraud puede ser visto como algo más que un caso especial de este teorema de encaje. Esto quizás represente (lógicamente, si no cronológicamente) el primer acercamiento de las dos líneas de desarrollo mencionadas antes.

Sin embargo, cerca del mismo tiempo la atención de Lawvere dió un giro hacia los topos de Grothendieck; él observó que todo topos de Grothendieck tiene un objeto de valores de verdad Ω, y que la noción de topología de Grothendieck está cercanamente conectada con endomorfismos de Ω (ver [LH]). Durante los años 1969–70, Lawvere y M. Tierney (quien antes había contribuido a la teoría de categorías exactas) comenzaron a investigar las consecuencias de tomar "existe un objeto de valores de verdad" como un axioma; el resultado fue la teoría elemental de topos. Una proporción notablemente grande de la teoría básica fue desarrollada en ese período de 12 meses, como se hará evidente del gran número de teoremas en los capítulos 1–4 de este libro en cuya demostración se hará referencia a Lawvere y Tierney.

Una vez que estos teoremas fueron conocidos por los matemáticos en general (es decir, después de las lecturas de Lawvere en Zürich y Niece [LN] en el verano de 1970 y la conferencia en Dalhousie [LH] en enero de 1971), fueron inmediatamente aceptados y desarrollados por varias personas. Uno de los primeros y más importantes fue P. Freyd, cuyas lecturas en University of New South Wales [FK] exploraron la teoría de encajes de topos; en retrospectiva esto parece haber sido algo como un callejón sin salida, de que la inversión del metateorema usual, mencionado arriba respecto a categorías abelianas, aplica con incluso más fuerza en la teoría de topos —ya que la gran virtud de los axiomas de topos es su carácter elemental, uno no tiene que apelar a un teorema de encaje no elemental para demostrar hechos elementales acerca de topos. (El teorema de encaje de Freyd no será encontrado en este libro; pero la parte más importante (y elemental) de él que muestra que todo topos puede ser encajado en un topos booleano, es demostrado en Sección 7.5). No obstante, el trabajo de Freyd contiene muchos resultados técnicos importantes; en particular su teorema de caracterización de objetos de números naturales es de suma importancia.

Notas al Lector

Capítulo 0

Preliminares

0.1. Teoría de categorías

0.2. Teoría de gavillas

0.3. Topologías de Grothendieck

0.4. Teorema de Giraud

Ejercicios 0

Capítulo 1

Topos Elementales

1.1. Definición y ejemplos

1.2. Relaciones de equivalencia y morfismos parciales

1.3. La categoría $\mathcal{E}^{\mathrm{op}}$

1.4. Funtores producto fibrado

1.5. Factorización con imagen

Ejercicios 1

Capítulo 2

Teoría de Categorías Interna

2.1. Categorías internas y diagramas

2.2. Límites y colímites internos

2.3. Diagramas en un topos

2.4. Profuntores internos

2.5. Categorías filtrantes

Ejercicios 2

Capítulo 3

Topología y gavillas

3.1. Topología

3.2. Gavillas

3.3. El funtor gavilla asociada

3.4. $\mathcal{E}_j$ como categoría de fracciones

3.5. Ejemplos de topologías

Ejercicios 3

Capítulo 4

Morfismos geométricos

4.1. El teorema de factorización

4.2. La construcción de pegado

4.3. Teorema de Diaconescu

4.4. Morfismos acotados

Ejercicios 4

Capítulo 5

Aspectos lógicos de la teoría de topos

5.1. Topos booleanos

5.2. El axioma de elección

5.3. El axioma (SG)

5.4. El lenguaje de Mitchell y Bénabou

Ejercicios 5

Capítulo 6

Objetos de números naturales

6.1. Definición y propiedades básicas

6.2. Cardinales finitos

6.3. El objeto clasificador

6.4. Teorías algebraicas

6.5. Teorías geométricas

6.6. Objetos de números reales

Ejercicios 6

Capítulo 7

Teoremas de Deligne y Barr

7.1. Puntos

7.2. Topos espaciales

7.3. Topos coherentes

7.4. Teorema de Deligne

7.5. Teorema de Barr

Ejercicios 7

Capítulo 8

Cohomología

8.1. Definiciones básicas

8.2. Cohomología de Čech

8.3. Torsores

8.4. Grupos fundamentales profinitos

Ejercicios 8

Capítulo 9

Teoría de topos y teoría de conjuntos

9.1. Finitud de Kuratowski

9.2. Objetos transitivos

9.3. Teoremas de equiconsistencia

9.4. La construcción filtro-potencia

9.5. Independencia de la hipótesis del continuo

Ejercicios 9

Apéndice A

Categorías localmente internas