

Índice general

Prefacio	V
Introducción	VII
Notas al Lector	XVII
0 Preliminares	1
0.1. Teoría de categorías	1
0.2. Teoría de gavillas	1
0.3. Topologías de Grothendieck	1
0.4. Teorema de Giraud	1
Ejercicios 0	1
1 Topos Elementales	3
1.1. Definición y ejemplos	3
1.2. Relaciones de equivalencia y morfismos parciales	3
1.3. La categoría \mathcal{E}^{op}	3
1.4. Funtores producto fibrado	3
1.5. Factorización con imagen	3
Ejercicios 1	3
2 Teoría de Categorías Interna	5
2.1. Categorías internas y diagramas	5
2.2. Límites y colímites internos	5
2.3. Diagramas en un topos	5
2.4. Profuntores internos	5
2.5. Categorías filtrantes	5
Ejercicios 2	5
3 Topología y gavillas	7
3.1. Topología	7
3.2. Gavillas	7

3.3.	El funtor gavilla asociada	7
3.4.	\mathcal{E}_j como categoría de fracciones	7
3.5.	Ejemplos de topologías	7
	Ejercicios 3	7
4	Morfismos geométricos	9
4.1.	El teorema de factorización	9
4.2.	La construcción de pegado	9
4.3.	Teorema de Diaconescu	9
4.4.	Morfismos acotados	9
	Ejercicios 4	9
5	Aspectos lógicos de la teoría de topos	11
5.1.	Topos booleanos	11
5.2.	El axioma de elección	11
5.3.	El axioma (SG)	11
5.4.	El lenguaje de Mitchell y Bénabou	11
	Ejercicios 5	11
6	Objetos de números naturales	13
6.1.	Definición y propiedades básicas	13
6.2.	Cardinales finitos	13
6.3.	El objeto clasificador	13
6.4.	Teorías algebraicas	13
6.5.	Teorías geométricas	13
6.6.	Objetos de números reales	13
	Ejercicios 6	13
7	Teoremas de Deligne y Barr	15
7.1.	Puntos	15
7.2.	Topos espaciales	15
7.3.	Topos coherentes	15
7.4.	Teorema de Deligne	15
7.5.	Teorema de Barr	15
	Ejercicios 7	15
8	Cohomología	17
8.1.	Definiciones básicas	17
8.2.	Cohomología de Čech	17
8.3.	Torsores	17
8.4.	Grupos fundamentales profinitos	17
	Ejercicios 8	17

9	Teoría de topos y teoría de conjuntos	19
9.1.	Finitud de Kuratowski	19
9.2.	Objetos transitivos	19
9.3.	Teoremas de equiconsistencia	19
9.4.	La construcción filtro-potencia	19
9.5.	Independencia de la hipótesis del continuo	19
	Ejercicios 9	19
A	Categorías localmente internas	21

Notas al Lector

A lo largo de este libro, us sólo sistema de numeración es usado para definiciones, lemas, teoremas, observaciones, etc.; el número $n.p.q$ normalmente denota la q -ésima referencia numerada en la sección p del capítulo n . **Por el momento he cambiado el estilo de numeración por las razones que se comentan en el libro, parece no tener una buena lógica. Por ejemplo, 8.20 es la decima referencia en la sección 8.1. Johnstone afirma que no hy un número que refiera a dos referencias, aún así preferí usar el sistema de numeración que usa \LaTeX por defecto.**

Al final de cada capítulo se encontrarán algunos ejercicios: cerca de diez en cada uno de los primeros capítulos, más en los últimos. Ellos varías considerablemente en dificultad, algunos son completamente rutinarios, mientras otros son un tanto sustanciales. No he dado ninguna indicación de cuáles ejercicios considero más fáciles (el orden es el del material del capítulo al cual refieren), pero he dado muchas pistas en la mayoría de los difíciles. En varios casos, el resultado de un ejercicio es usado ya sea en los ejercicios o el texto de un capítulo posterior; estos ejercicios se distinguen con una daga (\dagger).

El siguiente resumen de interdependencia lógica de varios capítulos puede ser útil para el lector que esté interesado en un tópico en particular. El capítulo 0 contiene un resumen de cierto material de fondo que es requerido para motivar la definición de topos, o para dar una fuente de ejemplos. Los capítulos 1–5 forman el núcleo del libro; de estos capítulos 1–4 siguen un camino más o menos geodésico (con algunas desviaciones como la sección 4.2) de la definición de topos (??) al teorema relativo de Giraud (??) y la existencia de productos fibrados en $\mathfrak{Top}/\mathcal{E}$ (??). La dependencia lógica entre estos cuatro capítulos es entonces bastante cercana a ser un orden lineal.

Sin embargo, la mayoría del material del capítulo 2 (sobre categoría internas) es algo técnico, y algunos lectores lo encontrar difícil en la primera lectura. Recomiendo a esos lectores que omitan todo el capítulo 2, excepto por el teorema ?? (el cual es importante, y tiene aplicaciones en otras áreas además de teoría de categorías internas), y continúen con el capítulo 3. (Hay algunas referencias al capítulo 2 en la sección 3.3, pero puedes regresar a ellas cuando sea necesario.) Luego puedes continuar con la primera sección del capítulo 4, todo el capítulo 5, excepto por algunas partes de la sección 5.3, e incluso las primeras dos secciones del capítulo 6 antes de regresar al capítulo 2.

El capítulo 5 introduce un gran número de conceptos los cuales, aunque son parte de la corriente principal de la teoría de topos, no se involucran en la demostración del

teorema de Giraud relativo. En particular, contiene una descripción del lenguaje interno de un topos, el cual es usado libremente en la segunda mitad del libro.

Los últimos cuatro capítulos presentan varias extensiones y aplicaciones de la teoría básica; originalmente esperaba hacerlos lógicamente independientes, de tal forma que pudieran ser leídos en cualquier orden, pero inevitablemente algunos cruces y conexiones se han establecido entre ellos.. La siguiente tabla resume los importantes:

Antes de leer	se recomienda leer
7.4	6.3 y 6.5
8.1	7.5
8.4	6.2
9.1	6.2 y 6.4

Hay más conexiones entre los ejercicios de estos últimos cuatro capítulos (ver, por ejemplo, los ejercicios ??, ??, ?? y ??).

El apéndice es una presentación de un material que originalmente se pensaba incluir en el capítulo 2; se removió de ahí porque, parece seguro que pronto se convertirá en parte de la corriente principal de la teoría de los topos, es posible que la definición básica de “categoría localmente interna” aún no ha alcanzado su forma final. Puede ser leído en cualquier momento después del capítulo 2; aunque hace muchas referencias a capítulos siguientes.

A lo largo del libro, las referencias a la bibliografía están encerradas entre corchetes. La bibliografía está dividida en cuatro secciones: la sección A consiste de “referencias estándar” a otras áreas de las matemáticas (por ejemplo, a teoría de retículas o topología algebraica) que son usadas cuando un teorema o definición de esa área es citado en el texto. La sección B tiene trabajos de naturaleza general sobre teoría de topos, y algunos artículos introductorios escritos para lectores no especialistas (por ejemplo, [BM] y [WI]). La sección C tiene el resto de las referencias sobre teoría de topos y un número de artículos cercanamente relacionados sobre teoría de categorías, teoría de gavillas, etc. Las secciones B y C juntas tienen como objetivo presentar una lista completa de los artículos publicados hasta ahora en teoría de topos; sin embargo, no incluyo resúmenes de pláticas, ni tesis de doctorado a menos que tengan resultados importantes no publicado en ningún otro lado. La sección D tiene el resto de las referencias citadas en el texto. Las referencias en las secciones A y B están indicadas por un código de dos letras; aquellas en las secciones C y D están enumeradas consecutivamente. En las cuatro secciones, he indicado los *Mathematical Reviews* y números, donde ellos están.

