武汉大学数学与统计学院 2011－2012 第一学期
《线性代数 B》 （54 学时，A 卷答案）

一、解：从第 2 行开始，每一行乘以（-1）加到上一行，然后从第 1 列开始，每列加到后 1 列，得

$$D_n=\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2+a_2 & a_1+a_2+a_3 & \cdots & x+\sum_{i=1}^{n}a_i \end{vmatrix}=x^{n-1}(x+\sum_{i=1}^{n}a_i).$$

二、解： $x=-1$.

三、解：对 A 作初等变换，由 $r(A)=2$，可求得 $a=1$，再由 $AX+I=A^2+X$，得

$$(A-I)X=(A-I)(A+I),$$

由于 $|A-I|\neq 0$，因此 $A-I$ 可逆，且

$$X=(A-I)^{-1}(A-I)(A+I)=A+I=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

四、解：经计算 $|A|=-(\lambda-1)^2(\lambda-10)$，因此方程组有唯一解

$$\Leftrightarrow |A|\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 1 且 \lambda\neq 10。$$

$\lambda=10$ 时，因 $rank(A)=2, rank(\widetilde{A})=3, rank(A)\neq r(\widetilde{A})$，即 $\lambda=10$ 时无解。

$\lambda=1$ 时，因 $rank(A)=rank(\widetilde{A})=1<3$，通解为：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (k_1,k_2\in R)$$

五、解：1、设 A 的属于特征值 3 的特征向量为 $\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^T$，因为对于实对称矩阵，属于不同特征值的特征向量相互正交，所以 $\alpha_1^T\alpha_3=0$ 且 $\alpha_2^T\alpha_3=0$. 即 x_1,x_2,x_3 是齐次线性方程组 $\begin{cases} -x_1-x_2+x_3=0 \\ x_1-2x_2-x_3=0 \end{cases}$ 的非零解，解上列方程组，得其基础系为 $(1,0,1)^T$. 因此 A 的属于特征值 3 的特征向量为

$$\alpha_3=k(1,0,1)^T \text{（}k\text{ 为任意非零常数）}.$$

2、令 $P=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. 则有 $A=P\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}P^{-1}$. 由 $P^{-1}=\begin{bmatrix} -1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 1/6 & -1/3 & -1/6 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$,

可见 $A=P\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}P^{-1}=\dfrac{1}{6}\begin{bmatrix}13&-2&5\\-2&10&2\\5&2&13\end{bmatrix}$.

六、解：设 $\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$\boldsymbol{B}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，

1、$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&1\\\boldsymbol{a}&2-\boldsymbol{a}&0\end{pmatrix}$，易知 $a\neq1$ 时，β_1,β_2,β_3 能成为 $\boldsymbol{R}^3$ 中的基.

即有 $A=BQ$，且 $|Q|\neq0$，令 $B=AQ^{-1}=AP\ \ (P=Q^{-1})$，故能用 A 线性表示 B. 由初等行变换求得 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$，则所求过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&-2\\1-\boldsymbol{a}&-1+\boldsymbol{a}&1\\\boldsymbol{a}&2-\boldsymbol{a}&0\end{pmatrix}$.

2、（1）由题设 $B=AC$，其中 $C=k\begin{pmatrix}2&2&1\\2&-1&-2\\-1&2&-2\end{pmatrix}$，且 $|C|=27k^3\neq0$.

如果 $|A|\neq0$，即 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则有 $|B|=|AC|=|A||C|\neq0$，得 β_1,β_2,β_3 线性无关；反之如果 β_1,β_2,β_3 线性无关，则由 $|A||C|=|B|\neq0$，得到 $|A|\neq0$.

可见，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关是 β_1,β_2,β_3 线性无关的一个充分必要条件.

（2）如果 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 是正交阵, 即 $A^{\mathrm T}A=I$，

则 $B^{\mathrm T}B=C^{\mathrm T}A^{\mathrm T}AC=C^{\mathrm T}C=k^2\begin{pmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\1&-2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&1\\2&-1&-2\\-1&2&-2\end{pmatrix}=9k^2I$，可见 $k=\pm\dfrac{1}{3}$ 时. B 是正交阵.

反之 B 是正交阵时，$BB^{\mathrm T}=AC^{\mathrm T}CA^{\mathrm T}=9k^2AA^{\mathrm T}=I$，即 $AA^{\mathrm T}=\dfrac{1}{9k^2}I$，可见 $k=\pm\dfrac{1}{3}$ 时，A 是正交阵. 综上，B 为正交阵的一个充要条件是 $k=\pm\dfrac{1}{3}$ 且 A 为正交阵.

七、证明：设 A 的 n 个特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则 $\lambda_i\geq0(i=1,2,\cdots,n)$.

因 $A\neq O$，故至少有一个特征值 $\lambda_j>0$. 事实上，如特征值 $\lambda_i=0(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$A=Qdiag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)Q^{-1}=Q\cdot O\cdot Q^{-1}=O.$$

这与 $A\neq O$ 矛盾. 由 $A=Qdiag(\lambda_1,\cdots,\lambda_j,\cdots,\lambda_n)Q^{-1}$. 及 $I=Qdiag(1,\cdots,1,\cdots,1)Q^{-1}$，故

$$\begin{aligned}|A+I|&=\left|Qdiag(\lambda_1+1,\cdots,\lambda_j+1,\cdots,\lambda_n+1)Q^{-1}\right|=|Q||Q|^{-1}\left|diag(\lambda_1+1,\cdots,\lambda_j+1,\cdots,\lambda_n+1)\right|\\&=(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\cdots(\lambda_j+1)\cdots(\lambda_{n-1}+1)(\lambda_n+1)>1\end{aligned}$$