Índice general

Capítulo 1

Introducción

La teoría de topos tiene sus orígenes en dos líneas separadas del desarrollo matemático, las cuales permanecieron separadas durante diez años. Para tener una apreciación balanceada de la importancia del tema, creo necesario considerar la historia de estas dos líneas, y entender porque se unieron cuando lo hicieron. Por lo tanto, inicio esta introducción con un pasaje histórico (personal, y sin duda muy sesgado).

La primera de las dos líneas comienza con el surgimiento de la *teoría de gavillas*, originada en 1945 por J. Leray, desarrollada por H. Cartan y A. Weil entre otros, y culminando en el trabajo publicado por J. P. Serre [107], A. Grothendieck [42] y R. Godement [TF]. Como una buena parte del álgebra homológica, la teoría de gavillas originalmente fue concebida como una herramienta para la topología algebraica, para axiomatizar la noción de "sistema local de coeficientes" el cual era esencial para una buena teoría de cohomología de espacios que no son simplemente conexos; y el título completo del libro de Godement índica que aún era vista así en 1958. Sin embargo, antes de esta fecha, la potencia de la teoría de gavillas había sido reconocida por geómetras algebraicos y analíticos; y en años más recientes, su influencia se ha extendido a muchas otras áreas de las matemáticas. (Para tener dos ejemplos bastante diferentes ver [49] y [106].)

Sin embargo, en geometría algebraica fue descubierto rápidamente que la noción topológica de gavilla no era del todo adecuada, ya que la única topología disponible en variedades algebraicas abstractas o esquemas, la topología Zariski, no tenía "suficientes abiertos" para proveer de una buena noción geométrica de localización. En su trabajo sobre técnicas de descenso [43] y el grupo fundamental étale [44], A. Grothendieck observó que reemplazar "inclusión abierta de Zariski" por "morfismo étale" era un paso en la dirección correcta; pero desafortunadamente los esquemas que son étale sobre un esquema dado en general no forman un conjunto parcialmente ordenado. Fue entonces necesario inventar la noción de "topología de Grothendieck" sobre una categoría arbitraria, y la noción generalizada de gavilla para tal topología para dar un marco para el desarrollo de la cohomología étale.

Este marco fue construido durante el “Seminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie” durante 1963–64 por Grothendieck con la asistencia de M. Artin, J. Giraud, J. L. Verdier, y otros. (Las actas de este seminario fueron publicadas en una versión muy alargada [GV], incluyendo algunos resultados notables de P. Deligne, ocho años después.) Entre los resultados más importantes del seminario original fue el teorema de Giraud, que muestra que las categorías de gavillas generalizadas que surgen de esta manera pueden ser completamente caracterizadas por propiedades de exactitud y condiciones de tamaño; a la vista de este resultado, rápidamente se hizo evidente que estas categorías de gavillas eran un tema de estudio más importante que los sitios (= categorías + topologías) que les dan origen. A la vista de esto y dado que una categoría con una topología puede ser vista como un “espacio topológico generalizado”, el (ligeramente desafortunado) nombre de *topos* fue dado a las categorías que satisfacen los axiomas de Giraud.

No obstante, los topos seguían considerándose como vehículos primarios para acarrear teorías de cohomología; no sólo cohomología étale, sino también la “fppf”, cohomologías cristalinas, entre otras. La potencia de la maquinaria desarrollada por Grothendieck fue ampliamente demostrada por los sustanciales resultados geométricos obtenidos usando estas teorías de cohomología en los años siguientes, culminando en la demostración de P. Deligne [149] de las famosas “conjeturas de Weil” —el análogo $\bmod p$ de la hipótesis de Riemann—. La maquinaria en sí fue desarrollada aún más, por ejemplo en el trabajo de J. Giraud [38] en cohomología no abeliana. Pero el significado completo de la sentencia “el topos es más importante que el sitio” parece que nunca fue apreciado por la escuela de Grothendieck. Por ejemplo, aunque eran conscientes de la estructura cartesiana cerrada de los topos ([GV, IV 10]), nunca explotaron al máximo esta idea siguiendo las líneas marcadas por Eilenberg y Kelly [160]. Fue, por lo tanto, necesario que una segunda línea de desarrollo proveyera el ímpetu para la teoría elemental de topos.

El punto de partida de esta segunda línea se considera generalmente que es el artículo pionero de F. W. Lawvere de 1964 sobre la teoría elemental de la categoría de conjuntos [71]. Sin embargo, considero que es necesario ir un poco más atrás, a la demostración del teorema del encaje de Lubkin, Heron Freyd y Mitchell para categorías abelianas [AC]. Fue este teorema el cual, mostrando que hay un conjunto explícito de axiomas elementales que implican todas las propiedades de exactitud (finitas) de categorías de módulos, pavimento el camino para un verdadero desarrollo autónomo de la teoría de categorías como fundamento de las matemáticas.

(Casualmente el teorema del encaje de Freyd y Mitchell se considera frecuentemente como una culminación en lugar de un punto de partida; esto es porque me parece una mala interpretación (o al menos una inversión) de su verdadero significado. Comunmente se piensa que dice “si quieres demostrar algo acerca de una categoría abeliana, puedes asumir que es una categoría de módulos”; mientras que yo creo que su verdadera importancia es “si quieres demostrar algo acerca de categoría de módulos, puedes trabajar en una categoría abeliana en general” —el teorema del encaje asegura que tu resultado será válido en esta generalidad, y olvidando la estructura explícita de la categoría de módulos serás forzado a concentrarte en los aspectos esenciales del problema—. Como ejemplo, compara la demostración módulo teórica del lema de la serpiente en HA con la demostración en categorías abelianas en CW)