第4章　向量空间与线性变换

Linear Algebra

黄 正 华

Email: huangzh@whu.edu.cn

武汉大学　数学与统计学院

December 8, 2016

这一章准备讲什么?

(1) 把 n 维实向量空间装配上**内积**, 得到 n **维欧氏空间** $\mathbb{R}^n$;

这一章准备讲什么?

(1) 把 n 维实向量空间装配上**内积**, 得到 n **维欧氏空间** $\mathbb{R}^n$;

(2) 再进一步推广, 得到更一般的、抽象的**线性空间**的概念.

这一章准备讲什么?

(1) 把 n 维实向量空间装配上**内积**, 得到 n **维欧氏空间** $\mathbb{R}^n$;

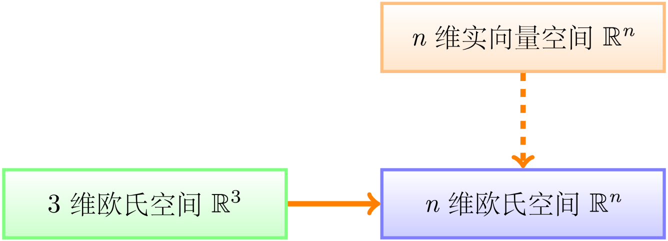
(2) 再进一步推广, 得到更一般的、抽象的**线性空间**的概念.

$\boxed{3 \text{ 维欧氏空间 } \mathbb{R}^3}$

这一章准备讲什么?

(1) 把 n 维实向量空间装配上**内积**, 得到 n **维欧氏空间** $\mathbb{R}^n$;

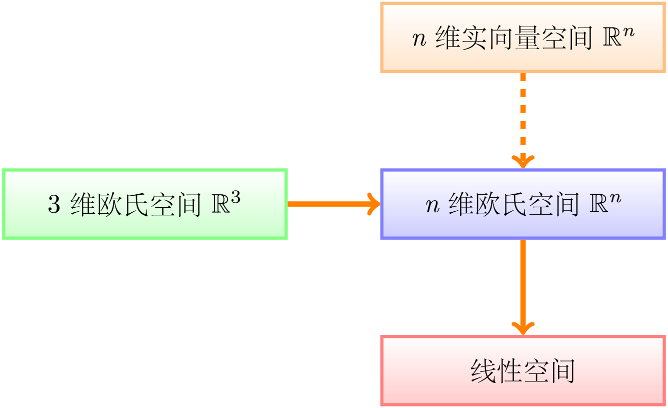
(2) 再进一步推广, 得到更一般的、抽象的**线性空间**的概念.



这一章准备讲什么?

(1) 把 n 维实向量空间装配上**内积**, 得到 n **维欧氏空间** $\mathbb{R}^n$;

(2) 再进一步推广, 得到更一般的、抽象的**线性空间**的概念.



前面我们建立了 "n 维实向量空间 $\mathbb{R}^n$" 的概念, 但它还不是三维欧氏空间的推广, 因为它还缺少向量的长度、夹角、垂直等几何概念 (几何建立的早期目的就是讨论长度、夹角等度量性质).

前面我们建立了“n 维实向量空间 $\mathbb{R}^n$”的概念, 但它还不是三维欧氏空间的推广, 因为它还缺少向量的长度、夹角、垂直等几何概念 (几何建立的早期目的就是讨论长度、夹角等度量性质).

长度、夹角这几个概念都可以由内积导出, 故只需要在 $\mathbb{R}^n$ 中装配上内积的概念即可, 从而得到 n 维欧几里得空间的概念.

前面我们建立了 “n 维实向量空间 $\mathbb{R}^n$” 的概念, 但它还不是三维欧氏空间的推广, 因为它还缺少向量的长度、夹角、垂直等几何概念 (几何建立的早期目的就是讨论长度、夹角等度量性质).

长度、夹角这几个概念都可以由内积导出, 故只需要在 $\mathbb{R}^n$ 中装配上内积的概念即可, 从而得到 n 维欧几里得空间的概念.

$\mathbb{R}^n$ 中的极大无关组, 可以线性表示 $\mathbb{R}^n$ 中的任何一个向量, 且表示的系数是唯一的, 这就如同三维欧氏空间中的坐标系的功能.

前面我们建立了 “n 维实向量空间 $\mathbb{R}^n$” 的概念, 但它还不是三维欧氏空间的推广, 因为它还缺少向量的长度、夹角、垂直等几何概念 (几何建立的早期目的就是讨论长度、夹角等度量性质).

长度、夹角这几个概念都可以由内积导出, 故只需要在 $\mathbb{R}^n$ 中装配上内积的概念即可, 从而得到 n 维欧几里得空间的概念.

$\mathbb{R}^n$ 中的极大无关组, 可以线性表示 $\mathbb{R}^n$ 中的任何一个向量, 且表示的系数是唯一的, 这就如同三维欧氏空间中的坐标系的功能.

这个现象在别的地方也会发生.

例如在 2×2 维实矩阵空间 $\mathbb{R}^{2\times 2}$, 矩阵

$$\boldsymbol{E}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{E}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{E}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{E}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

是线性无关的.

例如在 2×2 维实矩阵空间 $\mathbb{R}^{2\times 2}$, 矩阵

$$\boldsymbol{E}_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

是线性无关的.

事实上, 设

$$k_1\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}+k_4\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=\mathbf{0},$$

只能得到 $k_1=k_2=k_3=k_4=0$;

例如在 2×2 维实矩阵空间 $\mathbb{R}^{2\times 2}$, 矩阵

$$\boldsymbol{E}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{E}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{E}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{E}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

是线性无关的.

事实上, 设

$$k_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + k_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

只能得到 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$; 而且可以线性组合出 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中的任何一个矩阵,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

例如在 2×2 维实矩阵空间 $\mathbb{R}^{2\times 2}$, 矩阵

$$\boldsymbol{E}_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

是线性无关的.

事实上, 设

$$k_1\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}+k_4\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=\mathbf{0},$$

只能得到 $k_1=k_2=k_3=k_4=0$; 而且可以线性组合出 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中的任何一个矩阵,

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},$$

这表明这一组矩阵 $\boldsymbol{E}_{11}$, $\boldsymbol{E}_{12}$, $\boldsymbol{E}_{21}$, $\boldsymbol{E}_{22}$ 是一个极大无关组, 具备坐标系的功能.

所有次数不超过 n 的多项式函数的集合 $\mathbb{R}[x]_n$ 中, 函数

$$1, \quad x, \quad x^2, \quad \cdots, \quad x^n,$$

显然可以视为一个极大无关组, 具备坐标系的功能.

所有次数不超过 n 的多项式函数的集合 $\mathbb{R}[x]_n$ 中, 函数

$$1, \quad x, \quad x^2, \quad \cdots, \quad x^n,$$

显然可以视为一个极大无关组, 具备坐标系的功能.

这些与空间 $\mathbb{R}^n$ 相仿的特点, 意味着可以把 $\mathbb{R}^{2\times 2}$, $\mathbb{R}[x]_n$ 等视为一个向量空间来研究, 这就产生了线性空间 (也称为向量空间) 的概念.

Outline

- 本节关键词: 基, 坐标, 过渡矩阵.

- 本节关键词: 基, 坐标, 过渡矩阵.
- 主要内容:
  - 向量空间的基, 就是其极大无关组, 具备坐标系的功能.

- 本节关键词: 基, 坐标, 过渡矩阵.
- 主要内容:
  - 向量空间的基, 就是其极大无关组, 具备坐标系的功能.
  - 基不唯一.

- 本节关键词: 基, 坐标, 过渡矩阵.
- 主要内容:
  - 向量空间的基, 就是其极大无关组, 具备坐标系的功能.
  - 基不唯一.
  - 不同的基下的坐标, 它们之间的关系由过渡矩阵转化.

定义 1.1

设有序向量组 $B = \{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n\} \subset \mathbb{R}^n$, 如果 B 线性无关, 且 $\mathbb{R}^n$ 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 均可由 B 线性表示, 即

$$\boldsymbol{\alpha} = a_1\boldsymbol{\beta}_1 + a_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{\beta}_n,$$

就称 B 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基 (或基底),

定义 1.1

设有序向量组 $B=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}\subset\mathbb{R}^n$, 如果 B 线性无关, 且 $\mathbb{R}^n$ 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 均可由 B 线性表示, 即

$$\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{\beta}_1+a_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{\beta}_n,$$

就称 B 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基 (或基底), 有序数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 关于基 B (或说在基 B 下) 的坐标,

定义 1.1

设有序向量组 $B=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}\subset\mathbb{R}^n$, 如果 B 线性无关, 且 $\mathbb{R}^n$ 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 均可由 B 线性表示, 即

$$\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{\beta}_1+a_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{\beta}_n,$$

就称 B 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基 (或基底), 有序数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 关于基 B (或说在基 B 下) 的坐标, 记作

$$\boldsymbol{\alpha}_B=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\qquad \boldsymbol{\alpha}_B=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}},$$

并称之为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的坐标向量.

- $\mathbb{R}^n$ 的基不是唯一的;

- $\mathbb{R}^n$ 的基不是唯一的;
- 基本单位向量组

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0), \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

称为 $\mathbb{R}^n$ 的自然基或标准基.

- $\mathbb{R}^n$ 的基不是唯一的;
- 基本单位向量组

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0), \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

称为 $\mathbb{R}^n$ 的自然基或标准基.

- 本书对于向量及其坐标, 常采用列向量的形式 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$ 表示, 即

$$\boldsymbol{\alpha} = \left(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n\right) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

定理 1.2

设 $B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，且

$$\begin{cases} \boldsymbol{\eta}_1 = a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{21}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n, \\ \boldsymbol{\eta}_2 = a_{12}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n, \\ \qquad\vdots \\ \boldsymbol{\eta}_n = a_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n, \end{cases}$$

则 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 线性无关的充要条件是

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

证: 由已知得

$$(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

证: 由已知得

$$(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

记矩阵 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$, $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n)$,

证: 由已知得

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

记矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$, $\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)$, 则

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}.$$

证: 由已知得

$$(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

记矩阵 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$, $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n)$, 则

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}.$$

由已知条件得 $\boldsymbol{B}$ 可逆, 故 $\boldsymbol{C}$ 可逆的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

证: 由已知得

$$(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

记矩阵 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$, $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n)$, 则

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}.$$

由已知条件得 $\boldsymbol{B}$ 可逆, 故 $\boldsymbol{C}$ 可逆的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 可逆. 而 $\boldsymbol{C}$ 可逆等价于其列向量 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$ 线性无关. 得证. □

定义 1.3

设 $\mathbb{R}^n$ 的两组基 $B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 和 $B_2=\{\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n\}$ 满足关系式

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

定义 1.3

设 $\mathbb{R}^n$ 的两组基 $B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 和 $B_2=\{\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n\}$ 满足关系式

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

则矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为旧基 B_1 到新基 B_2 的过渡矩阵,

定义 1.3

设 $\mathbb{R}^n$ 的两组基 $B_1 = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 和 $B_2 = \{\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n\}$ 满足关系式

$$(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

则矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为旧基 B_1 到新基 B_2 的过渡矩阵, 或称 $\boldsymbol{A}$ 是基 B_1 变为基 B_2 的变换矩阵.

定义 1.3

设 $\mathbb{R}^n$ 的两组基 $B_1 = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 和 $B_2 = \{\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n\}$ 满足关系式

$$(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

则矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为旧基 B_1 到新基 B_2 的过渡矩阵, 或称 $\boldsymbol{A}$ 是基 B_1 变为基 B_2 的变换矩阵.

☞ 过渡矩阵当然是可逆的.

定理 1.4

设向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在两组基 $B_1 = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 和 $B_2 = \{\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n\}$ 下的坐标分别为

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \quad 和 \quad \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}.$$

基 B_1 到 B_2 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \quad 或 \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}.$$

证:

$$\boldsymbol{\alpha} = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

证:

$$\boldsymbol{\alpha} = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n]\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

证:

$$\boldsymbol{\alpha} = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$= [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n]\boldsymbol{A} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

证:

$$\boldsymbol{\alpha} = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$= [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n]\boldsymbol{A} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n] \left(\boldsymbol{A} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right),$$

证:

$$\boldsymbol{\alpha} = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$= [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n]\boldsymbol{A} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n] \left(\boldsymbol{A} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right),$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标是唯一的,

证:

$$\boldsymbol{\alpha} = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$= [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n] \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n] \left(\boldsymbol{A} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right),$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标是唯一的， 故

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \quad 或 \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}. \quad \square$$

例 1.5

已知 $\mathbb{R}^3$ 的一组基 $B_2=\left\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\right\}$ 为 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_2=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_3=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$, 求自然基 $B_1=\left\{\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3\right\}$ 到基 B_2 的过渡矩阵 $\boldsymbol{A}$.

例 1.5

已知 $\mathbb{R}^3$ 的一组基 $B_2 = \{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3\}$ 为 $\boldsymbol{\beta}_1 = (1,2,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_2 = (1,-1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_3 = (1,0,-1)^{\mathrm{T}}$, 求自然基 $B_1 = \{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3\}$ 到基 B_2 的过渡矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解: 由

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

例 1.5

已知 $\mathbb{R}^3$ 的一组基 $B_2 = \{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3\}$ 为 $\boldsymbol{\beta}_1 = (1,2,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_2 = (1,-1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_3 = (1,0,-1)^{\mathrm{T}}$, 求自然基 $B_1 = \{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3\}$ 到基 B_2 的过渡矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解: 由

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

得过渡矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

例 1.5

已知 $\mathbb{R}^3$ 的一组基 $B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$ 为 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_2=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_3=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$, 求自然基 $B_1=\{\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3\}$ 到基 B_2 的过渡矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解: 由

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix},$$

得过渡矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}.$$

☞ 在 $\mathbb{R}^n$ 中, 由自然基 $B_1=\{\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n\}$ 到基 $B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{A}$, 就是将 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\beta}_n$ 按列排成的矩阵.

例 1.5

已知 $\mathbb{R}^3$ 的一组基 $B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$ 为 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_2=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_3=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$, 求自然基 $B_1=\{\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3\}$ 到基 B_2 的过渡矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解: 由

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix},$$

得过渡矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}.$$

☞ 在 $\mathbb{R}^n$ 中, 由自然基 $B_1=\{\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n\}$ 到基 $B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{A}$, 就是将 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\beta}_n$ 按列排成的矩阵. 即

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n).$$

例 1.6

已知 $\mathbb{R}^3$ 的两组基为 $B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 及 $B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$, 其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\beta}_2=(0,1,-1)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\beta}_3=(1,2,0)^{\mathrm{T}}.$$

(i) 求基 B_1 到基 B_2 的过渡矩阵 $\boldsymbol{A}$;

例 1.6

已知 $\mathbb{R}^3$ 的两组基为 $B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 及 $B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$, 其中

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}, &&\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}, &&\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}},\\
&\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}, &&\boldsymbol{\beta}_2=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}, &&\boldsymbol{\beta}_3=(1,2,0)^{\mathrm{T}}.
\end{aligned}$$

(i) 求基 B_1 到基 B_2 的过渡矩阵 $\boldsymbol{A}$;

(ii) 已知 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B_1 下的坐标为 $(1,-2,-1)^{\mathrm{T}}$, 求 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B_2 下的坐标.

例 1.6

已知 $\mathbb{R}^3$ 的两组基为 $B_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 及 $B_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$, 其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\beta}_2=(0,1,-1)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\beta}_3=(1,2,0)^{\mathrm{T}}.$$

(i) 求基 B_1 到基 B_2 的过渡矩阵 $\boldsymbol{A}$;

(ii) 已知 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B_1 下的坐标为 $(1,-2,-1)^{\mathrm{T}}$, 求 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B_2 下的坐标.

解: (i) 设

$$\left(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\right)=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right)\boldsymbol{A},$$

例 1.6

已知 $\mathbb{R}^3$ 的两组基为 $B_1 = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$ 及 $B_2 = \{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3\}$, 其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1,1)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{\alpha}_3 = (0,0,1)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\beta}_1 = (1,0,1)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{\beta}_2 = (0,1,-1)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{\beta}_3 = (1,2,0)^{\mathrm{T}}.$$

(i) 求基 B_1 到基 B_2 的过渡矩阵 $\boldsymbol{A}$;

(ii) 已知 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B_1 下的坐标为 $(1,-2,-1)^{\mathrm{T}}$, 求 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B_2 下的坐标.

解: (i) 设

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A},$$

即

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{A},$$

故

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}.$$

故

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}.$$

由

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&1\\1&1&0&0&1&2\\1&1&1&1&-1&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&1\\0&1&0&-1&1&1\\0&0&1&1&-2&-2\end{array}\right),$$

故

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}.$$

由

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&1\\1&1&0&0&1&2\\1&1&1&1&-1&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&1\\0&1&0&-1&1&1\\0&0&1&1&-2&-2\end{array}\right),$$

故

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\1&-2&-2\end{pmatrix}.$$

(ii) 设所求坐标为 $(y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$,

(ii) 设所求坐标为 $(y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$, 则

$$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

(ii) 设所求坐标为 $(y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$, 则

$$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

代入 $(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A}$, 得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

(ii) 设所求坐标为 $(y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$, 则

$$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

代入 $(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A}$, 得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

故

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(ii) 设所求坐标为 $(y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$, 则

$$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

代入 $(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A}$, 得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

故

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Outline

Outline

怎样几何地看待 n 维实向量空间? 比如, 是否可以讨论 n 维向量的垂直、平行等概念?

怎样几何地看待 n 维实向量空间? 比如, 是否可以讨论 n 维向量的垂直、平行等概念?

- 这需要讨论向量的夹角、长度等概念.

怎样几何地看待 n 维实向量空间? 比如, 是否可以讨论 n 维向量的垂直、平行等概念?

- 这需要讨论向量的夹角、长度等概念.
- 内积的概念讨论, 方便地给出了长度和夹角的概念.

怎样几何地看待 n 维实向量空间? 比如, 是否可以讨论 n 维向量的垂直、平行等概念?

- 这需要讨论向量的夹角、长度等概念.
- 内积的概念讨论, 方便地给出了长度和夹角的概念.
- 装配了内积的 n 维实向量空间, 称为欧几里德空间.

怎样几何地看待 n 维实向量空间? 比如, 是否可以讨论 n 维向量的垂直、平行等概念?

- 这需要讨论向量的夹角、长度等概念.
- 内积的概念讨论, 方便地给出了长度和夹角的概念.
- 装配了内积的 n 维实向量空间, 称为欧几里德空间.

☞ 用几何的观念, 理解和研究代数问题.

在解析几何中, 设 $\boldsymbol{\alpha} = (x_1, y_1, z_1)$, $\boldsymbol{\beta} = (x_2, y_2, z_2)$, 它们的数量积 (又称内积) 为

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = \|\boldsymbol{\alpha}\| \|\boldsymbol{\beta}\| \cos\theta$$

在解析几何中, 设 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,y_1,z_1)$, $\boldsymbol{\beta}=(x_2,y_2,z_2)$, 它们的数量积 (又称内积) 为

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|\cos\theta=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2,$$

在解析几何中, 设 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,y_1,z_1)$, $\boldsymbol{\beta}=(x_2,y_2,z_2)$, 它们的数量积 (又称内积) 为

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|\cos\theta=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2,$$

其中 θ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角.

在解析几何中, 设 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,y_1,z_1)$, $\boldsymbol{\beta}=(x_2,y_2,z_2)$, 它们的数量积 (又称内积) 为

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|\cos\theta=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2,$$

其中 θ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角.

有了数量积 (内积) 的概念, 向量的长度和夹角就可以表示为

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|=\sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})},$$

$$\theta=\arccos\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|}.$$

定义 2.1

在 n 维向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 对于 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$, 我们规定 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积为

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n. \tag{1}$$

定义 2.1

在 n 维向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 对于 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$, 我们规定 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积为

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n. \tag{1}$$

当 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 为列向量时,

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\beta}$$

定义 2.1

在 n 维向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 对于 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$, 我们规定 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积为

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n. \tag{1}$$

当 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 为列向量时,

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha}.$$

内积具有下列运算性质:

(i) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$;

(ii) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$;

(iii) $(k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$;

(iv) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\geqslant 0$, 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 时, $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=0$.

其中 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}\in\mathbb{R}^n$, $k\in\mathbb{R}$.

内积具有下列运算性质:

(i) $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})$;

(ii) $(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}) + (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$;

(iii) $(k\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = k(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$;

(iv) $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) \geqslant 0$, 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ 时, $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) = 0$.

其中 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{R}$.

定义 2.2

在 n 维向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度定义为

$$\|\boldsymbol{\alpha}\| = \sqrt{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})}$$

定理 2.3

对任意 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^n$ 和任意 $k \in \mathbb{R}$ 有:

1. $\|k\boldsymbol{\alpha}\| = |k|\|\boldsymbol{\alpha}\|$;
2. $|(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})| \leqslant \|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|$ (*Cauchy-Schwarz* 不等式);
3. $\|\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}\| \leqslant \|\boldsymbol{\alpha}\| + \|\boldsymbol{\beta}\|$ (三角不等式).

定义 2.4

向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角定义为

$$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = \arccos \frac{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{\|\boldsymbol{\alpha}\| \|\boldsymbol{\beta}\|}.$$

定义 2.4

向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角定义为

$$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle = \arccos\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|}.$$

定义 2.5

$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle = \frac{\pi}{2}$, 则称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交 (orthogonal) 或垂直. 记为 $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$.

定义 2.4

向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角定义为

$$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle = \arccos\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|}.$$

定义 2.5

$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle = \frac{\pi}{2}$, 则称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交 (orthogonal) 或垂直. 记为 $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$.

定理 2.6

非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交的充要条件是

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = 0.$$

定义 2.4

向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角定义为

$$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\arccos\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|}.$$

定义 2.5

$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\frac{\pi}{2}$, 则称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交 (orthogonal) 或垂直. 记为 $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$.

定理 2.6

非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交的充要条件是

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0.$$

零向量与任何向量的内积为零,

定义 2.4

向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角定义为

$$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = \arccos \frac{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{\|\boldsymbol{\alpha}\| \|\boldsymbol{\beta}\|}.$$

定义 2.5

$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = \frac{\pi}{2}$, 则称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交 (orthogonal) 或垂直. 记为 $\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\beta}$.

定理 2.6

非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交的充要条件是

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0.$$

零向量与任何向量的内积为零, 故零向量与任何向量正交.

定义 2.7

定义了内积运算的 n 维实向量空间, 称为 n 维欧几里德空间, 简称欧氏空间, 仍记作 $\mathbb{R}^n$.

Outline

1. $\mathbb{R}^n$ 的基与向量关于基的坐标
2. $\mathbb{R}^n$ 中向量的内积　标准正交基和正交矩阵
   - n 维实向量的内积, 欧氏空间
   - 标准正交基
   - 施密特正交化方法
   - 正交矩阵及其性质
3. 线性空间的定义及简单性质
4. 线性子空间
5. 线性空间的基　维数　向量的坐标

定理 2.8

$\mathbb{R}^n$ 中两两正交且不含零向量的向量组 (称为非零正交向量组) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 是线性无关的.

定理 2.8

$\mathbb{R}^n$ 中两两正交且不含零向量的向量组 (称为非零正交向量组) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 是线性无关的.

证: 设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0},$$

定理 2.8

$\mathbb{R}^n$ 中两两正交且不含零向量的向量组 (称为非零正交向量组) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 是线性无关的.

证: 设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0},$$

则

$$\left(\boldsymbol{\alpha}_i, k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s\right) = k_i\left(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_i\right)$$

定理 2.8

$\mathbb{R}^n$ 中两两正交且不含零向量的向量组 (称为非零正交向量组) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 是线性无关的.

证: 设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0},$$

则

$$\big(\boldsymbol{\alpha}_i, k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s\big) = k_i\big(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_i\big) = 0,$$

定理 2.8

$\mathbb{R}^n$ 中两两正交且不含零向量的向量组 (称为<u>非零正交向量组</u>) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 是线性无关的.

证: 设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0},$$

则

$$\big(\boldsymbol{\alpha}_i, k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s\big) = k_i\big(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_i\big) = 0,$$

注意到 $\boldsymbol{\alpha}_i \neq \mathbf{0}$, 则 $\big(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_i\big) > 0$,

定理 2.8

$\mathbb{R}^n$ 中两两正交且不含零向量的向量组 (称为非零正交向量组) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 是线性无关的.

证: 设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0},$$

则

$$\big(\boldsymbol{\alpha}_i, k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s\big) = k_i\big(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_i\big) = 0,$$

注意到 $\boldsymbol{\alpha}_i \neq \mathbf{0}$, 则 $\big(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_i\big) > 0$, 故

$$k_i = 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, s.$$

定理 2.8

$\mathbb{R}^n$ 中两两正交且不含零向量的向量组 (称为非零正交向量组) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 是线性无关的.

证: 设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0},$$

则

$$\big(\boldsymbol{\alpha}_i, k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s\big) = k_i\big(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_i\big) = 0,$$

注意到 $\boldsymbol{\alpha}_i \neq \mathbf{0}$, 则 $\big(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_i\big) > 0$, 故

$$k_i = 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, s.$$

得证 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关. □

定理 2.8

$\mathbb{R}^n$ 中两两正交且不含零向量的向量组 (称为非零正交向量组) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 是线性无关的.

证: 设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0},$$

则

$$\big(\boldsymbol{\alpha}_i, k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s\big) = k_i\big(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_i\big) = 0,$$

注意到 $\boldsymbol{\alpha}_i \neq \mathbf{0}$, 则 $\big(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_i\big) > 0$, 故

$$k_i = 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, s.$$

得证 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关. □

☞ 正交关系强于线性无关关系.

定义 2.9

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n \in \mathbb{R}^n$, 若

$$(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n. \tag{2}$$

定义 2.9

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n \in \mathbb{R}^n$, 若

$$(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n. \tag{2}$$

则称 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基.

定义 2.9

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n \in \mathbb{R}^n$, 若

$$(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n. \tag{2}$$

则称 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基.

或者记 (2) 式为

$$(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) = \delta_{ij}.$$

定义 2.9

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n \in \mathbb{R}^n$, 若

$$(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n. \tag{2}$$

则称 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基.

或者记 (2) 式为

$$(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) = \delta_{ij}.$$

比如 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 就是 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基.

定义 2.9

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n \in \mathbb{R}^n$, 若

$$(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n. \tag{2}$$

则称 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基.

或者记 (2) 式为

$$(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) = \delta_{ij}.$$

比如 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 就是 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基. 但标准正交基不唯一.

例 2.10

设 $B = \left\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\right\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基, 求 $\mathbb{R}^n$ 中向量 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 B 下的坐标.

例 2.10

设 $B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基, 求 $\mathbb{R}^n$ 中向量 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 B 下的坐标.

解: 设

$$\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

例 2.10

设 $B=\left\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\right\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基, 求 $\mathbb{R}^n$ 中向量 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 B 下的坐标.

解: 设

$$\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

则

$$\left(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1\right)$$

例 2.10

设 $B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基, 求 $\mathbb{R}^n$ 中向量 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 B 下的坐标.

解: 设

$$\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

则

$$(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1)=(x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_1)$$

例 2.10

设 $B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基, 求 $\mathbb{R}^n$ 中向量 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 B 下的坐标.

解: 设

$$\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

则

$$(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1)=(x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_1)=(x_1\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)$$

例 2.10

设 $B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基, 求 $\mathbb{R}^n$ 中向量 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 B 下的坐标.

解: 设

$$\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

则

$$(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1)=(x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_1)=(x_1\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)=x_1,$$

例 2.10

设 $B = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基, 求 $\mathbb{R}^n$ 中向量 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 B 下的坐标.

解: 设

$$\boldsymbol{\beta} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

则

$$(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1) = (x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_1) = (x_1\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1) = x_1,$$

同理, $x_2 = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_2), \cdots, x_n = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_n)$. □

Outline

问题:

已知一组线性无关的 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$, $(m \leqslant n)$, 求一个标准正交向量组 $\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_m$, 并且满足:

$\forall i \leqslant m$, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_i$ 与向量组 $\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_i$ 等价.

[1]也称 Gram-Schmidt 正交化过程 (Gram–Schmidt Orthogonalization Procedure). 该方法以 Jørgen P. Gram 和 Erhard Schmidt 命名, 它更早出现在拉普拉斯和柯西的文章中.

问题:

已知一组线性无关的 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$, $(m \leqslant n)$, 求一个标准正交向量组 $\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_m$, 并且满足:

$\forall i \leqslant m$, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_i$ 与向量组 $\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_i$ 等价.

施密特正交化过程[1]给出了解决上述问题的一个方法.

[1]也称 Gram-Schmidt 正交化过程 (Gram–Schmidt Orthogonalization Procedure). 该方法以 Jørgen P. Gram 和 Erhard Schmidt 命名, 它更早出现在拉普拉斯和柯西的文章中.

问题:

已知一组线性无关的 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, (m \leqslant n)$, 求一个标准正交向量组 $\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_m$, 并且满足:

$\forall i \leqslant m$, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_i$ 与向量组 $\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_i$ 等价.

施密特正交化过程[1]给出了解决上述问题的一个方法.

从几何上看, 如果空间 $\mathbb{R}^n$ 上的一组向量能够组成一个**子空间**, 那么这一组向量就称为这个子空间的一个基.

[1]也称 Gram-Schmidt 正交化过程 (Gram–Schmidt Orthogonalization Procedure). 该方法以 Jørgen P. Gram 和 Erhard Schmidt 命名, 它更早出现在拉普拉斯和柯西的文章中.

问题:

已知一组线性无关的 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$, $(m \leqslant n)$, 求一个标准正交向量组 $\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_m$, 并且满足:

$\forall i \leqslant m$, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_i$ 与向量组 $\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_i$ 等价.

施密特正交化过程[1]给出了解决上述问题的一个方法.

从几何上看, 如果空间 $\mathbb{R}^n$ 上的一组向量能够组成一个**子空间**, 那么这一组向量就称为这个子空间的一个基. 该方法是通过这一子空间上的一个基, 得出子空间的一个标准正交基,

[1]也称 Gram-Schmidt 正交化过程 (Gram–Schmidt Orthogonalization Procedure). 该方法以 Jørgen P. Gram 和 Erhard Schmidt 命名, 它更早出现在拉普拉斯和柯西的文章中.

问题:

已知一组线性无关的 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$, $(m \leqslant n)$, 求一个标准正交向量组 $\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_m$, 并且满足:

$\forall i \leqslant m$, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_i$ 与向量组 $\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_i$ 等价.

施密特正交化过程[1]给出了解决上述问题的一个方法.

从几何上看, 如果空间 $\mathbb{R}^n$ 上的一组向量能够组成一个**子空间**, 那么这一组向量就称为这个子空间的一个基. 该方法是通过这一子空间上的一个基, 得出子空间的一个标准正交基, 并且满足: 任意前 i 个向量构成的是同一个子空间.

[1] 也称 Gram-Schmidt 正交化过程 (Gram–Schmidt Orthogonalization Procedure). 该方法以 Jørgen P. Gram 和 Erhard Schmidt 命名, 它更早出现在拉普拉斯和柯西的文章中.

问题:

已知一组线性无关的 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$, $(m \leqslant n)$, 求一个标准正交向量组 $\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_m$, 并且满足:

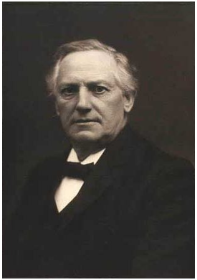
$\forall i \leqslant m$, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_i$ 与向量组 $\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_i$ 等价.

施密特正交化过程[1]给出了解决上述问题的一个方法.

从几何上看, 如果空间 $\mathbb{R}^n$ 上的一组向量能够组成一个**子空间**, 那么这一组向量就称为这个子空间的一个基. 该方法是通过这一子空间上的一个基, 得出子空间的一个标准正交基, 并且满足: 任意前 i 个向量构成的是同一个子空间.

该方法的基本思想: 利用投影原理, 在已有正交基的基础上, 构造一个新的正交基.

[1]也称 Gram-Schmidt 正交化过程 (Gram–Schmidt Orthogonalization Procedure). 该方法以 Jørgen P. Gram 和 Erhard Schmidt 命名, 它更早出现在拉普拉斯和柯西的文章中.



Jørgen P. Gram (1850–1916)
was a Danish actuary who implicitly presented the essence of orthogonalization procedure in 1883. Gram was apparently unaware that Pierre-Simon Laplace (1749–1827) had earlier used the method. Today, Gram is remembered primarily for his development of this process, but in earlier times his name was also associated with the matrix product $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ that historically was referred to as the *Gram matrix* of $\boldsymbol{A}$.

Erhard Schmidt (1876–1959) was a German mathematician whose work significantly influenced the direction of mathematics in the twentieth century. He was a student of Hermann Schwarz and the great German mathematician David Hilbert. Schmidt explicitly employed the orthogonalization process in 1907 in his study of integral equations, which in turn led to the development of what are now called *Hilbert spaces*. Schmidt made significant use of the orthogonalization process to develop the geometry of Hilbert Spaces, and thus it came to bear Schmidt's name.

以三维空间为例

设有不共面的三个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3 \in \mathbb{R}^3$,

以三维空间为例

设有不共面的三个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3 \in \mathbb{R}^3$, 由这三个向量, 我们构造一组两两正交的向量 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$.

以三维空间为例

设有不共面的三个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3 \in \mathbb{R}^3$, 由这三个向量, 我们构造一组两两正交的向量 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$. 并且满足: $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1$ 等价; $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 等价; $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 等价.

设有两个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 如图 1(a).

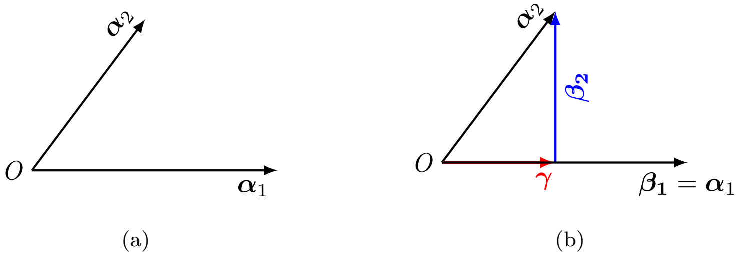
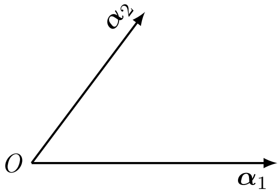


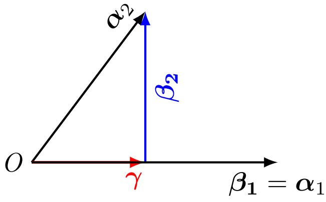
图: $\boldsymbol{\beta}_2 \triangleq \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\gamma}$, 其中 $\boldsymbol{\gamma}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 在向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 所张成的一维子空间上的投影向量.

先直接取 $\boldsymbol{\beta}_1 \triangleq \boldsymbol{\alpha}_1$, 如图 1(b).

设有两个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 如图 1(a).



(a)



(b)

图: $\boldsymbol{\beta}_2 \triangleq \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\gamma}$, 其中 $\boldsymbol{\gamma}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 在向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 所张成的一维子空间上的投影向量.

先直接取 $\boldsymbol{\beta}_1 \triangleq \boldsymbol{\alpha}_1$, 如图 1(b).
记 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 上的**投影向量**为 γ,

设有两个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 如图 1(a).

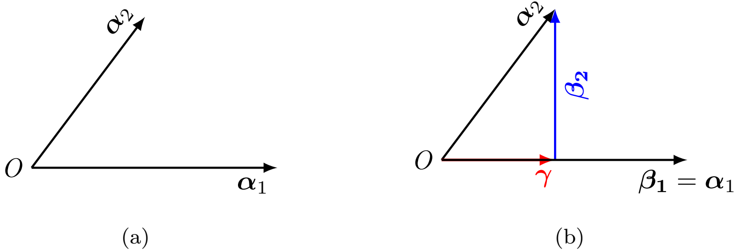
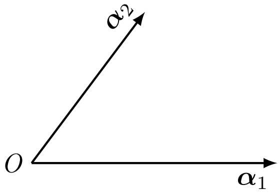


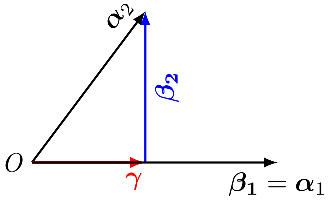
图: $\boldsymbol{\beta}_2 \triangleq \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\gamma}$, 其中 $\boldsymbol{\gamma}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 在向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 所张成的一维子空间上的投影向量.

先直接取 $\boldsymbol{\beta}_1 \triangleq \boldsymbol{\alpha}_1$, 如图 1(b).
记 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 上的**投影向量**为 $\boldsymbol{\gamma}$, 则可令 $\boldsymbol{\beta}_2 \triangleq \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\gamma}$, 使得 $\boldsymbol{\beta}_2 \perp \boldsymbol{\beta}_1$.

设有两个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 如图 1(a).



(a)



(b)

图: $\boldsymbol{\beta}_2 \triangleq \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\gamma}$, 其中 $\boldsymbol{\gamma}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 在向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 所张成的一维子空间上的投影向量.

先直接取 $\boldsymbol{\beta}_1 \triangleq \boldsymbol{\alpha}_1$, 如图 1(b).

记 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 上的**投影向量**为 $\boldsymbol{\gamma}$, 则可令 $\boldsymbol{\beta}_2 \triangleq \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\gamma}$, 使得 $\boldsymbol{\beta}_2 \perp \boldsymbol{\beta}_1$. 下面给出 $\boldsymbol{\gamma}$ 的表达式.

$\boldsymbol{\alpha}_2$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 上的投影为:

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{\alpha}_1}\boldsymbol{\alpha}_2 = \|\boldsymbol{\alpha}_2\| \cdot \cos(\widehat{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2})$$

$\boldsymbol{\alpha}_2$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 上的投影为:

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{\alpha}_1}\boldsymbol{\alpha}_2 = \|\boldsymbol{\alpha}_2\| \cdot \cos(\widehat{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2}) = \|\boldsymbol{\alpha}_2\| \cdot \frac{(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|\|\boldsymbol{\alpha}_2\|}$$

$\boldsymbol{\alpha}_2$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 上的投影为:

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{\alpha}_1}\boldsymbol{\alpha}_2 = \|\boldsymbol{\alpha}_2\| \cdot \cos(\widehat{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2}) = \|\boldsymbol{\alpha}_2\| \cdot \frac{(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|\|\boldsymbol{\alpha}_2\|} = \frac{(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|},$$

$\boldsymbol{\alpha}_2$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 上的投影为:

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{\alpha}_1}\boldsymbol{\alpha}_2 = \|\boldsymbol{\alpha}_2\| \cdot \cos(\widehat{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2}) = \|\boldsymbol{\alpha}_2\| \cdot \frac{(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|\|\boldsymbol{\alpha}_2\|} = \frac{(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|},$$

则 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 上的投影向量为:

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathrm{Prj}_{\boldsymbol{\alpha}_1}\boldsymbol{\alpha}_2 \cdot \frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|}$$

$\boldsymbol{\alpha}_2$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 上的投影为:

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{\alpha}_1}\boldsymbol{\alpha}_2 = \|\boldsymbol{\alpha}_2\| \cdot \cos(\widehat{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2}) = \|\boldsymbol{\alpha}_2\| \cdot \frac{(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|\|\boldsymbol{\alpha}_2\|} = \frac{(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|},$$

则 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 上的投影向量为:

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathrm{Prj}_{\boldsymbol{\alpha}_1}\boldsymbol{\alpha}_2 \cdot \frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|} = \frac{(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|} \cdot \frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|}$$

$\boldsymbol{\alpha}_2$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 上的投影为:

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{\alpha}_1}\boldsymbol{\alpha}_2 = \|\boldsymbol{\alpha}_2\| \cdot \cos(\widehat{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2}) = \|\boldsymbol{\alpha}_2\| \cdot \frac{(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|\|\boldsymbol{\alpha}_2\|} = \frac{(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|},$$

则 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 上的投影向量为:

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathrm{Prj}_{\boldsymbol{\alpha}_1}\boldsymbol{\alpha}_2 \cdot \frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|} = \frac{(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|} \cdot \frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|} = \frac{(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)}{(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1)}\boldsymbol{\alpha}_1. \tag{3}$$

$\boldsymbol{\alpha}_2$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 上的投影为:

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{\alpha}_1}\boldsymbol{\alpha}_2 = \|\boldsymbol{\alpha}_2\| \cdot \cos(\widehat{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2}) = \|\boldsymbol{\alpha}_2\| \cdot \frac{(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|\|\boldsymbol{\alpha}_2\|} = \frac{(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|},$$

则 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 上的投影向量为:

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathrm{Prj}_{\boldsymbol{\alpha}_1}\boldsymbol{\alpha}_2 \cdot \frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|} = \frac{(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|} \cdot \frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|} = \frac{(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)}{(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1)}\boldsymbol{\alpha}_1. \tag{3}$$

所以

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\gamma}$$

$\boldsymbol{\alpha}_2$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 上的投影为:

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{\alpha}_1}\boldsymbol{\alpha}_2 = \|\boldsymbol{\alpha}_2\| \cdot \cos(\widehat{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2}) = \|\boldsymbol{\alpha}_2\| \cdot \frac{(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|\|\boldsymbol{\alpha}_2\|} = \frac{(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|},$$

则 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 上的投影向量为:

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathrm{Prj}_{\boldsymbol{\alpha}_1}\boldsymbol{\alpha}_2 \cdot \frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|} = \frac{(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|} \cdot \frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|} = \frac{(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)}{(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1)}\boldsymbol{\alpha}_1. \tag{3}$$

所以

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)}{(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1)}\boldsymbol{\alpha}_1$$

$\boldsymbol{\alpha}_2$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 上的投影为:

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{\alpha}_1}\boldsymbol{\alpha}_2 = \|\boldsymbol{\alpha}_2\| \cdot \cos(\widehat{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2}) = \|\boldsymbol{\alpha}_2\| \cdot \frac{(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|\|\boldsymbol{\alpha}_2\|} = \frac{(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|},$$

则 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 上的投影向量为:

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathrm{Prj}_{\boldsymbol{\alpha}_1}\boldsymbol{\alpha}_2 \cdot \frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|} = \frac{(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|} \cdot \frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|} = \frac{(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)}{(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1)}\boldsymbol{\alpha}_1. \tag{3}$$

所以

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)}{(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1)}\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1.$$

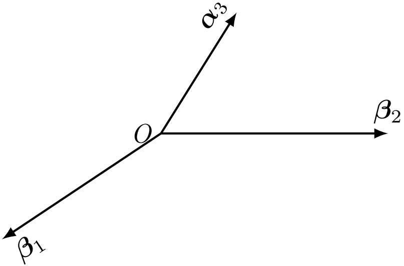


图: $\boldsymbol{\beta}_3 \triangleq \boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\gamma}$, 其中 $\boldsymbol{\gamma}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 在 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 所张成子空间上的投影向量.

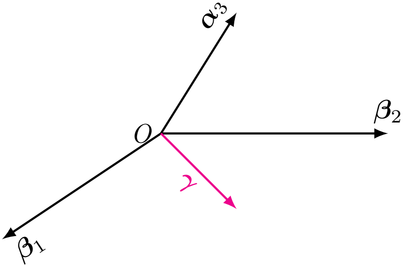


图: $\boldsymbol{\beta}_3 \triangleq \boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\gamma}$, 其中 $\boldsymbol{\gamma}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 在 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 所张成子空间上的投影向量.

记 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 在 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 所在平面的投影向量为 $\boldsymbol{\gamma}$,

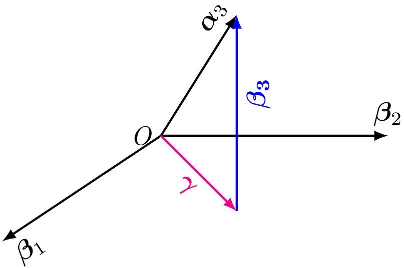


图: $\boldsymbol{\beta}_3 \triangleq \boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\gamma}$, 其中 $\boldsymbol{\gamma}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 在 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 所张成子空间上的投影向量.

记 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 在 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 所在平面的投影向量为 $\boldsymbol{\gamma}$，若令 $\boldsymbol{\beta}_3 \triangleq \boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\gamma}$,

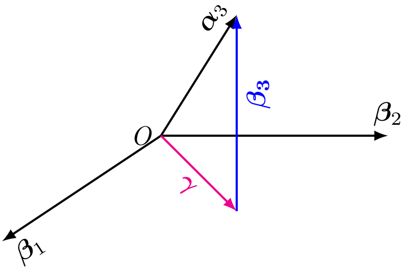


图: $\boldsymbol{\beta}_3 \triangleq \boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\gamma}$, 其中 $\boldsymbol{\gamma}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 在 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 所张成子空间上的投影向量.

记 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 在 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 所在平面的投影向量为 $\boldsymbol{\gamma}$, 若令 $\boldsymbol{\beta}_3 \triangleq \boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\gamma}$, 则 $\boldsymbol{\beta}_3$ 垂直于 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 所在的平面,

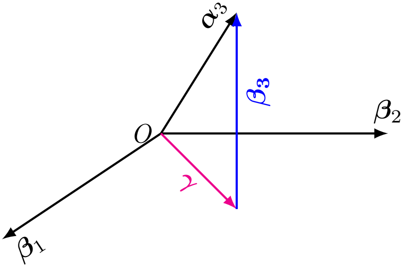


图: $\boldsymbol{\beta}_3 \triangleq \boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\gamma}$, 其中 $\boldsymbol{\gamma}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 在 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 所张成子空间上的投影向量.

记 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 在 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 所在平面的投影向量为 $\boldsymbol{\gamma}$，若令 $\boldsymbol{\beta}_3 \triangleq \boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\gamma}$，则 $\boldsymbol{\beta}_3$ 垂直于 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 所在的平面，从而 $\boldsymbol{\beta}_3 \perp \boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_3 \perp \boldsymbol{\beta}_2$, 如图 2.

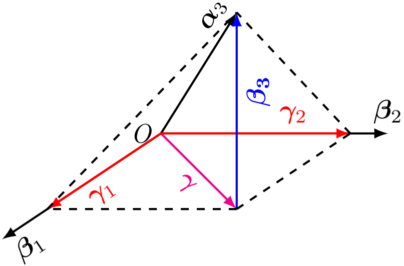


图: $\boldsymbol{\beta}_3 \triangleq \boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\gamma}$, 其中 $\boldsymbol{\gamma}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 在 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 所张成子空间上的投影向量.

记 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 在 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 所在平面的投影向量为 $\boldsymbol{\gamma}$, 若令 $\boldsymbol{\beta}_3 \triangleq \boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\gamma}$, 则 $\boldsymbol{\beta}_3$ 垂直于 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 所在的平面, 从而 $\boldsymbol{\beta}_3 \perp \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_3 \perp \boldsymbol{\beta}_2$, 如图 2.

记 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 在 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 上的投影向量分别为 $\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2$,

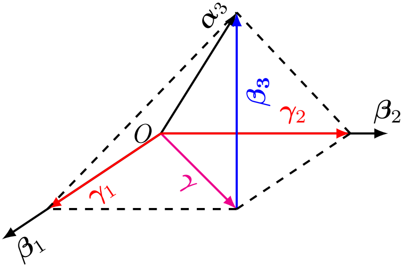


图: $\boldsymbol{\beta}_3 \triangleq \boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\gamma}$, 其中 $\boldsymbol{\gamma}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 在 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 所张成子空间上的投影向量.

记 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 在 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 所在平面的投影向量为 $\boldsymbol{\gamma}$，若令 $\boldsymbol{\beta}_3 \triangleq \boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\gamma}$，则 $\boldsymbol{\beta}_3$ 垂直于 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 所在的平面，从而 $\boldsymbol{\beta}_3 \perp \boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_3 \perp \boldsymbol{\beta}_2$, 如图 2.

记 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 在 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 上的投影向量分别为 $\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2$，则 $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_1 + \boldsymbol{\gamma}_2$.

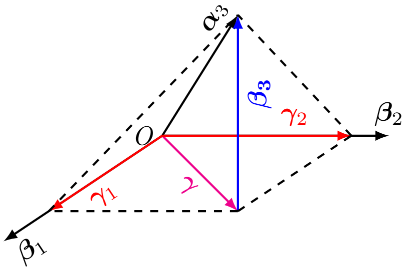


图: $\boldsymbol{\beta}_3 \triangleq \boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\gamma}$, 其中 $\boldsymbol{\gamma}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 在 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 所张成子空间上的投影向量.

记 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 在 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 所在平面的投影向量为 $\boldsymbol{\gamma}$，若令 $\boldsymbol{\beta}_3 \triangleq \boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\gamma}$，则 $\boldsymbol{\beta}_3$ 垂直于 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 所在的平面，从而 $\boldsymbol{\beta}_3 \perp \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_3 \perp \boldsymbol{\beta}_2$, 如图 2.

记 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 在 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 上的投影向量分别为 $\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2$，则 $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_1 + \boldsymbol{\gamma}_2$. 与 (3) 式同理有

$$\boldsymbol{\gamma}_1 = \frac{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\alpha}_3)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1, \qquad \boldsymbol{\gamma}_2 = \frac{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2$$

所以

$$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\gamma}$$

所以

$$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\gamma}_1 - \boldsymbol{\gamma}_2$$

所以

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_3)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2.$$

所以

$$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\gamma}_1 - \boldsymbol{\gamma}_2 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\alpha}_3)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2.$$

如此求得的 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 是两两正交的非零向量组.

所以

$$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\gamma}_1 - \boldsymbol{\gamma}_2 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\alpha}_3)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2.$$

如此求得的 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 是两两正交的非零向量组. 再将 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 单位化, 即取

$$\boldsymbol{\eta}_j = \frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_j\|}\boldsymbol{\beta}_j, \qquad j = 1, 2, 3.$$

所以

$$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\gamma}_1 - \boldsymbol{\gamma}_2 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\alpha}_3)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2.$$

如此求得的 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 是两两正交的非零向量组. 再将 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 单位化, 即取

$$\boldsymbol{\eta}_j = \frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_j\|}\boldsymbol{\beta}_j, \qquad j = 1, 2, 3.$$

则 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基.

所以

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_3)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2.$$

如此求得的 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 是两两正交的非零向量组. 再将 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 单位化, 即取

$$\boldsymbol{\eta}_j=\frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_j\|}\boldsymbol{\beta}_j,\qquad j=1,2,3.$$

则 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基.

在 n 维空间 $\mathbb{R}^n$, 给定一组线性无关的向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$, $(m\leqslant n)$, 其施密特正交化过程可以类似地理解和记忆: 记前 i $(i\leqslant m)$ 个向量构成的子空间为 $\boldsymbol{V}$, 设 $\boldsymbol{\alpha}_{i+1}$ 在 $\boldsymbol{V}$ 上的投影向量为 $\boldsymbol{\gamma}$, 则

$$\boldsymbol{\beta}_{i+1}\triangleq\boldsymbol{\alpha}_{i+1}-\boldsymbol{\gamma}$$

Schmidt 正交化过程的步骤

(1) $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$;

Schmidt 正交化过程的步骤

(1) $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$;

(2) $\boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{\alpha}_j - \dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2 - \cdots - \dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}_{j-1})}{(\boldsymbol{\beta}_{j-1}, \boldsymbol{\beta}_{j-1})}\boldsymbol{\beta}_{j-1}$;

Schmidt 正交化过程的步骤

(1) $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$;

(2) $\boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{\alpha}_j - \dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2 - \cdots - \dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}_{j-1})}{(\boldsymbol{\beta}_{j-1}, \boldsymbol{\beta}_{j-1})}\boldsymbol{\beta}_{j-1}$;

(3) $\boldsymbol{\eta}_j = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_j\|}\boldsymbol{\beta}_j,\ j = 1, 2, \cdots, m.$

Schmidt 正交化过程的步骤

(1) $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$;

(2) $\boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{\alpha}_j - \dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2 - \cdots - \dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}_{j-1})}{(\boldsymbol{\beta}_{j-1}, \boldsymbol{\beta}_{j-1})}\boldsymbol{\beta}_{j-1}$;

(3) $\boldsymbol{\eta}_j = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_j\|}\boldsymbol{\beta}_j,\ j = 1, 2, \cdots, m.$

上述从线性无关向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 导出标准正交向量组 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_m$ 的过程, 称为 Schmidt 正交化过程.

Schmidt 正交化过程的步骤

(1) $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$;

(2) $\boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{\alpha}_j - \dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2 - \cdots - \dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}_{j-1})}{(\boldsymbol{\beta}_{j-1}, \boldsymbol{\beta}_{j-1})}\boldsymbol{\beta}_{j-1}$;

(3) $\boldsymbol{\eta}_j = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_j\|}\boldsymbol{\beta}_j,\ j = 1, 2, \cdots, m.$

上述从线性无关向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 导出标准正交向量组 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_m$ 的过程, 称为 Schmidt 正交化过程.

☞ 在向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 和向量组 $\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_m$ 中, 同时任取前 i 个向量, 所得的两个向量组是等价的. 请思考: 为什么?

例 2.11

试用施密特法把下列向量组正交化: $(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

例 2.11

试用施密特法把下列向量组正交化: $(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

解: 由施密特正交化方法得

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \frac{(\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{a}_2)}{(\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_3-\frac{(\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{a}_3)}{(\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1-\frac{(\boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{a}_3)}{(\boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_2)}\boldsymbol{b}_2=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1\\3\\3\\4\end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_3-\frac{(\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{a}_3)}{(\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1-\frac{(\boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{a}_3)}{(\boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_2)}\boldsymbol{b}_2=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1\\3\\3\\4\end{pmatrix}.$$

故正交化后得

$$(\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3)=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{3}&-\frac{1}{5}\\0&-1&\frac{3}{5}\\-1&\frac{2}{3}&\frac{3}{5}\\1&\frac{1}{3}&\frac{4}{5}\end{pmatrix}.$$

例 2.12

已知 $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 求一组非零向量 $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, 使得 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ 两两正交.

例 2.12

已知 $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 求一组非零向量 $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, 使得 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ 两两正交.

解: $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ 应满足 $\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0$,

例 2.12

已知 $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 求一组非零向量 $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, 使得 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ 两两正交.

解: $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ 应满足 $\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0$, 即

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

例 2.12

已知 $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 求一组非零向量 $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, 使得 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ 两两正交.

解: $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ 应满足 $\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0$, 即

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

它的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

例 2.12

已知 $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 求一组非零向量 $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, 使得 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ 两两正交.

解: $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ 应满足 $\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0$, 即

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

它的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

把基础解系正交化, 即为所求.

例 2.12

已知 $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 求一组非零向量 $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, 使得 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ 两两正交.

解: $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ 应满足 $\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0$, 即

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

它的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

把基础解系正交化, 即为所求. 故

$$\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

例 2.12

已知 $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 求一组非零向量 $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, 使得 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ 两两正交.

解: $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ 应满足 $\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0$, 即

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

它的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

把基础解系正交化, 即为所求. 故

$$\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{\xi}_2 - \frac{(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)}{(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_1)}\boldsymbol{\xi}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

另解: 这里施密特正交化过程其实是可以避免的: 可以直接凑出一组正交的基础解系.

另解: 这里施密特正交化过程其实是可以避免的: 可以直接凑出一组正交的基础解系.

对方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, 下面构造一组正交的基础解系:

另解: 这里施密特正交化过程其实是可以避免的: 可以直接凑出一组正交的基础解系.

对方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, 下面构造一组正交的基础解系:

若取 $\boldsymbol{a}_2 = (1, 0, -1)^{\mathrm{T}}$,

另解: 这里施密特正交化过程其实是可以避免的: 可以直接凑出一组正交的基础解系.

对方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, 下面构造一组正交的基础解系:

若取 $\boldsymbol{a}_2 = (1, 0, -1)^{\mathrm{T}}$, 要满足正交, 则应有

$$\boldsymbol{a}_3 = (1, \square, 1)^{\mathrm{T}}.$$

另解: 这里施密特正交化过程其实是可以避免的: 可以直接凑出一组正交的基础解系.

对方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, 下面构造一组正交的基础解系:

若取 $\boldsymbol{a}_2 = (1, 0, -1)^{\mathrm{T}}$, 要满足正交, 则应有

$$\boldsymbol{a}_3 = (1, \square, 1)^{\mathrm{T}}.$$

这里方框 $\square$ 表示一个待定的量.

另解: 这里施密特正交化过程其实是可以避免的: 可以直接凑出一组正交的基础解系.

对方程 $x_1+x_2+x_3=0$, 下面构造一组正交的基础解系:

若取 $\boldsymbol{a}_2=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$, 要满足正交, 则应有

$$\boldsymbol{a}_3=(1,\square,1)^{\mathrm{T}}.$$

这里方框 $\square$ 表示一个待定的量. 又要满足方程, 所以

$$\boldsymbol{a}_3=(1,-2,1)^{\mathrm{T}}.$$

另解: 这里施密特正交化过程其实是可以避免的: 可以直接凑出一组正交的基础解系.

对方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, 下面构造一组正交的基础解系:

若取 $\boldsymbol{a}_2 = (1, 0, -1)^{\mathrm{T}}$, 要满足正交, 则应有

$$\boldsymbol{a}_3 = (1, \square, 1)^{\mathrm{T}}.$$

这里方框 $\square$ 表示一个待定的量. 又要满足方程, 所以

$$\boldsymbol{a}_3 = (1, -2, 1)^{\mathrm{T}}.$$

从而得到一组正交的基础解系:

$$\boldsymbol{a}_2 = (1, 0, -1)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{a}_3 = (1, -2, 1)^{\mathrm{T}}. \tag{4}$$

另解: 这里施密特正交化过程其实是可以避免的: 可以直接凑出一组正交的基础解系.

对方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, 下面构造一组正交的基础解系:

若取 $\boldsymbol{a}_2 = (1, 0, -1)^{\mathrm{T}}$, 要满足正交, 则应有

$$\boldsymbol{a}_3 = (1, \square, 1)^{\mathrm{T}}.$$

这里方框 $\square$ 表示一个待定的量. 又要满足方程, 所以

$$\boldsymbol{a}_3 = (1, -2, 1)^{\mathrm{T}}.$$

从而得到一组正交的基础解系:

$$\boldsymbol{a}_2 = (1, 0, -1)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{a}_3 = (1, -2, 1)^{\mathrm{T}}. \tag{4}$$

类似地, 还可以取

$$\boldsymbol{a}_2 = (1, -1, 0)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{a}_3 = (1, 1, -2)^{\mathrm{T}}. \tag{5}$$

另解: 这里施密特正交化过程其实是可以避免的: 可以直接凑出一组正交的基础解系.

对方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, 下面构造一组正交的基础解系:

若取 $\boldsymbol{a}_2 = (1, 0, -1)^{\mathrm{T}}$, 要满足正交, 则应有

$$\boldsymbol{a}_3 = (1, \square, 1)^{\mathrm{T}}.$$

这里方框 $\square$ 表示一个待定的量. 又要满足方程, 所以

$$\boldsymbol{a}_3 = (1, -2, 1)^{\mathrm{T}}.$$

从而得到一组正交的基础解系:

$$\boldsymbol{a}_2 = (1, 0, -1)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{a}_3 = (1, -2, 1)^{\mathrm{T}}. \tag{4}$$

类似地, 还可以取

$$\boldsymbol{a}_2 = (1, -1, 0)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{a}_3 = (1, 1, -2)^{\mathrm{T}}. \tag{5}$$

或者 $\boldsymbol{a}_2 = (0, 1, -1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{a}_3 = (-2, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, 等等. $\square$

Outline

定义 2.13

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 如果 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$, 就称 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵.

定义 2.13

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 如果 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$, 就称 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵.

$$\boldsymbol{A} \text{ 为正交矩阵} \iff \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$$

定义 2.13

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 如果 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$, 就称 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵.

$$\boldsymbol{A} \text{ 为正交矩阵} \iff \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} \iff \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}.$$

定理 2.14

$\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正交矩阵的充要条件是: $\boldsymbol{A}$ 的列向量组为 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基.

定理 2.14

$\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正交矩阵的充要条件是: $\boldsymbol{A}$ 的列向量组为 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基.

证: 设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$,

定理 2.14

$\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正交矩阵的充要条件是: $\boldsymbol{A}$ 的列向量组为 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基.

证: 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$, 于是

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$$

定理 2.14

$\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正交矩阵的充要条件是: $\boldsymbol{A}$ 的列向量组为 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基.

证: 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$, 于是

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix},$$

定理 2.14

$\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正交矩阵的充要条件是: $\boldsymbol{A}$ 的列向量组为 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基.

证: 设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$, 于是

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n \end{pmatrix},$$

因此, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ 的充要条件是

$$\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_j = (\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) = \delta_{ij}.$$

定理 2.14

$\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正交矩阵的充要条件是: $\boldsymbol{A}$ 的列向量组为 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基.

证: 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$, 于是

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix},$$

因此, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$ 的充要条件是

$$\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_j=(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=\delta_{ij}.$$

即向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基. □

☞ 正交矩阵的行向量也是一组两两正交的单位向量.

例 2.15

验证矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

是正交矩阵.

例 2.15

验证矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

是正交矩阵.

证: $\boldsymbol{P}$ 的每个列向量都是单位向量, 且两两正交, 所以 $\boldsymbol{P}$ 是正交矩阵.

例 2.15

验证矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

是正交矩阵.

证: $\boldsymbol{P}$ 的每个列向量都是单位向量, 且两两正交, 所以 $\boldsymbol{P}$ 是正交矩阵.
或者验证 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}$ 即可. □

定理 2.16

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正交矩阵, 则

(i) $\det \boldsymbol{A} = 1$ 或 -1.

定理 2.16

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正交矩阵, 则

(i) $\det \boldsymbol{A} = 1$ 或 -1.

(ii) $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

定理 2.16

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正交矩阵, 则

(i) $\det \boldsymbol{A} = 1$ 或 -1.

(ii) $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

(iii) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ (即 $\boldsymbol{A}^{-1}$) 也是正交矩阵.

定理 2.16

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正交矩阵, 则

(i) $\det \boldsymbol{A} = 1$ 或 -1.

(ii) $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

(iii) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ (即 $\boldsymbol{A}^{-1}$) 也是正交矩阵.

(iv) $\boldsymbol{AB}$ 也是正交矩阵.

定理 2.16

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正交矩阵, 则

(i) $\det \boldsymbol{A} = 1$ 或 -1.

(ii) $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

(iii) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ (即 $\boldsymbol{A}^{-1}$) 也是正交矩阵.

(iv) $\boldsymbol{AB}$ 也是正交矩阵.

证: (i), (ii) 的证明是课后习题 13 (P.211).

定理 2.16

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正交矩阵, 则

(i) $\det \boldsymbol{A} = 1$ 或 -1.

(ii) $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

(iii) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ (即 $\boldsymbol{A}^{-1}$) 也是正交矩阵.

(iv) $\boldsymbol{AB}$ 也是正交矩阵.

证: (i), (ii) 的证明是课后习题 13 (P.211).

(iii) 因

$$\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$

定理 2.16

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正交矩阵, 则

(i) $\det \boldsymbol{A} = 1$ 或 -1.

(ii) $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

(iii) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ (即 $\boldsymbol{A}^{-1}$) 也是正交矩阵.

(iv) $\boldsymbol{AB}$ 也是正交矩阵.

证: (i), (ii) 的证明是课后习题 13 (P.211).

(iii) 因

$$\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$

定理 2.16

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正交矩阵, 则

(i) $\det \boldsymbol{A} = 1$ 或 -1.

(ii) $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

(iii) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ (即 $\boldsymbol{A}^{-1}$) 也是正交矩阵.

(iv) $\boldsymbol{AB}$ 也是正交矩阵.

证: (i), (ii) 的证明是课后习题 13 (P.211).

(iii) 因

$$\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}$$

定理 2.16

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正交矩阵, 则

(i) $\det \boldsymbol{A} = 1$ 或 -1.

(ii) $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

(iii) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ (即 $\boldsymbol{A}^{-1}$) 也是正交矩阵.

(iv) $\boldsymbol{AB}$ 也是正交矩阵.

证: (i), (ii) 的证明是课后习题 13 (P.211).

(iii) 因

$$\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I},$$

定理 2.16

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正交矩阵, 则

(i) $\det \boldsymbol{A} = 1$ 或 -1.

(ii) $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

(iii) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ (即 $\boldsymbol{A}^{-1}$) 也是正交矩阵.

(iv) $\boldsymbol{AB}$ 也是正交矩阵.

证: (i), (ii) 的证明是课后习题 13 (P.211).

(iii) 因

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I},$$

故 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ (即 $\boldsymbol{A}^{-1}$) 也是正交矩阵.

定理 2.16

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正交矩阵, 则

(i) $\det \boldsymbol{A} = 1$ 或 -1.

(ii) $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

(iii) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ (即 $\boldsymbol{A}^{-1}$) 也是正交矩阵.

(iv) $\boldsymbol{AB}$ 也是正交矩阵.

证: (i), (ii) 的证明是课后习题 13 (P.211).

(iii) 因

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I},$$

故 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ (即 $\boldsymbol{A}^{-1}$) 也是正交矩阵.

(iv) 由

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AB}) = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I},$$

定理 2.16

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正交矩阵, 则

(i) $\det \boldsymbol{A} = 1$ 或 -1.

(ii) $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

(iii) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ (即 $\boldsymbol{A}^{-1}$) 也是正交矩阵.

(iv) $\boldsymbol{AB}$ 也是正交矩阵.

证: (i), (ii) 的证明是课后习题 13 (P.211).

(iii) 因

$$\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I},$$

故 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ (即 $\boldsymbol{A}^{-1}$) 也是正交矩阵.

(iv) 由

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AB}) = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I},$$

故 $\boldsymbol{AB}$ 也是正交矩阵. □

定理 2.17

若列向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ 在 n 阶正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的作用下变换为 $\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay} \in \mathbb{R}^n$, 则向量的内积、长度及向量的夹角都保持不变,

定理 2.17

若列向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ 在 n 阶正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的作用下变换为 $\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay} \in \mathbb{R}^n$, 则向量的内积、长度及向量的夹角都保持不变, 即

$$\big(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay}\big) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \tag{6}$$

$$\|\boldsymbol{Ax}\| = \|\boldsymbol{x}\|, \qquad \|\boldsymbol{Ay}\| = \|\boldsymbol{y}\|, \tag{7}$$

$$\langle \boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle. \tag{8}$$

定理 2.17

若列向量 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ 在 n 阶正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的作用下变换为 $\boldsymbol{Ax}$, $\boldsymbol{Ay} \in \mathbb{R}^n$, 则向量的内积、长度及向量的夹角都保持不变, 即

$$\big(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay}\big) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \tag{6}$$

$$\|\boldsymbol{Ax}\| = \|\boldsymbol{x}\|, \qquad \|\boldsymbol{Ay}\| = \|\boldsymbol{y}\|, \tag{7}$$

$$\langle \boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle. \tag{8}$$

证: (1) $\big(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay}\big) = \big(\boldsymbol{Ax}\big)^{\mathrm{T}}\big(\boldsymbol{Ay}\big)$

定理 2.17

若列向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ 在 n 阶正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的作用下变换为 $\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay} \in \mathbb{R}^n$, 则向量的内积、长度及向量的夹角都保持不变, 即

$$\big(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay}\big) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \tag{6}$$

$$\|\boldsymbol{Ax}\| = \|\boldsymbol{x}\|, \qquad \|\boldsymbol{Ay}\| = \|\boldsymbol{y}\|, \tag{7}$$

$$\langle \boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle. \tag{8}$$

证: (1) $\big(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay}\big) = \big(\boldsymbol{Ax}\big)^{\mathrm{T}}\big(\boldsymbol{Ay}\big) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ay}$

定理 2.17

若列向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ 在 n 阶正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的作用下变换为 $\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay} \in \mathbb{R}^n$, 则向量的内积、长度及向量的夹角都保持不变, 即

$$\big(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay}\big) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \tag{6}$$

$$\|\boldsymbol{Ax}\| = \|\boldsymbol{x}\|, \qquad \|\boldsymbol{Ay}\| = \|\boldsymbol{y}\|, \tag{7}$$

$$\langle \boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle. \tag{8}$$

证: (1) $\big(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay}\big) = \big(\boldsymbol{Ax}\big)^{\mathrm{T}}\big(\boldsymbol{Ay}\big) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ay} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

定理 2.17

若列向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ 在 n 阶正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的作用下变换为 $\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay} \in \mathbb{R}^n$, 则向量的内积、长度及向量的夹角都保持不变, 即

$$\big(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay}\big) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \tag{6}$$

$$\|\boldsymbol{Ax}\| = \|\boldsymbol{x}\|, \qquad \|\boldsymbol{Ay}\| = \|\boldsymbol{y}\|, \tag{7}$$

$$\langle \boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle. \tag{8}$$

证: (1) $\big(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay}\big) = \big(\boldsymbol{Ax}\big)^{\mathrm{T}}\big(\boldsymbol{Ay}\big) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ay} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

(2) 在上式中取 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$, 有 $\big(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ax}\big) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$,

定理 2.17

若列向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ 在 n 阶正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的作用下变换为 $\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay} \in \mathbb{R}^n$, 则向量的内积、长度及向量的夹角都保持不变, 即

$$\big(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay}\big) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \tag{6}$$

$$\|\boldsymbol{Ax}\| = \|\boldsymbol{x}\|, \qquad \|\boldsymbol{Ay}\| = \|\boldsymbol{y}\|, \tag{7}$$

$$\langle \boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle. \tag{8}$$

证: (1) $\big(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay}\big) = \big(\boldsymbol{Ax}\big)^{\mathrm{T}}\big(\boldsymbol{Ay}\big) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ay} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

(2) 在上式中取 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$, 有 $\big(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ax}\big) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, 即 $\|\boldsymbol{Ax}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2$, 故

$$\|\boldsymbol{Ax}\| = \|\boldsymbol{x}\|.$$

定理 2.17

若列向量 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ 在 n 阶正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的作用下变换为 $\boldsymbol{Ax}$, $\boldsymbol{Ay} \in \mathbb{R}^n$, 则向量的内积、长度及向量的夹角都保持不变, 即

$$\big(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay}\big) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \tag{6}$$

$$\|\boldsymbol{Ax}\| = \|\boldsymbol{x}\|, \qquad \|\boldsymbol{Ay}\| = \|\boldsymbol{y}\|, \tag{7}$$

$$\langle \boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle. \tag{8}$$

证: (1) $\big(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay}\big) = \big(\boldsymbol{Ax}\big)^{\mathrm{T}}\big(\boldsymbol{Ay}\big) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ay} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

(2) 在上式中取 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$, 有 $\big(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ax}\big) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, 即 $\|\boldsymbol{Ax}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2$, 故

$$\|\boldsymbol{Ax}\| = \|\boldsymbol{x}\|.$$

同理有 $\|\boldsymbol{Ay}\| = \|\boldsymbol{y}\|$.

定理 2.17

若列向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ 在 n 阶正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的作用下变换为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, 则向量的内积、长度及向量的夹角都保持不变, 即

$$\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}\big) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \tag{6}$$

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|, \qquad \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{y}\|, \tag{7}$$

$$\langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle. \tag{8}$$

证: (1) $\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}\big) = \big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\big)^{\mathrm{T}}\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}\big) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

(2) 在上式中取 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$, 有 $\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\big) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, 即 $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2$, 故

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|.$$

同理有 $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{y}\|$.

(3) 由

$$\cos\langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}\rangle = \frac{\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}\big)}{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}\|}$$

定理 2.17

若列向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ 在 n 阶正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的作用下变换为 $\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay} \in \mathbb{R}^n$, 则向量的内积、长度及向量的夹角都保持不变, 即

$$\big(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay}\big) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \tag{6}$$

$$\|\boldsymbol{Ax}\| = \|\boldsymbol{x}\|, \qquad \|\boldsymbol{Ay}\| = \|\boldsymbol{y}\|, \tag{7}$$

$$\langle \boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle. \tag{8}$$

证: (1) $\big(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay}\big) = \big(\boldsymbol{Ax}\big)^{\mathrm{T}}\big(\boldsymbol{Ay}\big) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ay} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

(2) 在上式中取 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$, 有 $\big(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ax}\big) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, 即 $\|\boldsymbol{Ax}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2$, 故

$$\|\boldsymbol{Ax}\| = \|\boldsymbol{x}\|.$$

同理有 $\|\boldsymbol{Ay}\| = \|\boldsymbol{y}\|$.

(3) 由

$$\cos\langle \boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay} \rangle = \frac{\big(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay}\big)}{\|\boldsymbol{Ax}\|\|\boldsymbol{Ay}\|} = \frac{\big(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\big)}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|}$$

定理 2.17

若列向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ 在 n 阶正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的作用下变换为 $\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay} \in \mathbb{R}^n$, 则向量的内积、长度及向量的夹角都保持不变, 即

$$\big(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay}\big) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \tag{6}$$

$$\|\boldsymbol{Ax}\| = \|\boldsymbol{x}\|, \qquad \|\boldsymbol{Ay}\| = \|\boldsymbol{y}\|, \tag{7}$$

$$\langle \boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle. \tag{8}$$

证: (1) $\big(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay}\big) = \big(\boldsymbol{Ax}\big)^{\mathrm{T}}\big(\boldsymbol{Ay}\big) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ay} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

(2) 在上式中取 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$, 有 $\big(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ax}\big) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, 即 $\|\boldsymbol{Ax}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2$, 故

$$\|\boldsymbol{Ax}\| = \|\boldsymbol{x}\|.$$

同理有 $\|\boldsymbol{Ay}\| = \|\boldsymbol{y}\|$.

(3) 由

$$\cos\langle \boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay}\rangle = \frac{\big(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay}\big)}{\|\boldsymbol{Ax}\|\|\boldsymbol{Ay}\|} = \frac{\big(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\big)}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|} = \cos\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle,$$

定理 2.17

若列向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ 在 n 阶正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的作用下变换为 $\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay} \in \mathbb{R}^n$, 则向量的内积、长度及向量的夹角都保持不变, 即

$$\big(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay}\big) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \tag{6}$$

$$\|\boldsymbol{Ax}\| = \|\boldsymbol{x}\|, \qquad \|\boldsymbol{Ay}\| = \|\boldsymbol{y}\|, \tag{7}$$

$$\langle \boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle. \tag{8}$$

证: (1) $\big(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay}\big) = \big(\boldsymbol{Ax}\big)^{\mathrm{T}}\big(\boldsymbol{Ay}\big) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ay} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

(2) 在上式中取 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$, 有 $\big(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ax}\big) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, 即 $\|\boldsymbol{Ax}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2$, 故

$$\|\boldsymbol{Ax}\| = \|\boldsymbol{x}\|.$$

同理有 $\|\boldsymbol{Ay}\| = \|\boldsymbol{y}\|$.

(3) 由

$$\cos\langle \boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay}\rangle = \frac{\big(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay}\big)}{\|\boldsymbol{Ax}\|\|\boldsymbol{Ay}\|} = \frac{\big(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\big)}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|} = \cos\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle,$$

得证 $\langle \boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle$. □

Outline

概念的源起

- 向量在加法运算、数乘运算所满足的运算规律, 例如
  - 加法交换律: $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$,
  - 加法结合律: $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$,
  - 数乘分配律: $(\lambda+\mu)\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{x}$;

概念的源起

- 向量在加法运算、数乘运算所满足的运算规律, 例如
  - 加法交换律: $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$,
  - 加法结合律: $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$,
  - 数乘分配律: $(\lambda+\mu)\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{x}$;

  矩阵、多项式、连续函数等, 也都满足完全相同的运算规律.

概念的源起

- 向量在加法运算、数乘运算所满足的运算规律, 例如
  - 加法交换律: $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$,
  - 加法结合律: $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$,
  - 数乘分配律: $(\lambda+\mu)\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{x}$;

  矩阵、多项式、连续函数等, 也都满足完全相同的运算规律.
- 研究不同对象在线性运算方面的所表现的共性, 导致线性空间的公理化定义.

概念的源起

- 向量在加法运算、数乘运算所满足的运算规律, 例如
  - 加法交换律: $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$,
  - 加法结合律: $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$,
  - 数乘分配律: $(\lambda+\mu)\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{x}$;

  矩阵、多项式、连续函数等, 也都满足完全相同的运算规律.
- 研究不同对象在线性运算方面的所表现的共性, 导致线性空间的公理化定义.
- 方法: 代数与几何的结合.

4 个组成部分

线性空间 (亦称向量空间), 有 4 个组成部分: 两个集合 V 和 F, 两个运算——一个称为向量加法, 一个称为数量乘法.

4 个组成部分

线性空间 (亦称向量空间), 有 4 个组成部分: 两个集合 V 和 F, 两个运算——一个称为向量加法, 一个称为数量乘法.

- V: 一些被称为向量的对象的集合. 比如 n 维向量, 矩阵.

4 个组成部分

线性空间 (亦称向量空间), 有 4 个组成部分: 两个集合 V 和 F, 两个运算——一个称为向量加法, 一个称为数量乘法.

- V: 一些被称为向量的对象的集合. 比如 n 维向量, 矩阵.
- F: 一个数域——实数域 $\mathbb{R}$ 或者复数域 $\mathbb{C}$.

4 个组成部分

线性空间 (亦称向量空间), 有 4 个组成部分: 两个集合 V 和 F, 两个运算——一个称为向量加法, 一个称为数量乘法.

- V: 一些被称为向量的对象的集合. 比如 n 维向量, 矩阵.
- F: 一个数域——实数域 $\mathbb{R}$ 或者复数域 $\mathbb{C}$.
- 向量加法 (记为 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$): 集合 V 中两个元素之间的一种运算.

4 个组成部分

线性空间 (亦称向量空间), 有 4 个组成部分: 两个集合 V 和 F, 两个运算——一个称为向量加法, 一个称为数量乘法.

- V: 一些被称为向量的对象的集合. 比如 n 维向量, 矩阵.
- F: 一个数域——实数域 $\mathbb{R}$ 或者复数域 $\mathbb{C}$.
- 向量加法 (记为 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$): 集合 V 中两个元素之间的一种运算.
  运算要满足封闭性: $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in V$, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in V$.

4 个组成部分

线性空间 (亦称向量空间), 有 4 个组成部分: 两个集合 V 和 F, 两个运算——一个称为向量加法, 一个称为数量乘法.

- V: 一些被称为向量的对象的集合. 比如 n 维向量, 矩阵.
- F: 一个数域——实数域 $\mathbb{R}$ 或者复数域 $\mathbb{C}$.
- 向量加法 (记为 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$): 集合 V 中两个元素之间的一种运算.
  运算要满足封闭性: $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in V$, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in V$.
- 数量乘法 (记为 $\lambda\boldsymbol{x}$): 集合 F 和 V 中元素之间的一种运算.

4 个组成部分

线性空间 (亦称向量空间), 有 4 个组成部分: 两个集合 V 和 F, 两个运算——一个称为向量加法, 一个称为数量乘法.

- V: 一些被称为向量的对象的集合. 比如 n 维向量, 矩阵.
- F: 一个数域——实数域 $\mathbb{R}$ 或者复数域 $\mathbb{C}$.
- 向量加法 (记为 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$): 集合 V 中两个元素之间的一种运算.
  运算要满足封闭性: $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in V$, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$.
- 数量乘法 (记为 $\lambda\boldsymbol{x}$): 集合 F 和 V 中元素之间的一种运算.
  运算要满足封闭性: $\lambda\boldsymbol{x} \in V$, $\forall \lambda \in F$, $\forall \boldsymbol{x} \in V$.

线性空间的定义

定义 3.1 (线性空间)

设 V 是一个非空集合, F 是一个数域.

线性空间的定义

定义 3.1 (线性空间)

设 V 是一个非空集合, F 是一个数域.

- 在集合 V 的元素之间定义了一种代数运算, 叫做加法; 这就是说给出了一个法则, 对于 V 中任意两个元素 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$, 在 V 中都有唯一的一个元素 $\boldsymbol{z}$ 与它们对应, 称为 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的和, 记为 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$.

线性空间的定义

定义 3.1 (线性空间)

设 V 是一个非空集合, F 是一个数域.

- 在集合 V 的元素之间定义了一种代数运算, 叫做加法; 这就是说给出了一个法则, 对于 V 中任意两个元素 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$, 在 V 中都有唯一的一个元素 $\boldsymbol{z}$ 与它们对应, 称为 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的和, 记为 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$.
- 在数域 F 与集合 V 的元素之间还定义了一种运算, 叫做数量乘法; 这就是说, 对于数域 F 中任一个数 λ 与 V 中任一个元素 $\boldsymbol{x}$, 在 V 中都有唯一的一个元素 $\boldsymbol{y}$ 与它们对应, 称为 λ 与 $\boldsymbol{x}$ 的数量乘积, 记为 $\boldsymbol{y} = \lambda \boldsymbol{x}$.

线性空间的定义

定义 3.1 (线性空间)

设 V 是一个非空集合, F 是一个数域.

- 在集合 V 的元素之间定义了一种代数运算, 叫做加法; 这就是说给出了一个法则, 对于 V 中任意两个元素 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$, 在 V 中都有唯一的一个元素 $\boldsymbol{z}$ 与它们对应, 称为 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的和, 记为 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$.
- 在数域 F 与集合 V 的元素之间还定义了一种运算, 叫做数量乘法; 这就是说, 对于数域 F 中任一个数 λ 与 V 中任一个元素 $\boldsymbol{x}$, 在 V 中都有唯一的一个元素 $\boldsymbol{y}$ 与它们对应, 称为 λ 与 $\boldsymbol{x}$ 的数量乘积, 记为 $\boldsymbol{y} = \lambda \boldsymbol{x}$.

如果加法与数量乘法满足下述规则, 那么 V 称为数域 F 上的线性空间.

线性空间的定义

定义 3.1 (线性空间)

加法满足下面四条规则:

(1) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$;

线性空间的定义

定义 3.1 (线性空间)

加法满足下面四条规则:

(1) $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$;

(2) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$;

线性空间的定义

定义 3.1 (线性空间)

加法满足下面四条规则:

(1) $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$;

(2) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$;

(3) 在 V 中有一个元素 $\boldsymbol{\theta}$, $\forall \boldsymbol{x}\in V$, 都有

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{x}$$

(具有这个性质的元素 $\boldsymbol{\theta}$ 称为 V 的零元素, 记为 $\mathbf{0}$);

定义 3.1 (线性空间)

加法满足下面四条规则:

(1) $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$;

(2) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$;

(3) 在 V 中有一个元素 $\boldsymbol{\theta}$, $\forall \boldsymbol{x}\in V$, 都有

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{x}$$

(具有这个性质的元素 $\boldsymbol{\theta}$ 称为 V 的零元素, 记为 $\mathbf{0}$);

(4) $\forall \boldsymbol{x}\in V$, $\exists \boldsymbol{y}\in V$, 使得

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$$

($\boldsymbol{y}$ 称为 $\boldsymbol{x}$ 的负元素, 记为 $-\boldsymbol{x}$).

线性空间的定义

定义 3.1 (线性空间)

数量乘法满足下面两条规则:

(5) $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$;

线性空间的定义

定义 3.1 (线性空间)

数量乘法满足下面两条规则:

(5) $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$;

(6) $\lambda(\mu\boldsymbol{x}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{x}$;

线性空间的定义

定义 3.1 (线性空间)

数量乘法满足下面两条规则:

(5) $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$;

(6) $\lambda(\mu\boldsymbol{x}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{x}$;

数量乘法与加法满足下面两条规则:

(7) $(\lambda + \mu)\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{x}$;

线性空间的定义

定义 3.1 (线性空间)

数量乘法满足下面两条规则:

(5) $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$;

(6) $\lambda(\mu\boldsymbol{x}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{x}$;

数量乘法与加法满足下面两条规则:

(7) $(\lambda + \mu)\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{x}$;

(8) $\lambda(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \lambda\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y}$;

线性空间的定义

定义 3.1 (线性空间)

数量乘法满足下面两条规则:

(5) $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$;

(6) $\lambda(\mu\boldsymbol{x}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{x}$;

数量乘法与加法满足下面两条规则:

(7) $(\lambda + \mu)\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{x}$;

(8) $\lambda(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \lambda\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y}$;

在以上规则中, λ, μ 等表示数域 F 中任意数; $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ 等表示集合 V 中任意元素.

线性空间的定义

定义 3.1 (线性空间)

数量乘法满足下面两条规则:

(5) $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$;

(6) $\lambda(\mu\boldsymbol{x}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{x}$;

数量乘法与加法满足下面两条规则:

(7) $(\lambda + \mu)\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{x}$;

(8) $\lambda(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \lambda\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y}$;

在以上规则中, λ, μ 等表示数域 F 中任意数; $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ 等表示集合 V 中任意元素.

☞ 按习惯, V 中的元素称为向量, F 中的数称为数或标量. V 称为线性空间的基集.

线性空间的实例

例 3.2 (n 维向量空间)

- $\mathbb{R}^n$: n 元实坐标向量空间. 运算: (1) 向量的加法, (2) 数与向量的数量乘法.

  $V = \left\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)^{\mathrm{T}},\ \xi_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \cdots, n\right\}$, $F = \mathbb{R}$.

例 3.2 (n 维向量空间)

- $\mathbb{R}^n$: n 元实坐标向量空间. 运算: (1) 向量的加法, (2) 数与向量的数量乘法.
  $V=\left\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}},\ \xi_i\in\mathbb{R}, i=1,2,\cdots,n\right\}$, $F=\mathbb{R}$.
- $\mathbb{C}^n$: n 元复坐标向量空间. 运算: (1) 向量的加法, (2) 数与向量的数量乘法.
  $V=\left\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}},\ \xi_i\in\mathbb{C}, i=1,2,\cdots,n\right\}$, $F=\mathbb{C}$.

线性空间的实例

例 3.2 (n 维向量空间)

- $\mathbb{R}^n$: n 元实坐标向量空间. 运算: (1) 向量的加法, (2) 数与向量的数量乘法.
  $V=\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}},\ \xi_i\in\mathbb{R}, i=1,2,\cdots,n\}$, $F=\mathbb{R}$.
- $\mathbb{C}^n$: n 元复坐标向量空间. 运算: (1) 向量的加法, (2) 数与向量的数量乘法.
  $V=\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}},\ \xi_i\in\mathbb{C}, i=1,2,\cdots,n\}$, $F=\mathbb{C}$.

注意

- 若 $V=\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}},\ \xi_i\in\mathbb{R}, i=1,2,\cdots,n\}$, 而 $F=\mathbb{C}$, 则 V 不是线性空间.

线性空间的实例

例 3.2 (n 维向量空间)

- $\mathbb{R}^n$: n 元实坐标向量空间. 运算: (1) 向量的加法, (2) 数与向量的数量乘法.
  $V=\left\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}},\ \xi_i\in\mathbb{R}, i=1,2,\cdots,n\right\}$, $F=\mathbb{R}$.
- $\mathbb{C}^n$: n 元复坐标向量空间. 运算: (1) 向量的加法, (2) 数与向量的数量乘法.
  $V=\left\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}},\ \xi_i\in\mathbb{C}, i=1,2,\cdots,n\right\}$, $F=\mathbb{C}$.

注意

- 若 $V=\left\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}},\ \xi_i\in\mathbb{R}, i=1,2,\cdots,n\right\}$, 而 $F=\mathbb{C}$, 则 V 不是线性空间. 因为此时数量乘法不满足封闭性.

线性空间的实例

例 3.2 (n 维向量空间)

- $\mathbb{R}^n$: n 元实坐标向量空间. 运算: (1) 向量的加法, (2) 数与向量的数量乘法.
  $V=\left\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}},\ \xi_i\in\mathbb{R}, i=1,2,\cdots,n\right\}$, $F=\mathbb{R}$.
- $\mathbb{C}^n$: n 元复坐标向量空间. 运算: (1) 向量的加法, (2) 数与向量的数量乘法.
  $V=\left\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}},\ \xi_i\in\mathbb{C}, i=1,2,\cdots,n\right\}$, $F=\mathbb{C}$.

注意

- 若 $V=\left\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}},\ \xi_i\in\mathbb{R}, i=1,2,\cdots,n\right\}$, 而 $F=\mathbb{C}$, 则 V 不是线性空间. 因为此时数量乘法不满足封闭性.
- $V=\left\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}},\ \xi_i\in\mathbb{C}, i=1,2,\cdots,n\right\}$, $F=\mathbb{R}$, 此时 V 任是一个线性空间. 记为 $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$.

线性空间的实例

例 3.3

元素属于数域 F 的 $m \times n$ 矩阵, 按 (1) 矩阵的加法, (2) 数与矩阵的数量乘法, 构成数域 F 上的一个线性空间, 用 $F^{m\times n}$ 表示.

线性空间的实例

例 3.3

元素属于数域 F 的 $m \times n$ 矩阵, 按 (1) 矩阵的加法, (2) 数与矩阵的数量乘法, 构成数域 F 上的一个线性空间, 用 $F^{m\times n}$ 表示.

- $\mathbb{R}^{m\times n}$: $m \times n$ 阶实矩阵空间.
- $\mathbb{C}^{m\times n}$: $m \times n$ 阶复矩阵空间.

所有系数在数域 F 中的一元多项式的全体, 称为数域 F 上的一元多项式环, 记为 $F[x]$. F 称为 $F[x]$ 的系数域.

所有系数在数域 F 中的一元多项式的全体, 称为数域 F 上的一元多项式环, 记为 $F[x]$. F 称为 $F[x]$ 的系数域.

例 3.4

- 数域 F 上一元多项式环 $F[x]$, 按 (1) 通常的多项式加法, (2) 数与多项式的乘法, 构成一个数域 F 上的线性空间.

所有系数在数域 F 中的一元多项式的全体, 称为数域 F 上的一元多项式环, 记为 $F[x]$. F 称为 $F[x]$ 的系数域.

例 3.4

- 数域 F 上一元多项式环 $F[x]$, 按 (1) 通常的多项式加法, (2) 数与多项式的乘法, 构成一个数域 F 上的线性空间.
- 如果只考虑其中次数小于 n 的多项式, 再添上零多项式, 也构成数域 F 上的一个线性空间, 用 $F[x]_n$ 表示.

所有系数在数域 F 中的一元多项式的全体, 称为数域 F 上的一元多项式环, 记为 $F[x]$. F 称为 $F[x]$ 的系数域.

例 3.4

- 数域 F 上一元多项式环 $F[x]$, 按 (1) 通常的多项式加法, (2) 数与多项式的乘法, 构成一个数域 F 上的线性空间.
- 如果只考虑其中次数小于 n 的多项式, 再添上零多项式, 也构成数域 F 上的一个线性空间, 用 $F[x]_n$ 表示.
  1. $\mathbb{R}[x]_n$: 实数域 $\mathbb{R}$ 上的次数小于 n 的多项式空间,

$$\mathbb{R}[x]_n = \left\{p(x) \mid p(x) = \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0,\ \alpha_i \in \mathbb{R}\right\}.$$

所有系数在数域 F 中的一元多项式的全体, 称为数域 F 上的一元多项式环, 记为 $F[x]$. F 称为 $F[x]$ 的系数域.

例 3.4

- 数域 F 上一元多项式环 $F[x]$, 按 (1) 通常的多项式加法, (2) 数与多项式的乘法, 构成一个数域 F 上的线性空间.
- 如果只考虑其中次数小于 n 的多项式, 再添上零多项式, 也构成数域 F 上的一个线性空间, 用 $F[x]_n$ 表示.
  1. $\mathbb{R}[x]_n$: 实数域 $\mathbb{R}$ 上的次数小于 n 的多项式空间,
  $$\mathbb{R}[x]_n = \left\{p(x) \mid p(x) = \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0,\ \alpha_i \in \mathbb{R}\right\}.$$
  2. $\mathbb{C}[x]_n$: 复数域 $\mathbb{C}$ 上的次数小于 n 的多项式空间,
  $$\mathbb{C}[x]_n = \left\{p(x) \mid p(x) = \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0,\ \alpha_i \in \mathbb{C}\right\}.$$

例 3.5

全体实函数, 按 (1) 函数加法, (2) 数与函数的数量乘法, 构成一个实数域上的线性空间.

例 3.5

全体实函数, 按 (1) 函数加法, (2) 数与函数的数量乘法, 构成一个实数域上的线性空间.

例 3.6

记 $C[a, b]$ 为区间 $[a, b]$ 上所有连续函数的集合.

例 3.5

全体实函数, 按 (1) 函数加法, (2) 数与函数的数量乘法, 构成一个实数域上的线性空间.

例 3.6

记 $C[a,b]$ 为区间 $[a,b]$ 上所有连续函数的集合. 则 $C[a,b]$ 按 (1) 函数加法, (2) 数与函数的数量乘法, 构成一个实数域上的线性空间.

例 3.5

全体实函数, 按 (1) 函数加法, (2) 数与函数的数量乘法, 构成一个实数域上的线性空间.

例 3.6

记 $C[a,b]$ 为区间 $[a,b]$ 上所有连续函数的集合. 则 $C[a,b]$ 按 (1) 函数加法, (2) 数与函数的数量乘法, 构成一个实数域上的线性空间.

例 3.7

数域 P 按照本身的加法与乘法, 即构成一个自身上的线性空间.

注意

- 对同样的基集 V 和数域 F, 对它们规定不同的加法和数乘, 若构成线性空间, 则得到不同的线性空间.

注意

- 对同样的基集 V 和数域 F, 对它们规定不同的加法和数乘, 若构成线性空间, 则得到不同的线性空间.
- 线性空间的零向量, 也与该空间中向量加法和数量乘法的规定方法有关.

注意

- 对同样的基集 V 和数域 F, 对它们规定不同的加法和数乘, 若构成线性空间, 则得到不同的线性空间.
- 线性空间的零向量, 也与该空间中向量加法和数量乘法的规定方法有关. 比如下面例题中的零元素是常数 1.

注意

- 对同样的基集 V 和数域 F, 对它们规定不同的加法和数乘, 若构成线性空间, 则得到不同的线性空间.
- 线性空间的零向量, 也与该空间中向量加法和数量乘法的规定方法有关. 比如下面例题中的零元素是常数 1.

练习 3.8 (P.212 习题 17 (8))

设 V 是正实数集, $\mathbb{R}$ 为实数域. 定义加法 $\oplus$ 和数乘 $\odot$:

$$\alpha \oplus \beta = \alpha\beta, \qquad \text{(即 } \alpha \text{ 与 } \beta \text{ 的积)}$$

$$k \odot \alpha = \alpha^k, \qquad \text{(即 } \alpha \text{ 的 } k \text{ 次幂)}$$

其中 $\alpha, \beta \in V$, $k \in \mathbb{R}$. 问: V 对于加法 $\oplus$ 和数乘 $\odot$ 是否构成 $\mathbb{R}$ 上的线性空间?

解: 加法 $\oplus$ 封闭: $\forall \alpha, \beta \in V = \mathbb{R}^+$, $\alpha \oplus \beta = \alpha\beta \in V$.

解: 加法 $\oplus$ 封闭: $\forall \alpha, \beta \in V = \mathbb{R}^+$, $\alpha \oplus \beta = \alpha\beta \in V$. 且满足:

(1) $\alpha \oplus \beta = \alpha\beta = \beta\alpha = \beta \oplus \alpha$;

解: 加法 $\oplus$ 封闭: $\forall \alpha, \beta \in V = \mathbb{R}^+$, $\alpha \oplus \beta = \alpha\beta \in V$. 且满足:

(1) $\alpha \oplus \beta = \alpha\beta = \beta\alpha = \beta \oplus \alpha$;

(2) $(\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma = (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) = \alpha \oplus (\beta \oplus \gamma)$;

解: 加法 $\oplus$ 封闭: $\forall \alpha, \beta \in V = \mathbb{R}^+$, $\alpha \oplus \beta = \alpha\beta \in V$. 且满足:

(1) $\alpha \oplus \beta = \alpha\beta = \beta\alpha = \beta \oplus \alpha$;

(2) $(\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma = (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) = \alpha \oplus (\beta \oplus \gamma)$;

(3) 零元为常数 1: $1 \oplus \alpha = \alpha$;

解: 加法 $\oplus$ 封闭: $\forall \alpha, \beta \in V = \mathbb{R}^+$, $\alpha \oplus \beta = \alpha\beta \in V$. 且满足:

(1) $\alpha \oplus \beta = \alpha\beta = \beta\alpha = \beta \oplus \alpha$;

(2) $(\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma = (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) = \alpha \oplus (\beta \oplus \gamma)$;

(3) 零元为常数 1: $1 \oplus \alpha = \alpha$;

(4) $\forall \alpha \in V$ 的负元为 $\frac{1}{\alpha}$: $\frac{1}{\alpha} \oplus \alpha = 1$;

解: 加法 $\oplus$ 封闭: $\forall \alpha, \beta \in V = \mathbb{R}^+$, $\alpha \oplus \beta = \alpha\beta \in V$. 且满足:

(1) $\alpha \oplus \beta = \alpha\beta = \beta\alpha = \beta \oplus \alpha$;

(2) $(\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma = (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) = \alpha \oplus (\beta \oplus \gamma)$;

(3) 零元为常数 1: $1 \oplus \alpha = \alpha$;

(4) $\forall \alpha \in V$ 的负元为 $\frac{1}{\alpha}$: $\frac{1}{\alpha} \oplus \alpha = 1$;

数乘 $\odot$ 封闭: $\forall \alpha \in V = \mathbb{R}^+$, $k \in \mathbb{R}$, $k \odot \alpha = \alpha^k \in V = \mathbb{R}^+$.

解: 加法 $\oplus$ 封闭: $\forall \alpha, \beta \in V = \mathbb{R}^+$, $\alpha \oplus \beta = \alpha\beta \in V$. 且满足:

(1) $\alpha \oplus \beta = \alpha\beta = \beta\alpha = \beta \oplus \alpha$;

(2) $(\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma = (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) = \alpha \oplus (\beta \oplus \gamma)$;

(3) 零元为常数 1: $1 \oplus \alpha = \alpha$;

(4) $\forall \alpha \in V$ 的负元为 $\frac{1}{\alpha}$: $\frac{1}{\alpha} \oplus \alpha = 1$;

数乘 $\odot$ 封闭: $\forall \alpha \in V = \mathbb{R}^+$, $k \in \mathbb{R}$, $k \odot \alpha = \alpha^k \in V = \mathbb{R}^+$. 且满足:

(5) $1 \odot \alpha = \alpha^1 = \alpha$;

解: 加法 $\oplus$ 封闭: $\forall \alpha, \beta \in V = \mathbb{R}^+$, $\alpha \oplus \beta = \alpha\beta \in V$. 且满足:

(1) $\alpha \oplus \beta = \alpha\beta = \beta\alpha = \beta \oplus \alpha$;

(2) $(\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma = (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) = \alpha \oplus (\beta \oplus \gamma)$;

(3) 零元为常数 1: $1 \oplus \alpha = \alpha$;

(4) $\forall \alpha \in V$ 的负元为 $\frac{1}{\alpha}$: $\frac{1}{\alpha} \oplus \alpha = 1$;

数乘 $\odot$ 封闭: $\forall \alpha \in V = \mathbb{R}^+$, $k \in \mathbb{R}$, $k \odot \alpha = \alpha^k \in V = \mathbb{R}^+$. 且满足:

(5) $1 \odot \alpha = \alpha^1 = \alpha$;

(6) $(k_1 k_2) \odot \alpha = \alpha^{k_1 k_2} = (\alpha^{k_2})^{k_1} = k_1 \odot (\alpha^{k_2}) = k_1 \odot (k_2 \odot \alpha)$;

解: 加法 $\oplus$ 封闭: $\forall\alpha,\beta\in V=\mathbb{R}^+$, $\alpha\oplus\beta=\alpha\beta\in V$. 且满足:

(1) $\alpha\oplus\beta=\alpha\beta=\beta\alpha=\beta\oplus\alpha$;

(2) $(\alpha\oplus\beta)\oplus\gamma=(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)=\alpha\oplus(\beta\oplus\gamma)$;

(3) 零元为常数 1: $1\oplus\alpha=\alpha$;

(4) $\forall\alpha\in V$ 的负元为 $\frac{1}{\alpha}$: $\frac{1}{\alpha}\oplus\alpha=1$;

数乘 $\odot$ 封闭: $\forall\alpha\in V=\mathbb{R}^+$, $k\in\mathbb{R}$, $k\odot\alpha=\alpha^k\in V=\mathbb{R}^+$. 且满足:

(5) $1\odot\alpha=\alpha^1=\alpha$;

(6) $(k_1k_2)\odot\alpha=\alpha^{k_1k_2}=(\alpha^{k_2})^{k_1}=k_1\odot(\alpha^{k_2})=k_1\odot(k_2\odot\alpha)$;

(7) $(k_1+k_2)\odot\alpha=\alpha^{k_1+k_2}=\alpha^{k_1}\alpha^{k_2}=\alpha^{k_1}\oplus\alpha^{k_2}=k_1\odot\alpha\oplus k_2\odot\alpha$;

解: 加法 $\oplus$ 封闭: $\forall \alpha, \beta \in V = \mathbb{R}^+$, $\alpha \oplus \beta = \alpha\beta \in V$. 且满足:

(1) $\alpha \oplus \beta = \alpha\beta = \beta\alpha = \beta \oplus \alpha$;

(2) $(\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma = (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) = \alpha \oplus (\beta \oplus \gamma)$;

(3) 零元为常数 1: $1 \oplus \alpha = \alpha$;

(4) $\forall \alpha \in V$ 的负元为 $\frac{1}{\alpha}$: $\frac{1}{\alpha} \oplus \alpha = 1$;

数乘 $\odot$ 封闭: $\forall \alpha \in V = \mathbb{R}^+$, $k \in \mathbb{R}$, $k \odot \alpha = \alpha^k \in V = \mathbb{R}^+$. 且满足:

(5) $1 \odot \alpha = \alpha^1 = \alpha$;

(6) $(k_1 k_2) \odot \alpha = \alpha^{k_1 k_2} = (\alpha^{k_2})^{k_1} = k_1 \odot (\alpha^{k_2}) = k_1 \odot (k_2 \odot \alpha)$;

(7) $(k_1 + k_2) \odot \alpha = \alpha^{k_1 + k_2} = \alpha^{k_1}\alpha^{k_2} = \alpha^{k_1} \oplus \alpha^{k_2} = k_1 \odot \alpha \oplus k_2 \odot \alpha$;

(8) $k \odot (\alpha \oplus \beta) = k \odot (\alpha\beta) = (\alpha\beta)^k = \alpha^k\beta^k = \alpha^k \oplus \beta^k = (k \odot \alpha) \oplus (k \odot \beta)$.

解: 加法 $\oplus$ 封闭: $\forall \alpha, \beta \in V = \mathbb{R}^+$, $\alpha \oplus \beta = \alpha\beta \in V$. 且满足:

(1) $\alpha \oplus \beta = \alpha\beta = \beta\alpha = \beta \oplus \alpha$;

(2) $(\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma = (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) = \alpha \oplus (\beta \oplus \gamma)$;

(3) 零元为常数 1: $1 \oplus \alpha = \alpha$;

(4) $\forall \alpha \in V$ 的负元为 $\frac{1}{\alpha}$: $\frac{1}{\alpha} \oplus \alpha = 1$;

数乘 $\odot$ 封闭: $\forall \alpha \in V = \mathbb{R}^+$, $k \in \mathbb{R}$, $k \odot \alpha = \alpha^k \in V = \mathbb{R}^+$. 且满足:

(5) $1 \odot \alpha = \alpha^1 = \alpha$;

(6) $(k_1 k_2) \odot \alpha = \alpha^{k_1 k_2} = (\alpha^{k_2})^{k_1} = k_1 \odot (\alpha^{k_2}) = k_1 \odot (k_2 \odot \alpha)$;

(7) $(k_1 + k_2) \odot \alpha = \alpha^{k_1+k_2} = \alpha^{k_1}\alpha^{k_2} = \alpha^{k_1} \oplus \alpha^{k_2} = k_1 \odot \alpha \oplus k_2 \odot \alpha$;

(8) $k \odot (\alpha \oplus \beta) = k \odot (\alpha\beta) = (\alpha\beta)^k = \alpha^k\beta^k = \alpha^k \oplus \beta^k = (k \odot \alpha) \oplus (k \odot \beta)$.

所以 V 对于加法 $\oplus$ 和数乘 $\odot$ 构成 $\mathbb{R}$ 上的线性空间. $\square$

例 3.9

设集合 $Z = \{\boldsymbol{z}\}$. 向量加法: $\boldsymbol{z} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}$. 数量乘法: $\lambda\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}$, $\lambda \in F$.

例 3.9

设集合 $Z=\{\boldsymbol{z}\}$. 向量加法: $\boldsymbol{z}+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}$. 数量乘法: $\lambda\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}$, $\lambda\in F$. 可以证明: 集合 Z 是数域 F 上的线性空间.

例 3.9

设集合 $Z = \{\boldsymbol{z}\}$. 向量加法: $\boldsymbol{z} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}$. 数量乘法: $\lambda\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}$, $\lambda \in F$. 可以证明: 集合 Z 是数域 F 上的线性空间.

这个线性空间的零元素是什么?

例 3.9

设集合 $Z=\{\boldsymbol{z}\}$. 向量加法: $\boldsymbol{z}+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}$. 数量乘法: $\lambda\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}$, $\lambda\in F$. 可以证明: 集合 Z 是数域 F 上的线性空间.

这个线性空间的零元素是什么? 显然, 只能是 $\boldsymbol{z}$.

例 3.9

设集合 $Z=\{\boldsymbol{z}\}$. 向量加法: $\boldsymbol{z}+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}$. 数量乘法: $\lambda\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}$, $\lambda\in F$. 可以证明: 集合 Z 是数域 F 上的线性空间.

这个线性空间的零元素是什么? 显然, 只能是 $\boldsymbol{z}$.

但有趣的是, 我们并没有指明 $\boldsymbol{z}$ 的具体内容. 事实上, $\boldsymbol{z}$ 可以是任何一个向量、矩阵、函数等等.

我们再次强调, 零向量不一定是形如 0, $(0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$, $\left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right]$ 之类的对象, 而必须是符合零向量的定义的那个元素.

我们再次强调, 零向量不一定是形如 0, $(0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$, $\left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right]$ 之类的对象, 而必须是符合零向量的定义的那个元素.

例如, 集合 $C=\{(x_1,\,x_2)\mid x_1,\,x_2\in\mathbb{C}\}$, 向量加法:

$$(x_1,\,x_2)+(y_1,\,y_2)=(x_1+y_1+1,\,x_2+y_2+1),$$

数量乘法:

$$\alpha(x_1,\,x_2)=(\alpha x_1+\alpha-1,\,\alpha x_2+\alpha-1).$$

容易证明该集合是数域 $\mathbb{C}$ 上的线性空间.

我们再次强调, 零向量不一定是形如 0, $(0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$, $\left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right]$ 之类的对象, 而必须是符合零向量的定义的那个元素.

例如, 集合 $C=\{(x_1,\,x_2)\mid x_1,\,x_2\in\mathbb{C}\}$, 向量加法:

$$(x_1,\,x_2)+(y_1,\,y_2)=(x_1+y_1+1,\,x_2+y_2+1),$$

数量乘法:

$$\alpha(x_1,\,x_2)=(\alpha x_1+\alpha-1,\,\alpha x_2+\alpha-1).$$

容易证明该集合是数域 $\mathbb{C}$ 上的线性空间.

问题: 零向量是什么? $(x_1,\,x_2)$ 的负向量呢?

我们再次强调, 零向量不一定是形如 0, $(0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$, $\left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right]$ 之类的对象, 而必须是符合零向量的定义的那个元素.

例如, 集合 $C=\{(x_1,\,x_2)\mid x_1,\,x_2\in\mathbb{C}\}$, 向量加法:

$$(x_1,\,x_2)+(y_1,\,y_2)=(x_1+y_1+1,\,x_2+y_2+1),$$

数量乘法:

$$\alpha(x_1,\,x_2)=(\alpha x_1+\alpha-1,\,\alpha x_2+\alpha-1).$$

容易证明该集合是数域 $\mathbb{C}$ 上的线性空间.

问题: 零向量是什么? $(x_1,\,x_2)$ 的负向量呢?

☞ 零向量: $\mathbf{0}=(-1,-1)$.

我们再次强调, 零向量不一定是形如 0, $(0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$, $\left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right]$ 之类的对象, 而必须是符合零向量的定义的那个元素.

例如, 集合 $C=\{(x_1,\,x_2)\mid x_1,\,x_2\in\mathbb{C}\}$, 向量加法:

$$(x_1,\,x_2)+(y_1,\,y_2)=(x_1+y_1+1,\,x_2+y_2+1),$$

数量乘法:

$$\alpha(x_1,\,x_2)=(\alpha x_1+\alpha-1,\,\alpha x_2+\alpha-1).$$

容易证明该集合是数域 $\mathbb{C}$ 上的线性空间.

问题: 零向量是什么? $(x_1,\,x_2)$ 的负向量呢?

☞ 零向量: $\mathbf{0}=(-1,-1)$. 因为

$$\boldsymbol{u}+\mathbf{0}=(x_1,x_2)+(-1,-1)=\big(x_1+(-1)+1,x_2+(-1)+1\big)=(x_1,x_2)=\boldsymbol{u}.$$

我们再次强调, 零向量不一定是形如 0, $(0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$, $\left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right]$ 之类的对象, 而必须是符合零向量的定义的那个元素.

例如, 集合 $C=\{(x_1,\, x_2) \mid x_1,\, x_2\in\mathbb{C}\}$, 向量加法:

$$(x_1,\, x_2)+(y_1,\, y_2)=(x_1+y_1+1,\, x_2+y_2+1),$$

数量乘法:

$$\alpha(x_1,\, x_2)=(\alpha x_1+\alpha-1,\, \alpha x_2+\alpha-1).$$

容易证明该集合是数域 $\mathbb{C}$ 上的线性空间.

问题: 零向量是什么? $(x_1,\, x_2)$ 的负向量呢?

☞ 零向量: $\mathbf{0}=(-1,-1)$. 因为

$$\boldsymbol{u}+\mathbf{0}=(x_1,x_2)+(-1,-1)=\big(x_1+(-1)+1,x_2+(-1)+1\big)=(x_1,x_2)=\boldsymbol{u}.$$

负向量: $-(x_1,x_2)=(-x_1-2,-x_2-2)$.

我们再次强调, 零向量不一定是形如 0, $(0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$, $\left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right]$ 之类的对象, 而必须是符合零向量的定义的那个元素.

例如, 集合 $C=\{(x_1,\,x_2)\mid x_1,\,x_2\in\mathbb{C}\}$, 向量加法:

$$(x_1,\,x_2)+(y_1,\,y_2)=(x_1+y_1+1,\,x_2+y_2+1),$$

数量乘法:

$$\alpha(x_1,\,x_2)=(\alpha x_1+\alpha-1,\,\alpha x_2+\alpha-1).$$

容易证明该集合是数域 $\mathbb{C}$ 上的线性空间.

问题: 零向量是什么? $(x_1,\,x_2)$ 的负向量呢?

☞ 零向量: $\mathbf{0}=(-1,-1)$. 因为

$$\boldsymbol{u}+\mathbf{0}=(x_1,x_2)+(-1,-1)=\big(x_1+(-1)+1,x_2+(-1)+1\big)=(x_1,x_2)=\boldsymbol{u}.$$

负向量: $-(x_1,x_2)=(-x_1-2,-x_2-2)$. 事实上

$$(x_1,x_2)+(-x_1-2,-x_2-2)=\big(x_1+(-x_1-2)+1,-x_2+(x_2-2)+1\big)=(-1,-1)=\mathbf{0}.$$

线性空间是 n 维向量空间的抽象和推广.
为了几何直观, 我们也把线性空间叫做向量空间.
但这里的向量不一定是有序数组, 而是广义的向量, 例如函数、矩阵等.

线性空间的简单性质

1. 零元素是唯一的.

线性空间的简单性质

1. 零元素是唯一的.
2. 负元素是唯一的.

线性空间的简单性质

1. 零元素是唯一的.
2. 负元素是唯一的.
3. $0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$; $k\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$; $(-1)\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$.

线性空间的简单性质

1. 零元素是唯一的.
2. 负元素是唯一的.
3. $0\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$; $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$; $(-1)\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$.
4. 如果 $k\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, 那么 $k = 0$ 或者 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

Outline

平面 $\mathbb{R}^2$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的子集, 而 $\mathbb{R}^2$ 也构成线性空间, 称 $\mathbb{R}^2$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的线性子空间.

平面 $\mathbb{R}^2$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的子集, 而 $\mathbb{R}^2$ 也构成线性空间, 称 $\mathbb{R}^2$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的线性子空间.

过原点的一条直线或一个平面都是 $\mathbb{R}^3$ 的子集, 而且它们关于向量加法和数乘分别构成一个一维和二维的线性空间.

平面 $\mathbb{R}^2$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的子集, 而 $\mathbb{R}^2$ 也构成线性空间, 称 $\mathbb{R}^2$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的线性子空间.

过原点的一条直线或一个平面都是 $\mathbb{R}^3$ 的子集, 而且它们关于向量加法和数乘分别构成一个一维和二维的线性空间.

考虑一般的情形: 线性空间的子集, 关于原线性空间的加法和数乘, 可能构成一个线性空间?

子空间

定义 4.1

数域 F 上的线性空间 V 的一个非空子集合 S 称为 V 的一个线性子空间 (或简称子空间, subspace) , 如果 S 对于 V 的两种运算也构成数域 F 上的线性空间.

子空间

定义 4.1

数域 F 上的线性空间 V 的一个非空子集合 S 称为 V 的一个线性子空间 (或简称子空间, subspace) ，如果 S 对于 V 的两种运算也构成数域 F 上的线性空间.

定理 4.2

如果线性空间 V 的一个非空集合 S 对于 V 的两种运算是封闭的, 即

1. $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S$, 都有 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in S$;
2. $\forall \boldsymbol{x} \in S, \forall \lambda \in F$, 都有 $\lambda \boldsymbol{x} \in S$.

那么 S 就是一个子空间.

子空间

定义 4.1

数域 F 上的线性空间 V 的一个非空子集合 S 称为 V 的一个线性子空间 (或简称子空间, subspace)，如果 S 对于 V 的两种运算也构成数域 F 上的线性空间.

定理 4.2

如果线性空间 V 的一个非空集合 S 对于 V 的两种运算是封闭的, 即

1. $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S$, 都有 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in S$;
2. $\forall \boldsymbol{x} \in S, \forall \lambda \in F$, 都有 $\lambda \boldsymbol{x} \in S$.

那么 S 就是一个子空间.

☞ 若 $\boldsymbol{x} \in S$, 则 $-\boldsymbol{x}=(-1)\boldsymbol{x} \in S$;

子空间

定义 4.1

数域 F 上的线性空间 V 的一个非空子集合 S 称为 V 的一个线性子空间 (或简称子空间, subspace) , 如果 S 对于 V 的两种运算也构成数域 F 上的线性空间.

定理 4.2

如果线性空间 V 的一个非空集合 S 对于 V 的两种运算是封闭的, 即

1. $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S$, 都有 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in S$;
2. $\forall \boldsymbol{x} \in S, \forall \lambda \in F$, 都有 $\lambda \boldsymbol{x} \in S$.

那么 S 就是一个子空间.

☞ 若 $\boldsymbol{x} \in S$, 则 $-\boldsymbol{x}=(-1)\boldsymbol{x} \in S$; 且 $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\mathbf{0} \in S$.

子空间

定义 4.1

数域 F 上的线性空间 V 的一个非空子集合 S 称为 V 的一个线性子空间 (或简称子空间, subspace) , 如果 S 对于 V 的两种运算也构成数域 F 上的线性空间.

定理 4.2

如果线性空间 V 的一个非空集合 S 对于 V 的两种运算是封闭的, 即

1. $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S$, 都有 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in S$;
2. $\forall \boldsymbol{x} \in S, \forall \lambda \in F$, 都有 $\lambda \boldsymbol{x} \in S$.

那么 S 就是一个子空间.

☞ 若 $\boldsymbol{x} \in S$, 则 $-\boldsymbol{x} = (-1)\boldsymbol{x} \in S$; 且 $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \in S$. 又 S 中的元素也是 V 的元素, 故满足 V 中的结合律、交换律、分配律等.

定理 4.3

数域 F 上的线性空间 V 的一个非空子集合 S 为 V 的一个线性子空间 $\Longleftrightarrow \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S, \forall \lambda \in F$, 都有

$$\lambda \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in S.$$

定理 4.3

数域 F 上的线性空间 V 的一个非空子集合 S 为 V 的一个线性子空间 $\Longleftrightarrow \forall \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in S$, $\forall \lambda \in F$, 都有

$$\lambda \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in S.$$

证: (1) 充分性. $\forall \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in S$, $\forall \lambda \in F$, 因

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = 1\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in S,$$

$$\lambda \boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} \in S,$$

故 S 对于 V 的两种运算是封闭的. 即 S 为 V 的一个线性子空间.

定理 4.3

数域 F 上的线性空间 V 的一个非空子集合 S 为 V 的一个线性子空间 $\Longleftrightarrow \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S, \forall \lambda \in F$, 都有

$$\lambda \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in S.$$

证: (1) 充分性. $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S, \forall \lambda \in F$, 因

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = 1\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in S,$$

$$\lambda \boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} + \mathbf{0} \in S,$$

故 S 对于 V 的两种运算是封闭的. 即 S 为 V 的一个线性子空间.

(2) 必要性. $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S, \forall \lambda \in F$, 由数乘封闭性, 有

$$\lambda \boldsymbol{x} \in S,$$

又由加法封闭性, 有

$$\lambda \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in S. \quad \square$$

例 4.4

在线性空间中, 由单个的零向量所组成的子集合是一个线性子空间, 它叫做零子空间.

例 4.4

在线性空间中, 由单个的零向量所组成的子集合是一个线性子空间, 它叫做零子空间.

例 4.5

线性空间 V 本身也是 V 的一个子空间.

例 4.4

在线性空间中, 由单个的零向量所组成的子集合是一个线性子空间, 它叫做零子空间.

例 4.5

线性空间 V 本身也是 V 的一个子空间.

每个线性空间至少有两个子空间: 零子空间和线性空间本身. 这两个子空间通常叫做 V 的平凡子空间 (trivial subspace), 而其它的子空间叫做非平凡子空间.

例 4.4

在线性空间中, 由单个的零向量所组成的子集合是一个线性子空间, 它叫做零子空间.

例 4.5

线性空间 V 本身也是 V 的一个子空间.

每个线性空间至少有两个子空间: 零子空间和线性空间本身. 这两个子空间通常叫做 V 的平凡子空间 (trivial subspace), 而其它的子空间叫做非平凡子空间.

例 4.6

在全体实函数组成的空间中, 所有的实系数多项式组成一个子空间.

例 4.4

在线性空间中, 由单个的零向量所组成的子集合是一个线性子空间, 它叫做零子空间.

例 4.5

线性空间 V 本身也是 V 的一个子空间.

每个线性空间至少有两个子空间: 零子空间和线性空间本身. 这两个子空间通常叫做 V 的平凡子空间 (trivial subspace), 而其它的子空间叫做非平凡子空间.

例 4.6

在全体实函数组成的空间中, 所有的实系数多项式组成一个子空间.

例 4.7

$F[x]_n$ 是线性空间 $F[x]$ 的子空间.

例 4.8

设 $\boldsymbol{A} \in F^{m\times n}$, 则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 的解集合

$$S = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}\}$$

是 F^n 的一个子空间, 叫做齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 的解空间;

例 4.8

设 $\boldsymbol{A} \in F^{m \times n}$, 则齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解集合

$$S = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

是 F^n 的一个子空间, 叫做齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解空间; 也称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的零空间 (nullspace) 或核空间 (kernel), 记作 $N(\boldsymbol{A})$ 或 $\ker(\boldsymbol{A})$.

例 4.8

设 $\boldsymbol{A} \in F^{m\times n}$, 则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解集合

$$S = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}\}$$

是 F^n 的一个子空间, 叫做齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解空间; 也称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的零空间 (nullspace) 或核空间 (kernel), 记作 $N(\boldsymbol{A})$ 或 $\ker(\boldsymbol{A})$.

☞ 但是, 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的解集合 W 不是 F^n 的子空间.

例 4.8

设 $\boldsymbol{A} \in F^{m\times n}$, 则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解集合

$$S = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}\}$$

是 F^n 的一个子空间, 叫做齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解空间; 也称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的零空间 (nullspace) 或核空间 (kernel), 记作 $N(\boldsymbol{A})$ 或 $\ker(\boldsymbol{A})$.

☞ 但是, 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的解集合 W 不是 F^n 的子空间.
事实上, 若 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 无解, 则 W 是空集, 当然 W 不是线性空间.

例 4.8

设 $\boldsymbol{A} \in F^{m\times n}$, 则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 的解集合

$$S = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}\}$$

是 F^n 的一个子空间, 叫做齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 的解空间; 也称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的零空间 (nullspace) 或核空间 (kernel), 记作 $N(\boldsymbol{A})$ 或 $\ker(\boldsymbol{A})$.

☞ 但是, 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的解集合 W 不是 F^n 的子空间.
事实上, 若 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 无解, 则 W 是空集, 当然 W 不是线性空间.
当 W 非空, 由于 $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$, 则 $\mathbf{0} \notin W$, 因此 W 不是线性空间.

例 4.9

设 $\mathbb{R}^3$ 的子集合

$$V_1 = \{(x,0,0) \mid x \in \mathbb{R}\},$$
$$V_2 = \{(1,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\},$$

则 V_1 是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间; 而 V_2 不是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间.

☞ V_1 是 x 轴上的全体向量;

例 4.9

设 $\mathbb{R}^3$ 的子集合

$$V_1 = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\},$$
$$V_2 = \{(1, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\},$$

则 V_1 是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间; 而 V_2 不是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间.

☞ V_1 是 x 轴上的全体向量; V_2 是过点 $(1, 0, 0)$ 与 z 轴平行的直线上的全体向量.

例 4.9

设 $\mathbb{R}^3$ 的子集合

$$V_1 = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\},$$
$$V_2 = \{(1, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\},$$

则 V_1 是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间; 而 V_2 不是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间.

☞ V_1 是 x 轴上的全体向量; V_2 是过点 $(1, 0, 0)$ 与 z 轴平行的直线上的全体向量. 显然 V_2 关于加法和数乘不封闭.

定理 4.10

设 V 为数域 F 上的线性空间, S 是 V 的一个非空子集和, 则 S 中一切向量组的所有线性组合组成的集合

$$W=\left\{k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m \mid \boldsymbol{\alpha}_i\in S,\ i=1,2,\cdots,m\right\}$$

是 V 中包含 S 的最小的子空间.

定理 4.10

设 V 为数域 F 上的线性空间, S 是 V 的一个非空子集和, 则 S 中一切向量组的所有线性组合组成的集合

$$W=\left\{k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m \mid \boldsymbol{\alpha}_i\in S,\ i=1,2,\cdots,m\right\}$$

是 V 中包含 S 的最小的子空间.

证: (1) W 显然包含 S, 设 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\in W$, 则存在 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n\in S$ 及 $k_1, k_2, \cdots, k_m, l_1, l_2, \cdots, l_n\in F$, 使得

$$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$
$$\boldsymbol{\beta}=l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+l_n\boldsymbol{\beta}_n.$$

定理 4.10

设 V 为数域 F 上的线性空间, S 是 V 的一个非空子集和, 则 S 中一切向量组的所有线性组合组成的集合

$$W = \left\{k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m \mid \boldsymbol{\alpha}_i \in S,\ i = 1, 2, \cdots, m\right\}$$

是 V 中包含 S 的最小的子空间.

证: (1) W 显然包含 S, 设 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in W$, 则存在 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n \in S$ 及 $k_1, k_2, \cdots, k_m, l_1, l_2, \cdots, l_n \in F$, 使得

$$\boldsymbol{\alpha} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$

$$\boldsymbol{\beta} = l_1\boldsymbol{\beta}_1 + l_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + l_n\boldsymbol{\beta}_n.$$

于是

$$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \left(k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m\right) + \left(l_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + l_n\boldsymbol{\beta}_n\right) \in W.$$

又 $\forall k \in F$, 有

$$k\boldsymbol{\alpha} = k\big(k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m\big) = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + kk_m\boldsymbol{\alpha}_m \in W,$$

又 $\forall k \in F$, 有

$$k\boldsymbol{\alpha} = k\big(k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m\big) = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + kk_m\boldsymbol{\alpha}_m \in W,$$

所以 W 是 V 的一个子空间.

又 $\forall k \in F$, 有

$$k\boldsymbol{\alpha} = k\big(k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m\big) = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + kk_m\boldsymbol{\alpha}_m \in W,$$

所以 W 是 V 的一个子空间.

(2) 再设 W^* 是 V 中包含 S 的任一子空间, 则

$$\forall\ \boldsymbol{\alpha} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m \in W,$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m \in S \subseteq W^*$, 所以必有 $\boldsymbol{\alpha} \in W^*$, 从而 $W \subseteq W^*$, 因此 W 是 V 中包含 S 的最小的子空间. □

定义 4.11

定理 4.10 中的 W 称为由 V 的非空子集 S 生成的 V 的子空间,

定义 4.11

定理 4.10 中的 W 称为由 V 的非空子集 S 生成的 V 的子空间, 或者说 S 生成 W.

定义 4.11

定理 4.10 中的 W 称为由 V 的非空子集 S 生成的 V 的子空间, 或者说 S 生成 W.

当 S 为有限子集 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ 时, 记

$$W = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m), \tag{9}$$

并称 W 是由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 生成的子空间.

定义 4.11

定理 4.10 中的 W 称为由 V 的非空子集 S 生成的 V 的子空间, 或者说 S 生成 W.

当 S 为有限子集 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ 时, 记

$$W = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m), \tag{9}$$

并称 W 是由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 生成的子空间.

也记 (9) 为

$$W = \operatorname{span}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m).$$

定义 4.11

定理 4.10 中的 W 称为由 V 的非空子集 S 生成的 V 的子空间, 或者说 S 生成 W.

当 S 为有限子集 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ 时, 记

$$W = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m), \tag{9}$$

并称 W 是由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 生成的子空间.

也记 (9) 为

$$W = \operatorname{span}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m).$$

例如, 齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的解空间就是由它的基础解系生成的子空间.

For example, if $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$ is a vector in $\mathbb{R}^3$, then $\mathrm{span}[u]$ is the straight line passing through the origin and $\boldsymbol{u}$.

For example, if $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$ is a vector in $\mathbb{R}^3$, then span$[u]$ is the straight line passing through the origin and $\boldsymbol{u}$.

If $S = \text{span}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$, where $\boldsymbol{u}$ and $\boldsymbol{v}$ are two nonzero vectors in $\mathbb{R}^3$ not lying on the same line, For example, if $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$ is a vector in $\mathbb{R}^3$, then span$[u]$ is the straight line passing through the origin and $\boldsymbol{u}$.

If $S = \text{span}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$, where $\boldsymbol{u}$ and $\boldsymbol{v}$ are two nonzero vectors in $\mathbb{R}^3$ not lying on the same line, then $S = \text{span}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$ is the plane passing through the origin and the points $\boldsymbol{u}$ and $\boldsymbol{v}$.

例 4.12

- $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ spans the line $y = x$ in $\mathbb{R}^2$.

例 4.12

- $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ spans the line $y = x$ in $\mathbb{R}^2$.
- The unit vectors $\left\{ \boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ spans $\mathbb{R}^3$.

例 4.12

- $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ spans the line $y = x$ in $\mathbb{R}^2$.
- The unit vectors $\left\{ \boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ spans $\mathbb{R}^3$.
- The unit vectors $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ in $\mathbb{R}^n$ form a spanning set for $\mathbb{R}^n$.

例 4.12

- $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ spans the line $y = x$ in $\mathbb{R}^2$.
- The unit vectors $\left\{ \boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ spans $\mathbb{R}^3$.
- The unit vectors $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ in $\mathbb{R}^n$ form a spanning set for $\mathbb{R}^n$.
- The finite set $\{1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}\}$ spans the space of all polynomials such that $\deg p(x) \leqslant n - 1$,

例 4.12

- $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\right\}$ spans the line $y = x$ in $\mathbb{R}^2$.
- The unit vectors $\left\{\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ spans $\mathbb{R}^3$.
- The unit vectors $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ in $\mathbb{R}^n$ form a spanning set for $\mathbb{R}^n$.
- The finite set $\{1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}\}$ spans the space of all polynomials such that $\deg p(x) \leqslant n-1$, and the infinite set $\{1, x, x^2, \cdots\}$ spans the space of all polynomials.

定理 4.13

如果 V_1, V_2 是线性空间 V 的两个子空间, 那么它们的交 $V_1 \cap V_2$ 也是 V 的子空间.

定理 4.13

如果 V_1, V_2 是线性空间 V 的两个子空间, 那么它们的交 $V_1 \cap V_2$ 也是 V 的子空间.

由集合的交的定义有, 子空间的交适合下列运算规律:

$$V_1 \cap V_2 = V_2 \cap V_1, \qquad \text{(交换律)}$$

$$(V_1 \cap V_2) \cap V_3 = V_1 \cap (V_2 \cap V_3). \qquad \text{(结合律)}$$

定理 4.13

如果 V_1, V_2 是线性空间 V 的两个子空间, 那么它们的交 $V_1 \cap V_2$ 也是 V 的子空间.

由集合的交的定义有, 子空间的交适合下列运算规律:

$$V_1 \cap V_2 = V_2 \cap V_1, \qquad \text{(交换律)}$$

$$(V_1 \cap V_2) \cap V_3 = V_1 \cap (V_2 \cap V_3). \qquad \text{(结合律)}$$

由结合律, 可以定义多个子空间的交:

$$V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_s = \bigcap_{i=1}^{s} V_i,$$

它也是子空间.

定义 4.14 (子空间的和)

设 V_1, V_2 是线性空间 V 的子空间, 所谓 V_1 与 V_2 的和, 是指由所有能表示成 $\alpha_1 + \alpha_2$, 而 $\alpha_1 \in V_1$, $\alpha_2 \in V_2$ 的向量组成的子集合, 记作 $V_1 + V_2$.

定义 4.14 (子空间的和)

设 V_1, V_2 是线性空间 V 的子空间, 所谓 V_1 与 V_2 的和, 是指由所有能表示成 $\alpha_1+\alpha_2$, 而 $\alpha_1 \in V_1$, $\alpha_2 \in V_2$ 的向量组成的子集合, 记作 V_1+V_2.

定理 4.15

如果 V_1, V_2 是线性空间 V 的子空间, 那么它们的和 V_1+V_2 也是 V 的子空间.

由定义有, 子空间的和适合下列运算规律:

$$V_1 + V_2 = V_2 + V_1, \tag{交换律}$$

$$(V_1 + V_2) + V_3 = V_1 + (V_2 + V_3). \tag{结合律}$$

由结合律, 可以定义多个子空间的和

$$V_1 + V_2 + \cdots + V_s = \sum_{i=1}^{s} V_i.$$

它是由所有表示成

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s, \qquad \alpha_i \in V_i \quad (i = 1, 2, \cdots, s)$$

的向量组成的子空间.

矩阵列空间、行空间

定义 4.16

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组生成的子空间, 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列空间, 记作 $R(\boldsymbol{A})$.

矩阵列空间、行空间

定义 4.16

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组生成的子空间, 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列空间, 记作 $R(\boldsymbol{A})$.
矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组生成的子空间, 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行空间, 记作 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$.

矩阵列空间、行空间

定义 4.16

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组生成的子空间, 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列空间, 记作 $R(\boldsymbol{A})$.
矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组生成的子空间, 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行空间, 记作 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$.

若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n \in \mathbb{R}^{m}$,

矩阵列空间、行空间

定义 4.16

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组生成的子空间, 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列空间, 记作 $R(\boldsymbol{A})$.
矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组生成的子空间, 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行空间, 记作 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$.

若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n \in \mathbb{R}^{m}$, 且

$$R(\boldsymbol{A}) = L\big(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n\big)$$

是 $\mathbb{R}^m$ 的一个子空间.

矩阵列空间、行空间

定义 4.16

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组生成的子空间, 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列空间, 记作 $R(\boldsymbol{A})$.
矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组生成的子空间, 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行空间, 记作 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$.

若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n \in \mathbb{R}^{m}$, 且

$$R(\boldsymbol{A}) = L\big(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n\big)$$

是 $\mathbb{R}^m$ 的一个子空间.

$\boldsymbol{A}$ 的行向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m \in \mathbb{R}^{n}$,

矩阵列空间、行空间

定义 4.16

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组生成的子空间, 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列空间, 记作 $R(\boldsymbol{A})$.
矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组生成的子空间, 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行空间, 记作 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$.

若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n \in \mathbb{R}^{m}$, 且

$$R(\boldsymbol{A}) = L\big(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n\big)$$

是 $\mathbb{R}^m$ 的一个子空间.

$\boldsymbol{A}$ 的行向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m \in \mathbb{R}^{n}$, 且

$$R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = L\big(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m\big)$$

是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间.

矩阵列空间、行空间

定义 4.16

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组生成的子空间, 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列空间, 记作 $R(\boldsymbol{A})$.
矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组生成的子空间, 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行空间, 记作 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$.

若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n \in \mathbb{R}^{m}$, 且

$$R(\boldsymbol{A}) = L\big(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n\big)$$

是 $\mathbb{R}^m$ 的一个子空间.

$\boldsymbol{A}$ 的行向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m \in \mathbb{R}^{n}$, 且

$$R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = L\big(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m\big)$$

是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间.

☞ 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有解的充要条件是: $\boldsymbol{b} \in R(\boldsymbol{A})$.

子空间的正交关系

定义 4.17

设向量 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$, W 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间, 如果对于任意的 $\boldsymbol{\gamma} \in W$, 都有

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}) = 0,$$

就称 $\boldsymbol{\alpha}$ 与子空间 W 正交, 记作 $\boldsymbol{\alpha} \perp W$.

子空间的正交关系

定义 4.17

设向量 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$, W 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间, 如果对于任意的 $\boldsymbol{\gamma} \in W$, 都有

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}) = 0,$$

就称 $\boldsymbol{\alpha}$ 与子空间 W 正交, 记作 $\boldsymbol{\alpha} \perp W$.

定义 4.18

设 V 和 W 是 $\mathbb{R}^n$ 的两个子空间, 若 $\forall \boldsymbol{\alpha} \in V$, $\forall \boldsymbol{\beta} \in W$, 都有

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0,$$

则称 V 与 W 正交, 记为 $V \perp W$.

齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$, 即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

其每个解向量与系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每个行向量都正交,

齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$, 即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

其每个解向量与系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每个行向量都正交, 所以解空间与 $\boldsymbol{A}$ 行空间是正交的,

齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 即

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0, \end{cases}$$

其每个解向量与系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每个行向量都正交, 所以解空间与 $\boldsymbol{A}$ 行空间是正交的, 即

$$N(\boldsymbol{A})\perp R\big(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\big).$$

定理 4.19

$\mathbb{R}^n$ 中与子空间 V 正交的全部向量所构成的集合

$$W = \left\{\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\alpha} \perp V, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n\right\}$$

是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间.

定理 4.19

$\mathbb{R}^n$ 中与子空间 V 正交的全部向量所构成的集合

$$W=\{\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\alpha} \perp V,\ \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n\}$$

是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间.

证: 因为零向量与任何子空间正交, 所以 W 是非空集合.

定理 4.19

$\mathbb{R}^n$ 中与子空间 V 正交的全部向量所构成的集合

$$W = \{\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\alpha} \perp V, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n\}$$

是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间.

证: 因为零向量与任何子空间正交, 所以 W 是非空集合. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 \in W$, 于是对任意 $\boldsymbol{\gamma} \in V$, 都有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\gamma}) = 0, \qquad (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\gamma}) = 0,$$

定理 4.19

$\mathbb{R}^n$ 中与子空间 V 正交的全部向量所构成的集合

$$W = \{\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\alpha} \perp V, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n\}$$

是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间.

证: 因为零向量与任何子空间正交, 所以 W 是非空集合. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 \in W$, 于是对任意 $\boldsymbol{\gamma} \in V$, 都有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\gamma}) = 0, \qquad (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\gamma}) = 0,$$

从而有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\gamma}) = 0,$$

定理 4.19

$\mathbb{R}^n$ 中与子空间 V 正交的全部向量所构成的集合

$$W = \{\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\alpha} \perp V, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n\}$$

是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间.

证: 因为零向量与任何子空间正交, 所以 W 是非空集合. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 \in W$, 于是对任意 $\boldsymbol{\gamma} \in V$, 都有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\gamma}) = 0, \qquad (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\gamma}) = 0,$$

从而有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\gamma}) = 0, \qquad (k\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\gamma}) = 0 \ (k \in \mathbb{R}),$$

定理 4.19

$\mathbb{R}^n$ 中与子空间 V 正交的全部向量所构成的集合

$$W = \left\{\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\alpha} \perp V,\ \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n\right\}$$

是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间.

证: 因为零向量与任何子空间正交, 所以 W 是非空集合. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 \in W$, 于是对任意 $\boldsymbol{\gamma} \in V$, 都有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\gamma}) = 0, \qquad (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\gamma}) = 0,$$

从而有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\gamma}) = 0, \qquad (k\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\gamma}) = 0\ (k \in \mathbb{R}),$$

所以 $(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) \perp V$, $k\boldsymbol{\alpha}_1 \perp V$,

定理 4.19

$\mathbb{R}^n$ 中与子空间 V 正交的全部向量所构成的集合

$$W = \{\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\alpha} \perp V,\, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n\}$$

是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间.

证: 因为零向量与任何子空间正交, 所以 W 是非空集合. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 \in W$, 于是对任意 $\boldsymbol{\gamma} \in V$, 都有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\gamma}) = 0, \qquad (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\gamma}) = 0,$$

从而有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\gamma}) = 0, \qquad (k\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\gamma}) = 0\ (k \in \mathbb{R}),$$

所以 $(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) \perp V$, $k\boldsymbol{\alpha}_1 \perp V$, 即

$$\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 \in W, \qquad k\boldsymbol{\alpha}_1 \in W.$$

定理 4.19

$\mathbb{R}^n$ 中与子空间 V 正交的全部向量所构成的集合

$$W = \{\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\alpha} \perp V, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n\}$$

是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间.

证: 因为零向量与任何子空间正交, 所以 W 是非空集合. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 \in W$, 于是对任意 $\boldsymbol{\gamma} \in V$, 都有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\gamma}) = 0, \qquad (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\gamma}) = 0,$$

从而有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\gamma}) = 0, \qquad (k\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\gamma}) = 0 \ (k \in \mathbb{R}),$$

所以 $(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) \perp V$, $k\boldsymbol{\alpha}_1 \perp V$, 即

$$\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 \in W, \qquad k\boldsymbol{\alpha}_1 \in W.$$

故 W 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间. □

定义 4.20

$\mathbb{R}^n$ 中与子空间 V 正交的全部向量所构成的子空间 W, 称为 V 的正交补, 记作 $W = V^{\perp}$.

定义 4.20

$\mathbb{R}^n$ 中与子空间 V 正交的全部向量所构成的子空间 W, 称为 V 的正交补, 记作 $W = V^{\perp}$.

例如, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解空间 $N(\boldsymbol{A})$ 是由与 $\boldsymbol{A}$ 的行向量都正交的全部向量构成, 所以

$$N(\boldsymbol{A}) = \left(R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\right)^{\perp}.$$

定义 4.20

$\mathbb{R}^n$ 中与子空间 V 正交的全部向量所构成的子空间 W, 称为 V 的正交补, 记作 $W = V^{\perp}$.

例如, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解空间 $N(\boldsymbol{A})$ 是由与 $\boldsymbol{A}$ 的行向量都正交的全部向量构成, 所以

$$N(\boldsymbol{A}) = \left(R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\right)^{\perp}.$$

这是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解空间的一个基本性质.

Outline

线性无关 (Linear independence)

定义 5.1 (线性无关)

设 V 为数域 F 上的线性空间, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ 为 V 中的一组向量. 若存在 F 中的一组不全为零的数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 使得

$$\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{x}_k = \mathbf{0}, \tag{10}$$

则称向量组 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ 线性相关 (linearly dependent), 否则称为线性无关 (linearly independent).

线性无关 (Linear independence)

定义 5.1 (线性无关)

设 V 为数域 F 上的线性空间, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ 为 V 中的一组向量. 若存在 F 中的一组不全为零的数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 使得

$$\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{x}_k = \mathbf{0}, \tag{10}$$

则称向量组 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ 线性相关 (linearly dependent), 否则称为线性无关 (linearly independent).

☞ 换句话说, 向量组 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ 称为线性无关, 如果等式 (10) 只有在

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$$

时才成立.

例 5.2

讨论 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的矩阵组

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix},$$

的线性相关性.

例 5.2

讨论 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的矩阵组

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix},$$

的线性相关性.

解: 设 $k_1\boldsymbol{A}_1 + k_2\boldsymbol{A}_2 + k_3\boldsymbol{A}_3 + k_4\boldsymbol{A}_4 = \boldsymbol{O}$,

例 5.2

讨论 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的矩阵组

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix} a & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix} 1 & a\\ 1 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix} 1 & 1\\ a & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_4=\begin{bmatrix} 1 & 1\\ 1 & a\end{bmatrix},$$

的线性相关性.

解: 设 $k_1\boldsymbol{A}_1+k_2\boldsymbol{A}_2+k_3\boldsymbol{A}_3+k_4\boldsymbol{A}_4=\boldsymbol{O}$, 即

$$k_1\begin{bmatrix} a & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} 1 & a\\ 1 & 1\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix} 1 & 1\\ a & 1\end{bmatrix}+k_4\begin{bmatrix} 1 & 1\\ 1 & a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

例 5.2

讨论 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的矩阵组

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_4=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix},$$

的线性相关性.

解: 设 $k_1\boldsymbol{A}_1+k_2\boldsymbol{A}_2+k_3\boldsymbol{A}_3+k_4\boldsymbol{A}_4=\boldsymbol{O}$, 即

$$k_1\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{bmatrix}+k_4\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

故

$$\begin{cases} ak_1+k_2+k_3+k_4=0, \\ k_1+ak_2+k_3+k_4=0, \\ k_1+k_2+ak_3+k_4=0, \\ k_1+k_2+k_3+ak_4=0, \end{cases}$$

系数行列式为

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)^3(a+3),$$

系数行列式为

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)^3(a+3),$$

- 当 $a \neq 1$ 且 $a \neq -3$ 时, 方程组只有零解, 从而 $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$, $\boldsymbol{A}_4$ 线性无关;

系数行列式为

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)^3(a+3),$$

- 当 $a \neq 1$ 且 $a \neq -3$ 时, 方程组只有零解, 从而 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{A}_4$ 线性无关;
- 当 $a = 1$ 或 $a = -3$ 时, 方程组有非零解, 从而 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{A}_4$ 线性相关. $\square$

常用结论

1. 单个向量 $\boldsymbol{x}$ 线性相关的充要条件是 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

常用结论

1. 单个向量 $\boldsymbol{x}$ 线性相关的充要条件是 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. 两个以上的向量 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r$ 线性相关的充要条件是: 其中有一个向量是其余向量的线性组合.

常用结论

1. 单个向量 $\boldsymbol{x}$ 线性相关的充要条件是 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 两个以上的向量 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r$ 线性相关的充要条件是: 其中有一个向量是其余向量的线性组合.
2. 如果向量组 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r$ 线性无关, 而且可以被 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_s$ 线性表出, 那么 $r \leqslant s$.

常用结论

1. 单个向量 $\boldsymbol{x}$ 线性相关的充要条件是 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. 两个以上的向量 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r$ 线性相关的充要条件是: 其中有一个向量是其余向量的线性组合.
2. 如果向量组 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r$ 线性无关, 而且可以被 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_s$ 线性表出, 那么 $r \leqslant s$.

   由此推出, 两个等价的线性无关的向量组, 必含有相同个数的向量.

常用结论

1. 单个向量 $\boldsymbol{x}$ 线性相关的充要条件是 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. 两个以上的向量 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r$ 线性相关的充要条件是: 其中有一个向量是其余向量的线性组合.
2. 如果向量组 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r$ 线性无关, 而且可以被 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_s$ 线性表出, 那么 $r \leqslant s$.

   由此推出, 两个等价的线性无关的向量组, 必含有相同个数的向量.
3. 如果向量组 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r$ 线性无关, 但 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r, \boldsymbol{y}$ 线性相关, 那么 $\boldsymbol{y}$ 可以被 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r$ 线性表出, 而且表示法是唯一的.

定义 5.3 (维数, dimension)

如果在线性空间 V 中有 n 个线性无关的向量, 但是没有更多数目的线性无关的向量, 那么就称 V 为 n 维的; 记为 $\dim V = n$. 如果在 V 中可以找到任意多个线性无关的向量, 那么就称 V 为无限维的.

定义 5.3 (维数, dimension)

如果在线性空间 V 中有 n 个线性无关的向量, 但是没有更多数目的线性无关的向量, 那么就称 V 为 n 维的; 记为 $\dim V = n$. 如果在 V 中可以找到任意多个线性无关的向量, 那么就称 V 为无限维的.

☞ 单个的零向量总是线性相关的. 事实上 $\forall \lambda \neq 0$, 都有

$$\lambda \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

定义 5.3 (维数, dimension)

如果在线性空间 V 中有 n 个线性无关的向量, 但是没有更多数目的线性无关的向量, 那么就称 V 为 n 维的; 记为 $\dim V = n$. 如果在 V 中可以找到任意多个线性无关的向量, 那么就称 V 为无限维的.

☞ 单个的零向量总是线性相关的. 事实上 $\forall \lambda \neq 0$, 都有

$$\lambda \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

故零子空间 $\{\mathbf{0}\}$ 中不存在线性无关的向量, 即

$$\dim\{\mathbf{0}\} = 0.$$

定义 5.4

在 n 维线性空间 V 中, n 个线性无关的向量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 称为 V 的一组基 (basis). 记为

$$\mathscr{B}_V = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\}.$$

定义 5.4

在 n 维线性空间 V 中, n 个线性无关的向量 ε_1, ε_2, $\cdots$, ε_n 称为 V 的一组基 (basis). 记为

$$\mathscr{B}_V = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\}.$$

设 $\boldsymbol{x}$ 是 V 中任一向量, 于是 ε_1, ε_2, $\cdots$, ε_n, $\boldsymbol{x}$ 线性相关, 因此 $\boldsymbol{x}$ 可以被基 ε_1, ε_2, $\cdots$, ε_n 线性表出:

$$\boldsymbol{x} = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n$$

其中系数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是被向量 $\boldsymbol{x}$ 和基 ε_1, ε_2, $\cdots$, ε_n 唯一确定的, 这组数就称为 $\boldsymbol{x}$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 下的坐标, 记为 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$.

例 5.5

在线性空间 $\mathbb{R}[x]_n$ 中,

$$1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}, x^n$$

是 n 个线性无关的向量,

例 5.5

在线性空间 $\mathbb{R}[x]_n$ 中,

$$1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}, x^n$$

是 n 个线性无关的向量, 而且每一个次数不超过 n 的数域 $\mathbb{R}$ 上的多项式都可以被它们线性表出, 所以 $\mathbb{R}[x]_n$ 是 $n+1$ 维的, 而 1, x, x^2, $\cdots$, x^{n-1}, x^n 就是它的一组基.

例 5.5

在线性空间 $\mathbb{R}[x]_n$ 中,

$$1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}, x^n$$

是 n 个线性无关的向量, 而且每一个次数不超过 n 的数域 $\mathbb{R}$ 上的多项式都可以被它们线性表出, 所以 $\mathbb{R}[x]_n$ 是 $n+1$ 维的, 而 1, x, x^2, $\cdots$, x^{n-1}, x^n 就是它的一组基.

在这组基下, 多项式 $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$ 的坐标就是其系数

$$(a_0, a_1, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}.$$

例 5.5

在线性空间 $\mathbb{R}[x]_n$ 中,

$$1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}, x^n$$

是 n 个线性无关的向量, 而且每一个次数不超过 n 的数域 $\mathbb{R}$ 上的多项式都可以被它们线性表出, 所以 $\mathbb{R}[x]_n$ 是 $n+1$ 维的, 而 1, x, x^2, $\cdots$, x^{n-1}, x^n 就是它的一组基.

在这组基下, 多项式 $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ 的坐标就是其系数

$$(a_0, a_1, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}.$$

☞ 如果取 $\mathbb{R}[x]_n$ 中的另外一组基

$$1, (x-a), \cdots, (x-a)^{n-1}, (x-a)^n,$$

按泰勒展开公式 $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$,

例 5.5

在线性空间 $\mathbb{R}[x]_n$ 中,

$$1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}, x^n$$

是 n 个线性无关的向量, 而且每一个次数不超过 n 的数域 $\mathbb{R}$ 上的多项式都可以被它们线性表出, 所以 $\mathbb{R}[x]_n$ 是 $n+1$ 维的, 而 $1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}, x^n$ 就是它的一组基.

在这组基下, 多项式 $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ 的坐标就是其系数

$$(a_0, a_1, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}.$$

☞ 如果取 $\mathbb{R}[x]_n$ 中的另外一组基

$$1, (x-a), \cdots, (x-a)^{n-1}, (x-a)^n,$$

按泰勒展开公式 $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$, 则 $f(x)$ 在此组基下的坐标是

$$\left(f(a), f'(a), \cdots, \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right)^{\mathrm{T}}.$$

例 5.6

考虑 $m \times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{E}_{ij} = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{ccccccc} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \color{red}{1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & & j & & & \end{array} & \end{array}$$

即矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 的元素在第 i 行第 j 列位置上为 1, 其他位置皆为 0.

例 5.6

考虑 $m \times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{E}_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \color{red}{1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} & & & j & & & \end{matrix} & \end{array}$$

即矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 的元素在第 i 行第 j 列位置上为 1, 其他位置皆为 0.

称 $\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{12}, \cdots, \boldsymbol{E}_{1n}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{22}, \cdots, \boldsymbol{E}_{2n}, \cdots, \boldsymbol{E}_{m1}, \boldsymbol{E}_{m2}, \cdots, \boldsymbol{E}_{mn}$ 为空间 $\mathbb{C}^{m\times n}$ 的标准基.

例 5.6

考虑 $m \times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{E}_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & {\color{red}1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} & & & j & & & \end{matrix} & \end{array}$$

即矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 的元素在第 i 行第 j 列位置上为 1, 其他位置皆为 0.

称 $\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{12}, \cdots, \boldsymbol{E}_{1n}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{22}, \cdots, \boldsymbol{E}_{2n}, \cdots, \boldsymbol{E}_{m1}, \boldsymbol{E}_{m2}, \cdots, \boldsymbol{E}_{mn}$ 为空间 $\mathbb{C}^{m\times n}$ 的标准基.

☞ 显然 $\dim \mathbb{C}^{m\times n} = mn$.

例 5.7

已知 $\boldsymbol{E}_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{E}_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{E}_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{E}_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$ 是 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的标准基, 求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&3\\-4&5\end{bmatrix}$$

在该组基底下的坐标.

例 5.7

已知 $\boldsymbol{E}_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{E}_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{E}_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{E}_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$ 是 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的标准基, 求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&3\\-4&5\end{bmatrix}$$

在该组基底下的坐标.

解: 由

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&3\\-4&5\end{bmatrix}&=2\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\\&=2\boldsymbol{E}_{11}+3\boldsymbol{E}_{12}-4\boldsymbol{E}_{21}+5\boldsymbol{E}_{22},\end{aligned}$$

例 5.7

已知 $\boldsymbol{E}_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{E}_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{E}_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{E}_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$ 是 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的标准基, 求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&3\\-4&5\end{bmatrix}$$

在该组基底下的坐标.

解: 由

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&3\\-4&5\end{bmatrix}&=2\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\\&=2\boldsymbol{E}_{11}+3\boldsymbol{E}_{12}-4\boldsymbol{E}_{21}+5\boldsymbol{E}_{22},\end{aligned}$$

故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在该组基底下的坐标为 $(2,3,-4,5)^{\mathrm{T}}$. □

例 5.7

已知 $\boldsymbol{E}_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{E}_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{E}_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{E}_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$ 是 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的标准基, 求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&3\\-4&5\end{bmatrix}$$

在该组基底下的坐标.

☞ 一般地, 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}$ 在标准基 $\boldsymbol{E}_{11}$, $\boldsymbol{E}_{12}$, $\boldsymbol{E}_{21}$, $\boldsymbol{E}_{22}$ 下的坐标为

$$\left(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}\right)^{\mathrm{T}}.$$

例 5.8

- 如果把复数域 $\mathbb{C}$ 看作是自身上的线性空间, 那么它是一维的, 数 1 就是一组基.

例 5.8

- 如果把复数域 $\mathbb{C}$ 看作是自身上的线性空间, 那么它是一维的, 数 1 就是一组基.
- 如果把复数域 $\mathbb{C}$ 看作是实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, 那么就是二维的, 数 1 与 i 就是一组基.

例 5.8

- 如果把复数域 $\mathbb{C}$ 看作是自身上的线性空间, 那么它是一维的, 数 1 就是一组基.
- 如果把复数域 $\mathbb{C}$ 看作是实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, 那么就是二维的, 数 1 与 i 就是一组基.

☞ 维数与所考虑的数域有关.

定理 5.9

设 V 是数域 F 上的线性空间, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ 为 V 中的向量组, 则它为线性相关向量组的充要条件是, 其中必有 (至少有一个) 向量能由其余的向量线性表出.

定理 5.9

设 V 是数域 F 上的线性空间, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ 为 V 中的向量组, 则它为线性相关向量组的充要条件是, 其中必有 (至少有一个) 向量能由其余的向量线性表出.

定理 5.10

向量组 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ 线性无关的充要条件是, 其中任一向量均不能由其余向量线性表出.

定理 5.11

n 维线性空间 V 中任意 n 个线性无关的向量

$$\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_n$$

均可以作为 V 的基.

定理 5.11

n 维线性空间 V 中任意 n 个线性无关的向量

$$\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_n$$

均可以作为 V 的基.

定理 5.12

设 V 是 n 维向量空间, 则 V 中任意 k $(k < n)$ 个线性无关的向量

$$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$$

必可以扩充成 V 的一组基.

维数定理

定理 5.13

设 S_1 和 S_2 均为数域 F 上的线性空间 V 的子空间, 则有

$$\dim(S_1 + S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2).$$

维数定理

定理 5.13

设 S_1 和 S_2 均为数域 F 上的线性空间 V 的子空间，则有

$$\dim(S_1 + S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2).$$

或记为

$$\dim S_1 + \dim S_2 = \dim(S_1 + S_2) + \dim(S_1 \cap S_2).$$

维数定理

定理 5.13

设 S_1 和 S_2 均为数域 F 上的线性空间 V 的子空间, 则有

$$\dim(S_1 + S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2).$$

或记为

$$\dim S_1 + \dim S_2 = \dim(S_1 + S_2) + \dim(S_1 \cap S_2).$$

☞ 和的维数往往比维数的和来得小.

维数定理

定理 5.13

设 S_1 和 S_2 均为数域 F 上的线性空间 V 的子空间, 则有

$$\dim(S_1+S_2)=\dim S_1+\dim S_2-\dim(S_1\cap S_2).$$

或记为

$$\dim S_1+\dim S_2=\dim(S_1+S_2)+\dim(S_1\cap S_2).$$

☞ 和的维数往往比维数的和来得小. 例如在 $\mathbb{R}^3$ 空间中, 两张通过原点的不同的平面之和是整个 $\mathbb{R}^3$ 空间, 而其维数之和为 4.

证: 设 $\dim S_1 = n_1$, $\dim S_2 = n_2$, $\dim(S_1 \cap S_2) = m$.

证: 设 $\dim S_1 = n_1$, $\dim S_2 = n_2$, $\dim(S_1 \cap S_2) = m$. 取 $S_1 \cap S_2$ 的一组基

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m.$$

证: 设 $\dim S_1 = n_1$, $\dim S_2 = n_2$, $\dim(S_1 \cap S_2) = m$. 取 $S_1 \cap S_2$ 的一组基

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m.$$

它可以扩充成 S_1 的一组基

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{n_1-m}.$$

证: 设 $\dim S_1 = n_1$, $\dim S_2 = n_2$, $\dim(S_1 \cap S_2) = m$. 取 $S_1 \cap S_2$ 的一组基

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m.$$

它可以扩充成 S_1 的一组基

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{n_1-m}.$$

也可以扩充成 S_2 的一组基

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\gamma}_1, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}.$$

证: 设 $\dim S_1 = n_1$, $\dim S_2 = n_2$, $\dim(S_1 \cap S_2) = m$. 取 $S_1 \cap S_2$ 的一组基

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m.$$

它可以扩充成 S_1 的一组基

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{n_1-m}.$$

也可以扩充成 S_2 的一组基

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\gamma}_1, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}.$$

下面来证明, 向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{n_1-m}, \boldsymbol{\gamma}_1, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}$$

是 $S_1 + S_2$ 的一组基,

证: 设 $\dim S_1 = n_1$, $\dim S_2 = n_2$, $\dim(S_1 \cap S_2) = m$. 取 $S_1 \cap S_2$ 的一组基

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m.$$

它可以扩充成 S_1 的一组基

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{n_1-m}.$$

也可以扩充成 S_2 的一组基

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\gamma}_1, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}.$$

下面来证明, 向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{n_1-m}, \boldsymbol{\gamma}_1, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}$$

是 $S_1 + S_2$ 的一组基, 这样 $\dim(S_1 + S_2) = n_1 + n_2 - m$, 因而维数公式成立.

现在来证明向量组是线性无关的.

现在来证明向量组是线性无关的. 假设有等式

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m + p_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + p_{n_1-m}\boldsymbol{\beta}_{n_1-m} + q_1\boldsymbol{\gamma}_1 + \cdots + q_{n_2-m}\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m} = \mathbf{0}.$$

现在来证明向量组是线性无关的. 假设有等式

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m+p_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+p_{n_1-m}\boldsymbol{\beta}_{n_1-m}$$
$$+q_1\boldsymbol{\gamma}_1+\cdots+q_{n_2-m}\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}=\mathbf{0}.$$

令

$$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m+p_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+p_{n_1-m}\boldsymbol{\beta}_{n_1-m} \tag{11}$$
$$=-q_1\boldsymbol{\gamma}_1-\cdots-q_{n_2-m}\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}. \tag{12}$$

现在来证明向量组是线性无关的. 假设有等式

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m + p_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + p_{n_1-m}\boldsymbol{\beta}_{n_1-m} + q_1\boldsymbol{\gamma}_1 + \cdots + q_{n_2-m}\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m} = \mathbf{0}.$$

令

$$\boldsymbol{\alpha} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m + p_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + p_{n_1-m}\boldsymbol{\beta}_{n_1-m} \tag{11}$$

$$= -q_1\boldsymbol{\gamma}_1 - \cdots - q_{n_2-m}\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}. \tag{12}$$

由等式 (11), 有 $\boldsymbol{\alpha} \in S_1$;

现在来证明向量组是线性无关的. 假设有等式

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m + p_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + p_{n_1-m}\boldsymbol{\beta}_{n_1-m} + q_1\boldsymbol{\gamma}_1 + \cdots + q_{n_2-m}\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m} = \mathbf{0}.$$

令

$$\boldsymbol{\alpha} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m + p_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + p_{n_1-m}\boldsymbol{\beta}_{n_1-m} \tag{11}$$

$$= -q_1\boldsymbol{\gamma}_1 - \cdots - q_{n_2-m}\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}. \tag{12}$$

由等式 (11), 有 $\boldsymbol{\alpha} \in S_1$; 而由等式 (12), 有 $\boldsymbol{\alpha} \in S_2$.

现在来证明向量组是线性无关的. 假设有等式

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m + p_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + p_{n_1-m}\boldsymbol{\beta}_{n_1-m} + q_1\boldsymbol{\gamma}_1 + \cdots + q_{n_2-m}\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m} = \mathbf{0}.$$

令

$$\boldsymbol{\alpha} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m + p_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + p_{n_1-m}\boldsymbol{\beta}_{n_1-m} \tag{11}$$

$$= -q_1\boldsymbol{\gamma}_1 - \cdots - q_{n_2-m}\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}. \tag{12}$$

由等式 (11), 有 $\boldsymbol{\alpha} \in S_1$; 而由等式 (12), 有 $\boldsymbol{\alpha} \in S_2$. 于是 $\boldsymbol{\alpha} \in S_1 \cap S_2$,

现在来证明向量组是线性无关的. 假设有等式

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m + p_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + p_{n_1-m}\boldsymbol{\beta}_{n_1-m}$$
$$+q_1\boldsymbol{\gamma}_1 + \cdots + q_{n_2-m}\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m} = \mathbf{0}.$$

令

$$\boldsymbol{\alpha} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m + p_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + p_{n_1-m}\boldsymbol{\beta}_{n_1-m} \tag{11}$$
$$= -q_1\boldsymbol{\gamma}_1 - \cdots - q_{n_2-m}\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}. \tag{12}$$

由等式 (11), 有 $\boldsymbol{\alpha} \in S_1$; 而由等式 (12), 有 $\boldsymbol{\alpha} \in S_2$. 于是 $\boldsymbol{\alpha} \in S_1 \cap S_2$, 则 $\boldsymbol{\alpha}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示.

现在来证明向量组是线性无关的. 假设有等式

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m+p_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+p_{n_1-m}\boldsymbol{\beta}_{n_1-m}$$
$$+q_1\boldsymbol{\gamma}_1+\cdots+q_{n_2-m}\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}=\mathbf{0}.$$

令

$$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m+p_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+p_{n_1-m}\boldsymbol{\beta}_{n_1-m} \tag{11}$$
$$=-q_1\boldsymbol{\gamma}_1-\cdots-q_{n_2-m}\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}. \tag{12}$$

由等式 (11), 有 $\boldsymbol{\alpha}\in S_1$; 而由等式 (12), 有 $\boldsymbol{\alpha}\in S_2$. 于是 $\boldsymbol{\alpha}\in S_1\cap S_2$, 则 $\boldsymbol{\alpha}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示. 令 $\boldsymbol{\alpha}=\boxed{l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_m\boldsymbol{\alpha}_m}$,

现在来证明向量组是线性无关的. 假设有等式

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m + p_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + p_{n_1-m}\boldsymbol{\beta}_{n_1-m}$$
$$+q_1\boldsymbol{\gamma}_1 + \cdots + q_{n_2-m}\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m} = \mathbf{0}.$$

令

$$\boldsymbol{\alpha} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m + p_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + p_{n_1-m}\boldsymbol{\beta}_{n_1-m} \tag{11}$$
$$= -q_1\boldsymbol{\gamma}_1 - \cdots - q_{n_2-m}\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}. \tag{12}$$

由等式 (11), 有 $\boldsymbol{\alpha} \in S_1$; 而由等式 (12), 有 $\boldsymbol{\alpha} \in S_2$. 于是 $\boldsymbol{\alpha} \in S_1 \cap S_2$, 则 $\boldsymbol{\alpha}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示. 令 $\boldsymbol{\alpha} = l_1\boldsymbol{\alpha}_1 + l_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + l_m\boldsymbol{\alpha}_m$, 则

$$l_1\boldsymbol{\alpha}_1 + l_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + l_m\boldsymbol{\alpha}_m + q_1\boldsymbol{\gamma}_1 + \cdots + q_{n_2-m}\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m} = \mathbf{0}.$$

现在来证明向量组是线性无关的. 假设有等式

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m+p_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+p_{n_1-m}\boldsymbol{\beta}_{n_1-m}$$
$$+q_1\boldsymbol{\gamma}_1+\cdots+q_{n_2-m}\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}=\mathbf{0}.$$

令

$$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m+p_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+p_{n_1-m}\boldsymbol{\beta}_{n_1-m} \tag{11}$$
$$=-q_1\boldsymbol{\gamma}_1-\cdots-q_{n_2-m}\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}. \tag{12}$$

由等式 (11), 有 $\boldsymbol{\alpha}\in S_1$; 而由等式 (12), 有 $\boldsymbol{\alpha}\in S_2$. 于是 $\boldsymbol{\alpha}\in S_1\cap S_2$, 则 $\boldsymbol{\alpha}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示. 令 $\boldsymbol{\alpha}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_m\boldsymbol{\alpha}_m$, 则

$$l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_m\boldsymbol{\alpha}_m+q_1\boldsymbol{\gamma}_1+\cdots+q_{n_2-m}\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}=\mathbf{0}.$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\gamma}_1,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}$ 线性无关,

现在来证明向量组是线性无关的. 假设有等式

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m + p_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + p_{n_1-m}\boldsymbol{\beta}_{n_1-m}$$
$$+q_1\boldsymbol{\gamma}_1 + \cdots + q_{n_2-m}\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m} = \mathbf{0}.$$

令

$$\boldsymbol{\alpha} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m + p_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + p_{n_1-m}\boldsymbol{\beta}_{n_1-m} \tag{11}$$
$$= -q_1\boldsymbol{\gamma}_1 - \cdots - q_{n_2-m}\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}. \tag{12}$$

由等式 (11), 有 $\boldsymbol{\alpha} \in S_1$; 而由等式 (12), 有 $\boldsymbol{\alpha} \in S_2$. 于是 $\boldsymbol{\alpha} \in S_1 \cap S_2$, 则 $\boldsymbol{\alpha}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示. 令 $\boldsymbol{\alpha} = l_1\boldsymbol{\alpha}_1 + l_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + l_m\boldsymbol{\alpha}_m$, 则

$$l_1\boldsymbol{\alpha}_1 + l_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + l_m\boldsymbol{\alpha}_m + q_1\boldsymbol{\gamma}_1 + \cdots + q_{n_2-m}\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m} = \mathbf{0}.$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\gamma}_1, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}$ 线性无关, 得

$$l_1 = l_2 = \cdots = l_m = q_1 = \cdots = q_{n_2-m} = 0,$$

现在来证明向量组是线性无关的. 假设有等式

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m + p_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + p_{n_1-m}\boldsymbol{\beta}_{n_1-m}$$
$$+q_1\boldsymbol{\gamma}_1 + \cdots + q_{n_2-m}\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m} = \mathbf{0}.$$

令

$$\boldsymbol{\alpha} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m + p_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + p_{n_1-m}\boldsymbol{\beta}_{n_1-m} \tag{11}$$
$$= -q_1\boldsymbol{\gamma}_1 - \cdots - q_{n_2-m}\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}. \tag{12}$$

由等式 (11), 有 $\boldsymbol{\alpha} \in S_1$; 而由等式 (12), 有 $\boldsymbol{\alpha} \in S_2$. 于是 $\boldsymbol{\alpha} \in S_1 \cap S_2$, 则 $\boldsymbol{\alpha}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示. 令 $\boldsymbol{\alpha} = l_1\boldsymbol{\alpha}_1 + l_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + l_m\boldsymbol{\alpha}_m$, 则

$$l_1\boldsymbol{\alpha}_1 + l_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + l_m\boldsymbol{\alpha}_m + q_1\boldsymbol{\gamma}_1 + \cdots + q_{n_2-m}\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m} = \mathbf{0}.$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\gamma}_1, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}$ 线性无关, 得

$$l_1 = l_2 = \cdots = l_m = q_1 = \cdots = q_{n_2-m} = 0,$$

因而 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$.

从而有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m+p_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+p_{n_1-m}\boldsymbol{\beta}_{n_1-m}=\mathbf{0}.$$

从而有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m + p_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + p_{n_1-m}\boldsymbol{\beta}_{n_1-m} = \mathbf{0}.$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{n_1-m}$ 线性无关,

从而有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m + p_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + p_{n_1-m}\boldsymbol{\beta}_{n_1-m} = \mathbf{0}.$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{n_1-m}$ 线性无关，故

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_m = p_1 = \cdots = p_{n_1-m} = 0.$$

从而有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m+p_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+p_{n_1-m}\boldsymbol{\beta}_{n_1-m}=\mathbf{0}.$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n_1-m}$ 线性无关，故

$$k_1=k_2=\cdots=k_m=p_1=\cdots=p_{n_1-m}=0.$$

从而 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_m$, $\boldsymbol{\beta}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{\beta}_{n_1-m}$, $\boldsymbol{\gamma}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}$ 线性无关.

从而有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m+p_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+p_{n_1-m}\boldsymbol{\beta}_{n_1-m}=\mathbf{0}.$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n_1-m}$ 线性无关，故

$$k_1=k_2=\cdots=k_m=p_1=\cdots=p_{n_1-m}=0.$$

从而 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_m$, $\boldsymbol{\beta}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{\beta}_{n_1-m}$, $\boldsymbol{\gamma}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}$ 线性无关.

另一方面, S_1+S_2 中任一向量都可以由上述向量组线性表示.

从而有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m + p_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + p_{n_1-m}\boldsymbol{\beta}_{n_1-m} = \mathbf{0}.$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{n_1-m}$ 线性无关，故

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_m = p_1 = \cdots = p_{n_1-m} = 0.$$

从而 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_m$, $\boldsymbol{\beta}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{\beta}_{n_1-m}$, $\boldsymbol{\gamma}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}$ 线性无关.

另一方面, $S_1 + S_2$ 中任一向量都可以由上述向量组线性表示.

事实上, 设 $\boldsymbol{x} \in S_1 + S_2$, 令 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_1 \in S_1$, $\boldsymbol{x}_2 \in S_2$.

从而有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m+p_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+p_{n_1-m}\boldsymbol{\beta}_{n_1-m}=\mathbf{0}.$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n_1-m}$ 线性无关，故

$$k_1=k_2=\cdots=k_m=p_1=\cdots=p_{n_1-m}=0.$$

从而 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_m$, $\boldsymbol{\beta}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{\beta}_{n_1-m}$, $\boldsymbol{\gamma}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}$ 线性无关.

另一方面, S_1+S_2 中任一向量都可以由上述向量组线性表示.

事实上, 设 $\boldsymbol{x}\in S_1+S_2$, 令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_1\in S_1$, $\boldsymbol{x}_2\in S_2$. 则 $\boldsymbol{x}_1$ 可以用 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_m$, $\boldsymbol{\beta}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{\beta}_{n_1-m}$, 线性表示;

从而有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m + p_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + p_{n_1-m}\boldsymbol{\beta}_{n_1-m} = \mathbf{0}.$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{n_1-m}$ 线性无关，故

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_m = p_1 = \cdots = p_{n_1-m} = 0.$$

从而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{n_1-m}, \boldsymbol{\gamma}_1, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}$ 线性无关.

另一方面, $S_1 + S_2$ 中任一向量都可以由上述向量组线性表示.

事实上, 设 $\boldsymbol{x} \in S_1 + S_2$, 令 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_1 \in S_1$, $\boldsymbol{x}_2 \in S_2$. 则 $\boldsymbol{x}_1$ 可以用 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{n_1-m}$, 线性表示；且 $\boldsymbol{x}_2$ 可以用 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\gamma}_1, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}$ 线性表示.

从而有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m + p_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + p_{n_1-m}\boldsymbol{\beta}_{n_1-m} = \mathbf{0}.$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{n_1-m}$ 线性无关，故

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_m = p_1 = \cdots = p_{n_1-m} = 0.$$

从而 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_m$, $\boldsymbol{\beta}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{\beta}_{n_1-m}$, $\boldsymbol{\gamma}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}$ 线性无关.

另一方面, $S_1 + S_2$ 中任一向量都可以由上述向量组线性表示.

事实上, 设 $\boldsymbol{x} \in S_1 + S_2$, 令 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_1 \in S_1$, $\boldsymbol{x}_2 \in S_2$. 则 $\boldsymbol{x}_1$ 可以用 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_m$, $\boldsymbol{\beta}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{\beta}_{n_1-m}$, 线性表示；且 $\boldsymbol{x}_2$ 可以用 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_m$, $\boldsymbol{\gamma}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}$ 线性表示.

故 $\boldsymbol{x}$ 可以用 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_m$, $\boldsymbol{\beta}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{\beta}_{n_1-m}$, $\boldsymbol{\gamma}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}$ 线性表示.

从而有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m+p_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+p_{n_1-m}\boldsymbol{\beta}_{n_1-m}=\mathbf{0}.$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n_1-m}$ 线性无关，故

$$k_1=k_2=\cdots=k_m=p_1=\cdots=p_{n_1-m}=0.$$

从而 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_m$, $\boldsymbol{\beta}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{\beta}_{n_1-m}$, $\boldsymbol{\gamma}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}$ 线性无关.

另一方面, S_1+S_2 中任一向量都可以由上述向量组线性表示.

事实上, 设 $\boldsymbol{x}\in S_1+S_2$, 令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_1\in S_1$, $\boldsymbol{x}_2\in S_2$. 则 $\boldsymbol{x}_1$ 可以用 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_m$, $\boldsymbol{\beta}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{\beta}_{n_1-m}$, 线性表示；且 $\boldsymbol{x}_2$ 可以用 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_m$, $\boldsymbol{\gamma}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}$ 线性表示.

故 $\boldsymbol{x}$ 可以用 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_m$, $\boldsymbol{\beta}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{\beta}_{n_1-m}$, $\boldsymbol{\gamma}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}$ 线性表示.

因而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_m$, $\boldsymbol{\beta}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{\beta}_{n_1-m}$, $\boldsymbol{\gamma}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}$ 是 S_1+S_2 的一组基. 故维数公式成立. □

练习 5.14

试证多项式组 $1, (x-1), (x-1)^2, \cdots, (x-1)^n$ 也是线性空间 $\mathbb{R}[x]_{n+1}$ 的一个基底, 并求由基底 $\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$ 过渡到基底 $\left\{1, (x-1), (x-1)^2, \cdots, (x-1)^n\right\}$ 的过渡矩阵.

练习 5.14

试证多项式组 $1, (x-1), (x-1)^2, \cdots, (x-1)^n$ 也是线性空间 $\mathbb{R}[x]_{n+1}$ 的一个基底, 并求由基底 $\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$ 过渡到基底 $\left\{1, (x-1), (x-1)^2, \cdots, (x-1)^n\right\}$ 的过渡矩阵.

解: $\forall k \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$, 有

$$
\begin{aligned}
(x-1)^k &= (-1)^k + \mathrm{C}_k^1(-1)^{k-1}x + \mathrm{C}_k^2(-1)^{k-2}x^2 + \cdots + \mathrm{C}_k^{k-1}(-1)x^{k-1} + x^k \\
&= (1, x, x^2, \cdots, x^k, x^{k+1}, \cdots, x^n)\begin{bmatrix} (-1)^k \\ \mathrm{C}_k^1(-1)^{k-1} \\ \mathrm{C}_k^2(-1)^{k-2} \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

则

$$\big(1,(x-1),(x-1)^2,\cdots,(x-1)^n\big)=(1,x,x^2,\cdots,x^n)\boldsymbol{P},$$

其中

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^n \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & \mathrm{C}_n^1(-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \mathrm{C}_n^2(-1)^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}.$$

则
$$(1,(x-1),(x-1)^2,\cdots,(x-1)^n)=(1,x,x^2,\cdots,x^n)\boldsymbol{P},$$
其中
$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^n\\ 0 & 1 & -2 & \cdots & \mathrm{C}_n^1(-1)^{n-1}\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \mathrm{C}_n^2(-1)^{n-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}.$$
由于 $\det\boldsymbol{P}=1\neq 0$, 所以 1, $(x-1)$, $(x-1)^2$, $\cdots$, $(x-1)^n$ 也是线性空间 $\mathbb{R}[x]_{n+1}$ 的一个基底, 且所求过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}$. □

Outline

定义 6.1

设有映射 T: $X \to Y$, $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{y}$.

- 若任意 $\boldsymbol{y} \in Y$ 都有原像 $\boldsymbol{x} \in X$, 则称 T 为从 X 到 Y 的 满映射 (onto mapping, surjection), 简称满射.

定义 6.1

设有映射 T: $X \to Y$, $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{y}$.

- 若任意 $\boldsymbol{y} \in Y$ 都有原像 $\boldsymbol{x} \in X$, 则称 T 为从 X 到 Y 的满映射 (onto mapping, surjection), 简称满射.
- 若对 X 中任意两个不同的元素 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$, 都有 $T\boldsymbol{x}_1 \neq T\boldsymbol{x}_2$, 则称 T 为一对一的映射 (one-to-one mapping), 或单射 (injection).

定义 6.1

设有映射 T: $X \to Y$, $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{y}$.

- 若任意 $\boldsymbol{y} \in Y$ 都有原像 $\boldsymbol{x} \in X$, 则称 T 为从 X 到 Y 的 满映射 (onto mapping, surjection), 简称满射.
- 若对 X 中任意两个不同的元素 $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, 都有 $T\boldsymbol{x}_1 \neq T\boldsymbol{x}_2$, 则称 T 为一对一的映射 (one-to-one mapping), 或单射 (injection).
- 若 T 既是满射, 又是一对一的映射, 则称 T 是一一到上的映射, 或双射 (bijection).

Outline

线性变换的定义

定义 6.2

设 X 和 Y 均为数域 F 上的线性空间, 映射 $T: X \to Y$, $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{y}$ 满足:

1. $T(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = T(\boldsymbol{x}_1) + T(\boldsymbol{x}_2)$, $\forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in X$;
2. $T(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda T(\boldsymbol{x})$, $\forall \boldsymbol{x} \in X$, $\lambda \in F$,

则称 T 为从 X 到 Y 的线性映射. 线性映射常称为线性变换 (linear transformation) 或线性算子 (linear operator).

线性变换的定义

定义 6.2

设 X 和 Y 均为数域 F 上的线性空间, 映射 $T\colon X \to Y$, $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{y}$ 满足:

1. $T(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = T(\boldsymbol{x}_1) + T(\boldsymbol{x}_2)$, $\forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in X$;
2. $T(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda T(\boldsymbol{x})$, $\forall \boldsymbol{x} \in X$, $\lambda \in F$,

则称 T 为从 X 到 Y 的线性映射. 线性映射常称为线性变换 (linear transformation) 或线性算子 (linear operator).

☞ 上述两个条件或者等价地表示为

$$T(\lambda \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \lambda T(\boldsymbol{x}_1) + T(\boldsymbol{x}_2), \quad \forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in X,\ \lambda \in F.$$

线性变换的定义

定义 6.2

设 X 和 Y 均为数域 F 上的线性空间, 映射 $T: X \to Y$, $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{y}$ 满足:

1. $T(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = T(\boldsymbol{x}_1) + T(\boldsymbol{x}_2)$, $\forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in X$;
2. $T(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda T(\boldsymbol{x})$, $\forall \boldsymbol{x} \in X$, $\lambda \in F$,

则称 T 为从 X 到 Y 的线性映射. 线性映射常称为线性变换 (linear transformation) 或线性算子 (linear operator).

两个向量的和变换得到的向量是这两个向量变换得到的向量的和, 数 λ 与向量的数乘变换得到的向量是 λ 与该向量变换得到的向量的数乘.

像这样向量之间加法与数乘关系都不受影响的变换, 它与线性空间的运算相适应, 能够反映线性空间中向量的内在联系, 是线性空间的重要变换.

例 6.3

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, 求证 $T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是从空间 $\mathbb{C}^n$ 到空间 $\mathbb{C}^m$ 的线性变换.

例 6.3

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, 求证 $T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是从空间 $\mathbb{C}^n$ 到空间 $\mathbb{C}^m$ 的线性变换.

证明.

$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, $T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^m$, 故 $T : \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是从 $\mathbb{C}^n$ 到 $\mathbb{C}^m$ 的一个映射.

例 6.3

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, 求证 $T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是从空间 $\mathbb{C}^n$ 到空间 $\mathbb{C}^m$ 的线性变换.

证明.

$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, $T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^m$, 故 $T: \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是从 $\mathbb{C}^n$ 到 $\mathbb{C}^m$ 的一个映射.

$\forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$T(\lambda\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = A(\lambda\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \lambda T(\boldsymbol{x}_1) + T(\boldsymbol{x}_2),$$

得证 $T: \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是从空间 $\mathbb{C}^n$ 到空间 $\mathbb{C}^m$ 的线性变换. □

例 6.4

积分运算是线性变换.

例 6.4

积分运算是线性变换. 设 $J\colon C[a,b] \mapsto C[a,b]$, 且 J 定义为

$$J\big(f(x)\big) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

因 $\forall f(x), g(x) \in C[a,b]$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} J\big(\lambda f(x) + g(x)\big) &= \int_a^x \big(\lambda f(t) + g(t)\big)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda J\big(f(x)\big) + J\big(g(x)\big). \end{aligned}$$

故 J 是 $C[a,b]$ 上的线性变换.

例 6.5

微分运算是线性变换.

例 6.5

微分运算是线性变换. 记 $C^1[a, b]$ 表示在区间 $[a, b]$ 上可微函数所构成的线性空间. 设 D: $C^1[a, b] \to C[a, b]$, 且 D 定义为

$$D\big(f(x)\big) = f'(x).$$

例 6.5

微分运算是线性变换. 记 $C^1[a, b]$ 表示在区间 $[a, b]$ 上可微函数所构成的线性空间. 设 D: $C^1[a, b] \to C[a, b]$, 且 D 定义为

$$D\big(f(x)\big) = f'(x).$$

因 $\forall f(x), g(x) \in C^1[a, b]$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$D\big(\lambda f(x) + g(x)\big) = \lambda f'(x) + g'(x) = \lambda D\big(f(x)\big) + D\big(g(x)\big),$$

故 D 是 $C^1[a, b]$ 到 $C[a, b]$ 的线性变换.

非线性变换的例子

例 6.6

设 T 定义为: $T(\boldsymbol{A}) = \det \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. 则 T 是由 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 到 $\mathbb{R}$ 的一个映射, 但不是线性变换.

非线性变换的例子

例 6.6

设 T 定义为: $T(\boldsymbol{A}) = \det \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. 则 T 是由 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 到 $\mathbb{R}$ 的一个映射, 但不是线性变换.

因为一般情况下, $\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \neq \det \boldsymbol{A} + \det \boldsymbol{B}$.

非线性变换的例子

例 6.6

设 T 定义为: $T(\boldsymbol{A}) = \det \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. 则 T 是由 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 到 $\mathbb{R}$ 的一个映射, 但不是线性变换.

因为一般情况下, $\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \neq \det \boldsymbol{A} + \det \boldsymbol{B}$.

例 6.7

共轭转置运算不是线性变换.

非线性变换的例子

例 6.6

设 T 定义为: $T(\boldsymbol{A}) = \det \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. 则 T 是由 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 到 $\mathbb{R}$ 的一个映射, 但不是线性变换.

因为一般情况下, $\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \neq \det \boldsymbol{A} + \det \boldsymbol{B}$.

例 6.7

共轭转置运算不是线性变换. 设 T: $\mathbb{C}^{m\times n} \to \mathbb{C}^{n\times m}$, 且 T 定义为

$$T(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}, \qquad \forall \boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}.$$

非线性变换的例子

例 6.6

设 T 定义为: $T(\boldsymbol{A}) = \det \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. 则 T 是由 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 到 $\mathbb{R}$ 的一个映射, 但不是线性变换.

因为一般情况下, $\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \neq \det \boldsymbol{A} + \det \boldsymbol{B}$.

例 6.7

共轭转置运算不是线性变换. 设 T: $\mathbb{C}^{m\times n} \to \mathbb{C}^{n\times m}$, 且 T 定义为

$$T(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}, \qquad \forall \boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}.$$

取 $\lambda = \mathrm{i}$, 因

$$\begin{aligned} T(\mathrm{i}\boldsymbol{A}) = (\mathrm{i}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}} &= -\mathrm{i}(\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}} \\ &\neq \mathrm{i}\,T(\boldsymbol{A}). \end{aligned}$$

定义 6.8

设 T 为从空间 X 到空间 X 的线性变换, 则称 T 为 X 上的线性变换.

定义 6.8

设 T 为从空间 X 到空间 X 的线性变换, 则称 T 为 X 上的线性变换.

定义 6.9

设 X 和 Y 均为数域 F 上的线性空间, 称映射 $T: X \to Y, \boldsymbol{x} \mapsto \mathbf{0}$ 为零变换 (zero transformation), 记为 0^*.

定义 6.8

设 T 为从空间 X 到空间 X 的线性变换, 则称 T 为 X 上的线性变换.

定义 6.9

设 X 和 Y 均为数域 F 上的线性空间, 称映射 $T: X \to Y, \boldsymbol{x} \mapsto \mathbf{0}$ 为零变换 (zero transformation), 记为 0^*. 即 $\forall \boldsymbol{x} \in X$, 有

$$0^*(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}.$$

定义 6.10

设 X 为数域 F 上的线性空间, 称映射 $T: X \to X$, $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}$ 为 X 上的恒等变换或单位变换 (identity operator), 记为 E.

定义 6.10

设 X 为数域 F 上的线性空间, 称映射 $T: X \to X$, $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}$ 为 X 上的恒等变换或单位变换 (identity operator), 记为 E. 即 $\forall \boldsymbol{x} \in X$, 恒有

$$E(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}.$$

定义 6.10

设 X 为数域 F 上的线性空间, 称映射 $T: X \to X$, $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}$ 为 X 上的恒等变换或单位变换 (identity operator), 记为 E. 即 $\forall \boldsymbol{x} \in X$, 恒有

$$E(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}.$$

定义 6.11

设 X 为数域 F 上的线性空间, $\alpha \in F$ 为固定的数, 且 $\alpha \neq 0$. 称映射 $T: X \to X$, $\boldsymbol{x} \mapsto \alpha \boldsymbol{x}$ 为 X 上的相似映射, 记为 α^*.

定义 6.10

设 X 为数域 F 上的线性空间, 称映射 $T: X \to X$, $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}$ 为 X 上的恒等变换或单位变换 (identity operator), 记为 E. 即 $\forall \boldsymbol{x} \in X$, 恒有

$$E(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}.$$

定义 6.11

设 X 为数域 F 上的线性空间, $\alpha \in F$ 为固定的数, 且 $\alpha \neq 0$. 称映射 $T: X \to X$, $\boldsymbol{x} \mapsto \alpha\boldsymbol{x}$ 为 X 上的相似映射, 记为 α^*. 即 $\forall \boldsymbol{x} \in X$, 恒有

$$\alpha^*(\boldsymbol{x}) = \alpha\boldsymbol{x}.$$

定义 6.10

设 X 为数域 F 上的线性空间, 称映射 $T: X \to X$, $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}$ 为 X 上的恒等变换或单位变换 (identity operator), 记为 E. 即 $\forall \boldsymbol{x} \in X$, 恒有

$$E(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}.$$

定义 6.11

设 X 为数域 F 上的线性空间, $\alpha \in F$ 为固定的数, 且 $\alpha \neq 0$. 称映射 $T: X \to X$, $\boldsymbol{x} \mapsto \alpha\boldsymbol{x}$ 为 X 上的相似映射, 记为 α^*. 即 $\forall \boldsymbol{x} \in X$, 恒有

$$\alpha^*(\boldsymbol{x}) = \alpha\boldsymbol{x}.$$

☞ 相似映射也称为数乘变换. 当 $\alpha = 1$ 时, 便得恒等变换. 当 $\alpha = 0$ 时, 便得零变换.

定义 6.10

设 X 为数域 F 上的线性空间, 称映射 $T: X \to X$, $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}$ 为 X 上的恒等变换或单位变换 (identity operator), 记为 E. 即 $\forall \boldsymbol{x} \in X$, 恒有

$$E(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}.$$

定义 6.11

设 X 为数域 F 上的线性空间, $\alpha \in F$ 为固定的数, 且 $\alpha \neq 0$. 称映射 $T: X \to X$, $\boldsymbol{x} \mapsto \alpha\boldsymbol{x}$ 为 X 上的相似映射, 记为 α^*. 即 $\forall \boldsymbol{x} \in X$, 恒有

$$\alpha^*(\boldsymbol{x}) = \alpha\boldsymbol{x}.$$

☞ 相似映射也称为数乘变换. 当 $\alpha = 1$ 时, 便得恒等变换. 当 $\alpha = 0$ 时, 便得零变换.

恒等变换 E, 零变换 0^* 和相似变换 α^* 都是线性变换.

定理 6.12

设 T 为从 X 到 Y 的线性变换, 则

1. $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, 其中等式左边的 $\mathbf{0} \in X$, 右边的 $\mathbf{0} \in Y$.

定理 6.12

设 T 为从 X 到 Y 的线性变换，则

1. $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$，其中等式左边的 $\mathbf{0} \in X$，右边的 $\mathbf{0} \in Y$.
2. 若 $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{x}_i \in X$，则 $T(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i T(\boldsymbol{x}_i)$.

定理 6.12

设 T 为从 X 到 Y 的线性变换, 则

1. $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, 其中等式左边的 $\mathbf{0} \in X$, 右边的 $\mathbf{0} \in Y$.
2. 若 $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{x}_i \in X$, 则 $T(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i T(\boldsymbol{x}_i)$.
3. 若 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ 为 X 中线性相关的向量组, 则 $T(\boldsymbol{x}_1), T(\boldsymbol{x}_2), \cdots, T(\boldsymbol{x}_k)$ 为 Y 中线性相关的向量组.

定理 6.12

设 T 为从 X 到 Y 的线性变换, 则

1. $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, 其中等式左边的 $\mathbf{0} \in X$, 右边的 $\mathbf{0} \in Y$.
2. 若 $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{x}_i \in X$, 则 $T(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i T(\boldsymbol{x}_i)$.
3. 若 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ 为 X 中线性相关的向量组, 则 $T(\boldsymbol{x}_1), T(\boldsymbol{x}_2), \cdots, T(\boldsymbol{x}_k)$ 为 Y 中线性相关的向量组.
4. 若 $T(\boldsymbol{x}_1), T(\boldsymbol{x}_2), \cdots, T(\boldsymbol{x}_k)$ 为 Y 中线性无关的向量组, 则 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ 为 X 中线性无关的向量组.

定理 6.12

设 T 为从 X 到 Y 的线性变换，则

1. $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$，其中等式左边的 $\mathbf{0} \in X$，右边的 $\mathbf{0} \in Y$.
2. 若 $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{x}_i \in X$，则 $T(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i T(\boldsymbol{x}_i)$.
3. 若 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ 为 X 中线性相关的向量组，则 $T(\boldsymbol{x}_1), T(\boldsymbol{x}_2), \cdots, T(\boldsymbol{x}_k)$ 为 Y 中线性相关的向量组.
4. 若 $T(\boldsymbol{x}_1), T(\boldsymbol{x}_2), \cdots, T(\boldsymbol{x}_k)$ 为 Y 中线性无关的向量组，则 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ 为 X 中线性无关的向量组.

证明.

(1) $T(\mathbf{0}) = T(0\boldsymbol{x}) = 0\,T(\boldsymbol{x}) = 0.$

□

定理 6.12

设 T 为从 X 到 Y 的线性变换, 则

1. $T(\mathbf{0})=\mathbf{0}$, 其中等式左边的 $\mathbf{0}\in X$, 右边的 $\mathbf{0}\in Y$.
2. 若 $\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\boldsymbol{x}_i\in X$, 则 $T(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i T(\boldsymbol{x}_i)$.
3. 若 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_k$ 为 X 中线性相关的向量组, 则 $T(\boldsymbol{x}_1),T(\boldsymbol{x}_2),\cdots,T(\boldsymbol{x}_k)$ 为 Y 中线性相关的向量组.
4. 若 $T(\boldsymbol{x}_1),T(\boldsymbol{x}_2),\cdots,T(\boldsymbol{x}_k)$ 为 Y 中线性无关的向量组, 则 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_k$ 为 X 中线性无关的向量组.

证明.

(2) 归纳法可得.

□

定理 6.12

设 T 为从 X 到 Y 的线性变换, 则

1. $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, 其中等式左边的 $\mathbf{0} \in X$, 右边的 $\mathbf{0} \in Y$.
2. 若 $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{x}_i \in X$, 则 $T(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i T(\boldsymbol{x}_i)$.
3. 若 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ 为 X 中线性相关的向量组, 则 $T(\boldsymbol{x}_1), T(\boldsymbol{x}_2), \cdots, T(\boldsymbol{x}_k)$ 为 Y 中线性相关的向量组.
4. 若 $T(\boldsymbol{x}_1), T(\boldsymbol{x}_2), \cdots, T(\boldsymbol{x}_k)$ 为 Y 中线性无关的向量组, 则 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ 为 X 中线性无关的向量组.

证明.

(3) 设存在不全为零的 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 使得 $\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{x}_k = \mathbf{0}$, 由结论 (1), (2), 则

$$\lambda_1 T(\boldsymbol{x}_1) + \lambda_2 T(\boldsymbol{x}_2) + \cdots + \lambda_k T(\boldsymbol{x}_k) = \mathbf{0}.$$

则 $T(\boldsymbol{x}_1), T(\boldsymbol{x}_2), \cdots, T(\boldsymbol{x}_k)$ 线性相关. □

定理 6.12

设 T 为从 X 到 Y 的线性变换, 则

1. $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, 其中等式左边的 $\mathbf{0} \in X$, 右边的 $\mathbf{0} \in Y$.
2. 若 $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{x}_i \in X$, 则 $T(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i T(\boldsymbol{x}_i)$.
3. 若 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ 为 X 中线性相关的向量组, 则 $T(\boldsymbol{x}_1), T(\boldsymbol{x}_2), \cdots, T(\boldsymbol{x}_k)$ 为 Y 中线性相关的向量组.
4. 若 $T(\boldsymbol{x}_1), T(\boldsymbol{x}_2), \cdots, T(\boldsymbol{x}_k)$ 为 Y 中线性无关的向量组, 则 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ 为 X 中线性无关的向量组.

证明.

(4) 此命题为 (3) 的逆否命题.

但要注意, (3) 的逆命题是不对的, 线性变换可能把线性无关的向量组也变成线性相关的向量组. 比如零变换 0^*. □

线性变换保持线性组合与线性关系式不变

(1) 如果 $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ 的线性组合:

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{x}_k,$$

线性变换保持线性组合与线性关系式不变

(1) 如果 $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ 的线性组合:

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{x}_k,$$

那么经过线性变换 T 之后, $T(\boldsymbol{x})$ 是 $T(\boldsymbol{x}_1), T(\boldsymbol{x}_2), \cdots, T(\boldsymbol{x}_k)$ 同样的线性组合:

$$T(\boldsymbol{x}) = \lambda_1 T(\boldsymbol{x}_1) + \lambda_2 T(\boldsymbol{x}_2) + \cdots + \lambda_k T(\boldsymbol{x}_k).$$

线性变换保持线性组合与线性关系式不变

(1) 如果 $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ 的线性组合:

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{x}_k,$$

那么经过线性变换 T 之后, $T(\boldsymbol{x})$ 是 $T(\boldsymbol{x}_1), T(\boldsymbol{x}_2), \cdots, T(\boldsymbol{x}_k)$ 同样的线性组合:

$$T(\boldsymbol{x}) = \lambda_1 T(\boldsymbol{x}_1) + \lambda_2 T(\boldsymbol{x}_2) + \cdots + \lambda_k T(\boldsymbol{x}_k).$$

(2) 如果 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ 之间有一线性关系式

$$\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{x}_k = \mathbf{0},$$

线性变换保持线性组合与线性关系式不变

(1) 如果 $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ 的线性组合:

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{x}_k,$$

那么经过线性变换 T 之后, $T(\boldsymbol{x})$ 是 $T(\boldsymbol{x}_1), T(\boldsymbol{x}_2), \cdots, T(\boldsymbol{x}_k)$ 同样的线性组合:

$$T(\boldsymbol{x}) = \lambda_1 T(\boldsymbol{x}_1) + \lambda_2 T(\boldsymbol{x}_2) + \cdots + \lambda_k T(\boldsymbol{x}_k).$$

(2) 如果 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ 之间有一线性关系式

$$\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{x}_k = \mathbf{0},$$

那么它们的像之间也有同样的关系

$$\lambda_1 T(\boldsymbol{x}_1) + \lambda_2 T(\boldsymbol{x}_2) + \cdots + \lambda_k T(\boldsymbol{x}_k) = \mathbf{0}.$$

练习 6.13

判定下列映射哪些是线性变换?

(1) 设 $\boldsymbol{x}_0$ 为空间 X 中的一个固定向量, 映射 T: $X \to X$, $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_0$.

练习 6.13

判定下列映射哪些是线性变换?

(1) 设 $\boldsymbol{x}_0$ 为空间 X 中的一个固定向量, 映射 T: $X \to X$, $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_0$.

解: 当 $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}$ 时, $T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}$ 显然是 X 上的线性变换.

练习 6.13

判定下列映射哪些是线性变换?

(1) 设 $\boldsymbol{x}_0$ 为空间 X 中的一个固定向量, 映射 T: $X \to X$, $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_0$.

解: 当 $\boldsymbol{x}_0 = \mathbf{0}$ 时, $T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}$ 显然是 X 上的线性变换.

当 $\boldsymbol{x}_0 \neq \mathbf{0}$ 时,

$$T(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_0, \qquad T(\boldsymbol{x}_1) + T(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + 2\boldsymbol{x}_0.$$

练习 6.13

判定下列映射哪些是线性变换?

(1) 设 $\boldsymbol{x}_0$ 为空间 X 中的一个固定向量, 映射 T: $X \to X$, $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_0$.

解: 当 $\boldsymbol{x}_0 = \mathbf{0}$ 时, $T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}$ 显然是 X 上的线性变换.

当 $\boldsymbol{x}_0 \neq \mathbf{0}$ 时,

$$T(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_0, \qquad T(\boldsymbol{x}_1) + T(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + 2\boldsymbol{x}_0.$$

则 $T(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) \neq T(\boldsymbol{x}_1) + T(\boldsymbol{x}_2)$,

练习 6.13

判定下列映射哪些是线性变换?

(1) 设 $\boldsymbol{x}_0$ 为空间 X 中的一个固定向量, 映射 T: $X \to X$, $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_0$.

解: 当 $\boldsymbol{x}_0 = \mathbf{0}$ 时, $T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}$ 显然是 X 上的线性变换.

当 $\boldsymbol{x}_0 \neq \mathbf{0}$ 时,

$$T(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_0, \qquad T(\boldsymbol{x}_1) + T(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + 2\boldsymbol{x}_0.$$

则 $T(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) \neq T(\boldsymbol{x}_1) + T(\boldsymbol{x}_2)$, 即此时 T 不是 X 上的线性变换. □

练习 6.13

判定下列映射哪些是线性变换?

(1) 设 $\boldsymbol{x}_0$ 为空间 X 中的一个固定向量, 映射 T: $X \to X$, $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_0$.

解: 当 $\boldsymbol{x}_0 = \mathbf{0}$ 时, $T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}$ 显然是 X 上的线性变换.

当 $\boldsymbol{x}_0 \neq \mathbf{0}$ 时,

$$T(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_0, \qquad T(\boldsymbol{x}_1) + T(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + 2\boldsymbol{x}_0.$$

则 $T(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) \neq T(\boldsymbol{x}_1) + T(\boldsymbol{x}_2)$, 即此时 T 不是 X 上的线性变换. □

(2) T: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\boldsymbol{\xi} \mapsto \overline{\boldsymbol{\xi}}$.

练习 6.13

判定下列映射哪些是线性变换?

(1) 设 $\boldsymbol{x}_0$ 为空间 X 中的一个固定向量, 映射 T: $X \to X$, $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_0$.

解: 当 $\boldsymbol{x}_0 = \mathbf{0}$ 时, $T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}$ 显然是 X 上的线性变换.

当 $\boldsymbol{x}_0 \neq \mathbf{0}$ 时,

$$T(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_0, \qquad T(\boldsymbol{x}_1) + T(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + 2\boldsymbol{x}_0.$$

则 $T(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) \neq T(\boldsymbol{x}_1) + T(\boldsymbol{x}_2)$, 即此时 T 不是 X 上的线性变换. □

(2) T: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\boldsymbol{\xi} \mapsto \overline{\boldsymbol{\xi}}$.

解: T 不是线性变换.

练习 6.13

判定下列映射哪些是线性变换?

(1) 设 $\boldsymbol{x}_0$ 为空间 X 中的一个固定向量, 映射 T: $X \to X$, $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_0$.

解: 当 $\boldsymbol{x}_0 = \mathbf{0}$ 时, $T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}$ 显然是 X 上的线性变换.

当 $\boldsymbol{x}_0 \neq \mathbf{0}$ 时,

$$T(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_0, \qquad T(\boldsymbol{x}_1) + T(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + 2\boldsymbol{x}_0.$$

则 $T(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) \neq T(\boldsymbol{x}_1) + T(\boldsymbol{x}_2)$, 即此时 T 不是 X 上的线性变换. □

(2) T: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\boldsymbol{\xi} \mapsto \overline{\boldsymbol{\xi}}$.

解: T 不是线性变换. 因为取 $\lambda = \mathrm{i}$, $\boldsymbol{\xi} = 1$ 时, 有

$$T(\lambda\boldsymbol{\xi}) = \overline{\lambda\boldsymbol{\xi}} = -\mathrm{i}, \qquad \lambda T(\boldsymbol{\xi}) = \lambda\overline{\boldsymbol{\xi}} = \mathrm{i}.$$

故 $T(\lambda\boldsymbol{\xi}) \neq \lambda T(\boldsymbol{\xi})$. □

(3) 把复数域 $\mathbb{C}$ 看作实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, 记为 $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$. 映射 $T\colon \mathbb{C}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$, $\boldsymbol{\xi} \mapsto \mathrm{i}\,\mathrm{Re}\boldsymbol{\xi}$.

(3) 把复数域 $\mathbb{C}$ 看作实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, 记为 $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$. 映射 T: $\mathbb{C}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$, $\boldsymbol{\xi} \mapsto \mathrm{i}\,\mathrm{Re}\boldsymbol{\xi}$.

解: $\forall \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{C}_{\mathbb{R}}, \lambda \in \mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned} T(\lambda\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}) &= \mathrm{i}\,\mathrm{Re}(\lambda\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}) \\ &= \mathrm{i}\,\mathrm{Re}(\lambda\boldsymbol{\xi}) + \mathrm{i}\,\mathrm{Re}\boldsymbol{\eta} \\ &= \lambda(\mathrm{i}\,\mathrm{Re}\boldsymbol{\xi}) + \mathrm{i}\,\mathrm{Re}\boldsymbol{\eta} \\ &= \lambda T(\boldsymbol{\xi}) + T(\boldsymbol{\eta}). \end{aligned}$$

(3) 把复数域 $\mathbb{C}$ 看作实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, 记为 $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$. 映射 T: $\mathbb{C}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$, $\boldsymbol{\xi} \mapsto \mathrm{i}\,\mathrm{Re}\boldsymbol{\xi}$.

解: $\forall \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned} T(\lambda\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}) &= \mathrm{i}\,\mathrm{Re}(\lambda\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}) \\ &= \mathrm{i}\,\mathrm{Re}(\lambda\boldsymbol{\xi}) + \mathrm{i}\,\mathrm{Re}\boldsymbol{\eta} \\ &= \lambda(\mathrm{i}\,\mathrm{Re}\boldsymbol{\xi}) + \mathrm{i}\,\mathrm{Re}\boldsymbol{\eta} \\ &= \lambda T(\boldsymbol{\xi}) + T(\boldsymbol{\eta}). \end{aligned}$$

故 T 是线性变换. □

(4) 映射 T: $\mathbb{C}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}$, $\boldsymbol{\xi} \mapsto \overline{\boldsymbol{\xi}}$.

(4) 映射 T: $\mathbb{C}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}$, $\boldsymbol{\xi} \mapsto \overline{\boldsymbol{\xi}}$.

解: T 是线性变换.

(4) 映射 T: $\mathbb{C}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}$, $\boldsymbol{\xi} \mapsto \overline{\boldsymbol{\xi}}$.

解: T 是线性变换. $\forall \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned} T(\lambda\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}) &= \overline{\lambda\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}} \\ &= \lambda\overline{\boldsymbol{\xi}} + \overline{\boldsymbol{\eta}} \\ &= \lambda T(\boldsymbol{\xi}) + T(\boldsymbol{\eta}). \end{aligned}$$

□

(5) T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} \mapsto (2x_1 - x_2, x_2 + x_3, x_1)^{\mathrm{T}}$.

(5) T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} \mapsto (2x_1 - x_2, x_2 + x_3, x_1)^{\mathrm{T}}$.

解: T 是线性变换.

(5) T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} \mapsto (2x_1 - x_2, x_2 + x_3, x_1)^{\mathrm{T}}$.

解: T 是线性变换. $\forall \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

(5) T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} \mapsto (2x_1 - x_2, x_2 + x_3, x_1)^{\mathrm{T}}$.

解: T 是线性变换. $\forall \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned}
T(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{y}) &= T\big((x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}\big) + T\big((y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}\big) \\
&= (2x_1 - x_2, x_2 + x_3, x_1)^{\mathrm{T}} + (2y_1 - y_2, y_2 + y_3, y_1)^{\mathrm{T}} \\
&= \big(2(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2), (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3), (x_1 + y_1)\big)^{\mathrm{T}} \\
&= T\big(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3\big) = T(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}). \\
T(\lambda \boldsymbol{x}) &= T\big((\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)^{\mathrm{T}}\big) \\
&= (2\lambda x_1 - \lambda x_2, \lambda x_2 + \lambda x_3, \lambda x_1)^{\mathrm{T}} \\
&= \lambda(2x_1 - x_2, x_2 + x_3, x_1)^{\mathrm{T}} = \lambda T(\boldsymbol{x}).
\end{aligned}$$

□

(6) T: $\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$, $\boldsymbol{Z} \mapsto \boldsymbol{BZC}$, 其中 $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 中固定的矩阵.

(6) T: $\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$, $\boldsymbol{Z} \mapsto \boldsymbol{BZC}$, 其中 $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 中固定的矩阵.

解: $\forall \boldsymbol{Z}_1, \boldsymbol{Z}_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned} T(\lambda \boldsymbol{Z}_1 + \boldsymbol{Z}_2) &= \boldsymbol{B}(\lambda \boldsymbol{Z}_1 + \boldsymbol{Z}_2)\boldsymbol{C} \\ &= \lambda \boldsymbol{BZ}_1\boldsymbol{C} + \boldsymbol{BZ}_2\boldsymbol{C} \\ &= \lambda T(\boldsymbol{Z}_1) + T(\boldsymbol{Z}_2). \end{aligned}$$

(6) T: $\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$, $\boldsymbol{Z} \mapsto \boldsymbol{BZC}$, 其中 $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 中固定的矩阵.

解: $\forall \boldsymbol{Z}_1, \boldsymbol{Z}_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned} T(\lambda \boldsymbol{Z}_1 + \boldsymbol{Z}_2) &= \boldsymbol{B}(\lambda \boldsymbol{Z}_1 + \boldsymbol{Z}_2)\boldsymbol{C} \\ &= \lambda \boldsymbol{B}\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{C} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{C} \\ &= \lambda T(\boldsymbol{Z}_1) + T(\boldsymbol{Z}_2). \end{aligned}$$

故 T 是线性变换. $\square$

(7) T: $\mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_n$, $p(x) \mapsto p(x+1)$.

(7) T: $\mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_n$, $p(x) \mapsto p(x+1)$.

解: T 是线性变换.

(7) T: $\mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_n$, $p(x) \mapsto p(x+1)$.

解: T 是线性变换. 设 $p(x)$, $q(x) \in \mathbb{R}[x]_n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, 并令

$$r(x) \triangleq p(x) + q(x), \qquad s(x) \triangleq \lambda p(x).$$

(7) T: $\mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_n$, $p(x) \mapsto p(x+1)$.

解: T 是线性变换. 设 $p(x)$, $q(x) \in \mathbb{R}[x]_n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, 并令

$$r(x) \triangleq p(x) + q(x), \qquad s(x) \triangleq \lambda p(x).$$

则 $r(x+1) = p(x+1) + q(x+1)$, $s(x+1) = \lambda p(x+1)$.

(7) $T\colon \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_n,\ p(x) \mapsto p(x+1)$.

解: T 是线性变换. 设 $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]_n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, 并令

$$r(x) \triangleq p(x) + q(x), \qquad s(x) \triangleq \lambda p(x).$$

则 $r(x+1) = p(x+1) + q(x+1)$, $s(x+1) = \lambda p(x+1)$. 故

$$\begin{aligned} T\big(p(x)+q(x)\big) &= T\big(r(x)\big) = r(x+1) \\ &= p(x+1) + q(x+1) = T\big(p(x)\big) + T\big(q(x)\big), \\ T\big(\lambda p(x)\big) &= T\big(s(x)\big) = s(x+1) \\ &= \lambda p(x+1) = \lambda T\big(p(x)\big). \end{aligned}$$

□

Outline

设 X 和 Y 均为数域 F 上的线性空间, $\dim X = n$, $\dim Y = m$. 又设 T: $X \to Y$ 为给定的从 X 到 Y 的线性变换.

设 X 和 Y 均为数域 F 上的线性空间, $\dim X = n$, $\dim Y = m$. 又设 T: $X \to Y$ 为给定的从 X 到 Y 的线性变换. 任取 X 和 Y 的基底分别为

$$\mathscr{B}_X = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}, \qquad \mathscr{B}_Y = \{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_m\}.$$

设 X 和 Y 均为数域 F 上的线性空间, $\dim X = n$, $\dim Y = m$. 又设 T: $X \to Y$ 为给定的从 X 到 Y 的线性变换. 任取 X 和 Y 的基底分别为

$$\mathscr{B}_X = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}, \qquad \mathscr{B}_Y = \{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_m\}.$$

则基底 $\mathscr{B}_X$ 的像 $T(\boldsymbol{x}_1)$, $T(\boldsymbol{x}_2)$, $\cdots$, $T(\boldsymbol{x}_n)$ 可以由基底 $\mathscr{B}_Y$ 线性表示:

$$\begin{cases} T(\boldsymbol{x}_1) = a_{11}\boldsymbol{y}_1 + a_{21}\boldsymbol{y}_2 + \cdots + a_{m1}\boldsymbol{y}_m, \\ T(\boldsymbol{x}_2) = a_{12}\boldsymbol{y}_1 + a_{22}\boldsymbol{y}_2 + \cdots + a_{m2}\boldsymbol{y}_m, \\ \qquad\vdots \\ T(\boldsymbol{x}_n) = a_{1n}\boldsymbol{y}_1 + a_{2n}\boldsymbol{y}_2 + \cdots + a_{mn}\boldsymbol{y}_m, \end{cases}$$

设 X 和 Y 均为数域 F 上的线性空间, $\dim X = n$, $\dim Y = m$. 又设 T: $X \to Y$ 为给定的从 X 到 Y 的线性变换. 任取 X 和 Y 的基底分别为

$$\mathscr{B}_X = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}, \qquad \mathscr{B}_Y = \{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_m\}.$$

则基底 $\mathscr{B}_X$ 的像 $T(\boldsymbol{x}_1)$, $T(\boldsymbol{x}_2)$, $\cdots$, $T(\boldsymbol{x}_n)$ 可以由基底 $\mathscr{B}_Y$ 线性表示:

$$\begin{cases} T(\boldsymbol{x}_1) = a_{11}\boldsymbol{y}_1 + a_{21}\boldsymbol{y}_2 + \cdots + a_{m1}\boldsymbol{y}_m, \\ T(\boldsymbol{x}_2) = a_{12}\boldsymbol{y}_1 + a_{22}\boldsymbol{y}_2 + \cdots + a_{m2}\boldsymbol{y}_m, \\ \qquad\qquad \vdots \\ T(\boldsymbol{x}_n) = a_{1n}\boldsymbol{y}_1 + a_{2n}\boldsymbol{y}_2 + \cdots + a_{mn}\boldsymbol{y}_m, \end{cases}$$

即

$$[T(\boldsymbol{x}_1), T(\boldsymbol{x}_2), \cdots, T(\boldsymbol{x}_n)] = [\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_m] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

记

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in F^{m\times n},$$

记

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in F^{m\times n},$$

则

$$\big[T(\boldsymbol{x}_1), T(\boldsymbol{x}_2), \cdots, T(\boldsymbol{x}_n)\big] = [\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_m]\boldsymbol{P}. \tag{13}$$

记

$$
\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in F^{m\times n},
$$

则

$$
\big[T(\boldsymbol{x}_1), T(\boldsymbol{x}_2), \cdots, T(\boldsymbol{x}_n)\big] = [\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_m]\boldsymbol{P}. \tag{13}
$$

若记

$$
T\big[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n\big] \triangleq \big[T(\boldsymbol{x}_1), T(\boldsymbol{x}_2), \cdots, T(\boldsymbol{x}_n)\big],
$$

则式 (13) 还可以表达为

$$
T\big[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n\big] = [\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_m]\boldsymbol{P},
$$

记

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in F^{m\times n},$$

则

$$\big[T(\boldsymbol{x}_1), T(\boldsymbol{x}_2), \cdots, T(\boldsymbol{x}_n)\big] = [\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_m]\boldsymbol{P}. \tag{13}$$

若记

$$T\big[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n\big] \triangleq \big[T(\boldsymbol{x}_1), T(\boldsymbol{x}_2), \cdots, T(\boldsymbol{x}_n)\big],$$

则式 (13) 还可以表达为

$$T\big[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n\big] = [\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_m]\boldsymbol{P},$$

或者

$$T\mathscr{B}_X = \mathscr{B}_Y\boldsymbol{P}. \tag{14}$$

定义 6.14

表达式 $T\mathscr{B}_X = \mathscr{B}_Y\boldsymbol{P}$ 中的矩阵 $\boldsymbol{P}$ 称为线性变换 T 的关于基底 $\mathscr{B}_X$ 和基底 $\mathscr{B}_Y$ 的矩阵表示, 记为

$$m_{\mathscr{B}_X,\mathscr{B}_Y}(T).$$

利用线性变换的矩阵可以直接计算一个向量的像.

定理 6.15

设线性变换 $T\colon X \to Y$ 的关于基底 $\mathscr{B}_X$ 和基底 $\mathscr{B}_Y$ 的矩阵表示为 $\boldsymbol{P}$, 向量 $\boldsymbol{x}$ 在基底 $\mathscr{B}_X$ 下的坐标为 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$, 则 $T(\boldsymbol{x})$ 在基底 $\mathscr{B}_Y$ 下的坐标 $(b_1, b_2, \cdots, b_m)^{\mathrm{T}}$ 可以按下述公式计算:

$$(b_1, b_2, \cdots, b_m)^{\mathrm{T}} = P(a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$$

利用线性变换的矩阵可以直接计算一个向量的像.

定理 6.15

设线性变换 $T\colon X \to Y$ 的关于基底 $\mathscr{B}_X$ 和基底 $\mathscr{B}_Y$ 的矩阵表示为 $\boldsymbol{P}$, 向量 $\boldsymbol{x}$ 在基底 $\mathscr{B}_X$ 下的坐标为 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$, 则 $T(\boldsymbol{x})$ 在基底 $\mathscr{B}_Y$ 下的坐标 $(b_1, b_2, \cdots, b_m)^{\mathrm{T}}$ 可以按下述公式计算:

$$(b_1, b_2, \cdots, b_m)^{\mathrm{T}} = P(a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$$

证: 记 $\mathscr{B}_X = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$, $\mathscr{B}_Y = \{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_m\}$.

利用线性变换的矩阵可以直接计算一个向量的像.

定理 6.15

设线性变换 $T\colon X \to Y$ 的关于基底 $\mathscr{B}_X$ 和基底 $\mathscr{B}_Y$ 的矩阵表示为 $\boldsymbol{P}$, 向量 $\boldsymbol{x}$ 在基底 $\mathscr{B}_X$ 下的坐标为 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$, 则 $T(\boldsymbol{x})$ 在基底 $\mathscr{B}_Y$ 下的坐标 $(b_1, b_2, \cdots, b_m)^{\mathrm{T}}$ 可以按下述公式计算:

$$(b_1, b_2, \cdots, b_m)^{\mathrm{T}} = P(a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$$

证: 记 $\mathscr{B}_X = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$, $\mathscr{B}_Y = \{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_m\}$.

由假设 $\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{x}_n$,

利用线性变换的矩阵可以直接计算一个向量的像.

定理 6.15

设线性变换 $T\colon X \to Y$ 的关于基底 $\mathscr{B}_X$ 和基底 $\mathscr{B}_Y$ 的矩阵表示为 $\boldsymbol{P}$, 向量 $\boldsymbol{x}$ 在基底 $\mathscr{B}_X$ 下的坐标为 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$, 则 $T(\boldsymbol{x})$ 在基底 $\mathscr{B}_Y$ 下的坐标 $(b_1, b_2, \cdots, b_m)^{\mathrm{T}}$ 可以按下述公式计算:

$$(b_1, b_2, \cdots, b_m)^{\mathrm{T}} = P(a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$$

证: 记 $\mathscr{B}_X = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$, $\mathscr{B}_Y = \{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_m\}$.

由假设 $\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{x}_n$, 于是

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{x}) &= a_1 T(\boldsymbol{x}_1) + a_2 T(\boldsymbol{x}_2) + \cdots + a_n T(\boldsymbol{x}_n) \\ &= \big[T(\boldsymbol{x}_1), T(\boldsymbol{x}_2), \cdots, T(\boldsymbol{x}_n)\big] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = [\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_m]\boldsymbol{P} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

另一方面, 由假设

$$T(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_m] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

另一方面, 由假设

$$T(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_m] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

因为向量 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_m$ 线性无关, 所以

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \boldsymbol{P} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

□

另一方面, 由假设

$$T(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_m] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

因为向量 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_m$ 线性无关, 所以

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \boldsymbol{P} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

□

☞ 线性空间中的向量可以用坐标来表示, 抽象的线性变换也能同具体的数发生联系: 用矩阵来表示.

线性变换在不同基底下的矩阵之间的关系

设 $\mathscr{B}_X$, $\mathscr{B}_X^{(1)}$ 为线性空间 X 的基底, $\mathscr{B}_Y$, $\mathscr{B}_Y^{(1)}$ 为线性空间 Y 的基底,

线性变换在不同基底下的矩阵之间的关系

设 $\mathscr{B}_X$, $\mathscr{B}_X^{(1)}$ 为线性空间 X 的基底, $\mathscr{B}_Y$, $\mathscr{B}_Y^{(1)}$ 为线性空间 Y 的基底, 且线性变换 T 关于基底 $\mathscr{B}_X$ 和 $\mathscr{B}_Y$ 的矩阵为 $\boldsymbol{P}$, T 关于基底 $\mathscr{B}_X^{(1)}$ 和 $\mathscr{B}_Y^{(1)}$ 的矩阵为 $\boldsymbol{P}_1$.

线性变换在不同基底下的矩阵之间的关系

设 $\mathscr{B}_X, \mathscr{B}_X^{(1)}$ 为线性空间 X 的基底, $\mathscr{B}_Y, \mathscr{B}_Y^{(1)}$ 为线性空间 Y 的基底, 且线性变换 T 关于基底 $\mathscr{B}_X$ 和 $\mathscr{B}_Y$ 的矩阵为 $\boldsymbol{P}$, T 关于基底 $\mathscr{B}_X^{(1)}$ 和 $\mathscr{B}_Y^{(1)}$ 的矩阵为 $\boldsymbol{P}_1$. 即

$$T\mathscr{B}_X = \mathscr{B}_Y\boldsymbol{P}, \qquad T\mathscr{B}_X^{(1)} = \mathscr{B}_Y^{(1)}\boldsymbol{P}_1.$$

线性变换在不同基底下的矩阵之间的关系

设 $\mathscr{B}_X, \mathscr{B}_X^{(1)}$ 为线性空间 X 的基底, $\mathscr{B}_Y, \mathscr{B}_Y^{(1)}$ 为线性空间 Y 的基底, 且线性变换 T 关于基底 $\mathscr{B}_X$ 和 $\mathscr{B}_Y$ 的矩阵为 $\boldsymbol{P}$, T 关于基底 $\mathscr{B}_X^{(1)}$ 和 $\mathscr{B}_Y^{(1)}$ 的矩阵为 $\boldsymbol{P}_1$. 即

$$T\mathscr{B}_X = \mathscr{B}_Y\boldsymbol{P}, \qquad T\mathscr{B}_X^{(1)} = \mathscr{B}_Y^{(1)}\boldsymbol{P}_1.$$

又设有过渡矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 使得 $\mathscr{B}_X = \mathscr{B}_X^{(1)}\boldsymbol{A}$, $\mathscr{B}_Y = \mathscr{B}_Y^{(1)}\boldsymbol{B}$.

线性变换在不同基底下的矩阵之间的关系

设 $\mathscr{B}_X, \mathscr{B}_X^{(1)}$ 为线性空间 X 的基底, $\mathscr{B}_Y, \mathscr{B}_Y^{(1)}$ 为线性空间 Y 的基底, 且线性变换 T 关于基底 $\mathscr{B}_X$ 和 $\mathscr{B}_Y$ 的矩阵为 $\boldsymbol{P}$, T 关于基底 $\mathscr{B}_X^{(1)}$ 和 $\mathscr{B}_Y^{(1)}$ 的矩阵为 $\boldsymbol{P}_1$. 即

$$T\mathscr{B}_X = \mathscr{B}_Y\boldsymbol{P}, \qquad T\mathscr{B}_X^{(1)} = \mathscr{B}_Y^{(1)}\boldsymbol{P}_1.$$

又设有过渡矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 使得 $\mathscr{B}_X = \mathscr{B}_X^{(1)}\boldsymbol{A}$, $\mathscr{B}_Y = \mathscr{B}_Y^{(1)}\boldsymbol{B}$. 下求 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{P}_1$ 的关系.

线性变换在不同基底下的矩阵之间的关系

设 $\mathscr{B}_X, \mathscr{B}_X^{(1)}$ 为线性空间 X 的基底, $\mathscr{B}_Y, \mathscr{B}_Y^{(1)}$ 为线性空间 Y 的基底, 且线性变换 T 关于基底 $\mathscr{B}_X$ 和 $\mathscr{B}_Y$ 的矩阵为 $\boldsymbol{P}$, T 关于基底 $\mathscr{B}_X^{(1)}$ 和 $\mathscr{B}_Y^{(1)}$ 的矩阵为 $\boldsymbol{P}_1$. 即

$$T\mathscr{B}_X = \mathscr{B}_Y \boldsymbol{P}, \qquad T\mathscr{B}_X^{(1)} = \mathscr{B}_Y^{(1)} \boldsymbol{P}_1.$$

又设有过渡矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 使得 $\mathscr{B}_X = \mathscr{B}_X^{(1)} \boldsymbol{A}$, $\mathscr{B}_Y = \mathscr{B}_Y^{(1)} \boldsymbol{B}$. 下求 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{P}_1$ 的关系.

$$\begin{aligned} T\mathscr{B}_X = \mathscr{B}_Y \boldsymbol{P} \quad &\Rightarrow \quad T\mathscr{B}_X^{(1)} \boldsymbol{A} = \mathscr{B}_Y^{(1)} \boldsymbol{B}\boldsymbol{P}, \\ &\Rightarrow \quad \mathscr{B}_Y^{(1)} \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{A} = \mathscr{B}_Y^{(1)} \boldsymbol{B}\boldsymbol{P}, \\ &\Rightarrow \quad \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{P}, \end{aligned}$$

线性变换在不同基底下的矩阵之间的关系

设 $\mathscr{B}_X$, $\mathscr{B}_X^{(1)}$ 为线性空间 X 的基底, $\mathscr{B}_Y$, $\mathscr{B}_Y^{(1)}$ 为线性空间 Y 的基底, 且线性变换 T 关于基底 $\mathscr{B}_X$ 和 $\mathscr{B}_Y$ 的矩阵为 $\boldsymbol{P}$, T 关于基底 $\mathscr{B}_X^{(1)}$ 和 $\mathscr{B}_Y^{(1)}$ 的矩阵为 $\boldsymbol{P}_1$. 即

$$T\mathscr{B}_X = \mathscr{B}_Y\boldsymbol{P}, \qquad T\mathscr{B}_X^{(1)} = \mathscr{B}_Y^{(1)}\boldsymbol{P}_1.$$

又设有过渡矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 使得 $\mathscr{B}_X = \mathscr{B}_X^{(1)}\boldsymbol{A}$, $\mathscr{B}_Y = \mathscr{B}_Y^{(1)}\boldsymbol{B}$. 下求 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{P}_1$ 的关系.

$$\begin{aligned}
T\mathscr{B}_X = \mathscr{B}_Y\boldsymbol{P} \quad &\Rightarrow \quad T\mathscr{B}_X^{(1)}\boldsymbol{A} = \mathscr{B}_Y^{(1)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}, \\
&\Rightarrow \quad \mathscr{B}_Y^{(1)}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A} = \mathscr{B}_Y^{(1)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}, \\
&\Rightarrow \quad \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{P},
\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{B}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

定理 6.16

设 X 和 Y 为数域 F 上的线性空间，则对给定的线性变换 T: $X \to Y$, 其关于 X 和 Y 的两组不同基底 $\mathscr{B}_X$, $\mathscr{B}_Y$ 和 $\mathscr{B}_X^{(1)}$, $\mathscr{B}_Y^{(1)}$ 的矩阵表示 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{P}_1$ 是相抵的，即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 使

$$\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{B}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

定理 6.16

设 X 和 Y 为数域 F 上的线性空间, 则对给定的线性变换 T: $X \to Y$, 其关于 X 和 Y 的两组不同基底 $\mathscr{B}_X$, $\mathscr{B}_Y$ 和 $\mathscr{B}_X^{(1)}$, $\mathscr{B}_Y^{(1)}$ 的矩阵表示 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{P}_1$ 是相抵的, 即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 使

$$\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{B}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

推论 6.17

设 T 是线性空间 X 上的线性变换, 即 T: $X \to X$. 若 T 在两组基底

$$\mathscr{B} = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}, \tag{15}$$

$$\mathscr{B}^{(1)} = \{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n\}, \tag{16}$$

下的矩阵表示分别为 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{P}_1$, 且从基 $\mathscr{B}^{(1)}$ 到基 $\mathscr{B}$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 则

$$\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

定理 6.16

设 X 和 Y 为数域 F 上的线性空间, 则对给定的线性变换 T: $X \to Y$, 其关于 X 和 Y 的两组不同基底 $\mathscr{B}_X, \mathscr{B}_Y$ 和 $\mathscr{B}_X^{(1)}, \mathscr{B}_Y^{(1)}$ 的矩阵表示 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{P}_1$ 是相抵的, 即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 使

$$\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{B}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

推论 6.17

设 T 是线性空间 X 上的线性变换, 即 T: $X \to X$. 若 T 在两组基底

$$\mathscr{B} = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}, \tag{15}$$

$$\mathscr{B}^{(1)} = \{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n\}, \tag{16}$$

下的矩阵表示分别为 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{P}_1$, 且从基 $\mathscr{B}^{(1)}$ 到基 $\mathscr{B}$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 则

$$\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

即线性空间 X 上的线性变换在不同的基底下的矩阵表示是相似的.

练习 6.18

已知 $\mathbb{R}^3$ 中线性变换 T 在基底 $\mathscr{B}=\{\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3\}$ 下的矩阵表示为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{\eta}_1=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\eta}_2=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\eta}_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$. 求 T 在自然基底 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 下的矩阵表示.

解: 已知

$$T\left[\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3\right]=\left[\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3\right]\boldsymbol{P}$$

设所求矩阵为 $\boldsymbol{P}_1$, 即满足

$$T\left[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\right]=\left[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\right]\boldsymbol{P}_1.$$

由

$$[\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3] = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3] \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \triangleq [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3] \boldsymbol{A},$$

由

$$[\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3] = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3] \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \triangleq [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3] \boldsymbol{A},$$

则

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_1 &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

或者不使用公式, 用下述表达方式.

或者不使用公式, 用下述表达方式.

已知

$$T[\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3] = [\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3]\boldsymbol{P}$$

或者不使用公式, 用下述表达方式.

已知

$$T[\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3] = [\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3]\boldsymbol{P}$$

代入

$$[\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3] = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

或者不使用公式, 用下述表达方式.

已知

$$T[\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3]=[\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3]\boldsymbol{P}$$

代入

$$[\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3]=[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

得

$$T[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}=[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{P}.$$

故

$$T[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]=[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}^{-1}.$$

练习 6.19

在 $\mathbb{R}^3$ 中线性变换 T 定义如下:

$$\begin{aligned} T(-1,0,2)^{\mathrm{T}} &= (-5,0,3)^{\mathrm{T}}, \\ T(0,1,1)^{\mathrm{T}} &= (0,-1,6)^{\mathrm{T}}, \\ T(3,-1,0)^{\mathrm{T}} &= (-5,-1,9)^{\mathrm{T}}. \end{aligned}$$

求 T 在自然基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 下的矩阵表示, 并求 $R(T)$ 及 $\dim R(T)$.

练习 6.19

在 $\mathbb{R}^3$ 中线性变换 T 定义如下:

$$
\begin{aligned}
T(-1,0,2)^{\mathrm{T}} &= (-5,0,3)^{\mathrm{T}},\\
T(0,1,1)^{\mathrm{T}} &= (0,-1,6)^{\mathrm{T}},\\
T(3,-1,0)^{\mathrm{T}} &= (-5,-1,9)^{\mathrm{T}}.
\end{aligned}
$$

求 T 在自然基底 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 下的矩阵表示, 并求 $R(T)$ 及 $\dim R(T)$.

解: 记 $\boldsymbol{\eta}_1=(-1,0,2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\eta}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\eta}_3=(3,-1,0)^{\mathrm{T}}$.

练习 6.19

在 $\mathbb{R}^3$ 中线性变换 T 定义如下:

$$\begin{aligned} T(-1,0,2)^{\mathrm{T}} &= (-5,0,3)^{\mathrm{T}}, \\ T(0,1,1)^{\mathrm{T}} &= (0,-1,6)^{\mathrm{T}}, \\ T(3,-1,0)^{\mathrm{T}} &= (-5,-1,9)^{\mathrm{T}}. \end{aligned}$$

求 T 在自然基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 下的矩阵表示, 并求 $R(T)$ 及 $\dim R(T)$.

解: 记 $\boldsymbol{\eta}_1 = (-1,0,2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (0,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\eta}_3 = (3,-1,0)^{\mathrm{T}}$. 由

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 5 \neq 0,$$

知 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基底.

由题设

$$T[\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3] = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3] \begin{bmatrix} -5 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix},$$

由题设

$$T[\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3] = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3] \begin{bmatrix} -5 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix},$$

又

$$[\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3] = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

由题设

$$T[\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3]=[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]\begin{bmatrix}-5&0&-5\\0&-1&-1\\3&6&9\end{bmatrix},$$

又

$$[\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3]=[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]\begin{bmatrix}-1&0&3\\0&1&-1\\2&1&0\end{bmatrix},$$

故

$$\begin{aligned}T[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]&=[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]\begin{bmatrix}-5&0&-5\\0&-1&-1\\3&6&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&3\\0&1&-1\\2&1&0\end{bmatrix}^{-1}\\&=[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]\cdot\frac{1}{7}\begin{bmatrix}-5&20&-20\\-4&-5&-2\\27&18&24\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

得 T 在基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 下的矩阵表示为

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -5 & 20 & -20 \\ -4 & -5 & -2 \\ 27 & 18 & 24 \end{bmatrix}.$$

得 T 在基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 下的矩阵表示为

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -5 & 20 & -20 \\ -4 & -5 & -2 \\ 27 & 18 & 24 \end{bmatrix}.$$

由

$$\begin{vmatrix} -5 & 20 & -20 \\ -4 & -5 & -2 \\ 27 & 18 & 24 \end{vmatrix} = 0,$$

知矩阵不满秩,

得 T 在基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 下的矩阵表示为

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -5 & 20 & -20 \\ -4 & -5 & -2 \\ 27 & 18 & 24 \end{bmatrix}.$$

由

$$\begin{vmatrix} -5 & 20 & -20 \\ -4 & -5 & -2 \\ 27 & 18 & 24 \end{vmatrix} = 0,$$

知矩阵不满秩, 而列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (-5, -4, 27)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (20, -5, 18)^{\mathrm{T}}$ 不成比例, $\boldsymbol{A}$ 的列向量的一个极大无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$,

得 T 在基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 下的矩阵表示为

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -5 & 20 & -20 \\ -4 & -5 & -2 \\ 27 & 18 & 24 \end{bmatrix}.$$

由

$$\begin{vmatrix} -5 & 20 & -20 \\ -4 & -5 & -2 \\ 27 & 18 & 24 \end{vmatrix} = 0,$$

知矩阵不满秩, 而列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (-5, -4, 27)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (20, -5, 18)^{\mathrm{T}}$ 不成比例, $\boldsymbol{A}$ 的列向量的一个极大无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$, 故

$$R(\boldsymbol{A}) = \mathrm{span}[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2],$$

得 T 在基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 下的矩阵表示为

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -5 & 20 & -20 \\ -4 & -5 & -2 \\ 27 & 18 & 24 \end{bmatrix}.$$

由

$$\begin{vmatrix} -5 & 20 & -20 \\ -4 & -5 & -2 \\ 27 & 18 & 24 \end{vmatrix} = 0,$$

知矩阵不满秩, 而列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (-5, -4, 27)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (20, -5, 18)^{\mathrm{T}}$ 不成比例, $\boldsymbol{A}$ 的列向量的一个极大无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$, 故

$$R(\boldsymbol{A}) = \mathrm{span}[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2],$$

从而

$$R(T) = \mathrm{span}[-5\boldsymbol{e}_1 - 4\boldsymbol{e}_2 + 27\boldsymbol{e}_3,\ 20\boldsymbol{e}_1 - 5\boldsymbol{e}_2 + 18\boldsymbol{e}_3].$$

且 $\dim R(T) = 2$. □

Outline

定义 6.20

设空间 X 和空间 Y 为数域 F 上的线性空间. T_1, T_2 都是从 X 到 Y 的映射, $\lambda \in F$, 若

1. 对任意 $\boldsymbol{x} \in X$ 均有 $T_1(\boldsymbol{x}) = T_2(\boldsymbol{x})$, 则称 T_1 与 T_2 相等, 记为 $T_1 = T_2$.

定义 6.20

设空间 X 和空间 Y 为数域 F 上的线性空间. T_1, T_2 都是从 X 到 Y 的映射, $\lambda \in F$, 若

1. 对任意 $\boldsymbol{x} \in X$ 均有 $T_1(\boldsymbol{x}) = T_2(\boldsymbol{x})$, 则称 T_1 与 T_2 相等, 记为 $T_1 = T_2$.
2. 对任意 $\boldsymbol{x} \in X$ 均有 $T_1(\boldsymbol{x}) + T_2(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{x})$, 则称 T 为 T_1 与 T_2 的和, 记为 $T = T_1 + T_2$.

定义 6.20

设空间 X 和空间 Y 为数域 F 上的线性空间. T_1, T_2 都是从 X 到 Y 的映射, $\lambda \in F$, 若

1. 对任意 $\boldsymbol{x} \in X$ 均有 $T_1(\boldsymbol{x}) = T_2(\boldsymbol{x})$, 则称 T_1 与 T_2 相等, 记为 $T_1 = T_2$.
2. 对任意 $\boldsymbol{x} \in X$ 均有 $T_1(\boldsymbol{x}) + T_2(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{x})$, 则称 T 为 T_1 与 T_2 的和, 记为 $T = T_1 + T_2$.
3. 对任意 $\boldsymbol{x} \in X$ 均有 $T(\boldsymbol{x}) = \lambda\big(T_1(\boldsymbol{x})\big)$, 则称 T 为 T_1 与 λ 的标量乘积, 记为 $T = \lambda T_1$.

定义 6.20

设空间 X 和空间 Y 为数域 F 上的线性空间. T_1, T_2 都是从 X 到 Y 的映射, $\lambda \in F$, 若

1. 对任意 $\boldsymbol{x} \in X$ 均有 $T_1(\boldsymbol{x}) = T_2(\boldsymbol{x})$, 则称 T_1 与 T_2 相等, 记为 $T_1 = T_2$.
2. 对任意 $\boldsymbol{x} \in X$ 均有 $T_1(\boldsymbol{x}) + T_2(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{x})$, 则称 T 为 T_1 与 T_2 的和, 记为 $T = T_1 + T_2$.
3. 对任意 $\boldsymbol{x} \in X$ 均有 $T(\boldsymbol{x}) = \lambda\big(T_1(\boldsymbol{x})\big)$, 则称 T 为 T_1 与 λ 的标量乘积, 记为 $T = \lambda T_1$.

☞ 若 T_1 与 T_2 为线性变换, 则 $T_1 + T_2$ 及 λT_1 仍是线性变换.

定理 6.21

设 $L(X,Y)$ 为从 X 到 Y 的所有线性变换所构成的集合, 则 $L(X,Y)$ 按照定义 *6.20* 中的加法与标量乘法构成数域 F 上的一个线性空间, 称为 X, Y 所诱导的变换空间.

定义 6.22

设 $T \in L(X, Y)$, $S \in L(Y, Z)$, 若线性变换 $G \in L(X, Z)$ 对任意 $\boldsymbol{x} \in X$ 都满足

$$G(\boldsymbol{x}) = S\big(T(\boldsymbol{x})\big),$$

则称 G 为 T 与 S 的积, 并记为 ST, 即 $G = ST$.

定义 6.22

设 $T \in L(X, Y)$, $S \in L(Y, Z)$, 若线性变换 $G \in L(X, Z)$ 对任意 $\boldsymbol{x} \in X$ 都满足

$$G(\boldsymbol{x}) = S\big(T(\boldsymbol{x})\big),$$

则称 G 为 T 与 S 的积, 并记为 ST, 即 $G = ST$.

☞ 线性变换的乘积一般是不可交换的. 即 $TS = ST$ 一般不成立.

定义 6.22

设 $T \in L(X, Y)$, $S \in L(Y, Z)$, 若线性变换 $G \in L(X, Z)$ 对任意 $\boldsymbol{x} \in X$ 都满足

$$G(\boldsymbol{x}) = S\big(T(\boldsymbol{x})\big),$$

则称 G 为 T 与 S 的积, 并记为 ST, 即 $G = ST$.

☞ 线性变换的乘积一般是不可交换的. 即 $TS = ST$ 一般不成立. 例如下面的习题.

练习 6.23

设 T, S 为线性空间 $\mathbb{R}[x]$ 的如下的两个线性变换:

$$Tp(x) = p'(x), \qquad Sp(x) = xp(x).$$

试问等式 $TS = ST$ 是否成立? 并证明 $TS - ST = E$.

练习 6.23

设 T, S 为线性空间 $\mathbb{R}[x]$ 的如下的两个线性变换:

$$Tp(x) = p'(x), \qquad Sp(x) = xp(x).$$

试问等式 $TS = ST$ 是否成立? 并证明 $TS - ST = E$.

解: (1) 因为

$$\begin{aligned}(TS)p(x) &= T\big(Sp(x)\big) = T\big(xp(x)\big) = p(x) + xp'(x),\\ (ST)p(x) &= S\big(Tp(x)\big) = S\big(p'(x)\big) = xp'(x),\end{aligned}$$

练习 6.23

设 T, S 为线性空间 $\mathbb{R}[x]$ 的如下的两个线性变换:

$$Tp(x) = p'(x), \qquad Sp(x) = xp(x).$$

试问等式 $TS = ST$ 是否成立? 并证明 $TS - ST = E$.

解: (1) 因为

$$(TS)p(x) = T\big(Sp(x)\big) = T\big(xp(x)\big) = p(x) + xp'(x),$$
$$(ST)p(x) = S\big(Tp(x)\big) = S\big(p'(x)\big) = xp'(x),$$

可见 $p(x) \neq 0$ 时, $(TS)p(x) \neq (ST)p(x)$,

练习 6.23

设 T, S 为线性空间 $\mathbb{R}[x]$ 的如下的两个线性变换:

$$Tp(x) = p'(x), \qquad Sp(x) = xp(x).$$

试问等式 $TS = ST$ 是否成立? 并证明 $TS - ST = E$.

解: (1) 因为

$$\begin{aligned}(TS)p(x) &= T\big(Sp(x)\big) = T\big(xp(x)\big) = p(x) + xp'(x),\\ (ST)p(x) &= S\big(Tp(x)\big) = S\big(p'(x)\big) = xp'(x),\end{aligned}$$

可见 $p(x) \neq 0$ 时, $(TS)p(x) \neq (ST)p(x)$, 故

$$TS \neq ST.$$

(2) 由上述讨论知, 对任意 $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, 有

$$(TS)p(x) = p(x) + (ST)p(x),$$

(2) 由上述讨论知, 对任意 $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, 有

$$(TS)p(x) = p(x) + (ST)p(x),$$

即

$$(TS - ST)p(x) = p(x),$$

故 $TS - ST = E$. $\square$

定义 6.24

设 $T \in L(X, X)$, 则称 TT 为 T 的平方, 并记为 $T^2 = TT$.

定义 6.24

设 $T \in L(X, X)$, 则称 TT 为 T 的平方, 并记为 $T^2 = TT$. 一般地, 以下述递推式来表示 T 的 k 次方 $(k \geqslant 0)$:

$$\begin{cases} T^0 = E, \\ T^k = T(T^{k-1}), \qquad k = 1, 2, \cdots \end{cases} \tag{17}$$

定义 6.24

设 $T \in L(X, X)$, 则称 TT 为 T 的平方, 并记为 $T^2 = TT$. 一般地, 以下述递推式来表示 T 的 k 次方 $(k \geqslant 0)$:

$$\begin{cases} T^0 = E, \\ T^k = T(T^{k-1}), \qquad k = 1, 2, \cdots \end{cases} \tag{17}$$

若 T 是可逆变换, 则上式中的 k 可以取任何整数.

定义 6.24

设 $T \in L(X, X)$, 则称 TT 为 T 的平方, 并记为 $T^2 = TT$. 一般地, 以下述递推式来表示 T 的 k 次方 $(k \geqslant 0)$:

$$\begin{cases} T^0 = E, \\ T^k = T(T^{k-1}), \qquad k = 1, 2, \cdots \end{cases} \tag{17}$$

若 T 是可逆变换, 则上式中的 k 可以取任何整数.

☞ 可逆变换: 设 T, S 为空间 X 上的变换, 若

$$TS = ST = E,$$

则称 S 为 T 的逆变换, 记为 T^{-1}.

定义 6.24

设 $T \in L(X, X)$, 则称 TT 为 T 的平方, 并记为 $T^2 = TT$. 一般地, 以下述递推式来表示 T 的 k 次方 $(k \geqslant 0)$:

$$\begin{cases} T^0 = E, \\ T^k = T(T^{k-1}), \qquad k = 1, 2, \cdots \end{cases} \tag{17}$$

若 T 是可逆变换, 则上式中的 k 可以取任何整数.

☞ 可逆变换: 设 T, S 为空间 X 上的变换, 若

$$TS = ST = E,$$

则称 S 为 T 的逆变换, 记为 T^{-1}.

比如取 $k = -2$, 则 $T^{-2} = T(T^{-3})$.

定义 6.25

设 X 为数域 F 上的线性空间, $T \in L(X, X)$, 又设 $g(\lambda)$ 为关于 λ 的多项式, 其系数属于 F, 即

$$g(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \cdots + \alpha_m \lambda^m,$$

则表达式

$$g(T) = \alpha_0 E + \alpha_1 T + \cdots + \alpha_m T^m,$$

称为线性变换 T 的多项式.

练习 6.26

设 $T, S \in L(X,X)$, 并且 $TS - ST = E$, 试证 $T^mS - ST^m = mT^{m-1}$, $m = 1, 2, \cdots$.

练习 6.26

设 $T, S \in L(X, X)$, 并且 $TS - ST = E$, 试证 $T^m S - ST^m = mT^{m-1}$, $m = 1, 2, \cdots$.

证明.

对 m 用数学归纳法.

当 $m = 1$ 时, 即 $TS - ST = T^0 = E$, 由题设成立.

练习 6.26

设 $T, S \in L(X, X)$, 并且 $TS - ST = E$, 试证 $T^m S - ST^m = mT^{m-1}$, $m = 1, 2, \cdots$.

证明.

对 m 用数学归纳法.

当 $m = 1$ 时, 即 $TS - ST = T^0 = E$, 由题设成立.

假定等式对 m 成立, 即有 $T^m S - ST^m = mT^{m-1}$. 下面证明等式对 $m + 1$ 也成立.

练习 6.26

设 $T, S \in L(X, X)$, 并且 $TS - ST = E$, 试证 $T^m S - ST^m = mT^{m-1}$, $m = 1, 2, \cdots$.

证明.

对 m 用数学归纳法.

当 $m = 1$ 时, 即 $TS - ST = T^0 = E$, 由题设成立.

假定等式对 m 成立, 即有 $T^m S - ST^m = mT^{m-1}$. 下面证明等式对 $m + 1$ 也成立.

$$
\begin{aligned}
T^{m+1}S - ST^{m+1} &= T^m(TS) - ST^{m+1} \\
&= T^m(E + ST) - ST^{m+1} = T^m + T^m ST - ST^{m+1} \\
&= T^m + (T^m S - ST^m)T = T^m + (mT^{m-1})T = (m+1)T^{m+1},
\end{aligned}
$$

即等式对 $m + 1$ 也成立. 从而对任意正整数都成立. □

Outline

线性变换的值域与核

定义 6.27

给定线性变换 T: $X \to Y$, 记

$$R(T) = \{\boldsymbol{y} \in Y \mid \boldsymbol{y} = T(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in X\},$$
$$N(T) = \{\boldsymbol{x} \in X \mid T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\},$$

则 $R(T)$ 称为 T 的值空间 (或值域)；

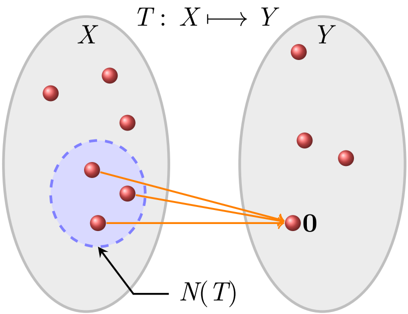
线性变换的值域与核

定义 6.27

给定线性变换 T: $X \to Y$, 记

$$R(T) = \{\boldsymbol{y} \in Y \mid \boldsymbol{y} = T(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in X\},$$
$$N(T) = \{\boldsymbol{x} \in X \mid T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\},$$

则 $R(T)$ 称为 T 的值空间 (或值域) ;$N(T)$ 称为 T 的零空间 (或核).


$T: X \longmapsto Y$
X
Y
$\mathbf{0}$
$N(T)$

例 6.28

证明: $R(T)$ 是 Y 的一个子空间, $N(T)$ 是 X 的一个子空间.

例 6.28

证明: $R(T)$ 是 Y 的一个子空间, $N(T)$ 是 X 的一个子空间.

证: (1) $R(T)$ 是 Y 的非空子集. 下证 $R(T)$ 对加法和数乘是封闭的.

例 6.28

证明: $R(T)$ 是 Y 的一个子空间, $N(T)$ 是 X 的一个子空间.

证: (1) $R(T)$ 是 Y 的非空子集. 下证 $R(T)$ 对加法和数乘是封闭的.

$\forall \boldsymbol{y}_1 = T(\boldsymbol{x}_1),\ \boldsymbol{y}_2 = T(\boldsymbol{x}_2) \in R(T)$, $\forall k \in F$, 有

$$\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 = T(\boldsymbol{x}_1) + T(\boldsymbol{x}_2) = T(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) \in R(T),$$

$$k\boldsymbol{y}_1 = kT(\boldsymbol{x}_1) = T(k\boldsymbol{x}_1) \in R(T).$$

故 $R(T)$ 是 Y 的一个子空间.

例 6.28

证明: $R(T)$ 是 Y 的一个子空间, $N(T)$ 是 X 的一个子空间.

证: (1) $R(T)$ 是 Y 的非空子集. 下证 $R(T)$ 对加法和数乘是封闭的.

$\forall \boldsymbol{y}_1 = T(\boldsymbol{x}_1),\ \boldsymbol{y}_2 = T(\boldsymbol{x}_2) \in R(T)$, $\forall k \in F$, 有

$$\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 = T(\boldsymbol{x}_1) + T(\boldsymbol{x}_2) = T(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) \in R(T),$$

$$k\boldsymbol{y}_1 = kT(\boldsymbol{x}_1) = T(k\boldsymbol{x}_1) \in R(T).$$

故 $R(T)$ 是 Y 的一个子空间.

(2) $N(T)$ 是 X 的非空子集. 下证 $N(T)$ 对加法和数乘是封闭的.

例 6.28

证明: $R(T)$ 是 Y 的一个子空间, $N(T)$ 是 X 的一个子空间.

证: (1) $R(T)$ 是 Y 的非空子集. 下证 $R(T)$ 对加法和数乘是封闭的.
$\forall \boldsymbol{y}_1 = T(\boldsymbol{x}_1)$, $\boldsymbol{y}_2 = T(\boldsymbol{x}_2) \in R(T)$, $\forall k \in F$, 有

$$\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 = T(\boldsymbol{x}_1) + T(\boldsymbol{x}_2) = T(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) \in R(T),$$

$$k\boldsymbol{y}_1 = kT(\boldsymbol{x}_1) = T(k\boldsymbol{x}_1) \in R(T).$$

故 $R(T)$ 是 Y 的一个子空间.

(2) $N(T)$ 是 X 的非空子集. 下证 $N(T)$ 对加法和数乘是封闭的.
$\forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in N(T)$, 有 $T(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{0}$, $T(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{0}$, 则

$$T(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = T(\boldsymbol{x}_1) + T(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}.$$

例 6.28

证明: $R(T)$ 是 Y 的一个子空间, $N(T)$ 是 X 的一个子空间.

证: (1) $R(T)$ 是 Y 的非空子集. 下证 $R(T)$ 对加法和数乘是封闭的.

$\forall \boldsymbol{y}_1 = T(\boldsymbol{x}_1)$, $\boldsymbol{y}_2 = T(\boldsymbol{x}_2) \in R(T)$, $\forall k \in F$, 有

$$\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 = T(\boldsymbol{x}_1) + T(\boldsymbol{x}_2) = T(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) \in R(T),$$

$$k\boldsymbol{y}_1 = kT(\boldsymbol{x}_1) = T(k\boldsymbol{x}_1) \in R(T).$$

故 $R(T)$ 是 Y 的一个子空间.

(2) $N(T)$ 是 X 的非空子集. 下证 $N(T)$ 对加法和数乘是封闭的.

$\forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in N(T)$, 有 $T(\boldsymbol{x}_1) = \mathbf{0}$, $T(\boldsymbol{x}_2) = \mathbf{0}$, 则

$$T(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = T(\boldsymbol{x}_1) + T(\boldsymbol{x}_2) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

得 $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \in N(T)$.

例 6.28

证明: $R(T)$ 是 Y 的一个子空间, $N(T)$ 是 X 的一个子空间.

证: (1) $R(T)$ 是 Y 的非空子集. 下证 $R(T)$ 对加法和数乘是封闭的.

$\forall \boldsymbol{y}_1 = T(\boldsymbol{x}_1),\ \boldsymbol{y}_2 = T(\boldsymbol{x}_2) \in R(T),\ \forall k \in F$, 有

$$\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 = T(\boldsymbol{x}_1) + T(\boldsymbol{x}_2) = T(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) \in R(T),$$

$$k\boldsymbol{y}_1 = kT(\boldsymbol{x}_1) = T(k\boldsymbol{x}_1) \in R(T).$$

故 $R(T)$ 是 Y 的一个子空间.

(2) $N(T)$ 是 X 的非空子集. 下证 $N(T)$ 对加法和数乘是封闭的.

$\forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in N(T)$, 有 $T(\boldsymbol{x}_1) = \mathbf{0},\ T(\boldsymbol{x}_2) = \mathbf{0}$, 则

$$T(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = T(\boldsymbol{x}_1) + T(\boldsymbol{x}_2) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

得 $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \in N(T)$. 又 $\forall \lambda \in F$, 有

$$T(\lambda \boldsymbol{x}_1) = \lambda T(\boldsymbol{x}_1) = \mathbf{0},$$

得 $\lambda \boldsymbol{x}_1 \in N(T)$.

例 6.28

证明: $R(T)$ 是 Y 的一个子空间, $N(T)$ 是 X 的一个子空间.

证: (1) $R(T)$ 是 Y 的非空子集. 下证 $R(T)$ 对加法和数乘是封闭的.

$\forall \boldsymbol{y}_1 = T(\boldsymbol{x}_1)$, $\boldsymbol{y}_2 = T(\boldsymbol{x}_2) \in R(T)$, $\forall k \in F$, 有

$$\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 = T(\boldsymbol{x}_1) + T(\boldsymbol{x}_2) = T(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) \in R(T),$$

$$k\boldsymbol{y}_1 = kT(\boldsymbol{x}_1) = T(k\boldsymbol{x}_1) \in R(T).$$

故 $R(T)$ 是 Y 的一个子空间.

(2) $N(T)$ 是 X 的非空子集. 下证 $N(T)$ 对加法和数乘是封闭的.

$\forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in N(T)$, 有 $T(\boldsymbol{x}_1) = \mathbf{0}$, $T(\boldsymbol{x}_2) = \mathbf{0}$, 则

$$T(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = T(\boldsymbol{x}_1) + T(\boldsymbol{x}_2) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

得 $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \in N(T)$. 又 $\forall \lambda \in F$, 有

$$T(\lambda \boldsymbol{x}_1) = \lambda T(\boldsymbol{x}_1) = \mathbf{0},$$

得 $\lambda \boldsymbol{x}_1 \in N(T)$. 故 $N(T)$ 是 X 的一个子空间. $\square$

例 6.29

在线性空间 $\mathbb{R}[x]_n$ 中, 令

$$T\big(p(x)\big) = p'(x).$$

则 T 的值域就是 $\mathbb{R}[x]_{n-1}$, T 的核就是子空间 $\mathbb{R}$.

定理 6.30

设 X 和 Y 均为数域 F 上线性空间, $\dim X = n$, $\dim Y = m$, 又设 $T \in L(X, Y)$, 则有

$$\dim R(T) + \dim N(T) = \dim X.$$

定理 6.30

设 X 和 Y 均为数域 F 上线性空间, $\dim X = n$, $\dim Y = m$, 又设 $T \in L(X, Y)$, 则有

$$\dim R(T) + \dim N(T) = \dim X.$$

证: 记 $\dim N(T) = k$, 设 $N(T)$ 的基底为

$$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k\}.$$

定理 6.30

设 X 和 Y 均为数域 F 上线性空间, $\dim X = n$, $\dim Y = m$, 又设 $T \in L(X, Y)$, 则有

$$\dim R(T) + \dim N(T) = \dim X.$$

证: 记 $\dim N(T) = k$, 设 $N(T)$ 的基底为

$$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k\}.$$

则 $T(\boldsymbol{x}_1) = \cdots = T(\boldsymbol{x}_k) = 0$.

定理 6.30

设 X 和 Y 均为数域 F 上线性空间, $\dim X = n$, $\dim Y = m$, 又设 $T \in L(X, Y)$, 则有

$$\dim R(T) + \dim N(T) = \dim X.$$

证: 记 $\dim N(T) = k$, 设 $N(T)$ 的基底为

$$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k\}.$$

则 $T(\boldsymbol{x}_1) = \cdots = T(\boldsymbol{x}_k) = 0$. 将其扩充为 X 的基底 $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$.

定理 6.30

设 X 和 Y 均为数域 F 上线性空间, $\dim X = n$, $\dim Y = m$, 又设 $T \in L(X, Y)$, 则有

$$\dim R(T) + \dim N(T) = \dim X.$$

证: 记 $\dim N(T) = k$, 设 $N(T)$ 的基底为

$$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k\}.$$

则 $T(\boldsymbol{x}_1) = \cdots = T(\boldsymbol{x}_k) = 0$. 将其扩充为 X 的基底 $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$.

$\forall \boldsymbol{y} \in R(T)$, $\exists \boldsymbol{x} \in X$, 满足 $\boldsymbol{y} = T(\boldsymbol{x})$.

定理 6.30

设 X 和 Y 均为数域 F 上线性空间, $\dim X = n$, $\dim Y = m$, 又设 $T \in L(X, Y)$, 则有

$$\dim R(T) + \dim N(T) = \dim X.$$

证: 记 $\dim N(T) = k$, 设 $N(T)$ 的基底为

$$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k\}.$$

则 $T(\boldsymbol{x}_1) = \cdots = T(\boldsymbol{x}_k) = 0$. 将其扩充为 X 的基底 $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$.

$\forall \boldsymbol{y} \in R(T)$, $\exists \boldsymbol{x} \in X$, 满足 $\boldsymbol{y} = T(\boldsymbol{x})$. 设 $\boldsymbol{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{x}_i$,

定理 6.30

设 X 和 Y 均为数域 F 上线性空间, $\dim X = n$, $\dim Y = m$, 又设 $T \in L(X, Y)$, 则有

$$\dim R(T) + \dim N(T) = \dim X.$$

证: 记 $\dim N(T) = k$, 设 $N(T)$ 的基底为

$$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k\}.$$

则 $T(\boldsymbol{x}_1) = \cdots = T(\boldsymbol{x}_k) = 0$. 将其扩充为 X 的基底 $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$.

$\forall \boldsymbol{y} \in R(T)$, $\exists \boldsymbol{x} \in X$, 满足 $\boldsymbol{y} = T(\boldsymbol{x})$. 设 $\boldsymbol{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{x}_i$, 则

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y} = T(\boldsymbol{x}) &= T\big(\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{x}_k + \alpha_{k+1} \boldsymbol{x}_{k+1} + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{x}_n\big) \\
&= \alpha_{k+1} T(\boldsymbol{x}_{k+1}) + \cdots + \alpha_n T(\boldsymbol{x}_n),
\end{aligned}$$

定理 6.30

设 X 和 Y 均为数域 F 上线性空间, $\dim X = n$, $\dim Y = m$, 又设 $T \in L(X, Y)$, 则有

$$\dim R(T) + \dim N(T) = \dim X.$$

证: 记 $\dim N(T) = k$, 设 $N(T)$ 的基底为

$$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k\}.$$

则 $T(\boldsymbol{x}_1) = \cdots = T(\boldsymbol{x}_k) = 0$. 将其扩充为 X 的基底 $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$.

$\forall \boldsymbol{y} \in R(T)$, $\exists \boldsymbol{x} \in X$, 满足 $\boldsymbol{y} = T(\boldsymbol{x})$. 设 $\boldsymbol{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{x}_i$, 则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y} = T(\boldsymbol{x}) &= T\big(\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{x}_k + \alpha_{k+1} \boldsymbol{x}_{k+1} + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{x}_n\big) \\ &= \alpha_{k+1} T(\boldsymbol{x}_{k+1}) + \cdots + \alpha_n T(\boldsymbol{x}_n),\end{aligned}$$

由 $\boldsymbol{y}$ 的任意性, 下证 $T(\boldsymbol{x}_{k+1}), \cdots, T(\boldsymbol{x}_n)$ 线性无关, 从而是 $R(T)$ 的一组基底,

定理 6.30

设 X 和 Y 均为数域 F 上线性空间, $\dim X = n$, $\dim Y = m$, 又设 $T \in L(X, Y)$, 则有

$$\dim R(T) + \dim N(T) = \dim X.$$

证: 记 $\dim N(T) = k$, 设 $N(T)$ 的基底为

$$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k\}.$$

则 $T(\boldsymbol{x}_1) = \cdots = T(\boldsymbol{x}_k) = 0$. 将其扩充为 X 的基底 $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$.

$\forall \boldsymbol{y} \in R(T)$, $\exists \boldsymbol{x} \in X$, 满足 $\boldsymbol{y} = T(\boldsymbol{x})$. 设 $\boldsymbol{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{x}_i$, 则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y} = T(\boldsymbol{x}) &= T\big(\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{x}_k + \alpha_{k+1} \boldsymbol{x}_{k+1} + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{x}_n\big) \\ &= \alpha_{k+1} T(\boldsymbol{x}_{k+1}) + \cdots + \alpha_n T(\boldsymbol{x}_n),\end{aligned}$$

由 $\boldsymbol{y}$ 的任意性, 下证 $T(\boldsymbol{x}_{k+1}), \cdots, T(\boldsymbol{x}_n)$ 线性无关, 从而是 $R(T)$ 的一组基底, 则 $\dim R(T) = n - k$,

定理 6.30

设 X 和 Y 均为数域 F 上线性空间, $\dim X = n$, $\dim Y = m$, 又设 $T \in L(X, Y)$, 则有

$$\dim R(T) + \dim N(T) = \dim X.$$

证: 记 $\dim N(T) = k$, 设 $N(T)$ 的基底为

$$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k\}.$$

则 $T(\boldsymbol{x}_1) = \cdots = T(\boldsymbol{x}_k) = 0$. 将其扩充为 X 的基底 $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$.

$\forall \boldsymbol{y} \in R(T)$, $\exists \boldsymbol{x} \in X$, 满足 $\boldsymbol{y} = T(\boldsymbol{x})$. 设 $\boldsymbol{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{x}_i$, 则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y} = T(\boldsymbol{x}) &= T\big(\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{x}_k + \alpha_{k+1} \boldsymbol{x}_{k+1} + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{x}_n\big) \\ &= \alpha_{k+1} T(\boldsymbol{x}_{k+1}) + \cdots + \alpha_n T(\boldsymbol{x}_n),\end{aligned}$$

由 $\boldsymbol{y}$ 的任意性, 下证 $T(\boldsymbol{x}_{k+1}), \cdots, T(\boldsymbol{x}_n)$ 线性无关, 从而是 $R(T)$ 的一组基底, 则 $\dim R(T) = n - k$, 得到 $\dim R(T) + \dim N(T) = \dim X$.

设有 $\xi_{k+1}\, T(\boldsymbol{x}_{k+1}) + \cdots + \xi_n\, T(\boldsymbol{x}_n) = \mathbf{0}$,

设有 $\xi_{k+1}\, T(\boldsymbol{x}_{k+1}) + \cdots + \xi_n\, T(\boldsymbol{x}_n) = \mathbf{0}$, 即

$$T(\xi_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} + \cdots + \xi_n\boldsymbol{x}_n) = \mathbf{0},$$

设有 $\xi_{k+1}\, T(\boldsymbol{x}_{k+1}) + \cdots + \xi_n\, T(\boldsymbol{x}_n) = \mathbf{0}$, 即

$$T(\xi_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} + \cdots + \xi_n\boldsymbol{x}_n) = \mathbf{0},$$

从而 $\xi_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} + \cdots + \xi_n\boldsymbol{x}_n \in N(T)$.

设有 $\xi_{k+1}T(\boldsymbol{x}_{k+1})+\cdots+\xi_n T(\boldsymbol{x}_n)=\mathbf{0}$, 即

$$T(\xi_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1}+\cdots+\xi_n\boldsymbol{x}_n)=\mathbf{0},$$

从而 $\xi_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1}+\cdots+\xi_n\boldsymbol{x}_n\in N(T)$. 故可设

$$\xi_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1}+\cdots+\xi_n\boldsymbol{x}_n=\lambda_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{x}_k,$$

即

设有 $\xi_{k+1} T(\boldsymbol{x}_{k+1}) + \cdots + \xi_n T(\boldsymbol{x}_n) = \mathbf{0}$, 即

$$T(\xi_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} + \cdots + \xi_n \boldsymbol{x}_n) = \mathbf{0},$$

从而 $\xi_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} + \cdots + \xi_n \boldsymbol{x}_n \in N(T)$. 故可设

$$\xi_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} + \cdots + \xi_n \boldsymbol{x}_n = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{x}_k,$$

即

$$-\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 - \cdots - \lambda_k \boldsymbol{x}_k + \xi_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} + \cdots + \xi_n \boldsymbol{x}_n = \mathbf{0}.$$

设有 $\xi_{k+1} T(\boldsymbol{x}_{k+1}) + \cdots + \xi_n T(\boldsymbol{x}_n) = \mathbf{0}$, 即

$$T(\xi_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} + \cdots + \xi_n \boldsymbol{x}_n) = \mathbf{0},$$

从而 $\xi_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} + \cdots + \xi_n \boldsymbol{x}_n \in N(T)$. 故可设

$$\xi_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} + \cdots + \xi_n \boldsymbol{x}_n = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{x}_k,$$

即

$$-\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 - \cdots - \lambda_k \boldsymbol{x}_k + \xi_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} + \cdots + \xi_n \boldsymbol{x}_n = \mathbf{0}.$$

而 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 为 X 的基底, 故

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = \xi_{k+1} = \cdots = \xi_n = 0.$$

设有 $\xi_{k+1} T(\boldsymbol{x}_{k+1}) + \cdots + \xi_n T(\boldsymbol{x}_n) = \mathbf{0}$, 即

$$T(\xi_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} + \cdots + \xi_n \boldsymbol{x}_n) = \mathbf{0},$$

从而 $\xi_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} + \cdots + \xi_n \boldsymbol{x}_n \in N(T)$. 故可设

$$\xi_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} + \cdots + \xi_n \boldsymbol{x}_n = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{x}_k,$$

即

$$-\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 - \cdots - \lambda_k \boldsymbol{x}_k + \xi_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} + \cdots + \xi_n \boldsymbol{x}_n = \mathbf{0}.$$

而 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 为 X 的基底, 故

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = \xi_{k+1} = \cdots = \xi_n = 0.$$

故 $T(\boldsymbol{x}_{k+1}), \cdots, T(\boldsymbol{x}_n)$ 线性无关. □

定义 6.31

给定线性变换 T: $X \to Y$, 则称 $R(T)$ 的维数为 T 的秩, 记为 $\mathrm{rank}(T)$. 又称 $N(T)$ 的维数为 T 的零度, 记为 $\mathrm{null}(T)$.

定义 6.31

给定线性变换 T: $X \to Y$, 则称 $R(T)$ 的维数为 T 的秩, 记为 $\operatorname{rank}(T)$. 又称 $N(T)$ 的维数为 T 的零度, 记为 $\operatorname{null}(T)$.

☞ 前述定理的结论也可以表达为

$$\operatorname{rank}(T) + \operatorname{null}(T) = \dim X.$$

Outline

练习 7.1 (习题 1)

证明: $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (1,1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_4 = (1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\mathbb{R}^4$ 的一组基, 并求 $\boldsymbol{\beta} = (1,2,1,1)^{\mathrm{T}}$ 在这组基下的坐标.

练习 7.1 (习题 1)

证明: $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (1,1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_4 = (1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\mathbb{R}^4$ 的一组基, 并求 $\boldsymbol{\beta} = (1,2,1,1)^{\mathrm{T}}$ 在这组基下的坐标.

解:

$$
\left(\begin{array}{cccc:c}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 1
\end{array}\right)
\xrightarrow{(r_1+r_2+r_3+r_4)/4}
\left(\begin{array}{cccc:c}
1 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} \\
1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[i=2,3,4]{r_i-r_1}
\left(\begin{array}{cccc:c}
1 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} \\
0 & 1 & -1 & -1 & \frac{3}{4} \\
0 & -1 & 1 & -1 & -\frac{1}{4} \\
0 & -1 & -1 & 1 & -\frac{1}{4}
\end{array}\right)
\xrightarrow[(r_4+r_2)/(-2)]{(r_3+r_2)/(-2)}
\left(\begin{array}{cccc:c}
1 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} \\
0 & 1 & -1 & -1 & \frac{3}{4} \\
0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\
0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4}
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_4]{r_2+r_3+r_4}
\left(\begin{array}{cccc:c}
1 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} \\
0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\
0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\
0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4}
\end{array}\right),
$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 是 $\mathbb{R}^4$ 的一组基,

故 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 是 $\mathbb{R}^4$ 的一组基, 且 $\boldsymbol{\beta}$ 在这组基下的坐标为 $\left(\frac{5}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)^{\mathrm{T}}$.

练习 7.2 (习题 2)

已知 $\mathbb{R}^3$ 的两组基为

$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (2,3,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (3,7,1)^{\mathrm{T}}$;

$\boldsymbol{\beta}_1 = (3,1,4)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_2 = (5,2,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_3 = (1,1,-6)^{\mathrm{T}}$.

求:

(1) 向量 $\boldsymbol{\gamma} = (3,6,2)^{\mathrm{T}}$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$ 下的坐标;

(2) 基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$ 到基 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3\}$ 的过渡矩阵;

(3) 用公式 (4.7) 求 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3\}$ 下的坐标.

练习 7.2 (习题 2)

已知 $\mathbb{R}^3$ 的两组基为

$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (2,3,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (3,7,1)^{\mathrm{T}}$;

$\boldsymbol{\beta}_1 = (3,1,4)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_2 = (5,2,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_3 = (1,1,-6)^{\mathrm{T}}$.

求:

(1) 向量 $\boldsymbol{\gamma} = (3,6,2)^{\mathrm{T}}$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$ 下的坐标;

(2) 基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$ 到基 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3\}$ 的过渡矩阵;

(3) 用公式 (4.7) 求 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3\}$ 下的坐标.

解: (1) 设 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\gamma}$, 解方程组:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 7 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3+r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[i=2,3]{r_i\times(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_1-3r_3]{r_2+r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

故向量 $\boldsymbol{\gamma} = (3,6,2)^{\mathrm{T}}$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$ 下的坐标为 $(-2,1,1)^{\mathrm{T}}$.

(2) 设所求的过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}$, 即有 $(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{P}$, 那么 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)$.

故向量 $\boldsymbol{\gamma}=(3,6,2)^{\mathrm{T}}$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 下的坐标为 $(-2,1,1)^{\mathrm{T}}$.

(2) 设所求的过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}$, 即有 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{P}$, 那么 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$. 由

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 & 1 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & -8 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -4 & -7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+r_1} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -12 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow[i=2,3]{r_i\times(-1)} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 12 & 8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1-3r_3]{r_2+r_3} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & -9 & -31 & -23 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 20 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 12 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -27 & -71 & -41 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 20 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 12 & 8 \end{array}\right),$$

故向量 $\boldsymbol{\gamma} = (3,6,2)^{\mathrm{T}}$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$ 下的坐标为 $(-2,1,1)^{\mathrm{T}}$.

(2) 设所求的过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}$, 即有 $(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{P}$, 那么 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)$. 由

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 & 1 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & -8 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -4 & -7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+r_1} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -12 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow[i=2,3]{r_i\times(-1)} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 12 & 8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1-3r_3]{r_2+r_3} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & -9 & -31 & -23 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 20 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 12 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -27 & -71 & -41 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 20 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 12 & 8 \end{array}\right),$$

故所求过渡矩阵为 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}$.

(3) 向量 $\boldsymbol{\gamma} = (3,6,2)^{\mathrm{T}}$ 在基 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3\}$ 下的坐标为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

因为

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} -27 & -71 & -41 & -2 \\ 9 & 20 & 9 & 1 \\ 4 & 12 & 8 & 1 \end{array}\right)
\xrightarrow[r_3 \div 4]{r_1+3r_2}
\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -11 & -14 & 1 \\ 9 & 20 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & \frac{1}{4} \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & \frac{1}{4} \\ 9 & 20 & 9 & 1 \\ 0 & -11 & -14 & 1 \end{array}\right)
\xrightarrow[r_3 \times 7]{r_2-9r_1}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & \frac{1}{4} \\ 0 & -7 & -9 & -\frac{5}{4} \\ 0 & -77 & -98 & 7 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{r_3-11r_2}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & \frac{1}{4} \\ 0 & -7 & -9 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{83}{4} \end{array}\right)
\xrightarrow[r_2+9r_3]{r_1-2r_3}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & -\frac{165}{4} \\ 0 & -7 & 0 & \frac{742}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{83}{4} \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{r_2 \div (-7)}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & -\frac{165}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{106}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{83}{4} \end{array}\right)
\xrightarrow{r_1-3r_2}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{153}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{106}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{83}{4} \end{array}\right),
$$

因为

$$
\left(\begin{array}{ccc:c} -27 & -71 & -41 & -2 \\ 9 & 20 & 9 & 1 \\ 4 & 12 & 8 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \div 4]{r_1+3r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 0 & -11 & -14 & 1 \\ 9 & 20 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & \frac{1}{4} \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 2 & \frac{1}{4} \\ 9 & 20 & 9 & 1 \\ 0 & -11 & -14 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \times 7]{r_2-9r_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 2 & \frac{1}{4} \\ 0 & -7 & -9 & -\frac{5}{4} \\ 0 & -77 & -98 & 7 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{r_3-11r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 2 & \frac{1}{4} \\ 0 & -7 & -9 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{83}{4} \end{array}\right) \xrightarrow[r_2+9r_3]{r_1-2r_3} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 0 & -\frac{165}{4} \\ 0 & -7 & 0 & \frac{742}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{83}{4} \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{r_2 \div (-7)} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 0 & -\frac{165}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{106}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{83}{4} \end{array}\right) \xrightarrow{r_1-3r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & \frac{153}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{106}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{83}{4} \end{array}\right),
$$

所以向量 $\boldsymbol{\gamma} = (3, 6, 2)^{\mathrm{T}}$ 在基 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3\}$ 下的坐标为 $(\frac{153}{4}, -\frac{106}{4}, \frac{83}{4})^{\mathrm{T}}$.

练习 7.3 (习题 3)

已知 $\mathbb{R}^4$ 的两组基为

$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,2,1,1)^{\mathrm{T}}$,
$\boldsymbol{\alpha}_4=(-1,-1,0,1)^{\mathrm{T}}$;
$\boldsymbol{\beta}_1=(2,1,0,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_2=(0,1,2,2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_3=(-2,1,1,2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_4=(1,3,1,2)^{\mathrm{T}}$.

(1) 求基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}$ 到基 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4\}$ 的过渡矩阵; 若向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}$ 下的坐标为 $(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$, 求 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4\}$ 下的坐标;

(2) 求基 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4\}$ 到基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}$ 的过渡矩阵; 若向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4\}$ 下的坐标为 $(1,2,-1,0)^{\mathrm{T}}$, 求 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}$ 下的坐标;

(3) 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}$ 下的坐标为 $(1,2,-1,0)$, 求它在基 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4\}$ 下的坐标.

练习 7.3 (习题 3)

已知 $\mathbb{R}^4$ 的两组基为

$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,2,1,1)^{\mathrm{T}}$,
$\boldsymbol{\alpha}_4=(-1,-1,0,1)^{\mathrm{T}}$;
$\boldsymbol{\beta}_1=(2,1,0,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_2=(0,1,2,2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_3=(-2,1,1,2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_4=(1,3,1,2)^{\mathrm{T}}$.

(1) 求基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}$ 到基 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4\}$ 的过渡矩阵; 若向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}$ 下的坐标为 $(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$, 求 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4\}$ 下的坐标;

(2) 求基 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4\}$ 到基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}$ 的过渡矩阵; 若向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4\}$ 下的坐标为 $(1,2,-1,0)^{\mathrm{T}}$, 求 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}$ 下的坐标;

(3) 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}$ 下的坐标为 $(1,2,-1,0)$, 求它在基 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4\}$ 下的坐标.

解: 记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$, $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)$.

练习 7.3 (习题 3)

已知 $\mathbb{R}^4$ 的两组基为

$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 2, -1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (1, -1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (-1, 2, 1, 1)^{\mathrm{T}}$,
$\boldsymbol{\alpha}_4 = (-1, -1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$;
$\boldsymbol{\beta}_1 = (2, 1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_2 = (0, 1, 2, 2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_3 = (-2, 1, 1, 2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_4 = (1, 3, 1, 2)^{\mathrm{T}}$.

(1) 求基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4\}$ 到基 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4\}$ 的过渡矩阵; 若向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4\}$ 下的坐标为 $(1, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, 求 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4\}$ 下的坐标;

(2) 求基 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4\}$ 到基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4\}$ 的过渡矩阵; 若向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4\}$ 下的坐标为 $(1, 2, -1, 0)^{\mathrm{T}}$, 求 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4\}$ 下的坐标;

(3) 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4\}$ 下的坐标为 $(1, 2, -1, 0)$, 求它在基 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4\}$ 下的坐标.

解: 记 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)$, $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4)$.

(1) 设所求过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}$, 即有 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 从而 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\
2 & -1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\
-1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2
\end{array}\right)
\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\
0 & -3 & 4 & 1 & -3 & 1 & 5 & 1 \\
0 & 2 & 0 & -1 & 2 & 2 & -1 & 2 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_4}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\
0 & 2 & 0 & -1 & 2 & 2 & -1 & 2 \\
0 & -3 & 4 & 1 & -3 & 1 & 5 & 1
\end{array}\right)
\xrightarrow[r_4+3r_2]{r_3-2r_2}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\
0 & 0 & -2 & -3 & 0 & -2 & -5 & -2 \\
0 & 0 & 7 & 4 & 0 & 7 & 11 & 7
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{r_3\div(-2)}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\
0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & 1 & \frac{5}{2} & 1 \\
0 & 0 & 7 & 4 & 0 & 7 & 11 & 7
\end{array}\right)
\xrightarrow{r_4-7r_3}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\
0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & 1 & \frac{5}{2} & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[r_3-\frac{3}{2}r_4]{r_1+r_4,\,r_2-r_4}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right)
\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-r_2+2r_3}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right),
$$

即从基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}$ 到基 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4\}$ 的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

即从基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}$ 到基 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4\}$ 的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

记 $\boldsymbol{x}=(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$, 设 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4\}$ 下的坐标为 $\boldsymbol{y}$.

即从基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4\}$ 到基 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4\}$ 的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

记 $\boldsymbol{x} = (1, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, 设 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4\}$ 下的坐标为 $\boldsymbol{y}$. 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}.$$

即从基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4\}$ 到基 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4\}$ 的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

记 $\boldsymbol{x} = (1, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, 设 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4\}$ 下的坐标为 $\boldsymbol{y}$. 则

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{By}.$$

又 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{AP}$, 得 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{APy}$, 从而 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Py}$, 故 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$.

由

$$(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{x}) = \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{cccc:r} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 - r_2 - r_4} \left(\begin{array}{cccc:r} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \leftrightarrow r_4]{r_1 - r_3} \left(\begin{array}{cccc:r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

由

$$(\boldsymbol{P},\boldsymbol{x})=\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&1&1\\1&1&0&1&0\\0&1&1&1&0\\0&0&1&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-r_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&1&1\\0&1&0&0&-1\\0&1&1&1&0\\0&0&1&0&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2-r_4}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&1&1\\0&1&0&0&-1\\0&0&0&1&1\\0&0&1&0&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_4]{r_1-r_3}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&-1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&1\end{array}\right).$$

故 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4\}$ 下的坐标为: $(0,-1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

由

$$(\boldsymbol{P},\boldsymbol{x})=\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&0&1&1\\1&1&0&1&0\\0&1&1&1&0\\0&0&1&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-r_1}\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&0&1&1\\0&1&0&0&-1\\0&1&1&1&0\\0&0&1&0&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2-r_4}\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&0&1&1\\0&1&0&0&-1\\0&0&0&1&1\\0&0&1&0&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_4]{r_1-r_3}\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&-1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&1\end{array}\right).$$

故 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4\}$ 下的坐标为: $(0,-1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

(2) 设所求过渡矩阵为 $\boldsymbol{Q}$, 即有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}$, 从而 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$, 于是 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}^{-1}$.

由

$$(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{x}) = \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 - r_2 - r_4} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \leftrightarrow r_4]{r_1 - r_3} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

故 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4\}$ 下的坐标为: $(0, -1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$.

(2) 设所求过渡矩阵为 $\boldsymbol{Q}$, 即有 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}$, 从而 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$, 于是 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}^{-1}$. 下面求 $\boldsymbol{P}^{-1}$.

$$
(\boldsymbol{P},\boldsymbol{I})=\left(\begin{array}{cccc:cccc}
1&0&0&1&1&0&0&0\\
1&1&0&1&0&1&0&0\\
0&1&1&1&0&0&1&0\\
0&0&1&0&0&0&0&1
\end{array}\right)
\xrightarrow{r_2-r_1}
\left(\begin{array}{cccc:cccc}
1&0&0&1&1&0&0&0\\
0&1&0&0&-1&1&0&0\\
0&1&1&1&0&0&1&0\\
0&0&1&0&0&0&0&1
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{r_3-r_2-r_4}
\left(\begin{array}{cccc:cccc}
1&0&0&1&1&0&0&0\\
0&1&0&0&-1&1&0&0\\
0&0&0&1&1&-1&1&-1\\
0&0&1&0&0&0&0&1
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_4]{r_1-r_3}
\left(\begin{array}{cccc:cccc}
1&0&0&0&0&1&-1&1\\
0&1&0&0&-1&1&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&1\\
0&0&0&1&1&-1&1&-1
\end{array}\right),
$$

即

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

即

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1&1\\-1&1&0&0\\0&0&0&1\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}.$$

向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}$ 下的坐标为:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&1&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

(3) 当向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4\}$ 下的坐标为 $(1, 2, -1, 0)^{\mathrm{T}}$ 时, 它在基 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4\}$ 下的坐标为:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

练习 7.4 (习题 4)

在 $\mathbb{R}^4$ 中找一个向量 $\boldsymbol{\gamma}$, 使它在自然基 $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3, \boldsymbol{\varepsilon}_4\}$ 和基 $\boldsymbol{\beta}_1 = (2, 1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_2 = (0, 3, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_3 = (5, 3, 2, 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_4 = (6, 6, 1, 3)^{\mathrm{T}}$ 下有相同的坐标.

练习 7.4 (习题 4)

在 $\mathbb{R}^4$ 中找一个向量 $\boldsymbol{\gamma}$, 使它在自然基 $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3, \boldsymbol{\varepsilon}_4\}$ 和基 $\boldsymbol{\beta}_1 = (2, 1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_2 = (0, 3, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_3 = (5, 3, 2, 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_4 = (6, 6, 1, 3)^{\mathrm{T}}$ 下有相同的坐标.

解: 设向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在两组基下的坐标均为 $(x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}$, 则有

$$x_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 + x_2\boldsymbol{\varepsilon}_2 + x_3\boldsymbol{\varepsilon}_3 + x_4\boldsymbol{\varepsilon}_4 = x_1\boldsymbol{\beta}_1 + x_2\boldsymbol{\beta}_2 + x_3\boldsymbol{\beta}_3 + x_4\boldsymbol{\beta}_4$$

练习 7.4 (习题 4)

在 $\mathbb{R}^4$ 中找一个向量 $\boldsymbol{\gamma}$, 使它在自然基 $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3, \boldsymbol{\varepsilon}_4\}$ 和基 $\boldsymbol{\beta}_1 = (2, 1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_2 = (0, 3, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_3 = (5, 3, 2, 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_4 = (6, 6, 1, 3)^{\mathrm{T}}$ 下有相同的坐标.

解: 设向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在两组基下的坐标均为 $(x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}$, 则有

$$x_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 + x_2\boldsymbol{\varepsilon}_2 + x_3\boldsymbol{\varepsilon}_3 + x_4\boldsymbol{\varepsilon}_4 = x_1\boldsymbol{\beta}_1 + x_2\boldsymbol{\beta}_2 + x_3\boldsymbol{\beta}_3 + x_4\boldsymbol{\beta}_4$$

即

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} = x_1\boldsymbol{\beta}_1 + x_2\boldsymbol{\beta}_2 + x_3\boldsymbol{\beta}_3 + x_4\boldsymbol{\beta}_4.$$

练习 7.4 (习题 4)

在 $\mathbb{R}^4$ 中找一个向量 $\boldsymbol{\gamma}$, 使它在自然基 $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3, \boldsymbol{\varepsilon}_4\}$ 和基 $\boldsymbol{\beta}_1 = (2, 1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_2 = (0, 3, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_3 = (5, 3, 2, 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_4 = (6, 6, 1, 3)^{\mathrm{T}}$ 下有相同的坐标.

解: 设向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在两组基下的坐标均为 $(x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}$, 则有

$$x_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 + x_2\boldsymbol{\varepsilon}_2 + x_3\boldsymbol{\varepsilon}_3 + x_4\boldsymbol{\varepsilon}_4 = x_1\boldsymbol{\beta}_1 + x_2\boldsymbol{\beta}_2 + x_3\boldsymbol{\beta}_3 + x_4\boldsymbol{\beta}_4$$

即

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} = x_1\boldsymbol{\beta}_1 + x_2\boldsymbol{\beta}_2 + x_3\boldsymbol{\beta}_3 + x_4\boldsymbol{\beta}_4.$$

得

$$\begin{cases} 2x_1 \qquad\qquad + 5x_3 + 6x_4 = x_1, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 6x_4 = x_2, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = x_3, \\ x_1 \qquad\qquad + x_3 + 3x_4 = x_4, \end{cases}$$

练习 7.4 (习题 4)

在 $\mathbb{R}^4$ 中找一个向量 $\boldsymbol{\gamma}$, 使它在自然基 $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3, \boldsymbol{\varepsilon}_4\}$ 和基 $\boldsymbol{\beta}_1 = (2,1,-1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_2 = (0,3,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_3 = (5,3,2,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_4 = (6,6,1,3)^{\mathrm{T}}$ 下有相同的坐标.

解: 设向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在两组基下的坐标均为 $(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$, 则有

$$x_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 + x_2\boldsymbol{\varepsilon}_2 + x_3\boldsymbol{\varepsilon}_3 + x_4\boldsymbol{\varepsilon}_4 = x_1\boldsymbol{\beta}_1 + x_2\boldsymbol{\beta}_2 + x_3\boldsymbol{\beta}_3 + x_4\boldsymbol{\beta}_4$$

即

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}} = x_1\boldsymbol{\beta}_1 + x_2\boldsymbol{\beta}_2 + x_3\boldsymbol{\beta}_3 + x_4\boldsymbol{\beta}_4.$$

得

$$\begin{cases} 2x_1 \qquad\quad + 5x_3 + 6x_4 = x_1, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 6x_4 = x_2, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = x_3, \\ x_1 \qquad\quad + x_3 + 3x_4 = x_4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \qquad\quad + 5x_3 + 6x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 \qquad\quad + x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

对上述方程组的系数矩阵进行初等行变换:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-r_1]{r_2-r_1,r_3+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4\div(-4)]{r_2\div 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-r_3]{r_3\div 7} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2+r_3]{r_1-5r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

对上述方程组的系数矩阵进行初等行变换:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-r_1]{r_2-r_1, r_3+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4\div(-4)]{r_2\div 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-r_3]{r_3\div 7} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2+r_3]{r_1-5r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

取 $x_4 = k$, 得方程组得通解为:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} = (-k, -k, -k, k)^{\mathrm{T}} \qquad (k \in \mathbb{R}).$$

对上述方程组的系数矩阵进行初等行变换:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-r_1]{r_2-r_1,r_3+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4\div(-4)]{r_2\div 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-r_3]{r_3\div 7} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2+r_3]{r_1-5r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

取 $x_4=k$, 得方程组得通解为:

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}=(-k,-k,-k,k)^{\mathrm{T}} \qquad (k\in\mathbb{R}).$$

即所求向量为:

$$\boldsymbol{\gamma}=(-k,-k,-k,k)^{\mathrm{T}} \qquad (k\in\mathbb{R}).$$

练习 7.5 (习题 5)

已知 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,-1,1), \boldsymbol{\beta}=(2,3,1,-1), \boldsymbol{\gamma}=(-1,-1,-2,2)$.

(1) 求 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 的长度及 $\langle\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\rangle$, $\langle\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}\rangle$;

(2) 求与 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 都正交的所有向量.

练习 7.5 (习题 5)

已知 $\boldsymbol{\alpha} = (1, 2, -1, 1), \boldsymbol{\beta} = (2, 3, 1, -1), \boldsymbol{\gamma} = (-1, -1, -2, 2)$.

(1) 求 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 的长度及 $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle$, $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma} \rangle$;

(2) 求与 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 都正交的所有向量.

解: (1)

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{\alpha}\| &= \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{7}, \\
\|\boldsymbol{\beta}\| &= \sqrt{4 + 9 + 1 + 1} = \sqrt{15}, \\
\|\boldsymbol{\gamma}\| &= \sqrt{1 + 1 + 4 + 4} = \sqrt{10}.
\end{aligned}$$

$$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = \arccos \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}}{\|\boldsymbol{\alpha}\| \cdot \|\boldsymbol{\beta}\|} = \arccos \frac{2 + 6 - 1 - 1}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{15}} = \arccos \frac{2\sqrt{105}}{21}.$$

$$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma} \rangle = \arccos \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\gamma}}{\|\boldsymbol{\alpha}\| \cdot \|\boldsymbol{\gamma}\|} = \arccos \frac{-1 - 2 + 2 + 2}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{10}} = \arccos \frac{\sqrt{70}}{70}.$$

(2) 设与 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 都正交的向量为 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, 则有 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{x}) = 0$, $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{x}) = 0$, $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{x}) = 0$. 即

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

(2) 设与 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 都正交的向量为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, 则有 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{x})=0$, $(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{x})=0$, $(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{x})=0$. 即

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=0, \\ 2x_1+3x_2+x_3-x_4=0, \\ -x_1-x_2-2x_3+2x_4=0. \end{cases}$$

解此方程组:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\times(-1)]{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

同解方程组为

$$
\begin{cases}
x_1 = -5x_3 + 5x_4, \\
x_2 = \quad 3x_3 - 3x_4, \\
x_3 = \quad\ \ x_3, \\
x_4 = \qquad\qquad\quad x_4.
\end{cases}
$$

同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = -5x_3 + 5x_4, \\ x_2 = \quad 3x_3 - 3x_4, \\ x_3 = \quad\ \ x_3, \\ x_4 = \qquad\qquad\ \ x_4. \end{cases}$$

于是与 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 都正交的所有向量为

$$\big(-5k_1 + 5k_2,\, 3k_1 - 3k_2,\, k_1,\, k_2\big).$$

其中 k_1, k_2 为任意常数.

练习 7.6 (习题 6)

求与 $(1,1,-1,1)$, $(1,-1,-1,1)$, $(2,1,1,3)$ 都正交的单位向量.

练习 7.6 (习题 6)

求与 $(1,1,-1,1)$, $(1,-1,-1,1)$, $(2,1,1,3)$ 都正交的单位向量.

解: 设所求向量为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, 则有

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=0, \\ x_1-x_2-x_3+x_4=0, \\ 2x_1+x_2+x_3+3x_4=0. \end{cases}$$

练习 7.6 (习题 6)

求与 $(1,1,-1,1)$, $(1,-1,-1,1)$, $(2,1,1,3)$ 都正交的单位向量.

解: 设所求向量为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, 则有

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3+\ \ x_4=0, \\ x_1-x_2-x_3+\ \ x_4=0, \\ 2x_1+x_2+x_3+3x_4=0. \end{cases}$$

解此方程组:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{(r_2-r_1)/(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+r_2]{r_1-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = 4x_3, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = x_3, \\ x_4 = -3x_3. \end{cases}$$

同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = & 4x_3, \\ x_2 = & 0, \\ x_3 = & x_3, \\ x_4 = & -3x_3. \end{cases}$$

得方程组的基础解系为

$$\boldsymbol{\xi} = (4, 0, 1, -3)^{\mathrm{T}},$$

同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = & 4x_3, \\ x_2 = & 0, \\ x_3 = & x_3, \\ x_4 = & -3x_3. \end{cases}$$

得方程组的基础解系为

$$\boldsymbol{\xi} = (4, 0, 1, -3)^{\mathrm{T}},$$

故所求单位向量为

$$\pm\frac{1}{\sqrt{26}}(4, 0, 1, -3).$$

练习 7.7 (习题 7)

已知向量 $\boldsymbol{\beta}$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中每个向量都正交, 求证 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的任一线性组合正交.

练习 7.7 (习题 7)

已知向量 $\boldsymbol{\beta}$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中每个向量都正交, 求证 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的任一线性组合正交.

证: 设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的任一线性组合, 注意到

$$(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, m),$$

则

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{\beta}, k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m) \\
=& k_1(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1) + k_2(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_2) + \cdots + k_m(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_m) \\
=& 0.
\end{aligned}$$

结论成立.

练习 7.8 (习题 10)

设 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基, 证明 $\boldsymbol{\beta}_1 = \dfrac{1}{3}(2\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{\beta}_2 = \dfrac{1}{3}(2\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{\beta}_3 = \dfrac{1}{3}(\boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2 - 2\boldsymbol{\alpha}_3)$ 也是 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基.

练习 7.8 (习题 10)

设 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基, 证明 $\boldsymbol{\beta}_1 = \dfrac{1}{3}(2\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{\beta}_2 = \dfrac{1}{3}(2\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{\beta}_3 = \dfrac{1}{3}(\boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2 - 2\boldsymbol{\alpha}_3)$ 也是 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基.

证: 设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)$. 由题设可知: $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$, 且

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{3}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

因为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}\cdot\frac{1}{3}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{I}.
\end{aligned}$$

因为

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \cdot \frac{1}{3}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{I}.$$

所以 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3\}$ 也是 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基.

练习 7.9 (习题 11)

已知 $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} a & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ b & c & d \\ -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & e \end{pmatrix}$ 为正交矩阵, 试求 a, b, c, d, e 的值.

练习 7.9 (习题 11)

已知 $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} a & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ b & c & d \\ -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & e \end{pmatrix}$ 为正交矩阵, 试求 a, b, c, d, e 的值.

解: 第 1 行: $a^2 + \dfrac{9}{49} + \dfrac{4}{49} = 1$, 故 $a = \pm\dfrac{6}{7}$.

练习 7.9 (习题 11)

已知 $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} a & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ b & c & d \\ -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & e \end{pmatrix}$ 为正交矩阵, 试求 a, b, c, d, e 的值.

解: 第 1 行: $a^2 + \dfrac{9}{49} + \dfrac{4}{49} = 1$, 故 $a = \pm\dfrac{6}{7}$.

第 3 行: $\dfrac{9}{49} + \dfrac{4}{49} + e^2 = 1$, 故 $e = \pm\dfrac{6}{7}$.

练习 7.9 (习题 11)

已知 $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} a & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ b & c & d \\ -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & e \end{pmatrix}$ 为正交矩阵, 试求 a, b, c, d, e 的值.

解: 第 1 行: $a^2 + \dfrac{9}{49} + \dfrac{4}{49} = 1$, 故 $a = \pm\dfrac{6}{7}$.

第 3 行: $\dfrac{9}{49} + \dfrac{4}{49} + e^2 = 1$, 故 $e = \pm\dfrac{6}{7}$.

此两行正交: $-\dfrac{3}{7}a - \dfrac{6}{49} + \dfrac{2}{7}e = 0$,

练习 7.9 (习题 11)

已知 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} a & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ b & c & d \\ -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & e \end{pmatrix}$ 为正交矩阵, 试求 a, b, c, d, e 的值.

解: 第 1 行: $a^2+\dfrac{9}{49}+\dfrac{4}{49}=1$, 故 $a=\pm\dfrac{6}{7}$.

第 3 行: $\dfrac{9}{49}+\dfrac{4}{49}+e^2=1$, 故 $e=\pm\dfrac{6}{7}$.

此两行正交: $-\dfrac{3}{7}a-\dfrac{6}{49}+\dfrac{2}{7}e=0$,

(1) 将 $a=\dfrac{6}{7}$ 代入上式, 得 $e=\dfrac{12}{7}$, 这与 $e=\pm\dfrac{6}{7}$ 矛盾, 故舍去.

练习 7.9 (习题 11)

已知 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} a & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ b & c & d \\ -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & e \end{pmatrix}$ 为正交矩阵, 试求 a, b, c, d, e 的值.

解: 第 1 行: $a^2+\dfrac{9}{49}+\dfrac{4}{49}=1$, 故 $a=\pm\dfrac{6}{7}$.

第 3 行: $\dfrac{9}{49}+\dfrac{4}{49}+e^2=1$, 故 $e=\pm\dfrac{6}{7}$.

此两行正交: $-\dfrac{3}{7}a-\dfrac{6}{49}+\dfrac{2}{7}e=0$,

(1) 将 $a=\dfrac{6}{7}$ 代入上式, 得 $e=\dfrac{12}{7}$, 这与 $e=\pm\dfrac{6}{7}$ 矛盾, 故舍去.

(2) 将 $a=-\dfrac{6}{7}$ 代入上式, 得 $e=-\dfrac{6}{7}$.

练习 7.9 (习题 11)

已知 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} a & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ b & c & d \\ -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & e \end{pmatrix}$ 为正交矩阵, 试求 a,b,c,d,e 的值.

解: 第 1 行: $a^2+\dfrac{9}{49}+\dfrac{4}{49}=1$, 故 $a=\pm\dfrac{6}{7}$.

第 3 行: $\dfrac{9}{49}+\dfrac{4}{49}+e^2=1$, 故 $e=\pm\dfrac{6}{7}$.

此两行正交: $-\dfrac{3}{7}a-\dfrac{6}{49}+\dfrac{2}{7}e=0$,

(1) 将 $a=\dfrac{6}{7}$ 代入上式, 得 $e=\dfrac{12}{7}$, 这与 $e=\pm\dfrac{6}{7}$ 矛盾, 故舍去.

(2) 将 $a=-\dfrac{6}{7}$ 代入上式, 得 $e=-\dfrac{6}{7}$.

故

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} -\frac{6}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ b & c & d \\ -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{6}{7} \end{pmatrix}.$$

Q 的各列为单位向量, 故

$$b = \pm\frac{2}{7}, \quad c = \pm\frac{6}{7}, \quad d = \pm\frac{3}{7}.$$

Q 的各列为单位向量, 故

$$b = \pm\frac{2}{7}, \quad c = \pm\frac{6}{7}, \quad d = \pm\frac{3}{7}.$$

由各列两两正交, 故

- $b = \dfrac{2}{7}$ 时, $c = -\dfrac{6}{7}$, $d = -\dfrac{3}{7}$;

Q 的各列为单位向量, 故

$$b = \pm\frac{2}{7}, \quad c = \pm\frac{6}{7}, \quad d = \pm\frac{3}{7}.$$

由各列两两正交, 故

- $b = \frac{2}{7}$ 时, $c = -\frac{6}{7}$, $d = -\frac{3}{7}$;
- $b = -\frac{2}{7}$ 时, $c = \frac{6}{7}$, $d = \frac{3}{7}$.

Q 的各列为单位向量, 故

$$b = \pm\frac{2}{7}, \quad c = \pm\frac{6}{7}, \quad d = \pm\frac{3}{7}.$$

由各列两两正交, 故

- $b = \frac{2}{7}$ 时, $c = -\frac{6}{7}$, $d = -\frac{3}{7}$;
- $b = -\frac{2}{7}$ 时, $c = \frac{6}{7}$, $d = \frac{3}{7}$.

故所求的值有两组:

$$(a, b, c, d, e) = \left(-\frac{6}{7}, \frac{2}{7}, -\frac{6}{7}, -\frac{3}{7}, -\frac{6}{7}\right) \text{ 或 } \left(-\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{6}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{6}{7}\right).$$

练习 7.10 (习题 12)

证明: 若 $\boldsymbol{A}$ 是正交阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 也是正交矩阵.

练习 7.10 (习题 12)

证明: 若 $\boldsymbol{A}$ 是正交阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 也是正交矩阵.

证: 因为 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵, 所以

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}, \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I},$$

练习 7.10 (习题 12)

证明: 若 $\boldsymbol{A}$ 是正交阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 也是正交矩阵.

证: 因为 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵, 所以

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}, \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I},$$

且

$$|\boldsymbol{A}|^2 = |\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{A}|$$

练习 7.10 (习题 12)

证明: 若 $\boldsymbol{A}$ 是正交阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 也是正交矩阵.

证: 因为 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵, 所以

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}, \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I},$$

且

$$|\boldsymbol{A}|^2 = |\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{I}| = 1.$$

练习 7.10 (习题 12)

证明: 若 $\boldsymbol{A}$ 是正交阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 也是正交矩阵.

证: 因为 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵, 所以

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}, \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I},$$

且

$$|\boldsymbol{A}|^2=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{I}|=1.$$

而 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$,

练习 7.10 (习题 12)

证明: 若 $\boldsymbol{A}$ 是正交阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 也是正交矩阵.

证: 因为 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵, 所以

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}, \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I},$$

且

$$|\boldsymbol{A}|^2 = |\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{I}| = 1.$$

而 $\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$, 于是

$$(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^* = (|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$$

练习 7.10 (习题 12)

证明: 若 $\boldsymbol{A}$ 是正交阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 也是正交矩阵.

证: 因为 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵, 所以

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}, \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I},$$

且

$$|\boldsymbol{A}|^2 = |\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{I}| = 1.$$

而 $\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$, 于是

$$(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^* = (|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1} = |\boldsymbol{A}|^2(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = \boldsymbol{I}^{-1} = \boldsymbol{I}.$$

练习 7.10 (习题 12)

证明: 若 $\boldsymbol{A}$ 是正交阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 也是正交矩阵.

证: 因为 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵, 所以

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}, \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I},$$

且

$$|\boldsymbol{A}|^2 = |\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{I}| = 1.$$

而 $\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$, 于是

$$(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^* = (|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1} = |\boldsymbol{A}|^2(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = \boldsymbol{I}^{-1} = \boldsymbol{I}.$$

故 $\boldsymbol{A}^*$ 也是正交矩阵.

练习 7.11 (习题 21)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, 求齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解空间的维数及解空间的一组标准正交基.

练习 7.11 (习题 21)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, 求齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解空间的维数及解空间的一组标准正交基.

解:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2-r_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2-r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

练习 7.11 (习题 21)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, 求齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解空间的维数及解空间的一组标准正交基.

解:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2-r_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2-r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

选取 x_1, x_5 为自由未知量, 得同解方程组:

$$
\begin{cases}
x_1 = x_1 & , \\
x_2 = -x_1 - x_5 & , \\
x_3 = 0 & , \\
x_4 = -x_1 + 4x_5 & , \\
x_5 = x_5 & ,
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
x_1 = x_1 & , \\
x_2 = -x_1 - x_5 & , \\
x_3 = 0 & , \\
x_4 = -x_1 + 4x_5 & , \\
x_5 = x_5 & ,
\end{cases}
$$

得基础解系为

$$
\boldsymbol{\xi}_1 = (1, -1, 0, -1, 0)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{\xi}_2 = (0, -1, 0, 4, 1)^{\mathrm{T}}.
$$

$$
\begin{cases}
x_1 = x_1 , \\
x_2 = -x_1 - x_5 , \\
x_3 = 0 , \\
x_4 = -x_1 + 4x_5 , \\
x_5 = x_5 ,
\end{cases}
$$

得基础解系为

$$
\boldsymbol{\xi}_1 = (1, -1, 0, -1, 0)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{\xi}_2 = (0, -1, 0, 4, 1)^{\mathrm{T}}.
$$

故解空间的维数为 2.

$$\begin{cases} x_1 = \quad x_1 & , \\ x_2 = -x_1 \quad -x_5 & , \\ x_3 = \quad 0 & , \\ x_4 = -x_1 + 4x_5 & , \\ x_5 = \qquad\quad x_5 & , \end{cases}$$

得基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = (1, -1, 0, -1, 0)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{\xi}_2 = (0, -1, 0, 4, 1)^{\mathrm{T}}.$$

故解空间的维数为 2.

将 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ 正交化得: $\boldsymbol{\eta}_1 = \boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$

$$\boldsymbol{\eta}_2 = \boldsymbol{\xi}_2 - \frac{(\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\eta}_1)}{(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_1)}\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1-4}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{\eta}_2 = \boldsymbol{\xi}_2 - \frac{(\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\eta}_1)}{(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_1)}\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1-4}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

再单位化:

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{\eta}_1}{\|\boldsymbol{\eta}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{\eta}_2}{\|\boldsymbol{\eta}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{\eta}_2 = \boldsymbol{\xi}_2 - \frac{(\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\eta}_1)}{(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_1)}\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1-4}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

再单位化:

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{\eta}_1}{\|\boldsymbol{\eta}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{\eta}_2}{\|\boldsymbol{\eta}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

综上: 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解空间的维数为 2, 解空间的一组标准正交基为 $\boldsymbol{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 0, -1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{e}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{15}}(1, -2, 0, 3, 1)^{\mathrm{T}}$.

练习 7.12 (习题 22)

设 V 是 $\mathbb{R}^5$ 的一个二维子空间, 它的一组基为 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1,1,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (1,1,0,1,1)$, 试将 V 的基扩充为 $\mathbb{R}^5$ 的基.

练习 7.12 (习题 22)

设 V 是 $\mathbb{R}^5$ 的一个二维子空间, 它的一组基为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,1,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0,1,1)$, 试将 V 的基扩充为 $\mathbb{R}^5$ 的基.

分析: 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交的向量一定与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关.

练习 7.12 (习题 22)

设 V 是 $\mathbb{R}^5$ 的一个二维子空间, 它的一组基为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,1,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0,1,1)$, 试将 V 的基扩充为 $\mathbb{R}^5$ 的基.

分析: 与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 正交的向量一定与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关.

解: 设向量 $\boldsymbol{x}$ 满足 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{x})=0, (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{x})=0$,

练习 7.12 (习题 22)

设 V 是 $\mathbb{R}^5$ 的一个二维子空间, 它的一组基为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,1,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0,1,1)$, 试将 V 的基扩充为 $\mathbb{R}^5$ 的基.

分析: 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交的向量一定与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关.

解: 设向量 $\boldsymbol{x}$ 满足 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{x})=0,(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{x})=0$, 得

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0, \\ x_1+x_2+x_4+x_5=0, \end{cases}$$

练习 7.12 (习题 22)

设 V 是 $\mathbb{R}^5$ 的一个二维子空间, 它的一组基为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,1,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0,1,1)$, 试将 V 的基扩充为 $\mathbb{R}^5$ 的基.

分析: 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交的向量一定与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关.

解: 设向量 $\boldsymbol{x}$ 满足 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{x})=0,(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{x})=0$, 得

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0, \\ x_1+x_2+x_4+x_5=0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_3=0, \\ x_1=-x_2-x_4-x_5. \end{cases}$$

练习 7.12 (习题 22)

设 V 是 $\mathbb{R}^5$ 的一个二维子空间, 它的一组基为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,1,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0,1,1)$, 试将 V 的基扩充为 $\mathbb{R}^5$ 的基.

分析: 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交的向量一定与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关.

解: 设向量 $\boldsymbol{x}$ 满足 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{x})=0,(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{x})=0$, 得

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0, \\ x_1+x_2+x_4+x_5=0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_3=0, \\ x_1=-x_2-x_4-x_5. \end{cases}$$

方程组的基础解系为:

$$\boldsymbol{\xi}_1=(-1,1,0,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=(-1,0,0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_3=(-1,0,0,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

练习 7.12 (习题 22)

设 V 是 $\mathbb{R}^5$ 的一个二维子空间, 它的一组基为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,1,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0,1,1)$, 试将 V 的基扩充为 $\mathbb{R}^5$ 的基.

分析: 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交的向量一定与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关.

解: 设向量 $\boldsymbol{x}$ 满足 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{x})=0,(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{x})=0$, 得

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0, \\ x_1+x_2+x_4+x_5=0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_3=0, \\ x_1=-x_2-x_4-x_5. \end{cases}$$

方程组的基础解系为:

$$\boldsymbol{\xi}_1=(-1,1,0,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=(-1,0,0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_3=(-1,0,0,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

于是得到 $\mathbb{R}^5$ 的一组基为: $(1,1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $(1,1,0,1,1)^{\mathrm{T}}$, $(-1,1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$, $(-1,0,0,1,0)^{\mathrm{T}}$, $(-1,0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

另解:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[i=2,3,4,5]{r_1+r_i} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

另解:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[i=2,3,4,5]{r_1+r_i} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

于是得到 $\mathbb{R}^5$ 的一组基为:

$$(1,1,1,1,1)^{\mathrm{T}},\ \ (1,1,0,1,1)^{\mathrm{T}},\ \ (0,1,0,0,0)^{\mathrm{T}},\ \ (0,0,0,1,0)^{\mathrm{T}},\ \ (0,0,0,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

练习 7.13 (习题 27)

设 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 n 维空间 V 的一组基, 又 V 中向量 $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 在这组基下的坐标 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 全不为零. 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 中任意 n 个向量必构成 V 的一组基. 并求 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}\}$ 下的坐标.

练习 7.13 (习题 27)

设 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 n 维空间 V 的一组基, 又 V 中向量 $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 在这组基下的坐标 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 全不为零. 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 中任意 n 个向量必构成 V 的一组基. 并求 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}\}$ 下的坐标.

证: 只需证明 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 中任意 n 个向量线性无关.

练习 7.13 (习题 27)

设 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 n 维空间 V 的一组基, 又 V 中向量 $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 在这组基下的坐标 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 全不为零. 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 中任意 n 个向量必构成 V 的一组基. 并求 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}\}$ 下的坐标.

证: 只需证明 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 中任意 n 个向量线性无关.

若这 n 个向量中不包含 $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$, 那么结论显然成立;

练习 7.13 (习题 27)

设 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 n 维空间 V 的一组基, 又 V 中向量 $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 在这组基下的坐标 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 全不为零. 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 中任意 n 个向量必构成 V 的一组基. 并求 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}\}$ 下的坐标.

证: 只需证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 中任意 n 个向量线性无关.

若这 n 个向量中不包含 $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$, 那么结论显然成立; 若这 n 个向量中包含 $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$, 不妨考虑 $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$.

练习 7.13 (习题 27)

设 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 n 维空间 V 的一组基, 又 V 中向量 $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 在这组基下的坐标 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 全不为零. 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 中任意 n 个向量必构成 V 的一组基. 并求 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}\}$ 下的坐标.

证: 只需证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 中任意 n 个向量线性无关.

若这 n 个向量中不包含 $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$, 那么结论显然成立; 若这 n 个向量中包含 $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$, 不妨考虑 $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$. 设

$$k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n+k_{n+1}\boldsymbol{\alpha}_{n+1}=\mathbf{0},$$

练习 7.13 (习题 27)

设 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 n 维空间 V 的一组基, 又 V 中向量 $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 在这组基下的坐标 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 全不为零. 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 中任意 n 个向量必构成 V 的一组基. 并求 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}\}$ 下的坐标.

证: 只需证明 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 中任意 n 个向量线性无关.

若这 n 个向量中不包含 $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$, 那么结论显然成立; 若这 n 个向量中包含 $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$, 不妨考虑 $\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}$. 设

$$k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n + k_{n+1}\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \mathbf{0},$$

代入 $\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n$, 则有

$$k_{n+1}x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + (k_{n+1}x_2 + k_2)\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + (k_{n+1}x_n + k_n)\boldsymbol{\alpha}_n = \mathbf{0}.$$

练习 7.13 (习题 27)

设 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 n 维空间 V 的一组基, 又 V 中向量 $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 在这组基下的坐标 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 全不为零. 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 中任意 n 个向量必构成 V 的一组基. 并求 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}\}$ 下的坐标.

证: 只需证明 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 中任意 n 个向量线性无关.

若这 n 个向量中不包含 $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$, 那么结论显然成立; 若这 n 个向量中包含 $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$, 不妨考虑 $\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}$. 设

$$k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n + k_{n+1}\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \mathbf{0},$$

代入 $\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n$, 则有

$$k_{n+1}x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + (k_{n+1}x_2 + k_2)\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + (k_{n+1}x_n + k_n)\boldsymbol{\alpha}_n = \mathbf{0}.$$

注意到 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 n 维空间 V 的一组基, 所以

$$
\begin{cases}
k_{n+1}x_1 = 0, \\
k_{n+1}x_2 + k_2 = 0, \\
\vdots \\
k_{n+1}x_n + k_n = 0.
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} k_{n+1}x_1 = 0, \\ k_{n+1}x_2 + k_2 = 0, \\ \vdots \\ k_{n+1}x_n + k_n = 0. \end{cases}$$

因为 $x_i \neq 0$, 所以 $k_2 = k_3 = \cdots = k_{n+1} = 0$. 故结论成立.

设 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}\}$ 下的坐标为 $(y_2, y_3, \cdots, y_n, y_{n+1})^{\mathrm{T}}$.

设 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}\}$ 下的坐标为 $(y_2, y_3, \cdots, y_n, y_{n+1})^{\mathrm{T}}$. 即有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}_1 &= y_2\boldsymbol{\alpha}_2 + y_3\boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + y_n\boldsymbol{\alpha}_n + y_{n+1}\boldsymbol{\alpha}_{n+1} \\
&= y_2\boldsymbol{\alpha}_2 + y_3\boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + y_n\boldsymbol{\alpha}_n + y_{n+1}(x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n) \\
&= (x_1 y_{n+1})\boldsymbol{\alpha}_1 + (y_2 + x_2 y_{n+1})\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + (y_n + x_n y_{n+1})\boldsymbol{\alpha}_n.
\end{aligned}$$

设 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}\}$ 下的坐标为 $(y_2, y_3, \cdots, y_n, y_{n+1})^{\mathrm{T}}$. 即有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_1 &= y_2\boldsymbol{\alpha}_2 + y_3\boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + y_n\boldsymbol{\alpha}_n + y_{n+1}\boldsymbol{\alpha}_{n+1} \\ &= y_2\boldsymbol{\alpha}_2 + y_3\boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + y_n\boldsymbol{\alpha}_n + y_{n+1}(x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n) \\ &= (x_1 y_{n+1})\boldsymbol{\alpha}_1 + (y_2 + x_2 y_{n+1})\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + (y_n + x_n y_{n+1})\boldsymbol{\alpha}_n.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{cases} x_1 y_{n+1} = 1, \\ y_2 + x_2 y_{n+1} = 0, \\ \qquad \vdots \\ y_n + x_n y_{n+1} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_{n+1} = \frac{1}{x_1}, \\ y_2 = -\frac{x_2}{x_1}, \\ \quad \vdots \\ y_n = -\frac{x_n}{x_1}. \end{cases}$$

设 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}\}$ 下的坐标为 $(y_2, y_3, \cdots, y_n, y_{n+1})^{\mathrm{T}}$. 即有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_1 &= y_2\boldsymbol{\alpha}_2 + y_3\boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + y_n\boldsymbol{\alpha}_n + y_{n+1}\boldsymbol{\alpha}_{n+1} \\ &= y_2\boldsymbol{\alpha}_2 + y_3\boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + y_n\boldsymbol{\alpha}_n + y_{n+1}(x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n) \\ &= (x_1 y_{n+1})\boldsymbol{\alpha}_1 + (y_2 + x_2 y_{n+1})\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + (y_n + x_n y_{n+1})\boldsymbol{\alpha}_n.\end{aligned}$$

于是

$$\left\{\begin{aligned} x_1 y_{n+1} &= 1, \\ y_2 + x_2 y_{n+1} &= 0, \\ &\vdots \\ y_n + x_n y_{n+1} &= 0. \end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned} y_{n+1} &= \frac{1}{x_1}, \\ y_2 &= -\frac{x_2}{x_1}, \\ &\vdots \\ y_n &= -\frac{x_n}{x_1}. \end{aligned}\right.$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}\}$ 下的坐标为 $\left(-\frac{x_2}{x_1}, \cdots, -\frac{x_n}{x_1}, \frac{1}{x_1}\right)^{\mathrm{T}}$.

另解: 由

$$(\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_n \end{pmatrix},$$

另解: 由

$$(\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_n \end{pmatrix},$$

上式右端矩阵记为 $\boldsymbol{A}$,

另解: 由

$$(\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_n \end{pmatrix},$$

上式右端矩阵记为 $\boldsymbol{A}$, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 等价, 从而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 线性无关.

另解: 由

$$(\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_n \end{pmatrix},$$

上式右端矩阵记为 $\boldsymbol{A}$, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 等价, 从而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 线性无关.

又

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_1 &= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \triangleq (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{x} \\ &= (\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_{n+1})\boldsymbol{y} \\ &= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}. \end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}$.

故 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} 0 & 0 & \cdots & 0 & x_1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_3 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_n & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{相邻互换}} \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_3 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_n \div x_1} \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_3 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \frac{1}{x_1} \end{array}\right) \xrightarrow{r_i - x_{i+1} r_n} \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{x_2}{x_1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{x_3}{x_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -\frac{x_n}{x_1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \frac{1}{x_1} \end{array}\right),$$

故 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & x_1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_3 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_n & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{相邻互换}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_3 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_n \div x_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_3 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \frac{1}{x_1} \end{array}\right) \xrightarrow{r_i - x_{i+1} r_n} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{x_2}{x_1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{x_3}{x_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -\frac{x_n}{x_1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \frac{1}{x_1} \end{array}\right),$$

故所求坐标为 $\left(-\frac{x_2}{x_1}, -\frac{x_3}{x_1}, \cdots, -\frac{x_n}{x_1}, \frac{1}{x_1}\right)^{\mathrm{T}}$. □

例 7.14 (习题 51)

设 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵, $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$ 可逆, 证明:

(1) $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}$ 可交换;

(2) $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}$ 为反对称矩阵.

例 7.14 (习题 51)

设 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵, $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$ 可逆, 证明:

(1) $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}$ 可交换;

(2) $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}$ 为反对称矩阵.

证: (1) 因为

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}),$$

例 7.14 (习题 51)

设 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵, $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$ 可逆, 证明:

(1) $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}$ 可交换;

(2) $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}$ 为反对称矩阵.

证: (1) 因为

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}),$$

所以

$$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$$

例 7.14 (习题 51)

设 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵, $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$ 可逆, 证明:

(1) $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}$ 可交换;

(2) $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}$ 为反对称矩阵.

证: (1) 因为

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}),$$

所以

$$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}),$$

例 7.14 (习题 51)

设 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵, $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$ 可逆, 证明:

(1) $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}$ 可交换;

(2) $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}$ 为反对称矩阵.

证: (1) 因为

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}),$$

所以

$$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}),$$

从而

$$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}.$$

例 7.14 (习题 51)

设 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵, $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$ 可逆, 证明:

(1) $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}$ 可交换;

(2) $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}$ 为反对称矩阵.

证: (1) 因为

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}),$$

所以

$$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}),$$

从而

$$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}.$$

故 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}$ 可交换.

(2) 因为 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵, 所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$,

(2) 因为 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵, 所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$, 从而

$$\begin{aligned}
[(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}]^{\mathrm{T}} &= [(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}]^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}} \\
&= [(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}]^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}} \\
&= (\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) \\
&= [\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})]^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}) \\
&= (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}) \\
&= -(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}) \\
&= -(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}.
\end{aligned}$$

故 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}$ 为反对称矩阵. $\square$

练习 7.15 (习题 52)

证明:

(1) 若 $\det \boldsymbol{A} = 1$, 则 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的每个元素等于自己的代数余子式;

(2) 若 $\det \boldsymbol{A} = -1$, 则 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的每个元素等于自己的代数余子式乘以 -1.

练习 7.15 (习题 52)

证明:

(1) 若 $\det \boldsymbol{A} = 1$, 则 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的每个元素等于自己的代数余子式;

(2) 若 $\det \boldsymbol{A} = -1$, 则 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的每个元素等于自己的代数余子式乘以 -1.

证: $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{-1} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}$.

练习 7.15 (习题 52)

证明:

(1) 若 $\det \boldsymbol{A} = 1$, 则 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的每个元素等于自己的代数余子式;

(2) 若 $\det \boldsymbol{A} = -1$, 则 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的每个元素等于自己的代数余子式乘以 -1.

证: $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{-1} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}$.

若 $|\boldsymbol{A}| = 1$, 则 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^*$

练习 7.15 (习题 52)

证明:

(1) 若 $\det \boldsymbol{A} = 1$, 则 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的每个元素等于自己的代数余子式;

(2) 若 $\det \boldsymbol{A} = -1$, 则 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的每个元素等于自己的代数余子式乘以 -1.

证: $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{-1} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}$.

若 $|\boldsymbol{A}| = 1$, 则 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^* \Leftrightarrow a_{ij} = \boldsymbol{A}_{ij}\ (i, j = 1, 2, \cdots n)$.

练习 7.15 (习题 52)

证明:

(1) 若 $\det \boldsymbol{A} = 1$, 则 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的每个元素等于自己的代数余子式;

(2) 若 $\det \boldsymbol{A} = -1$, 则 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的每个元素等于自己的代数余子式乘以 -1.

证: $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{-1} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}$.

若 $|\boldsymbol{A}| = 1$, 则 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^* \Leftrightarrow a_{ij} = \boldsymbol{A}_{ij}\ (i, j = 1, 2, \cdots n)$.

若 $|\boldsymbol{A}| = -1$, 则 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{A}^* \Leftrightarrow a_{ij} = -\boldsymbol{A}_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \cdots n)$.

结论成立.

练习 7.16 (习题 53)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m \in \mathbb{R}^n$, 证明: $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关的充要条件是

$$\det \boldsymbol{A} = \det \begin{pmatrix} (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_m) \\ (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_m) \end{pmatrix} \neq 0.$$

练习 7.16 (习题 53)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m \in \mathbb{R}^n$, 证明: $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关的充要条件是

$$\det \boldsymbol{A} = \det \begin{pmatrix} (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_m) \\ (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_m) \end{pmatrix} \neq 0.$$

证: 充分性. 设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0},$$

分别用 $\boldsymbol{\alpha}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ 与上式两端的向量做内积, 得到线性方程组:

$$\begin{cases} x_1(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1) + x_2(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) + \cdots + x_m(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_m) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \mathbf{0}) = 0, \\ x_1(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1) + x_2(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2) + \cdots + x_m(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_m) = (\boldsymbol{\alpha}_2, \mathbf{0}) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_1) + x_2(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_2) + \cdots + x_m(\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_m) = (\boldsymbol{\alpha}_m, \mathbf{0}) = 0, \end{cases}$$

因为

$$\det \boldsymbol{A} = \det \begin{pmatrix} (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_m) \\ (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_m) \end{pmatrix} \neq 0,$$

所以上述方程组只有零解, 即 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, 故 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

必要性. 用反证法, 假设 $\det \boldsymbol{A} = 0$, 那么 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个列向量线性相关, 记 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列为 $\boldsymbol{\beta}_i = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_i) \\ (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_i) \\ \vdots \\ (\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_i) \end{pmatrix}$, 则存在不全为 0 的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$, 使得

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta} + \cdots + k_m\boldsymbol{\beta}_m = \mathbf{0}.$$

即

$$(\boldsymbol{\alpha}_i, \sum_{j=1}^m k_j\boldsymbol{\alpha}_j) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

于是

$$\sum_{i=1}^m k_i(\boldsymbol{\alpha}_i, \sum_{j=1}^m k_j\boldsymbol{\alpha}_j) = (\sum_{i=1}^m k_i\boldsymbol{\alpha}_i, \sum_{j=1}^m k_j\boldsymbol{\alpha}_j) = (\sum_{i=1}^m k_i\boldsymbol{\alpha}_i, \sum_{i=1}^m k_i\boldsymbol{\alpha}_i) = 0$$

亦即 $\sum\limits_{i=1}^m k_i\boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{0}$, 这与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关矛盾, 故结论成立.