第 2 章 矩阵

Linear Algebra

黄 正 华

Email: huangzh@whu.edu.cn

武汉大学 数学与统计学院

December 8, 2016

学习本章过程中, 请思考以下问题:

(1) 矩阵的乘法为什么要这样定义?

(2) 为什么矩阵乘法不满足交换律?

(3) 矩阵为什么没有除法?

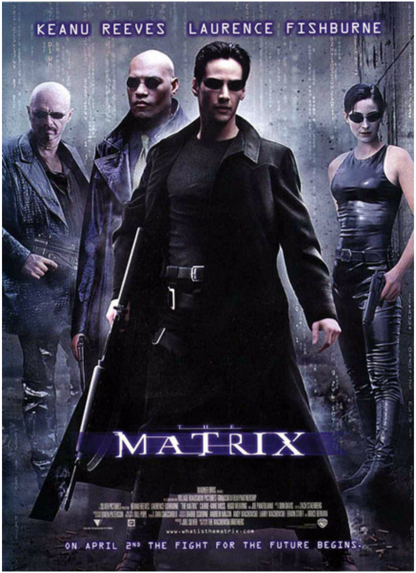
矩阵: Matrix

Google 搜索 Matrix 会找到什么?

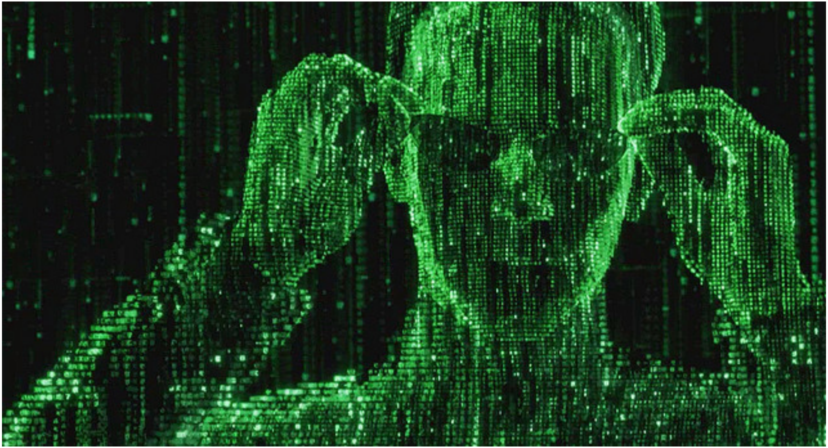
矩阵: Matrix

Google 搜索 Matrix 会找到什么?

Matrix


KEANU REEVES LAURENCE FISHBURNE
MATRIX
www.whatisthematrix.com
ON APRIL 2ND THE FIGHT FOR THE FUTURE BEGINS.

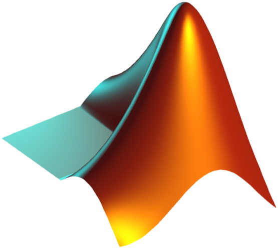
Matrix



Matrix

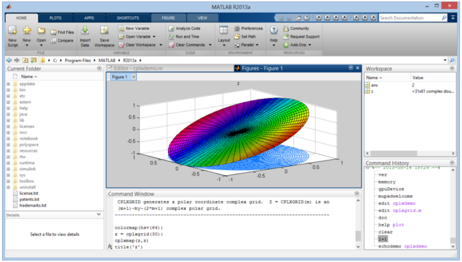
MATLAB

MATLAB (matrix laboratory)



MATLAB

MATLAB (matrix laboratory)



Outline

1 高斯消元法

2 矩阵的加法　数量乘法　乘法

3 矩阵的转置　对称矩阵

4 可逆矩阵的逆矩阵

5 矩阵的初等变换和初等矩阵

6 分块矩阵

7 习题解答

- 本节通过高斯消元法, 说明矩阵概念出现的必要性.

- 本节通过高斯消元法, 说明矩阵概念出现的必要性.
- 高斯消元法虽然简单, 但是整个线性代数可以认为是由此发端的.

- 本节通过高斯消元法, 说明矩阵概念出现的必要性.
- 高斯消元法虽然简单, 但是整个线性代数可以认为是由此发端的. 后续的很多话题, 无不渗透着高斯消元法的影子.

- 本节通过高斯消元法, 说明矩阵概念出现的必要性.
- 高斯消元法虽然简单, 但是整个线性代数可以认为是由此发端的. 后续的很多话题, 无不渗透着高斯消元法的影子.
- 《线性代数》——一个线性方程组引发的故事.

- 本节通过高斯消元法, 说明矩阵概念出现的必要性.
- 高斯消元法虽然简单, 但是整个线性代数可以认为是由此发端的. 后续的很多话题, 无不渗透着高斯消元法的影子.
- 《线性代数》——一个线性方程组引发的故事.

故事的开始, 是这样的。。。。。。

例 1.1

用高斯消元法解线性方程组

$$\begin{cases} \ \ 2x + y - \ \ z = \ \ \ \ 8, & (r_1) \\ -3x - y + 2z = -11, & (r_2) \\ -2x + y + 2z = \ \ -3. & (r_3) \end{cases}$$

例 1.1

用高斯消元法解线性方程组

$$\begin{cases} 2x + y - z = 8, & (r_1) \\ -3x - y + 2z = -11, & (r_2) \\ -2x + y + 2z = -3. & (r_3) \end{cases}$$

高斯消元法的原理是:

1. 要将 r_1 以下的等式中的 x 消除, 然后再将 r_2 以下的等式中的 y 消除.

例 1.1

用高斯消元法解线性方程组

$$\begin{cases} 2x+y-z=8, & (r_1) \\ -3x-y+2z=-11, & (r_2) \\ -2x+y+2z=-3. & (r_3) \end{cases}$$

高斯消元法的原理是:

1. 要将 r_1 以下的等式中的 x 消除, 然后再将 r_2 以下的等式中的 y 消除. 使整个方程组变成一个阶梯形的格式.

例 1.1

用高斯消元法解线性方程组

$$\begin{cases} 2x+y-z=8, & (r_1) \\ -3x-y+2z=-11, & (r_2) \\ -2x+y+2z=-3. & (r_3) \end{cases}$$

高斯消元法的原理是:

1. 要将 r_1 以下的等式中的 x 消除, 然后再将 r_2 以下的等式中的 y 消除. 使整个方程组变成一个阶梯形的格式.
2. 再将已得出的答案一个个地回代到已被简化的等式中的未知数中, 即得其余的答案.

方程组	行变换
$\begin{cases} 2x+y-z=8, \\ -3x-y+2z=-11, \\ -2x+y+2z=-3. \end{cases}$	

方程组	行变换
$\begin{cases} 2x + y - z = 8, \\ -3x - y + 2z = -11, \\ -2x + y + 2z = -3. \end{cases}$	$r_2 + \frac{3}{2} r_1 \to r_2$ $r_3 + r_1 \to r_3$

方程组	行变换
$\begin{cases} 2x+y-z=8, \\ -3x-y+2z=-11, \\ -2x+y+2z=-3. \end{cases}$	$r_2+\frac{3}{2}r_1 \to r_2$ $r_3+r_1 \to r_3$
$\begin{cases} 2x+y-z=8, \\ \frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=1, \\ 2y+z=5. \end{cases}$	

方程组	行变换
$\begin{cases} 2x+y-z=8, \\ -3x-y+2z=-11, \\ -2x+y+2z=-3. \end{cases}$	$r_2+\frac{3}{2}r_1 \to r_2$ $r_3+r_1 \to r_3$
$\begin{cases} 2x+y-z=8, \\ \frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=1, \\ 2y+z=5. \end{cases}$	$r_3-4r_2 \to r_3$

方程组	行变换
$\begin{cases} 2x+y-z=8, \\ -3x-y+2z=-11, \\ -2x+y+2z=-3. \end{cases}$	$r_2+\frac{3}{2}r_1 \to r_2$ $r_3+r_1 \to r_3$
$\begin{cases} 2x+y-z=8, \\ \frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=1, \\ 2y+z=5. \end{cases}$	$r_3-4r_2 \to r_3$
$\begin{cases} 2x+y-z=8, \\ \frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=1, \\ -z=1. \end{cases}$	

方程组	行变换
$\begin{cases} 2x+y-z=8, \\ -3x-y+2z=-11, \\ -2x+y+2z=-3. \end{cases}$	$r_2+\frac{3}{2}r_1 \to r_2$ $r_3+r_1 \to r_3$
$\begin{cases} 2x+y-z=8, \\ \frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=1, \\ 2y+z=5. \end{cases}$	$r_3-4r_2 \to r_3$
$\begin{cases} 2x+y-z=8, \\ \frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=1, \\ -z=1. \end{cases}$	$r_2+\frac{1}{2}r_3 \to r_2$ $r_1-r_3 \to r_1$

方程组	行变换
$\begin{cases} 2x+ \quad y \quad\quad = 7, \\ \quad\quad \frac{1}{2}y \quad\quad = \frac{3}{2}, \\ \quad\quad\quad\quad -z = 1. \end{cases}$	

方程组	行变换
$\begin{cases} 2x + y = 7, \\ \frac{1}{2}y = \frac{3}{2}, \\ -z = 1. \end{cases}$	$2r_2 \to r_2$ $-r_3 \to r_3$

方程组	行变换
$\begin{cases} 2x + y = 7, \\ \frac{1}{2}y = \frac{3}{2}, \\ -z = 1. \end{cases}$	$2r_2 \to r_2$ $-r_3 \to r_3$
$\begin{cases} 2x + y = 7, \\ y = 3, \\ z = -1. \end{cases}$	

方程组	行变换
$\begin{cases} 2x + y = 7, \\ \frac{1}{2}y = \frac{3}{2}, \\ -z = 1. \end{cases}$	$2r_2 \to r_2$ $-r_3 \to r_3$
$\begin{cases} 2x + y = 7, \\ y = 3, \\ z = -1. \end{cases}$	$r_1 - r_2 \to r_1$ $\frac{1}{2}r_1 \to r_1$

方程组	行变换
$\begin{cases} 2x + y = 7, \\ \frac{1}{2}y = \frac{3}{2}, \\ -z = 1. \end{cases}$	$2r_2 \to r_2$ $-r_3 \to r_3$
$\begin{cases} 2x + y = 7, \\ y = 3, \\ z = -1. \end{cases}$	$r_1 - r_2 \to r_1$ $\frac{1}{2}r_1 \to r_1$
$\begin{cases} x = 2, \\ y = 3, \\ z = -1. \end{cases}$	

方程组	行变换
$\begin{cases} 2x+y=7, \\ \frac{1}{2}y=\frac{3}{2}, \\ -z=1. \end{cases}$	$2r_2 \to r_2$ $-r_3 \to r_3$
$\begin{cases} 2x+y=7, \\ y=3, \\ z=-1. \end{cases}$	$r_1-r_2 \to r_1$ $\frac{1}{2}r_1 \to r_1$
$\begin{cases} x=2, \\ y=3, \\ z=-1. \end{cases}$	

实际参与运算的只有系数和常数, 把方程组的主要信息记录在一个矩形阵列里, 方程的运算与变换, 体现为矩形阵列中, 各行元素的相应运算.

线性方程组的主要信息可以紧凑地记录在一个矩形阵列里, 称之为**矩阵**.

线性方程组的主要信息可以紧凑地记录在一个矩形阵列里, 称之为**矩阵**. 矩阵

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

称为方程组的**系数矩阵**,

线性方程组的主要信息可以紧凑地记录在一个矩形阵列里, 称之为**矩阵**. 矩阵

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

称为方程组的**系数矩阵**, 矩阵

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

称为方程组的**增广矩阵** (augmented matrix).

线性方程组的主要信息可以紧凑地记录在一个矩形阵列里, 称之为**矩阵**. 矩阵

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

称为方程组的**系数矩阵**, 矩阵

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

称为方程组的**增广矩阵** (augmented matrix).

☞ 增广矩阵由系数矩阵加上方程组右端常数列组成.

方程组	行变换	增广矩阵
$\begin{cases} 2x+y-z=8, \\ -3x-y+2z=-11, \\ -2x+y+2z=-3. \end{cases}$	$r_2+\frac{3}{2}r_1 \to r_2$ $r_3+r_1 \to r_3$	
$\begin{cases} 2x+y-z=8, \\ \frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=1, \\ 2y+z=5. \end{cases}$	$r_3-4r_2 \to r_3$	
$\begin{cases} 2x+y-z=8, \\ \frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=1, \\ -z=1. \end{cases}$	$r_2+\frac{1}{2}r_3 \to r_2$ $r_1-r_3 \to r_1$	

方程组	行变换	增广矩阵
$\begin{cases} 2x+y-z=8, \\ -3x-y+2z=-11, \\ -2x+y+2z=-3. \end{cases}$	$r_2+\frac{3}{2}r_1 \to r_2$ $r_3+r_1 \to r_3$	$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right)$
$\begin{cases} 2x+y-z=8, \\ \frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=1, \\ 2y+z=5. \end{cases}$	$r_3-4r_2 \to r_3$	
$\begin{cases} 2x+y-z=8, \\ \frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=1, \\ -z=1. \end{cases}$	$r_2+\frac{1}{2}r_3 \to r_2$ $r_1-r_3 \to r_1$	

方程组	行变换	增广矩阵
$\begin{cases} 2x+y-z=8, \\ -3x-y+2z=-11, \\ -2x+y+2z=-3. \end{cases}$	$r_2+\frac{3}{2}r_1\to r_2$ $r_3+r_1\to r_3$	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right)$
$\begin{cases} 2x+y-z=8, \\ \frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=1, \\ 2y+z=5. \end{cases}$	$r_3-4r_2\to r_3$	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right)$
$\begin{cases} 2x+y-z=8, \\ \frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=1, \\ -z=1. \end{cases}$	$r_2+\frac{1}{2}r_3\to r_2$ $r_1-r_3\to r_1$	

方程组	行变换	增广矩阵
$\begin{cases} 2x+y-z=8, \\ -3x-y+2z=-11, \\ -2x+y+2z=-3. \end{cases}$	$r_2+\frac{3}{2}r_1 \to r_2$ $r_3+r_1 \to r_3$	$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right)$
$\begin{cases} 2x+y-z=8, \\ \frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=1, \\ 2y+z=5. \end{cases}$	$r_3-4r_2 \to r_3$	$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right)$
$\begin{cases} 2x+y-z=8, \\ \frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=1, \\ -z=1. \end{cases}$	$r_2+\frac{1}{2}r_3 \to r_2$ $r_1-r_3 \to r_1$	$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$

方程组	行变换	增广矩阵
$\begin{cases} 2x+y=7, \\ \frac{1}{2}y=\frac{3}{2}, \\ -z=1. \end{cases}$	$2r_2 \to r_2$ $-r_3 \to r_3$	
$\begin{cases} 2x+y=7, \\ y=3, \\ z=-1. \end{cases}$	$r_1-r_2 \to r_1$ $\frac{1}{2}r_1 \to r_1$	
$\begin{cases} x=2, \\ y=3, \\ z=-1. \end{cases}$		

方程组	行变换	增广矩阵
$\begin{cases} 2x+\ \ y = 7, \\ \frac{1}{2}y = \frac{3}{2}, \\ -z = 1. \end{cases}$	$2r_2 \to r_2$ $-r_3 \to r_3$	$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$
$\begin{cases} 2x+\ \ y = 7, \\ y = 3, \\ z = -1. \end{cases}$	$r_1 - r_2 \to r_1$ $\frac{1}{2}r_1 \to r_1$	
$\begin{cases} x = 2, \\ y = 3, \\ z = -1. \end{cases}$		

方程组	行变换	增广矩阵
$\begin{cases} 2x + y = 7, \\ \frac{1}{2}y = \frac{3}{2}, \\ -z = 1. \end{cases}$	$2r_2 \to r_2$ $-r_3 \to r_3$	$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$
$\begin{cases} 2x + y = 7, \\ y = 3, \\ z = -1. \end{cases}$	$r_1 - r_2 \to r_1$ $\frac{1}{2}r_1 \to r_1$	$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$
$\begin{cases} x = 2, \\ y = 3, \\ z = -1. \end{cases}$		

方程组	行变换	增广矩阵
$\begin{cases} 2x+y=7, \\ \frac{1}{2}y=\frac{3}{2}, \\ -z=1. \end{cases}$	$2r_2 \to r_2$ $-r_3 \to r_3$	$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$
$\begin{cases} 2x+y=7, \\ y=3, \\ z=-1. \end{cases}$	$r_1 - r_2 \to r_1$ $\frac{1}{2}r_1 \to r_1$	$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$
$\begin{cases} x=2, \\ y=3, \\ z=-1. \end{cases}$		$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$

如果一个线性方程组有唯一解或无穷多解, 则称它是**相容**的 (consistent); 如果无解, 则称它是**不相容**的 (inconsistent).

线性方程组的所有解的集合, 称为方程组的**解集**.

如果一个线性方程组有唯一解或无穷多解, 则称它是**相容**的 (consistent); 如果无解, 则称它是**不相容**的 (inconsistent).

线性方程组的所有解的集合, 称为方程组的**解集**. 如果线性方程组不相容, 则其解集为空集.

矩阵的定义

定义 1.2 (矩阵)

由 $m \times n$ 个数 a_{ij} $(i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,n)$ 排成 m 行 n 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

称为 $m \times n$ **矩阵** (Matrix),

矩阵的定义

定义 1.2 (矩阵)

由 $m \times n$ 个数 a_{ij} $(i = 1, 2, ..., m,\ j = 1, 2, ..., n)$ 排成 m 行 n 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

称为 $m \times n$ **矩阵** (Matrix), 通常记为 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}$.

- a_{ij} 位于矩阵的第 i 行、第 j 列, 叫做矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**元素**;

矩阵的定义

定义 1.2 (矩阵)

由 $m \times n$ 个数 a_{ij} $(i = 1, 2, ..., m, j = 1, 2, ..., n)$ 排成 m 行 n 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

称为 $m \times n$ **矩阵** (Matrix), 通常记为 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}$.

- a_{ij} 位于矩阵的第 i 行、第 j 列, 叫做矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**元素**;
- 以数 a_{ij} 为 (i, j) 元的 $m \times n$ 矩阵可简记作

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \text{ 或 } \boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}.$$

矩阵的定义

定义 1.2 (矩阵)

由 $m\times n$ 个数 a_{ij} $(i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,n)$ 排成 m 行 n 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

称为 $m\times n$ **矩阵** (Matrix), 通常记为 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}$.

- a_{ij} 位于矩阵的第 i 行、第 j 列, 叫做矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**元素**;
- 以数 a_{ij} 为 (i,j) 元的 $m\times n$ 矩阵可简记作
$$\boldsymbol{A}=(a_{ij}) \text{ 或 } \boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}.$$
- 元素是实数的矩阵称为**实矩阵**;

矩阵的定义

定义 1.2 (矩阵)

由 $m\times n$ 个数 a_{ij} $(i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,n)$ 排成 m 行 n 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

称为 $m\times n$ **矩阵** (Matrix), 通常记为 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}$.

- a_{ij} 位于矩阵的第 i 行、第 j 列, 叫做矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**元素**;
- 以数 a_{ij} 为 (i,j) 元的 $m\times n$ 矩阵可简记作

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij}) \text{ 或 } \boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}.$$

- 元素是实数的矩阵称为**实矩阵**; 元素为复数的矩阵称为**复矩阵**.

矩阵的定义

定义 1.2 (矩阵)

由 $m\times n$ 个数 a_{ij} $(i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,n)$ 排成 m 行 n 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

称为 $m\times n$ **矩阵** (Matrix), 通常记为 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}$.

- a_{ij} 位于矩阵的第 i 行、第 j 列, 叫做矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**元素**;
- 以数 a_{ij} 为 (i,j) 元的 $m\times n$ 矩阵可简记作
$$\boldsymbol{A}=(a_{ij}) \text{ 或 } \boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}.$$
- 元素是实数的矩阵称为**实矩阵**; 元素为复数的矩阵称为**复矩阵**. 本课程中的矩阵除特别说明外, 都指实矩阵.

- 只有一行的矩阵

$$\boldsymbol{A} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

称为**行矩阵**, 又称**行向量**.

- 只有一行的矩阵

$$\boldsymbol{A} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

称为**行矩阵**, 又称**行向量**.

- 只有一列的矩阵

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

称为**列矩阵**, 又称**列向量**.

- 只有一行的矩阵
$$A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$
称为**行矩阵**, 又称**行向量**.
- 只有一列的矩阵
$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$
称为**列矩阵**, 又称**列向量**.
- 当 $m = n = 1$ 时, 即 $A = (a_{11})$, 此时矩阵退化为一个数 a_{11}.
- 所有元素都为零的矩阵, 称为**零矩阵**. 记作 $\mathbf{0}$, 或 $\mathbf{0}_{m\times n}$.

用消元法解线性方程组, 实际上是对方程组反复施行以下 3 种变换:

1. 把一个方程的倍数加到另一个方程上;

用消元法解线性方程组, 实际上是对方程组反复施行以下 3 种变换:

1. 把一个方程的倍数加到另一个方程上;
2. 互换两个方程的位置;

用消元法解线性方程组, 实际上是对方程组反复施行以下 3 种变换:

1. 把一个方程的倍数加到另一个方程上;
2. 互换两个方程的位置;
3. 用一个非零数乘以某一个方程.

用消元法解线性方程组, 实际上是对方程组反复施行以下 3 种变换:

1. 把一个方程的倍数加到另一个方程上;
2. 互换两个方程的位置;
3. 用一个非零数乘以某一个方程.

这 3 类变换称为线性方程组的**初等变换**.

用消元法解线性方程组, 实际上是对方程组反复施行以下 3 种变换:

1. 把一个方程的倍数加到另一个方程上;
2. 互换两个方程的位置;
3. 用一个非零数乘以某一个方程.

这 3 类变换称为线性方程组的**初等变换**. 经过初等变换, 把原方程组变成阶梯型方程组, 然后用回代方法 (从最后一个方程开始, 逐次往上解) 去求得方程组的解.

☞ 高斯消元法的过程体现为对增广矩阵做初等行变换:

1. 把矩阵的第 j 行的 μ 倍加到第 i 行,

☞ 高斯消元法的过程体现为对增广矩阵做初等行变换:

1. 把矩阵的第 j 行的 μ 倍加到第 i 行, 记作 $r_i + \mu r_j$;

☞ 高斯消元法的过程体现为对增广矩阵做初等行变换:

1. 把矩阵的第 j 行的 μ 倍加到第 i 行, 记作 $r_i + \mu r_j$;
2. 互换矩阵的 i, j 两行,

☞ 高斯消元法的过程体现为对增广矩阵做初等行变换:

1. 把矩阵的第 j 行的 μ 倍加到第 i 行, 记作 $r_i + \mu r_j$;
2. 互换矩阵的 i, j 两行, 记作 $r_i \leftrightarrow r_j$;

☞ 高斯消元法的过程体现为对增广矩阵做初等行变换:

1. 把矩阵的第 j 行的 μ 倍加到第 i 行, 记作 $r_i + \mu r_j$;
2. 互换矩阵的 i, j 两行, 记作 $r_i \leftrightarrow r_j$;
3. 用任意非零数 α 乘以矩阵的第 i 行,

☞ 高斯消元法的过程体现为对增广矩阵做初等行变换:

1. 把矩阵的第 j 行的 μ 倍加到第 i 行, 记作 $r_i + \mu r_j$;
2. 互换矩阵的 i, j 两行, 记作 $r_i \leftrightarrow r_j$;
3. 用任意非零数 α 乘以矩阵的第 i 行,记作 $r_i \times \alpha$.

☞ 高斯消元法的过程体现为对增广矩阵做初等行变换:

1. 把矩阵的第 j 行的 μ 倍加到第 i 行, 记作 $r_i + \mu r_j$;
2. 互换矩阵的 i, j 两行, 记作 $r_i \leftrightarrow r_j$;
3. 用任意非零数 α 乘以矩阵的第 i 行,记作 $r_i \times \alpha$.

矩阵初等变换的具体讨论, 在本章第 5 节展开.

例 1.3 (P.35 T.32)

解线性方程组
$$\begin{cases} \quad\ \ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 \quad\ \ + x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 \quad\ \ + x_4 + x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 \quad\ \ + x_5 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \quad\ \ = 5. \end{cases}$$

例 1.3 (P.35 T.32)

解线性方程组 $$\begin{cases} \quad\;\; x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 \quad\;\; + x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 \quad\;\; + x_4 + x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 \quad\;\; + x_5 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \quad\;\; = 5. \end{cases}$$

解: 原题要求使用克拉默法则, 这里我们使用高斯消元法.

例 1.3 (P.35 T.32)

解线性方程组 $\begin{cases} \quad\ \ x_2+x_3+x_4+x_5=1, \\ x_1 \quad\ +x_3+x_4+x_5=2, \\ x_1+x_2 \quad\ +x_4+x_5=3, \\ x_1+x_2+x_3 \quad\ +x_5=4, \\ x_1+x_2+x_3+x_4 \quad\ =5. \end{cases}$

解: 原题要求使用克拉默法则, 这里我们使用高斯消元法.

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{(r_1+r_2+r_3+r_4+r_5)\div 4} \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{15}{4} \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[i=2,3,4,5]{r_i-r_1}\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{15}{4} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{4} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{5}{4} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[i=2,3,4,5]{r_i-r_1}\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{15}{4} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{4} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{5}{4} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_i\times(-1),i=2,3,4,5]{r_1+r_2+r_3+r_4+r_5}\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{4} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[i=2,3,4,5]{r_i-r_1}\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{15}{4} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{4} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{5}{4} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_i\times(-1),i=2,3,4,5]{r_1+r_2+r_3+r_4+r_5}\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{4} \end{array}\right)$$

故方程组的解为

$$x_1=\frac{11}{4},\quad x_2=\frac{7}{4},\quad x_3=\frac{3}{4},\quad x_4=-\frac{1}{4},\quad x_5=-\frac{5}{4}.$$

行阶梯形矩阵

前例中, 形如

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{15}{4} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{4} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{5}{4} \end{array}\right)$$

的矩阵, 称为**行阶梯形矩阵**.

行阶梯形矩阵

行阶梯形矩阵的形式:

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行阶梯形矩阵

行阶梯形矩阵的形式:

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

这里 $\blacksquare$ 表示任意非零值; $*$ 可取任意值, 包括零.

行阶梯形矩阵

行阶梯形矩阵的形式:

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

这里 $\blacksquare$ 表示任意非零值; $*$ 可取任意值, 包括零. 其特点是:

- 可画出一条阶梯线, 线的下方全为 0;

行阶梯形矩阵

行阶梯形矩阵的形式:

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

这里 $\blacksquare$ 表示任意非零值; $*$ 可取任意值, 包括零. 其特点是:

- 可画出一条阶梯线, 线的下方全为 0;
- 每个台阶只有一阶, 台阶数即是非零行的行数;

行阶梯形矩阵

行阶梯形矩阵的形式:

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

这里 $\blacksquare$ 表示任意非零值; $*$ 可取任意值, 包括零. 其特点是:

- 可画出一条阶梯线, 线的下方全为 0;
- 每个台阶只有一阶, 台阶数即是非零行的行数;
- 阶梯线的竖线 (每段竖线的长度为一行) 后面的第一个元素为非零元, 也就是非零行的第一个非零元.

行简化阶梯形矩阵

形如

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{4} \end{array}\right)$$

的矩阵, 称为**行简化阶梯形矩阵**, 或**行最简形矩阵**.

行简化阶梯形矩阵

行简化阶梯形矩阵的形式:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

行简化阶梯形矩阵

行简化阶梯形矩阵的形式:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $*$ 可取任意值, 包括零.

行简化阶梯形矩阵

行简化阶梯形矩阵的形式:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $*$ 可取任意值, 包括零. 其特点是:

- 非零行的第一个非零元为 1;

行简化阶梯形矩阵

行简化阶梯形矩阵的形式:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $*$ 可取任意值, 包括零. 其特点是:

- 非零行的第一个非零元为 1;
- 这些非零元所在列的其他元素都为 0.

行简化阶梯形矩阵

行简化阶梯形矩阵的形式:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $*$ 可取任意值, 包括零. 其特点是:

- 非零行的第一个非零元为 1;
- 这些非零元所在列的其他元素都为 0.

☞ 行简化阶梯形矩阵当然是行阶梯形矩阵的一种.

行简化阶梯形矩阵

行简化阶梯形矩阵的形式:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $*$ 可取任意值, 包括零. 其特点是:

- 非零行的第一个非零元为 1;
- 这些非零元所在列的其他元素都为 0.

☞ 行简化阶梯形矩阵当然是行阶梯形矩阵的一种.

高斯消元法的两个步骤: (1) 转化为阶梯形线性方程组; (2) 回代得到方程组的解.

行简化阶梯形矩阵

行简化阶梯形矩阵的形式:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $*$ 可取任意值, 包括零. 其特点是:

- 非零行的第一个非零元为 1;
- 这些非零元所在列的其他元素都为 0.

☞ 行简化阶梯形矩阵当然是行阶梯形矩阵的一种.

高斯消元法的两个步骤: (1) 转化为阶梯形线性方程组; (2) 回代得到方程组的解. 这两个步骤, 在增广矩阵中分别对应于两个矩阵的出现: (1) 行阶梯形矩阵; (2) 行简化阶梯形矩阵.

用归纳法不难证明: 对于任何矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$, 总可经过有限次初等行变换, 把它变为行阶梯形矩阵和行简化阶梯形矩阵.

用归纳法不难证明: 对于任何矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$, 总可经过有限次初等行变换, 把它变为行阶梯形矩阵和行简化阶梯形矩阵.

$\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的行简化阶梯形矩阵的一般形式:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccccc}
 & & & k_1 & & & & k_2 & & & k_r & & &
\end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
\left.\vphantom{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}}\right\} r\ \text{个非零行} \\
\left.\vphantom{\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}}\right\} m-r\ \text{个零行}
\end{array}
\end{array}
$$

其中 $*$ 可取任意值 (包括零), 第 k_j 列中的元素除了第 j 个元素为 1 外, 其余元素均为 0 $(1 \leqslant j \leqslant r)$.

例 1.4

解线性方程组
$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 4, \\ x - 2y + 4z = -5, \\ 3x + 8y - 2z = 13, \\ 4x - y + 9z = -6. \end{cases}$$

例 1.4

解线性方程组 $\begin{cases} 2x+3y+\ \ z=4, \\ \ x-2y+4z=-5, \\ 3x+8y-2z=13, \\ 4x-\ \ y+9z=-6. \end{cases}$

解: 对方程的增广矩阵实施初等行变换, 注意到 $r_3=2r_1-r_2$, $r_4=r_1+2r_2$, 有:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & -5 \\ 3 & 8 & -2 & 13 \\ 4 & -1 & 9 & -6 \end{array}\right)$$

例 1.4

解线性方程组 $\begin{cases} 2x+3y+\ \ z=4, \\ \ x-2y+4z=-5, \\ 3x+8y-2z=13, \\ 4x-\ \ y+9z=-6. \end{cases}$

解: 对方程的增广矩阵实施初等行变换, 注意到 $r_3=2r_1-r_2$, $r_4=r_1+2r_2$, 有:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & -5 \\ 3 & 8 & -2 & 13 \\ 4 & -1 & 9 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-2r_1+r_2]{r_4-r_1-2r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

例 1.4

解线性方程组
$$\begin{cases} 2x+3y+\ \ z=4, \\ \ x-2y+4z=-5, \\ 3x+8y-2z=13, \\ 4x-\ \ y+9z=-6. \end{cases}$$

解: 对方程的增广矩阵实施初等行变换, 注意到 $r_3=2r_1-r_2$, $r_4=r_1+2r_2$, 有:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & -5 \\ 3 & 8 & -2 & 13 \\ 4 & -1 & 9 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-2r_1+r_2]{r_4-r_1-2r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

例 1.4

解线性方程组 $\begin{cases} 2x+3y+\ \ z=4, \\ \ x-2y+4z=-5, \\ 3x+8y-2z=13, \\ 4x-\ \ y+9z=-6. \end{cases}$

解: 对方程的增广矩阵实施初等行变换, 注意到 $r_3=2r_1-r_2$, $r_4=r_1+2r_2$, 有:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & -5 \\ 3 & 8 & -2 & 13 \\ 4 & -1 & 9 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-2r_1+r_2]{r_4-r_1-2r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 7 & -7 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2 \div 7} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2 \div 7} \left(\begin{array}{rrr:r} 1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 + 2r_2} \left(\begin{array}{rrr:r} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$$\xrightarrow{r_2 \div 7} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 + 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

即原方程组等价于

$$\begin{cases} x \qquad + 2z = -1, \\ \qquad y - \ z = \ 2, \end{cases}$$

$$\xrightarrow{r_2 \div 7} \left(\begin{array}{rrr:r} 1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 + 2r_2} \left(\begin{array}{rrr:r} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

即原方程组等价于

$$\begin{cases} x \quad\quad + 2z = -1, \\ \quad\quad y - \ \ z = \ \ 2, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -2z - 1, \\ y = \quad\ z + 2, \end{cases}$$

$$\xrightarrow{r_2 \div 7} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 + 2r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

即原方程组等价于

$$\begin{cases} x \quad\quad + 2z = -1, \\ \quad\quad y - \quad z = \quad 2, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -2z - 1, \\ y = \quad\quad z + 2, \end{cases}$$

取 $z = k$, k 为任意实数,

$$\xrightarrow{r_2 \div 7} \left(\begin{array}{rrr:r} 1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 + 2r_2} \left(\begin{array}{rrr:r} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

即原方程组等价于

$$\begin{cases} x \quad\quad + 2z = -1, \\ \quad\quad y - \quad z = \quad 2, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -2z - 1, \\ y = \quad\; z + 2, \end{cases}$$

取 $z = k$, k 为任意实数, 则原方程组的解为

$$x = -2k - 1, \qquad y = k + 2, \qquad z = k.$$

$$\xrightarrow{r_2 \div 7} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 + 2r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

即原方程组等价于

$$\begin{cases} x \quad\quad + 2z = -1, \\ \quad\quad y - \ z = \ \ 2, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -2z - 1, \\ y = \quad z + 2, \end{cases}$$

取 $z = k$, k 为任意实数, 则原方程组的解为

$$x = -2k - 1, \qquad y = k + 2, \qquad z = k.$$

或记为

$$(x, y, z) = (-2k - 1, k + 2, k), \qquad k \in \mathbb{R}.$$

方阵, 各种特殊形式的方阵

方阵 若 $m = n$, 称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶**方阵**, 也可记作 $\boldsymbol{A}_n$.

方阵, 各种特殊形式的方阵

方阵 若 $m = n$, 称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶**方阵**, 也可记作 $\boldsymbol{A}_n$. 此时 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 称为**对角元素**.

方阵, 各种特殊形式的方阵

方阵 若 $m = n$, 称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶**方阵**, 也可记作 $\boldsymbol{A}_n$. 此时 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 称为**对角元素**.

上三角矩阵 对角线以下的元素全为零, 则为**上三角矩阵**.

方阵, 各种特殊形式的方阵

方阵 若 $m=n$, 称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶**方阵**, 也可记作 $\boldsymbol{A}_n$. 此时 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 称为**对角元素**.

上三角矩阵 对角线以下的元素全为零, 则为**上三角矩阵**. 形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \text{或简记为} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

方阵, 各种特殊形式的方阵

方阵 若 $m = n$, 称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶**方阵**, 也可记作 $\boldsymbol{A}_n$. 此时 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 称为**对角元素**.

上三角矩阵 对角线以下的元素全为零, 则为**上三角矩阵**. 形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \text{或简记为} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

下三角矩阵 对角线以上的元素全为零, 则为**下三角矩阵**.

方阵, 各种特殊形式的方阵

方阵 若 $m=n$, 称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶**方阵**, 也可记作 $\boldsymbol{A}_n$. 此时 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 称为**对角元素**.

上三角矩阵 对角线以下的元素全为零, 则为**上三角矩阵**. 形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \text{或简记为} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

下三角矩阵 对角线以上的元素全为零, 则为**下三角矩阵**. 形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \text{或简记为} \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

方阵, 各种特殊形式的方阵

对角矩阵 非对角线元素全为零, 则为**对角矩阵** (diagonal matrix).

对角矩阵 非对角线元素全为零, 则为**对角矩阵** (diagonal matrix). 形如

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix},\quad \text{或简记为}\quad \begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

对角矩阵 非对角线元素全为零, 则为**对角矩阵** (diagonal matrix). 形如

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \text{或简记为} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

也常记作

$$\boldsymbol{\Lambda} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n).$$

方阵, 各种特殊形式的方阵

单位矩阵 对角元素全为 1 的对角矩阵, 称为**单位矩阵** (identity matrix). 记作 $\boldsymbol{I}$ 或 $\boldsymbol{I}_n$ (n 阶), 即

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{或简记为} \quad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

方阵, 各种特殊形式的方阵

单位矩阵 对角元素全为 1 的对角矩阵, 称为**单位矩阵** (identity matrix). 记作 $\boldsymbol{I}$ 或 $\boldsymbol{I}_n$ (n 阶), 即

$$\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}, \qquad \text{或简记为} \quad \begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}$$

也可用克罗内克符号记作

$$\boldsymbol{I}=(\delta_{ij}).$$

方阵, 各种特殊形式的方阵

单位矩阵 对角元素全为 1 的对角矩阵, 称为**单位矩阵** (identity matrix). 记作 $\boldsymbol{I}$ 或 $\boldsymbol{I}_n$ (n 阶), 即

$$\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix},\qquad \text{或简记为}\quad \begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}$$

也可用克罗内克符号记作

$$\boldsymbol{I}=(\delta_{ij}).$$

☞ 零矩阵和单位矩阵在矩阵运算中所起的作用, 类似于 0 和 1 在数的运算中所起的作用.

方阵, 各种特殊形式的方阵

单位矩阵 对角元素全为 1 的对角矩阵, 称为**单位矩阵** (identity matrix). 记作 $\boldsymbol{I}$ 或 $\boldsymbol{I}_n$ (n 阶), 即

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{或简记为} \quad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

也可用克罗内克符号记作

$$\boldsymbol{I} = (\delta_{ij}).$$

☞ 零矩阵和单位矩阵在矩阵运算中所起的作用, 类似于 0 和 1 在数的运算中所起的作用.

零矩阵也常记为 $\boldsymbol{O}$, 单位矩阵也常记为 $\boldsymbol{E}$ (例如同济版教材).

方阵, 各种特殊形式的方阵

数量矩阵 对角元素全为非零常数 k 的对角矩阵,

$$\begin{pmatrix} k & & & \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ & & & k \end{pmatrix},$$

称为**数量矩阵**, 记作 $k\boldsymbol{I}$, 即

$$k\boldsymbol{I} = \mathrm{diag}(k, k, \cdots, k).$$

区别矩阵与行列式

请勿混淆了它们实质以及形式上的区别

区别矩阵与行列式

请勿混淆了它们实质以及形式上的区别

(1) 行列式的本质是一个数; 矩阵是一个数表, 是一个由数字构成的矩形阵列.

区别矩阵与行列式

请勿混淆了它们实质以及形式上的区别

(1) 行列式的本质是一个数; 矩阵是一个数表, 是一个由数字构成的矩形阵列. 它本身并不包含任何运算.

区别矩阵与行列式

请勿混淆了它们实质以及形式上的区别

(1) 行列式的本质是一个数; 矩阵是一个数表, 是一个由数字构成的矩形阵列. 它本身并不包含任何运算.

(2) 行列式的行数与列数必相等; 矩阵的行数与列数不一定相等.

区别矩阵与行列式

请勿混淆了它们实质以及形式上的区别

(1) 行列式的本质是一个数; 矩阵是一个数表, 是一个由数字构成的矩形阵列. 它本身并不包含任何运算.

(2) 行列式的行数与列数必相等; 矩阵的行数与列数不一定相等.

(3) 行列式的符号与矩阵的符号也不一样.

区别矩阵与行列式

请勿混淆了它们实质以及形式上的区别

(1) 行列式的本质是一个数; 矩阵是一个数表, 是一个由数字构成的矩形阵列. 它本身并不包含任何运算.

(2) 行列式的行数与列数必相等; 矩阵的行数与列数不一定相等.

(3) 行列式的符号与矩阵的符号也不一样.

☞ 约定: 矩阵符号只能是 (   ), 或 [   ].

Outline

1. 高斯消元法
2. 矩阵的加法　数量乘法　乘法
   - 矩阵的加法
   - 矩阵的数量乘法
   - 矩阵的乘法
   - 矩阵的行列式
3. 矩阵的转置　对称矩阵
4. 可逆矩阵的逆矩阵
5. 矩阵的初等变换和初等矩阵

Outline

1. 高斯消元法
2. 矩阵的加法　数量乘法　乘法
    - 矩阵的加法
    - 矩阵的数量乘法
    - 矩阵的乘法
    - 矩阵的行列式
3. 矩阵的转置　对称矩阵
4. 可逆矩阵的逆矩阵
5. 矩阵的初等变换和初等矩阵

同型矩阵 具有相同行数和相同列数的矩阵, 称为**同型矩阵**.

同型矩阵 具有相同行数和相同列数的矩阵, 称为**同型矩阵**.

矩阵相等 若同型矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 在对应位置上的元素都相等, 即

$$a_{ij}=b_{ij},\quad i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,n,$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ **相等**.

同型矩阵 具有相同行数和相同列数的矩阵, 称为**同型矩阵**.

矩阵相等 若同型矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 在对应位置上的元素都相等, 即

$$a_{ij}=b_{ij},\quad i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,n,$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ **相等**.

☞ 不同型的零矩阵是不相等的, 注意它们可能都简记为 $\mathbf{0}$.

同型矩阵 具有相同行数和相同列数的矩阵, 称为**同型矩阵**.

矩阵相等 若同型矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{m\times n}$ 在对应位置上的元素都相等, 即

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad i = 1, \cdots, m, \ j = 1, \cdots, n,$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ **相等**.

☞ 不同型的零矩阵是不相等的, 注意它们可能都简记为 $\mathbf{0}$. 不同型的单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 也是不相等的.

定义 2.1 (矩阵加法)

设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 和 $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ 均为 $m \times n$ 矩阵, $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的**加法** (或称**和**), 记作

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B},$$

定义 2.1 (矩阵加法)

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 均为 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的**加法** (或称**和**), 记作

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},$$

定义为一个 $m\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{C}=(c_{ij})=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

定义 2.1 (矩阵加法)

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 均为 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的**加法** (或称**和**), 记作

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},$$

定义为一个 $m\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{C}=(c_{ij})=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

☞ 只有同型矩阵才可以相加.

例 2.2

设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&0&5\\1&2&0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&1\\3&5&7\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2&3\\0&1\end{pmatrix},$$

例 2.2

设
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
则
$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 4 & 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

例 2.2

设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&0&5\\1&2&0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&1\\3&5&7\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2&3\\0&1\end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}5&1&6\\4&7&7\end{pmatrix}.$$

但是 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}$ 没有定义, 因为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 不是同型矩阵.

负矩阵 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, 称矩阵 $-\boldsymbol{A} = (-a_{ij})$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**.

负矩阵 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, 称矩阵 $-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**.

矩阵减法 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B} &\triangleq \boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})\\ &=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n}\\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

由定义, 容易验证矩阵的加法满足下列运算法则:

(1) 交换律 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

(2) 结合律 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$;

(3) $\boldsymbol{A}+\mathbf{0}=\boldsymbol{A}$;

(4) $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$.

其中 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\mathbf{0}$ 为同型矩阵.

Outline

1. 高斯消元法
2. 矩阵的加法　数量乘法　乘法
   - 矩阵的加法
   - 矩阵的数量乘法
   - 矩阵的乘法
   - 矩阵的行列式
3. 矩阵的转置　对称矩阵
4. 可逆矩阵的逆矩阵
5. 矩阵的初等变换和初等矩阵

定义 2.3 (矩阵数乘)

数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ 的乘积, 称为**数乘**, 记作 $\lambda\boldsymbol{A}$, 定义为一个 $m \times n$ 的矩阵

$$\boldsymbol{C} = (c_{ij}) = \lambda\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

注意

$$k\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k & k & k\\ k & k & k\\ k & k & k\end{pmatrix},$$

注意

$$k\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k & k & k\\k & k & k\\k & k & k\end{pmatrix},$$

而

$$k\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}k & k & k\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{vmatrix},$$

注意

$$k\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k&k&k\\k&k&k\\k&k&k\end{pmatrix},$$

而

$$k\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}k&k&k\\1&1&1\\1&1&1\end{vmatrix},\quad \text{或}\quad \begin{vmatrix}1&k&1\\1&k&1\\1&k&1\end{vmatrix}\text{等}.$$

注意

$$k\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k&k&k\\k&k&k\\k&k&k\end{pmatrix},$$

而

$$k\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}k&k&k\\1&1&1\\1&1&1\end{vmatrix},\quad \text{或}\quad \begin{vmatrix}1&k&1\\1&k&1\\1&k&1\end{vmatrix}\text{等}.$$

☞ 这是一个常见的错误:

$$k\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}k&k&k\\k&k&k\\k&k&k\end{vmatrix}.$$

由定义, 数乘运算满足下列运算法则 (设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\mathbf{0}$ 是同型矩阵, λ, μ 是数):

1. 数对矩阵的分配律: $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$;

由定义, 数乘运算满足下列运算法则 (设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\mathbf{0}$ 是同型矩阵, λ, μ 是数):

1. 数对矩阵的分配律: $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$;
2. 矩阵对数的分配律: $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$;

由定义, 数乘运算满足下列运算法则 (设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\mathbf{0}$ 是同型矩阵, λ, μ 是数):

1. 数对矩阵的分配律: $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$;
2. 矩阵对数的分配律: $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$;
3. 结合律: $(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu\boldsymbol{A})$;

由定义, 数乘运算满足下列运算法则 (设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\mathbf{0}$ 是同型矩阵, λ, μ 是数):

1. 数对矩阵的分配律: $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$;
2. 矩阵对数的分配律: $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$;
3. 结合律: $(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu\boldsymbol{A})$;
4. $0\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$,

由定义, 数乘运算满足下列运算法则 (设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\mathbf{0}$ 是同型矩阵, λ, μ 是数):

1. 数对矩阵的分配律: $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$;
2. 矩阵对数的分配律: $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$;
3. 结合律: $(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu\boldsymbol{A})$;
4. $0\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$, $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$. 其中 0, 1 是数.

Outline

1. 高斯消元法
2. 矩阵的加法　数量乘法　乘法
   - 矩阵的加法
   - 矩阵的数量乘法
   - 矩阵的乘法
   - 矩阵的行列式
3. 矩阵的转置　对称矩阵
4. 可逆矩阵的逆矩阵
5. 矩阵的初等变换和初等矩阵

矩阵乘法引入的第一个途径: 线性变换

矩阵的乘法是阿瑟 · 凯莱 (Arthur Cayley, 1821 ~ 1895) 于 1858 年根据线性变换乘积的需要提出的.

矩阵乘法引入的第一个途径: 线性变换

矩阵的乘法是阿瑟 · 凯莱 (Arthur Cayley, 1821 ~ 1895) 于 1858 年根据线性变换乘积的需要提出的.

n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 与 m 个变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 之间的关系式

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \qquad \vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n, \end{cases} \tag{1}$$

表示一个从变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 到变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 的**线性变换**, 其中 a_{ij} 为常数.

设有两个线性变换

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}t_1 + b_{12}t_2, \\ x_2 = b_{21}t_1 + b_{22}t_2, \\ x_3 = b_{31}t_1 + b_{32}t_2. \end{cases} \tag{3}$$

设有两个线性变换

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}t_1 + b_{12}t_2, \\ x_2 = b_{21}t_1 + b_{22}t_2, \\ x_3 = b_{31}t_1 + b_{32}t_2. \end{cases} \tag{3}$$

将 (3) 带入 (2), 可得从 t_1, t_2 到 y_1, y_2 的线性变换:

$$\begin{cases} y_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})t_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})t_2, \\ y_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})t_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32})t_2, \end{cases} \tag{4}$$

我们把线性变换 (4) 叫做线性变换 (2) 与 (3) 的乘积,

我们把线性变换 (4) 叫做线性变换 (2) 与 (3) 的乘积, 相应地把 (4) 所对应的矩阵定义为 (2) 与 (3) 所对应矩阵的乘积,

我们把线性变换 (4) 叫做线性变换 (2) 与 (3) 的乘积, 相应地把 (4) 所对应的矩阵定义为 (2) 与 (3) 所对应矩阵的乘积, 即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}.$$

我们把线性变换 (4) 叫做线性变换 (2) 与 (3) 的乘积, 相应地把 (4) 所对应的矩阵定义为 (2) 与 (3) 所对应矩阵的乘积, 即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}.$$

其规律是:

- 第一个矩阵中取**行向量**, 第二个矩阵中取**列向量**, 将这个两个向量进行 “点乘”.

我们把线性变换 (4) 叫做线性变换 (2) 与 (3) 的乘积, 相应地把 (4) 所对应的矩阵定义为 (2) 与 (3) 所对应矩阵的乘积, 即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}.$$

其规律是:

- 第一个矩阵中取**行向量**, 第二个矩阵中取**列向量**, 将这个两个向量进行 “点乘”. (这也导致: 第一个矩阵的列数必须等于第二个矩阵的行数.)

我们把线性变换 (4) 叫做线性变换 (2) 与 (3) 的乘积, 相应地把 (4) 所对应的矩阵定义为 (2) 与 (3) 所对应矩阵的乘积, 即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}.$$

其规律是:

- 第一个矩阵中取**行向量**, 第二个矩阵中取**列向量**, 将这个两个向量进行“点乘”. (这也导致: 第一个矩阵的列数必须等于第二个矩阵的行数.)
- 第一个矩阵中第 i 行向量与第二个矩阵中第 j 列向量的点乘, 得到结果矩阵中 (i, j) 位置元素的值.

定义 2.4

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是一个 $m\times s$ 矩阵, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是一个 $s\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘法, 记作 $\boldsymbol{AB}$, 定义为一个 $m\times n$ 的矩阵 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=(c_{ij})$, 其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj},$$

$$(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n).$$

定义 2.4

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是一个 $m\times s$ 矩阵, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是一个 $s\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘法, 记作 $\boldsymbol{AB}$, 定义为一个 $m\times n$ 的矩阵 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=(c_{ij})$, 其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj},$$

$$(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n).$$

☞ c_{ij} 等于 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行向量与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列向量的点乘.

定义 2.4

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是一个 $m\times s$ 矩阵, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是一个 $s\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘法, 记作 $\boldsymbol{AB}$, 定义为一个 $m\times n$ 的矩阵 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=(c_{ij})$, 其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj},$$

$$(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n).$$

☞ c_{ij} 等于 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行向量与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列向量的点乘.

1. 只有 "$\boldsymbol{A}$ 的列数 $=$ $\boldsymbol{B}$ 的行数" 时, 才能定义乘法 $\boldsymbol{AB}$;

定义 2.4

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是一个 $m\times s$ 矩阵, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是一个 $s\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘法, 记作 $\boldsymbol{AB}$, 定义为一个 $m\times n$ 的矩阵 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=(c_{ij})$, 其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj},$$

$$(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n).$$

☞ c_{ij} 等于 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行向量与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列向量的点乘.

1. 只有 "$\boldsymbol{A}$ 的列数 $=$ $\boldsymbol{B}$ 的行数" 时, 才能定义乘法 $\boldsymbol{AB}$;
2. $\boldsymbol{AB}$ 的行数 $=$ $\boldsymbol{A}$ 的行数, $\boldsymbol{AB}$ 的列数 $=$ $\boldsymbol{B}$ 的列数.

例 2.5

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{BA}$.

例 2.5

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{BA}$.

解:

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

例 2.5

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{BA}$.

解:

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 3\cdot(-2)-2\cdot 4 & 3\cdot 1-2\cdot 1 & 3\cdot 3-2\cdot 6 \\ 2\cdot(-2)+4\cdot 4 & 2\cdot 1+4\cdot 1 & 2\cdot 3+4\cdot 6 \\ 1\cdot(-2)-3\cdot 4 & 1\cdot 1-3\cdot 1 & 1\cdot 3-3\cdot 6 \end{pmatrix}$$

例 2.5

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & 4\\ 1 & -3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\ 4 & 1 & 6\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{BA}$.

解:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{AB} &= \begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & 4\\ 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\ 4 & 1 & 6\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}3\cdot(-2)-2\cdot 4 & 3\cdot 1-2\cdot 1 & 3\cdot 3-2\cdot 6\\ 2\cdot(-2)+4\cdot 4 & 2\cdot 1+4\cdot 1 & 2\cdot 3+4\cdot 6\\ 1\cdot(-2)-3\cdot 4 & 1\cdot 1-3\cdot 1 & 1\cdot 3-3\cdot 6\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-14 & 1 & -3\\ 12 & 6 & 30\\ -14 & -2 & -15\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

$$\boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2\cdot 3 + 1\cdot 2 + 3\cdot 1 & -2\cdot(-2) + 1\cdot 4 + 3\cdot(-3) \\ 4\cdot 3 + 1\cdot 2 + 6\cdot 1 & 4\cdot(-2) + 1\cdot 4 + 6\cdot(-3) \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{BA} &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2\cdot 3 + 1\cdot 2 + 3\cdot 1 & -2\cdot(-2) + 1\cdot 4 + 3\cdot(-3) \\ 4\cdot 3 + 1\cdot 2 + 6\cdot 1 & 4\cdot(-2) + 1\cdot 4 + 6\cdot(-3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 20 & -22 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} -2\cdot 3 + 1\cdot 2 + 3\cdot 1 & -2\cdot(-2) + 1\cdot 4 + 3\cdot(-3) \\ 4\cdot 3 + 1\cdot 2 + 6\cdot 1 & 4\cdot(-2) + 1\cdot 4 + 6\cdot(-3) \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 20 & -22 \end{pmatrix}.
$$

☞ 这里 $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$. 即不满足交换律.

矩阵乘法引入的另一个途径: 线性方程组的表示

Step 1. 先定义行矩阵与列矩阵的乘法为两个向量的内积.

矩阵乘法引入的另一个途径: 线性方程组的表示

Step 1. 先定义行矩阵与列矩阵的乘法为两个向量的内积. 即对

$$\boldsymbol{A} = \big(a_1, a_2, \cdots, a_n\big), \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n.$$

Step 2. 再定义 $m \times n$ 矩阵与 $n \times 1$ 矩阵的乘法.

Step 2. 再定义 $m \times n$ 矩阵与 $n \times 1$ 矩阵的乘法.
设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Step 2. 再定义 $m \times n$ 矩阵与 $n \times 1$ 矩阵的乘法.
设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

记

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

Step 2. 再定义 $m\times n$ 矩阵与 $n\times 1$ 矩阵的乘法.
设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases}$$

记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

Step 2. 再定义 $m \times n$ 矩阵与 $n \times 1$ 矩阵的乘法.

设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

记

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

定义

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix},$$

定义

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix},$$

即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的第 i 个分量, 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与 $\boldsymbol{x}$ 的内积.

定义

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \end{pmatrix},$$

即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的第 i 个分量, 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与 $\boldsymbol{x}$ 的内积. 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \tag{5}$$

成立等价于

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases}$$

Step 3. 再定义 $m \times n$ 矩阵与 $n \times k$ 矩阵的乘法.

Step 3. 再定义 $m \times n$ 矩阵与 $n \times k$ 矩阵的乘法.

设有矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{n\times k}$.

Step 3. 再定义 $m \times n$ 矩阵与 $n \times k$ 矩阵的乘法.

设有矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{n\times k}$. 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 各列分别记为列矩阵 $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_k$,

Step 3. 再定义 $m \times n$ 矩阵与 $n \times k$ 矩阵的乘法.

设有矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{n\times k}$. 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 各列分别记为列矩阵 $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{b}_k$, 即

$$\boldsymbol{B} = \big(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_k\big).$$

Step 3. 再定义 $m \times n$ 矩阵与 $n \times k$ 矩阵的乘法.

设有矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{n\times k}$. 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 各列分别记为列矩阵 $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{b}_k$, 即

$$\boldsymbol{B} = \big(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_k\big).$$

则乘积 $\boldsymbol{AB}$ 定义为

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}\big(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_k\big) = \big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_k\big).$$

Step 3. 再定义 $m \times n$ 矩阵与 $n \times k$ 矩阵的乘法.

设有矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{n\times k}$. 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 各列分别记为列矩阵 $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{b}_k$, 即

$$\boldsymbol{B} = \big(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_k\big).$$

则乘积 $\boldsymbol{AB}$ 定义为

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}\big(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_k\big) = \big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_k\big).$$

☞ 以后就用 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 表示一个普通的线性方程组.

Step 3. 再定义 $m \times n$ 矩阵与 $n \times k$ 矩阵的乘法.

设有矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{n\times k}$. 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 各列分别记为列矩阵 $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{b}_k$, 即

$$\boldsymbol{B} = \big(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_k\big).$$

则乘积 $\boldsymbol{AB}$ 定义为

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}\big(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_k\big) = \big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_k\big).$$

☞ 以后就用 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 表示一个普通的线性方程组.

而 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 本身还是一个矩阵方程.

Step 3. 再定义 $m \times n$ 矩阵与 $n \times k$ 矩阵的乘法.

设有矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{n\times k}$. 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 各列分别记为列矩阵 $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{b}_k$, 即

$$\boldsymbol{B} = \big(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_k\big).$$

则乘积 $\boldsymbol{AB}$ 定义为

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}\big(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_k\big) = \big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_k\big).$$

☞ 以后就用 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 表示一个普通的线性方程组.

而 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 本身还是一个矩阵方程. 矩阵方程的一般形式:

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}.$$

矩阵方程 & 线性方程组

设有多个系数矩阵相同的线性方程组, 例如:

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 3. \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 + \ \ y_2 + \ \ y_3 = 4, \\ y_1 + 2y_2 + 4y_3 = 5, \\ y_1 + 3y_2 + 9y_3 = 6. \end{cases}$$

矩阵方程 & 线性方程组

设有多个系数矩阵相同的线性方程组, 例如:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 3. \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 4, \\ y_1 + 2y_2 + 4y_3 = 5, \\ y_1 + 3y_2 + 9y_3 = 6. \end{cases}$$

记

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

设有多个系数矩阵相同的线性方程组, 例如:

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 3. \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 + \ \ y_2 + \ \ y_3 = 4, \\ y_1 + 2y_2 + 4y_3 = 5, \\ y_1 + 3y_2 + 9y_3 = 6. \end{cases}$$

记

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1, \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}_2.$$

若记

$$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix},$$

若记

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\begin{pmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix},$$

则有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}.$$

若记

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\begin{pmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix},$$

则有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}.$$

☞ 解矩阵方程, 相当于在一次性求解多个线性方程组 (它们的系数矩阵相同).

例 2.6

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $1 \times n$ 的矩阵 (行向量), $\boldsymbol{B}$ 是 $n \times 1$ 的矩阵 (列向量), 即

$$\boldsymbol{A} = \left(a_1, a_2, \cdots, a_n\right), \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

求 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$.

例 2.6

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $1\times n$ 的矩阵 (行向量), $\boldsymbol{B}$ 是 $n\times 1$ 的矩阵 (列向量), 即

$$\boldsymbol{A}=\left(a_1, a_2, \cdots, a_n\right), \qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

求 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$.

解: $\boldsymbol{AB}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n,$

例 2.6

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $1\times n$ 的矩阵 (行向量), $\boldsymbol{B}$ 是 $n\times 1$ 的矩阵 (列向量), 即

$$\boldsymbol{A}=\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right),\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}.$$

求 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$.

解: $\boldsymbol{AB}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$,

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix} b_1a_1 & b_1a_2 & \cdots & b_1a_n\\ b_2a_1 & b_2a_2 & \cdots & b_2a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_na_1 & b_na_2 & \cdots & b_na_n\end{pmatrix}.$$

例 2.7

设矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$.

例 2.7

设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$.

解:

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix};$$

例 2.7

设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

求 AB 和 BA.

解:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

例 2.7

设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$.

解:

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix};\qquad \boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & -2\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0} \not\Rightarrow \boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$.

关于矩阵乘法的三个重要结论☆

(1) 矩阵乘法**不满足交换律**.

关于矩阵乘法的三个重要结论☆

(1) 矩阵乘法**不满足交换律**.

即一般情况下, $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$.

关于矩阵乘法的三个重要结论☆

(1) 矩阵乘法**不满足交换律**.

即一般情况下, $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$.

定义 2.8

若两个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA},$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是**可交换的**.

关于矩阵乘法的三个重要结论☆

(1) 矩阵乘法**不满足交换律**.

即一般情况下, $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$.

定义 2.8

若两个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA},$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是**可交换的**.

- 单位矩阵与任何同阶矩阵可交换, 即成立 $\boldsymbol{AI} = \boldsymbol{IA}$.

关于矩阵乘法的三个重要结论☆

(1) 矩阵乘法**不满足交换律**.

即一般情况下, $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$.

定义 2.8

若两个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA},$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是**可交换的**.

- 单位矩阵与任何同阶矩阵可交换, 即成立 $\boldsymbol{AI} = \boldsymbol{IA}$.
- 任何两个同阶对角矩阵也都是可交换的.

关于矩阵乘法的三个重要结论☆

(1) 矩阵乘法**不满足交换律**.

即一般情况下, $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$.

定义 2.8

若两个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA},$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是**可交换的**.

- 单位矩阵与任何同阶矩阵可交换, 即成立 $\boldsymbol{AI} = \boldsymbol{IA}$.
- 任何两个同阶对角矩阵也都是可交换的.
- 一个矩阵与任何同阶矩阵可交换, 当且仅当该矩阵为数量矩阵. (作为习题)

(2) 当 $\boldsymbol{AB} = \mathbf{0}$ 时, 不能推出 $\boldsymbol{A} = \mathbf{0}$ 或 $\boldsymbol{B} = \mathbf{0}$.

(2) 当 $\boldsymbol{AB} = \mathbf{0}$ 时, 不能推出 $\boldsymbol{A} = \mathbf{0}$ 或 $\boldsymbol{B} = \mathbf{0}$.

若 $\boldsymbol{A} \neq \mathbf{0}$ 且 $\boldsymbol{B} \neq \mathbf{0}$, 而 $\boldsymbol{AB} = \mathbf{0}$ 时, 称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的右零因子, $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的左零因子.

(2) 当 $\boldsymbol{AB} = \mathbf{0}$ 时, 不能推出 $\boldsymbol{A} = \mathbf{0}$ 或 $\boldsymbol{B} = \mathbf{0}$.

若 $\boldsymbol{A} \neq \mathbf{0}$ 且 $\boldsymbol{B} \neq \mathbf{0}$, 而 $\boldsymbol{AB} = \mathbf{0}$ 时, 称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的右零因子, $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的左零因子.

(3) 矩阵乘法**不满足消去律**.

(2) 当 $\boldsymbol{AB}=\mathbf{0}$ 时, 不能推出 $\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$ 或 $\boldsymbol{B}=\mathbf{0}$.

若 $\boldsymbol{A}\neq\mathbf{0}$ 且 $\boldsymbol{B}\neq\mathbf{0}$, 而 $\boldsymbol{AB}=\mathbf{0}$ 时, 称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的右零因子, $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的左零因子.

(3) 矩阵乘法**不满足消去律**.

即当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$, 且 $\boldsymbol{A}\neq\mathbf{0}$ 时, 不能得到 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

(2) 当 $\boldsymbol{AB} = \mathbf{0}$ 时, 不能推出 $\boldsymbol{A} = \mathbf{0}$ 或 $\boldsymbol{B} = \mathbf{0}$.

若 $\boldsymbol{A} \neq \mathbf{0}$ 且 $\boldsymbol{B} \neq \mathbf{0}$, 而 $\boldsymbol{AB} = \mathbf{0}$ 时, 称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的右零因子, $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的左零因子.

(3) 矩阵乘法**不满足消去律**.

即当 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC}$, 且 $\boldsymbol{A} \neq \mathbf{0}$ 时, 不能得到 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$.

以后我们会了解到: 当行列式 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ 时,

- $\boldsymbol{AB} = \mathbf{0} \Longrightarrow \boldsymbol{B} = \mathbf{0}$;

(2) 当 $\boldsymbol{AB}=\mathbf{0}$ 时, 不能推出 $\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$ 或 $\boldsymbol{B}=\mathbf{0}$.

若 $\boldsymbol{A}\neq\mathbf{0}$ 且 $\boldsymbol{B}\neq\mathbf{0}$, 而 $\boldsymbol{AB}=\mathbf{0}$ 时, 称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的右零因子, $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的左零因子.

(3) 矩阵乘法**不满足消去律**.

即当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$, 且 $\boldsymbol{A}\neq\mathbf{0}$ 时, 不能得到 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

以后我们会了解到: 当行列式 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时,

- $\boldsymbol{AB}=\mathbf{0}\Longrightarrow\boldsymbol{B}=\mathbf{0}$;
- $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}\Longrightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

注意

虽然矩阵也有所谓的“加法”、“乘法”, 但是这和我们熟知的实数加法、乘法是完全不同的.

注意

虽然矩阵也有所谓的“加法”、“乘法”, 但是这和我们熟知的实数加法、乘法是完全不同的. 运算的对象不同, 运算的内容不同, 当然, 运算的规律也不同.

注意

虽然矩阵也有所谓的“加法”、“乘法”, 但是这和我们熟知的实数加法、乘法是完全不同的. 运算的对象不同, 运算的内容不同, 当然, 运算的规律也不同. 这是两个不同的讨论范围里的不同运算, 相同的只不过是沿用了以前的称谓或记号而已, 我们不要被这一点“相同”而忘记二者本质的不同.

但矩阵乘法仍**满足分配律和结合律**:

1. 分配律 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$; $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}$.

但矩阵乘法仍**满足分配律和结合律**:

1. 分配律 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$; $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}$.
2. 结合律 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})$.

但矩阵乘法仍**满足分配律和结合律**:

1. 分配律 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$; $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}$.
2. 结合律 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})$.
3. 数乘结合律 $\lambda(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$, 其中 λ 是一个数.

但矩阵乘法仍**满足分配律和结合律**:

1. 分配律 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$; $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$.
2. 结合律 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$.
3. 数乘结合律 $\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$, 其中 λ 是一个数.
4. $\boldsymbol{AI}=\boldsymbol{IA}=\boldsymbol{A}$.

Outline

1 高斯消元法

2 矩阵的加法　数量乘法　乘法
- 矩阵的加法
- 矩阵的数量乘法
- 矩阵的乘法
- 矩阵的行列式

3 矩阵的转置　对称矩阵

4 可逆矩阵的逆矩阵

5 矩阵的初等变换和初等矩阵

矩阵的行列式

定义 2.9

设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 是 n 阶矩阵, 称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式**, 记作 $|\boldsymbol{A}|$ 或 $\det \boldsymbol{A}$.

矩阵的行列式

定义 2.9

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 n 阶矩阵, 称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式**, 记作 $|\boldsymbol{A}|$ 或 $\det \boldsymbol{A}$.

☞ 只有方阵才有行列式.

矩阵的行列式

定义 2.9

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 n 阶矩阵, 称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式**, 记作 $|\boldsymbol{A}|$ 或 $\det \boldsymbol{A}$.

☞ 只有方阵才有行列式.

- 当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时, 称 $\boldsymbol{A}$ 为**奇异矩阵** (Singular Matrix);

矩阵的行列式

定义 2.9

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 n 阶矩阵, 称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式**, 记作 $|\boldsymbol{A}|$ 或 $\det \boldsymbol{A}$.

☞ 只有方阵才有行列式.

- 当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时, 称 $\boldsymbol{A}$ 为**奇异矩阵** (Singular Matrix);
- 当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时, 称 $\boldsymbol{A}$ 为**非奇异矩阵** (Nonsingular Matrix).

矩阵的行列式的性质

性质 1 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}|$. (由行列式性质 1)

矩阵的行列式的性质

性质 1 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}|$. (由行列式性质 1)

性质 2 $|k\boldsymbol{A}| = k^n|\boldsymbol{A}|$, 这里 n 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的阶数. (由矩阵的数乘和行列式性质 3)

矩阵的行列式的性质

性质 1 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}|$. (由行列式性质 1)

性质 2 $|k\boldsymbol{A}| = k^n|\boldsymbol{A}|$, 这里 n 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的阶数. (由矩阵的数乘和行列式性质 3)

例 2.10

例如 $\left|k\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\right|$

矩阵的行列式的性质

性质 1 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}|$. (由行列式性质 1)

性质 2 $|k\boldsymbol{A}| = k^n|\boldsymbol{A}|$, 这里 n 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的阶数. (由矩阵的数乘和行列式性质 3)

例 2.10

例如 $$\left|k\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} ka_1 & ka_2 & ka_3 \\ kb_1 & kb_2 & kb_3 \\ kc_1 & kc_2 & kc_3 \end{pmatrix}\right|$$

矩阵的行列式的性质

性质 1 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}|$. (由行列式性质 1)

性质 2 $|k\boldsymbol{A}| = k^n|\boldsymbol{A}|$, 这里 n 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的阶数. (由矩阵的数乘和行列式性质 3)

例 2.10

例如 $$\left|k\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} ka_1 & ka_2 & ka_3 \\ kb_1 & kb_2 & kb_3 \\ kc_1 & kc_2 & kc_3 \end{pmatrix}\right| = k^3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

矩阵的行列式的性质

性质 1 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}|$. (由行列式性质 1)

性质 2 $|k\boldsymbol{A}| = k^n|\boldsymbol{A}|$, 这里 n 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的阶数. (由矩阵的数乘和行列式性质 3)

例 2.10

例如 $\left|k\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} ka_1 & ka_2 & ka_3 \\ kb_1 & kb_2 & kb_3 \\ kc_1 & kc_2 & kc_3 \end{pmatrix}\right| = k^3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

初学者容易犯的一个错误是: $|k\boldsymbol{A}| = k|\boldsymbol{A}|$.

矩阵的行列式的性质

性质 3 $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

矩阵的行列式的性质

性质 3 $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

证: 不妨以 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为 3 阶矩阵来说明.

性质 3 $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

证: 不妨以 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为 3 阶矩阵来说明. 构造 6 阶行列式:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & -1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & -1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}.$$

矩阵的行列式的性质

性质 3 $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

证: 不妨以 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为 3 阶矩阵来说明. 构造 6 阶行列式:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & -1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & -1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}.$$

则 $D = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

另一方面, 对 D 做下列变换:

另一方面, 对 D 做下列变换:

第一步: 消去 b_{11}, b_{12}, b_{13}, 有

$$D \xlongequal[c_5+b_{12}c_2,\ c_6+b_{13}c_3]{c_4+b_{11}c_1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{11}b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{21}b_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31}b_{11} & a_{31}b_{12} & a_{31}b_{13} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & -1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}.$$

第二步、第三步: 消去 b_{21}, b_{22}, b_{23} 和 b_{31}, b_{32}, b_{33},

第二步、第三步: 消去 b_{21}, b_{22}, b_{23} 和 b_{31}, b_{32}, b_{33}, 得

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k2} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k3} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k2} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k3} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{3k}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{3k}b_{k2} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{3k}b_{k3} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

第二步、第三步: 消去 b_{21}, b_{22}, b_{23} 和 b_{31}, b_{32}, b_{33}, 得

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \sum_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k2} & \sum_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k3} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \sum_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k2} & \sum_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k3} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \sum_{k=1}^{3} a_{3k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{3} a_{3k}b_{k2} & \sum_{k=1}^{3} a_{3k}b_{k3} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{AB} \\ -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \end{vmatrix}$$

第二步、第三步: 消去 b_{21}, b_{22}, b_{23} 和 b_{31}, b_{32}, b_{33}, 得

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k2} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k3} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k2} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k3} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{3k}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{3k}b_{k2} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{3k}b_{k3} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{AB} \\ -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \end{vmatrix} \xlongequal[j=1,2,3]{r_j \leftrightarrow r_{3+j}} (-1)^3 \begin{vmatrix} -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{AB} \end{vmatrix}.$$

第二步、第三步: 消去 b_{21}, b_{22}, b_{23} 和 b_{31}, b_{32}, b_{33}, 得

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \sum_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k2} & \sum_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k3} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \sum_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k2} & \sum_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k3} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \sum_{k=1}^{3} a_{3k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{3} a_{3k}b_{k2} & \sum_{k=1}^{3} a_{3k}b_{k3} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{AB} \\ -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \end{vmatrix} \overset{r_j \leftrightarrow r_{3+j}}{\underset{j=1,2,3}{=\!=\!=\!=}} (-1)^3 \begin{vmatrix} -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{AB} \end{vmatrix}.$$

故

$$D = (-1)^3 |-\boldsymbol{I}||\boldsymbol{AB}|$$

第二步、第三步: 消去 b_{21}, b_{22}, b_{23} 和 b_{31}, b_{32}, b_{33}, 得

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k2} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k3} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k2} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k3} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{3k}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{3k}b_{k2} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{3k}b_{k3} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{AB} \\ -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \end{vmatrix} \xlongequal[j=1,2,3]{r_j \leftrightarrow r_{3+j}} (-1)^3 \begin{vmatrix} -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{AB} \end{vmatrix}.$$

故

$$D = (-1)^3 |-\boldsymbol{I}| |\boldsymbol{AB}| = (-1)^3 (-1)^3 |\boldsymbol{AB}|$$

第二步、第三步: 消去 b_{21}, b_{22}, b_{23} 和 b_{31}, b_{32}, b_{33}, 得

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k2} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k3} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k2} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k3} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{3k}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{3k}b_{k2} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{3k}b_{k3} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{AB} \\ -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \end{vmatrix} \xlongequal[j=1,2,3]{r_j \leftrightarrow r_{3+j}} (-1)^3 \begin{vmatrix} -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{AB} \end{vmatrix}.$$

故

$$D = (-1)^3 |-\boldsymbol{I}||\boldsymbol{AB}| = (-1)^3 (-1)^3 |\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{AB}|.$$

第二步、第三步: 消去 b_{21}, b_{22}, b_{23} 和 b_{31}, b_{32}, b_{33}, 得

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k2} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k3} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k2} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k3} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{3k}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{3k}b_{k2} & \sum\limits_{k=1}^{3} a_{3k}b_{k3} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{AB} \\ -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \end{vmatrix} \xlongequal[j=1,2,3]{r_j \leftrightarrow r_{3+j}} (-1)^3 \begin{vmatrix} -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{AB} \end{vmatrix}.$$

故

$$D = (-1)^3|-\boldsymbol{I}||\boldsymbol{AB}| = (-1)^3(-1)^3|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{AB}|.$$

从而结论成立.

例 2.11

已知 $\boldsymbol{A}$ 是三阶方阵, $\boldsymbol{B}$ 是四阶方阵, 且 $|\boldsymbol{A}| = 3$, $|\boldsymbol{B}| = 2$, 求 $\big||\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{B}\big|$.

例 2.11

已知 $\boldsymbol{A}$ 是三阶方阵, $\boldsymbol{B}$ 是四阶方阵, 且 $|\boldsymbol{A}|=3$, $|\boldsymbol{B}|=2$, 求 $\big||\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{B}\big|$.

解: $\big||\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{B}\big| = \big|3\boldsymbol{B}\big|$

例 2.11

已知 $\boldsymbol{A}$ 是三阶方阵, $\boldsymbol{B}$ 是四阶方阵, 且 $|\boldsymbol{A}|=3$, $|\boldsymbol{B}|=2$, 求 $\big||\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{B}\big|$.

解: $\big||\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{B}\big| = \big|3\boldsymbol{B}\big| = 3^4|\boldsymbol{B}|$

例 2.11

已知 $\boldsymbol{A}$ 是三阶方阵, $\boldsymbol{B}$ 是四阶方阵, 且 $|\boldsymbol{A}| = 3$, $|\boldsymbol{B}| = 2$, 求 $\big||\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{B}\big|$.

解: $\big||\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{B}\big| = \big|3\boldsymbol{B}\big| = 3^4|\boldsymbol{B}| = 81 \times 2$

例 2.11

已知 $\boldsymbol{A}$ 是三阶方阵, $\boldsymbol{B}$ 是四阶方阵, 且 $|\boldsymbol{A}|=3$, $|\boldsymbol{B}|=2$, 求 $\big||\boldsymbol{A}|\ \boldsymbol{B}\big|$.

解: $\big||\boldsymbol{A}|\ \boldsymbol{B}\big| = \big|3\boldsymbol{B}\big| = 3^4|\boldsymbol{B}| = 81 \times 2 = 162.$ □

矩阵的幂

定义 2.12

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, 定义 $\boldsymbol{A}$ 的幂为:

$$\boldsymbol{A}^1 = \boldsymbol{A},\ \boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A},\ \cdots,\ \boldsymbol{A}^{k+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^k,$$

其中, k 是正整数; 特别规定 $\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{I}$.

矩阵的幂

定义 2.12

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, 定义 $\boldsymbol{A}$ 的幂为:

$$\boldsymbol{A}^1 = \boldsymbol{A},\ \boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A},\ \cdots,\ \boldsymbol{A}^{k+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^k,$$

其中, k 是正整数; 特别规定 $\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{I}$.

由于矩阵乘法满足分配律、结合律, 有

$$\boldsymbol{A}^{k+l} = \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l, \qquad (\boldsymbol{A}^k)^l = \boldsymbol{A}^{kl}.$$

注意:

1. 只有方阵有幂.

注意:

1. 只有方阵有幂.
2. 因不满足交换律, 故

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^k &\neq \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k;\\ (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) &\neq \boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2;\\ (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 &\neq \boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^2.\end{aligned}$$

注意:

1. 只有方阵有幂.
2. 因不满足交换律, 故

$$(\boldsymbol{AB})^k \neq \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k;$$
$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) \neq \boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2;$$
$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 \neq \boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2.$$

事实上,

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{B}^2,$$
$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 = \boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}^2.$$

注意:

1. 只有方阵有幂.
2. 因不满足交换律, 故

$$(\boldsymbol{AB})^k \neq \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k;$$
$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) \neq \boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2;$$
$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 \neq \boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2.$$

事实上,

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{B}^2,$$
$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 = \boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}^2.$$

3. 二项式定理只在下面的情形成立

$$(\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{I})^n = \boldsymbol{A}^n+\mathrm{C}_n^1\lambda\boldsymbol{A}^{n-1}+\mathrm{C}_n^2\lambda^2\boldsymbol{A}^{n-2}+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}\lambda^{n-1}\boldsymbol{A}+\lambda^n\boldsymbol{I}.$$

定义 2.13

设 $f(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 是 x 的 k 次多项式, $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,

定义 2.13

设 $f(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 是 x 的 k 次多项式, $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, 则

$$f(\boldsymbol{A}) = a_k \boldsymbol{A}^k + a_{k-1} \boldsymbol{A}^{k-1} + \cdots + a_1 \boldsymbol{A} + a_0 \boldsymbol{I}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次**多项式**.

练习 2.14 (P.102, T.84)

计算矩阵的幂

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}^n.$$

练习 2.14 (P.102, T.84)

计算矩阵的幂

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}^n .$$

解: 记 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则

$$\boldsymbol{A} = a\boldsymbol{I} + \boldsymbol{B}.$$

练习 2.14 (P.102, T.84)

计算矩阵的幂

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}^n.$$

解: 记 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则

$$\boldsymbol{A} = a\boldsymbol{I} + \boldsymbol{B}.$$

于是

$$\boldsymbol{A}^n = (a\boldsymbol{I} + \boldsymbol{B})^n = a^n\boldsymbol{I} + \mathrm{C}_n^1 a^{n-1}\boldsymbol{B} + \mathrm{C}_n^2 a^{n-2}\boldsymbol{B}^2 + \mathrm{C}_n^3 a^{n-3}\boldsymbol{B}^3 + \cdots + \mathrm{C}_n^n \boldsymbol{B}^n.$$

注意到:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

注意到:

$$\boldsymbol{B}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}^3 = \boldsymbol{B}^2\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

注意到:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B^3 = B^2 B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B^4 = B^3 B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以

$$\boldsymbol{A}^n = a^n\boldsymbol{I} + \mathrm{C}_n^1 a^{n-1}\boldsymbol{B} + \mathrm{C}_n^2 a^{n-2}\boldsymbol{B}^2 + \mathrm{C}_n^3 a^{n-3}\boldsymbol{B}^3$$

所以

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^n &= a^n\boldsymbol{I} + \mathrm{C}_n^1 a^{n-1}\boldsymbol{B} + \mathrm{C}_n^2 a^{n-2}\boldsymbol{B}^2 + \mathrm{C}_n^3 a^{n-3}\boldsymbol{B}^3 \\
&= \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{C}_n^1 a^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{C}_n^1 a^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{C}_n^1 a^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{C}_n^2 a^{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{C}_n^2 a^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathrm{C}_n^3 a^{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^n &= a^n\boldsymbol{I} + \mathrm{C}_n^1 a^{n-1}\boldsymbol{B} + \mathrm{C}_n^2 a^{n-2}\boldsymbol{B}^2 + \mathrm{C}_n^3 a^{n-3}\boldsymbol{B}^3 \\
&= \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{C}_n^1 a^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{C}_n^1 a^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{C}_n^1 a^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{C}_n^2 a^{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{C}_n^2 a^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathrm{C}_n^3 a^{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^n & \mathrm{C}_n^1 a^{n-1} & \mathrm{C}_n^2 a^{n-2} & \mathrm{C}_n^3 a^{n-3} \\ 0 & a^n & \mathrm{C}_n^1 a^{n-1} & \mathrm{C}_n^2 a^{n-2} \\ 0 & 0 & a^n & \mathrm{C}_n^1 a^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Outline

1. 高斯消元法
2. 矩阵的加法 数量乘法 乘法
3. 矩阵的转置 对称矩阵
4. 可逆矩阵的逆矩阵
5. 矩阵的初等变换和初等矩阵
6. 分块矩阵
7. 习题解答

定义 3.1 (转置矩阵)

设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

将 $\boldsymbol{A}$ 的行和列对应互换得到的 $n\times m$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的**转置矩阵** (Transpose), 记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

矩阵转置运算满足下列运算法则:

1. $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$;

矩阵转置运算满足下列运算法则:

1. $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$;
2. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;

矩阵转置运算满足下列运算法则:

1. $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$;
2. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;
3. $(\lambda \boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\lambda(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$, λ 是数;

矩阵转置运算满足下列运算法则:

1. $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$;
2. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;
3. $(\lambda\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\lambda(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$, λ 是数;
4. $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

矩阵转置运算满足下列运算法则:

1. $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$;
2. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;
3. $(\lambda \boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\lambda(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$, λ 是数;
4. $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

☞ $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}$.

定义 3.2

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵.

1. 若

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A},$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 是**对称矩阵**.

定义 3.2

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵.

1. 若
$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A},$$
则称 $\boldsymbol{A}$ 是**对称矩阵**.

2. 若
$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{A},$$
则称 $\boldsymbol{A}$ 是**反对称矩阵**.

定义 3.2

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵.

1. 若
$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A},$$
则称 $\boldsymbol{A}$ 是**对称矩阵**.

2. 若
$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{A},$$
则称 $\boldsymbol{A}$ 是**反对称矩阵**.

☞ 反对称矩阵的主对角元素全为 0.

定义 3.2

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵.

1. 若
$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A},$$
则称 $\boldsymbol{A}$ 是**对称矩阵**.
2. 若
$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{A},$$
则称 $\boldsymbol{A}$ 是**反对称矩阵**.

☞ 反对称矩阵的主对角元素全为 0.

例 3.3

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -8 \\ 2 & -8 & 3 \end{pmatrix}$$ 是对称矩阵,

定义 3.2

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵.

1. 若
$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A},$$
则称 $\boldsymbol{A}$ 是**对称矩阵**.
2. 若
$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{A},$$
则称 $\boldsymbol{A}$ 是**反对称矩阵**.

☞ 反对称矩阵的主对角元素全为 0.

例 3.3

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -8 \\ 2 & -8 & 3 \end{pmatrix} \text{是对称矩阵}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -8 \\ -2 & 8 & 0 \end{pmatrix} \text{是反对称矩阵.}$$

Outline

1 高斯消元法

2 矩阵的加法　数量乘法　乘法

3 矩阵的转置　对称矩阵

4 可逆矩阵的逆矩阵

5 矩阵的初等变换和初等矩阵

6 分块矩阵

7 习题解答

矩阵有没有除法?

矩阵有加法、减法、乘法, 矩阵有没有除法呢?

矩阵有没有除法?

矩阵有加法、减法、乘法, 矩阵有没有除法呢?
如果类似实数定义矩阵的除法, 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}, \qquad \boldsymbol{X}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$$

的解都是

$$\boldsymbol{X} = \frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{A}}.$$

矩阵有没有除法?

矩阵有加法、减法、乘法, 矩阵有没有除法呢?

如果类似实数定义矩阵的除法, 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B},\qquad \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$$

的解都是

$$\boldsymbol{X}=\frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{A}}.$$

而事实上, 以后我们会看到, 这两个方程的解一般不相同.

矩阵有没有除法?

矩阵有加法、减法、乘法, 矩阵有没有除法呢?

如果类似实数定义矩阵的除法, 则

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}, \qquad \boldsymbol{XA} = \boldsymbol{B}$$

的解都是

$$\boldsymbol{X} = \frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{A}}.$$

而事实上, 以后我们会看到, 这两个方程的解一般不相同. $\boldsymbol{A}$ 可逆时, 两个方程的解分别是

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}, \qquad \boldsymbol{X} = \boldsymbol{BA}^{-1}.$$

矩阵有没有除法?

矩阵有加法、减法、乘法, 矩阵有没有除法呢?
如果类似实数定义矩阵的除法, 则

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}, \qquad \boldsymbol{XA} = \boldsymbol{B}$$

的解都是

$$\boldsymbol{X} = \frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{A}}.$$

而事实上, 以后我们会看到, 这两个方程的解一般不相同. $\boldsymbol{A}$ 可逆时, 两个方程的解分别是

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}, \qquad \boldsymbol{X} = \boldsymbol{BA}^{-1}.$$

而矩阵乘法不满足交换律, 一般 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{BA}^{-1}$.

矩阵有没有除法?

矩阵有加法、减法、乘法, 矩阵有没有除法呢?
如果类似实数定义矩阵的除法, 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}, \qquad \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$$

的解都是

$$\boldsymbol{X}=\frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{A}}.$$

而事实上, 以后我们会看到, 这两个方程的解一般不相同. $\boldsymbol{A}$ 可逆时, 两个方程的解分别是

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}, \qquad \boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

而矩阵乘法不满足交换律, 一般 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}$.

☞ 一句话: 矩阵没有除法. 根本原因是因为矩阵乘法不满足交换律.

矩阵有没有除法?

矩阵有加法、减法、乘法, 矩阵有没有除法呢?
如果类似实数定义矩阵的除法, 则

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}, \qquad \boldsymbol{XA} = \boldsymbol{B}$$

的解都是

$$\boldsymbol{X} = \frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{A}}.$$

而事实上, 以后我们会看到, 这两个方程的解一般不相同. $\boldsymbol{A}$ 可逆时, 两个方程的解分别是

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}, \qquad \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

而矩阵乘法不满足交换律, 一般 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}$.

☞ 一句话: 矩阵没有除法. 根本原因是因为矩阵乘法不满足交换律.
通过逆矩阵, 完成了乘法的逆运算, 实现了除法的功能.

定义 4.1

对于矩阵 $\boldsymbol{A} \in F^{n\times n}$, 如果存在矩阵 $\boldsymbol{B} \in F^{n\times n}$, 使得

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I},$$

定义 4.1

对于矩阵 $\boldsymbol{A} \in F^{n\times n}$, 如果存在矩阵 $\boldsymbol{B} \in F^{n\times n}$, 使得

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I},$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为**可逆矩阵** (invertible matrix), 简称 $\boldsymbol{A}$ **可逆**, 并称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的**逆矩阵** (inverse), 记作 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 即 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}$.

定义 4.1

对于矩阵 $\boldsymbol{A} \in F^{n\times n}$, 如果存在矩阵 $\boldsymbol{B} \in F^{n\times n}$, 使得

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I},$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为**可逆矩阵** (invertible matrix), 简称 $\boldsymbol{A}$ **可逆**, 并称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的**逆矩阵** (inverse), 记作 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 即 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}$.

此时, $\boldsymbol{A}$ 也是 $\boldsymbol{B}$ 的逆矩阵,

定义 4.1

对于矩阵 $\boldsymbol{A} \in F^{n\times n}$, 如果存在矩阵 $\boldsymbol{B} \in F^{n\times n}$, 使得

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I},$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为**可逆矩阵** (invertible matrix), 简称 $\boldsymbol{A}$ **可逆**, 并称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的**逆矩阵** (inverse), 记作 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 即 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}$.

此时, $\boldsymbol{A}$ 也是 $\boldsymbol{B}$ 的逆矩阵, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 互为逆矩阵;

定义 4.1

对于矩阵 $\boldsymbol{A} \in F^{n\times n}$, 如果存在矩阵 $\boldsymbol{B} \in F^{n\times n}$, 使得

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I},$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为**可逆矩阵** (invertible matrix), 简称 $\boldsymbol{A}$ **可逆**, 并称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的**逆矩阵** (inverse), 记作 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 即 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}$.

此时, $\boldsymbol{A}$ 也是 $\boldsymbol{B}$ 的逆矩阵, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 互为逆矩阵;

这里的 F 泛指实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$ 等.

定义 4.1

对于矩阵 $\boldsymbol{A} \in F^{n\times n}$, 如果存在矩阵 $\boldsymbol{B} \in F^{n\times n}$, 使得

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I},$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为**可逆矩阵** (invertible matrix), 简称 $\boldsymbol{A}$ **可逆**, 并称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的**逆矩阵** (inverse), 记作 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 即 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}$.

此时, $\boldsymbol{A}$ 也是 $\boldsymbol{B}$ 的逆矩阵, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 互为逆矩阵;

这里的 F 泛指实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$ 等. 比如, F 取 $\mathbb{R}$, 则 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实矩阵.

定义 4.1

对于矩阵 $\boldsymbol{A} \in F^{n\times n}$, 如果存在矩阵 $\boldsymbol{B} \in F^{n\times n}$, 使得

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I},$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为**可逆矩阵** (invertible matrix), 简称 $\boldsymbol{A}$ **可逆**, 并称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的**逆矩阵** (inverse), 记作 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 即 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}$.

此时, $\boldsymbol{A}$ 也是 $\boldsymbol{B}$ 的逆矩阵, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 互为逆矩阵;

这里的 F 泛指实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$ 等. 比如, F 取 $\mathbb{R}$, 则 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实矩阵.

- 只有方阵才可能有逆矩阵;

定义 4.1

对于矩阵 $\boldsymbol{A} \in F^{n\times n}$, 如果存在矩阵 $\boldsymbol{B} \in F^{n\times n}$, 使得

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I},$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为**可逆矩阵** (invertible matrix), 简称 $\boldsymbol{A}$ **可逆**, 并称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的**逆矩阵** (inverse), 记作 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 即 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}$.

此时, $\boldsymbol{A}$ 也是 $\boldsymbol{B}$ 的逆矩阵, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 互为逆矩阵;

这里的 F 泛指实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$ 等. 比如, F 取 $\mathbb{R}$, 则 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实矩阵.

- 只有方阵才可能有逆矩阵; 不是方阵, 肯定不可逆.

定义 4.1

对于矩阵 $\boldsymbol{A} \in F^{n\times n}$, 如果存在矩阵 $\boldsymbol{B} \in F^{n\times n}$, 使得

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I},$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为**可逆矩阵** (invertible matrix), 简称 $\boldsymbol{A}$ **可逆**, 并称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的**逆矩阵** (inverse), 记作 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 即 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}$.

此时, $\boldsymbol{A}$ 也是 $\boldsymbol{B}$ 的逆矩阵, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 互为逆矩阵;

这里的 F 泛指实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$ 等. 比如, F 取 $\mathbb{R}$, 则 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实矩阵.

- 只有方阵才可能有逆矩阵; 不是方阵, 肯定不可逆.
- 记号 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是一个特定的记号, 不要错写为 $\dfrac{1}{\boldsymbol{A}}$.

定义 4.1

对于矩阵 $\boldsymbol{A}\in F^{n\times n}$, 如果存在矩阵 $\boldsymbol{B}\in F^{n\times n}$, 使得

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I},$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为**可逆矩阵** (invertible matrix), 简称 $\boldsymbol{A}$ **可逆**, 并称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的**逆矩阵** (inverse), 记作 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 即 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$.

此时, $\boldsymbol{A}$ 也是 $\boldsymbol{B}$ 的逆矩阵, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 互为逆矩阵;

这里的 F 泛指实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$ 等. 比如, F 取 $\mathbb{R}$, 则 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实矩阵.

- 只有方阵才可能有逆矩阵; 不是方阵, 肯定不可逆.
- 记号 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是一个特定的记号, 不要错写为 $\dfrac{1}{\boldsymbol{A}}$.
- 在本课程中 $\dfrac{1}{\boldsymbol{A}}$, $\dfrac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{A}}$ 是错误的表达, 不具备任何含义.

定理 4.2

逆矩阵存在则唯一.

定理 4.2

逆矩阵存在则唯一.

证: 设 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵,

定理 4.2

逆矩阵存在则唯一.

证: 设 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵, 则

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}, \qquad \boldsymbol{AC} = \boldsymbol{CA} = \boldsymbol{I},$$

定理 4.2

逆矩阵存在则唯一.

证: 设 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵, 则

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}, \qquad \boldsymbol{AC} = \boldsymbol{CA} = \boldsymbol{I},$$

可得

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{IB}$$

定理 4.2

逆矩阵存在则唯一.

证: 设 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵, 则

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}, \qquad \boldsymbol{AC} = \boldsymbol{CA} = \boldsymbol{I},$$

可得

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{IB} = \left(\boldsymbol{CA}\right)\boldsymbol{B}$$

定理 4.2

逆矩阵存在则唯一.

证: 设 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵, 则

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}, \qquad \boldsymbol{AC} = \boldsymbol{CA} = \boldsymbol{I},$$

可得

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{IB} = \left(\boldsymbol{CA}\right)\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{AB}\right)$$

定理 4.2

逆矩阵存在则唯一.

证: 设 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵, 则

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}, \qquad \boldsymbol{AC} = \boldsymbol{CA} = \boldsymbol{I},$$

可得

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{IB} = \big(\boldsymbol{CA}\big)\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}\big(\boldsymbol{AB}\big) = \boldsymbol{CI}$$

定理 4.2

逆矩阵存在则唯一.

证: 设 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵, 则

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}, \qquad \boldsymbol{AC} = \boldsymbol{CA} = \boldsymbol{I},$$

可得

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{IB} = \big(\boldsymbol{CA}\big)\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}\big(\boldsymbol{AB}\big) = \boldsymbol{CI} = \boldsymbol{C}.$$

定理 4.2

逆矩阵存在则唯一.

证: 设 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵, 则

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}, \qquad \boldsymbol{AC} = \boldsymbol{CA} = \boldsymbol{I},$$

可得

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{IB} = (\boldsymbol{CA})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{AB}) = \boldsymbol{CI} = \boldsymbol{C}.$$

故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵是唯一的. □

伴随矩阵

定义 4.3

设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, 由行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的代数余子式 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 所构成的矩阵

$$\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{21} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n1} \\ \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{1n} & \boldsymbol{A}_{2n} & \cdots & \boldsymbol{A}_{nn} \end{pmatrix},$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**伴随矩阵**.

伴随矩阵

定义 4.3

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$, 由行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的代数余子式 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 所构成的矩阵

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{21} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n1} \\ \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{1n} & \boldsymbol{A}_{2n} & \cdots & \boldsymbol{A}_{nn} \end{pmatrix},$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**伴随矩阵**.

伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 在位置 (i,j) 上的元素是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在位置 (j,i) 上的代数余子式.

例如, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵是 $\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$.

例如, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵是 $\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

☞ 伴随矩阵为什么这样定义?

例如, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵是 $\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$.

☞ 伴随矩阵为什么这样定义? 是因为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*$ 或 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$ 会得到一个非常漂亮的结果.

定理 4.4

设 $\boldsymbol{A}^*$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}.$$

定理 4.4

设 $\boldsymbol{A}^*$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}.$$

证: 注意到 $a_{i1}\boldsymbol{A}_{j1} + a_{i2}\boldsymbol{A}_{j2} + \cdots + a_{in}\boldsymbol{A}_{jn} = \begin{cases} |\boldsymbol{A}|, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases}$

定理 4.4

设 $\boldsymbol{A}^*$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}.$$

证: 注意到 $a_{i1}\boldsymbol{A}_{j1} + a_{i2}\boldsymbol{A}_{j2} + \cdots + a_{in}\boldsymbol{A}_{jn} = \begin{cases} |\boldsymbol{A}|, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases}$ 所以

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{21} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n1} \\ \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{1n} & \boldsymbol{A}_{2n} & \cdots & \boldsymbol{A}_{nn} \end{pmatrix}$$

定理 4.4

设 $\boldsymbol{A}^*$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}.$$

证: 注意到 $a_{i1}\boldsymbol{A}_{j1} + a_{i2}\boldsymbol{A}_{j2} + \cdots + a_{in}\boldsymbol{A}_{jn} = \begin{cases} |\boldsymbol{A}|, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases}$ 所以

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{21} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n1} \\ \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{1n} & \boldsymbol{A}_{2n} & \cdots & \boldsymbol{A}_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}| & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

定理 4.4

设 $\boldsymbol{A}^*$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}.$$

证: 注意到 $a_{i1}\boldsymbol{A}_{j1} + a_{i2}\boldsymbol{A}_{j2} + \cdots + a_{in}\boldsymbol{A}_{jn} = \begin{cases} |\boldsymbol{A}|, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases}$ 所以

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{21} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n1} \\ \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{1n} & \boldsymbol{A}_{2n} & \cdots & \boldsymbol{A}_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}| & 0 & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

定理 4.4

设 $\boldsymbol{A}^*$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}.$$

证: 注意到 $a_{i1}\boldsymbol{A}_{j1} + a_{i2}\boldsymbol{A}_{j2} + \cdots + a_{in}\boldsymbol{A}_{jn} = \begin{cases} |\boldsymbol{A}|, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases}$ 所以

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{21} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n1} \\ \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{1n} & \boldsymbol{A}_{2n} & \cdots & \boldsymbol{A}_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}| & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

定理 4.4

设 $\boldsymbol{A}^*$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}.$$

证: 注意到 $a_{i1}\boldsymbol{A}_{j1} + a_{i2}\boldsymbol{A}_{j2} + \cdots + a_{in}\boldsymbol{A}_{jn} = \begin{cases} |\boldsymbol{A}|, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases}$ 所以

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{21} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n1} \\ \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{1n} & \boldsymbol{A}_{2n} & \cdots & \boldsymbol{A}_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

定理 4.4

设 $\boldsymbol{A}^*$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}.$$

证: 注意到 $a_{i1}\boldsymbol{A}_{j1} + a_{i2}\boldsymbol{A}_{j2} + \cdots + a_{in}\boldsymbol{A}_{jn} = \begin{cases} |\boldsymbol{A}|, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases}$ 所以

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{21} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n1} \\ \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{1n} & \boldsymbol{A}_{2n} & \cdots & \boldsymbol{A}_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |\boldsymbol{A}| & \cdots & 0 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

定理 4.4

设 $\boldsymbol{A}^*$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}.$$

证: 注意到 $a_{i1}\boldsymbol{A}_{j1} + a_{i2}\boldsymbol{A}_{j2} + \cdots + a_{in}\boldsymbol{A}_{jn} = \begin{cases} |\boldsymbol{A}|, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases}$ 所以

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{21} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n1} \\ \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{1n} & \boldsymbol{A}_{2n} & \cdots & \boldsymbol{A}_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |\boldsymbol{A}| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & \end{pmatrix}$$

定理 4.4

设 $\boldsymbol{A}^*$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}.$$

证: 注意到 $a_{i1}\boldsymbol{A}_{j1} + a_{i2}\boldsymbol{A}_{j2} + \cdots + a_{in}\boldsymbol{A}_{jn} = \begin{cases} |\boldsymbol{A}|, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases}$ 所以

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{21} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n1} \\ \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{1n} & \boldsymbol{A}_{2n} & \cdots & \boldsymbol{A}_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |\boldsymbol{A}| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |\boldsymbol{A}| \end{pmatrix}$$

定理 4.4

设 $\boldsymbol{A}^*$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}.$$

证: 注意到 $a_{i1}\boldsymbol{A}_{j1} + a_{i2}\boldsymbol{A}_{j2} + \cdots + a_{in}\boldsymbol{A}_{jn} = \begin{cases} |\boldsymbol{A}|, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases}$ 所以

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{21} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n1} \\ \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{1n} & \boldsymbol{A}_{2n} & \cdots & \boldsymbol{A}_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |\boldsymbol{A}| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |\boldsymbol{A}| \end{pmatrix} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}.$$

定理 4.4

设 $\boldsymbol{A}^*$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}.$$

证: 注意到 $a_{i1}\boldsymbol{A}_{j1} + a_{i2}\boldsymbol{A}_{j2} + \cdots + a_{in}\boldsymbol{A}_{jn} = \begin{cases} |\boldsymbol{A}|, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases}$ 所以

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{21} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n1} \\ \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{1n} & \boldsymbol{A}_{2n} & \cdots & \boldsymbol{A}_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |\boldsymbol{A}| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |\boldsymbol{A}| \end{pmatrix} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}.$$

同理得 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$. □

伴随矩阵的贡献：从理论上给出了求逆矩阵的方法.

伴随矩阵的贡献: 从理论上给出了求逆矩阵的方法.

☞ 这一点和克拉默法则相似: 理论意义重大, 但实际计算中并不使用.

伴随矩阵的贡献: 从理论上给出了求逆矩阵的方法.

☞ 这一点和克拉默法则相似: 理论意义重大, 但实际计算中并不使用.

定理 4.5

1. 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$;

伴随矩阵的贡献: 从理论上给出了求逆矩阵的方法.

☞ 这一点和克拉默法则相似: 理论意义重大, 但实际计算中并不使用.

定理 4.5

1. 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$;
2. 若 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 且

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*.$$

伴随矩阵的贡献: 从理论上给出了求逆矩阵的方法.

☞ 这一点和克拉默法则相似: 理论意义重大, 但实际计算中并不使用.

定理 4.5

1. 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$;
2. 若 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 且

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*.$$

☞ 以下命题等价:

1. $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵.
2. $|\boldsymbol{A}| \neq 0$.
3. $\boldsymbol{A}$ 可逆.

证: (1) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,

证: (1) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则存在矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I},$$

证: (1) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则存在矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I},$$

故

$$|\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{AB}|$$

证: (1) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则存在矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I},$$

故

$$|\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{I}|$$

证: (1) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则存在矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I},$$

故

$$|\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{I}| = 1,$$

证: (1) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则存在矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I},$$

故

$$|\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{I}| = 1,$$

所以 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$.

证: (1) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则存在矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I},$$

故

$$|\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{I}| = 1,$$

所以 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$.

(2) 若 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$,

证: (1) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则存在矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I},$$

故

$$|\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{I}| = 1,$$

所以 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$.

(2) 若 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 由 $\boldsymbol{AA}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$,

证: (1) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则存在矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I},$$

故

$$|\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{I}| = 1,$$

所以 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$.

(2) 若 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 由 $\boldsymbol{AA}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$, 得

$$\boldsymbol{A}\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^* = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I},$$

证: (1) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则存在矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I},$$

故

$$|\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{I}| = 1,$$

所以 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$.

(2) 若 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 由 $\boldsymbol{AA}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$, 得

$$\boldsymbol{A}\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^* = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I},$$

由逆矩阵定义, 即知 $\boldsymbol{A}$ 可逆,

证: (1) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则存在矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I},$$

故

$$|\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{I}| = 1,$$

所以 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$.

(2) 若 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 由 $\boldsymbol{AA}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$, 得

$$\boldsymbol{A}\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^* = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I},$$

由逆矩阵定义, 即知 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 且

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*. \tag{6}$$

例 4.6

求二阶矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

例 4.6

求二阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解: 因为

$$\boldsymbol{A}_{11}=(-1)^{1+1}d=d,$$

例 4.6

求二阶矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解: 因为

$$\boldsymbol{A}_{11} = (-1)^{1+1} d = d, \qquad \boldsymbol{A}_{12} = (-1)^{1+2} c = -c,$$

例 4.6

求二阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解: 因为

$$\boldsymbol{A}_{11}=(-1)^{1+1}d=d, \qquad \boldsymbol{A}_{12}=(-1)^{1+2}c=-c,$$

$$\boldsymbol{A}_{21}=(-1)^{2+1}b=-b,$$

例 4.6

求二阶矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解: 因为

$$\boldsymbol{A}_{11} = (-1)^{1+1} d = d, \qquad \boldsymbol{A}_{12} = (-1)^{1+2} c = -c,$$

$$\boldsymbol{A}_{21} = (-1)^{2+1} b = -b, \qquad \boldsymbol{A}_{22} = (-1)^{2+2} a = a.$$

例 4.6

求二阶矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解: 因为

$$\boldsymbol{A}_{11} = (-1)^{1+1} d = d, \qquad \boldsymbol{A}_{12} = (-1)^{1+2} c = -c,$$

$$\boldsymbol{A}_{21} = (-1)^{2+1} b = -b, \qquad \boldsymbol{A}_{22} = (-1)^{2+2} a = a.$$

故

$$\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{21} \\ \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

例 4.6

求二阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解: 因为

$$\boldsymbol{A}_{11}=(-1)^{1+1}d=d, \qquad \boldsymbol{A}_{12}=(-1)^{1+2}c=-c,$$
$$\boldsymbol{A}_{21}=(-1)^{2+1}b=-b, \qquad \boldsymbol{A}_{22}=(-1)^{2+2}a=a.$$

故

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{21} \\ \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

所以当 $|\boldsymbol{A}|=ad-bc\neq 0$ 时,

例 4.6

求二阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解: 因为

$$\boldsymbol{A}_{11}=(-1)^{1+1}d=d, \qquad \boldsymbol{A}_{12}=(-1)^{1+2}c=-c,$$
$$\boldsymbol{A}_{21}=(-1)^{2+1}b=-b, \qquad \boldsymbol{A}_{22}=(-1)^{2+2}a=a.$$

故

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{21} \\ \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

所以当 $|\boldsymbol{A}|=ad-bc\neq 0$ 时, 有

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

例 4.6

求二阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解: 因为

$$\boldsymbol{A}_{11}=(-1)^{1+1}d=d, \qquad \boldsymbol{A}_{12}=(-1)^{1+2}c=-c,$$
$$\boldsymbol{A}_{21}=(-1)^{2+1}b=-b, \qquad \boldsymbol{A}_{22}=(-1)^{2+2}a=a.$$

故

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{21} \\ \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

所以当 $|\boldsymbol{A}|=ad-bc\neq 0$ 时, 有

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

☞ 请记住这个公式.

例 4.7

矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ 是否可逆? 若可逆, 求其逆矩阵.

例 4.7

矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ 是否可逆? 若可逆, 求其逆矩阵.

解: 因 $|\boldsymbol{A}| = 2$,

例 4.7

矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ 是否可逆? 若可逆, 求其逆矩阵.

解: 因 $|\boldsymbol{A}| = 2$, 故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在.

例 4.7

矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 4 & -2\\ 5 & -4 & 1\end{pmatrix}$ 是否可逆? 若可逆, 求其逆矩阵.

解: 因 $|\boldsymbol{A}|=2$, 故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在. 又

$$\begin{aligned}
&A_{11}=-4, && A_{21}=2, && A_{31}=0,\\
&A_{12}=-13, && A_{22}=6, && A_{32}=-1,\\
&A_{13}=-32, && A_{23}=14, && A_{33}=-2.
\end{aligned}$$

例 4.7

矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 4 & -2\\ 5 & -4 & 1\end{pmatrix}$ 是否可逆? 若可逆, 求其逆矩阵.

解: 因 $|\boldsymbol{A}|=2$, 故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在. 又

$$
\begin{aligned}
A_{11}&=-4, & A_{21}&=2, & A_{31}&=0,\\
A_{12}&=-13, & A_{22}&=6, & A_{32}&=-1,\\
A_{13}&=-32, & A_{23}&=14, & A_{33}&=-2.
\end{aligned}
$$

故

$$
\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -\frac{13}{2} & 3 & -\frac{1}{2}\\ -16 & 7 & -1\end{pmatrix}.
$$

公式

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

从理论上给出了求 A^{-1} 的方法, 但因计算量较大, 实际计算中并不使用此方法.

公式

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}$$

从理论上给出了求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的方法, 但因计算量较大, 实际计算中并不使用此方法. 下一节将给出一种简单实用的方法: 用矩阵的初等变换, 求逆矩阵.

公式

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$$

从理论上给出了求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的方法, 但因计算量较大, 实际计算中并不使用此方法. 下一节将给出一种简单实用的方法: 用矩阵的初等变换, 求逆矩阵.

☞ 但因为伴随矩阵的理论重要性, 关于伴随矩阵的全部内容要非常清楚.

推论 4.8

若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$ (或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$), 则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$.

推论 4.8

若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$ (或 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$), 则 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}$.

证: $|\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{AB}|$

推论 4.8

若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$ (或 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$), 则 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}$.

证: $|\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{I}| = 1$,

推论 4.8

若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$ (或 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$), 则 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}$.

证: $|\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{I}| = 1$, 则 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$,

推论 4.8

若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$ (或 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$), 则 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}$.

证: $|\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{I}| = 1$, 则 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在.

推论 4.8

若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$ (或 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$), 则 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}$.

证: $|\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{I}| = 1$, 则 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在. 且

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{IB}$$

推论 4.8

若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$ (或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$), 则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$.

证: $|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{I}|=1$, 则 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$, 故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在. 且

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{IB}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{B}$$

推论 4.8

若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$ (或 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$), 则 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}$.

证: $|\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{I}| = 1$, 则 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在. 且

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{IB} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}\left(\boldsymbol{AB}\right)$$

推论 4.8

若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$ (或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$), 则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$.

证: $|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{I}|=1$, 则 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$, 故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在. 且

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{IB}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}\left(\boldsymbol{AB}\right)=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{I}$$

推论 4.8

若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$ (或 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$), 则 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}$.

证: $|\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{I}| = 1$, 则 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在. 且

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{IB} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}\left(\boldsymbol{AB}\right) = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}^{-1}.$$

推论 4.8

若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$ (或 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$), 则 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}$.

证: $|\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{I}| = 1$, 则 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在. 且

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{IB} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}\left(\boldsymbol{AB}\right) = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}^{-1}.$$

☞ 逆矩阵定义中的条件可以降弱.

推论 4.8

若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$ (或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$), 则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$.

证: $|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{I}|=1$, 则 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$, 故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在. 且

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{IB}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{I}=\boldsymbol{A}^{-1}.$$

☞ 逆矩阵定义中的条件可以降弱. 即条件

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$$

可以减弱为

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}, \qquad \text{或} \qquad \boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}.$$

推论 4.8

若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$ (或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$), 则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$.

证: $|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{I}|=1$, 则 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$, 故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在. 且

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{IB}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}\left(\boldsymbol{AB}\right)=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{I}=\boldsymbol{A}^{-1}.$$

☞ 逆矩阵定义中的条件可以降弱. 即条件

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$$

可以减弱为

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I},\qquad \text{或} \qquad \boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}.$$

当然, 这里的 $\boldsymbol{B}$ 必须是方阵.

例 4.9

设 $\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$, 求其逆矩阵.

例 4.9

设 $\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$, 求其逆矩阵.

解: $|\mathbf{\Lambda}| = a_1 a_2 \cdots a_n$,

例 4.9

设 $\mathbf{\Lambda}=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$, 求其逆矩阵.

解: $|\mathbf{\Lambda}|=a_1a_2\cdots a_n$, 故当 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$ 时, 矩阵 $\mathbf{\Lambda}$ 可逆.

例 4.9

设 $\mathbf{\Lambda}=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$, 求其逆矩阵.

解: $|\mathbf{\Lambda}|=a_1a_2\cdots a_n$, 故当 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$ 时, 矩阵 $\mathbf{\Lambda}$ 可逆.

由

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

故当 $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$ 时,

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}.$$

可逆矩阵满足以下运算规律 (下设同阶方阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都可逆, 数 $k \neq 0$):

1. $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1} = \boldsymbol{A}$;

可逆矩阵满足以下运算规律 (下设同阶方阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都可逆, 数 $k \neq 0$):

1. $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1} = \boldsymbol{A}$;
2. $(k\boldsymbol{A})^{-1} = k^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$;

可逆矩阵满足以下运算规律 (下设同阶方阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都可逆, 数 $k \neq 0$):

1. $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1} = \boldsymbol{A}$;
2. $(k\boldsymbol{A})^{-1} = k^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$;
3. $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$;

可逆矩阵满足以下运算规律 (下设同阶方阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都可逆, 数 $k \neq 0$):

1. $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1} = \boldsymbol{A}$;
2. $(k\boldsymbol{A})^{-1} = k^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$;
3. $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$;
4. $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$;

可逆矩阵满足以下运算规律 (下设同阶方阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都可逆, 数 $k \neq 0$):

1. $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1} = \boldsymbol{A}$;
2. $(k\boldsymbol{A})^{-1} = k^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$;
3. $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$;
4. $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$;
5. $|\boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{A}|^{-1}$.

可逆矩阵满足以下运算规律 (下设同阶方阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都可逆, 数 $k \neq 0$):

1. $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1} = \boldsymbol{A}$;
2. $(k\boldsymbol{A})^{-1} = k^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$;
3. $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$;
4. $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$;
5. $|\boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{A}|^{-1}$.

分析: 寻找 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵, 需验证

$$\boldsymbol{A}(\cdots) = \boldsymbol{I}, \quad \text{或} \quad (\cdots)\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}.$$

可逆矩阵满足以下运算规律 (下设同阶方阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都可逆, 数 $k \neq 0$):

1. $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1} = \boldsymbol{A}$;
2. $(k\boldsymbol{A})^{-1} = k^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$;
3. $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$;
4. $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$;
5. $|\boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{A}|^{-1}$.

分析: 寻找 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵, 需验证

$$\boldsymbol{A}(\cdots) = \boldsymbol{I}, \quad \text{或} \quad (\cdots)\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}.$$

例如要找到 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的逆矩阵, 需验证 $\boldsymbol{A}^{-1}(\cdots) = \boldsymbol{I}$,

可逆矩阵满足以下运算规律 (下设同阶方阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都可逆, 数 $k \neq 0$):

1. $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1} = \boldsymbol{A}$;
2. $(k\boldsymbol{A})^{-1} = k^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$;
3. $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$;
4. $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$;
5. $|\boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{A}|^{-1}$.

分析: 寻找 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵, 需验证

$$\boldsymbol{A}(\cdots) = \boldsymbol{I}, \quad \text{或} \quad (\cdots)\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}.$$

例如要找到 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的逆矩阵, 需验证 $\boldsymbol{A}^{-1}(\cdots) = \boldsymbol{I}$, 则

$$\boldsymbol{A}^{-1}(\underbrace{\quad\cdots\quad}_{\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}}) = \boldsymbol{I}.$$

证: (1) 因

$$A^{-1}(\quad) = I,$$

证: (1) 因

$$A^{-1}(A) = I,$$

证: (1) 因

$$A^{-1}(A) = I,$$

故 $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

证: (1) 因

$$A^{-1}(A) = I,$$

故 $(A^{-1})^{-1} = A$.

(2) $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$ 成立,

证: (1) 因

$$A^{-1}(A) = I,$$

故 $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

(2) $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$ 成立, 是因为

$$kA\left(k^{-1}A^{-1}\right)$$

证: (1) 因

$$A^{-1}(A) = I,$$

故 $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

(2) $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$ 成立, 是因为

$$kA\left(k^{-1}A^{-1}\right) = kk^{-1}\left(AA^{-1}\right) = I.$$

证: (1) 因

$$\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{I},$$

故 $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1} = \boldsymbol{A}$.

(2) $(k\boldsymbol{A})^{-1} = k^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$ 成立, 是因为

$$k\boldsymbol{A}\left(k^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\right) = kk^{-1}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\right) = \boldsymbol{I}.$$

(3) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$, 是因为

证: (1) 因

$$A^{-1}(A) = I,$$

故 $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

(2) $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$ 成立, 是因为

$$kA\left(k^{-1}A^{-1}\right) = kk^{-1}\left(AA^{-1}\right) = I.$$

(3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, 是因为

$$AB\left(B^{-1}A^{-1}\right)$$

证: (1) 因

$$A^{-1}(A) = I,$$

故 $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

(2) $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$ 成立, 是因为

$$kA\left(k^{-1}A^{-1}\right) = kk^{-1}\left(AA^{-1}\right) = I.$$

(3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, 是因为

$$AB\left(B^{-1}A^{-1}\right) = A\left(BB^{-1}\right)A^{-1}$$

证: (1) 因

$$A^{-1}\left(A\right)=I,$$

故 $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$.

(2) $(kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1}$ 成立, 是因为

$$kA\left(k^{-1}A^{-1}\right)=kk^{-1}\left(AA^{-1}\right)=I.$$

(3) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$, 是因为

$$AB\left(B^{-1}A^{-1}\right)=A\left(BB^{-1}\right)A^{-1}=AIA^{-1}=I.$$

证: (1) 因

$$A^{-1}(A) = I,$$

故 $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

(2) $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$ 成立, 是因为

$$kA\left(k^{-1}A^{-1}\right) = kk^{-1}\left(AA^{-1}\right) = I.$$

(3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, 是因为

$$AB\left(B^{-1}A^{-1}\right) = A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = AIA^{-1} = I.$$

☞ 推广:

$$\left(A_1A_2\cdots A_k\right)^{-1} = A_k^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}.$$

(4) $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$,

(4) $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$, 是因为

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$$

(4) $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$, 是因为

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\right)^{\mathrm{T}}$$

(4) $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$, 是因为

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}$$

(4) $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$, 是因为

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}.$$

(4) $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$, 是因为

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}.$$

(5) 要证明 $|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$,

(4) $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$, 是因为

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}.$$

(5) 要证明 $|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$, 只需验证

$$|\boldsymbol{A}^{-1}|\cdot|\boldsymbol{A}|=1. \tag{7}$$

(4) $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$, 是因为

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}.$$

(5) 要证明 $|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$, 只需验证

$$|\boldsymbol{A}^{-1}|\cdot|\boldsymbol{A}|=1. \tag{7}$$

因为 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$,

(4) $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$, 是因为

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}.$$

(5) 要证明 $|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$, 只需验证

$$|\boldsymbol{A}^{-1}|\cdot|\boldsymbol{A}|=1. \tag{7}$$

因为 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$, 所以 $|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{-1}|\cdot|\boldsymbol{A}|=1$.

之前我们谈到:

- 当 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC}$, 且 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$ 时, 不能得到 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$.

之前我们谈到:

- 当 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC}$, 且 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$ 时, 不能得到 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$.
- 当 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ 时,
  (i) $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0} \Longrightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$;
  (ii) $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC} \Longrightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$.

之前我们谈到:

- 当 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC}$, 且 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$ 时, 不能得到 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$.
- 当 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ 时,
  (i) $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0} \Longrightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$;
  (ii) $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC} \Longrightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$.

现在给出其证明.

之前我们谈到:

- 当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$, 且 $\boldsymbol{A}\neq\mathbf{0}$ 时, 不能得到 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.
- 当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时,
  (i) $\boldsymbol{AB}=\mathbf{0}\Longrightarrow\boldsymbol{B}=\mathbf{0}$;
  (ii) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}\Longrightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

现在给出其证明.

$|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 即 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

之前我们谈到:

- 当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$, 且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$ 时, 不能得到 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.
- 当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时,
  (i) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}\Longrightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$;
  (ii) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}\Longrightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

现在给出其证明.

$|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 即 $\boldsymbol{A}$ 可逆. 在 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 两边左乘以 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 得

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{0},$$

之前我们谈到:

- 当 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$, 且 $\boldsymbol{A}\neq\mathbf{0}$ 时, 不能得到 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.
- 当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时,
  (i) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\mathbf{0}\Longrightarrow\boldsymbol{B}=\mathbf{0}$;
  (ii) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\Longrightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

现在给出其证明.

$|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 即 $\boldsymbol{A}$ 可逆. 在 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\mathbf{0}$ 两边左乘以 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 得

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}\mathbf{0},$$

即

$$\boldsymbol{B}=\mathbf{0}.$$

之前我们谈到:

- 当 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC}$, 且 $\boldsymbol{A} \neq \mathbf{0}$ 时, 不能得到 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$.
- 当 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ 时,
  (i) $\boldsymbol{AB} = \mathbf{0} \Longrightarrow \boldsymbol{B} = \mathbf{0}$;
  (ii) $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC} \Longrightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$.

现在给出其证明.

$|\boldsymbol{A}| \neq 0$ 即 $\boldsymbol{A}$ 可逆. 在 $\boldsymbol{AB} = \mathbf{0}$ 两边左乘以 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 得

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}^{-1}\mathbf{0},$$

即

$$\boldsymbol{B} = \mathbf{0}.$$

同理, 在 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC}$ 两边左乘以 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 得

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}.$$

Outline

1. 高斯消元法
2. 矩阵的加法　数量乘法　乘法
3. 矩阵的转置　对称矩阵
4. 可逆矩阵的逆矩阵
5. 矩阵的初等变换和初等矩阵
6. 分块矩阵
7. 习题解答

初等变换与初等矩阵

定义 5.1

下面三种对矩阵的变换, 统称为矩阵的初等变换:

1. **倍乘变换**: 用任意数 $\alpha \neq 0$ 乘以矩阵的第 i 行 (列);

初等变换与初等矩阵

定义 5.1

下面三种对矩阵的变换, 统称为矩阵的初等变换:

1. **倍乘变换**: 用任意数 $\alpha \neq 0$ 乘以矩阵的第 i 行 (列); 记作 $r_i \times \alpha$ ($c_i \times \alpha$)

定义 5.1

下面三种对矩阵的变换, 统称为矩阵的初等变换:

1. **倍乘变换**: 用任意数 $\alpha \neq 0$ 乘以矩阵的第 i 行 (列); 记作 $r_i \times \alpha$ ($c_i \times \alpha$)
2. **倍加变换**: 把矩阵的第 j 行 (列) 的 μ 倍加到第 i 行 (列);

定义 5.1

下面三种对矩阵的变换, 统称为矩阵的初等变换:

1. **倍乘变换**: 用任意数 $\alpha \neq 0$ 乘以矩阵的第 i 行 (列); 记作 $r_i \times \alpha$ ($c_i \times \alpha$)
2. **倍加变换**: 把矩阵的第 j 行 (列) 的 μ 倍加到第 i 行 (列); 记作 $r_i + \mu r_j$ $(c_i + \mu c_j)$.

初等变换与初等矩阵

定义 5.1

下面三种对矩阵的变换, 统称为矩阵的初等变换:

1. **倍乘变换**: 用任意数 $\alpha \neq 0$ 乘以矩阵的第 i 行 (列); 记作 $r_i \times \alpha$ ($c_i \times \alpha$)
2. **倍加变换**: 把矩阵的第 j 行 (列) 的 μ 倍加到第 i 行 (列); 记作 $r_i + \mu r_j$ ($c_i + \mu c_j$).
3. **对换变换**: 互换矩阵的 i, j 两行 (列);

定义 5.1

下面三种对矩阵的变换, 统称为矩阵的初等变换:

1. **倍乘变换**: 用任意数 $\alpha \neq 0$ 乘以矩阵的第 i 行 (列); 记作 $r_i \times \alpha$ ($c_i \times \alpha$)
2. **倍加变换**: 把矩阵的第 j 行 (列) 的 μ 倍加到第 i 行 (列); 记作 $r_i + \mu r_j$ ($c_i + \mu c_j$).
3. **对换变换**: 互换矩阵的 i, j 两行 (列); 记作 $r_i \leftrightarrow r_j$ ($c_i \leftrightarrow c_j$).

初等变换与初等矩阵

定义 5.1

下面三种对矩阵的变换, 统称为矩阵的初等变换:

1. **倍乘变换**: 用任意数 $\alpha \neq 0$ 乘以矩阵的第 i 行 (列); 记作 $r_i \times \alpha$ ($c_i \times \alpha$)
2. **倍加变换**: 把矩阵的第 j 行 (列) 的 μ 倍加到第 i 行 (列); 记作 $r_i + \mu r_j$ ($c_i + \mu c_j$).
3. **对换变换**: 互换矩阵的 i, j 两行 (列); 记作 $r_i \leftrightarrow r_j$ ($c_i \leftrightarrow c_j$).

☞ 高斯消元法的过程体现为对增广矩阵做初等行变换.

初等变换矩阵

定义 5.2

将单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 进行一次初等变换所得的矩阵, 统称为初等矩阵:

(1) **初等倍乘矩阵**. 用任意数 $c \neq 0$ 乘以矩阵 $\boldsymbol{I}$ 的第 i 行, 得到的矩阵, 记为 $\boldsymbol{E}_i(c)$,

初等变换矩阵

定义 5.2

将单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 进行一次初等变换所得的矩阵, 统称为初等矩阵:

(1) **初等倍乘矩阵**. 用任意数 $c \neq 0$ 乘以矩阵 $\boldsymbol{I}$ 的第 i 行, 得到的矩阵, 记为 $\boldsymbol{E}_i(c)$, 即

$$\boldsymbol{E}_i(c) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & c & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \longleftarrow \text{第 } i \text{ 行} \tag{8}$$

初等变换矩阵

定义 5.2

将单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 进行一次初等变换所得的矩阵, 统称为初等矩阵:

(1) **初等倍乘矩阵**. 用任意数 $c \neq 0$ 乘以矩阵 $\boldsymbol{I}$ 的第 i 行, 得到的矩阵, 记为 $\boldsymbol{E}_i(c)$, 即

$$\boldsymbol{E}_i(c) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & c & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \longleftarrow 第\ i\ 行 \tag{8}$$

☞ $\boldsymbol{E}_i(c)$ 也可以由列变换 $c_i \times c$ 得来.

(2) **初等倍加矩阵**. 把矩阵 $\boldsymbol{I}$ 的第 i 行的 c 倍加到第 j 行, 得到的矩阵, 记为 $\boldsymbol{E}_{ij}(c)$,

(2) **初等倍加矩阵**. 把矩阵 $\boldsymbol{I}$ 的第 i 行的 c 倍加到第 j 行, 得到的矩阵, 记为 $\boldsymbol{E}_{ij}(c)$, 即

$$\boldsymbol{E}_{ij}(c) = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & \vdots & \ddots & & & \\ & & c & \cdots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \tag{9}$$

(2) **初等倍加矩阵**. 把矩阵 $\boldsymbol{I}$ 的第 i 行的 c 倍加到第 j 行, 得到的矩阵, 记为 $\boldsymbol{E}_{ij}(c)$, 即

$$\boldsymbol{E}_{ij}(c) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & \vdots & \ddots & & & \\ & & c & \cdots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \tag{9}$$

☞ $\boldsymbol{E}_{ij}(c)$ 也可以视为由列变换 $c_i + c \cdot c_j$ 得来.

(3) **初等对换矩阵**. 互换矩阵 $\boldsymbol{I}$ 的 i, j 两行, 得到的矩阵, 记为 $\boldsymbol{E}_{ij}$,

(3) **初等对换矩阵**. 互换矩阵 $\boldsymbol{I}$ 的 i, j 两行, 得到的矩阵, 记为 $\boldsymbol{E}_{ij}$, 即

$$\boldsymbol{E}_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 &&&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&&& \\ &&& 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 &&& \\ &&& \vdots & 1 &&& \vdots &&& \\ &&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\ &&& \vdots &&& 1 & \vdots &&& \\ &&& 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 &&& \\ &&&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&& 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array} \tag{10}$$

(3) **初等对换矩阵**. 互换矩阵 $\boldsymbol{I}$ 的 i, j 两行, 得到的矩阵, 记为 $\boldsymbol{E}_{ij}$, 即

$$\boldsymbol{E}_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & & \\ & & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & \\ & & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \tag{10}$$

☞ $\boldsymbol{E}_{ij}$ 也可以是列变换 $c_i \leftrightarrow c_j$ 得来.

初等矩阵在矩阵乘法中的功能

"复制、传递"—— 初等矩阵是怎么由单位阵得来的, 它将把该变换过程传递到它所乘的矩阵; 并遵循 "左乘则行变, 右乘则列变" 的特点.

初等矩阵在矩阵乘法中的功能

"复制、传递"—— 初等矩阵是怎么由单位阵得来的, 它将把该变换过程传递到它所乘的矩阵; 并遵循"左乘则行变, 右乘则列变"的特点.

例如, 设 $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$.

初等矩阵在矩阵乘法中的功能

"复制、传递" —— 初等矩阵是怎么由单位阵得来的, 它将把该变换过程传递到它所乘的矩阵; 并遵循 "左乘则行变, 右乘则列变" 的特点.

例如, 设 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&\alpha&0\\&1&0&0\\&&1&0\\&&&1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4\\b_1&b_2&b_3&b_4\\c_1&c_2&c_3&c_4\\d_1&d_2&d_3&d_4\end{bmatrix}$.

(1) 若计算 $\boldsymbol{PA}$, "左乘则行变", 意味着把 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换, $\boldsymbol{P}$ 是由单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 经行变换 $r_1+\alpha r_3$ 得来, 则把 $\boldsymbol{A}$ 就进行相同的行变换:

$$\begin{bmatrix}1&0&\alpha&0\\&1&0&0\\&&1&0\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4\\b_1&b_2&b_3&b_4\\c_1&c_2&c_3&c_4\\d_1&d_2&d_3&d_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1+\alpha c_1&a_2+\alpha c_2&a_3+\alpha c_3&a_4+\alpha c_4\\b_1&b_2&b_3&b_4\\c_1&c_2&c_3&c_4\\d_1&d_2&d_3&d_4\end{bmatrix}$$

初等矩阵在矩阵乘法中的功能

"复制、传递"—— 初等矩阵是怎么由单位阵得来的, 它将把该变换过程传递到它所乘的矩阵; 并遵循"左乘则行变, 右乘则列变"的特点.

例如, 设 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&\alpha&0\\&1&0&0\\&&1&0\\&&&1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4\\b_1&b_2&b_3&b_4\\c_1&c_2&c_3&c_4\\d_1&d_2&d_3&d_4\end{bmatrix}$.

(2) 若计算 $\boldsymbol{AP}$, "右乘则列变", 此时要视 $\boldsymbol{P}$ 是由单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 通过初等列变换 c_3+kc_1 得来, 并有

$$\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4\\b_1&b_2&b_3&b_4\\c_1&c_2&c_3&c_4\\d_1&d_2&d_3&d_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&\alpha&0\\&1&0&0\\&&1&0\\&&&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3+\alpha a_1&a_4\\b_1&b_2&b_3+\alpha b_1&b_4\\c_1&c_2&c_3+\alpha c_1&c_4\\d_1&d_2&d_3+\alpha d_1&d_4\end{bmatrix}.$$

具体而言, 设 $\boldsymbol{P}$ 为初等矩阵,

(i) 若 $\boldsymbol{P}$ 左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{PA}$ 的结果是: 把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换, 并且 $\boldsymbol{P}$ 是怎样由单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 通过行变换得来, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 就进行完全相同的行变换.

具体而言, 设 $\boldsymbol{P}$ 为初等矩阵,

(i) 若 $\boldsymbol{P}$ 左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{PA}$ 的结果是: 把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换, 并且 $\boldsymbol{P}$ 是怎样由单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 通过行变换得来, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 就进行完全相同的行变换.

(ii) 若 $\boldsymbol{P}$ 右乘矩阵 $\boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{AP}$ 的结果是: 把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行初等列变换, 并且 $\boldsymbol{P}$ 是怎样由单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 通过列变换得来, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 就进行完全相同的列变换.

具体而言, 设 $\boldsymbol{P}$ 为初等矩阵,

(i) 若 $\boldsymbol{P}$ 左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{PA}$ 的结果是: 把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换, 并且 $\boldsymbol{P}$ 是怎样由单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 通过行变换得来, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 就进行完全相同的行变换.

(ii) 若 $\boldsymbol{P}$ 右乘矩阵 $\boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{AP}$ 的结果是: 把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行初等列变换, 并且 $\boldsymbol{P}$ 是怎样由单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 通过列变换得来, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 就进行完全相同的列变换.

简言之: 初等矩阵 $\boldsymbol{P}$ 把自己生成的过程复制、传递到了矩阵 $\boldsymbol{A}$ 上.

初等矩阵的逆矩阵

初等矩阵的逆矩阵仍然是初等矩阵.

初等矩阵的逆矩阵

初等矩阵的逆矩阵仍然是初等矩阵. 例如

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & c & \\ & & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \frac{1}{c} & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

初等矩阵的逆矩阵

初等矩阵的逆矩阵仍然是初等矩阵. 例如

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & c & \\ & & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \frac{1}{c} & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

利用初等矩阵的乘法功能, 如何求下列初等矩阵的逆矩阵?

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

注意到 $\boldsymbol{A} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_4} \boldsymbol{I}$,

初等矩阵的逆矩阵

初等矩阵的逆矩阵仍然是初等矩阵. 例如

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & c & \\ & & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \frac{1}{c} & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

利用初等矩阵的乘法功能, 如何求下列初等矩阵的逆矩阵?

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

注意到 $\boldsymbol{A} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_4} \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{B} \xrightarrow{r_2 - r_4} \boldsymbol{I}$.

具备 $r_2 \leftrightarrow r_4$, $r_2 - r_4$ 功能的初等矩阵分别是

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

具备 $r_2 \leftrightarrow r_4$, $r_2 - r_4$ 功能的初等矩阵分别是

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

具备 $r_2 \leftrightarrow r_4$, $r_2 - r_4$ 功能的初等矩阵分别是

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & {\color{red}-1} \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

此即所求逆矩阵.

具备 $r_2 \leftrightarrow r_4$, $r_2 - r_4$ 功能的初等矩阵分别是

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

此即所求逆矩阵.

综上知

$$\big(\boldsymbol{E}_i(c)\big)^{-1} = \boldsymbol{E}_i(\frac{1}{c}), \qquad \big(\boldsymbol{E}_{ij}(c)\big)^{-1} = \boldsymbol{E}_{ij}(-c), \qquad \big(\boldsymbol{E}_{ij}\big)^{-1} = \boldsymbol{E}_{ij}.$$

初等变换求逆矩阵的方法

定理 5.3

可逆矩阵可以经过若干次初等行变换化为单位矩阵.

初等变换求逆矩阵的方法

定理 5.3

可逆矩阵可以经过若干次初等行变换化为单位矩阵.

推论 5.4

可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为若干个初等矩阵的乘积.

推论 5.4

可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为若干个初等矩阵的乘积.

证: 可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以经过若干次初等行变换化为单位矩阵,

推论 5.4

可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为若干个初等矩阵的乘积.

证: 可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以经过若干次初等行变换化为单位矩阵, 初等行变换意味着左边乘以初等矩阵,

推论 5.4

可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为若干个初等矩阵的乘积.

证: 可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以经过若干次初等行变换化为单位矩阵, 初等行变换意味着左边乘以初等矩阵, 故总可以在 $\boldsymbol{A}$ 左边乘以某些初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_s$,

推论 5.4

可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为若干个初等矩阵的乘积.

证: 可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以经过若干次初等行变换化为单位矩阵, 初等行变换意味着左边乘以初等矩阵, 故总可以在 $\boldsymbol{A}$ 左边乘以某些初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_s$, 使得

$$\boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}.$$

推论 5.4

可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为若干个初等矩阵的乘积.

证: 可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以经过若干次初等行变换化为单位矩阵, 初等行变换意味着左边乘以初等矩阵, 故总可以在 $\boldsymbol{A}$ 左边乘以某些初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_s$, 使得

$$\boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}.$$

从而

$$\boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1\right)^{-1}$$

推论 5.4

可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为若干个初等矩阵的乘积.

证: 可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以经过若干次初等行变换化为单位矩阵, 初等行变换意味着左边乘以初等矩阵, 故总可以在 $\boldsymbol{A}$ 左边乘以某些初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_s$, 使得

$$\boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}.$$

从而

$$\boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1\right)^{-1} = \boldsymbol{P}_1^{-1} \boldsymbol{P}_2^{-1} \cdots \boldsymbol{P}_s^{-1}.$$

推论 5.4

可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为若干个初等矩阵的乘积.

证: 可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以经过若干次初等行变换化为单位矩阵, 初等行变换意味着左边乘以初等矩阵, 故总可以在 $\boldsymbol{A}$ 左边乘以某些初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_s$, 使得

$$\boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}.$$

从而

$$\boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1\right)^{-1} = \boldsymbol{P}_1^{-1} \boldsymbol{P}_2^{-1} \cdots \boldsymbol{P}_s^{-1}.$$

初等矩阵的逆矩阵仍然是初等矩阵,

推论 5.4

可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为若干个初等矩阵的乘积.

证: 可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以经过若干次初等行变换化为单位矩阵, 初等行变换意味着左边乘以初等矩阵, 故总可以在 $\boldsymbol{A}$ 左边乘以某些初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_s$, 使得

$$\boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}.$$

从而

$$\boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1\right)^{-1} = \boldsymbol{P}_1^{-1} \boldsymbol{P}_2^{-1} \cdots \boldsymbol{P}_s^{-1}.$$

初等矩阵的逆矩阵仍然是初等矩阵, 得证 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为若干个初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1^{-1}$, $\boldsymbol{P}_2^{-1}, \cdots, \boldsymbol{P}_s^{-1}$ 的乘积. □

推论 5.4

可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为若干个初等矩阵的乘积.

证: 可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以经过若干次初等行变换化为单位矩阵, 初等行变换意味着左边乘以初等矩阵, 故总可以在 $\boldsymbol{A}$ 左边乘以某些初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_s$, 使得

$$\boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}.$$

从而

$$\boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1\right)^{-1} = \boldsymbol{P}_1^{-1} \boldsymbol{P}_2^{-1} \cdots \boldsymbol{P}_s^{-1}.$$

初等矩阵的逆矩阵仍然是初等矩阵, 得证 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为若干个初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1^{-1}$, $\boldsymbol{P}_2^{-1}, \cdots, \boldsymbol{P}_s^{-1}$ 的乘积. □

☞ 由若干个初等矩阵的乘积而得的矩阵, 是可逆矩阵.

推论 5.5

如果对可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和同阶矩阵 $\boldsymbol{I}$ 做同样的初等行变换, 那么当 $\boldsymbol{A}$ 变为单位阵时, $\boldsymbol{I}$ 就变为 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 即

$$(\boldsymbol{A},\, \boldsymbol{I}) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (\boldsymbol{I},\, \boldsymbol{A}^{-1}).$$

推论 5.5

如果对可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和同阶矩阵 $\boldsymbol{I}$ 做同样的初等行变换, 那么当 $\boldsymbol{A}$ 变为单位阵时, $\boldsymbol{I}$ 就变为 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 即

$$\big(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{I}\big) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \big(\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{A}^{-1}\big).$$

证: 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 故可设

$$\boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}.$$

推论 5.5

如果对可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和同阶矩阵 $\boldsymbol{I}$ 做同样的初等行变换, 那么当 $\boldsymbol{A}$ 变为单位阵时, $\boldsymbol{I}$ 就变为 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 即

$$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{I}) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{A}^{-1}).$$

证: 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 故可设

$$\boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}.$$

得

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1.$$

推论 5.5

如果对可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和同阶矩阵 $\boldsymbol{I}$ 做同样的初等行变换, 那么当 $\boldsymbol{A}$ 变为单位阵时, $\boldsymbol{I}$ 就变为 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 即

$$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{I}) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{A}^{-1}).$$

证: 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 故可设

$$\boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}.$$

得

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1.$$

又 $\boldsymbol{I}$ 进行了完全相同的初等行变换,

推论 5.5

如果对可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和同阶矩阵 $\boldsymbol{I}$ 做同样的初等行变换, 那么当 $\boldsymbol{A}$ 变为单位阵时, $\boldsymbol{I}$ 就变为 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 即

$$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{I}) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{A}^{-1}).$$

证: 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 故可设

$$\boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}.$$

得

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1.$$

又 $\boldsymbol{I}$ 进行了完全相同的初等行变换, 故相当于用 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_s$ 左乘 $\boldsymbol{I}$,

推论 5.5

如果对可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和同阶矩阵 $\boldsymbol{I}$ 做同样的初等行变换，那么当 $\boldsymbol{A}$ 变为单位阵时，$\boldsymbol{I}$ 就变为 $\boldsymbol{A}^{-1}$，即

$$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{I}) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{A}^{-1}).$$

证: 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，故可设

$$\boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}.$$

得

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1.$$

又 $\boldsymbol{I}$ 进行了完全相同的初等行变换，故相当于用 $\boldsymbol{P}_1,\ \boldsymbol{P}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{P}_s$ 左乘 $\boldsymbol{I}$，

$$\boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{I}$$

推论 5.5

如果对可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和同阶矩阵 $\boldsymbol{I}$ 做同样的初等行变换, 那么当 $\boldsymbol{A}$ 变为单位阵时, $\boldsymbol{I}$ 就变为 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 即

$$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{I}) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{A}^{-1}).$$

证: 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 故可设

$$\boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}.$$

得

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1.$$

又 $\boldsymbol{I}$ 进行了完全相同的初等行变换, 故相当于用 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_s$ 左乘 $\boldsymbol{I}$,

$$\boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}^{-1}.$$

推论 5.5

如果对可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和同阶矩阵 $\boldsymbol{I}$ 做同样的初等行变换, 那么当 $\boldsymbol{A}$ 变为单位阵时, $\boldsymbol{I}$ 就变为 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 即

$$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{I}) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{A}^{-1}).$$

证: 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 故可设

$$\boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}.$$

得

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1.$$

又 $\boldsymbol{I}$ 进行了完全相同的初等行变换, 故相当于用 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_s$ 左乘 $\boldsymbol{I}$,

$$\boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}^{-1}.$$

即证: 用 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_s$ 分别左乘 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{I}$, 当 $\boldsymbol{A}$ 变化为单位矩阵时,

推论 5.5

如果对可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和同阶矩阵 $\boldsymbol{I}$ 做同样的初等行变换, 那么当 $\boldsymbol{A}$ 变为单位阵时, $\boldsymbol{I}$ 就变为 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 即

$$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{I}) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{A}^{-1}).$$

证: 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 故可设

$$\boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}.$$

得

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1.$$

又 $\boldsymbol{I}$ 进行了完全相同的初等行变换, 故相当于用 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_s$ 左乘 $\boldsymbol{I}$,

$$\boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}^{-1}.$$

即证: 用 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_s$ 分别左乘 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{I}$, 当 $\boldsymbol{A}$ 变化为单位矩阵时, $\boldsymbol{I}$ 变化为 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

同理, 也可以用初等列变换求逆矩阵,

同理, 也可以用初等列变换求逆矩阵, 即

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix}.$$

同理, 也可以用初等列变换求逆矩阵, 即

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix}.$$

事实上, 对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等列变换使之变换为 $\boldsymbol{I}$,

同理, 也可以用初等列变换求逆矩阵, 即

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix}.$$

事实上, 对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等列变换使之变换为 $\boldsymbol{I}$, 相当于在其右侧乘以初等矩阵 $\boldsymbol{Q}_1$, $\boldsymbol{Q}_2, \cdots, \boldsymbol{Q}_t$, 使得

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{Q}_1\,\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t = \boldsymbol{I}.$$

同理, 也可以用初等列变换求逆矩阵, 即

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix}.$$

事实上, 对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等列变换使之变换为 $\boldsymbol{I}$, 相当于在其右侧乘以初等矩阵 $\boldsymbol{Q}_1$, $\boldsymbol{Q}_2, \cdots, \boldsymbol{Q}_t$, 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t = \boldsymbol{I}.$$

则 $\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t = \boldsymbol{A}^{-1}$.

同理, 也可以用初等列变换求逆矩阵, 即

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix}.$$

事实上, 对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等列变换使之变换为 $\boldsymbol{I}$, 相当于在其右侧乘以初等矩阵 $\boldsymbol{Q}_1$, $\boldsymbol{Q}_2, \cdots, \boldsymbol{Q}_t$, 使得

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{Q}_1\,\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t = \boldsymbol{I}.$$

则 $\boldsymbol{Q}_1\,\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t = \boldsymbol{A}^{-1}$.

对 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$ 进行初等列变换时, $\boldsymbol{I}$ 进行了与 $\boldsymbol{A}$ 一样的列变换,

同理, 也可以用初等列变换求逆矩阵, 即

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix}.$$

事实上, 对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等列变换使之变换为 $\boldsymbol{I}$, 相当于在其右侧乘以初等矩阵 $\boldsymbol{Q}_1$, $\boldsymbol{Q}_2, \cdots, \boldsymbol{Q}_t$, 使得

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{Q}_1\,\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t = \boldsymbol{I}.$$

则 $\boldsymbol{Q}_1\,\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t = \boldsymbol{A}^{-1}$.

对 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$ 进行初等列变换时, $\boldsymbol{I}$ 进行了与 $\boldsymbol{A}$ 一样的列变换, 即相当于在 $\boldsymbol{I}$ 右侧乘以初等矩阵 $\boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2, \cdots, \boldsymbol{Q}_t$,

同理, 也可以用初等列变换求逆矩阵, 即

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix}.$$

事实上, 对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等列变换使之变换为 $\boldsymbol{I}$, 相当于在其右侧乘以初等矩阵 $\boldsymbol{Q}_1$, $\boldsymbol{Q}_2, \cdots, \boldsymbol{Q}_t$, 使得

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{Q}_1\,\boldsymbol{Q}_2 \cdots \boldsymbol{Q}_t = \boldsymbol{I}.$$

则 $\boldsymbol{Q}_1\,\boldsymbol{Q}_2 \cdots \boldsymbol{Q}_t = \boldsymbol{A}^{-1}$.

对 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$ 进行初等列变换时, $\boldsymbol{I}$ 进行了与 $\boldsymbol{A}$ 一样的列变换, 即相当于在 $\boldsymbol{I}$ 右侧乘以初等矩阵 $\boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2, \cdots, \boldsymbol{Q}_t$, 使其变换为

$$\boldsymbol{I}\,\boldsymbol{Q}_1\,\boldsymbol{Q}_2 \cdots \boldsymbol{Q}_t$$

同理, 也可以用初等列变换求逆矩阵, 即

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix}.$$

事实上, 对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等列变换使之变换为 $\boldsymbol{I}$, 相当于在其右侧乘以初等矩阵 $\boldsymbol{Q}_1$, $\boldsymbol{Q}_2, \cdots, \boldsymbol{Q}_t$, 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t = \boldsymbol{I}.$$

则 $\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t = \boldsymbol{A}^{-1}$.

对 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$ 进行初等列变换时, $\boldsymbol{I}$ 进行了与 $\boldsymbol{A}$ 一样的列变换, 即相当于在 $\boldsymbol{I}$ 右侧乘以初等矩阵 $\boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2, \cdots, \boldsymbol{Q}_t$, 使其变换为

$$\boldsymbol{I}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t = \boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^{-1}$$

同理, 也可以用初等列变换求逆矩阵, 即

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix}.$$

事实上, 对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等列变换使之变换为 $\boldsymbol{I}$, 相当于在其右侧乘以初等矩阵 $\boldsymbol{Q}_1$, $\boldsymbol{Q}_2, \cdots, \boldsymbol{Q}_t$, 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t = \boldsymbol{I}.$$

则 $\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t = \boldsymbol{A}^{-1}$.

对 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$ 进行初等列变换时, $\boldsymbol{I}$ 进行了与 $\boldsymbol{A}$ 一样的列变换, 即相当于在 $\boldsymbol{I}$ 右侧乘以初等矩阵 $\boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2, \cdots, \boldsymbol{Q}_t$, 使其变换为

$$\boldsymbol{I}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t = \boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}.$$

例 5.6

试利用矩阵的初等变换, 求方阵的逆矩阵: $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

例 5.6

试利用矩阵的初等变换, 求方阵的逆矩阵: $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

解: (1) $\left(\begin{array}{ccc:ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

例 5.6

试利用矩阵的初等变换, 求方阵的逆矩阵: $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

解: (1) $\left(\begin{array}{ccc:ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[r_2 - 2r_3]{r_1 - r_3/2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 3 & 2 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

例 5.6

试利用矩阵的初等变换, 求方阵的逆矩阵: $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

解: (1) $$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2 - 2r_3]{r_1 - r_3/2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 3 & 2 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \div 2]{r_1 - 2r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 3 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & 2 & -\frac{9}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

例 5.6

试利用矩阵的初等变换, 求方阵的逆矩阵: $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

解: (1) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[r_2 - 2r_3]{r_1 - r_3/2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \div 2]{r_1 - 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & 2 & -\frac{9}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$

$\xrightarrow{r_1 \div 3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right).$

即逆矩阵为 $\begin{pmatrix} \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \\ -1 & -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. $\square$

☞ 建议: 求出逆矩阵, 一定要验证.

即逆矩阵为 $\begin{pmatrix} \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \\ -1 & -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. □

☞ 建议: 求出逆矩阵, 一定要验证.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \\ -1 & -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

例 5.7 (P.76 例题 4 重解)

用初等列变换求矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

例 5.7 (P.76 例题 4 重解)

用初等列变换求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解:

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{I}\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc}0 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & -1 & -1\\ \hdashline 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_3}\left(\begin{array}{ccc}-1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -1\\ \hdashline 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[c_1\times(-1)]{c_2+2c_1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_1\times(-1)]{c_2+2c_1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2\leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -3 \\ \hdashline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_1\times(-1)]{c_2+2c_1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2\leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -3 \\ \hdashline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_1+2c_2]{c_3-5c_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ \hdashline 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_1\times(-1)]{c_2+2c_1}\left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{c_2\leftrightarrow c_3} \left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -3 \\ \hdashline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[c_1+2c_2]{c_3-5c_2}\left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ \hdashline 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{c_3\div 2} \left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ \hdashline 2 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[c_1+c_3]{c_2+c_3} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hdashline -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

$$
\xrightarrow[c_1+c_3]{c_2+c_3}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 \\
\hdashline
-\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
0 & 1 & 1
\end{pmatrix},
$$

即

$$
\begin{pmatrix}
0 & 2 & -1 \\
1 & 1 & 2 \\
-1 & -1 & -1
\end{pmatrix}^{-1}
=
\begin{pmatrix}
-\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
0 & 1 & 1
\end{pmatrix}.
$$

- 在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘以可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 意味着将 $\boldsymbol{A}$ 进行若干初等行变换;

- 在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘以可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 意味着将 $\boldsymbol{A}$ 进行若干初等行变换;
- 将 $\boldsymbol{A}$ 进行若干初等行变换, 等价于在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘以某个可逆矩阵.

- 在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘以可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 意味着将 $\boldsymbol{A}$ 进行若干初等行变换;
- 将 $\boldsymbol{A}$ 进行若干初等行变换, 等价于在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘以某个可逆矩阵.

事实上, 可逆矩阵总可以表示为若干初等矩阵的乘积,

- 在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘以可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 意味着将 $\boldsymbol{A}$ 进行若干初等行变换;
- 将 $\boldsymbol{A}$ 进行若干初等行变换, 等价于在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘以某个可逆矩阵.

事实上, 可逆矩阵总可以表示为若干初等矩阵的乘积, 设存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_s$ 使得

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1.$$

- 在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘以可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 意味着将 $\boldsymbol{A}$ 进行若干初等行变换;
- 将 $\boldsymbol{A}$ 进行若干初等行变换, 等价于在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘以某个可逆矩阵.

事实上, 可逆矩阵总可以表示为若干初等矩阵的乘积, 设存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_s$ 使得

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1.$$

故

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{A},$$

- 在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘以可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 意味着将 $\boldsymbol{A}$ 进行若干初等行变换;
- 将 $\boldsymbol{A}$ 进行若干初等行变换, 等价于在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘以某个可逆矩阵.

事实上, 可逆矩阵总可以表示为若干初等矩阵的乘积, 设存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_s$ 使得

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1.$$

故

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{A},$$

由初等矩阵在乘法中的功能, 上式右侧相当于对 $\boldsymbol{A}$ 进行 s 次初等行变换.

- 在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘以可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 意味着将 $\boldsymbol{A}$ 进行若干初等行变换;
- 将 $\boldsymbol{A}$ 进行若干初等行变换, 等价于在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘以某个可逆矩阵.

事实上, 可逆矩阵总可以表示为若干初等矩阵的乘积, 设存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_s$ 使得

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1.$$

故

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{A},$$

由初等矩阵在乘法中的功能, 上式右侧相当于对 $\boldsymbol{A}$ 进行 s 次初等行变换. 反之亦然.

- 在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘以可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 意味着将 $\boldsymbol{A}$ 进行若干初等行变换;
- 将 $\boldsymbol{A}$ 进行若干初等行变换, 等价于在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘以某个可逆矩阵.

事实上, 可逆矩阵总可以表示为若干初等矩阵的乘积, 设存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_s$ 使得

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1.$$

故

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{A},$$

由初等矩阵在乘法中的功能, 上式右侧相当于对 $\boldsymbol{A}$ 进行 s 次初等行变换. 反之亦然.

同理,

- 在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的右边乘以可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 意味着将 $\boldsymbol{A}$ 进行若干初等列变换;

- 在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘以可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 意味着将 $\boldsymbol{A}$ 进行若干初等行变换;
- 将 $\boldsymbol{A}$ 进行若干初等行变换, 等价于在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘以某个可逆矩阵.

事实上, 可逆矩阵总可以表示为若干初等矩阵的乘积, 设存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_s$ 使得

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1.$$

故

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{A},$$

由初等矩阵在乘法中的功能, 上式右侧相当于对 $\boldsymbol{A}$ 进行 s 次初等行变换. 反之亦然.

同理,

- 在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的右边乘以可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 意味着将 $\boldsymbol{A}$ 进行若干初等列变换;
- 将 $\boldsymbol{A}$ 进行若干初等列变换, 等价于在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的右边乘以某个可逆矩阵.

问: 行列式计算中行变换、列变换可以任意交替进行, 初等变换求逆矩阵时是否也可以行变换、列变换交替进行?

问: 行列式计算中行变换、列变换可以任意交替进行, 初等变换求逆矩阵时是否也可以行变换、列变换交替进行?

答: 不可以!

问: 行列式计算中行变换、列变换可以任意交替进行, 初等变换求逆矩阵时是否也可以行变换、列变换交替进行?

答: 不可以!

对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换, 相当于左乘以逆矩阵 $\boldsymbol{P}$;

问: 行列式计算中行变换、列变换可以任意交替进行, 初等变换求逆矩阵时是否也可以行变换、列变换交替进行?

答: 不可以!

对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换, 相当于左乘以逆矩阵 $\boldsymbol{P}$; 对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等列变换, 相当于右乘以逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 且 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ 都不是单位矩阵.

问: 行列式计算中行变换、列变换可以任意交替进行, 初等变换求逆矩阵时是否也可以行变换、列变换交替进行?

答: 不可以!

对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换, 相当于左乘以逆矩阵 $\boldsymbol{P}$; 对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等列变换, 相当于右乘以逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 且 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ 都不是单位矩阵. 假定 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 由前述行变换、列变换成为 $\boldsymbol{I}$, 即

$$\boldsymbol{PAQ} = \boldsymbol{I}, \tag{11}$$

问: 行列式计算中行变换、列变换可以任意交替进行, 初等变换求逆矩阵时是否也可以行变换、列变换交替进行?

答: 不可以!

对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换, 相当于左乘以逆矩阵 $\boldsymbol{P}$; 对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等列变换, 相当于右乘以逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 且 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ 都不是单位矩阵. 假定 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 由前述行变换、列变换成为 $\boldsymbol{I}$, 即

$$\boldsymbol{PAQ} = \boldsymbol{I}, \tag{11}$$

则

$$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{I}) \xrightarrow[\text{初等列变换}\boldsymbol{Q}]{\text{初等行变换}\boldsymbol{P}} (\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{PIQ})$$

问: 行列式计算中行变换、列变换可以任意交替进行, 初等变换求逆矩阵时是否也可以行变换、列变换交替进行?

答: 不可以!

对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换, 相当于左乘以逆矩阵 $\boldsymbol{P}$; 对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等列变换, 相当于右乘以逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 且 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ 都不是单位矩阵. 假定 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 由前述行变换、列变换成为 $\boldsymbol{I}$, 即

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}, \tag{11}$$

则

$$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{I}) \xrightarrow[\text{初等列变换}\boldsymbol{Q}]{\text{初等行变换}\boldsymbol{P}} (\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{P}\boldsymbol{I}\boldsymbol{Q}) = (\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}),$$

问: 行列式计算中行变换、列变换可以任意交替进行, 初等变换求逆矩阵时是否也可以行变换、列变换交替进行?

答: 不可以!

对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换, 相当于左乘以逆矩阵 $\boldsymbol{P}$; 对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等列变换, 相当于右乘以逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 且 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ 都不是单位矩阵. 假定 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 由前述行变换、列变换成为 $\boldsymbol{I}$, 即

$$\boldsymbol{PAQ} = \boldsymbol{I}, \tag{11}$$

则

$$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{I}) \xrightarrow[\text{初等列变换}\boldsymbol{Q}]{\text{初等行变换}\boldsymbol{P}} (\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{PIQ}) = (\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{PQ}),$$

但是, $\boldsymbol{PQ}$ 显然不是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵.

问: 行列式计算中行变换、列变换可以任意交替进行, 初等变换求逆矩阵时是否也可以行变换、列变换交替进行?

答: 不可以!

对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换, 相当于左乘以逆矩阵 $\boldsymbol{P}$; 对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等列变换, 相当于右乘以逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 且 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ 都不是单位矩阵. 假定 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 由前述行变换、列变换成为 $\boldsymbol{I}$, 即

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}, \tag{11}$$

则

$$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{I}) \xrightarrow[\text{初等列变换}\boldsymbol{Q}]{\text{初等行变换}\boldsymbol{P}} (\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{P}\boldsymbol{I}\boldsymbol{Q}) = (\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}),$$

但是, $\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}$ 显然不是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵. 事实上, 由 (11) 可得

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}.$$

问: 行列式计算中行变换、列变换可以任意交替进行, 初等变换求逆矩阵时是否也可以行变换、列变换交替进行?

答: 不可以!

对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换, 相当于左乘以逆矩阵 $\boldsymbol{P}$; 对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等列变换, 相当于右乘以逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 且 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ 都不是单位矩阵. 假定 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 由前述行变换、列变换成为 $\boldsymbol{I}$, 即

$$\boldsymbol{PAQ} = \boldsymbol{I}, \tag{11}$$

则

$$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{I}) \xrightarrow[\text{初等列变换}\boldsymbol{Q}]{\text{初等行变换}\boldsymbol{P}} (\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{PIQ}) = (\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{PQ}),$$

但是, $\boldsymbol{PQ}$ 显然不是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵. 事实上, 由 (11) 可得

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{QP}.$$

用初等行变换求逆矩阵时, 必须始终做**行变换**, 其间不能做任何**列变换**.

问: 行列式计算中行变换、列变换可以任意交替进行, 初等变换求逆矩阵时是否也可以行变换、列变换交替进行?

答: 不可以!

对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换, 相当于左乘以逆矩阵 $\boldsymbol{P}$; 对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等列变换, 相当于右乘以逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 且 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ 都不是单位矩阵. 假定 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 由前述行变换、列变换成为 $\boldsymbol{I}$, 即

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}, \tag{11}$$

则

$$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{I}) \xrightarrow[\text{初等列变换}\boldsymbol{Q}]{\text{初等行变换}\boldsymbol{P}} (\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{P}\boldsymbol{I}\boldsymbol{Q}) = (\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}),$$

但是, $\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}$ 显然不是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵. 事实上, 由 (11) 可得

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}.$$

用初等行变换求逆矩阵时, 必须始终做**行变换**, 其间不能做任何**列变换**. 还有一个本质的原因是: 初等行变换求逆矩阵, 其实就是高斯消元法解矩阵方程.

初等行变换求逆矩阵的本质是高斯消元法

求 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵, 相当于解矩阵方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{I}$.
记 $\boldsymbol{I}=\big(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\big)$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{I}$ 等价于

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_i,\qquad i=1,2,\cdots,n.$$

对 $\big(\boldsymbol{A},\,\boldsymbol{I}\big)$ 进行初等行变换, 相当于在同时求解 n 个系数矩阵相同的线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_i$, 其本质是高斯消元法.

初等行变换求逆矩阵的本质是高斯消元法

求 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵, 相当于解矩阵方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{I}$.

记 $\boldsymbol{I}=\big(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\big)$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{I}$ 等价于

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_i,\qquad i=1,2,\cdots,n.$$

对 $\big(\boldsymbol{A},\,\boldsymbol{I}\big)$ 进行初等行变换, 相当于在同时求解 n 个系数矩阵相同的线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_i$, 其本质是高斯消元法.

消元法过程中, 只有方程与方程之间的相互运算, 当然只能对应于行变换.

解矩阵方程

(1) 求解矩阵方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$.

解矩阵方程

(1) 求解矩阵方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$.

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,

解矩阵方程

(1) 求解矩阵方程 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$.

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 两边左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 得

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B},$$

解矩阵方程

(1) 求解矩阵方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$.

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 两边左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 得

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B},$$

即 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

解矩阵方程

(1) 求解矩阵方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$.

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 两边左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 得

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B},$$

即 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

可以先单独求 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 再得到 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

另一个简单的方法:

另一个简单的方法: 对 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 进行初等行变换.

另一个简单的方法: 对 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 进行初等行变换.

动作要领: (1) 将 $\boldsymbol{A}$ 初等行变换为 $\boldsymbol{I}$, (2) 同时, $\boldsymbol{B}$ 进行完全相同的初等行变换.

另一个简单的方法: 对 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 进行初等行变换.

动作要领: (1) 将 $\boldsymbol{A}$ 初等行变换为 $\boldsymbol{I}$, (2) 同时, $\boldsymbol{B}$ 进行完全相同的初等行变换.
结果: $\boldsymbol{A}$ 变换为 $\boldsymbol{I}$ 时, $\boldsymbol{B}$ 将变换为 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

另一个简单的方法: 对 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 进行初等行变换.

动作要领: (1) 将 $\boldsymbol{A}$ 初等行变换为 $\boldsymbol{I}$, (2) 同时, $\boldsymbol{B}$ 进行完全相同的初等行变换.
结果: $\boldsymbol{A}$ 变换为 $\boldsymbol{I}$ 时, $\boldsymbol{B}$ 将变换为 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$. 即

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (\boldsymbol{I}, \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}).$$

另一个简单的方法: 对 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 进行初等行变换.

动作要领: (1) 将 $\boldsymbol{A}$ 初等行变换为 $\boldsymbol{I}$, (2) 同时, $\boldsymbol{B}$ 进行完全相同的初等行变换.
结果: $\boldsymbol{A}$ 变换为 $\boldsymbol{I}$ 时, $\boldsymbol{B}$ 将变换为 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$. 即

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (\boldsymbol{I}, \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}).$$

理由: 对 $\boldsymbol{A}$ 初等行变换为 $\boldsymbol{I}$, 意味着左乘可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}.$$

另一个简单的方法: 对 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 进行初等行变换.

动作要领: (1) 将 $\boldsymbol{A}$ 初等行变换为 $\boldsymbol{I}$, (2) 同时, $\boldsymbol{B}$ 进行完全相同的初等行变换.
结果: $\boldsymbol{A}$ 变换为 $\boldsymbol{I}$ 时, $\boldsymbol{B}$ 将变换为 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$. 即

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (\boldsymbol{I}, \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}).$$

理由: 对 $\boldsymbol{A}$ 初等行变换为 $\boldsymbol{I}$, 意味着左乘可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}.$$

故

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}^{-1}.$$

另一个简单的方法: 对 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 进行初等行变换.

动作要领: (1) 将 $\boldsymbol{A}$ 初等行变换为 $\boldsymbol{I}$, (2) 同时, $\boldsymbol{B}$ 进行完全相同的初等行变换.
结果: $\boldsymbol{A}$ 变换为 $\boldsymbol{I}$ 时, $\boldsymbol{B}$ 将变换为 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$. 即

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (\boldsymbol{I}, \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}).$$

理由: 对 $\boldsymbol{A}$ 初等行变换为 $\boldsymbol{I}$, 意味着左乘可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}.$$

故

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}^{-1}.$$

而 $\boldsymbol{B}$ 进行了完全相同的初等行变换,

另一个简单的方法: 对 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 进行初等行变换.

动作要领: (1) 将 $\boldsymbol{A}$ 初等行变换为 $\boldsymbol{I}$, (2) 同时, $\boldsymbol{B}$ 进行完全相同的初等行变换.
结果: $\boldsymbol{A}$ 变换为 $\boldsymbol{I}$ 时, $\boldsymbol{B}$ 将变换为 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$. 即

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (\boldsymbol{I}, \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}).$$

理由: 对 $\boldsymbol{A}$ 初等行变换为 $\boldsymbol{I}$, 意味着左乘可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}.$$

故

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}^{-1}.$$

而 $\boldsymbol{B}$ 进行了完全相同的初等行变换, 故相当于用 $\boldsymbol{P}$ 左乘 $\boldsymbol{B}$,

另一个简单的方法: 对 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 进行初等行变换.

动作要领: (1) 将 $\boldsymbol{A}$ 初等行变换为 $\boldsymbol{I}$, (2) 同时, $\boldsymbol{B}$ 进行完全相同的初等行变换.
结果: $\boldsymbol{A}$ 变换为 $\boldsymbol{I}$ 时, $\boldsymbol{B}$ 将变换为 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$. 即

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (\boldsymbol{I}, \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}).$$

理由: 对 $\boldsymbol{A}$ 初等行变换为 $\boldsymbol{I}$, 意味着左乘可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}.$$

故

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}^{-1}.$$

而 $\boldsymbol{B}$ 进行了完全相同的初等行变换, 故相当于用 $\boldsymbol{P}$ 左乘 $\boldsymbol{B}$, 即

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}$$

另一个简单的方法: 对 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 进行初等行变换.

动作要领: (1) 将 $\boldsymbol{A}$ 初等行变换为 $\boldsymbol{I}$, (2) 同时, $\boldsymbol{B}$ 进行完全相同的初等行变换.
结果: $\boldsymbol{A}$ 变换为 $\boldsymbol{I}$ 时, $\boldsymbol{B}$ 将变换为 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$. 即

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (\boldsymbol{I}, \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}).$$

理由: 对 $\boldsymbol{A}$ 初等行变换为 $\boldsymbol{I}$, 意味着左乘可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}.$$

故

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}^{-1}.$$

而 $\boldsymbol{B}$ 进行了完全相同的初等行变换, 故相当于用 $\boldsymbol{P}$ 左乘 $\boldsymbol{B}$, 即

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}.$$

另一个简单的方法: 对 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 进行初等行变换.

动作要领: (1) 将 $\boldsymbol{A}$ 初等行变换为 $\boldsymbol{I}$, (2) 同时, $\boldsymbol{B}$ 进行完全相同的初等行变换.
结果: $\boldsymbol{A}$ 变换为 $\boldsymbol{I}$ 时, $\boldsymbol{B}$ 将变换为 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$. 即

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (\boldsymbol{I}, \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}).$$

理由: 对 $\boldsymbol{A}$ 初等行变换为 $\boldsymbol{I}$, 意味着左乘可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\color{red}{\boldsymbol{P}}\color{black}{\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}.}$$

故

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}^{-1}.$$

而 $\boldsymbol{B}$ 进行了完全相同的初等行变换, 故相当于用 $\boldsymbol{P}$ 左乘 $\boldsymbol{B}$, 即

$$\color{red}{\boldsymbol{P}}\color{black}{\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}.}$$

☞ 若 $\boldsymbol{A}$ 不可逆, 此方法不适应. 这类题型以后再介绍.

例 5.8

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{X}$ 使 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$.

解:

$$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc:cc} 4 & 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

解:

$$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc:cc}4&1&-2&1&-3\\2&2&1&2&2\\3&1&-1&3&-1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-r_3}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&-1&-2&-2\\2&2&1&2&2\\3&1&-1&3&-1\end{array}\right)$$

解:

$$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}) = \left(\begin{array}{ccc:cc} 4 & 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 - r_3} \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 9 & 5 \end{array}\right)$$

解:

$$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}) = \left(\begin{array}{ccc:cc} 4 & 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 - r_3} \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 9 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 9 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 6 & 6 \end{array}\right)$$

解:

$$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 4 & 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 - r_3} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 9 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 9 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 6 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 - 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -12 & -4 \end{array}\right)$$

解:

$$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc:cc}4&1&-2&1&-3\\2&2&1&2&2\\3&1&-1&3&-1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-r_3}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&-1&-2&-2\\2&2&1&2&2\\3&1&-1&3&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&-1&-2&-2\\0&2&3&6&6\\0&1&2&9&5\end{array}\right)\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&-1&-2&-2\\0&1&2&9&5\\0&2&3&6&6\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3-2r_2}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&-1&-2&-2\\0&1&2&9&5\\0&0&-1&-12&-4\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_2+2r_3\\r_3\times(-1)}]{r_1-r_3}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&10&2\\0&1&0&-15&-3\\0&0&1&12&4\end{array}\right).$$

解:

$$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}) = \left(\begin{array}{ccc:cc} 4 & 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 - r_3} \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 9 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 9 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 6 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 - 2r_2} \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -12 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_2 + 2r_3 \\ r_3 \times (-1)}]{r_1 - r_3} \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -15 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & 4 \end{array}\right).$$

所以

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ -15 & -3 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}.$$

以上是解矩阵方程的一个重要方法, 也是一个必须掌握的题型.

以上是解矩阵方程的一个重要方法, 也是一个必须掌握的题型.
在解题中有一处细节要注意: 不要在解题的开始就写上

$$\text{已知 } \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}, \text{ 所以 } \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}.$$

以上是解矩阵方程的一个重要方法, 也是一个必须掌握的题型.
在解题中有一处细节要注意: 不要在解题的开始就写上

$$\text{已知 } \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}, \text{ 所以 } \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}.$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 是否可逆, 暂时还是未知的. 严格地讲就不能出现该写法.

$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 初等行变换求解矩阵方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ 的本质是高斯消元法

一个矩阵方程其实包含了多个线性方程组 (它们的系数矩阵相同).

$(\boldsymbol{A},\, \boldsymbol{B})$ 初等行变换求解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的本质是高斯消元法

一个矩阵方程其实包含了多个线性方程组 (它们的系数矩阵相同). 比如前例中记 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\, \boldsymbol{b}_2)$, 即

$$\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}-3\\2\\-1\end{pmatrix},$$

$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 初等行变换求解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的本质是高斯消元法

一个矩阵方程其实包含了多个线性方程组 (它们的系数矩阵相同). 比如前例中记 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$, 即

$$\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}-3\\2\\-1\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 等价于两个线性方程组

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}_1, \qquad \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}_2.$$

$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})$ 初等行变换求解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的本质是高斯消元法

一个矩阵方程其实包含了多个线性方程组 (它们的系数矩阵相同). 比如前例中记 $\boldsymbol{B}=\left(\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2\right)$, 即

$$\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}-3\\2\\-1\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 等价于两个线性方程组

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}_1,\qquad \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}_2.$$

对

$$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc|cc}4&1&-2&1&-3\\2&2&1&2&2\\3&1&-1&3&-1\end{array}\right)$$

进行初等行变换, 其实质是用高斯消元法同时求解两个线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}_1$

$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})$ 初等行变换求解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的本质是高斯消元法

一个矩阵方程其实包含了多个线性方程组 (它们的系数矩阵相同). 比如前例中记 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2)$, 即

$$\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}-3\\2\\-1\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 等价于两个线性方程组

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}_1,\qquad \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}_2.$$

对

$$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc:cc}4&1&-2&1&-3\\2&2&1&2&2\\3&1&-1&3&-1\end{array}\right)$$

进行初等行变换, 其实质是用高斯消元法同时求解两个线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}_1$

线性方程组 v.s. 矩阵方程

1. 线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

也是矩阵方程的一种, 是矩阵方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ 在 $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{B}$ 为列矩阵的情形.

线性方程组 v.s. 矩阵方程

1. 线性方程组
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
也是矩阵方程的一种, 是矩阵方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ 在 $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{B}$ 为列矩阵的情形.
2. 反过来, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ 相当于多个线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_i$.

线性方程组 v.s. 矩阵方程

1. 线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

   也是矩阵方程的一种, 是矩阵方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ 在 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{B}$ 为列矩阵的情形.

2. 反过来, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ 相当于多个线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_i$.

   解法都是对增广矩阵使用初等行变换, 但其本质是高斯消元法.

线性方程组 v.s. 矩阵方程

1. 线性方程组
$$Ax = b$$
也是矩阵方程的一种, 是矩阵方程 $AX = B$ 在 X, B 为列矩阵的情形.
2. 反过来, $AX = B$ 相当于多个线性方程组 $Ax = b_i$.

   解法都是对增广矩阵使用初等行变换, 但其本质是高斯消元法.

☞ 目前遇到的线性方程组求解题目, A 都是可逆的. 不可逆的情形 (包括 A 不是方阵), 在下一章讨论.

(2) 求解矩阵方程 $\boldsymbol{XA} = \boldsymbol{B}$.

(2) 求解矩阵方程 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$.

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 两边右乘以 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 得 $\boldsymbol{XAA}^{-1}=\boldsymbol{BA}^{-1}$.

(2) 求解矩阵方程 $\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 两边右乘以 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 得 $\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}$. 即

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

(2) 求解矩阵方程 $\boldsymbol{XA} = \boldsymbol{B}$.

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 两边右乘以 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 得 $\boldsymbol{XAA}^{-1} = \boldsymbol{BA}^{-1}$. 即

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{BA}^{-1}.$$

求 $\boldsymbol{BA}^{-1}$ 的方法:

进行初等列变换

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{BA}^{-1} \end{pmatrix}.$$

动作要领: (1) 将 $\boldsymbol{A}$ 初等列变换为 $\boldsymbol{I}$, (2) 同时, $\boldsymbol{B}$ 进行完全相同的初等列变换.

(2) 求解矩阵方程 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$.

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 两边右乘以 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 得 $\boldsymbol{XAA}^{-1}=\boldsymbol{BA}^{-1}$. 即

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{BA}^{-1}.$$

求 $\boldsymbol{BA}^{-1}$ 的方法:

进行初等列变换

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{BA}^{-1} \end{pmatrix}.$$

动作要领: (1) 将 $\boldsymbol{A}$ 初等列变换为 $\boldsymbol{I}$, (2) 同时, $\boldsymbol{B}$ 进行完全相同的初等列变换.

解释: $\boldsymbol{A} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \boldsymbol{I}$, 相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的右侧乘上若干初等矩阵 $\boldsymbol{Q}_1, \cdots, \boldsymbol{Q}_t$,

(2) 求解矩阵方程 $XA = B$.

若 A 可逆, 两边右乘以 A^{-1}, 得 $XAA^{-1} = BA^{-1}$. 即

$$X = BA^{-1}.$$

求 BA^{-1} 的方法:

进行初等列变换

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} I \\ BA^{-1} \end{pmatrix}.$$

动作要领: (1) 将 A 初等列变换为 I, (2) 同时, B 进行完全相同的初等列变换.

解释: $A \xrightarrow{\text{初等列变换}} I$, 相当于在 A 的右侧乘上若干初等矩阵 $Q_1, \cdots, Q_t$, 即 $AQ_1 \cdots Q_t = I$,

(2) 求解矩阵方程 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$.

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 两边右乘以 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 得 $\boldsymbol{XAA}^{-1}=\boldsymbol{BA}^{-1}$. 即

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{BA}^{-1}.$$

求 $\boldsymbol{BA}^{-1}$ 的方法:

进行初等列变换

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{BA}^{-1} \end{pmatrix}.$$

动作要领: (1) 将 $\boldsymbol{A}$ 初等列变换为 $\boldsymbol{I}$, (2) 同时, $\boldsymbol{B}$ 进行完全相同的初等列变换.

解释: $\boldsymbol{A} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \boldsymbol{I}$, 相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的右侧乘上若干初等矩阵 $\boldsymbol{Q}_1, \cdots, \boldsymbol{Q}_t$, 即 $\boldsymbol{AQ}_1\cdots\boldsymbol{Q}_t=\boldsymbol{I}$, 故 $\boldsymbol{Q}_1\cdots\boldsymbol{Q}_t=\boldsymbol{A}^{-1}$.

(2) 求解矩阵方程 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$.

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 两边右乘以 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 得 $\boldsymbol{XAA}^{-1}=\boldsymbol{BA}^{-1}$. 即

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{BA}^{-1}.$$

求 $\boldsymbol{BA}^{-1}$ 的方法:

进行初等列变换

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{BA}^{-1} \end{pmatrix}.$$

动作要领: (1) 将 $\boldsymbol{A}$ 初等列变换为 $\boldsymbol{I}$, (2) 同时, $\boldsymbol{B}$ 进行完全相同的初等列变换.

解释: $\boldsymbol{A} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \boldsymbol{I}$, 相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的右侧乘上若干初等矩阵 $\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_t$, 即 $\boldsymbol{AQ}_1\cdots\boldsymbol{Q}_t=\boldsymbol{I}$, 故 $\boldsymbol{Q}_1\cdots\boldsymbol{Q}_t=\boldsymbol{A}^{-1}$.

$\boldsymbol{B}$ 进行完全相同的初等列变换, 相当于在 $\boldsymbol{B}$ 的右侧乘上初等矩阵 $\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_t$.

(2) 求解矩阵方程 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$.

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 两边右乘以 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 得 $\boldsymbol{XAA}^{-1}=\boldsymbol{BA}^{-1}$. 即

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{BA}^{-1}.$$

求 $\boldsymbol{BA}^{-1}$ 的方法:

进行初等列变换

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{BA}^{-1} \end{pmatrix}.$$

动作要领: (1) 将 $\boldsymbol{A}$ 初等列变换为 $\boldsymbol{I}$, (2) 同时, $\boldsymbol{B}$ 进行完全相同的初等列变换.

解释: $\boldsymbol{A} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \boldsymbol{I}$, 相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的右侧乘上若干初等矩阵 $\boldsymbol{Q}_1, \cdots, \boldsymbol{Q}_t$, 即 $\boldsymbol{AQ}_1\cdots\boldsymbol{Q}_t=\boldsymbol{I}$, 故 $\boldsymbol{Q}_1\cdots\boldsymbol{Q}_t=\boldsymbol{A}^{-1}$.

$\boldsymbol{B}$ 进行完全相同的初等列变换, 相当于在 $\boldsymbol{B}$ 的右侧乘上初等矩阵 $\boldsymbol{Q}_1, \cdots, \boldsymbol{Q}_t$. 即

$$\boldsymbol{BQ}_1\cdots\boldsymbol{Q}_t=\boldsymbol{BA}^{-1}.$$

例 5.9

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{X}$ 使 $\boldsymbol{XA} = \boldsymbol{B}$.

解:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \\ \hdashline 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

解:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{rrr} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \\ \hdashline 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \left(\begin{array}{rrr} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & -3 \\ \hdashline 3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

解:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \\ \hdashline 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & -3 \\ \hdashline 3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{c_2 - 2c_1} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & 2 \\ -4 & 11 & -3 \\ \hdashline 3 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \end{array}\right)$$

解:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \\ \hdashline 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & -3 \\ \hdashline 3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 - 2c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & 2 \\ -4 & 11 & -3 \\ \hdashline 3 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 + 4c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & -3 \\ \hdashline 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

解:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \\ \hdashline 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & -3 \\ \hdashline 3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{c_2 - 2c_1} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & 2 \\ -4 & 11 & -3 \\ \hdashline 3 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{c_2 + 4c_3} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & -3 \\ \hdashline 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{c_3 - 2c_2} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & -1 \\ \hdashline 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{array}\right)$$

解:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \\ \hdashline 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & -3 \\ \hdashline 3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{c_2 - 2c_1} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & 2 \\ -4 & 11 & -3 \\ \hdashline 3 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{c_2 + 4c_3} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & -3 \\ \hdashline 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{c_3 - 2c_2} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & -1 \\ \hdashline 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{c_1 - 4c_3 \\ c_3 \times (-1)}]{c_2 - c_3} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hdashline -1 & -1 & 1 \\ 17 & 7 & -4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{c_1-3c_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 2 & -1 & -1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\xrightarrow{c_1-3c_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 2 & -1 & -1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

所以

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

上述解法仍然是高斯消元法

对 $\boldsymbol{XA} = \boldsymbol{B}$ 两边取转置, 得

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}.$$

上述解法仍然是高斯消元法

对 $\boldsymbol{X}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ 两边取转置, 得

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}.$$

对 $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right)$ 进行初等行变换, 可以解得 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$.

上述解法仍然是高斯消元法

对 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$ 两边取转置, 得

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}.$$

对 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$ 进行初等行变换, 可以解得 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$. 这等同于对 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$ 进行初等列变换.

Outline

1. 高斯消元法
2. 矩阵的加法　数量乘法　乘法
3. 矩阵的转置　对称矩阵
4. 可逆矩阵的逆矩阵
5. 矩阵的初等变换和初等矩阵
6. 分块矩阵
    - 分块矩阵的定义与运算
    - 分块矩阵的初等变换和分块初等阵

Outline

1. 高斯消元法
2. 矩阵的加法　数量乘法　乘法
3. 矩阵的转置　对称矩阵
4. 可逆矩阵的逆矩阵
5. 矩阵的初等变换和初等矩阵
6. 分块矩阵
   - 分块矩阵的定义与运算
   - 分块矩阵的初等变换和分块初等阵

在这一节, 我们来介绍一个处理阶数较高的矩阵时常用的方法, 即矩阵的分块.

在这一节, 我们来介绍一个处理阶数较高的矩阵时常用的方法, 即矩阵的分块. 有时候, 我们把一个大矩阵看成是由一些小矩阵组成的, 就如矩阵是由数组成的一样.

在这一节, 我们来介绍一个处理阶数较高的矩阵时常用的方法, 即矩阵的分块. 有时候, 我们把一个大矩阵看成是由一些小矩阵组成的, 就如矩阵是由数组成的一样. 特别在运算中, 把这些小矩阵当作数一样来处理. 这就是所谓矩阵的分块.

在这一节, 我们来介绍一个处理阶数较高的矩阵时常用的方法, 即矩阵的分块. 有时候, 我们把一个大矩阵看成是由一些小矩阵组成的, 就如矩阵是由数组成的一样. 特别在运算中, 把这些小矩阵当作数一样来处理. 这就是所谓矩阵的分块.

为了说明这个方法, 下面看一个例子.

在矩阵

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_2 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{I}_2 \end{pmatrix}$$

中,

在矩阵

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc:cc}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \hdashline -1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_2 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{I}_2\end{pmatrix}$$

中, $\boldsymbol{I}_2$ 表示 2 阶单位矩阵, 而

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \boldsymbol{0}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

在矩阵

$$
\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{rr:rr}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
\hdashline
-1 & 2 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1
\end{array}\right)=\begin{pmatrix}
\boldsymbol{I}_2 & \mathbf{0} \\
\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{I}_2
\end{pmatrix}
$$

中, $\boldsymbol{I}_2$ 表示 2 阶单位矩阵, 而

$$
\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}
-1 & 2 \\
1 & 1
\end{pmatrix}, \mathbf{0}=\begin{pmatrix}
0 & 0 \\
0 & 0
\end{pmatrix}.
$$

在矩阵

$$
\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{rr:rr}
1 & 0 & 3 & 2 \\
-1 & 2 & 0 & 1 \\
\hdashline
1 & 0 & 4 & 1 \\
-1 & -1 & 2 & 0
\end{array}\right)=\begin{pmatrix}
\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} \\
\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22}
\end{pmatrix}
$$

中,

在矩阵

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_2 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{I}_2 \end{pmatrix}$$

中, $\boldsymbol{I}_2$ 表示 2 阶单位矩阵, 而

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{0}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

在矩阵

$$\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ \hdashline 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} \end{pmatrix}$$

中,

$$\boldsymbol{B}_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}_{12}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}_{21}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}_{22}=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

在计算 $\boldsymbol{AB}$ 时, 把 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都看成是由这些小矩阵组成的, 即按 2 阶矩阵来运算.

在计算 $\boldsymbol{AB}$ 时, 把 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都看成是由这些小矩阵组成的, 即按 2 阶矩阵来运算. 于是

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_2 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{I}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_{11} + \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_{12} + \boldsymbol{B}_{22} \end{pmatrix},$$

在计算 $\boldsymbol{AB}$ 时, 把 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都看成是由这些小矩阵组成的, 即按 2 阶矩阵来运算. 于是

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_2 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{I}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_{11} + \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_{12} + \boldsymbol{B}_{22} \end{pmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_{11} + \boldsymbol{B}_{21} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_{12} + \boldsymbol{B}_{22} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

在计算 $\boldsymbol{AB}$ 时, 把 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都看成是由这些小矩阵组成的, 即按 2 阶矩阵来运算. 于是

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_2 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{I}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_{11} + \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_{12} + \boldsymbol{B}_{22} \end{pmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_{11} + \boldsymbol{B}_{21} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_{12} + \boldsymbol{B}_{22} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

因此

$$\boldsymbol{AB} = \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ \hdashline -2 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 3 \end{array}\right).$$

在计算 $\boldsymbol{AB}$ 时, 把 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都看成是由这些小矩阵组成的, 即按 2 阶矩阵来运算. 于是

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_2 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{I}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_{11} + \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_{12} + \boldsymbol{B}_{22} \end{pmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_{11} + \boldsymbol{B}_{21} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_{12} + \boldsymbol{B}_{22} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

因此

$$\boldsymbol{AB} = \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ \hdashline -2 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 3 \end{array}\right).$$

不难验证, 直接按 4 阶矩阵乘积的定义来作, 结果是一样的.

例 6.1

记

$$\boldsymbol{e}_i = (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}, \qquad i = 1, 2, \cdots, n.$$

例 6.1

记

$$\boldsymbol{e}_i = (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}, \qquad i = 1, 2, \cdots, n.$$

则 n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{I}_n$ 可以写为如下两种分块形式:

$$\boldsymbol{I}_n = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n], \tag{12}$$

(13)

例 6.1

记

$$\boldsymbol{e}_i = (0,0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}, \qquad i=1,2,\cdots,n.$$

则 n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{I}_n$ 可以写为如下两种分块形式:

$$\boldsymbol{I}_n = [\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n], \tag{12}$$

$$\boldsymbol{I}_n = [\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n]^{\mathrm{T}}. \tag{13}$$

分块矩阵的乘法

一般地说, 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ik}]_{s\times n}$, $\boldsymbol{B}=[b_{kj}]_{n\times m}$,

分块矩阵的乘法

一般地说, 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ik}]_{s\times n}$, $\boldsymbol{B}=[b_{kj}]_{n\times m}$, 把 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 分成一些小矩阵:

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_t \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_l \end{array} \\ \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1l} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{t1} & \boldsymbol{A}_{t2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{tl} \end{bmatrix} \end{array}, \qquad \boldsymbol{B}=\begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_l \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} m_1 & m_2 & \cdots & m_r \end{array} \\ \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1r} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} & \cdots & \boldsymbol{B}_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{l1} & \boldsymbol{B}_{l2} & \cdots & \boldsymbol{B}_{lr} \end{bmatrix} \end{array}, \tag{14}$$

分块矩阵的乘法

一般地说, 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ik}]_{s\times n}$, $\boldsymbol{B}=[b_{kj}]_{n\times m}$, 把 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 分成一些小矩阵:

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_l \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_t \end{array} & \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1l} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{t1} & \boldsymbol{A}_{t2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{tl} \end{bmatrix} \end{array}, \qquad \boldsymbol{B}=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} m_1 & m_2 & \cdots & m_r \end{array} \\ \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_l \end{array} & \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1r} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} & \cdots & \boldsymbol{B}_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{l1} & \boldsymbol{B}_{l2} & \cdots & \boldsymbol{B}_{lr} \end{bmatrix} \end{array}, \tag{14}$$

其中矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列的分法必须与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行的分法一致.

则

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$$

则

$$
C = AB = \begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} m_1 & m_2 & \cdots & m_r \end{array} \\
\begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_t \end{array} & \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12} & \cdots & \boldsymbol{C}_{1r} \\ \boldsymbol{C}_{21} & \boldsymbol{C}_{22} & \cdots & \boldsymbol{C}_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{C}_{t1} & \boldsymbol{C}_{t2} & \cdots & \boldsymbol{C}_{tr} \end{bmatrix}
\end{array}, \tag{15}
$$

其中, $\boldsymbol{C}_{pq} = \boldsymbol{A}_{p1}\boldsymbol{B}_{1q} + \boldsymbol{A}_{p2}\boldsymbol{B}_{2q} + \cdots + \boldsymbol{A}_{pl}\boldsymbol{B}_{lq}$.

准对角矩阵

形式为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \boldsymbol{A}_l \end{pmatrix}$$

的矩阵, 其中 $\boldsymbol{A}_i$ 是 $n_i \times n_i$ 矩阵 $(i = 1, 2, \cdots, l)$, 称为**准对角矩阵**.

准对角矩阵

形式为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2 & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{A}_l \end{pmatrix}$$

的矩阵, 其中 $\boldsymbol{A}_i$ 是 $n_i \times n_i$ 矩阵 $(i = 1, 2, \cdots, l)$, 称为**准对角矩阵**. 或记为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_l \end{pmatrix}$$

准对角矩阵

形式为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \boldsymbol{A}_l \end{pmatrix}$$

的矩阵, 其中 $\boldsymbol{A}_i$ 是 $n_i \times n_i$ 矩阵 $(i = 1, 2, \cdots, l)$, 称为**准对角矩阵**. 或记为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_l \end{pmatrix}$$

当然, 准对角矩阵包括对角矩阵作为特殊情形.

对于两个有相同分块的准对角矩阵

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_l \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_l \end{pmatrix},$$

对于两个有相同分块的准对角矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_l \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 & & & \\ & \boldsymbol{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{B}_l \end{pmatrix},$$

如果它们相应的分块是同级的,

对于两个有相同分块的准对角矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_l\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1 & & & \\ & \boldsymbol{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{B}_l\end{pmatrix},$$

如果它们相应的分块是同级的, 那么显然有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_l\boldsymbol{B}_l\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{B}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_l+\boldsymbol{B}_l\end{pmatrix}.$$

它们还是准对角矩阵.

其次, 如果 $A_1, A_2, \cdots, A_l$ 都是可逆矩阵, 那么

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_l \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \\ & \boldsymbol{A}_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_l^{-1} \end{pmatrix}.$$

例 6.2

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $n \times s$ 矩阵,

例 6.2

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $n \times s$ 矩阵, 将 $\boldsymbol{B}$ 分块为 $1 \times s$ 个分块矩阵, 即

$$\boldsymbol{B} = \left(\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{b}_s\right),$$

例 6.2

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $n \times s$ 矩阵, 将 $\boldsymbol{B}$ 分块为 $1 \times s$ 个分块矩阵, 即

$$\boldsymbol{B} = \left(\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{b}_s\right),$$

则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{b}_s\right)$$

例 6.2

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $n \times s$ 矩阵, 将 $\boldsymbol{B}$ 分块为 $1 \times s$ 个分块矩阵, 即

$$\boldsymbol{B} = \left(\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{b}_s\right),$$

则

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{b}_s\right) = \left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_s\right).$$

例 6.2

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $n \times s$ 矩阵, 将 $\boldsymbol{B}$ 分块为 $1 \times s$ 个分块矩阵, 即

$$\boldsymbol{B} = \big(\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{b}_s\big),$$

则

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}\big(\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{b}_s\big) = \big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_s\big).$$

☞ 若已知 $\boldsymbol{AB} = \mathbf{0}$,

例 6.2

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $n \times s$ 矩阵, 将 $\boldsymbol{B}$ 分块为 $1 \times s$ 个分块矩阵, 即

$$\boldsymbol{B} = \big(\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{b}_s\big),$$

则

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}\big(\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{b}_s\big) = \big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_s\big).$$

☞ 若已知 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{b}_s$ 都是线性方程组

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$$

的解.

Outline

1 高斯消元法

2 矩阵的加法　数量乘法　乘法

3 矩阵的转置　对称矩阵

4 可逆矩阵的逆矩阵

5 矩阵的初等变换和初等矩阵

6 分块矩阵
- 分块矩阵的定义与运算
- 分块矩阵的初等变换和分块初等阵

将某个单位矩阵进行如下分块:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix},$$

将某个单位矩阵进行如下分块:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix},$$

对它进行

1. 两行 (列) 对换;

将某个单位矩阵进行如下分块:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix},$$

对它进行

1. 两行 (列) 对换;
2. 某一行 (列) 左乘 (右乘) 一个矩阵 $\boldsymbol{P}$;

将某个单位矩阵进行如下分块:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix},$$

对它进行

1. 两行 (列) 对换;
2. 某一行 (列) 左乘 (右乘) 一个矩阵 $\boldsymbol{P}$;
3. 一行 (列) 加上另一行 (列) 的 $\boldsymbol{P}$ 倍数,

将某个单位矩阵进行如下分块:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix},$$

对它进行

1. 两行 (列) 对换;
2. 某一行 (列) 左乘 (右乘) 一个矩阵 $\boldsymbol{P}$;
3. 一行 (列) 加上另一行 (列) 的 $\boldsymbol{P}$ 倍数,

就可得到如下三类分块初等矩阵:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n \\ \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}, \qquad \text{(分块\textbf{对换}初等阵)}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{P} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}, \qquad \text{(分块\textbf{倍乘}初等阵)}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{P} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}. \qquad \text{(分块\textbf{倍加}初等阵)}$$

左乘行变, 右乘列变

分块初等矩阵左乘任一个分块矩阵

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix},$$

只要乘法能够进行, 其结果就是对它进行相应的分块初等行变换:

$$\tag{18}$$

左乘行变, 右乘列变

分块初等矩阵左乘任一个分块矩阵

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix},$$

只要乘法能够进行, 其结果就是对它进行相应的分块初等行变换:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_m \\ \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}, \tag{16}$$

$$\tag{18}$$

左乘行变, 右乘列变

分块初等矩阵左乘任一个分块矩阵

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix},$$

只要乘法能够进行, 其结果就是对它进行相应的分块初等行变换:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_m \\ \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}, \tag{16}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{P} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{PA} & \boldsymbol{PB} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}, \tag{17}$$

(18)

左乘行变, 右乘列变

分块初等矩阵左乘任一个分块矩阵

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix},$$

只要乘法能够进行, 其结果就是对它进行相应的分块初等行变换:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_m \\ \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}, \tag{16}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{P} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{PA} & \boldsymbol{PB} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}, \tag{17}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{P} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C}+\boldsymbol{PA} & \boldsymbol{D}+\boldsymbol{PB} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

左乘行变, 右乘列变

分块初等矩阵左乘任一个分块矩阵

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix},$$

只要乘法能够进行, 其结果就是对它进行相应的分块初等行变换:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_m \\ \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}, \tag{16}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{P} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{PA} & \boldsymbol{PB} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}, \tag{17}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{P} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C}+\boldsymbol{PA} & \boldsymbol{D}+\boldsymbol{PB} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

同样, 用它们右乘任一矩阵, 相当于对该矩阵作相应的分块初等列变换.

例 6.3 (P.99 T.61, 64)

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 及 s 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 都可逆, 求

(1) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^{-1}$; (2) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}^{-1}$.

例 6.3 (P.99 T.61, 64)

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 及 s 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 都可逆, 求

(1) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^{-1}$;　　(2) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}^{-1}$.

解: (1) 解法一. 设

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{C}_2 \\ \boldsymbol{C}_3 & \boldsymbol{C}_4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{I},$$

例 6.3 (P.99 T.61, 64)

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 及 s 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 都可逆, 求

(1) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^{-1}$; (2) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}^{-1}$.

解: (1) 解法一. 设

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{C}_2 \\ \boldsymbol{C}_3 & \boldsymbol{C}_4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{I},$$

求解 $\boldsymbol{C}_1$, $\boldsymbol{C}_2$, $\boldsymbol{C}_3$, $\boldsymbol{C}_4$ 得结果. 下略.

解法二. 利用分块初等矩阵在矩阵乘法中的功能.

解法二. 利用分块初等矩阵在矩阵乘法中的功能. 因为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_s \\ \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix},$$

解法二. 利用分块初等矩阵在矩阵乘法中的功能. 因为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_s \\ \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_s & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{I}.$$

解法二. 利用分块初等矩阵在矩阵乘法中的功能. 因为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_s \\ \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_s & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{I}.$$

所以

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_s \\ \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} = \boldsymbol{I},$$

解法二. 利用分块初等矩阵在矩阵乘法中的功能. 因为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_s \\ \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_s & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{I}.$$

所以

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_s \\ \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} = \boldsymbol{I},$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_s \\ \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

解法三. 利用分块初等变换求解.

解法三. 利用分块初等变换求解. 由

$$\left(\begin{array}{cc:cc} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{array}\right)$$

解法三. 利用分块初等变换求解. 由

$$\left(\begin{array}{cc:cc} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{cc:cc} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \end{array}\right)$$

解法三. 利用分块初等变换求解. 由

$$\left(\begin{array}{cc:cc} O & A & I & O \\ B & O & O & I \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{cc:cc} B & O & O & I \\ O & A & I & O \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[A^{-1}\times r_2]{B^{-1}\times r_1} \left(\begin{array}{cc:cc} I & O & O & B^{-1} \\ O & I & A^{-1} & O \end{array}\right),$$

解法三. 利用分块初等变换求解. 由

$$\left(\begin{array}{cc:cc} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{cc:cc} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\boldsymbol{A}^{-1} \times r_2]{\boldsymbol{B}^{-1} \times r_1} \left(\begin{array}{cc:cc} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{array}\right),$$

得

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

更一般的结论是, 若矩阵 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_k$ 可逆, 则

$$\begin{pmatrix} & & & \boldsymbol{A}_1 \\ & & \boldsymbol{A}_2 & \\ & \iddots & & \\ \boldsymbol{A}_k & & & \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} & & & \boldsymbol{A}_k^{-1} \\ & & \iddots & \\ & \boldsymbol{A}_2^{-1} & & \\ \boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \end{pmatrix}.$$

(2) 直接利用分块初等变换求解.

$$(21)$$

(2) 直接利用分块初等变换求解.

$$\left(\begin{array}{cc:cc} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{array}\right) \xrightarrow{\boldsymbol{A}^{-1}\times r_1} \left(\begin{array}{cc:cc} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{array}\right) \tag{19}$$

(21)

(2) 直接利用分块初等变换求解.

$$\left(\begin{array}{cc:cc} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{array}\right) \xrightarrow{\boldsymbol{A}^{-1}\times r_1} \left(\begin{array}{cc:cc} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{array}\right) \tag{19}$$

$$\xrightarrow{r_2-\boldsymbol{C}\times r_1} \left(\begin{array}{cc:cc} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} & -\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{I} \end{array}\right) \tag{20}$$

$$\tag{21}$$

(2) 直接利用分块初等变换求解.

$$\left(\begin{array}{cc:cc} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{array}\right) \xrightarrow{\boldsymbol{A}^{-1}\times r_1} \left(\begin{array}{cc:cc} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{array}\right) \tag{19}$$

$$\xrightarrow{r_2-\boldsymbol{C}\times r_1} \left(\begin{array}{cc:cc} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} & -\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{I} \end{array}\right) \tag{20}$$

$$\xrightarrow{\boldsymbol{B}^{-1}\times r_2} \left(\begin{array}{cc:cc} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{array}\right). \tag{21}$$

(2) 直接利用分块初等变换求解.

$$\left(\begin{array}{cc:cc} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{array}\right) \xrightarrow{\boldsymbol{A}^{-1}\times r_1} \left(\begin{array}{cc:cc} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{array}\right) \tag{19}$$

$$\xrightarrow{r_2-\boldsymbol{C}\times r_1} \left(\begin{array}{cc:cc} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} & -\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{I} \end{array}\right) \tag{20}$$

$$\xrightarrow{\boldsymbol{B}^{-1}\times r_2} \left(\begin{array}{cc:cc} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{array}\right). \tag{21}$$

所以

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}.$$

注 1

上述的 (20) 式中的变换为什么写成 $r_2 - \boldsymbol{C} \times r_1$，而不是 $r_2 - r_1 \times \boldsymbol{C}$?

注 1

上述的 (20) 式中的变换为什么写成 $r_2 - \boldsymbol{C} \times r_1$, 而不是 $r_2 - r_1 \times \boldsymbol{C}$?

注意这里是行变换, 应该是左乘.

注 1

上述的 (20) 式中的变换为什么写成 $r_2 - \boldsymbol{C} \times r_1$, 而不是 $r_2 - r_1 \times \boldsymbol{C}$?

注意这里是行变换, 应该是左乘. 否则会导致下面的错误:

$$(19) \xrightarrow{r_2 - r_1 \times \boldsymbol{C}} \left(\begin{array}{cc:cc} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{I} \end{array}\right)$$

注 1

上述的 (20) 式中的变换为什么写成 $r_2 - \boldsymbol{C} \times r_1$, 而不是 $r_2 - r_1 \times \boldsymbol{C}$?
注意这里是行变换, 应该是左乘. 否则会导致下面的错误:

$$
(19) \xrightarrow{r_2 - r_1 \times \boldsymbol{C}} \left(\begin{array}{cc:cc} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{I} \end{array}\right)
\xrightarrow{r_2 \times \boldsymbol{B}^{-1}} \left(\begin{array}{cc:cc} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{array}\right).
$$

注 1

上述的 (20) 式中的变换为什么写成 $r_2 - \boldsymbol{C} \times r_1$, 而不是 $r_2 - r_1 \times \boldsymbol{C}$?

注意这里是行变换, 应该是左乘. 否则会导致下面的错误:

$$
(19) \xrightarrow{r_2 - r_1 \times \boldsymbol{C}} \left(\begin{array}{cc:cc} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{I} \end{array}\right)
\xrightarrow{r_2 \times \boldsymbol{B}^{-1}} \left(\begin{array}{cc:cc} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{array}\right).
$$

☞ 其实, 分块初等矩阵可以分解为有限个初等矩阵的乘积, 分块初等矩阵在矩阵乘法中体现出的功能, 是初等矩阵的相应功能的 “浓缩”.

注 1

上述的 (20) 式中的变换为什么写成 $r_2 - \boldsymbol{C} \times r_1$, 而不是 $r_2 - r_1 \times \boldsymbol{C}$?

注意这里是行变换, 应该是左乘. 否则会导致下面的错误:

$$
\begin{aligned}
(19) \xrightarrow{r_2 - r_1 \times \boldsymbol{C}} & \left(\begin{array}{cc|cc} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{I} \end{array}\right) \\
\xrightarrow{r_2 \times \boldsymbol{B}^{-1}} & \left(\begin{array}{cc|cc} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{array}\right).
\end{aligned}
$$

☞ 其实, 分块初等矩阵可以分解为有限个初等矩阵的乘积, 分块初等矩阵在矩阵乘法中体现出的功能, 是初等矩阵的相应功能的 “浓缩”.

比如 (21) 中只写了一步 $\boldsymbol{B}^{-1} \times r_2$ 来表示变换过程, 其实就是数个初等行变换的集中反映.

注 1

上述的 (20) 式中的变换为什么写成 $r_2 - \boldsymbol{C} \times r_1$, 而不是 $r_2 - r_1 \times \boldsymbol{C}$?

注意这里是行变换, 应该是左乘. 否则会导致下面的错误:

$$(19) \xrightarrow{r_2 - r_1 \times \boldsymbol{C}} \left(\begin{array}{cc|cc} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{I} \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \times \boldsymbol{B}^{-1}} \left(\begin{array}{cc|cc} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{array}\right).$$

☞ 其实, 分块初等矩阵可以分解为有限个初等矩阵的乘积, 分块初等矩阵在矩阵乘法中体现出的功能, 是初等矩阵的相应功能的 “浓缩”.

比如 (21) 中只写了一步 $\boldsymbol{B}^{-1} \times r_2$ 来表示变换过程, 其实就是数个初等行变换的集中反映.

这也是利用分块初等矩阵解题, 在方法上成立的真正原因.

Outline

1. 高斯消元法

2. 矩阵的加法　数量乘法　乘法

3. 矩阵的转置　对称矩阵

4. 可逆矩阵的逆矩阵

5. 矩阵的初等变换和初等矩阵

6. 分块矩阵

7. 习题解答

学完本章之后要具备的最基本能力

- 求逆矩阵.

学完本章之后要具备的最基本能力

- 求逆矩阵.
- 矩阵乘法不满足的三条规律.

学完本章之后要具备的最基本能力

- 求逆矩阵.
- 矩阵乘法不满足的三条规律.
- 解矩阵方程.

学完本章之后要具备的最基本能力

- 求逆矩阵.
- 矩阵乘法不满足的三条规律.
- 解矩阵方程.
- 伴随矩阵的定义与公式.

例 7.1

设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}$, 证明 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{I}$ 都可逆, 并求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 及 $(\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{I})^{-1}$.

例 7.1

设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$, 证明 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}$ 都可逆, 并求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 及 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})^{-1}$.

证:

$$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}\Longrightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=2\boldsymbol{I}$$

例 7.1

设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\mathbf{0}$, 证明 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}$ 都可逆, 并求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 及 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})^{-1}$.

证:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\mathbf{0} &\Longrightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=2\boldsymbol{I}\\ &\Longrightarrow \boldsymbol{A}\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\right]=\boldsymbol{I}\end{aligned}$$

例 7.1

设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$, 证明 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}$ 都可逆, 并求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 及 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})^{-1}$.

证:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0} &\Longrightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=2\boldsymbol{I}\\ &\Longrightarrow \boldsymbol{A}\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\right]=\boldsymbol{I}\\ &\Longrightarrow \boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}).\end{aligned}$$

例 7.1

设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$, 证明 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}$ 都可逆, 并求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 及 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})^{-1}$.

证:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0} &\Longrightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=2\boldsymbol{I}\\ &\Longrightarrow \boldsymbol{A}\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\right]=\boldsymbol{I}\\ &\Longrightarrow \boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}).\\ \boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0} &\Longrightarrow (\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})\boldsymbol{A}-3(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})=-4\boldsymbol{I}\end{aligned}$$

例 7.1

设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$, 证明 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}$ 都可逆, 并求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 及 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})^{-1}$.

证:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0} &\Longrightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=2\boldsymbol{I}\\ &\Longrightarrow \boldsymbol{A}\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\right]=\boldsymbol{I}\\ &\Longrightarrow \boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}).\\ \boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0} &\Longrightarrow (\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})\boldsymbol{A}-3(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})=-4\boldsymbol{I}\\ &\Longrightarrow (\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})=-4\boldsymbol{I}\end{aligned}$$

例 7.1

设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$, 证明 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}$ 都可逆, 并求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 及 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})^{-1}$.

证:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0} &\Longrightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=2\boldsymbol{I}\\
&\Longrightarrow \boldsymbol{A}\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\right]=\boldsymbol{I}\\
&\Longrightarrow \boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0} &\Longrightarrow (\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})\boldsymbol{A}-3(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})=-4\boldsymbol{I}\\
&\Longrightarrow (\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})=-4\boldsymbol{I}\\
&\Longrightarrow (\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})\left[-\frac{1}{4}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})\right]=\boldsymbol{I}
\end{aligned}
$$

例 7.1

设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$, 证明 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}$ 都可逆, 并求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 及 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})^{-1}$.

证:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0} &\Longrightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=2\boldsymbol{I}\\
&\Longrightarrow \boldsymbol{A}\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\right]=\boldsymbol{I}\\
&\Longrightarrow \boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}).\\
\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0} &\Longrightarrow (\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})\boldsymbol{A}-3(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})=-4\boldsymbol{I}\\
&\Longrightarrow (\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})=-4\boldsymbol{I}\\
&\Longrightarrow (\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})\left[-\frac{1}{4}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})\right]=\boldsymbol{I}\\
&\Longrightarrow (\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})^{-1}=\frac{1}{4}(3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}).
\end{aligned}$$

这类题目的解法就是“凑”出求逆的式子. 比如本题, 要从 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$ 中凑出式子 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}$.

这类题目的解法就是“凑”出求逆的式子. 比如本题, 要从 $\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}$ 中凑出式子 $\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{I}$.

思考: 由 $\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}$, 试求 $\boldsymbol{A} + k\boldsymbol{I}$ 的逆矩阵, k 为任意实数.

这类题目的解法就是“凑”出求逆的式子. 比如本题, 要从 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$ 中凑出式子 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}$.

思考: 由 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$, 试求 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{I}$ 的逆矩阵, k 为任意实数.

解: 设法凑出 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{I}$.

这类题目的解法就是“凑”出求逆的式子. 比如本题, 要从 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$ 中凑出式子 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}$.

思考: 由 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$, 试求 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{I}$ 的逆矩阵, k 为任意实数.

解: 设法凑出 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{I}$.

$$\text{原式} \Longrightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{I})-(k+1)\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$$

这类题目的解法就是“凑”出求逆的式子. 比如本题, 要从 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\mathbf{0}$ 中凑出式子 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}$.

思考: 由 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\mathbf{0}$, 试求 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{I}$ 的逆矩阵, k 为任意实数.

解: 设法凑出 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{I}$.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &\Longrightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{I})-(k+1)\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\mathbf{0}\\
&\Longrightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{I})-(k+1)(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{I})+(k+1)k\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{I}=\mathbf{0}
\end{aligned}$$

这类题目的解法就是“凑”出求逆的式子. 比如本题, 要从 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$ 中凑出式子 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}$.

思考: 由 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$, 试求 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{I}$ 的逆矩阵, k 为任意实数.

解: 设法凑出 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{I}$.

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &\Longrightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{I})-(k+1)\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}\\
&\Longrightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{I})-(k+1)(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{I})+(k+1)k\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}\\
&\Longrightarrow \big(\boldsymbol{A}-(k+1)\boldsymbol{I}\big)(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{I})=\big(2-k(k+1)\big)\boldsymbol{I},
\end{aligned}
$$

这类题目的解法就是“凑”出求逆的式子. 比如本题, 要从 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$ 中凑出式子 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}$.

思考: 由 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$, 试求 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{I}$ 的逆矩阵, k 为任意实数.

解: 设法凑出 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{I}$.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &\Longrightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{I})-(k+1)\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}\\
&\Longrightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{I})-(k+1)(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{I})+(k+1)k\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}\\
&\Longrightarrow \big(\boldsymbol{A}-(k+1)\boldsymbol{I}\big)(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{I})=\big(2-k(k+1)\big)\boldsymbol{I},
\end{aligned}$$

故当 $2-k(k+1)\neq 0$, 即 $k\neq 1$, $k\neq -2$ 时,

这类题目的解法就是“凑”出求逆的式子. 比如本题, 要从 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$ 中凑出式子 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}$.

思考: 由 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$, 试求 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{I}$ 的逆矩阵, k 为任意实数.

解: 设法凑出 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{I}$.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &\Longrightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{I})-(k+1)\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}\\
&\Longrightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{I})-(k+1)(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{I})+(k+1)k\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}\\
&\Longrightarrow \big(\boldsymbol{A}-(k+1)\boldsymbol{I}\big)(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{I})=\big(2-k(k+1)\big)\boldsymbol{I},
\end{aligned}$$

故当 $2-k(k+1)\neq 0$, 即 $k\neq 1$, $k\neq -2$ 时, 有

$$(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{I})^{-1}=\frac{1}{2-k(k+1)}\big(\boldsymbol{A}-(k+1)\boldsymbol{I}\big).$$

这类题目的解法就是“凑”出求逆的式子. 比如本题, 要从 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\mathbf{0}$ 中凑出式子 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}$.

思考: 由 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\mathbf{0}$, 试求 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{I}$ 的逆矩阵, k 为任意实数.

解: 设法凑出 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{I}$.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &\Longrightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{I})-(k+1)\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\mathbf{0}\\
&\Longrightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{I})-(k+1)(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{I})+(k+1)k\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{I}=\mathbf{0}\\
&\Longrightarrow \big(\boldsymbol{A}-(k+1)\boldsymbol{I}\big)(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{I})=\big(2-k(k+1)\big)\boldsymbol{I},
\end{aligned}$$

故当 $2-k(k+1)\neq 0$, 即 $k\neq 1$, $k\neq -2$ 时, 有

$$(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{I})^{-1}=\frac{1}{2-k(k+1)}\big(\boldsymbol{A}-(k+1)\boldsymbol{I}\big).$$

☞ 但这并不意味着 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$ 和 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}$ 一定不可逆.

例 7.2 (P.97 习题 45)

设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$, 试证: $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$ 和 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}$ 不同时可逆.

例 7.2 (P.97 习题 45)

设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$, 试证: $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$ 和 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}$ 不同时可逆.

解:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0} &\Longrightarrow (\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})=\boldsymbol{0}\\ &\Longrightarrow |\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}|\cdot|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}|=0,\end{aligned}$$

例 7.2 (P.97 习题 45)

设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$, 试证: $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$ 和 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}$ 不同时可逆.

解:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0} &\Longrightarrow (\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})=\boldsymbol{0}\\ &\Longrightarrow |\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}|\cdot|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}|=0,\end{aligned}$$

从而 $|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}|=0$ 和 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}|=0$ 至少有一个成立,

例 7.2 (P.97 习题 45)

设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$, 试证: $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$ 和 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}$ 不同时可逆.

解:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0} &\Longrightarrow (\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})=\boldsymbol{0}\\ &\Longrightarrow |\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}|\cdot|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}|=0,\end{aligned}$$

从而 $|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}|=0$ 和 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}|=0$ 至少有一个成立, 所以 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}$ 和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$ 不同时可逆.

例 7.3

证明下列结论:

(1) 若 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 则 $|\boldsymbol{A}^*| = 0$.

例 7.3

证明下列结论:

(1) 若 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 则 $|\boldsymbol{A}^*| = 0$. ($\boldsymbol{A}$ 不可逆, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 也不可逆.)

例 7.3

证明下列结论:

(1) 若 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 则 $|\boldsymbol{A}^*| = 0$. ($\boldsymbol{A}$ 不可逆, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 也不可逆.)

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 也可逆.

例 7.3

证明下列结论:

(1) 若 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 则 $|\boldsymbol{A}^*| = 0$. ($\boldsymbol{A}$ 不可逆, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 也不可逆.)

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 也可逆.

$$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1}, \qquad (\boldsymbol{A}^*)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^* = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}.$$

例 7.3

证明下列结论:

(1) 若 $|\boldsymbol{A}|=0$, 则 $|\boldsymbol{A}^*|=0$. ($\boldsymbol{A}$ 不可逆, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 也不可逆.)

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 也可逆.

$$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1}, \qquad (\boldsymbol{A}^*)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^* = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}.$$

(3) $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

例 7.3

证明下列结论:

(1) 若 $|\boldsymbol{A}|=0$, 则 $|\boldsymbol{A}^*|=0$. ($\boldsymbol{A}$ 不可逆, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 也不可逆.)

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 也可逆.

$$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1},\qquad (\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}.$$

(3) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

(4) $(k\boldsymbol{A})^*=k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$.

例 7.3

证明下列结论:

(1) 若 $|\boldsymbol{A}|=0$, 则 $|\boldsymbol{A}^*|=0$. ($\boldsymbol{A}$ 不可逆, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 也不可逆.)

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 也可逆.

$$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1},\qquad (\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}.$$

(3) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

(4) $(k\boldsymbol{A})^*=k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$.

(5) $(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*$.

例 7.3

证明下列结论:

(1) 若 $|\boldsymbol{A}|=0$, 则 $|\boldsymbol{A}^*|=0$. ($\boldsymbol{A}$ 不可逆, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 也不可逆.)

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 也可逆.

$$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1}, \qquad (\boldsymbol{A}^*)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^* = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}.$$

(3) $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

(4) $(k\boldsymbol{A})^* = k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$.

(5) $(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*$.

分析: 关于伴随矩阵, 要抓住重要公式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}.$$

例 7.3

证明下列结论:

(1) 若 $|\boldsymbol{A}|=0$, 则 $|\boldsymbol{A}^*|=0$. ($\boldsymbol{A}$ 不可逆, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 也不可逆.)

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 也可逆.

$$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1},\qquad (\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}.$$

(3) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

(4) $(k\boldsymbol{A})^*=k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$.

(5) $(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*$.

分析: 关于伴随矩阵, 要抓住重要公式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}.$$

上述公式并不要求 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

例 7.3

证明下列结论:

(1) 若 $|\boldsymbol{A}|=0$, 则 $|\boldsymbol{A}^*|=0$. ($\boldsymbol{A}$ 不可逆, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 也不可逆.)

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 也可逆.

$$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1},\qquad (\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}.$$

(3) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

(4) $(k\boldsymbol{A})^*=k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$.

(5) $(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*$.

分析: 关于伴随矩阵, 要抓住重要公式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}.$$

上述公式并不要求 $\boldsymbol{A}$ 可逆. $\boldsymbol{A}$ 可逆时, 有

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*.$$

(1) 若 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 则 $|\boldsymbol{A}^*| = 0$.

(1) 若 $|\boldsymbol{A}|=0$, 则 $|\boldsymbol{A}^*|=0$. ($\boldsymbol{A}$ 不可逆, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 也不可逆.)

(1) 若 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 则 $|\boldsymbol{A}^*| = 0$. ($\boldsymbol{A}$ 不可逆, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 也不可逆.)

解: (1) 反证法. 假设 $|\boldsymbol{A}^*| \neq 0$, 即 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆.

(1) 若 $|\boldsymbol{A}|=0$, 则 $|\boldsymbol{A}^*|=0$. ($\boldsymbol{A}$ 不可逆, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 也不可逆.)

解: (1) 反证法. 假设 $|\boldsymbol{A}^*|\neq 0$, 即 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆. 由 $|\boldsymbol{A}|=0$, 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}.$$

(1) 若 $|\boldsymbol{A}|=0$, 则 $|\boldsymbol{A}^*|=0$. ($\boldsymbol{A}$ 不可逆, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 也不可逆.)

解: (1) 反证法. 假设 $|\boldsymbol{A}^*|\neq 0$, 即 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆. 由 $|\boldsymbol{A}|=0$, 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{I}=\mathbf{0}.$$

而 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆, 则

$$\boldsymbol{A}=\mathbf{0}.$$

(1) 若 $|\boldsymbol{A}|=0$, 则 $|\boldsymbol{A}^*|=0$. ($\boldsymbol{A}$ 不可逆, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 也不可逆.)

解: (1) 反证法. 假设 $|\boldsymbol{A}^*|\neq 0$, 即 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆. 由 $|\boldsymbol{A}|=0$, 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}.$$

而 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆, 则

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}.$$

这导致

$$\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{0}.$$

(1) 若 $|\boldsymbol{A}|=0$, 则 $|\boldsymbol{A}^*|=0$. ($\boldsymbol{A}$ 不可逆, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 也不可逆.)

解: (1) 反证法. 假设 $|\boldsymbol{A}^*|\neq 0$, 即 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆. 由 $|\boldsymbol{A}|=0$, 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{I} = \mathbf{0}.$$

而 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆, 则

$$\boldsymbol{A} = \mathbf{0}.$$

这导致

$$\boldsymbol{A}^* = \mathbf{0}.$$

与假设 $|\boldsymbol{A}^*|\neq 0$ 矛盾.

(1) 若 $|\boldsymbol{A}|=0$, 则 $|\boldsymbol{A}^*|=0$. ($\boldsymbol{A}$ 不可逆, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 也不可逆.)

解: (1) 反证法. 假设 $|\boldsymbol{A}^*|\neq 0$, 即 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆. 由 $|\boldsymbol{A}|=0$, 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{I}=\mathbf{0}.$$

而 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆, 则

$$\boldsymbol{A}=\mathbf{0}.$$

这导致

$$\boldsymbol{A}^*=\mathbf{0}.$$

与假设 $|\boldsymbol{A}^*|\neq 0$ 矛盾. 故若 $|\boldsymbol{A}|=0$, 则 $|\boldsymbol{A}^*|=0$.

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 也可逆.

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 也可逆.

$$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1}, \qquad (\boldsymbol{A}^*)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^* = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}.$$

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 也可逆.

$$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1}, \qquad (\boldsymbol{A}^*)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^* = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}.$$

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 也可逆.

$$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1}, \qquad (\boldsymbol{A}^*)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^* = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}.$$

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 在 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{I}$ 两边右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$,

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 也可逆.

$$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1}, \qquad (\boldsymbol{A}^*)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^* = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}.$$

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 在 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{I}$ 两边右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 得

$$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1}.$$

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 也可逆.

$$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1}, \qquad (\boldsymbol{A}^*)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^* = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}.$$

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 在 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{I}$ 两边右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 得

$$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1}.$$

又 $\boldsymbol{A}$ 可逆,

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 也可逆.

$$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1}, \qquad (\boldsymbol{A}^*)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^* = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}.$$

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 在 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{I}$ 两边右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 得

$$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1}.$$

又 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 且 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 可逆,

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 也可逆.

$$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1}, \qquad (\boldsymbol{A}^*)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^* = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}.$$

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 在 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{I}$ 两边右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 得

$$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1}.$$

又 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 且 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 可逆, 知 $\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1}$ 可逆,

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 也可逆.

$$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1}, \qquad (\boldsymbol{A}^*)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^* = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}.$$

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 在 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{I}$ 两边右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 得

$$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1}.$$

又 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 且 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 可逆, 知 $\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1}$ 可逆, 且

$$(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = \left(|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}$$

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 也可逆.

$$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1}, \qquad (\boldsymbol{A}^*)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^* = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}.$$

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 在 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{I}$ 两边右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 得

$$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1}.$$

又 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 且 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 可逆, 知 $\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1}$ 可逆, 且

$$(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = \left(|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}. \tag{22}$$

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 也可逆.

$$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1}, \qquad (\boldsymbol{A}^*)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^* = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}.$$

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 在 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{I}$ 两边右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 得

$$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1}.$$

又 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 且 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 可逆, 知 $\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1}$ 可逆, 且

$$(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = \left(|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}. \tag{22}$$

另由伴随矩阵性质有

$$\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^*\boldsymbol{A}^{-1} = \left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|\boldsymbol{I}, \tag{23}$$

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 也可逆.

$$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\, \boldsymbol{A}^{-1}, \qquad (\boldsymbol{A}^*)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^* = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}.$$

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 在 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\, \boldsymbol{I}$ 两边右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 得

$$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\, \boldsymbol{A}^{-1}.$$

又 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 且 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 可逆, 知 $\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\, \boldsymbol{A}^{-1}$ 可逆, 且

$$(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = \big(\, |\boldsymbol{A}|\, \boldsymbol{A}^{-1}\big)^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}. \tag{22}$$

另由伴随矩阵性质有

$$\big(\boldsymbol{A}^{-1}\big)^*\boldsymbol{A}^{-1} = \big|\boldsymbol{A}^{-1}\big|\boldsymbol{I}, \tag{23}$$

两边右乘 $\boldsymbol{A}$,

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 也可逆.

$$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1}, \qquad (\boldsymbol{A}^*)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^* = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}.$$

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 在 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{I}$ 两边右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 得

$$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1}.$$

又 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 且 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 可逆, 知 $\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1}$ 可逆, 且

$$(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = \left(|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}. \tag{22}$$

另由伴随矩阵性质有

$$\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^*\boldsymbol{A}^{-1} = \left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|\boldsymbol{I}, \tag{23}$$

两边右乘 $\boldsymbol{A}$, 得

$$\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^* = \left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|\boldsymbol{A} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}. \tag{24}$$

(3) $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

(3) $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

(3) 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{I}$, 取行列式得到:

$$|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{A}^*| = \Big|\,|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{I}\Big|$$

(3) $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

(3) 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{I}$, 取行列式得到:

$$|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{A}^*| = \big|\,|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{I}\big| = |\boldsymbol{A}|^n.$$

(3) $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

(3) 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{I}$, 取行列式得到:

$$|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{A}^*| = \big|\,|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{I}\big| = |\boldsymbol{A}|^n.$$

若 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$,

(3) $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

(3) 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{I}$, 取行列式得到:

$$|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{A}^*| = \big|\,|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{I}\big| = |\boldsymbol{A}|^n.$$

若 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 则 $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

(3) $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

(3) 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{I}$, 取行列式得到:

$$|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{A}^*| = \big|\,|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{I}\big| = |\boldsymbol{A}|^n.$$

若 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 则 $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

若 $|\boldsymbol{A}| = 0$,

(3) $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

(3) 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{I}$, 取行列式得到:

$$|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{A}^*| = \big|\,|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{I}\big| = |\boldsymbol{A}|^n.$$

若 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 则 $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$.
若 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 由 (1) 知 $|\boldsymbol{A}^*| = 0$, 此时命题也成立.

(3) $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

(3) 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{I}$, 取行列式得到:

$$|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{A}^*| = \big|\,|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{I}\big| = |\boldsymbol{A}|^n.$$

若 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 则 $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

若 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 由 (1) 知 $|\boldsymbol{A}^*| = 0$, 此时命题也成立.

☞ 请对比教材 P.60 结论: 当 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ 时, $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

(4) $(k\boldsymbol{A})^* = k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$.

(4) $(k\boldsymbol{A})^* = k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$.

(4) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在 (i,j) 位置的元素对应的代数余子式记为 $\boldsymbol{A}_{ij}$,

(4) $(kA)^* = k^{n-1}A^*$.

(4) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在 (i,j) 位置的元素对应的代数余子式记为 $\boldsymbol{A}_{ij}$, 则矩阵 $k\boldsymbol{A}$ 在 (i,j) 位置的元素对应的代数余子式为

$$(-1)^{i+j}\begin{vmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1,j-1} & ka_{1,j+1} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i-1,1} & \cdots & ka_{i-1,j-1} & ka_{i-1,j+1} & \cdots & ka_{i-1,n} \\ ka_{i+1,1} & \cdots & ka_{i+1,j-1} & ka_{i+1,j+1} & \cdots & ka_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{n1} & \cdots & ka_{n,j-1} & ka_{n,j+1} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix}$$

(4) $(k\boldsymbol{A})^* = k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$.

(4) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在 (i,j) 位置的元素对应的代数余子式记为 $\boldsymbol{A}_{ij}$, 则矩阵 $k\boldsymbol{A}$ 在 (i,j) 位置的元素对应的代数余子式为

$$(-1)^{i+j}\begin{vmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1,j-1} & ka_{1,j+1} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i-1,1} & \cdots & ka_{i-1,j-1} & ka_{i-1,j+1} & \cdots & ka_{i-1,n} \\ ka_{i+1,1} & \cdots & ka_{i+1,j-1} & ka_{i+1,j+1} & \cdots & ka_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{n1} & \cdots & ka_{n,j-1} & ka_{n,j+1} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix} = k^{n-1}\boldsymbol{A}_{ij}, \quad (25)$$

(4) $(k\boldsymbol{A})^* = k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$.

(4) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在 (i,j) 位置的元素对应的代数余子式记为 $\boldsymbol{A}_{ij}$, 则矩阵 $k\boldsymbol{A}$ 在 (i,j) 位置的元素对应的代数余子式为

$$(-1)^{i+j}\begin{vmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1,j-1} & ka_{1,j+1} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i-1,1} & \cdots & ka_{i-1,j-1} & ka_{i-1,j+1} & \cdots & ka_{i-1,n} \\ ka_{i+1,1} & \cdots & ka_{i+1,j-1} & ka_{i+1,j+1} & \cdots & ka_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{n1} & \cdots & ka_{n,j-1} & ka_{n,j+1} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix} = k^{n-1}\boldsymbol{A}_{ij}, \quad (25)$$

故

$$(k\boldsymbol{A})^* = \begin{pmatrix} k^{n-1}\boldsymbol{A}_{11} & k^{n-1}\boldsymbol{A}_{21} & \cdots & k^{n-1}\boldsymbol{A}_{n1} \\ k^{n-1}\boldsymbol{A}_{12} & k^{n-1}\boldsymbol{A}_{22} & \cdots & k^{n-1}\boldsymbol{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k^{n-1}\boldsymbol{A}_{1n} & k^{n-1}\boldsymbol{A}_{2n} & \cdots & k^{n-1}\boldsymbol{A}_{nn} \end{pmatrix}$$

(4) $(k\boldsymbol{A})^* = k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$.

(4) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在 (i,j) 位置的元素对应的代数余子式记为 $\boldsymbol{A}_{ij}$, 则矩阵 $k\boldsymbol{A}$ 在 (i,j) 位置的元素对应的代数余子式为

$$(-1)^{i+j}\begin{vmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1,j-1} & ka_{1,j+1} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i-1,1} & \cdots & ka_{i-1,j-1} & ka_{i-1,j+1} & \cdots & ka_{i-1,n} \\ ka_{i+1,1} & \cdots & ka_{i+1,j-1} & ka_{i+1,j+1} & \cdots & ka_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{n1} & \cdots & ka_{n,j-1} & ka_{n,j+1} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix} = k^{n-1}\boldsymbol{A}_{ij}, \quad (25)$$

故

$$(k\boldsymbol{A})^* = \begin{pmatrix} k^{n-1}\boldsymbol{A}_{11} & k^{n-1}\boldsymbol{A}_{21} & \cdots & k^{n-1}\boldsymbol{A}_{n1} \\ k^{n-1}\boldsymbol{A}_{12} & k^{n-1}\boldsymbol{A}_{22} & \cdots & k^{n-1}\boldsymbol{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k^{n-1}\boldsymbol{A}_{1n} & k^{n-1}\boldsymbol{A}_{2n} & \cdots & k^{n-1}\boldsymbol{A}_{nn} \end{pmatrix} = k^{n-1}\boldsymbol{A}^*.$$

(5) $(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*$.

(5) $(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*$.

(5) 由伴随矩阵的定义知

$$(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1n} \\ \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{n1} & \boldsymbol{A}_{n2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{nn} \end{pmatrix}.$$

(5) $(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*$.

(5) 由伴随矩阵的定义知

$$(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1n} \\ \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{n1} & \boldsymbol{A}_{n2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{nn} \end{pmatrix}.$$

用 M_{ij}, A_{ij} 分别表示 $\boldsymbol{A}$ 在 (i,j) 位置的元素 a_{ij} 对应的余子式、代数余子式,

(5) $(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*$.

(5) 由伴随矩阵的定义知

$$(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1n} \\ \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{n1} & \boldsymbol{A}_{n2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{nn} \end{pmatrix}.$$

用 M_{ij}, A_{ij} 分别表示 $\boldsymbol{A}$ 在 (i,j) 位置的元素 a_{ij} 对应的余子式、代数余子式, 则矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 在 (i,j) 位置的元素 a_{ji} 对应的余子式为

$$M_{ji}^{\mathrm{T}}$$

(5) $(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*$.

(5) 由伴随矩阵的定义知

$$(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1n} \\ \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{n1} & \boldsymbol{A}_{n2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{nn} \end{pmatrix}.$$

用 M_{ij}, A_{ij} 分别表示 $\boldsymbol{A}$ 在 (i,j) 位置的元素 a_{ij} 对应的余子式、代数余子式, 则矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 在 (i,j) 位置的元素 a_{ji} 对应的余子式为

$$M_{ji}^{\mathrm{T}} = M_{ji}.$$

(5) $(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*$.

(5) 由伴随矩阵的定义知

$$(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1n} \\ \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{n1} & \boldsymbol{A}_{n2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{nn} \end{pmatrix}.$$

用 M_{ij}, A_{ij} 分别表示 $\boldsymbol{A}$ 在 (i,j) 位置的元素 a_{ij} 对应的余子式、代数余子式, 则矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 在 (i,j) 位置的元素 a_{ji} 对应的余子式为

$$M_{ji}^{\mathrm{T}} = M_{ji}.$$

则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 在 (i,j) 位置的元素 a_{ji} 对应的代数余子式为 A_{ji}.

(5) $(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*$.

(5) 由伴随矩阵的定义知

$$(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1n} \\ \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{n1} & \boldsymbol{A}_{n2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{nn} \end{pmatrix}.$$

用 M_{ij}, A_{ij} 分别表示 $\boldsymbol{A}$ 在 (i,j) 位置的元素 a_{ij} 对应的余子式、代数余子式, 则矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 在 (i,j) 位置的元素 a_{ji} 对应的余子式为

$$M_{ji}^{\mathrm{T}} = M_{ji}.$$

则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 在 (i,j) 位置的元素 a_{ji} 对应的代数余子式为 A_{ji}.

从而伴随矩阵 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*$ 在 (i,j) 位置的元素为 A_{ij},

(5) $(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*$.

(5) 由伴随矩阵的定义知

$$(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1n} \\ \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{n1} & \boldsymbol{A}_{n2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{nn} \end{pmatrix}.$$

用 M_{ij}, A_{ij} 分别表示 $\boldsymbol{A}$ 在 (i,j) 位置的元素 a_{ij} 对应的余子式、代数余子式, 则矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 在 (i,j) 位置的元素 a_{ji} 对应的余子式为

$$M_{ji}^{\mathrm{T}} = M_{ji}.$$

则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 在 (i,j) 位置的元素 a_{ji} 对应的代数余子式为 A_{ji}.

从而伴随矩阵 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*$ 在 (i,j) 位置的元素为 A_{ij}, 得证 $(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*$.

练习 7.4 (P.100 习题 67)

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均为 4 阶方阵, 已知 $|\boldsymbol{A}| = -2$, $|\boldsymbol{B}| = 3$, 计算:

(1) $|\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}|$; (2) $|-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}|$; (3) $|(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}|$; (4) $\det[(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}]^{-1}$;

(5) $|-3\boldsymbol{A}^*|$ ($\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵).

练习 7.4 (P.100 习题 67)

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均为 4 阶方阵, 已知 $|\boldsymbol{A}|=-2$, $|\boldsymbol{B}|=3$, 计算:

(1) $|\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}|$; (2) $|-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}|$; (3) $|(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}|$; (4) $\det[(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}]^{-1}$;

(5) $|-3\boldsymbol{A}^*|$ ($\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵).

解:

$$|\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}|=(\frac{1}{2})^4|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|^{-1}=\frac{1}{16}\times(-2)\times(\frac{1}{3})=-\frac{1}{24}.$$

练习 7.4 (P.100 习题 67)

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均为 4 阶方阵, 已知 $|\boldsymbol{A}|=-2$, $|\boldsymbol{B}|=3$, 计算:
(1) $|\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}|$; (2) $|-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}|$; (3) $|(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}|$; (4) $\det[(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}]^{-1}$;
(5) $|-3\boldsymbol{A}^*|$ ($\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵).

解:

$$|\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}|=(\frac{1}{2})^4|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|^{-1}=\frac{1}{16}\times(-2)\times(\frac{1}{3})=-\frac{1}{24}.$$
$$|-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}|=(-1)^4|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=(-2)\times 3=-6.$$

练习 7.4 (P.100 习题 67)

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均为 4 阶方阵, 已知 $|\boldsymbol{A}|=-2$, $|\boldsymbol{B}|=3$, 计算:

(1) $|\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}|$; (2) $|-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}|$; (3) $|(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}|$; (4) $\det[(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}]^{-1}$;

(5) $|-3\boldsymbol{A}^*|$ ($\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵).

解:

$$|\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}|=(\frac{1}{2})^4|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|^{-1}=\frac{1}{16}\times(-2)\times(\frac{1}{3})=-\frac{1}{24}.$$

$$|-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}|=(-1)^4|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=(-2)\times 3=-6.$$

$$|(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}|=|\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{B}|^{-1}|\boldsymbol{A}|^{-1}=\frac{1}{3}\times(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{6}.$$

练习 7.4 (P.100 习题 67)

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均为 4 阶方阵, 已知 $|\boldsymbol{A}| = -2$, $|\boldsymbol{B}| = 3$, 计算:

(1) $|\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}|$; (2) $|-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}|$; (3) $|(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}|$; (4) $\det[(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}]^{-1}$;

(5) $|-3\boldsymbol{A}^*|$ ($\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵).

解:

$$|\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}| = (\frac{1}{2})^4|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|^{-1} = \frac{1}{16} \times (-2) \times (\frac{1}{3}) = -\frac{1}{24}.$$

$$|-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}| = (-1)^4|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| = (-2) \times 3 = -6.$$

$$|(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}| = |\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{B}|^{-1}|\boldsymbol{A}|^{-1} = \frac{1}{3} \times (-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{6}.$$

$$\det[(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}]^{-1} = |[(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}]^{-1}| = |[(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}]^{\mathrm{T}}| = |(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}| = -\frac{1}{6}.$$

练习 7.4 (P.100 习题 67)

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均为 4 阶方阵, 已知 $|\boldsymbol{A}|=-2$, $|\boldsymbol{B}|=3$, 计算:

(1) $|\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}|$; (2) $|-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}|$; (3) $|(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}|$; (4) $\det[(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}]^{-1}$;

(5) $|-3\boldsymbol{A}^*|$ ($\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵).

解:

$$|\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}|=(\frac{1}{2})^4|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|^{-1}=\frac{1}{16}\times(-2)\times(\frac{1}{3})=-\frac{1}{24}.$$

$$|-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}|=(-1)^4|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=(-2)\times 3=-6.$$

$$|(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}|=|\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{B}|^{-1}|\boldsymbol{A}|^{-1}=\frac{1}{3}\times(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{6}.$$

$$\det[(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}]^{-1}=|[(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}]^{-1}|=|[(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}]^{\mathrm{T}}|=|(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}|=-\frac{1}{6}.$$

$$|-3\boldsymbol{A}^*|=(-3)^4|\boldsymbol{A}|^{4-1}=81\times(-8)=-648.$$

练习 7.5 (P.100 习题 68)

设 $\boldsymbol{\alpha} = (1, -2, 3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta} = (-1, \frac{1}{2}, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 求 $|\boldsymbol{A}^{100}|$.

练习 7.5 (P.100 习题 68)

设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,-2,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}=(-1,\frac{1}{2},0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 求 $|\boldsymbol{A}^{100}|$.

解: $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}|=\left|\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}(-1,\frac{1}{2},0)\right|=\begin{vmatrix}-1&\frac{1}{2}&0\\2&-1&0\\-3&\frac{3}{2}&0\end{vmatrix}=0,$

练习 7.5 (P.100 习题 68)

设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,-2,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}=(-1,\frac{1}{2},0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 求 $|\boldsymbol{A}^{100}|$.

解: $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}|=\left|\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}(-1,\frac{1}{2},0)\right|=\begin{vmatrix}-1 & \frac{1}{2} & 0\\ 2 & -1 & 0\\ -3 & \frac{3}{2} & 0\end{vmatrix}=0,$

因此

$$|\boldsymbol{A}^{100}|=|\boldsymbol{A}|^{100}=0.$$

例 7.6

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^{2016}$.

例 7.6

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^{2016}$.

解: 注意到

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}$$

例 7.6

已知 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^{2016}$.

解: 注意到

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (1,\ 1,\ 1)\,,$$

例 7.6

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^{2016}$.

解: 注意到

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(1,\ 1,\ 1),$$

而

$$(1,\ 1,\ 1)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=a+b+c.$$

则

$$\boldsymbol{A}^{2016} = \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(1,\ 1,\ 1)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(1,\ 1,\ 1)\cdots\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(1,\ 1,\ 1)}_{2016\text{ 个 }\boldsymbol{A}}$$

则

$$\boldsymbol{A}^{2016}=\underbrace{\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}(1,\ 1,\ 1)\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}(1,\ 1,\ 1)\cdots\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}(1,\ 1,\ 1)}_{2016\text{ 个 }\boldsymbol{A}}$$

$$=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\underbrace{(1,\ 1,\ 1)\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}(1,\ 1,\ 1)\cdots\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}}_{2015\text{ 个 }(a+b+c)\text{ 相乘}}(1,\ 1,\ 1)$$

则

$$\boldsymbol{A}^{2016} = \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (1,\ 1,\ 1) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (1,\ 1,\ 1) \cdots \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (1,\ 1,\ 1)}_{2016\ \text{个}\ \boldsymbol{A}}$$

$$= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \underbrace{(1,\ 1,\ 1) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (1,\ 1,\ 1) \cdots \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{2015\ \text{个}\ (a+b+c)\ \text{相乘}} (1,\ 1,\ 1)$$

$$= (a+b+c)^{2015} \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}.$$

练习 7.7 (P.101 习题 77)

设 $\boldsymbol{\alpha} = (1, 0, -1)^{\mathrm{T}}$, k 为正整数, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$, 求 $|k\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^n|$.

练习 7.7 (P.101 习题 77)

设 $\boldsymbol{\alpha} = (1, 0, -1)^{\mathrm{T}}$, k 为正整数, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$, 求 $|k\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^n|$.

解: 注意到 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = 2$,

练习 7.7 (P.101 习题 77)

设 $\boldsymbol{\alpha} = (1, 0, -1)^{\mathrm{T}}$, k 为正整数, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$, 求 $|k\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^n|$.

解: 注意到 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = 2$, 得

$$\boldsymbol{A}^n = (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\cdots(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})$$

练习 7.7 (P.101 习题 77)

设 $\boldsymbol{\alpha} = (1,0,-1)^{\mathrm{T}}$, k 为正整数, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$, 求 $|k\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^n|$.

解: 注意到 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = 2$, 得

$$\boldsymbol{A}^n = (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\cdots(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}) = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^{n-1}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$$

练习 7.7 (P.101 习题 77)

设 $\boldsymbol{\alpha} = (1, 0, -1)^{\mathrm{T}}$, k 为正整数, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$, 求 $|k\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^n|$.

解: 注意到 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = 2$, 得

$$\boldsymbol{A}^n = (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\cdots(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}) = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^{n-1}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = 2^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

练习 7.7 (P.101 习题 77)

设 $\boldsymbol{\alpha} = (1, 0, -1)^{\mathrm{T}}$, k 为正整数, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$, 求 $|k\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^n|$.

解: 注意到 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = 2$, 得

$$\boldsymbol{A}^n = (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\cdots(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}) = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^{n-1}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = 2^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

于是

$$|k\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^n| = \begin{vmatrix} k - 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & k & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & k - 2^{n-1} \end{vmatrix}$$

练习 7.7 (P.101 习题 77)

设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$, k 为正整数, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$, 求 $|k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^n|$.

解: 注意到 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=2$, 得

$$\boldsymbol{A}^n=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\cdots(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^{n-1}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=2^{n-1}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}.$$

于是

$$|k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^n|=\begin{vmatrix}k-2^{n-1}&0&2^{n-1}\\0&k&0\\2^{n-1}&0&k-2^{n-1}\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}k-2^{n-1}&2^{n-1}\\2^{n-1}&k-2^{n-1}\end{vmatrix}=k^2(k-2^n).$$

练习 7.8 (P.101 习题 80)

设 $\boldsymbol{B}$ 是元素全为 1 的 n 阶矩阵 $(n \geqslant 2)$, 证明:

(1) $\boldsymbol{B}^k = n^{k-1}\boldsymbol{B}$ ($k \geqslant 2$ 为正整数); (2) $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{I} - \dfrac{1}{n-1}\boldsymbol{B}$.

练习 7.8 (P.101 习题 80)

设 $\boldsymbol{B}$ 是元素全为 1 的 n 阶矩阵 $(n \geqslant 2)$, 证明:

(1) $\boldsymbol{B}^k = n^{k-1}\boldsymbol{B}$ ($k \geqslant 2$ 为正整数); (2) $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{I} - \dfrac{1}{n-1}\boldsymbol{B}$.

证: (1) 设 $\boldsymbol{\alpha} = (1, 1, \cdots, 1)$, 则 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$,

练习 7.8 (P.101 习题 80)

设 $\boldsymbol{B}$ 是元素全为 1 的 n 阶矩阵 $(n \geqslant 2)$, 证明:

(1) $\boldsymbol{B}^k = n^{k-1}\boldsymbol{B}$ ($k \geqslant 2$ 为正整数); (2) $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{I} - \dfrac{1}{n-1}\boldsymbol{B}$.

证: (1) 设 $\boldsymbol{\alpha} = (1, 1, \cdots, 1)$, 则 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$, 注意到

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = (1, 1, \cdots, 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n,$$

练习 7.8 (P.101 习题 80)

设 $\boldsymbol{B}$ 是元素全为 1 的 n 阶矩阵 $(n \geqslant 2)$, 证明:

(1) $\boldsymbol{B}^k = n^{k-1}\boldsymbol{B}$ $(k \geqslant 2$ 为正整数$)$; (2) $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{I} - \dfrac{1}{n-1}\boldsymbol{B}$.

证: (1) 设 $\boldsymbol{\alpha} = (1, 1, \cdots, 1)$, 则 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$, 注意到

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = (1, 1, \cdots, 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n,$$

所以当 $k \geqslant 2$ 时, 有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}^k &= \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\cdots(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha} \\ &= \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \cdot n \cdot n \cdots n \cdot \boldsymbol{\alpha} \\ &= n^{k-1}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} \\ &= n^{k-1}\boldsymbol{B}. \end{aligned}$$

(2) 因为

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{I}-\frac{1}{n-1}\boldsymbol{B})=\boldsymbol{I}-\frac{1}{n-1}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}+\frac{1}{n-1}\boldsymbol{B}^2$$

(2) 因为

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{I}-\frac{1}{n-1}\boldsymbol{B}) &= \boldsymbol{I}-\frac{1}{n-1}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}+\frac{1}{n-1}\boldsymbol{B}^2 \\
&= \boldsymbol{I}-\frac{n}{n-1}\boldsymbol{B}+\frac{1}{n-1}n\boldsymbol{B}
\end{aligned}
$$

(2) 因为

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{I}-\frac{1}{n-1}\boldsymbol{B}) &= \boldsymbol{I}-\frac{1}{n-1}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}+\frac{1}{n-1}\boldsymbol{B}^2 \\
&= \boldsymbol{I}-\frac{n}{n-1}\boldsymbol{B}+\frac{1}{n-1}n\boldsymbol{B} \\
&= \boldsymbol{I}.
\end{aligned}
$$

(2) 因为

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{I}-\frac{1}{n-1}\boldsymbol{B}) &= \boldsymbol{I}-\frac{1}{n-1}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}+\frac{1}{n-1}\boldsymbol{B}^2\\ &= \boldsymbol{I}-\frac{n}{n-1}\boldsymbol{B}+\frac{1}{n-1}n\boldsymbol{B}\\ &= \boldsymbol{I}.\end{aligned}$$

所以

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{I}-\frac{1}{n-1}\boldsymbol{B}.$$

练习 7.9 (P.100 习题 71)

设 $\boldsymbol{\alpha} = (a, b, c)$, $\boldsymbol{\beta} = (x, y, z)$, 已知

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$.

练习 7.9 (P.100 习题 71)

设 $\boldsymbol{\alpha} = (a, b, c)$, $\boldsymbol{\beta} = (x, y, z)$, 已知

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$.

解: 因为

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} ax & ay & az \\ bx & by & bz \\ cx & cy & cz \end{pmatrix}$$

练习 7.9 (P.100 习题 71)

设 $\boldsymbol{\alpha} = (a, b, c)$, $\boldsymbol{\beta} = (x, y, z)$, 已知

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$.

解: 因为

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} ax & ay & az \\ bx & by & bz \\ cx & cy & cz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix},$$

练习 7.9 (P.100 习题 71)

设 $\boldsymbol{\alpha} = (a, b, c)$, $\boldsymbol{\beta} = (x, y, z)$, 已知

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$.

解: 因为

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} ax & ay & az \\ bx & by & bz \\ cx & cy & cz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix},$$

故

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} = ax + by + cz$$

练习 7.9 (P.100 习题 71)

设 $\boldsymbol{\alpha}=(a,b,c)$, $\boldsymbol{\beta}=(x,y,z)$, 已知

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}-2 & 4 & -6\\ 1 & -2 & 3\\ -1 & 2 & -3\end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$.

解: 因为

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}ax & ay & az\\ bx & by & bz\\ cx & cy & cz\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 4 & -6\\ 1 & -2 & 3\\ -1 & 2 & -3\end{pmatrix},$$

故

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=ax+by+cz=(-2)+(-2)+(-3)=-7.$$

练习 7.10 (P.101 习题 73)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $|\boldsymbol{A}| > 0$, 已知 $\boldsymbol{A}^* = \mathrm{diag}(1, -1, -4)$, 且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1} + 3\boldsymbol{I}$, 求 $\boldsymbol{B}$.

练习 7.10 (P.101 习题 73)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $|\boldsymbol{A}|>0$, 已知 $\boldsymbol{A}^*=\mathrm{diag}(1,-1,-4)$, 且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}+3\boldsymbol{I}$, 求 $\boldsymbol{B}$.

解: 在 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}+3\boldsymbol{I}$ 两边右乘 $\boldsymbol{A}$,

练习 7.10 (P.101 习题 73)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $|\boldsymbol{A}|>0$, 已知 $\boldsymbol{A}^*=\operatorname{diag}(1,-1,-4)$, 且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}+3\boldsymbol{I}$, 求 $\boldsymbol{B}$.

解: 在 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}+3\boldsymbol{I}$ 两边右乘 $\boldsymbol{A}$, 得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+3\boldsymbol{A}, \tag{26}$$

练习 7.10 (P.101 习题 73)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $|\boldsymbol{A}| > 0$, 已知 $\boldsymbol{A}^* = \operatorname{diag}(1, -1, -4)$, 且 $\boldsymbol{ABA}^{-1} = \boldsymbol{BA}^{-1} + 3\boldsymbol{I}$, 求 $\boldsymbol{B}$.

解: 在 $\boldsymbol{ABA}^{-1} = \boldsymbol{BA}^{-1} + 3\boldsymbol{I}$ 两边右乘 $\boldsymbol{A}$, 得

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{B} + 3\boldsymbol{A}, \tag{26}$$

两边左乘 $\boldsymbol{A}^*$, 得

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B} + 3\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A},$$

练习 7.10 (P.101 习题 73)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $|\boldsymbol{A}| > 0$, 已知 $\boldsymbol{A}^* = \mathrm{diag}(1, -1, -4)$, 且 $\boldsymbol{ABA}^{-1} = \boldsymbol{BA}^{-1} + 3\boldsymbol{I}$, 求 $\boldsymbol{B}$.

解: 在 $\boldsymbol{ABA}^{-1} = \boldsymbol{BA}^{-1} + 3\boldsymbol{I}$ 两边右乘 $\boldsymbol{A}$, 得

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{B} + 3\boldsymbol{A}, \tag{26}$$

两边左乘 $\boldsymbol{A}^*$, 得

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B} + 3\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}, \Longrightarrow |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B} + 3|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}. \tag{27}$$

练习 7.10 (P.101 习题 73)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $|\boldsymbol{A}|>0$, 已知 $\boldsymbol{A}^*=\mathrm{diag}(1,-1,-4)$, 且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}+3\boldsymbol{I}$, 求 $\boldsymbol{B}$.

解: 在 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}+3\boldsymbol{I}$ 两边右乘 $\boldsymbol{A}$, 得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+3\boldsymbol{A}, \tag{26}$$

两边左乘 $\boldsymbol{A}^*$, 得

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}+3\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}, \Longrightarrow |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}+3|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}. \tag{27}$$

由 $|\boldsymbol{A}^*|=|\mathrm{diag}(1,-1,-4)|=4$,

练习 7.10 (P.101 习题 73)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $|\boldsymbol{A}|>0$, 已知 $\boldsymbol{A}^*=\mathrm{diag}(1,-1,-4)$, 且 $\boldsymbol{ABA}^{-1}=\boldsymbol{BA}^{-1}+3\boldsymbol{I}$, 求 $\boldsymbol{B}$.

解: 在 $\boldsymbol{ABA}^{-1}=\boldsymbol{BA}^{-1}+3\boldsymbol{I}$ 两边右乘 $\boldsymbol{A}$, 得

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{B}+3\boldsymbol{A}, \tag{26}$$

两边左乘 $\boldsymbol{A}^*$, 得

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}+3\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}, \Longrightarrow |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}+3|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}. \tag{27}$$

由 $|\boldsymbol{A}^*|=|\mathrm{diag}(1,-1,-4)|=4$, 又 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$,

练习 7.10 (P.101 习题 73)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $|\boldsymbol{A}|>0$, 已知 $\boldsymbol{A}^*=\mathrm{diag}(1,-1,-4)$, 且 $\boldsymbol{ABA}^{-1}=\boldsymbol{BA}^{-1}+3\boldsymbol{I}$, 求 $\boldsymbol{B}$.

解: 在 $\boldsymbol{ABA}^{-1}=\boldsymbol{BA}^{-1}+3\boldsymbol{I}$ 两边右乘 $\boldsymbol{A}$, 得

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{B}+3\boldsymbol{A}, \tag{26}$$

两边左乘 $\boldsymbol{A}^*$, 得

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}+3\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}, \Longrightarrow |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}+3|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}. \tag{27}$$

由 $|\boldsymbol{A}^*|=|\mathrm{diag}(1,-1,-4)|=4$, 又 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$, 及已知 $|\boldsymbol{A}|>0$, 得 $|\boldsymbol{A}|=2$.

练习 7.10 (P.101 习题 73)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $|\boldsymbol{A}|>0$, 已知 $\boldsymbol{A}^*=\mathrm{diag}(1,-1,-4)$, 且 $\boldsymbol{ABA}^{-1}=\boldsymbol{BA}^{-1}+3\boldsymbol{I}$, 求 $\boldsymbol{B}$.

解: 在 $\boldsymbol{ABA}^{-1}=\boldsymbol{BA}^{-1}+3\boldsymbol{I}$ 两边右乘 $\boldsymbol{A}$, 得

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{B}+3\boldsymbol{A}, \tag{26}$$

两边左乘 $\boldsymbol{A}^*$, 得

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}+3\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}, \Longrightarrow |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}+3|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}. \tag{27}$$

由 $|\boldsymbol{A}^*|=|\mathrm{diag}(1,-1,-4)|=4$, 又 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$, 及已知 $|\boldsymbol{A}|>0$, 得 $|\boldsymbol{A}|=2$. 于是 (27) 式即

$$2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}+6\boldsymbol{I},$$

练习 7.10 (P.101 习题 73)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $|\boldsymbol{A}|>0$, 已知 $\boldsymbol{A}^*=\operatorname{diag}(1,-1,-4)$, 且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}+3\boldsymbol{I}$, 求 $\boldsymbol{B}$.

解: 在 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}+3\boldsymbol{I}$ 两边右乘 $\boldsymbol{A}$, 得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+3\boldsymbol{A}, \tag{26}$$

两边左乘 $\boldsymbol{A}^*$, 得

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}+3\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}, \Longrightarrow |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}+3|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}. \tag{27}$$

由 $|\boldsymbol{A}^*|=|\operatorname{diag}(1,-1,-4)|=4$, 又 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$, 及已知 $|\boldsymbol{A}|>0$, 得 $|\boldsymbol{A}|=2$. 于是 (27) 式即

$$2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}+6\boldsymbol{I}, \Longrightarrow (2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^*)\boldsymbol{B}=6\boldsymbol{I}.$$

练习 7.10 (P.101 习题 73)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $|\boldsymbol{A}|>0$, 已知 $\boldsymbol{A}^*=\operatorname{diag}(1,-1,-4)$, 且 $\boldsymbol{ABA}^{-1}=\boldsymbol{BA}^{-1}+3\boldsymbol{I}$, 求 $\boldsymbol{B}$.

解: 在 $\boldsymbol{ABA}^{-1}=\boldsymbol{BA}^{-1}+3\boldsymbol{I}$ 两边右乘 $\boldsymbol{A}$, 得

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{B}+3\boldsymbol{A}, \tag{26}$$

两边左乘 $\boldsymbol{A}^*$, 得

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}+3\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}, \Longrightarrow |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}+3|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}. \tag{27}$$

由 $|\boldsymbol{A}^*|=|\operatorname{diag}(1,-1,-4)|=4$, 又 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$, 及已知 $|\boldsymbol{A}|>0$, 得 $|\boldsymbol{A}|=2$. 于是 (27) 式即

$$2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}+6\boldsymbol{I}, \Longrightarrow (2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^*)\boldsymbol{B}=6\boldsymbol{I}.$$

又 $2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^*=\operatorname{diag}(1,3,6)$,

练习 7.10 (P.101 习题 73)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $|\boldsymbol{A}|>0$, 已知 $\boldsymbol{A}^*=\operatorname{diag}(1,-1,-4)$, 且 $\boldsymbol{ABA}^{-1}=\boldsymbol{BA}^{-1}+3\boldsymbol{I}$, 求 $\boldsymbol{B}$.

解: 在 $\boldsymbol{ABA}^{-1}=\boldsymbol{BA}^{-1}+3\boldsymbol{I}$ 两边右乘 $\boldsymbol{A}$, 得

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{B}+3\boldsymbol{A}, \tag{26}$$

两边左乘 $\boldsymbol{A}^*$, 得

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}+3\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}, \Longrightarrow |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}+3|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}. \tag{27}$$

由 $|\boldsymbol{A}^*|=|\operatorname{diag}(1,-1,-4)|=4$, 又 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$, 及已知 $|\boldsymbol{A}|>0$, 得 $|\boldsymbol{A}|=2$. 于是 (27) 式即

$$2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}+6\boldsymbol{I}, \Longrightarrow (2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^*)\boldsymbol{B}=6\boldsymbol{I}.$$

又 $2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^*=\operatorname{diag}(1,3,6)$, 则 $(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\operatorname{diag}(1,\frac{1}{3},\frac{1}{6})$,

练习 7.10 (P.101 习题 73)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $|\boldsymbol{A}|>0$, 已知 $\boldsymbol{A}^*=\operatorname{diag}(1,-1,-4)$, 且 $\boldsymbol{ABA}^{-1}=\boldsymbol{BA}^{-1}+3\boldsymbol{I}$, 求 $\boldsymbol{B}$.

解: 在 $\boldsymbol{ABA}^{-1}=\boldsymbol{BA}^{-1}+3\boldsymbol{I}$ 两边右乘 $\boldsymbol{A}$, 得

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{B}+3\boldsymbol{A}, \tag{26}$$

两边左乘 $\boldsymbol{A}^*$, 得

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}+3\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}, \Longrightarrow |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}+3|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}. \tag{27}$$

由 $|\boldsymbol{A}^*|=|\operatorname{diag}(1,-1,-4)|=4$, 又 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$, 及已知 $|\boldsymbol{A}|>0$, 得 $|\boldsymbol{A}|=2$. 于是 (27) 式即

$$2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}+6\boldsymbol{I}, \Longrightarrow (2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^*)\boldsymbol{B}=6\boldsymbol{I}.$$

又 $2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^*=\operatorname{diag}(1,3,6)$, 则 $(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\operatorname{diag}(1,\frac{1}{3},\frac{1}{6})$, 故

$$\boldsymbol{B}=6(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\operatorname{diag}(6,2,1).$$

另解: 可以直接求出 $\boldsymbol{A}$.

另解: 可以直接求出 $\boldsymbol{A}$. 如前述, 先得到 $|\boldsymbol{A}| = 2$, 故

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I} = 2\boldsymbol{I}.$$

另解: 可以直接求出 $\boldsymbol{A}$. 如前述, 先得到 $|\boldsymbol{A}|=2$, 故

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}=2\boldsymbol{I}.$$

又 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\mathrm{diag}(1,-1,-\frac{1}{4})$,

另解: 可以直接求出 $\boldsymbol{A}$. 如前述, 先得到 $|\boldsymbol{A}| = 2$, 故

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I} = 2\boldsymbol{I}.$$

又 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = \mathrm{diag}(1, -1, -\frac{1}{4})$, 故

$$\boldsymbol{A} = 2(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = \mathrm{diag}(2, -2, -\frac{1}{2}).$$

另解: 可以直接求出 $\boldsymbol{A}$. 如前述, 先得到 $|\boldsymbol{A}| = 2$, 故

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I} = 2\boldsymbol{I}.$$

又 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = \mathrm{diag}(1, -1, -\frac{1}{4})$, 故

$$\boldsymbol{A} = 2(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = \mathrm{diag}(2, -2, -\frac{1}{2}).$$

由 (26) 式, 有 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{B} = 3\boldsymbol{A}$.

另解: 可以直接求出 $\boldsymbol{A}$. 如前述, 先得到 $|\boldsymbol{A}| = 2$, 故

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I} = 2\boldsymbol{I}.$$

又 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = \mathrm{diag}(1, -1, -\frac{1}{4})$, 故

$$\boldsymbol{A} = 2(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = \mathrm{diag}(2, -2, -\frac{1}{2}).$$

由 (26) 式, 有 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{B} = 3\boldsymbol{A}$. 而 $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I} = \mathrm{diag}(1, -3, -\frac{3}{2})$,

另解: 可以直接求出 $\boldsymbol{A}$. 如前述, 先得到 $|\boldsymbol{A}|=2$, 故

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}=2\boldsymbol{I}.$$

又 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\operatorname{diag}(1,-1,-\frac{1}{4})$, 故

$$\boldsymbol{A}=2(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\operatorname{diag}(2,-2,-\frac{1}{2}).$$

由 (26) 式, 有 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{B}=3\boldsymbol{A}$. 而 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\operatorname{diag}(1,-3,-\frac{3}{2})$, 故

$$\boldsymbol{B}=3(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{A}=3\operatorname{diag}(1,-\frac{1}{3},-\frac{2}{3})\operatorname{diag}(2,-2,-\frac{1}{2})=\operatorname{diag}(6,2,1).$$

练习 7.11 (P.101 习题 74)

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足: $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ 和 $|\boldsymbol{A}| < 0$, 求 $|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}|$.

练习 7.11 (P.101 习题 74)

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足: $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ 和 $|\boldsymbol{A}| < 0$, 求 $|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}|$.

解: 由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ 得

$$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}|^2 = 1,$$

因为 $|\boldsymbol{A}| < 0$, 所以 $|\boldsymbol{A}| = -1$.

练习 7.11 (P.101 习题 74)

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足: $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ 和 $|\boldsymbol{A}| < 0$, 求 $|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}|$.

解: 由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ 得

$$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}|^2 = 1,$$

因为 $|\boldsymbol{A}| < 0$, 所以 $|\boldsymbol{A}| = -1$. 从而

$$|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}| = |\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|$$

练习 7.11 (P.101 习题 74)

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足: $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$ 和 $|\boldsymbol{A}|<0$, 求 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}|$.

解: 由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$ 得

$$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}|^2=1,$$

因为 $|\boldsymbol{A}|<0$, 所以 $|\boldsymbol{A}|=-1$. 从而

$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=|(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{A}|$

练习 7.11 (P.101 习题 74)

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足: $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$ 和 $|\boldsymbol{A}|<0$, 求 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}|$.

解: 由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$ 得

$$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}|^2=1,$$

因为 $|\boldsymbol{A}|<0$, 所以 $|\boldsymbol{A}|=-1$. 从而

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=|(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{A}|=|(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{A}|$$

练习 7.11 (P.101 习题 74)

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足: $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$ 和 $|\boldsymbol{A}|<0$, 求 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}|$.

解: 由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$ 得

$$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}|^2=1,$$

因为 $|\boldsymbol{A}|<0$, 所以 $|\boldsymbol{A}|=-1$. 从而

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=|(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{A}|=|(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}|$$

练习 7.11 (P.101 习题 74)

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足: $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ 和 $|\boldsymbol{A}| < 0$, 求 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}|$.

解: 由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ 得

$$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}|^2 = 1,$$

因为 $|\boldsymbol{A}| < 0$, 所以 $|\boldsymbol{A}| = -1$. 从而

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}| = |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}| = |(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{A}| = |(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}| = -|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}|.$$

练习 7.11 (P.101 习题 74)

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足: $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$ 和 $|\boldsymbol{A}|<0$, 求 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}|$.

解: 由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$ 得

$$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}|^2=1,$$

因为 $|\boldsymbol{A}|<0$, 所以 $|\boldsymbol{A}|=-1$. 从而

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=|(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{A}|=|(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}|.$$

故

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}|=0.$$

练习 7.12 (P.101 习题 81)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵, 且主对角元全为 0, $\boldsymbol{B} = \mathrm{diag}(0, 1, 2)$, 求使 $\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{I}$ 为可逆矩阵的条件.

练习 7.12 (P.101 习题 81)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵, 且主对角元全为 0, $\boldsymbol{B}=\mathrm{diag}(0,1,2)$, 求使 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{I}$ 为可逆矩阵的条件.

解: 依题意设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{pmatrix}$,

练习 7.12 (P.101 习题 81)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵, 且主对角元全为 0, $\boldsymbol{B}=\mathrm{diag}(0,1,2)$, 求使 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{I}$ 为可逆矩阵的条件.

解: 依题意设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{pmatrix}$, 则

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{I} &= \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 2a_{13} \\ 0 & 0 & 2a_{23} \\ 0 & a_{23} & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & 2a_{13} \\ 0 & 1 & 2a_{23} \\ 0 & a_{23} & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

练习 7.12 (P.101 习题 81)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵, 且主对角元全为 0, $\boldsymbol{B}=\mathrm{diag}(0,1,2)$, 求使 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{I}$ 为可逆矩阵的条件.

解: 依题意设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & 0 & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & 0\end{pmatrix}$, 则

$$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}0 & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & 0 & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & a_{12} & 2a_{13}\\ 0 & 0 & 2a_{23}\\ 0 & a_{23} & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & a_{12} & 2a_{13}\\ 0 & 1 & 2a_{23}\\ 0 & a_{23} & 1\end{pmatrix}.$$

那么

$$|\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{I}|=1-2a_{23}^2.$$

故矩阵 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{I}$ 可逆的充要条件是:

$$|\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{I}| = 1 - 2a_{23}^2 \neq 0,$$

故矩阵 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{I}$ 可逆的充要条件是:

$$|\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{I}| = 1 - 2a_{23}^2 \neq 0,$$

即 $a_{23} \neq \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

练习 7.13 (P.102 习题 82)

已知 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{A}$ 均为 n 阶矩阵, 且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}(1, 1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0)$ (有 r 个 1), 试计算 $|\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{I}|$.

练习 7.13 (P.102 习题 82)

已知 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{A}$ 均为 n 阶矩阵, 且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}(1, 1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0)$ (有 r 个 1), 试计算 $|\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{I}|$.

解: 注意到 $|\boldsymbol{P}^{-1}||\boldsymbol{P}| = 1$,

练习 7.13 (P.102 习题 82)

已知 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{A}$ 均为 n 阶矩阵, 且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}(1, 1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0)$ (有 r 个 1), 试计算 $|\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{I}|$.

解: 注意到 $|\boldsymbol{P}^{-1}||\boldsymbol{P}| = 1$, 得

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{I}| &= |\boldsymbol{P}^{-1}| \cdot |\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{I}| \cdot |\boldsymbol{P}| \\ &= |\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}^{-1}2\boldsymbol{I}\boldsymbol{P}| = |\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} + 2\boldsymbol{I}|\end{aligned}$$

练习 7.13 (P.102 习题 82)

已知 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{A}$ 均为 n 阶矩阵, 且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}(1, 1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0)$ (有 r 个 1), 试计算 $|\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{I}|$.

解: 注意到 $|\boldsymbol{P}^{-1}||\boldsymbol{P}| = 1$, 得

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{I}| &= |\boldsymbol{P}^{-1}| \cdot |\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{I}| \cdot |\boldsymbol{P}| \\
&= |\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}^{-1}2\boldsymbol{I}\boldsymbol{P}| = |\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} + 2\boldsymbol{I}| \\
&= |\,\mathrm{diag}(1, 1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0) + \mathrm{diag}(2, 2, \cdots, 2)|
\end{aligned}
$$

练习 7.13 (P.102 习题 82)

已知 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{A}$ 均为 n 阶矩阵, 且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}(1, 1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0)$ (有 r 个 1), 试计算 $|\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{I}|$.

解: 注意到 $|\boldsymbol{P}^{-1}||\boldsymbol{P}| = 1$, 得

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{I}| &= |\boldsymbol{P}^{-1}| \cdot |\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{I}| \cdot |\boldsymbol{P}| \\ &= |\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}^{-1}2\boldsymbol{I}\boldsymbol{P}| = |\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} + 2\boldsymbol{I}| \\ &= |\,\mathrm{diag}(1, 1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0) + \mathrm{diag}(2, 2, \cdots, 2)| \\ &= |\,\mathrm{diag}(3, 3, \cdots, 3, 2, \cdots, 2)|, \end{aligned}$$

练习 7.13 (P.102 习题 82)

已知 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{A}$ 均为 n 阶矩阵, 且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}(1, 1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0)$ (有 r 个 1), 试计算 $|\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{I}|$.

解: 注意到 $|\boldsymbol{P}^{-1}||\boldsymbol{P}| = 1$, 得

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{I}| &= |\boldsymbol{P}^{-1}| \cdot |\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{I}| \cdot |\boldsymbol{P}| \\
&= |\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}^{-1}2\boldsymbol{I}\boldsymbol{P}| = |\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} + 2\boldsymbol{I}| \\
&= |\,\mathrm{diag}(1, 1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0) + \mathrm{diag}(2, 2, \cdots, 2)| \\
&= |\,\mathrm{diag}(3, 3, \cdots, 3, 2, \cdots, 2)|,
\end{aligned}$$

其中有 r 个 3 , $n - r$ 个 2 , 所以

$$|\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{I}| = 3^r \cdot 2^{n-r}.$$

Outline

1. 高斯消元法
2. 矩阵的加法　数量乘法　乘法
3. 矩阵的转置　对称矩阵
4. 可逆矩阵的逆矩阵
5. 矩阵的初等变换和初等矩阵
6. 分块矩阵
7. 习题解答

Outline

1. 高斯消元法
2. 矩阵的加法　数量乘法　乘法
3. 矩阵的转置　对称矩阵
4. 可逆矩阵的逆矩阵
5. 矩阵的初等变换和初等矩阵
6. 分块矩阵
7. 习题解答

(一) 都是高斯消元法

解线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, 解矩阵方程 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$, 初等行变换求逆矩阵, 它们使用的方法形式上是矩阵的初等行变换, 本质上是高斯消元法.

(一) 都是高斯消元法

解线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$, 解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$, 初等行变换求逆矩阵, 它们使用的方法形式上是矩阵的初等行变换, 本质上是高斯消元法.

(1) 解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 相当于同时解多个线性方程组 $\boldsymbol{Ax}_i=\boldsymbol{b}_i$.

(一) 都是高斯消元法

解线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$, 解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$, 初等行变换求逆矩阵, 它们使用的方法形式上是矩阵的初等行变换, 本质上是高斯消元法.

(1) 解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 相当于同时解多个线性方程组 $\boldsymbol{Ax}_i=\boldsymbol{b}_i$.

(2) 初等变换求逆矩阵, 其实是在解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{I}$.

(二) 矩阵乘法不满足的几个运算律.

I. 不满足交换律, 即 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ 一般不成立. (特别地, 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, 则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是可交换的.)

(二) 矩阵乘法不满足的几个运算律.

I. 不满足交换律, 即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 一般不成立. (特别地, 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是可交换的.)

相应地要注意以下几点:

(1) 矩阵乘法特别地有 "左乘" 和 "右乘" 的说法, 比如 $\boldsymbol{B}$ 左乘 $\boldsymbol{A}$ (即 $\boldsymbol{BA}$) 和 $\boldsymbol{B}$ 右乘 $\boldsymbol{A}$ (即 $\boldsymbol{AB}$) 是完全不同的.

(二) 矩阵乘法不满足的几个运算律.

I. 不满足交换律, 即 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ 一般不成立. (特别地, 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, 则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是可交换的.)

相应地要注意以下几点:

(1) 矩阵乘法特别地有 "左乘" 和 "右乘" 的说法, 比如 $\boldsymbol{B}$ 左乘 $\boldsymbol{A}$ (即 $\boldsymbol{BA}$) 和 $\boldsymbol{B}$ 右乘 $\boldsymbol{A}$ (即 $\boldsymbol{AB}$) 是完全不同的.

(2) 在提取公因子的时候, 要分清楚是从左侧还是右侧提出.

(二) 矩阵乘法不满足的几个运算律.

I. 不满足交换律, 即 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ 一般不成立. (特别地, 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, 则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是可交换的.)

相应地要注意以下几点:

(1) 矩阵乘法特别地有 “左乘” 和 “右乘” 的说法, 比如 $\boldsymbol{B}$ 左乘 $\boldsymbol{A}$ (即 $\boldsymbol{BA}$) 和 $\boldsymbol{B}$ 右乘 $\boldsymbol{A}$ (即 $\boldsymbol{AB}$) 是完全不同的.

(2) 在提取公因子的时候, 要分清楚是从左侧还是右侧提出. 比如

$$\boldsymbol{AB} - \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{B},$$

即 $\boldsymbol{B}$ 只能从右侧提出,

(二) 矩阵乘法不满足的几个运算律.

I. 不满足交换律, 即 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ 一般不成立. (特别地, 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, 则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是可交换的.)

相应地要注意以下几点:

(1) 矩阵乘法特别地有 “左乘” 和 “右乘” 的说法, 比如 $\boldsymbol{B}$ 左乘 $\boldsymbol{A}$ (即 $\boldsymbol{BA}$) 和 $\boldsymbol{B}$ 右乘 $\boldsymbol{A}$ (即 $\boldsymbol{AB}$) 是完全不同的.

(2) 在提取公因子的时候, 要分清楚是从左侧还是右侧提出. 比如

$$\boldsymbol{AB} - \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{B},$$

即 $\boldsymbol{B}$ 只能从右侧提出, 而

$$\boldsymbol{AB} - \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}).$$

下列两个写法正确吗?

$$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BC}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C})\boldsymbol{B},$$

$$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C}).$$

(3) 下列公式一般不成立:

- $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^k = \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$;

(3) 下列公式一般不成立:

- $(\boldsymbol{AB})^k = \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$;
- $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2$;

(3) 下列公式一般不成立:

- $(\boldsymbol{AB})^k = \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$;
- $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2$;
- 牛顿二项式展开式一般不成立,

(3) 下列公式一般不成立:

- $(\boldsymbol{AB})^k = \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$;
- $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2$;
- 牛顿二项式展开式一般不成立, 比如最简单的公式

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 = \boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{B}^2$$

就不成立.

(3) 下列公式一般不成立:

- $(\boldsymbol{AB})^k = \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$;
- $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2$;
- 牛顿二项式展开式一般不成立, 比如最简单的公式

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 = \boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{B}^2$$

就不成立. 而 $\boldsymbol{A}$ 与 $\lambda\boldsymbol{I}$ 当然是可交换的, 所以牛顿二项式展开式只在下面的情形成立:

$$(\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{I})^n = \boldsymbol{A}^n + \mathrm{C}_n^1\lambda\boldsymbol{A}^{n-1} + \mathrm{C}_n^2\lambda^2\boldsymbol{A}^{n-2} + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1}\lambda^{n-1}\boldsymbol{A} + \lambda^n\boldsymbol{I}.$$

II. 不满足消去律:

(1) 当 $\boldsymbol{AB}=\mathbf{0}$ 时, 不能推出 $\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$ 或 $\boldsymbol{B}=\mathbf{0}$.

II. 不满足消去律:

(1) 当 $\boldsymbol{AB}=\mathbf{0}$ 时, 不能推出 $\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$ 或 $\boldsymbol{B}=\mathbf{0}$.

(2) 当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$, 且 $\boldsymbol{A}\neq\mathbf{0}$ 时, 不能得到 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

II. 不满足消去律:

(1) 当 $\boldsymbol{AB}=\mathbf{0}$ 时, 不能推出 $\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$ 或 $\boldsymbol{B}=\mathbf{0}$.

(2) 当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$, 且 $\boldsymbol{A}\neq\mathbf{0}$ 时, 不能得到 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

注意, 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时, 消去律是成立的,

II. 不满足消去律:

(1) 当 $\boldsymbol{AB}=\mathbf{0}$ 时, 不能推出 $\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$ 或 $\boldsymbol{B}=\mathbf{0}$.

(2) 当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$, 且 $\boldsymbol{A}\neq\mathbf{0}$ 时, 不能得到 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

注意, 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时, 消去律是成立的, 即

注

当 $\boldsymbol{AB}=\mathbf{0}$ 时, 且 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时, 有 $\boldsymbol{B}=\mathbf{0}$;

II. 不满足消去律:

(1) 当 $\boldsymbol{AB} = \mathbf{0}$ 时, 不能推出 $\boldsymbol{A} = \mathbf{0}$ 或 $\boldsymbol{B} = \mathbf{0}$.

(2) 当 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC}$, 且 $\boldsymbol{A} \neq \mathbf{0}$ 时, 不能得到 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$.

注意, 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时, 消去律是成立的, 即

注

当 $\boldsymbol{AB} = \mathbf{0}$ 时, 且 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ 时, 有 $\boldsymbol{B} = \mathbf{0}$;

当 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC}$, 且 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ 时, 有 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$.

II. 不满足消去律:

(1) 当 $\boldsymbol{AB}=\mathbf{0}$ 时, 不能推出 $\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$ 或 $\boldsymbol{B}=\mathbf{0}$.

(2) 当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$, 且 $\boldsymbol{A}\neq\mathbf{0}$ 时, 不能得到 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

注意, 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时, 消去律是成立的, 即

注

当 $\boldsymbol{AB}=\mathbf{0}$ 时, 且 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时, 有 $\boldsymbol{B}=\mathbf{0}$;

当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$, 且 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时, 有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

问:

- 由 $\boldsymbol{A}^2=\mathbf{0}$, 能否得到 $\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$?

II. 不满足消去律:

(1) 当 $\boldsymbol{AB}=\mathbf{0}$ 时, 不能推出 $\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$ 或 $\boldsymbol{B}=\mathbf{0}$.

(2) 当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$, 且 $\boldsymbol{A}\neq\mathbf{0}$ 时, 不能得到 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

注意, 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时, 消去律是成立的, 即

注

当 $\boldsymbol{AB}=\mathbf{0}$ 时, 且 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时, 有 $\boldsymbol{B}=\mathbf{0}$;

当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$, 且 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时, 有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

问:

- 由 $\boldsymbol{A}^2=\mathbf{0}$, 能否得到 $\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$?
- 由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}$, 能否得到 $\boldsymbol{A}=\pm\boldsymbol{I}$?

II. 不满足消去律:

(1) 当 $\boldsymbol{AB} = \mathbf{0}$ 时, 不能推出 $\boldsymbol{A} = \mathbf{0}$ 或 $\boldsymbol{B} = \mathbf{0}$.

(2) 当 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC}$, 且 $\boldsymbol{A} \neq \mathbf{0}$ 时, 不能得到 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$.

注意, 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时, 消去律是成立的, 即

注

当 $\boldsymbol{AB} = \mathbf{0}$ 时, 且 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ 时, 有 $\boldsymbol{B} = \mathbf{0}$;

当 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC}$, 且 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ 时, 有 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$.

问:

- 由 $\boldsymbol{A}^2 = \mathbf{0}$, 能否得到 $\boldsymbol{A} = \mathbf{0}$?
- 由 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{I}$, 能否得到 $\boldsymbol{A} = \pm\boldsymbol{I}$?
- 由 $a\boldsymbol{A}^2 + b\boldsymbol{A} + c\boldsymbol{I} = \mathbf{0}$ 且 $b^2 - 4ac \geqslant 0$, 能否得到 $\boldsymbol{A} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\boldsymbol{I}$?

II. 不满足消去律:

(1) 当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 时, 不能推出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$.

(2) 当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$, 且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$ 时, 不能得到 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

注意, 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时, 消去律是成立的, 即

注

当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 时, 且 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时, 有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$;

当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$, 且 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时, 有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

问:

- 由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$, 能否得到 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$?
- 由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}$, 能否得到 $\boldsymbol{A}=\pm\boldsymbol{I}$?
- 由 $a\boldsymbol{A}^2+b\boldsymbol{A}+c\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$ 且 $b^2-4ac\geqslant 0$, 能否得到 $\boldsymbol{A}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\boldsymbol{I}$?

答: 上述都是不成立的, 根源仍然是因为矩阵乘法不满足消去律.

矩阵乘法不满足交换律, 不满足消去律, 还有一些过去熟知的公式在矩阵理论里并不成立.

矩阵乘法不满足交换律, 不满足消去律, 还有一些过去熟知的公式在矩阵理论里并不成立. 这些是线性代数初学者最容易犯的几个错误之一, 为数不少的人会一直犯这个错误.

矩阵乘法不满足交换律, 不满足消去律, 还有一些过去熟知的公式在矩阵理论里并不成立. 这些是线性代数初学者最容易犯的几个错误之一, 为数不少的人会一直犯这个错误.

我们要注意, 虽然矩阵也有所谓的 “加法”、“乘法”, 但是这和我们熟知的实数加法、乘法是完全不同的.

矩阵乘法不满足交换律, 不满足消去律, 还有一些过去熟知的公式在矩阵理论里并不成立. 这些是线性代数初学者最容易犯的几个错误之一, 为数不少的人会一直犯这个错误.

我们要注意, 虽然矩阵也有所谓的 "加法"、"乘法", 但是这和我们熟知的实数加法、乘法是完全不同的. —— 运算的对象不同, 运算的内容不同, 当然, 运算的规律也不同.

矩阵乘法不满足交换律, 不满足消去律, 还有一些过去熟知的公式在矩阵理论里并不成立. 这些是线性代数初学者最容易犯的几个错误之一, 为数不少的人会一直犯这个错误.

我们要注意, 虽然矩阵也有所谓的 “加法”、“乘法”, 但是这和我们熟知的实数加法、乘法是完全不同的. —— 运算的对象不同, 运算的内容不同, 当然, 运算的规律也不同.

这是两个不同的讨论范围里的不同运算, 相同的只不过是沿用了以前的称谓或记号而已, 我们不要被这一点 “相同” 而忘记二者本质的不同.

(三) 伴随矩阵

(1) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}.$

(三) 伴随矩阵

(1) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$.

这个公式要牢记!

(三) 伴随矩阵

(1) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$.

这个公式要牢记! 其重大意义是由此引入了逆矩阵的讨论. 注意这里的 $\boldsymbol{A}$ 不一定是可逆的.

(三) 伴随矩阵

(1) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$.

这个公式要牢记! 其重大意义是由此引入了逆矩阵的讨论. 注意这里的 $\boldsymbol{A}$ 不一定是可逆的.

(2) 若 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 则 $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$.

(三) 伴随矩阵

(1) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$.

这个公式要牢记! 其重大意义是由此引入了逆矩阵的讨论. 注意这里的 $\boldsymbol{A}$ 不一定是可逆的.

(2) 若 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 则 $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$.

它在理论上给出了求逆矩阵的方法, 但是并不实用.

(四) 逆矩阵

(0) 记号 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是特定的, 它不能写成 $\dfrac{1}{\boldsymbol{A}}$.

(四) 逆矩阵

(0) 记号 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是特定的, 它不能写成 $\dfrac{1}{\boldsymbol{A}}$.

(1) 矩阵定义中的条件 "$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$" 是可以弱化的: 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为方阵, 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$, 则 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 可逆, 且互为逆矩阵.

(四) 逆矩阵

(0) 记号 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是特定的, 它不能写成 $\dfrac{1}{\boldsymbol{A}}$.

(1) 矩阵定义中的条件 "$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$" 是可以弱化的: 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为方阵, 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$, 则 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 可逆, 且互为逆矩阵.

更一般地, 对方阵而言, 若 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_k=\lambda\boldsymbol{I}$ 且 $\lambda\neq 0$, 则矩阵 $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{A}_k$ 都是可逆的.

(四) 逆矩阵

(0) 记号 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是特定的, 它不能写成 $\dfrac{1}{\boldsymbol{A}}$.

(1) 矩阵定义中的条件 "$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$" 是可以弱化的: 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为方阵, 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$, 则 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 可逆, 且互为逆矩阵.

更一般地, 对方阵而言, 若 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_k=\lambda\boldsymbol{I}$ 且 $\lambda\neq 0$, 则矩阵 $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{A}_k$ 都是可逆的.

(2) 逆矩阵在运算中实现了除法的功能. 在矩阵中没有除法, 或者说, 我们通过引入逆矩阵, 避免了对除法的讨论.

(五) 其他重要公式与结论.

- $|\lambda \boldsymbol{A}| = \lambda^n |\boldsymbol{A}|$.

(五) 其他重要公式与结论.

- $|\lambda \boldsymbol{A}| = \lambda^n |\boldsymbol{A}|$.
- $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

(五) 其他重要公式与结论.

- $|\lambda \boldsymbol{A}| = \lambda^n |\boldsymbol{A}|$.
- $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.
- $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

(五) 其他重要公式与结论.

- $|\lambda \boldsymbol{A}| = \lambda^n |\boldsymbol{A}|$.
- $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.
- $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.
- $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \ (ad-bc \neq 0)$.

(五) 其他重要公式与结论.

- $|\lambda \boldsymbol{A}| = \lambda^n |\boldsymbol{A}|$.
- $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.
- $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.
- $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \ (ad-bc \neq 0)$.
- $$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_k \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \\ & \boldsymbol{A}_1^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_k^{-1} \end{pmatrix}.$$

(五) 其他重要公式与结论.

- $|\lambda \boldsymbol{A}| = \lambda^n |\boldsymbol{A}|$.
- $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.
- $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.
- $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \ (ad-bc \neq 0)$.
- $$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_k \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \\ & \boldsymbol{A}_1^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_k^{-1} \end{pmatrix}.$$
- $$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_k \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}_1|\,|\boldsymbol{A}_2|\cdots|\boldsymbol{A}_k|.$$

- $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$

- $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$
- $\begin{vmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_{m\times m} \\ \boldsymbol{B}_{n\times n} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = (-1)^{mn} \left|\boldsymbol{A}\right| \left|\boldsymbol{B}\right|.$

Outline

1. 高斯消元法
2. 矩阵的加法　数量乘法　乘法
3. 矩阵的转置　对称矩阵
4. 可逆矩阵的逆矩阵
5. 矩阵的初等变换和初等矩阵
6. 分块矩阵
7. 习题解答

例 8.1

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均为 $n \times n$ 矩阵, 则必有 【　　】

(A) $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}|$.

(B) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$.

(C) $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}|$.

(D) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{B}^{-1}$.

例 8.1

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均为 $n \times n$ 矩阵, 则必有 【　　】

(A) $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}|$.

(B) $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$.

(C) $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{BA}|$.

(D) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{B}^{-1}$.

解: 选 (C).

例 8.1

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均为 $n \times n$ 矩阵, 则必有 【　　】

(A) $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$.　　(B) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

(C) $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|$.　　(D) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$.

解: 选 (C). 特别注意选项 (D): $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$, 是错误的. □

例 8.2

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 均为 n 阶可逆矩阵, 则 $(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}=$【　　】

(A) $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$.　　(B) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

(C) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}$.　　(D) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}$.

例 8.2

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 均为 n 阶可逆矩阵, 则 $(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}=$【 】

(A) $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$.　　(B) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

(C) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}$.　　(D) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}$.

解: 首先就可以排除 (A), (B).

例 8.2

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 均为 n 阶可逆矩阵, 则 $(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}=$【　　】

(A) $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$.　　(B) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

(C) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}$.　　(D) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}$.

解: 首先就可以排除 (A), (B). 选项 (B) 和上例中的 (D) 是一样的错误.

例 8.2

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 均为 n 阶可逆矩阵, 则 $(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}=$【　　】

(A) $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$.　　(B) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

(C) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}$.　　(D) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}$.

解: 首先就可以排除 (A), (B). 选项 (B) 和上例中的 (D) 是一样的错误. 直接验证, 知正确选项是 (C).

例 8.2

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 均为 n 阶可逆矩阵, 则 $(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}=$【　　】

(A) $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$.　　(B) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

(C) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}$.　　(D) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}$.

解: 首先就可以排除 (A), (B). 选项 (B) 和上例中的 (D) 是一样的错误. 直接验证, 知正确选项是 (C). 事实上,

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1} &= (\boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{I})^{-1}\\ &= (\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}\\ &= \left(\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}\\ &= (\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}\\ &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}.\end{aligned}$$

□

例 8.3

已知 $\boldsymbol{\alpha} = (1, 2, 3)$, $\boldsymbol{\beta} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$, 设 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$, 求 $\boldsymbol{A}^n$.

例 8.3

已知 $\boldsymbol{\alpha} = (1, 2, 3)$, $\boldsymbol{\beta} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$, 设 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$, 求 $\boldsymbol{A}^n$.

解:

$$\boldsymbol{A}^n = \left(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\right)^n$$

例 8.3

已知 $\boldsymbol{\alpha} = (1, 2, 3)$, $\boldsymbol{\beta} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$, 设 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$, 求 $\boldsymbol{A}^n$.

解:

$$\boldsymbol{A}^n = \left(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\right)^n = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\right)^{n-1}\boldsymbol{\beta}$$

例 8.3

已知 $\boldsymbol{\alpha} = (1, 2, 3)$, $\boldsymbol{\beta} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$, 设 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$, 求 $\boldsymbol{A}^n$.

解:

$$\boldsymbol{A}^n = \left(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\right)^n = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\right)^{n-1}\boldsymbol{\beta} = 3^{n-1}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$$

例 8.3

已知 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3)$, $\boldsymbol{\beta}=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$, 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$, 求 $\boldsymbol{A}^{n}$.

解:

$$\boldsymbol{A}^{n}=\left(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\right)^{n}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\right)^{n-1}\boldsymbol{\beta}=3^{n-1}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=3^{n-1}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 2 & 1 & \frac{2}{3}\\ 3 & \frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}.$$

□

例 8.4

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, 而 n 为正整数, 求 $\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}$. $(n\geqslant 2)$

例 8.4

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, 而 n 为正整数, 求 $\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}$. $(n\geqslant 2)$

解: 由 $\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{pmatrix}=2\boldsymbol{A}$,

例 8.4

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, 而 n 为正整数, 求 $\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}$. $(n\geqslant 2)$

解: 由 $\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{pmatrix}=2\boldsymbol{A}$, 得

$$\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}=\boldsymbol{A}^{n-2}\left(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}\right)=\mathbf{0}.$$

$\square$

例 8.5

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 其中 $\boldsymbol{P}$ 为三阶可逆矩阵, 求 $\boldsymbol{B}^{2008}-2\boldsymbol{A}^2$.

例 8.5

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 其中 $\boldsymbol{P}$ 为三阶可逆矩阵, 求 $\boldsymbol{B}^{2008}-2\boldsymbol{A}^2$.

解: 由 $\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}$,

例 8.5

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 其中 $\boldsymbol{P}$ 为三阶可逆矩阵, 求 $\boldsymbol{B}^{2008} - 2\boldsymbol{A}^2$.

解: 由 $\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$, 且 $\boldsymbol{A}^4 = \boldsymbol{I}$,

例 8.5

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 其中 $\boldsymbol{P}$ 为三阶可逆矩阵, 求 $\boldsymbol{B}^{2008}-2\boldsymbol{A}^{2}$.

解: 由 $\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & -1 & \\ & & 1\end{pmatrix}$, 且 $\boldsymbol{A}^4=\boldsymbol{I}$, 得

$$\boldsymbol{B}^{2008}-2\boldsymbol{A}^{2}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{2008}\boldsymbol{P}-2\boldsymbol{A}^{2}$$

例 8.5

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 其中 $\boldsymbol{P}$ 为三阶可逆矩阵, 求 $\boldsymbol{B}^{2008}-2\boldsymbol{A}^2$.

解: 由 $\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}$, 且 $\boldsymbol{A}^4=\boldsymbol{I}$, 得

$$\boldsymbol{B}^{2008}-2\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{2008}\boldsymbol{P}-2\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}-2\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}3&&\\&3&\\&&-1\end{pmatrix}.$$

□

例 8.6

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, $\boldsymbol{A}^*$, $\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵, 分块矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{C}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{C}^*=$ 【　】

(A) $\begin{pmatrix}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^*\end{pmatrix}$.　(B) $\begin{pmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^*\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^*\end{pmatrix}$.　(D) $\begin{pmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\end{pmatrix}$.

例 8.6

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, $\boldsymbol{A}^*$, $\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵, 分块矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{C}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{C}^*=$ 【　】

(A) $\begin{pmatrix}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^*\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^*\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^*\end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\end{pmatrix}$.

解: 为了方便地得到正确选项, 不妨设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为可逆矩阵, 则 $\boldsymbol{C}$ 也可逆.

例 8.6

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, $\boldsymbol{A}^*$, $\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵, 分块矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{C}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{C}^*=$ 【 】

(A) $\begin{pmatrix}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^*\end{pmatrix}$.

(B) $\begin{pmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^*\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^*\end{pmatrix}$.

(D) $\begin{pmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\end{pmatrix}$.

解: 为了方便地得到正确选项, 不妨设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为可逆矩阵, 则 $\boldsymbol{C}$ 也可逆.

$$\boldsymbol{C}^*=|\boldsymbol{C}|\boldsymbol{C}^{-1}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}^{-1}$$

例 8.6

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, $\boldsymbol{A}^*$, $\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵, 分块矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{C}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{C}^*=$ 【 】

(A) $\begin{pmatrix}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^*\end{pmatrix}$.

(B) $\begin{pmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^*\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^*\end{pmatrix}$.

(D) $\begin{pmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\end{pmatrix}$.

解: 为了方便地得到正确选项, 不妨设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为可逆矩阵, 则 $\boldsymbol{C}$ 也可逆.

$$\boldsymbol{C}^*=|\boldsymbol{C}|\boldsymbol{C}^{-1}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}^{-1}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}^{-1}\end{pmatrix},$$

所以选 (D). □

例 8.7

已知 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}$, 试求 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的逆矩阵.

例 8.7

已知 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}$, 试求 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的逆矩阵.

解: 已知 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$, 知 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$.

例 8.7

已知 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}$, 试求 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的逆矩阵.

解: 已知 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$, 知 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$. 所以

$$\left(\boldsymbol{A}^*\right)^{-1}=\left(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}$$

例 8.7

已知 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}$, 试求 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^{*}$ 的逆矩阵.

解: 已知 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 由 $\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$, 知 $\boldsymbol{A}^{*}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$. 所以

$$(\boldsymbol{A}^{*})^{-1}=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=|\boldsymbol{A}^{-1}|(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}.$$

例 8.7

已知 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}$, 试求 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的逆矩阵.

解: 已知 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$, 知 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$. 所以

$$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\left(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}=\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}.$$

计算得

$$\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&2\end{vmatrix}=2,$$

且

$$(\boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{I}) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\cong \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right),$$

且

$$
(A^{-1}, I) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\cong \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right),
$$

所以

$$
(A^*)^{-1} = 2\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

□

例 8.8

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵, $|\boldsymbol{A}| = 2$, $|\boldsymbol{B}| = -3$, 求 $\left|2\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}\right|$.

例 8.8

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵, $|\boldsymbol{A}| = 2$, $|\boldsymbol{B}| = -3$, 求 $\left|2\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}\right|$.

解: 由 $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$,

例 8.8

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵, $|\boldsymbol{A}|=2,\ |\boldsymbol{B}|=-3$, 求 $\left|2\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}\right|$.

解: 由 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$, 所以

$$\left|2\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}\right|=2^n\left|\boldsymbol{A}^*\right|\cdot\left|\boldsymbol{B}^{-1}\right|$$

例 8.8

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵, $|\boldsymbol{A}|=2,\ |\boldsymbol{B}|=-3$, 求 $\left|2\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}\right|$.

解: 由 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$, 所以

$$\left|2\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}\right|=2^n\left|\boldsymbol{A}^*\right|\cdot\left|\boldsymbol{B}^{-1}\right|=2^n\left|\boldsymbol{A}\right|^{n-1}\frac{1}{|\boldsymbol{B}|}$$

例 8.8

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵, $|\boldsymbol{A}| = 2$, $|\boldsymbol{B}| = -3$, 求 $\left|2\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}\right|$.

解: 由 $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$, 所以

$$\left|2\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}\right| = 2^n\left|\boldsymbol{A}^*\right| \cdot \left|\boldsymbol{B}^{-1}\right| = 2^n\left|\boldsymbol{A}\right|^{n-1}\frac{1}{|\boldsymbol{B}|} = -\frac{2^{2n-1}}{3}.$$

□

例 8.9

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, 且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1} + 3\boldsymbol{I}$, 求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

例 8.9

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, 且 $\boldsymbol{ABA}^{-1} = \boldsymbol{BA}^{-1} + 3\boldsymbol{I}$, 求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解: 在 $\boldsymbol{ABA}^{-1} = \boldsymbol{BA}^{-1} + 3\boldsymbol{I}$ 两边同时右乘 $\boldsymbol{A}$,

例 8.9

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, 且 $\boldsymbol{ABA}^{-1} = \boldsymbol{BA}^{-1} + 3\boldsymbol{I}$, 求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解: 在 $\boldsymbol{ABA}^{-1} = \boldsymbol{BA}^{-1} + 3\boldsymbol{I}$ 两边同时右乘 $\boldsymbol{A}$, 得

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{B} + 3\boldsymbol{A}.$$

例 8.9

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, 且 $\boldsymbol{ABA}^{-1} = \boldsymbol{BA}^{-1} + 3\boldsymbol{I}$, 求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解: 在 $\boldsymbol{ABA}^{-1} = \boldsymbol{BA}^{-1} + 3\boldsymbol{I}$ 两边同时右乘 $\boldsymbol{A}$, 得

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{B} + 3\boldsymbol{A}.$$

再两边左乘 $\boldsymbol{A}^*$,

例 8.9

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, 且 $\boldsymbol{ABA}^{-1} = \boldsymbol{BA}^{-1} + 3\boldsymbol{I}$, 求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解: 在 $\boldsymbol{ABA}^{-1} = \boldsymbol{BA}^{-1} + 3\boldsymbol{I}$ 两边同时右乘 $\boldsymbol{A}$, 得

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{B} + 3\boldsymbol{A}.$$

再两边左乘 $\boldsymbol{A}^*$, 得

$$|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B} + 3\,|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{I},$$

例 8.9

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, 且 $\boldsymbol{ABA}^{-1} = \boldsymbol{BA}^{-1} + 3\boldsymbol{I}$, 求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解: 在 $\boldsymbol{ABA}^{-1} = \boldsymbol{BA}^{-1} + 3\boldsymbol{I}$ 两边同时右乘 $\boldsymbol{A}$, 得

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{B} + 3\boldsymbol{A}.$$

再两边左乘 $\boldsymbol{A}^*$, 得

$$|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B} + 3\,|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{I},$$

即

$$(|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^*)\,\boldsymbol{B} = 3\,|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{I}.$$

注意到 $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$, 由题设得 $|\boldsymbol{A}| = 2$.

注意到 $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$, 由题设得 $|\boldsymbol{A}| = 2$. 所以 $(2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^*)\boldsymbol{B} = 6\boldsymbol{I}$,

注意到 $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$, 由题设得 $|\boldsymbol{A}| = 2$. 所以 $(2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^*)\,\boldsymbol{B} = 6\boldsymbol{I}$, 得

$$\boldsymbol{B} = 6\,(2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^*)^{-1}$$

注意到 $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$, 由题设得 $|\boldsymbol{A}| = 2$. 所以 $(2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^*)\,\boldsymbol{B} = 6\boldsymbol{I}$, 得

$$\boldsymbol{B} = 6\,(2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

例 8.10

已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$, 证明: $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}$ 可逆, 并求其逆.

若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{pmatrix}$, 求 $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})^{-1}$.

例 8.10

已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$, 证明: $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}$ 可逆, 并求其逆.

若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{pmatrix}$, 求 $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})^{-1}$.

解: (方法一) 由 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$,

例 8.10

已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$, 证明: $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}$ 可逆, 并求其逆.

若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{pmatrix}$, 求 $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})^{-1}$.

解: (方法一) 由 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$, 两边左乘 $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$,

例 8.10

已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$, 证明: $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}$ 可逆, 并求其逆.

若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{pmatrix}$, 求 $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})^{-1}$.

解: (方法一) 由 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$, 两边左乘 $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$, 得

$$
\begin{aligned}
& \boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}, \\
\Rightarrow\quad & (\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{B}+\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{I}, \\
\Rightarrow\quad & (\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})\,(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})=2\boldsymbol{I}.
\end{aligned}
$$

例 8.10

已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$, 证明: $\boldsymbol{I} + \boldsymbol{B}$ 可逆, 并求其逆.

若 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{pmatrix}$, 求 $(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{B})^{-1}$.

解: (方法一) 由 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$, 两边左乘 $\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}$, 得

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}, \\ \Rightarrow \quad & (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A})\,\boldsymbol{B} + \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{I}, \\ \Rightarrow \quad & (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A})\,(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{B}) = 2\boldsymbol{I}. \end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{I} + \boldsymbol{B}$ 可逆,

例 8.10

已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$, 证明: $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}$ 可逆, 并求其逆.

若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{pmatrix}$, 求 $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})^{-1}$.

解: (方法一) 由 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$, 两边左乘 $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$, 得

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}, \\ \Rightarrow\quad & (\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{B}+\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{I}, \\ \Rightarrow\quad & (\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})\,(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})=2\boldsymbol{I}. \end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}$ 可逆, 且 $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})$.

(方法二) 由 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$,

(方法二) 由 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$, 得

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}(2\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})), \\ \Rightarrow \quad & \boldsymbol{B}=2(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}-\boldsymbol{I}, \\ \Rightarrow \quad & \boldsymbol{B}+\boldsymbol{I}=2(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}. \end{aligned}$$

(方法二) 由 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$, 得

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}(2\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})), \\ \Rightarrow\quad & \boldsymbol{B}=2(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}-\boldsymbol{I}, \\ \Rightarrow\quad & \boldsymbol{B}+\boldsymbol{I}=2(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}. \end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}$ 可逆,

(方法二) 由 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$, 得

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}(2\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})), \\ \Rightarrow \quad & \boldsymbol{B}=2(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}-\boldsymbol{I}, \\ \Rightarrow \quad & \boldsymbol{B}+\boldsymbol{I}=2(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}. \end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}$ 可逆, 且 $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})$

(方法二) 由 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$, 得

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}(2\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})), \\ \Rightarrow \quad & \boldsymbol{B}=2(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}-\boldsymbol{I}, \\ \Rightarrow \quad & \boldsymbol{B}+\boldsymbol{I}=2(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}. \end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}$ 可逆, 且 $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. $\square$

例 8.11

已知矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 满足 $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} - 4\boldsymbol{I}$, 证明矩阵 $\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}$ 可逆. 若 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

例 8.11

已知矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 满足 $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} - 4\boldsymbol{I}$, 证明矩阵 $\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}$ 可逆. 若

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$ 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解: 由 $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} - 4\boldsymbol{I}$

例 8.11

已知矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 满足 $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{I}$, 证明矩阵 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}$ 可逆. 若 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$, 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解: 由 $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{I}$ 得

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{AB}-2\boldsymbol{B}=4\boldsymbol{A}, \\ \Rightarrow\quad & (\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\,\boldsymbol{B}=4\,(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})+8\boldsymbol{I}, \\ \Rightarrow\quad & (\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\,(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{I})=8\boldsymbol{I}, \end{aligned}$$

例 8.11

已知矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 满足 $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} - 4\boldsymbol{I}$, 证明矩阵 $\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}$ 可逆. 若 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解: 由 $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} - 4\boldsymbol{I}$ 得

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} - 2\boldsymbol{B} = 4\boldsymbol{A}, \\ \Rightarrow\quad & (\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})\,\boldsymbol{B} = 4\,(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}) + 8\boldsymbol{I}, \\ \Rightarrow\quad & (\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})\,(\boldsymbol{B} - 4\boldsymbol{I}) = 8\boldsymbol{I}, \end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}$ 可逆. 且 $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{I} + 8\,(\boldsymbol{B} - 4\boldsymbol{I})^{-1}$

例 8.11

已知矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 满足 $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{I}$, 证明矩阵 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}$ 可逆. 若
$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解: 由 $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{I}$ 得

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{B}=4\boldsymbol{A}, \\ \Rightarrow\quad & (\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\,\boldsymbol{B}=4\,(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})+8\boldsymbol{I}, \\ \Rightarrow\quad & (\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\,(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{I})=8\boldsymbol{I}, \end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}$ 可逆. 且 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{I}+8\,(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{I})^{-1}=2\boldsymbol{I}+8\begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$

例 8.11

已知矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 满足 $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} - 4\boldsymbol{I}$, 证明矩阵 $\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}$ 可逆. 若 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解: 由 $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} - 4\boldsymbol{I}$ 得

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{AB} - 2\boldsymbol{B} = 4\boldsymbol{A}, \\ \Rightarrow \quad & (\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})\,\boldsymbol{B} = 4\,(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}) + 8\boldsymbol{I}, \\ \Rightarrow \quad & (\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})\,(\boldsymbol{B} - 4\boldsymbol{I}) = 8\boldsymbol{I}, \end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}$ 可逆. 且 $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{I} + 8\,(\boldsymbol{B} - 4\boldsymbol{I})^{-1} = 2\boldsymbol{I} + 8\begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. □

例 8.12

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, 且满足 $\boldsymbol{A}^3 = 2\boldsymbol{I}$, 又 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}$, 试求 $\boldsymbol{B}^{-1}$.

例 8.12

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, 且满足 $\boldsymbol{A}^3 = 2\boldsymbol{I}$, 又 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}$, 试求 $\boldsymbol{B}^{-1}$.

解: 由 $\boldsymbol{A}^3 = 2\boldsymbol{I}$ 可得 $\boldsymbol{A}^3 - \boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}$.

例 8.12

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, 且满足 $\boldsymbol{A}^3 = 2\boldsymbol{I}$, 又 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}$, 试求 $\boldsymbol{B}^{-1}$.

解: 由 $\boldsymbol{A}^3 = 2\boldsymbol{I}$ 可得 $\boldsymbol{A}^3 - \boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}$. 故

$$\boldsymbol{A}^3 - \boldsymbol{I} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}) = \boldsymbol{I}.$$

例 8.12

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, 且满足 $\boldsymbol{A}^3 = 2\boldsymbol{I}$, 又 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}$, 试求 $\boldsymbol{B}^{-1}$.

解: 由 $\boldsymbol{A}^3 = 2\boldsymbol{I}$ 可得 $\boldsymbol{A}^3 - \boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}$. 故

$$\boldsymbol{A}^3 - \boldsymbol{I} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}) = \boldsymbol{I}.$$

得 $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}$ 可逆, 且

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})^{-1} = \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}.$$

例 8.12

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, 且满足 $\boldsymbol{A}^3 = 2\boldsymbol{I}$, 又 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}$, 试求 $\boldsymbol{B}^{-1}$.

解: 由 $\boldsymbol{A}^3 = 2\boldsymbol{I}$ 可得 $\boldsymbol{A}^3 - \boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}$. 故

$$\boldsymbol{A}^3 - \boldsymbol{I} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}) = \boldsymbol{I}.$$

得 $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}$ 可逆, 且

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})^{-1} = \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}.$$

又 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})^2$, 故 $\boldsymbol{B}$ 可逆,

例 8.12

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, 且满足 $\boldsymbol{A}^3 = 2\boldsymbol{I}$, 又 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}$, 试求 $\boldsymbol{B}^{-1}$.

解: 由 $\boldsymbol{A}^3 = 2\boldsymbol{I}$ 可得 $\boldsymbol{A}^3 - \boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}$. 故

$$\boldsymbol{A}^3 - \boldsymbol{I} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}) = \boldsymbol{I}.$$

得 $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}$ 可逆, 且

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})^{-1} = \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}.$$

又 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})^2$, 故 $\boldsymbol{B}$ 可逆, 且

$$\boldsymbol{B}^{-1} = (\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{I})^2 = 3\boldsymbol{A}^2 + 4\boldsymbol{A} + 5\boldsymbol{I}.$$

例 8.13

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{I}$ 为 2 阶单位矩阵, 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{I}$, 求 $\boldsymbol{B}$.

例 8.13

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{I}$ 为 2 阶单位矩阵, 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{I}$, 求 $\boldsymbol{B}$.

解: 由题设得 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=2\boldsymbol{I}$,

例 8.13

设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{I}$ 为 2 阶单位矩阵, 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{B} + 2\boldsymbol{I}$, 求 $\boldsymbol{B}$.

解: 由题设得 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}) = 2\boldsymbol{I}$, 则 $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}$ 可逆,

例 8.13

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{I}$ 为 2 阶单位矩阵, 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{I}$, 求 $\boldsymbol{B}$.

解: 由题设得 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=2\boldsymbol{I}$, 则 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}$ 可逆, 两边右乘 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1}$,

例 8.13

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{I}$ 为 2 阶单位矩阵, 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{I}$, 求 $\boldsymbol{B}$.

解: 由题设得 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=2\boldsymbol{I}$, 则 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}$ 可逆, 两边右乘 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1}$, 得

$$\boldsymbol{B}=2(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1}$$

例 8.13

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{I}$ 为 2 阶单位矩阵, 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{I}$, 求 $\boldsymbol{B}$.

解: 由题设得 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=2\boldsymbol{I}$, 则 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}$ 可逆, 两边右乘 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1}$, 得

$$\boldsymbol{B}=2(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1}=2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

例 8.13

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{I}$ 为 2 阶单位矩阵, 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{I}$, 求 $\boldsymbol{B}$.

解: 由题设得 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=2\boldsymbol{I}$, 则 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}$ 可逆, 两边右乘 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1}$, 得

$$\boldsymbol{B}=2(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1}=2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

例 8.14

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵, 若 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}$, 求证 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}$.

例 8.14

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵, 若 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}$, 求证 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}$.

解: 由 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$, 得 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}$,

例 8.14

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵, 若 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}$, 求证 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}$.

解: 由 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$, 得 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}$, 知 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 可逆, 且

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1} \tag{28}$$

例 8.14

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵, 若 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}$, 求证 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}$.

解: 由 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$, 得 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}$, 知 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 可逆, 且

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1} \tag{28}$$

由 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}$, 得 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}$,

例 8.14

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵, 若 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}$, 求证 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}$.

解: 由 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$, 得 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}$, 知 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 可逆, 且

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1} \tag{28}$$

由 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}$, 得 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}$, 而 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 可逆, 所以

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}. \tag{29}$$

例 8.14

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵, 若 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}$, 求证 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}$.

解: 由 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$, 得 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}$, 知 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 可逆, 且

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1} \tag{28}$$

由 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}$, 得 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}$, 而 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 可逆, 所以

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}. \tag{29}$$

将 (28) 和 (29) 相减得

$$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{I}.$$

□

例 8.15

设矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1} + 2\boldsymbol{X}$, 求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

例 8.15

设矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{X}$, 求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

解: 由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{X}$,

例 8.15

设矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1} + 2\boldsymbol{X}$, 求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

解: 由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1} + 2\boldsymbol{X}$, 两边左乘 $\boldsymbol{A}$

例 8.15

设矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{X}$, 求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

解: 由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{X}$, 两边左乘 $\boldsymbol{A}$ 得

$$|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{X}=\boldsymbol{I}+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{X},$$

例 8.15

设矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1} + 2\boldsymbol{X}$, 求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

解: 由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1} + 2\boldsymbol{X}$, 两边左乘 $\boldsymbol{A}$ 得

$$|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{X},$$

即

$$(|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{I},$$

例 8.15

设矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1} + 2\boldsymbol{X}$, 求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

解: 由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1} + 2\boldsymbol{X}$, 两边左乘 $\boldsymbol{A}$ 得

$$|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{X},$$

即

$$(|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{I},$$

故 $\boldsymbol{X} = (|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{A})^{-1}$. □

例 8.16

矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AXA}+\boldsymbol{BXB}=\boldsymbol{AXB}+\boldsymbol{BXA}+\boldsymbol{I}$, 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{X}$.

例 8.16

矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AXA}+\boldsymbol{BXB}=\boldsymbol{AXB}+\boldsymbol{BXA}+\boldsymbol{I}$, 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{X}$.

解: 移项得 $\boldsymbol{AX}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})-\boldsymbol{BX}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{I}$,

例 8.16

矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AXA}+\boldsymbol{BXB}=\boldsymbol{AXB}+\boldsymbol{BXA}+\boldsymbol{I}$, 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{X}$.

解: 移项得 $\boldsymbol{AX}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})-\boldsymbol{BX}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{I}$, 即 $(\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{BX})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{I}$,

例 8.16

矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AXA}+\boldsymbol{BXB}=\boldsymbol{AXB}+\boldsymbol{BXA}+\boldsymbol{I}$, 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{X}$.

解: 移项得 $\boldsymbol{AX}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})-\boldsymbol{BX}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{I}$, 即 $(\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{BX})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{I}$, 所以

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{I}.$$

例 8.16

矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AXA}+\boldsymbol{BXB}=\boldsymbol{AXB}+\boldsymbol{BXA}+\boldsymbol{I}$, 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{X}$.

解: 移项得 $\boldsymbol{AX}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})-\boldsymbol{BX}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{I}$, 即 $(\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{BX})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{I}$, 所以

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{I}.$$

则 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$ 可逆,

例 8.16

矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AXA}+\boldsymbol{BXB}=\boldsymbol{AXB}+\boldsymbol{BXA}+\boldsymbol{I}$, 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{X}$.

解: 移项得 $\boldsymbol{AX}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})-\boldsymbol{BX}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{I}$, 即 $(\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{BX})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{I}$, 所以

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{I}.$$

则 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$ 可逆, 且

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}.$$

又

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

又

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}，且\ (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

又

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 且 } (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

得

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

例 8.17

已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 满足条件 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$, 求 $\boldsymbol{A}$.

例 8.17

已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 满足条件 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$, 求 $\boldsymbol{A}$.

解: 由 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$ 得

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})=\boldsymbol{I},$$

故 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}+(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})^{-1}$. □

例 8.18

设矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 满足关系式 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{B}$, 求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

例 8.18

设矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 满足关系式 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{B}$, 求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解: 由题设得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{I}) = 2\boldsymbol{B}$,

例 8.18

设矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 满足关系式 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{B}$, 求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解: 由题设得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{I}) = 2\boldsymbol{B}$, 则

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{I}) = 2(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{I}) + 2\boldsymbol{I},$$

例 8.18

设矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 满足关系式 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{B}$, 求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解: 由题设得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{I}) = 2\boldsymbol{B}$, 则

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{I}) = 2(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{I}) + 2\boldsymbol{I},$$

得

$$(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{I}) = 2\boldsymbol{I},$$

例 8.18

设矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 满足关系式 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{B}$, 求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解: 由题设得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}) = 2\boldsymbol{B}$, 则

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}) = 2(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}) + 2\boldsymbol{I},$$

得

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}) = 2\boldsymbol{I},$$

从而

$$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I} = 2(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})^{-1},$$

例 8.18

设矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 满足关系式 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{B}$, 求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解: 由题设得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{I}) = 2\boldsymbol{B}$, 则

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{I}) = 2(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{I}) + 2\boldsymbol{I},$$

得

$$(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{I}) = 2\boldsymbol{I},$$

从而

$$\boldsymbol{B} - \boldsymbol{I} = 2(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})^{-1},$$

故 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I} + 2(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})^{-1}$. □

例 8.19

设矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} - 8\boldsymbol{I}$, 求 $\boldsymbol{B}$.

例 8.19

设矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} - 8\boldsymbol{I}$, 求 $\boldsymbol{B}$.

解: 由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} - 8\boldsymbol{I}$ 得

$$\left(\boldsymbol{A}^* - 2\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = -8\boldsymbol{I},$$

例 8.19

设矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} - 8\boldsymbol{I}$, 求 $\boldsymbol{B}$.

解: 由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} - 8\boldsymbol{I}$ 得

$$(\boldsymbol{A}^* - 2\boldsymbol{I})\,\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = -8\boldsymbol{I},$$

故 $\boldsymbol{A}^* - 2\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均可逆,

例 8.19

设矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} - 8\boldsymbol{I}$, 求 $\boldsymbol{B}$.

解: 由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} - 8\boldsymbol{I}$ 得

$$\left(\boldsymbol{A}^* - 2\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = -8\boldsymbol{I},$$

故 $\boldsymbol{A}^* - 2\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均可逆, 所以

$$\boldsymbol{B} = -8\left(\boldsymbol{A}^* - 2\boldsymbol{I}\right)^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$$

例 8.19

设矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} - 8\boldsymbol{I}$, 求 $\boldsymbol{B}$.

解: 由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} - 8\boldsymbol{I}$ 得

$$(\boldsymbol{A}^* - 2\boldsymbol{I})\,\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = -8\boldsymbol{I},$$

故 $\boldsymbol{A}^* - 2\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均可逆, 所以

$$\boldsymbol{B} = -8\,(\boldsymbol{A}^* - 2\boldsymbol{I})^{-1}\,\boldsymbol{A}^{-1} = -8\big(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^* - 2\boldsymbol{I})\big)^{-1}$$

例 8.19

设矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}-8\boldsymbol{I}$, 求 $\boldsymbol{B}$.

解: 由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}-8\boldsymbol{I}$ 得

$$\left(\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=-8\boldsymbol{I},$$

故 $\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均可逆, 所以

$$\boldsymbol{B}=-8\left(\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{I}\right)^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=-8\Big(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{I})\Big)^{-1}=-8\left(|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{A}\right)^{-1}.$$

$\square$

例 8.20

设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列与第 2 列交换得 $\boldsymbol{B}$, 再把 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 列加到第 3 列得 $\boldsymbol{C}$, 则满足 $\boldsymbol{AQ} = \boldsymbol{C}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 为 【 】

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

解: 因为 $\boldsymbol{A} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_2} \boldsymbol{B} \xrightarrow{c_3 + c_2} \boldsymbol{C}$,

解: 因为 $\boldsymbol{A} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_2} \boldsymbol{B} \xrightarrow{c_3 + c_2} \boldsymbol{C}$, 所以

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}.$$

解: 因为 $\boldsymbol{A} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_2} \boldsymbol{B} \xrightarrow{c_3 + c_2} \boldsymbol{C}$, 所以

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}.$$

取

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

解: 因为 $\boldsymbol{A} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_2} \boldsymbol{B} \xrightarrow{c_3 + c_2} \boldsymbol{C}$, 所以

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}.$$

取

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

所以应选 (D). □

例 8.21

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, 将 $\boldsymbol{A}$ 第 2 行加到第 1 行得 $\boldsymbol{B}$, 再将 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得到 $\boldsymbol{C}$, 记 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 则 【 】

(A) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.

(B) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}$.

(C) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.

(D) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$.

例 8.21

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, 将 $\boldsymbol{A}$ 第 2 行加到第 1 行得 $\boldsymbol{B}$, 再将 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得到 $\boldsymbol{C}$, 记 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 则 【　　】

(A) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.　　(B) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}$.

(C) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.　　(D) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$.

解: 由题设知

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{C},$$

例 8.21

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, 将 $\boldsymbol{A}$ 第 2 行加到第 1 行得 $\boldsymbol{B}$, 再将 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得到 $\boldsymbol{C}$, 记 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 则 【 】

(A) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.　　(B) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}$.

(C) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.　　(D) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$.

解: 由题设知

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{C},$$

所以 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}$. 选 (B). □

例 8.22 (2005 数一、二, 4 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n \geqslant 2)$ 阶可逆矩阵, 交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}^*$, $\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵, 则 【　】

(A) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得矩阵 $\boldsymbol{B}^*$.

(B) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}^*$.

(C) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得矩阵 $-\boldsymbol{B}^*$.

(D) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $-\boldsymbol{B}^*$.

解: 为表述方便, 把交换 n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 的第 1 行与第 2 行得的初等矩阵记为 $\boldsymbol{P}$.

例 8.22 (2005 数一、二, 4 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n \geqslant 2)$ 阶可逆矩阵, 交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}^*$, $\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵, 则 【　】

(A) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得矩阵 $\boldsymbol{B}^*$.

(B) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}^*$.

(C) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得矩阵 $-\boldsymbol{B}^*$.

(D) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $-\boldsymbol{B}^*$.

解: 为表述方便, 把交换 n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 的第 1 行与第 2 行得的初等矩阵记为 $\boldsymbol{P}$. 由题设知 $\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{B}$.

例 8.22 (2005 数一、二, 4 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n \geqslant 2)$ 阶可逆矩阵, 交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}^*$, $\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵, 则 【　】

(A) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得矩阵 $\boldsymbol{B}^*$.

(B) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}^*$.

(C) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得矩阵 $-\boldsymbol{B}^*$.

(D) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $-\boldsymbol{B}^*$.

解: 为表述方便, 把交换 n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 的第 1 行与第 2 行得的初等矩阵记为 $\boldsymbol{P}$. 由题设知 $\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{B}$. 由 $(\boldsymbol{PA})^*(\boldsymbol{PA}) = |\boldsymbol{PA}|\boldsymbol{I}$,

例 8.22 (2005 数一、二, 4 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n \geqslant 2)$ 阶可逆矩阵, 交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}^*$, $\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵, 则 【　　】

(A) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得矩阵 $\boldsymbol{B}^*$.

(B) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}^*$.

(C) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得矩阵 $-\boldsymbol{B}^*$.

(D) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $-\boldsymbol{B}^*$.

解: 为表述方便, 把交换 n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 的第 1 行与第 2 行得的初等矩阵记为 $\boldsymbol{P}$. 由题设知 $\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{B}$. 由 $(\boldsymbol{PA})^*(\boldsymbol{PA}) = |\boldsymbol{PA}|\boldsymbol{I}$, 得

$$(\boldsymbol{PA})^* = |\boldsymbol{PA}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}$$

例 8.22 (2005 数一、二, 4 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n \geqslant 2)$ 阶可逆矩阵, 交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}^*$, $\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵, 则 【　　】

(A) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得矩阵 $\boldsymbol{B}^*$.

(B) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}^*$.

(C) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得矩阵 $-\boldsymbol{B}^*$.

(D) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $-\boldsymbol{B}^*$.

解: 为表述方便, 把交换 n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 的第 1 行与第 2 行得的初等矩阵记为 $\boldsymbol{P}$. 由题设知 $\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{B}$. 由 $(\boldsymbol{PA})^*(\boldsymbol{PA}) = |\boldsymbol{PA}|\boldsymbol{I}$, 得

$$(\boldsymbol{PA})^* = |\boldsymbol{PA}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1} = |\boldsymbol{P}||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}.$$

例 8.22 (2005 数一、二, 4 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n \geqslant 2)$ 阶可逆矩阵, 交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}^*$, $\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵, 则 【 】

(A) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得矩阵 $\boldsymbol{B}^*$.

(B) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}^*$.

(C) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得矩阵 $-\boldsymbol{B}^*$.

(D) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $-\boldsymbol{B}^*$.

解: 为表述方便, 把交换 n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 的第 1 行与第 2 行得的初等矩阵记为 $\boldsymbol{P}$. 由题设知 $\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{B}$. 由 $(\boldsymbol{PA})^*(\boldsymbol{PA}) = |\boldsymbol{PA}|\boldsymbol{I}$, 得

$$(\boldsymbol{PA})^* = |\boldsymbol{PA}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1} = |\boldsymbol{P}||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}.$$

注意到 $\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}$, $|\boldsymbol{P}| = -1$,

例 8.22 (2005 数一、二, 4 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n \geqslant 2)$ 阶可逆矩阵, 交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}^*$, $\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵, 则 【　】

(A) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得矩阵 $\boldsymbol{B}^*$.

(B) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}^*$.

(C) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得矩阵 $-\boldsymbol{B}^*$.

(D) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $-\boldsymbol{B}^*$.

解: 为表述方便, 把交换 n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 的第 1 行与第 2 行得的初等矩阵记为 $\boldsymbol{P}$. 由题设知 $\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{B}$. 由 $(\boldsymbol{PA})^*(\boldsymbol{PA}) = |\boldsymbol{PA}|\boldsymbol{I}$, 得

$$(\boldsymbol{PA})^* = |\boldsymbol{PA}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1} = |\boldsymbol{P}||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}.$$

注意到 $\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}$, $|\boldsymbol{P}| = -1$, 而由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$, 知 $\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$.

例 8.22 (2005 数一、二, 4 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n \geqslant 2)$ 阶可逆矩阵, 交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}^*$, $\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵, 则 【　　】

(A) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得矩阵 $\boldsymbol{B}^*$.

(B) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}^*$.

(C) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得矩阵 $-\boldsymbol{B}^*$.

(D) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $-\boldsymbol{B}^*$.

解: 为表述方便, 把交换 n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 的第 1 行与第 2 行得的初等矩阵记为 $\boldsymbol{P}$. 由题设知 $\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{B}$. 由 $(\boldsymbol{PA})^*(\boldsymbol{PA}) = |\boldsymbol{PA}|\boldsymbol{I}$, 得

$$(\boldsymbol{PA})^* = |\boldsymbol{PA}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1} = |\boldsymbol{P}||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}.$$

注意到 $\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}$, $|\boldsymbol{P}| = -1$, 而由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$, 知 $\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$. 得

$$\boldsymbol{B}^* = (\boldsymbol{PA})^* = -|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}$$

例 8.22 (2005 数一、二, 4 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\,(n \geqslant 2)$ 阶可逆矩阵, 交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}^*$, $\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵, 则 【　】

(A) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得矩阵 $\boldsymbol{B}^*$.

(B) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}^*$.

(C) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得矩阵 $-\boldsymbol{B}^*$.

(D) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $-\boldsymbol{B}^*$.

解: 为表述方便, 把交换 n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 的第 1 行与第 2 行得的初等矩阵记为 $\boldsymbol{P}$. 由题设知 $\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{B}$. 由 $(\boldsymbol{PA})^*(\boldsymbol{PA}) = |\boldsymbol{PA}|\boldsymbol{I}$, 得

$$(\boldsymbol{PA})^* = |\boldsymbol{PA}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1} = |\boldsymbol{P}||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}.$$

注意到 $\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}$, $|\boldsymbol{P}| = -1$, 而由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$, 知 $\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$. 得

$$\boldsymbol{B}^* = (\boldsymbol{PA})^* = -|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P} = -\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P},$$

即 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P} = -\boldsymbol{B}^*$.

例 8.22 (2005 数一、二, 4 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n \geqslant 2)$ 阶可逆矩阵, 交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}^*$, $\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵, 则 【　】

(A) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得矩阵 $\boldsymbol{B}^*$.

(B) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}^*$.

(C) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得矩阵 $-\boldsymbol{B}^*$.

(D) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $-\boldsymbol{B}^*$.

解: 为表述方便, 把交换 n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 的第 1 行与第 2 行得的初等矩阵记为 $\boldsymbol{P}$. 由题设知 $\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{B}$. 由 $(\boldsymbol{PA})^*(\boldsymbol{PA}) = |\boldsymbol{PA}|\boldsymbol{I}$, 得

$$(\boldsymbol{PA})^* = |\boldsymbol{PA}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1} = |\boldsymbol{P}||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}.$$

注意到 $\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}$, $|\boldsymbol{P}| = -1$, 而由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$, 知 $\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$. 得

$$\boldsymbol{B}^* = (\boldsymbol{PA})^* = -|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P} = -\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P},$$

即 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P} = -\boldsymbol{B}^*$. 因 $\boldsymbol{P}$ 亦可视为交换 n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 的第 1 列与第 2 列得的初等矩阵,

例 8.22 (2005 数一、二, 4 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n \geqslant 2)$ 阶可逆矩阵, 交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}^*$, $\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵, 则 【　】

(A) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得矩阵 $\boldsymbol{B}^*$.

(B) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}^*$.

(C) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得矩阵 $-\boldsymbol{B}^*$.

(D) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $-\boldsymbol{B}^*$.

解: 为表述方便, 把交换 n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 的第 1 行与第 2 行得的初等矩阵记为 $\boldsymbol{P}$. 由题设知 $\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{B}$. 由 $(\boldsymbol{PA})^*(\boldsymbol{PA}) = |\boldsymbol{PA}|\boldsymbol{I}$, 得

$$(\boldsymbol{PA})^* = |\boldsymbol{PA}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1} = |\boldsymbol{P}||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}.$$

注意到 $\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}$, $|\boldsymbol{P}| = -1$, 而由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$, 知 $\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$. 得

$$\boldsymbol{B}^* = (\boldsymbol{PA})^* = -|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P} = -\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P},$$

即 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P} = -\boldsymbol{B}^*$. 因 $\boldsymbol{P}$ 亦可视为交换 n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 的第 1 列与第 2 列得的初等矩阵, $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}$ 意味着要交换矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列,

例 8.22 (2005 数一、二, 4 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n\geqslant 2)$ 阶可逆矩阵, 交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}^*$, $\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵, 则 【　　】

(A) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得矩阵 $\boldsymbol{B}^*$.

(B) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}^*$.

(C) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得矩阵 $-\boldsymbol{B}^*$.

(D) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $-\boldsymbol{B}^*$.

解: 为表述方便, 把交换 n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 的第 1 行与第 2 行得的初等矩阵记为 $\boldsymbol{P}$. 由题设知 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$. 由 $(\boldsymbol{PA})^*(\boldsymbol{PA})=|\boldsymbol{PA}|\boldsymbol{I}$, 得

$$(\boldsymbol{PA})^*=|\boldsymbol{PA}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}=|\boldsymbol{P}||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}.$$

注意到 $\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}$, $|\boldsymbol{P}|=-1$, 而由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$, 知 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$. 得

$$\boldsymbol{B}^*=(\boldsymbol{PA})^*=-|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P},$$

即 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{B}^*$. 因 $\boldsymbol{P}$ 亦可视为交换 n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 的第 1 列与第 2 列得的初等矩阵, $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}$ 意味着要交换矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列, 所以选 (C). □

例 8.23

设 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, 试给出 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 间的关系式, 并证明 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 同时可逆或同时不可逆.

例 8.23

设 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, 试给出 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 间的关系式, 并证明 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 同时可逆或同时不可逆.

解: 由题设知 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 间的关系式为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B},$$

例 8.23

设 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, 试给出 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 间的关系式, 并证明 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 同时可逆或同时不可逆.

解: 由题设知 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 间的关系式为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}, \text{ 即 } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}.$$

例 8.23

设 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, 试给出 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 间的关系式, 并证明 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 同时可逆或同时不可逆.

解: 由题设知 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 间的关系式为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}, \text{ 即 } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}.$$

两边取行列式得

$$-|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|,$$

例 8.23

设 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, 试给出 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 间的关系式, 并证明 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 同时可逆或同时不可逆.

解: 由题设知 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 间的关系式为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}, \text{ 即 } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}.$$

两边取行列式得

$$-|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|,$$

即 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 同时为零或同时不为零,

例 8.23

设 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, 试给出 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 间的关系式, 并证明 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 同时可逆或同时不可逆.

解: 由题设知 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 间的关系式为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B},\ \text{即}\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}.$$

两边取行列式得

$$-|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|,$$

即 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 同时为零或同时不为零, 得证 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 同时可逆或同时不可逆. □

Outline

1. 高斯消元法

2. 矩阵的加法　数量乘法　乘法

3. 矩阵的转置　对称矩阵

4. 可逆矩阵的逆矩阵

5. 矩阵的初等变换和初等矩阵

6. 分块矩阵

7. 习题解答

Outline

1. 高斯消元法
2. 矩阵的加法　数量乘法　乘法
3. 矩阵的转置　对称矩阵
4. 可逆矩阵的逆矩阵
5. 矩阵的初等变换和初等矩阵
6. 分块矩阵
7. 习题解答

矩阵乘法的规则, 很多人不能理解为什么要这样定义. 要理解这个问题, 我们不妨看看什么叫运算. 简单说, 运算不是规定, 而是量与量之间关系的抽象, 其实就是函数, 但它过于普遍, 干脆把它叫做一种运算了.

我们接触过 "定义新运算". 例如定义一种新的运算 $\star$: $x \star y \triangleq x^2 + y^2$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. 但这其实是一个二元函数, 完全可以记为 $f(x, y) = x^2 + y^2$.

函数本质上是描述量与量之间的对应关系, 只不过加减乘除等等所描述的关系过于普遍和常见, 所以单独把它们叫做运算了. 另外运算有很多种, 例如矩阵的转置运算.

Universe

论域 (Universe) 是讨论某个数学话题时, 其讨论对象的集合. 例如, 小学阶段讨论算术时, 论域是自然数集 $\mathbb{N}$. 到中学, 讨论的范围逐步扩大到有理数域 $\mathbb{Q}$、实数域 $\mathbb{R}$ 和复数域 $\mathbb{C}$. 在讨论向量时, 论域是 n 维实向量空间 $\mathbb{R}^n$. 现在讨论矩阵, 论域是 $m\times n$ 维实矩阵空间 $\mathbb{R}^{m\times n}$.

在这些不同的 Universe, 讨论的对象不同, 其运算当然也不同. 可能一些运算使用了相同的名称, 比如矩阵有 “乘法”, 实数也有 “乘法”. 但这些乘法是不同 Universe (“世界”) 发生的不同事情, 是完全不同的两个运算, 只是名字都取为乘法而已. 其运算律也没有理由保证完全相同. 矩阵乘法不能满足交换律, 并不是对 “乘法满足交换律” 的否定. 要看这个乘法的具体内容.

Operation

运算 (Operation) 的本质是集合之间的映射. 它抽象出集合里的元素之间的一种特定的、稳定的关系.

一个典型的例子是关于向量的 “乘法”. 向量的内积运算, 抽象于常力沿直线做功. 两个向量按照某种固定的规则, 映射于一个数量, 把这个规则抽取出来, 就是一种运算. 因为是映射于数量, 故也叫数量积. 而所谓的向量积, 是两个向量按照某个固定的规则, 映射于一个向量.

这些抽象都来自于实际, 而且有普遍性和应用性, 不是无端端的硬性规定.

Operation

运算可以跨越不同的 Universe. 比如实数和向量的数乘运算, 其结果是向量, 即 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$. 实数与矩阵的数乘运算, 其结果是矩阵, 即 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m\times n} \mapsto \mathbb{R}^{m\times n}$. 向量与向量的内积运算, 其结果是实数, 即 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$.

只接受一个输入的运算, 称为一元运算, 例如绝对值、三角函数、集合的补运算、向量的模长、矩阵的转置、矩阵的行列式等.

接受两个输入的运算, 称为二元运算. 例如加、减、乘、除, 乘方、开方、对数运算, 集合的交、并, 函数的复合运算 $g \circ f \colon (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$, 等等.

运算可能满足也可能不满足某种运算律, 比如结合律、交换律、反交换律[1]等.

[1] Anticommutativity, 例如减法、向量的叉乘, 交换两个运算量的位置, 其结果要反号.

矩阵乘法的理解

同样地, 矩阵的乘法运算, 也是抽象于实际, 是因为两个矩阵会按照这一规律, 映射到另外一个矩阵. 这个乘法只不过是对这个对应法则的一种表述. 这种运算既有实际背景 (两个线性变换的乘积), 又有实际用途 (线性方程组的表示等).

矩阵加法是将对应位置元素相加, 那么, 矩阵乘法为什么不定义为将对应位置元素相乘? 譬如

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 c_1 & a_2 c_2 & a_3 c_3 \\ b_1 d_1 & b_2 d_2 & b_3 d_3 \end{pmatrix},$$

那要看这种运算有没有用处. 如果有实际来源或用途, 我们当然可以定义这个运算. 事实上, 已经有人定义了这种运算, 称为阿达马乘积 (Hadamard product), 也叫做 element-wise product, pointwise product, entrywise product 或 Schur product.

矩阵乘法的理解

同样地, 矩阵的乘法运算, 也是抽象于实际, 是因为两个矩阵会按照这一规律, 映射到另外一个矩阵. 这个乘法只不过是对这个对应法则的一种表述. 这种运算既有实际背景 (两个线性变换的乘积), 又有实际用途 (线性方程组的表示等).

矩阵加法是将对应位置元素相加, 那么, 矩阵乘法为什么不定义为将对应位置元素相乘? 譬如

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 c_1 & a_2 c_2 & a_3 c_3 \\ b_1 d_1 & b_2 d_2 & b_3 d_3 \end{pmatrix},$$

那要看这种运算有没有用处. 如果有实际来源或用途, 我们当然可以定义这个运算. 事实上, 已经有人定义了这种运算, 称为阿达马乘积 (Hadamard product), 也叫做 element-wise product, pointwise product, entrywise product 或 Schur product. Hadamard 乘积可以用于图像压缩算法.

矩阵乘法

还有别的矩阵乘法, 例如克罗内克乘积 (Kronecker product).

给定任两个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$, 我们可以得到两个矩阵的直积，或称为克罗内克乘积 $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$, 其定义如下

$$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}.$$

当 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $p \times r$ 矩阵时, $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$ 是 $mp \times nr$ 矩阵.

克罗内克乘积可以用于解线性矩阵方程.

在 MATLAB 中, Hadamard 乘积用符号 .* 表示, 克罗内克乘积 $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$ 用 $\mathrm{kron}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 表示, 普通矩阵乘法用 $\boldsymbol{A} * \boldsymbol{B}$ 表示.

在 MATLAB 中, Hadamard 乘积用符号 .$*$ 表示, 克罗内克乘积 $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$ 用 kron$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 表示, 普通矩阵乘法用 $\boldsymbol{A} * \boldsymbol{B}$ 表示. 例如

```
>> A=[1,2;3,4]

A =

     1     2
     3     4

>> B=[5,6;7,8]

B =

     5     6
     7     8
```

(a) 给定 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$.

```
>> A.*B

ans =

     5    12
    21    32

>> A*B

ans =

    19    22
    43    50
```

(b) $\boldsymbol{A}.*\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}*\boldsymbol{B}$.

```
>> kron(A,B)

ans =

     5     6    10    12
     7     8    14    16
    15    18    20    24
    21    24    28    32
```

(c) kron$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 即 $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$.

以上这些所谓的乘法和普通的矩阵乘法, 都在描述两个矩阵按某种规律对应于新的矩阵, 在这一点上, 它们的地位和作用是一样的. 只不过教材中所说的矩阵乘法, 更加普遍, 就把 "乘法" 这个名字给它优先命名了. 它完全可以取一个别的什么名字, 不叫矩阵乘法.

向量有数量积、向量积、混合积, 并没有特意把哪一个命名为 "乘法".

一定要注意: 可以叫 "乘法" 的运算有非常多种. 千万不要认为: 世界上只有一个乘法, 并把矩阵乘法看做是这个 "唯一乘法" 在矩阵中的应用.

Outline

1. 高斯消元法
2. 矩阵的加法　数量乘法　乘法
3. 矩阵的转置　对称矩阵
4. 可逆矩阵的逆矩阵
5. 矩阵的初等变换和初等矩阵
6. 分块矩阵
7. 习题解答

逆矩阵实现了矩阵乘法的逆运算

用逆矩阵实现矩阵乘法的逆运算, 而不直接定义矩阵除法, 根本原因在于矩阵乘法不满足交换律.

逆矩阵实现了矩阵乘法的逆运算

用逆矩阵实现矩阵乘法的逆运算, 而不直接定义矩阵除法, 根本原因在于矩阵乘法不满足交换律. 矩阵乘法有左乘、右乘之分, 其逆运算应该有 “左除”、“右除” 之分.

逆矩阵实现了矩阵乘法的逆运算

用逆矩阵实现矩阵乘法的逆运算, 而不直接定义矩阵除法, 根本原因在于矩阵乘法不满足交换律. 矩阵乘法有左乘、右乘之分, 其逆运算应该有 "左除"、"右除" 之分.

如果类似实数定义矩阵的除法, 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}, \qquad \boldsymbol{X}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$$

的解都是

$$\boldsymbol{X} = \frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{A}}.$$

逆矩阵实现了矩阵乘法的逆运算

用逆矩阵实现矩阵乘法的逆运算, 而不直接定义矩阵除法, 根本原因在于矩阵乘法不满足交换律. 矩阵乘法有左乘、右乘之分, 其逆运算应该有 “左除”、“右除” 之分.

如果类似实数定义矩阵的除法, 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}, \qquad \boldsymbol{X}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$$

的解都是

$$\boldsymbol{X} = \frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{A}}.$$

而事实上, $\boldsymbol{A}$ 可逆时, 两个方程的解分别是

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}, \qquad \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

逆矩阵实现了矩阵乘法的逆运算

用逆矩阵实现矩阵乘法的逆运算, 而不直接定义矩阵除法, 根本原因在于矩阵乘法不满足交换律. 矩阵乘法有左乘、右乘之分, 其逆运算应该有 “左除”、“右除” 之分.

如果类似实数定义矩阵的除法, 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}, \qquad \boldsymbol{X}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$$

的解都是

$$\boldsymbol{X} = \frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{A}}.$$

而事实上, $\boldsymbol{A}$ 可逆时, 两个方程的解分别是

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}, \qquad \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

而矩阵乘法不满足交换律, 一般 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}$.

在 MATLAB 中, 左除、右除分别用符号 \, / 表示:

- \: 左除, $\boldsymbol{A}\backslash\boldsymbol{B} \triangleq \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.
- /: 右除, $\boldsymbol{B}/\boldsymbol{A} \triangleq \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}$.

在 MATLAB 中, 左除、右除分别用符号 \, / 表示:

- \: 左除, $\boldsymbol{A}\backslash\boldsymbol{B} \triangleq \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.
- /: 右除, $\boldsymbol{B}/\boldsymbol{A} \triangleq \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}$.

下图是 MATLAB 运行结果.

```
>> A=[1,2;3,4]

A =

     1     2
     3     4

>> B=[5,6;7,8]

B =

     5     6
     7     8
```

(a) 给定 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$.

```
>> A\B

ans =

    -3    -4
     4     5

>> A*(A\B)

ans =

     5     6
     7     8
```

(b) $\boldsymbol{A}\backslash\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

```
>> B/A

ans =

   -1.0000    2.0000
   -2.0000    3.0000

>> (B/A)*A

ans =

    5.0000    6.0000
    7.0000    8.0000
```

(c) $\boldsymbol{B}/\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}$.

逆元

简单说, 逆矩阵的出现, 完成了矩阵除法的功能. 虽然没有一个叫做矩阵除法的运算, 但是有了逆矩阵, 我们照样可以实现矩阵乘法的逆运算.

逆元

简单说, 逆矩阵的出现, 完成了矩阵除法的功能. 虽然没有一个叫做矩阵除法的运算, 但是有了逆矩阵, 我们照样可以实现矩阵乘法的逆运算.

在实数域, 四则运算是加减乘除, 但我们其实可以只保留加法、乘法, 而让减法和除法不出现.

逆元

简单说, 逆矩阵的出现, 完成了矩阵除法的功能. 虽然没有一个叫做矩阵除法的运算, 但是有了逆矩阵, 我们照样可以实现矩阵乘法的逆运算.

在实数域, 四则运算是加减乘除, 但我们其实可以只保留加法、乘法, 而让减法和除法不出现. 方法是定义加法的逆元、乘法的逆元.

单位元

讲到逆元, 必须要先提到**单位元**.

单位元

讲到逆元, 必须要先提到**单位元**.

设论域 U 中定义了运算 $\circ$, 如果存在一个元素 e, 它与任何元素 c 运算的结果都是对方, 即

$$e \circ c = c \circ e = c,$$

则元素 e 就是对应于运算 $\circ$ 的单位元.

单位元

讲到逆元, 必须要先提到**单位元**.

设论域 U 中定义了运算 $\circ$, 如果存在一个元素 e, 它与任何元素 c 运算的结果都是对方, 即

$$e \circ c = c \circ e = c,$$

则元素 e 就是对应于运算 $\circ$ 的单位元.

例如常数 1 是对应于乘法的单位元; 单位矩阵 I 是矩阵乘法中的单位元; 常数 0 是对应于加法的单位元 (请自行验证).

单位元

讲到逆元, 必须要先提到**单位元**.

设论域 U 中定义了运算 $\circ$, 如果存在一个元素 e, 它与任何元素 c 运算的结果都是对方, 即

$$e \circ c = c \circ e = c,$$

则元素 e 就是对应于运算 $\circ$ 的单位元.

例如常数 1 是对应于乘法的单位元; 单位矩阵 I 是矩阵乘法中的单位元; 常数 0 是对应于加法的单位元 (请自行验证).

给定某个元素 a, 若存在元素 b, 满足 a, b 运算的结果是单位元, 即

$$a \circ b = b \circ a = e,$$

则 b 关于运算 $\circ$ 是 a 的**逆元**,

单位元

讲到逆元, 必须要先提到**单位元**.

设论域 U 中定义了运算 $\circ$, 如果存在一个元素 e, 它与任何元素 c 运算的结果都是对方, 即

$$e \circ c = c \circ e = c,$$

则元素 e 就是对应于运算 $\circ$ 的单位元.

例如常数 1 是对应于乘法的单位元; 单位矩阵 I 是矩阵乘法中的单位元; 常数 0 是对应于加法的单位元 (请自行验证).

给定某个元素 a, 若存在元素 b, 满足 a, b 运算的结果是单位元, 即

$$a \circ b = b \circ a = e,$$

则 b 关于运算 $\circ$ 是 a 的**逆元**, 记为 a^{-1}.

单位元

讲到逆元, 必须要先提到**单位元**.

设论域 U 中定义了运算 $\circ$, 如果存在一个元素 e, 它与任何元素 c 运算的结果都是对方, 即

$$e \circ c = c \circ e = c,$$

则元素 e 就是对应于运算 $\circ$ 的单位元.

例如常数 1 是对应于乘法的单位元; 单位矩阵 I 是矩阵乘法中的单位元; 常数 0 是对应于加法的单位元 (请自行验证).

给定某个元素 a, 若存在元素 b, 满足 a, b 运算的结果是单位元, 即

$$a \circ b = b \circ a = e,$$

则 b 关于运算 $\circ$ 是 a 的**逆元**, 记为 a^{-1}.

非零元 a 关于乘法的逆元是 $\frac{1}{a}$, 或记为 a^{-1};

单位元

讲到逆元, 必须要先提到**单位元**.

设论域 U 中定义了运算 $\circ$, 如果存在一个元素 e, 它与任何元素 c 运算的结果都是对方, 即

$$e \circ c = c \circ e = c,$$

则元素 e 就是对应于运算 $\circ$ 的单位元.

例如常数 1 是对应于乘法的单位元; 单位矩阵 I 是矩阵乘法中的单位元; 常数 0 是对应于加法的单位元 (请自行验证).

给定某个元素 a, 若存在元素 b, 满足 a, b 运算的结果是单位元, 即

$$a \circ b = b \circ a = e,$$

则 b 关于运算 $\circ$ 是 a 的**逆元**, 记为 a^{-1}.

非零元 a 关于乘法的逆元是 $\frac{1}{a}$, 或记为 a^{-1}; a 关于加法的逆元是 $-a$, 在语景清楚的情况下, 也常常记为 a^{-1}.

单位元

讲到逆元, 必须要先提到**单位元**.

设论域 U 中定义了运算 $\circ$, 如果存在一个元素 e, 它与任何元素 c 运算的结果都是对方, 即

$$e \circ c = c \circ e = c,$$

则元素 e 就是对应于运算 $\circ$ 的单位元.

例如常数 1 是对应于乘法的单位元; 单位矩阵 I 是矩阵乘法中的单位元; 常数 0 是对应于加法的单位元 (请自行验证).

给定某个元素 a, 若存在元素 b, 满足 a, b 运算的结果是单位元, 即

$$a \circ b = b \circ a = e,$$

则 b 关于运算 $\circ$ 是 a 的**逆元**, 记为 a^{-1}.

非零元 a 关于乘法的逆元是 $\frac{1}{a}$, 或记为 a^{-1}; a 关于加法的逆元是 $-a$, 在语景清楚的情况下, 也常常记为 a^{-1}.

有了逆元, 就可以定义逆运算. 减法 $a-b$ 定义为 $a+b^{-1}$; 除法 $a \div b$ 定义为 $a \times b^{-1}$.

单位元

讲到逆元, 必须要先提到**单位元**.

设论域 U 中定义了运算 $\circ$, 如果存在一个元素 e, 它与任何元素 c 运算的结果都是对方, 即

$$e \circ c = c \circ e = c,$$

则元素 e 就是对应于运算 $\circ$ 的单位元.

例如常数 1 是对应于乘法的单位元; 单位矩阵 I 是矩阵乘法中的单位元; 常数 0 是对应于加法的单位元 (请自行验证).

给定某个元素 a, 若存在元素 b, 满足 a, b 运算的结果是单位元, 即

$$a \circ b = b \circ a = e,$$

则 b 关于运算 $\circ$ 是 a 的**逆元**, 记为 a^{-1}.

非零元 a 关于乘法的逆元是 $\frac{1}{a}$, 或记为 a^{-1}; a 关于加法的逆元是 $-a$, 在语景清楚的情况下, 也常常记为 a^{-1}.

有了逆元, 就可以定义逆运算. 减法 $a - b$ 定义为 $a + b^{-1}$; 除法 $a \div b$ 定义为 $a \times b^{-1}$.

逆矩阵的出现, 完成了矩阵除法的功能

逆矩阵其实就是逆元, 是逆元概念在矩阵问题中的具体反映.

逆矩阵的出现, 完成了矩阵除法的功能

逆矩阵其实就是逆元, 是逆元概念在矩阵问题中的具体反映. 有了逆矩阵, 可以方便地实现除法的功能.

逆矩阵的出现, 完成了矩阵除法的功能

逆矩阵其实就是逆元, 是逆元概念在矩阵问题中的具体反映. 有了逆矩阵, 可以方便地实现除法的功能.

例如 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$, 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

逆矩阵的出现, 完成了矩阵除法的功能

逆矩阵其实就是逆元, 是逆元概念在矩阵问题中的具体反映. 有了逆矩阵, 可以方便地实现除法的功能.

例如 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$, 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

这在形式上完全类同于实数域中发生的除法这件事情: $ax = b$, 若 $a \neq 0$, 则 $x = a^{-1}b$.