武汉大学 2014-2015 学年第二学期期末考试线性代数 B 试题（A）

一、（8 分）设 A 与 B 可交换，且 A 可逆, A^* 为 A 的伴随矩阵, 试证明 A^* 与 B 也可交换。

证明 由 $A^* = |A| A^{-1}$ $\quad AB = BA$，得 $A^{-1}B = BA^{-1}$ $\quad$ 故 $A^*B = BA^*$ $\qquad$ 8 分

二、（10 分）设 $A^2 + AB + A = 0$, 其中 $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$，（$a, b, c$ 是互不相等的正实数）求方阵 B .

解 $\quad |A| = \dfrac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$ $\qquad$ 5 分

故由 $A(A+B+E)=0$ 知 $A+B+E=0$， $B = -E - A = \begin{pmatrix} -1-a & -b & -c \\ -c & -1-a & -b \\ -b & -c & -1-a \end{pmatrix}$ 10 分

三、（10 分）设 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, 求 $(A+2E)^{-1}(A^2-4E)$.

解 $\quad (A+2E)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^2 - 4E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} - 4E = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \qquad 6\text{ 分}$$

$$(A+2E)^{-1}(A^2-4E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad 10\text{ 分}$$

或 $(A+2E)^{-1}(A^2-4E) = (A+2E)^{-1}(A+2E)(A-2E) = A - 2E \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ 10 分

四、（8 分）解关于 x 的方程 $D(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (n-2)-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & (n-1)-x \end{vmatrix} = 0$.

解 因为 $D(x)$ 是 $n-1$ 次多项式. 又 $D(k) = 0, (k = 0, 1, 2, \cdots, (n-1).)$

故 $x_k = k, (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$ 为原方程的全部解. $\qquad$ 8 分

五、（12 分）设 $\alpha_1 = (1, -1, 5, 2)$, $\alpha_2 = (-2, 3, 1, 0)$, $\alpha_3 = (4, -5, 9, 4)$, $\alpha_4 = (0, 4, 2, -3)$, $\alpha_5 = (-7, 18, 2, -8)$，求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 的一个最大无关组，并用最大无关组线性表出向量组中其它的向量。

解 令 $A=\left[\alpha_1' \ \alpha_2' \ \alpha_3' \ \alpha_4' \ \alpha_5'\right]$，对 A 作初等行变换：$A\to\begin{bmatrix}1&0&2&0&-1\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$ 8 分

故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 是所求的一个最大无关组，

且有 $\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2+0\alpha_4$, $\alpha_5=-\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_4$ 12 分

六、(10 分)在 R^4 中, 向量 α 基: $\alpha_1=(1,1,0,0),\alpha_2=(0,1,1,0),\alpha_3=(0,0,1,1),\alpha_4=(0,0,0,1),$ 下的坐标为 $(2,3,1,2)$; 求 α 在基: $\beta_1=(1,2,0,0),\beta_2=(0,2,3,0),\beta_3=(0,0,2,4),$ $\beta_4=(3,0,0,2)$ 下的坐标.

解 $\alpha=($ 2 , 5 , 4 设 $\alpha=x_1\beta_1+\cdots+x_4\beta_4$，得 $\begin{pmatrix}1&0&0&3\\2&2&0&0\\0&3&2&0\\0&0&4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\\4\\3\end{pmatrix}$ 5 分

它有唯一解: $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(\frac{13}{8},\frac{7}{8},\frac{11}{16},\frac{1}{8})$.

故 α 在基 $\beta_1,\cdots,\beta_4$ 下的坐标为: $(\frac{13}{8},\frac{7}{8},\frac{11}{16},\frac{1}{8})$ 10 分

七、(15 分) 设有方程组 $\begin{cases}x_1+3x_2+x_3=0\\3x_1+2x_2+3x_3=-1\\-x_1+4x_2+mx_3=k\end{cases}$，问 m,k 为何值时, 方程组有唯一解?无解? 有无穷多解?在有无穷多解时, 求出一般解.

解 $\overline{A}=\begin{bmatrix}1&3&1&0\\3&2&3&-1\\-1&4&m&k\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&1&0\\0&1&0&\frac{1}{7}\\0&0&m+1&k-1\end{bmatrix}$ 5 分

①当 $m\neq-1$ 时, 方程组有唯一解,

②当 $m=-1,k\neq1$ 时, 方程组无解.

③当 $m=-1$ 且 $k=1$ 时, 方程组有无穷多解.

此时 $\overline{A}\to\begin{bmatrix}1&3&1&0\\0&1&0&\frac{1}{7}\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1&-\frac{3}{7}\\0&1&0&\frac{1}{7}\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ $\therefore X=k\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{3}{7}\\\frac{1}{7}\\0\end{bmatrix}$ 15 分

八、(15 分) 用正交变换化二次型 $f=x_1^2+x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 为标准形，写出所用正交变换及 f 的标准形，并指出 f 是否为正定二次型。

解 $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-2$ ， $\lambda_3=4$

$e_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)^T$, $e_2=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$, $e_3=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^T$ 10 分

在正交变换$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$之下。

f 化成标准形：$2y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2$，f 不是正定二次型。 15 分

九、(7 分) 设向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性表出，但不能由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{r-1}$ 线性表出，证明：向量组 $U: \alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 与向量组 $V: \alpha_1, \cdots, \alpha_{r-1}, \beta$ 等价。

证明　由已知 V 可由 U 线性表出，而 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{r-1}$ 可由 V 线性表出，因而只要能证明 α_r 可由 V 线性表出则 U 与 V 等价

设 $\beta = k_1\alpha_1 + \cdots + k_{r-1}\alpha_{r-1} + k_r\alpha_r$ 则 $k_r \neq 0$. 否则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{r-1}$ 线性表出，与已知矛盾故 $k_r \neq 0$. 于是 $\alpha_r = -\frac{1}{k_r}(\beta - k_1\alpha_1 - \cdots - k_{r-1}\alpha_{r-1})$, 即 α_r 可由 V 线性表出，所以向量组 $U: \alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 与向量组 $V: \alpha_1, \cdots, \alpha_{r-1}, \beta$ 等价。 7 分

十、(5 分) 设有实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^{\mathrm{T}}AX$，式中 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, $A = (a_{ij})_{nxn}$，并设 A 的最小特征值为 λ_1，最大特征值为 λ_2，试求在附加条件 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = R^2$ (R 为实数) 之下，$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的最小值与最大值.

解　设 A 的特征值依次是 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，存在正交矩阵 T，

经变换 $X = TY, (Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T)$，后 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$

且 $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = Y^TY = X^TT^TTX = X^TX = R^2$

则 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \geq \lambda_1(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) = \lambda_1 R^2$，取 $\alpha = T\begin{pmatrix} \mathrm{R} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, 则

$\alpha' A\alpha = \lambda_1 R^2$, 故所求最小值为 $\lambda_1 R^2$，类似地

$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leq \lambda_2(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) = \lambda_2 R^2$

取 $\beta = T\begin{pmatrix} \mathrm{R} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^T$, 则 $\beta' A\beta = \lambda_2 R^2$ 故所求最大值为 $\lambda_2 R^2$。 5 分