2003～2004学年第一学期《高等数学》期末考试试题A卷答案

一、填空题：（5×4分）

1、 2； 2、 1 ； 3、 $\dfrac{1}{x}$ ； 4、 2π； 5、 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

二、选择题：（5×4分）

1）、 C ； 2）、 D； 3）、 B； 4）、 A； 5）、 C .

三、计算下列各题：（5×6分）

1) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin x}{x})^{\frac{1}{1-\cos x}} = \lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin x - x}{x}+1)^{\frac{1}{1-\cos x}\frac{\sin x-x}{x}\frac{x}{\sin x-x}}$

$$= \lim_{x\to 0}(\frac{\sin x - x}{x}+1)^{\frac{x}{\sin x-x}\frac{\sin x-x}{x}\frac{2}{x^2}} = e^{-1/3}$$

2） $y^{(2004)} = (\sin^2 x)^{(2004)} = (\sin 2x)^{(2003)} = 2^{2003}\sin(2x+\dfrac{2003\pi}{2}) = -2^{2003}\cos 2x$

3） $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x + 2\cos x}dx = \int \frac{1}{2+\tan x}dx = \int \frac{1}{t+2}d\arctan t = \int \frac{1}{t+2}\frac{1}{t^2+1}dt$

$$= \int(\frac{at+b}{t^2+1}+\frac{c}{t+2})dt = \frac{1}{5}[2x - \frac{1}{2}\ln(\tan^2 x+1)+\ln(\tan x+2)]+C \text{ ；}$$

或 $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x+2\cos x}dx = \frac{2}{5}\int\frac{\sin x+2\cos x}{\sin x+2\cos x}dx + \frac{1}{5}\int\frac{\cos x - 2\sin x}{\sin x+2\cos x}dx$

$$= \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}\ln\left|\sin x+2\cos x\right| + \text{C}.$$

4）对 $x\in[1,+\infty)$，有 $0 \le \ln(1+\dfrac{1}{x}) - \dfrac{1}{1+x} \le \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{x(x+1)} \le \dfrac{1}{x^2}$，由 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$

收敛，可知 $\displaystyle\int_1^{+\infty}[\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{1+x}]\mathrm{d}x$ 的收敛。

5） $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d(\frac{dy}{dx})}{dx} = \dfrac{d(\frac{y'_t}{x'_t})}{dx} = \dfrac{d(-t^2)}{dx} = -2tt'_x = -2t\dfrac{1}{4t^3\ln t} = -\dfrac{1}{2t^2\ln t}$

6）由分部积分可知，

$$\int_a^b xf(x)f'(x)dx = \int_a^b xf(x)d(f(x)) = \frac{1}{2}\int_a^b xd(f^2(x))$$

$$= \frac{x}{2}f^2(x)|_a^b - \frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx = \frac{b}{2}f^2(b) - \frac{a}{2}f^2(a) - \frac{1}{2}\cdot 2$$

$$= -1$$

四、(8分) 1）、切线方程求得为：$16by+9ax=25$ 或: $\dfrac{x}{25/9a}+\dfrac{y}{25/16b}=1$.

2）、 $S = \dfrac{25^2}{2\times16\times9}\dfrac{1}{ab}$,记 $A = \dfrac{2\times16\times9}{25^2\times4}$, $F = \dfrac{1}{S} = Aab = Aa\sqrt{25-9a^2}$,

令 $\frac{dF}{da}=A(\sqrt{25-9a^2}-\frac{9a^2}{\sqrt{25-9a^2}})=\frac{A(25-18a^2)}{\sqrt{25-9a^2}}$ =0,

得 $a=\frac{5\sqrt{2}}{6}$,$b=\frac{5\sqrt{2}}{8}$,即 $P(\frac{5\sqrt{2}}{6},\frac{5\sqrt{2}}{8})$ 为所求.

或 $S=\frac{25^2}{2\times 16\times 9}\frac{1}{ab}$ ，其中 $a=\frac{5}{3}\cos\theta, b=\frac{5}{4}\sin\theta$ 则

$\frac{1}{ab}=\frac{12}{25\sin\theta\cos\theta}=\frac{24}{25\sin 2\theta}$ ，

即 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，有最小值 $S=\frac{25}{12}$.此时 $P(\frac{5\sqrt{2}}{6},\frac{5\sqrt{2}}{8})$ 为所求.

五、（7 分） $V=\pi\int_1^2(x^2-\frac{1}{x^2})dx=\frac{11}{6}\pi$

六、(8 分) （1）因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，且

$F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}\geq 2\sqrt{f(x)\cdot\frac{1}{f(x)}}=2$ 。

（2）由（1）可知 $F'(x)\geq 2>0$ ，所以 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增，又对一切 $x\in[a,b], f(x)>0,$ 所以 $F(a)=\int_b^a\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t=-\int_a^b\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t<0$ ，

$F(b)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t>0$ 由零点定理及 $F(x)$ 的单调性可知：$F(x)=0$ 在 $[a,b]$ 中有且仅有一个实根。

七、（7 分） 因为 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，由积分中值定理知，存在 $\eta\in[\frac{3}{2},2]$，使得

$\frac{f(c)}{2}=f(\eta)(2-\frac{3}{2})=\frac{f(\eta)}{2}$ ，即 $f(c)=f(\eta)$ ，故存在 $[c,\eta](or[\eta,c])\subset[0,2]$ ，$f(x)$ 在 $[c,\eta](or[\eta,c])\subset[0,2]$ 上连续，在 $(c,\eta)(or(\eta,c))\subset(0,2)$ 内可导，由罗尔定理知，存在 $\xi\in(c,\eta)(or(\eta,c))\subset(0,2)$，使得 $f'(\xi)=0$ 。