格

Discrete Mathematics

黄正华

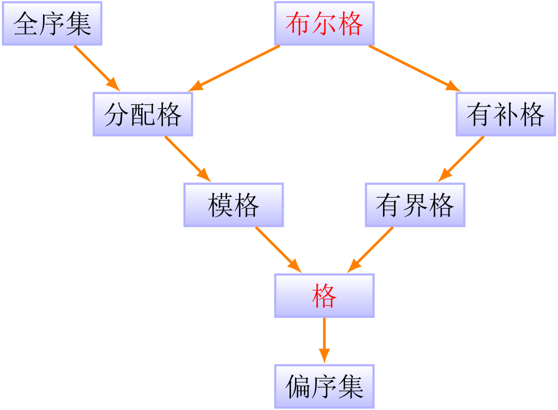
数学与统计学院
武汉大学

December 3, 2012

主要内容

- 格 (Lattice): 一个偏序集, 其任意两个元素都有最小上界和最大下界.
- 特殊的格: 分配格, 有补格.
- 布尔代数: 有补分配格.

本章概念关系图



本节主要内容:

1. 格的两种定义;
2. 格的基本性质;
3. 格与代数系统间的关系.

回顾:

Definition 1.1 (偏序)

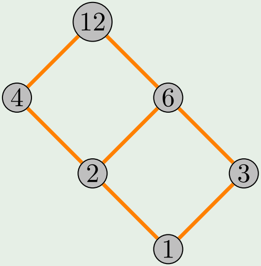
如果集合 A 上的关系 $\preccurlyeq$ 具有

1. 自反性,
2. 反对称性,
3. 传递性.

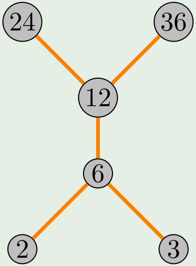
则称关系 $\preccurlyeq$ 为 A 上偏序关系. $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 称为偏序集.

Example 1.2

设 $X=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $Y=\{2, 3, 6, 12, 24, 36\}$. 集合 X 和 Y 关于整除关系 “ $|$ ” 构成两个偏序集: $\langle X, |\rangle$, $\langle Y, |\rangle$.



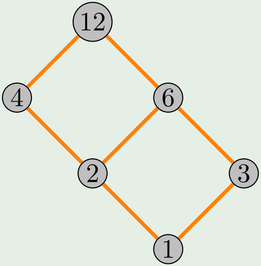
(a) $\langle X, |\rangle$



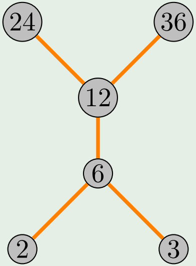
(b) $\langle Y, |\rangle$

Example 1.2

设 $X = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $Y = \{2, 3, 6, 12, 24, 36\}$. 集合 X 和 Y 关于整除关系 “ $|$ ” 构成两个偏序集: $\langle X, | \rangle$, $\langle Y, | \rangle$.



(a) $\langle X, | \rangle$



(b) $\langle Y, | \rangle$

- $\langle X, | \rangle$ 中 “每两个元素构成的集合” 都有最大下界和最小上界.
- $\langle Y, | \rangle$ 无此特点.

格的定义

Definition 1.3 (格)

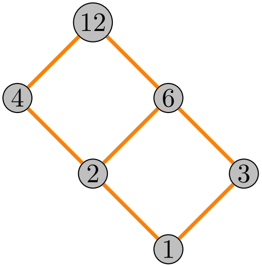
如果偏序集 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 中任意两个元素都有最小上界和最大下界, 则称 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是格(lattice).

格的定义

Definition 1.3 (格)

如果偏序集 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 中任意两个元素都有最小上界和最大下界, 则称 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是格(lattice).

lattice: 木格, 窗格.



格的定义

Definition 1.3 (格)

如果偏序集 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 中任意两个元素都有最小上界和最大下界, 则称 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是格(lattice).

a 和 b 的最小上界: $\mathrm{lub}\{a, b\}$. (least upper bound)

a 和 b 的最大下界: $\mathrm{glb}\{a, b\}$. (greatest lower bound)

格的典型例子

Example 1.4

偏序集 $\langle \mathscr{P}(S), \subseteq \rangle$ 是格:

任意 $S_1, S_2 \in \mathscr{P}(S)$, 它们的最大下界为 $S_1 \cap S_2$; 最小上界为 $S_1 \cup S_2$.

格的典型例子

Example 1.4

偏序集 $\langle \mathscr{P}(S), \subseteq \rangle$ 是格:

任意 $S_1, S_2 \in \mathscr{P}(S)$, 它们的最大下界为 $S_1 \cap S_2$; 最小上界为 $S_1 \cup S_2$.

☞ 这是格的一个典型例子. 关于格的很多性质, 都可以借助这个例子理解.

格的典型例子

Example 1.4

偏序集 $\langle \mathscr{P}(S), \subseteq \rangle$ 是格:

任意 $S_1, S_2 \in \mathscr{P}(S)$, 它们的最大下界为 $S_1 \cap S_2$; 最小上界为 $S_1 \cup S_2$.

☞ 这是格的一个典型例子. 关于格的很多性质, 都可以借助这个例子理解.

Example 1.5

偏序集 $\langle \mathbb{Z}^+, | \rangle$ 是格:

$\mathbb{Z}^+$ 中任意两个元素的最小公倍数、最大公约数就是这两个元素的最小上界和最大下界.

格的等价定义

"任意两个元素有最小上界、最大下界"

$\Longleftrightarrow$ "任意有限个元素有最小上界、最大下界".

格的等价定义

"任意两个元素有最小上界、最大下界"

$\Longleftrightarrow$ "任意有限个元素有最小上界、最大下界".

Definition 1.6

偏序集 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是一个格, 当且仅当 A 中任意非空有限子集 S 有最小上界、最大下界.

格的等价定义

"任意两个元素有最小上界、最大下界"

$\Longleftrightarrow$ "任意有限个元素有最小上界、最大下界".

Definition 1.6

偏序集 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是一个格, 当且仅当 A 中任意非空有限子集 S 有最小上界、最大下界.

其中要求子集元素个数"有限"是重要的, 不能是"任意的非空子集".

格的等价定义

"任意两个元素有最小上界、最大下界"

$\Longleftrightarrow$ "任意有限个元素有最小上界、最大下界".

Definition 1.6

偏序集 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是一个格, 当且仅当 A 中任意非空有限子集 S 有最小上界、最大下界.

其中要求子集元素个数 "有限" 是重要的, 不能是 "任意的非空子集".

比如 $\langle \mathbb{N}, \leqslant\rangle$ 是一个格, 但不是任意的非空子集都有最小上界、最大下界 —— $\mathbb{N}$ 就是它自己的一个子集, 它没有最小上界.

Definition 1.7

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是格, 在 A 上定义两个二元运算 $\vee$ 和 $\wedge$: 对任意 $a, b \in A$,

$$a \vee b \triangleq \mathrm{lub}\{a, b\}, \tag{1}$$

$$a \wedge b \triangleq \mathrm{glb}\{a, b\}. \tag{2}$$

则二元运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 分别称为并运算和交运算; 称 $\langle A, \vee, \wedge\rangle$ 是格 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 所诱导的代数系统.

Definition 1.7

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是格, 在 A 上定义两个二元运算 $\vee$ 和 $\wedge$: 对任意 $a, b \in A$,

$$a \vee b \triangleq \mathrm{lub}\{a,\ b\}, \tag{1}$$

$$a \wedge b \triangleq \mathrm{glb}\{a,\ b\}. \tag{2}$$

则二元运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 分别称为并运算和交运算; 称 $\langle A, \vee, \wedge\rangle$ 是格 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 所诱导的代数系统.

Example 1.8

在格 $\langle \mathscr{P}(S), \subseteq\rangle$ 诱导的代数系统中, 运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 就是普通的并、交运算: 任意 $S_1, S_2 \in \mathscr{P}(S)$, 有

$$S_1 \vee S_2 = S_1 \cup S_2, \quad S_1 \wedge S_2 = S_1 \cap S_2.$$

Definition 1.7

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是格, 在 A 上定义两个二元运算 $\vee$ 和 $\wedge$: 对任意 $a, b \in A$,

$$a \vee b \triangleq \mathrm{lub}\{a, b\}, \tag{1}$$

$$a \wedge b \triangleq \mathrm{glb}\{a, b\}. \tag{2}$$

则二元运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 分别称为并运算和交运算; 称 $\langle A, \vee, \wedge\rangle$ 是格 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 所诱导的代数系统.

Example 1.8

在格 $\langle \mathbb{Z}, \leqslant\rangle$ 或 $\langle \mathbb{N}, \leqslant\rangle$ 诱导的代数系统中, 运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 就是普通的取大、取小运算. 比如, 任意的 $a, b \in \mathbb{N}$, 有

$$a \vee b = \max\{a, b\}, \quad a \wedge b = \min\{a, b\}.$$

Definition 1.7

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是格, 在 A 上定义两个二元运算 $\vee$ 和 $\wedge$: 对任意 $a,\ b \in A$,

$$a \vee b \triangleq \mathrm{lub}\{a,\ b\}, \tag{1}$$

$$a \wedge b \triangleq \mathrm{glb}\{a,\ b\}. \tag{2}$$

则二元运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 分别称为并运算和交运算; 称 $\langle A, \vee, \wedge\rangle$ 是格 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 所诱导的代数系统.

Example 1.8

对于格 $\langle \mathbb{Z}^+, |\rangle$ 来说, 其诱导的代数系统 $\langle \mathbb{Z}^+, \vee, \wedge\rangle$ 中的二元运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 分别为: 对任意的 $a,\ b \in \mathbb{Z}^+$ 有

$$a \vee b = \mathrm{LCM}(a,\ b), \qquad \text{(least common mutiple, 最小公倍数)}$$

$$a \wedge b = \mathrm{GCD}(a,\ b). \qquad \text{(greatest common divisor, 最大公约数)}$$

Definition 1.7

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是格, 在 A 上定义两个二元运算 $\vee$ 和 $\wedge$: 对任意 $a, b \in A$,

$$a \vee b \triangleq \mathrm{lub}\{a, b\}, \tag{1}$$

$$a \wedge b \triangleq \mathrm{glb}\{a, b\}. \tag{2}$$

则二元运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 分别称为并运算和交运算; 称 $\langle A, \vee, \wedge\rangle$ 是格 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 所诱导的代数系统.

这个定义表明, 从格出发, 可以构造一个代数系统. 这也说明了格这类特殊偏序集的重要性.

格的对偶原理

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是偏序集, 用 $\succcurlyeq$ 表示偏序关系 $\preccurlyeq$ 的逆关系, 则

- $\langle A, \succcurlyeq\rangle$ 也是偏序集.

格的对偶原理

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是偏序集, 用 $\succcurlyeq$ 表示偏序关系 $\preccurlyeq$ 的逆关系, 则

- $\langle A, \succcurlyeq\rangle$ 也是偏序集.
- $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 与 $\langle A, \succcurlyeq\rangle$ 的哈斯图是互为颠倒的.

格的对偶原理

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是偏序集, 用 $\succcurlyeq$ 表示偏序关系 $\preccurlyeq$ 的逆关系, 则

- $\langle A, \succcurlyeq\rangle$ 也是偏序集.
- $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 与 $\langle A, \succcurlyeq\rangle$ 的哈斯图是互为颠倒的.
- 称 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$, $\langle A, \succcurlyeq\rangle$ 为彼此对偶的偏序集.

格的对偶原理

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是偏序集, 用 $\succcurlyeq$ 表示偏序关系 $\preccurlyeq$ 的逆关系, 则

- $\langle A, \succcurlyeq\rangle$ 也是偏序集.
- $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 与 $\langle A, \succcurlyeq\rangle$ 的哈斯图是互为颠倒的.
- 称 $\langle A, \preccurlyeq\rangle, \langle A, \succcurlyeq\rangle$ 为彼此对偶的偏序集.
- 如果其中一个是格, 则另一个也是格.

格的对偶原理

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是偏序集, 用 $\succcurlyeq$ 表示偏序关系 $\preccurlyeq$ 的逆关系, 则

- $\langle A, \succcurlyeq\rangle$ 也是偏序集.
- $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 与 $\langle A, \succcurlyeq\rangle$ 的哈斯图是互为颠倒的.
- 称 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$, $\langle A, \succcurlyeq\rangle$ 为彼此对偶的偏序集.
- 如果其中一个是格, 则另一个也是格.
- 由格 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 诱导的代数系统的并(交) 运算, 正好是由格 $\langle A, \succcurlyeq\rangle$ 诱导的代数系统的交(并) 运算.

格的对偶原理

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是偏序集, 用 $\succcurlyeq$ 表示偏序关系 $\preccurlyeq$ 的逆关系, 则

- $\langle A, \succcurlyeq\rangle$ 也是偏序集.
- $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 与 $\langle A, \succcurlyeq\rangle$ 的哈斯图是互为颠倒的.
- 称 $\langle A, \preccurlyeq\rangle, \langle A, \succcurlyeq\rangle$ 为彼此对偶的偏序集.
- 如果其中一个是格, 则另一个也是格.
- 由格 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 诱导的代数系统的并(交) 运算, 正好是由格 $\langle A, \succcurlyeq\rangle$ 诱导的代数系统的交(并) 运算.

Theorem 1.8 (对偶原理)

设 P 是对任意格都为真的命题, 将 P 中的 $\preccurlyeq, \vee, \wedge$ 分别换成 $\succcurlyeq, \wedge, \vee$ 得命题 Q, 则 Q 对任意格也是真的命题. (Q 称为 P 的对偶命题.)

格的基本性质

Theorem 1.9

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是格, 对任意 $a, b \in A$, 有

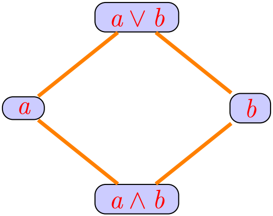
$$a \preccurlyeq a \vee b, \qquad b \preccurlyeq a \vee b,$$
$$a \wedge b \preccurlyeq a, \qquad a \wedge b \preccurlyeq b.$$

Theorem 1.9

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是格, 对任意 $a, b \in A$, 有

$$a \preccurlyeq a \vee b, \qquad b \preccurlyeq a \vee b,$$
$$a \wedge b \preccurlyeq a, \qquad a \wedge b \preccurlyeq b.$$

分析　由 $\vee, \wedge$ 的定义即得上述结论. 如图:



Theorem 1.9

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是格, 对任意 $a, b \in A$, 有

$$a \preccurlyeq a \vee b, \qquad b \preccurlyeq a \vee b,$$

$$a \wedge b \preccurlyeq a, \qquad a \wedge b \preccurlyeq b.$$

证 因为 $a \vee b$ 是 a 和 b 的 (最小) 上界, 所以

$$a \preccurlyeq a \vee b, \qquad b \preccurlyeq a \vee b.$$

格的基本性质

Theorem 1.9

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是格, 对任意 $a, b \in A$, 有

$$a \preccurlyeq a \vee b, \qquad b \preccurlyeq a \vee b,$$

$$a \wedge b \preccurlyeq a, \qquad a \wedge b \preccurlyeq b.$$

证　因为 $a \vee b$ 是 a 和 b 的 (最小) 上界, 所以

$$a \preccurlyeq a \vee b, \qquad b \preccurlyeq a \vee b.$$

由对偶原理, 即得

$$a \wedge b \preccurlyeq a, \qquad a \wedge b \preccurlyeq b.$$ □

Theorem 1.10

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是格, $a, b, c, d \in A$, 若 $a \preccurlyeq b$, $c \preccurlyeq d$, 则

$$a \vee c \preccurlyeq b \vee d, \tag{3}$$

$$a \wedge c \preccurlyeq b \wedge d. \tag{4}$$

Theorem 1.10

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是格, a, b, c, $d \in A$, 若 $a \preccurlyeq b$, $c \preccurlyeq d$, 则

$$a \vee c \preccurlyeq b \vee d, \tag{3}$$

$$a \wedge c \preccurlyeq b \wedge d. \tag{4}$$

证 已知 $a \preccurlyeq b$, $c \preccurlyeq d$, 又

$$b \preccurlyeq b \vee d, \quad d \preccurlyeq b \vee d,$$

Theorem 1.10

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是格, $a, b, c, d \in A$, 若 $a \preccurlyeq b$, $c \preccurlyeq d$, 则

$$a \vee c \preccurlyeq b \vee d, \tag{3}$$

$$a \wedge c \preccurlyeq b \wedge d. \tag{4}$$

证 已知 $a \preccurlyeq b$, $c \preccurlyeq d$, 又

$$b \preccurlyeq b \vee d, \quad d \preccurlyeq b \vee d,$$

由传递性可得

$$a \preccurlyeq b \vee d, \quad c \preccurlyeq b \vee d.$$

Theorem 1.10

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是格, $a, b, c, d \in A$, 若 $a \preccurlyeq b$, $c \preccurlyeq d$, 则

$$a \vee c \preccurlyeq b \vee d, \tag{3}$$

$$a \wedge c \preccurlyeq b \wedge d. \tag{4}$$

证 已知 $a \preccurlyeq b$, $c \preccurlyeq d$, 又

$$b \preccurlyeq b \vee d, \quad d \preccurlyeq b \vee d,$$

由传递性可得

$$a \preccurlyeq b \vee d, \quad c \preccurlyeq b \vee d.$$

这说明 $b \vee d$ 是 a 和 c 的一个上界,

Theorem 1.10

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是格, a, b, c, $d \in A$, 若 $a \preccurlyeq b$, $c \preccurlyeq d$, 则

$$a \vee c \preccurlyeq b \vee d, \tag{3}$$

$$a \wedge c \preccurlyeq b \wedge d. \tag{4}$$

证 已知 $a \preccurlyeq b$, $c \preccurlyeq d$, 又

$$b \preccurlyeq b \vee d, \quad d \preccurlyeq b \vee d,$$

由传递性可得

$$a \preccurlyeq b \vee d, \quad c \preccurlyeq b \vee d.$$

这说明 $b \vee d$ 是 a 和 c 的一个上界, 但 $a \vee c$ 是 a 和 c 的最小上界,

Theorem 1.10

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是格, a, b, c, $d \in A$, 若 $a \preccurlyeq b$, $c \preccurlyeq d$, 则

$$a \vee c \preccurlyeq b \vee d, \tag{3}$$

$$a \wedge c \preccurlyeq b \wedge d. \tag{4}$$

证 已知 $a \preccurlyeq b$, $c \preccurlyeq d$, 又

$$b \preccurlyeq b \vee d, \quad d \preccurlyeq b \vee d,$$

由传递性可得

$$a \preccurlyeq b \vee d, \quad c \preccurlyeq b \vee d.$$

这说明 $b \vee d$ 是 a 和 c 的一个上界, 但 $a \vee c$ 是 a 和 c 的最小上界, 所以

$$a \vee c \preccurlyeq b \vee d.$$

Theorem 1.10

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是格, $a, b, c, d \in A$, 若 $a \preccurlyeq b$, $c \preccurlyeq d$, 则

$$a \vee c \preccurlyeq b \vee d, \tag{3}$$

$$a \wedge c \preccurlyeq b \wedge d. \tag{4}$$

证 已知 $a \preccurlyeq b$, $c \preccurlyeq d$, 又

$$b \preccurlyeq b \vee d, \quad d \preccurlyeq b \vee d,$$

由传递性可得

$$a \preccurlyeq b \vee d, \quad c \preccurlyeq b \vee d.$$

这说明 $b \vee d$ 是 a 和 c 的一个上界, 但 $a \vee c$ 是 a 和 c 的最小上界, 所以

$$a \vee c \preccurlyeq b \vee d.$$

类似地可以证明

$$a \wedge c \preccurlyeq b \wedge d.$$

□

推论

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是格, a, b, $c \in A$, 若 $b \preccurlyeq c$, 则

$$a \vee b \preccurlyeq a \vee c, \qquad a \wedge b \preccurlyeq a \wedge c.$$

这个性质称为格的保序性.

推论

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是格, a, b, $c \in A$, 若 $b \preccurlyeq c$, 则

$$a \vee b \preccurlyeq a \vee c, \qquad a \wedge b \preccurlyeq a \wedge c.$$

这个性质称为格的保序性.

证　已知 $b \preccurlyeq c$,

推论

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是格, a, b, $c \in A$, 若 $b \preccurlyeq c$, 则

$$a \vee b \preccurlyeq a \vee c, \qquad a \wedge b \preccurlyeq a \wedge c.$$

这个性质称为格的保序性.

证 已知 $b \preccurlyeq c$, 又 $a \preccurlyeq a$,

推论

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是格, a, b, $c \in A$, 若 $b \preccurlyeq c$, 则

$$a \vee b \preccurlyeq a \vee c, \qquad a \wedge b \preccurlyeq a \wedge c.$$

这个性质称为格的保序性.

证 已知 $b \preccurlyeq c$, 又 $a \preccurlyeq a$, 所以

$$a \vee b \preccurlyeq a \vee c.$$

推论

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是格, a, b, $c \in A$, 若 $b \preccurlyeq c$, 则

$$a \vee b \preccurlyeq a \vee c, \qquad a \wedge b \preccurlyeq a \wedge c.$$

这个性质称为格的**保序性**.

证 已知 $b \preccurlyeq c$, 又 $a \preccurlyeq a$, 所以

$$a \vee b \preccurlyeq a \vee c.$$

同理有

$$a \wedge b \preccurlyeq a \wedge c. \qquad \square$$

Theorem 1.11

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是一个格, 那么, 对于任意的 $a, b \in A$, 有

$$a \preccurlyeq b \iff a \wedge b = a \iff a \vee b = b.$$

Theorem 1.11

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是一个格, 那么, 对于任意的 $a, b \in A$, 有

$$a \preccurlyeq b \iff a \wedge b = a \iff a \vee b = b.$$

证 先证明 $a \preccurlyeq b \iff a \wedge b = a$.

Theorem 1.11

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是一个格, 那么, 对于任意的 $a, b \in A$, 有

$$a \preccurlyeq b \iff a \wedge b = a \iff a \vee b = b.$$

证 先证明 $a \preccurlyeq b \iff a \wedge b = a$.

设 $a \preccurlyeq b$.

Theorem 1.11

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是一个格, 那么, 对于任意的 $a, b \in A$, 有

$$a \preccurlyeq b \iff a \wedge b = a \iff a \vee b = b.$$

证 先证明 $a \preccurlyeq b \iff a \wedge b = a$.

设 $a \preccurlyeq b$. 又 $a \preccurlyeq a$, 则 a 是 a 和 b 的下界, 而 $a \wedge b$ 是最大下界, 得

Theorem 1.11

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是一个格, 那么, 对于任意的 $a, b \in A$, 有

$$a \preccurlyeq b \iff a \wedge b = a \iff a \vee b = b.$$

证 先证明 $a \preccurlyeq b \iff a \wedge b = a$.

设 $a \preccurlyeq b$. 又 $a \preccurlyeq a$, 则 a 是 a 和 b 的下界, 而 $a \wedge b$ 是最大下界, 得

$$a \preccurlyeq a \wedge b.$$

Theorem 1.11

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是一个格, 那么, 对于任意的 $a, b \in A$, 有

$$a \preccurlyeq b \iff a \wedge b = a \iff a \vee b = b.$$

证 先证明 $a \preccurlyeq b \iff a \wedge b = a$.

设 $a \preccurlyeq b$. 又 $a \preccurlyeq a$, 则 a 是 a 和 b 的下界, 而 $a \wedge b$ 是最大下界, 得

$$a \preccurlyeq a \wedge b.$$

又

$$a \wedge b \preccurlyeq a,$$

Theorem 1.11

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是一个格, 那么, 对于任意的 $a, b \in A$, 有

$$a \preccurlyeq b \iff a \wedge b = a \iff a \vee b = b.$$

证 先证明 $a \preccurlyeq b \iff a \wedge b = a$.

设 $a \preccurlyeq b$. 又 $a \preccurlyeq a$, 则 a 是 a 和 b 的下界, 而 $a \wedge b$ 是最大下界, 得

$$a \preccurlyeq a \wedge b.$$

又

$$a \wedge b \preccurlyeq a,$$

所以

$$a \wedge b = a. \qquad \text{(反对称性)}$$

Theorem 1.11

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是一个格, 那么, 对于任意的 $a, b \in A$, 有

$$a \preccurlyeq b \iff a \wedge b = a \iff a \vee b = b.$$

证 先证明 $a \preccurlyeq b \iff a \wedge b = a$.

设 $a \preccurlyeq b$. 又 $a \preccurlyeq a$, 则 a 是 a 和 b 的下界, 而 $a \wedge b$ 是最大下界, 得

$$a \preccurlyeq a \wedge b.$$

又

$$a \wedge b \preccurlyeq a,$$

所以

$$a \wedge b = a. \qquad \text{(反对称性)}$$

反之, 假定 $a \wedge b = a$, 又 $a \wedge b \preccurlyeq b$, 所以

Theorem 1.11

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是一个格, 那么, 对于任意的 $a, b \in A$, 有

$$a \preccurlyeq b \iff a \wedge b = a \iff a \vee b = b.$$

证 先证明 $a \preccurlyeq b \iff a \wedge b = a$.

设 $a \preccurlyeq b$. 又 $a \preccurlyeq a$, 则 a 是 a 和 b 的下界, 而 $a \wedge b$ 是最大下界, 得

$$a \preccurlyeq a \wedge b.$$

又

$$a \wedge b \preccurlyeq a,$$

所以

$$a \wedge b = a. \qquad \text{(反对称性)}$$

反之, 假定 $a \wedge b = a$, 又 $a \wedge b \preccurlyeq b$, 所以

$$a \preccurlyeq b.$$

Theorem 1.11

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是一个格, 那么, 对于任意的 $a, b \in A$, 有

$$a \preccurlyeq b \iff a \wedge b = a \iff a \vee b = b.$$

证 先证明 $a \preccurlyeq b \iff a \wedge b = a$.

设 $a \preccurlyeq b$. 又 $a \preccurlyeq a$, 则 a 是 a 和 b 的下界, 而 $a \wedge b$ 是最大下界, 得

$$a \preccurlyeq a \wedge b.$$

又

$$a \wedge b \preccurlyeq a,$$

所以

$$a \wedge b = a. \qquad \text{(反对称性)}$$

反之, 假定 $a \wedge b = a$, 又 $a \wedge b \preccurlyeq b$, 所以

$$a \preccurlyeq b.$$

因此, $a \preccurlyeq b \iff a \wedge b$.

Theorem 1.11

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是一个格, 那么, 对于任意的 $a, b \in A$, 有

$$a \preccurlyeq b \iff a \wedge b = a \iff a \vee b = b.$$

证 先证明 $a \preccurlyeq b \iff a \wedge b = a$.

设 $a \preccurlyeq b$. 又 $a \preccurlyeq a$, 则 a 是 a 和 b 的下界, 而 $a \wedge b$ 是最大下界, 得

$$a \preccurlyeq a \wedge b.$$

又

$$a \wedge b \preccurlyeq a,$$

所以

$$a \wedge b = a. \qquad \text{(反对称性)}$$

反之, 假定 $a \wedge b = a$, 又 $a \wedge b \preccurlyeq b$, 所以

$$a \preccurlyeq b.$$

因此, $a \preccurlyeq b \iff a \wedge b$. 其他的证明类似. □

Theorem 1.12

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是一个格，那么，对于任意的 $a, b \in A$，有

$$a \preccurlyeq b \iff a \wedge b = a \iff a \vee b = b.$$

此时的哈斯图为:

“小 $\wedge$ 大 = 小”, “小 $\vee$ 大 = 大”

Theorem 1.13

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是格，由格 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 所诱导的代数系统为 $\langle A, \vee, \wedge\rangle$，则对任意的 $a, b, c, d \in A$，有

① $\left.\begin{array}{l} a \vee b = b \vee a, \\ a \wedge b = b \wedge a. \end{array}\right\}$ *(交换律)*

格的基本性质

Theorem 1.13

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是格，由格 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 所诱导的代数系统为 $\langle A, \vee, \wedge\rangle$，则对任意的 $a, b, c, d \in A$，有

① $\left.\begin{aligned} a \vee b = b \vee a, \\ a \wedge b = b \wedge a. \end{aligned}\right\}$ (交换律)

② $\left.\begin{aligned} a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c, \\ a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c. \end{aligned}\right\}$ (结合律)

格的基本性质

Theorem 1.13

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是格，由格 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 所诱导的代数系统为 $\langle A, \vee, \wedge\rangle$，则对任意的 $a, b, c, d \in A$，有

① $$\left.\begin{aligned} a \vee b = b \vee a, \\ a \wedge b = b \wedge a. \end{aligned}\right\} \text{(交换律)}$$

② $$\left.\begin{aligned} a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c, \\ a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c. \end{aligned}\right\} \text{(结合律)}$$

③ $$\left.\begin{aligned} a \vee a = a, \\ a \wedge a = a. \end{aligned}\right\} \text{(幂等律)}$$

格的基本性质

Theorem 1.13

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是格，由格 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 所诱导的代数系统为 $\langle A, \vee, \wedge\rangle$，则对任意的 $a, b, c, d \in A$，有

① $\left.\begin{aligned} a \vee b = b \vee a, \\ a \wedge b = b \wedge a. \end{aligned}\right\}$ *(交换律)*

② $\left.\begin{aligned} a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c, \\ a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c. \end{aligned}\right\}$ *(结合律)*

③ $\left.\begin{aligned} a \vee a = a, \\ a \wedge a = a. \end{aligned}\right\}$ *(幂等律)*

④ $\left.\begin{aligned} a \vee (a \wedge b) = a, \\ a \wedge (a \vee b) = a. \end{aligned}\right\}$ *(吸收律)*

下证结合律: $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$.

下证结合律: $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$.

分析 由偏序的反对称性, 可证下列两式同时成立:

$$(a \vee b) \vee c \preccurlyeq a \vee (b \vee c), \tag{5}$$

$$a \vee (b \vee c) \preccurlyeq (a \vee b) \vee c. \tag{6}$$

下证结合律: $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$.

证 因为 $b \preccurlyeq b \vee c$, 由保序性得

$$a \vee b \preccurlyeq a \vee (b \vee c).$$

反复使用结论 "$x \preccurlyeq x \vee y$, $y \preccurlyeq x \vee y$", 有

$$c \preccurlyeq b \vee c \preccurlyeq a \vee (b \vee c).$$

这说明 $a \vee (b \vee c)$ 是 $a \vee b$ 和 c 的一个上界.

下证结合律: $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$.

证 因为 $b \preccurlyeq b \vee c$, 由保序性得

$$a \vee b \preccurlyeq a \vee (b \vee c).$$

反复使用结论 "$x \preccurlyeq x \vee y$, $y \preccurlyeq x \vee y$", 有

$$c \preccurlyeq b \vee c \preccurlyeq a \vee (b \vee c).$$

这说明 $a \vee (b \vee c)$ 是 $a \vee b$ 和 c 的一个上界. 但 $(a \vee b) \vee c$ 是 $a \vee b$ 和 c 的最小上界,

下证结合律: $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$.

证 因为 $b \preccurlyeq b \vee c$, 由保序性得

$$a \vee b \preccurlyeq a \vee (b \vee c).$$

反复使用结论 "$x \preccurlyeq x \vee y$, $y \preccurlyeq x \vee y$", 有

$$c \preccurlyeq b \vee c \preccurlyeq a \vee (b \vee c).$$

这说明 $a \vee (b \vee c)$ 是 $a \vee b$ 和 c 的一个上界. 但 $(a \vee b) \vee c$ 是 $a \vee b$ 和 c 的最小上界, 所以

$$(a \vee b) \vee c \preccurlyeq a \vee (b \vee c).$$

下证结合律: $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$.

证 因为 $b \preccurlyeq b \vee c$, 由保序性得

$$a \vee b \preccurlyeq a \vee (b \vee c).$$

反复使用结论 “$x \preccurlyeq x \vee y$, $y \preccurlyeq x \vee y$”, 有

$$c \preccurlyeq b \vee c \preccurlyeq a \vee (b \vee c).$$

这说明 $a \vee (b \vee c)$ 是 $a \vee b$ 和 c 的一个上界. 但 $(a \vee b) \vee c$ 是 $a \vee b$ 和 c 的最小上界, 所以

$$(a \vee b) \vee c \preccurlyeq a \vee (b \vee c).$$

类似可证

$$a \vee (b \vee c) \preccurlyeq (a \vee b) \vee c.$$

下证结合律: $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$.

证 因为 $b \preccurlyeq b \vee c$, 由保序性得

$$a \vee b \preccurlyeq a \vee (b \vee c).$$

反复使用结论 "$x \preccurlyeq x \vee y$, $y \preccurlyeq x \vee y$", 有

$$c \preccurlyeq b \vee c \preccurlyeq a \vee (b \vee c).$$

这说明 $a \vee (b \vee c)$ 是 $a \vee b$ 和 c 的一个上界. 但 $(a \vee b) \vee c$ 是 $a \vee b$ 和 c 的最小上界, 所以

$$(a \vee b) \vee c \preccurlyeq a \vee (b \vee c).$$

类似可证

$$a \vee (b \vee c) \preccurlyeq (a \vee b) \vee c.$$

因而
$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c. \qquad \square$$

证明吸收律: $a \vee (a \wedge b) = a$.

证明吸收律: $a \vee (a \wedge b) = a$.

证 因为

$$a \wedge b \preccurlyeq a,$$

证明吸收律: $a \vee (a \wedge b) = a$.

证 因为

$$a \wedge b \preccurlyeq a,$$

所以

$$a \vee (a \wedge b) = a. \tag{5}$$

证明吸收律: $a \vee (a \wedge b) = a$.

证 因为

$$a \wedge b \preccurlyeq a,$$

所以

$$a \vee (a \wedge b) = a. \tag{5}$$

这里 (5) 式成立的理由是“大 $\vee$ 小 $=$ 大”. □

引理

设 $\langle A, \vee, \wedge \rangle$ 是一个代数系统, 其中 $\vee$, $\wedge$ 都是二元运算且满足吸收律, 那么 $\vee$, $\wedge$ 必满足幂等律.

引理

设 $\langle A, \vee, \wedge \rangle$ 是一个代数系统, 其中 $\vee$, $\wedge$ 都是二元运算且满足吸收律, 那么 $\vee$, $\wedge$ 必满足幂等律.

证 对任意 a, $b \in A$, 因 $\vee$, $\wedge$ 满足吸收律, 所以

$$a \vee (a \wedge b) = a, \tag{6}$$

$$a \wedge (a \vee b) = a. \tag{7}$$

引理

设 $\langle A, \vee, \wedge \rangle$ 是一个代数系统, 其中 $\vee, \wedge$ 都是二元运算且满足吸收律, 那么 $\vee, \wedge$ 必满足幂等律.

证 对任意 $a, b \in A$, 因 $\vee, \wedge$ 满足吸收律, 所以

$$a \vee (a \wedge b) = a, \tag{6}$$

$$a \wedge (a \vee b) = a. \tag{7}$$

由 b 的任意性, 在 (6) 式中用 $a \vee b$ 取代 b 仍然成立, 可得

$$a \vee \big(a \wedge \quad b \quad\big) = a.$$

引理

设 $\langle A, \vee, \wedge \rangle$ 是一个代数系统, 其中 $\vee, \wedge$ 都是二元运算且满足吸收律, 那么 $\vee, \wedge$ 必满足幂等律.

证 对任意 $a, b \in A$, 因 $\vee, \wedge$ 满足吸收律, 所以

$$a \vee (a \wedge b) = a, \tag{6}$$

$$a \wedge (a \vee b) = a. \tag{7}$$

由 b 的任意性, 在 (6) 式中用 $a \vee b$ 取代 b 仍然成立, 可得

$$a \vee \big(a \wedge (a \vee b)\big) = a.$$

引理

设 $\langle A, \vee, \wedge \rangle$ 是一个代数系统, 其中 $\vee$, $\wedge$ 都是二元运算且满足吸收律, 那么 $\vee$, $\wedge$ 必满足幂等律.

证 对任意 a, $b \in A$, 因 $\vee$, $\wedge$ 满足吸收律, 所以

$$a \vee (a \wedge b) = a, \tag{6}$$

$$a \wedge (a \vee b) = a. \tag{7}$$

由 b 的任意性, 在 (6) 式中用 $a \vee b$ 取代 b 仍然成立, 可得

$$a \vee \underbrace{(a \wedge (a \vee b))}_{a} = a.$$

引理

设 $\langle A, \vee, \wedge \rangle$ 是一个代数系统, 其中 $\vee, \wedge$ 都是二元运算且满足吸收律, 那么 $\vee, \wedge$ 必满足幂等律.

证 对任意 $a, b \in A$, 因 $\vee, \wedge$ 满足吸收律, 所以

$$a \vee (a \wedge b) = a, \tag{6}$$

$$a \wedge (a \vee b) = a. \tag{7}$$

由 b 的任意性, 在 (6) 式中用 $a \vee b$ 取代 b 仍然成立, 可得

$$a \vee \big(\underbrace{a \wedge (a \vee b)}_{a} \big) = a.$$

再由 (7) 式得:

$$a \vee a = a.$$

同理可证

$$a \wedge a = a. \qquad \square$$

格与代数系统之间的关系

Theorem 1.14

设 $\langle A, \vee, \wedge\rangle$ 是一个代数系统, 其中 $\vee, \wedge$ 都是二元运算, 且满足交换律、结合律和吸收律, 则 A 上存在偏序关系 $\preccurlyeq$, 使 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是一个格.

格与代数系统之间的关系

Theorem 1.14

设 $\langle A, \vee, \wedge\rangle$ 是一个代数系统，其中 $\vee, \wedge$ 都是二元运算，且满足交换律、结合律和吸收律，则 A 上存在偏序关系 $\preccurlyeq$，使 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是一个格.

分析　证明思路:

1. 在 A 上构造偏序关系 $\preccurlyeq$;
2. 证明 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 中任意两个元素有最小上界和最大下界.

格与代数系统之间的关系

Theorem 1.14

设 $\langle A, \vee, \wedge \rangle$ 是一个代数系统, 其中 $\vee, \wedge$ 都是二元运算, 且满足交换律、结合律和吸收律, 则 A 上存在偏序关系 $\preccurlyeq$, 使 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是一个格.

分析 证明思路:

1. 在 A 上构造偏序关系 $\preccurlyeq$;
2. 证明 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 中任意两个元素有最小上界和最大下界.

证 在 A 上定义二元关系 $\preccurlyeq$: 对任意 $a, b \in A$,

$$a \preccurlyeq b \iff a \wedge b = a.$$

格与代数系统之间的关系

Theorem 1.14

设 $\langle A, \vee, \wedge\rangle$ 是一个代数系统, 其中 $\vee, \wedge$ 都是二元运算, 且满足交换律、结合律和吸收律, 则 A 上存在偏序关系 $\preccurlyeq$, 使 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是一个格.

分析 证明思路:

1. 在 A 上构造偏序关系 $\preccurlyeq$;
2. 证明 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 中任意两个元素有最小上界和最大下界.

证 在 A 上定义二元关系 $\preccurlyeq$: 对任意 $a, b \in A$,

$$a \preccurlyeq b \Longleftrightarrow a \wedge b = a.$$

先证 $\preccurlyeq$ 是偏序. (下一页)

续证: 注意到 $a \preccurlyeq b \Longleftrightarrow a \wedge b = a$,

- 运算 $\wedge$ 满足吸收律, 由引理知满足幂等律: 对任意 $a \in A$, $a \wedge a = a$.

续证: 注意到 $a \preccurlyeq b \Longleftrightarrow a \wedge b = a$,

- 运算 $\wedge$ 满足吸收律, 由引理知满足幂等律: 对任意 $a \in A$, $a \wedge a = a$. 所以
$$a \preccurlyeq a.$$
从而 $\preccurlyeq$ 是自反的.

续证: 注意到 $a \preccurlyeq b \iff a \wedge b = a$,

- 运算 $\wedge$ 满足吸收律, 由引理知满足幂等律: 对任意 $a \in A$, $a \wedge a = a$. 所以

$$a \preccurlyeq a.$$

  从而 $\preccurlyeq$ 是自反的.

- 设 $a \preccurlyeq b$, 则 $a \wedge b = a$. 如果同时有 $b \preccurlyeq a$, 则 $b \wedge a = b$.

续证: 注意到 $a \preccurlyeq b \iff a \wedge b = a$,

- 运算 $\wedge$ 满足吸收律, 由引理知满足幂等律: 对任意 $a \in A$, $a \wedge a = a$. 所以
$$a \preccurlyeq a.$$
从而 $\preccurlyeq$ 是自反的.
- 设 $a \preccurlyeq b$, 则 $a \wedge b = a$. 如果同时有 $b \preccurlyeq a$, 则 $b \wedge a = b$. 而运算 $\wedge$ 满足交换律, 所以
$$a \wedge b = b \wedge a.$$

续证: 注意到 $a \preccurlyeq b \Longleftrightarrow a \wedge b = a$,

- 运算 $\wedge$ 满足吸收律, 由引理知满足幂等律: 对任意 $a \in A$, $a \wedge a = a$. 所以

$$a \preccurlyeq a.$$

从而 $\preccurlyeq$ 是自反的.

- 设 $a \preccurlyeq b$, 则 $a \wedge b = a$. 如果同时有 $b \preccurlyeq a$, 则 $b \wedge a = b$. 而运算 $\wedge$ 满足交换律, 所以

$$a \wedge b = b \wedge a.$$

故 $a = b$. 从而 $\preccurlyeq$ 是反对称的.

续证: 注意到 $a \preccurlyeq b \iff a \wedge b = a$,

- 运算 $\wedge$ 满足吸收律, 由引理知满足幂等律: 对任意 $a \in A$, $a \wedge a = a$. 所以

  $$a \preccurlyeq a.$$

  从而 $\preccurlyeq$ 是自反的.
- 设 $a \preccurlyeq b$, 则 $a \wedge b = a$. 如果同时有 $b \preccurlyeq a$, 则 $b \wedge a = b$. 而运算 $\wedge$ 满足交换律, 所以

  $$a \wedge b = b \wedge a.$$

  故 $a = b$. 从而 $\preccurlyeq$ 是反对称的.
- 设 $a \preccurlyeq b$, $b \preccurlyeq c$, 则 $a \wedge b = a$, $b \wedge c = b$.

续证: 注意到 $a \preccurlyeq b \Longleftrightarrow a \wedge b = a$,

- 运算 $\wedge$ 满足吸收律, 由引理知满足幂等律: 对任意 $a \in A$, $a \wedge a = a$. 所以
$$a \preccurlyeq a.$$
从而 $\preccurlyeq$ 是自反的.
- 设 $a \preccurlyeq b$, 则 $a \wedge b = a$. 如果同时有 $b \preccurlyeq a$, 则 $b \wedge a = b$. 而运算 $\wedge$ 满足交换律, 所以
$$a \wedge b = b \wedge a.$$
故 $a = b$. 从而 $\preccurlyeq$ 是反对称的.
- 设 $a \preccurlyeq b$, $b \preccurlyeq c$, 则 $a \wedge b = a$, $b \wedge c = b$. 那么
$$\begin{aligned} a \wedge c &= (a \wedge b) \wedge c && (a \wedge b = a) \\ &= a \wedge (b \wedge c) && (\text{结合律}) \\ &= a \wedge b && (b \wedge c = b) \\ &= a. && (a \wedge b = a) \end{aligned}$$

续证: 注意到 $a \preccurlyeq b \Longleftrightarrow a \wedge b = a$,

- 运算 $\wedge$ 满足吸收律, 由引理知满足幂等律: 对任意 $a \in A$, $a \wedge a = a$. 所以
$$a \preccurlyeq a.$$
从而 $\preccurlyeq$ 是自反的.
- 设 $a \preccurlyeq b$, 则 $a \wedge b = a$. 如果同时有 $b \preccurlyeq a$, 则 $b \wedge a = b$. 而运算 $\wedge$ 满足交换律, 所以
$$a \wedge b = b \wedge a.$$
故 $a = b$. 从而 $\preccurlyeq$ 是反对称的.
- 设 $a \preccurlyeq b$, $b \preccurlyeq c$, 则 $a \wedge b = a$, $b \wedge c = b$. 那么
$$\begin{aligned} a \wedge c &= (a \wedge b) \wedge c && (a \wedge b = a) \\ &= a \wedge (b \wedge c) && (\text{结合律}) \\ &= a \wedge b && (b \wedge c = b) \\ &= a. && (a \wedge b = a) \end{aligned}$$
所以 $a \preccurlyeq c$, 说明 $\preccurlyeq$ 是传递的.

续证:

其次, 证明 $a \wedge b$ 是 a, b 的最大下界.

续证:

其次, 证明 $a \wedge b$ 是 a, b 的最大下界. 因

$$
\begin{aligned}
(a \wedge b) \wedge a &= a \wedge (b \wedge a) && \text{(结合律)} \\
&= a \wedge (a \wedge b) && \text{(交换律)} \\
&= (a \wedge a) \wedge b && \text{(结合律)} \\
&= a \wedge b. && \text{(幂等律)}
\end{aligned}
$$

$$
(a \wedge b) \wedge b = a \wedge (b \wedge b) = a \wedge b.
$$

续证:

其次, 证明 $a \wedge b$ 是 a, b 的最大下界. 因

$$\begin{aligned}
(a \wedge b) \wedge a &= a \wedge (b \wedge a) && \text{(结合律)} \\
&= a \wedge (a \wedge b) && \text{(交换律)} \\
&= (a \wedge a) \wedge b && \text{(结合律)} \\
&= a \wedge b. && \text{(幂等律)}
\end{aligned}$$

$$(a \wedge b) \wedge b = a \wedge (b \wedge b) = a \wedge b.$$

又由 $\preccurlyeq$ 的定义, 可得 $a \wedge b \preccurlyeq a$, $a \wedge b \preccurlyeq b$.

续证:

其次, 证明 $a \wedge b$ 是 a, b 的最大下界. 因

$$\begin{aligned}
(a \wedge b) \wedge a &= a \wedge (b \wedge a) && \text{(结合律)} \\
&= a \wedge (a \wedge b) && \text{(交换律)} \\
&= (a \wedge a) \wedge b && \text{(结合律)} \\
&= a \wedge b. && \text{(幂等律)}
\end{aligned}$$

$$(a \wedge b) \wedge b = a \wedge (b \wedge b) = a \wedge b.$$

又由 $\preccurlyeq$ 的定义, 可得 $a \wedge b \preccurlyeq a$, $a \wedge b \preccurlyeq b$. 说明 $a \wedge b$ 是 a, b 的下界.

续证:

其次, 证明 $a \wedge b$ 是 a, b 的最大下界. 因

$$
\begin{aligned}
(a \wedge b) \wedge a &= a \wedge (b \wedge a) && (\text{结合律}) \\
&= a \wedge (a \wedge b) && (\text{交换律}) \\
&= (a \wedge a) \wedge b && (\text{结合律}) \\
&= a \wedge b. && (\text{幂等律})
\end{aligned}
$$

$$(a \wedge b) \wedge b = a \wedge (b \wedge b) = a \wedge b.$$

又由 $\preccurlyeq$ 的定义, 可得 $a \wedge b \preccurlyeq a$, $a \wedge b \preccurlyeq b$. 说明 $a \wedge b$ 是 a, b 的下界.

设 c 是 a, b 的任一下界, 则 $c \preccurlyeq a$, $c \preccurlyeq b$.

续证:

其次, 证明 $a \wedge b$ 是 a, b 的最大下界. 因

$$
\begin{aligned}
(a \wedge b) \wedge a &= a \wedge (b \wedge a) && \text{(结合律)} \\
&= a \wedge (a \wedge b) && \text{(交换律)} \\
&= (a \wedge a) \wedge b && \text{(结合律)} \\
&= a \wedge b. && \text{(幂等律)}
\end{aligned}
$$

$$(a \wedge b) \wedge b = a \wedge (b \wedge b) = a \wedge b.$$

又由 $\preccurlyeq$ 的定义, 可得 $a \wedge b \preccurlyeq a$, $a \wedge b \preccurlyeq b$. 说明 $a \wedge b$ 是 a, b 的下界.

设 c 是 a, b 的任一下界, 则 $c \preccurlyeq a$, $c \preccurlyeq b$. 按 $\preccurlyeq$ 的定义有

$$c \wedge a = c, \qquad c \wedge b = c.$$

续证:

其次, 证明 $a \wedge b$ 是 a, b 的最大下界. 因

$$\begin{aligned}(a \wedge b) \wedge a &= a \wedge (b \wedge a) && \text{(结合律)}\\ &= a \wedge (a \wedge b) && \text{(交换律)}\\ &= (a \wedge a) \wedge b && \text{(结合律)}\\ &= a \wedge b. && \text{(幂等律)}\end{aligned}$$

$$(a \wedge b) \wedge b = a \wedge (b \wedge b) = a \wedge b.$$

又由 $\preccurlyeq$ 的定义, 可得 $a \wedge b \preccurlyeq a$, $a \wedge b \preccurlyeq b$. 说明 $a \wedge b$ 是 a, b 的下界.

设 c 是 a, b 的任一下界, 则 $c \preccurlyeq a$, $c \preccurlyeq b$. 按 $\preccurlyeq$ 的定义有

$$c \wedge a = c, \qquad c \wedge b = c.$$

进而有

$$c \wedge (a \wedge b) = (c \wedge a) \wedge b = c \wedge b = c.$$

续证:

其次, 证明 $a \wedge b$ 是 a, b 的最大下界. 因

$$\begin{aligned}(a \wedge b) \wedge a &= a \wedge (b \wedge a) && \text{(结合律)}\\ &= a \wedge (a \wedge b) && \text{(交换律)}\\ &= (a \wedge a) \wedge b && \text{(结合律)}\\ &= a \wedge b. && \text{(幂等律)}\end{aligned}$$

$$(a \wedge b) \wedge b = a \wedge (b \wedge b) = a \wedge b.$$

又由 $\preccurlyeq$ 的定义, 可得 $a \wedge b \preccurlyeq a$, $a \wedge b \preccurlyeq b$. 说明 $a \wedge b$ 是 a, b 的下界.

设 c 是 a, b 的任一下界, 则 $c \preccurlyeq a$, $c \preccurlyeq b$. 按 $\preccurlyeq$ 的定义有

$$c \wedge a = c, \qquad c \wedge b = c.$$

进而有

$$c \wedge (a \wedge b) = (c \wedge a) \wedge b = c \wedge b = c.$$

按 $\preccurlyeq$ 的定义有 $c \preccurlyeq a \wedge b$. 故 $a \wedge b$ 是 a, b 的最大下界.

续证:

第三, 证明 $a \vee b$ 是 a, b 的最小上界.

续证:

第三, 证明 $a \vee b$ 是 a, b 的最小上界.

先证 $a \wedge b = a$ 与 $a \vee b = b$ 等价.

续证:

第三, 证明 $a \vee b$ 是 a, b 的最小上界.

先证 $a \wedge b = a$ 与 $a \vee b = b$ 等价.

若 $a \wedge b = a$, 则

$$
\begin{aligned}
a \vee b &= (a \wedge b) \vee b && (a \wedge b = a) \\
&= b \vee (a \wedge b) && (\text{交换律}) \\
&= b \vee (b \wedge a) && (\text{交换律}) \\
&= b. && (\text{吸收律})
\end{aligned}
$$

续证:

第三, 证明 $a \vee b$ 是 a, b 的最小上界.

先证 $a \wedge b = a$ 与 $a \vee b = b$ 等价.

若 $a \wedge b = a$, 则

$$\begin{aligned} a \vee b &= (a \wedge b) \vee b && (a \wedge b = a) \\ &= b \vee (a \wedge b) && (\text{交换律}) \\ &= b \vee (b \wedge a) && (\text{交换律}) \\ &= b. && (\text{吸收律}) \end{aligned}$$

于是 $a \vee b = b$.

续证:

第三, 证明 $a \vee b$ 是 a, b 的最小上界.

先证 $a \wedge b = a$ 与 $a \vee b = b$ 等价.

若 $a \wedge b = a$, 则

$$\begin{aligned} a \vee b &= (a \wedge b) \vee b && (a \wedge b = a) \\ &= b \vee (a \wedge b) && (\text{交换律}) \\ &= b \vee (b \wedge a) && (\text{交换律}) \\ &= b. && (\text{吸收律}) \end{aligned}$$

于是 $a \vee b = b$.

反之, 若 $a \vee b = b$, 则

$$\begin{aligned} a \wedge b &= a \wedge (a \vee b) && (a \vee b = b) \\ &= a. && (\text{吸收律}) \end{aligned}$$

亦即 $a \wedge b = a$.

续证:

第三, 证明 $a \vee b$ 是 a, b 的最小上界.

先证 $a \wedge b = a$ 与 $a \vee b = b$ 等价.

若 $a \wedge b = a$, 则

$$\begin{aligned} a \vee b &= (a \wedge b) \vee b && (a \wedge b = a) \\ &= b \vee (a \wedge b) && (\text{交换律}) \\ &= b \vee (b \wedge a) && (\text{交换律}) \\ &= b. && (\text{吸收律}) \end{aligned}$$

于是 $a \vee b = b$.

反之, 若 $a \vee b = b$, 则

$$\begin{aligned} a \wedge b &= a \wedge (a \vee b) && (a \vee b = b) \\ &= a. && (\text{吸收律}) \end{aligned}$$

亦即 $a \wedge b = a$.

由此可见, 偏序关系 $\preccurlyeq$ 的等价定义为: “$a \preccurlyeq b \iff a \vee b = b.$ ”

续证:

可以用证明 “ $a \wedge b$ 是 a, b 的最大下界” 类似的方法证明 “ $a \vee b$ 是 a, b 的最小上界”.

续证:

可以用证明“ $a \wedge b$ 是 a, b 的最大下界” 类似的方法证明“ $a \vee b$ 是 a, b 的最小上界”.

综上所述, $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是格. □

续证:

可以用证明 “ $a \wedge b$ 是 a, b 的最大下界” 类似的方法证明 “ $a \vee b$ 是 a, b 的最小上界”.

综上所述, $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是格. □

☞ 事实上, 这个定理给出的是格的另一个定义方式.

Definition 1.15

设 $\langle A, \vee, \wedge \rangle$ 是一个代数系统, 其中 $\vee$, $\wedge$ 都是二元运算, 且满足交换律、结合律和吸收律, 定义 A 上的偏序关系 $\preccurlyeq$: 对任意 $a, b \in A$,

$$a \preccurlyeq b \iff a \wedge b = a. \quad (\text{或 } a \preccurlyeq b \iff a \vee b = b.)$$

则 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是一个格.

续证:

可以用证明“ $a \wedge b$ 是 a, b 的最大下界”类似的方法证明“ $a \vee b$ 是 a, b 的最小上界”.

综上所述, $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是格. □

☞ 事实上, 这个定理给出的是格的另一个定义方式.

Definition 1.15

设 $\langle A, \vee, \wedge \rangle$ 是一个代数系统, 其中 $\vee, \wedge$ 都是二元运算, 且满足交换律、结合律和吸收律, 定义 A 上的偏序关系 $\preccurlyeq$: 对任意 $a, b \in A$,

$$a \preccurlyeq b \Longleftrightarrow a \wedge b = a. \quad (\text{或 } a \preccurlyeq b \Longleftrightarrow a \vee b = b.)$$

则 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是一个格.

由格 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 可以构造代数系统 $\langle A, \vee, \wedge \rangle$, 反过来, 由代数系统 $\langle A, \vee, \wedge \rangle$ 出发也可以返回到格 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$.

Theorem 1.16 (弱分配律)

在一个格 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 中, 对任意的 $a,\ b,\ c \in A$, 都有

$$a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c), \tag{8}$$

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \preccurlyeq a \wedge (b \vee c). \tag{9}$$

Theorem 1.16 (弱分配律)

在一个格 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 中，对任意的 $a, b, c \in A$，都有

$$a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c), \tag{8}$$

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \preccurlyeq a \wedge (b \vee c). \tag{9}$$

分析

- 比较：集合的并、交运算的分配律

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \tag{10}$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C). \tag{11}$$

Theorem 1.16 (弱分配律)

在一个格 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 中, 对任意的 $a, b, c \in A$, 都有

$$a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c), \tag{8}$$

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \preccurlyeq a \wedge (b \vee c). \tag{9}$$

分析

- 比较: 集合的并、交运算的分配律

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \tag{10}$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C). \tag{11}$$

- 谓之 “分配不等式”, 或弱分配律, 次分配律;

Theorem 1.16 (弱分配律)

在一个格 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 中, 对任意的 $a, b, c \in A$, 都有

$$a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c), \tag{8}$$

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \preccurlyeq a \wedge (b \vee c). \tag{9}$$

分析

- 比较: 集合的并、交运算的分配律

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \tag{10}$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C). \tag{11}$$

- 谓之 "分配不等式", 或弱分配律, 次分配律;
- 这里, (8) 式与 (9) 式是互为对偶的.

Theorem 1.16 (弱分配律)

在一个格 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 中, 对任意的 a, b, $c \in A$, 都有

$$a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c), \tag{8}$$

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \preccurlyeq a \wedge (b \vee c). \tag{9}$$

分析

- 比较: 集合的并、交运算的分配律

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \tag{10}$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C). \tag{11}$$

- 谓之 “分配不等式”, 或弱分配律, 次分配律;
- 这里, (8) 式与 (9) 式是互为对偶的.

下证 (8) 式成立, (9) 式由对偶原理可得.

证 要证 $a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$, 可以先分别证明

$$a \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c), \tag{12}$$

$$b \wedge c \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c). \tag{13}$$

证 要证 $a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$, 可以先分别证明

$$a \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c), \tag{12}$$

$$b \wedge c \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c). \tag{13}$$

- (12) 式成立, 因为

$$\begin{aligned} a &= a \wedge a && \text{(幂等性)} \\ &\preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c). && \big(a \preccurlyeq (a \vee b),\ a \preccurlyeq (a \vee c)\big) \end{aligned}$$

证 要证 $a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$, 可以先分别证明

$$a \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c), \tag{12}$$

$$b \wedge c \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c). \tag{13}$$

- (12) 式成立, 因为

$$\begin{aligned} a &= a \wedge a && \text{(幂等性)} \\ &\preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c). && \big(a \preccurlyeq (a \vee b),\ a \preccurlyeq (a \vee c)\big) \end{aligned}$$

- (13) 式成立, 因为

$$b \wedge c \preccurlyeq b \preccurlyeq a \vee b,$$

$$b \wedge c \preccurlyeq c \preccurlyeq a \vee c,$$

证 要证 $a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$, 可以先分别证明

$$a \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c), \tag{12}$$

$$b \wedge c \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c). \tag{13}$$

- (12) 式成立, 因为

$$\begin{aligned} a &= a \wedge a && \text{(幂等性)} \\ &\preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c). && \big(a \preccurlyeq (a \vee b),\ a \preccurlyeq (a \vee c)\big) \end{aligned}$$

- (13) 式成立, 因为

$$b \wedge c \preccurlyeq b \preccurlyeq a \vee b,$$

$$b \wedge c \preccurlyeq c \preccurlyeq a \vee c,$$

所以

$$b \wedge c = (b \wedge c) \wedge (b \wedge c)$$

证 要证 $a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$, 可以先分别证明

$$a \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c), \tag{12}$$

$$b \wedge c \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c). \tag{13}$$

- (12) 式成立, 因为

$$\begin{aligned} a &= a \wedge a && \text{(幂等性)} \\ &\preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c). && \big(a \preccurlyeq (a \vee b),\ a \preccurlyeq (a \vee c)\big) \end{aligned}$$

- (13) 式成立, 因为

$$b \wedge c \preccurlyeq b \preccurlyeq a \vee b,$$

$$b \wedge c \preccurlyeq c \preccurlyeq a \vee c,$$

所以

$$\begin{aligned} b \wedge c &= (b \wedge c) \wedge (b \wedge c) \\ &\preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c). \end{aligned}$$

□

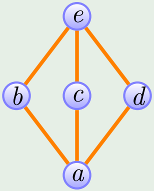
分配不等式

$$a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c),$$

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \preccurlyeq a \wedge (b \vee c).$$

Example 1.17

分配不等式实例:



$$b \wedge (c \vee d) = b \wedge e = b, \quad (b \wedge c) \vee (b \wedge d) = a \vee a = a.$$

☞ 称为钻石格(diamond lattice).

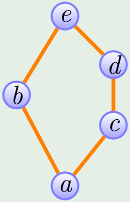
分配不等式

$$a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c),$$

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \preccurlyeq a \wedge (b \vee c).$$

Example 1.18

分配不等式实例:



$$d \wedge (b \vee c) = d \wedge e = d, \quad (d \wedge b) \vee (d \wedge c) = a \vee c = c.$$

☞ 称为五角格(pentagon lattice).

练习

设 $L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, $\langle L, \preccurlyeq \rangle$ 是偏序集, $\preccurlyeq$ 定义为: 对于 $n_1, n_2 \in L$, $n_1 \preccurlyeq n_2$ 当且仅当 n_1 是 n_2 的因子. 问 $\langle L, \preccurlyeq \rangle$ 是否为格?

练习

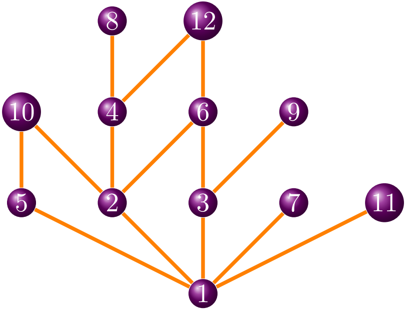
设 $L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, $\langle L, \preccurlyeq\rangle$ 是偏序集, $\preccurlyeq$ 定义为: 对于 $n_1, n_2 \in L$, $n_1 \preccurlyeq n_2$ 当且仅当 n_1 是 n_2 的因子. 问 $\langle L, \preccurlyeq\rangle$ 是否为格?

解 不是格.

练习

设 $L=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, $\langle L, \preccurlyeq\rangle$ 是偏序集, $\preccurlyeq$ 定义为: 对于 $n_1, n_2 \in L$, $n_1 \preccurlyeq n_2$ 当且仅当 n_1 是 n_2 的因子. 问 $\langle L, \preccurlyeq\rangle$ 是否为格?

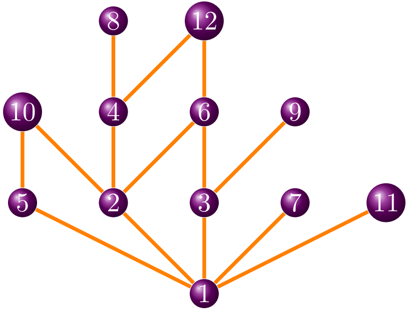
解 不是格. 哈斯图为:



练习

设 $L=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, $\langle L, \preccurlyeq\rangle$ 是偏序集, $\preccurlyeq$ 定义为: 对于 $n_1, n_2 \in L$, $n_1 \preccurlyeq n_2$ 当且仅当 n_1 是 n_2 的因子. 问 $\langle L, \preccurlyeq\rangle$ 是否为格?

解 不是格. 哈斯图为:



例如, “9 和 10” 没有最小上界. □

Definition 2.1 (子格)

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是格, $\langle A, \vee, \wedge\rangle$ 是 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 诱导的代数系统. 设 B 是 A 的非空子集. 如果运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 在 B 中封闭, 则称 $\langle B, \preccurlyeq\rangle$ 是 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 的子格.

Definition 2.1 (子格)

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是格, $\langle A, \vee, \wedge\rangle$ 是 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 诱导的代数系统. 设 B 是 A 的非空子集. 如果运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 在 B 中封闭, 则称 $\langle B, \preccurlyeq\rangle$ 是 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 的子格.

可以证明, 子格也是格.

Definition 2.1 (子格)

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是格, $\langle A, \vee, \wedge\rangle$ 是 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 诱导的代数系统. 设 B 是 A 的非空子集. 如果运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 在 B 中封闭, 则称 $\langle B, \preccurlyeq\rangle$ 是 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 的子格.

可以证明, 子格也是格.

Example 2.2

设 E^+ 是正偶数的全体, 易知 $\langle E^+, |\rangle$ 是 $\langle \mathbb{Z}^+, |\rangle$ 的子格:

Definition 2.1 (子格)

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是格, $\langle A, \vee, \wedge \rangle$ 是 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 诱导的代数系统. 设 B 是 A 的非空子集. 如果运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 在 B 中封闭, 则称 $\langle B, \preccurlyeq \rangle$ 是 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 的子格.

可以证明, 子格也是格.

Example 2.2

设 E^+ 是正偶数的全体, 易知 $\langle E^+, | \rangle$ 是 $\langle \mathbb{Z}^+, | \rangle$ 的子格:
任何两个偶数的最大公约数和最小公倍数都是偶数, 运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 关于 E^+ 是封闭的.

Example 2.3

设 $\langle S, \preccurlyeq \rangle$ 是一个格, 任取 $a \in S$, 构造 S 的子集为:

$$T = \left\{ x \,\middle|\, x \in S \text{ 且 } x \preccurlyeq a \right\},$$

则 $\langle T, \preccurlyeq \rangle$ 是 $\langle S, \preccurlyeq \rangle$ 的一个子格.

Example 2.3

设 $\langle S, \preccurlyeq\rangle$ 是一个格, 任取 $a \in S$, 构造 S 的子集为:

$$T = \{\, x \mid x \in S \text{ 且 } x \preccurlyeq a \,\},$$

则 $\langle T, \preccurlyeq\rangle$ 是 $\langle S, \preccurlyeq\rangle$ 的一个子格.

证　对任意的 $x,\ y \in T$, 必有 $x \preccurlyeq a$ 和 $y \preccurlyeq a$,

Example 2.3

设 $\langle S, \preccurlyeq\rangle$ 是一个格, 任取 $a \in S$, 构造 S 的子集为:

$$T = \left\{ x \,\middle|\, x \in S \text{ 且 } x \preccurlyeq a \right\},$$

则 $\langle T, \preccurlyeq\rangle$ 是 $\langle S, \preccurlyeq\rangle$ 的一个子格.

证 对任意的 $x, y \in T$, 必有 $x \preccurlyeq a$ 和 $y \preccurlyeq a$, 所以

$$x \vee y \preccurlyeq a, \qquad (a \text{ 是 } x, y \text{ 的上界})$$

$$x \wedge y \preccurlyeq a, \qquad (x \wedge y \preccurlyeq x \vee y)$$

Example 2.3

设 $\langle S, \preccurlyeq \rangle$ 是一个格, 任取 $a \in S$, 构造 S 的子集为:

$$T = \left\{ x \,\middle|\, x \in S \text{ 且 } x \preccurlyeq a \right\},$$

则 $\langle T, \preccurlyeq \rangle$ 是 $\langle S, \preccurlyeq \rangle$ 的一个子格.

证 对任意的 $x, y \in T$, 必有 $x \preccurlyeq a$ 和 $y \preccurlyeq a$, 所以

$$x \vee y \preccurlyeq a, \qquad (a \text{ 是 } x, y \text{ 的上界})$$

$$x \wedge y \preccurlyeq a, \qquad (x \wedge y \preccurlyeq x \vee y)$$

故

$$x \vee y \in T, \qquad x \wedge y \in T.$$

Example 2.3

设 $\langle S, \preccurlyeq \rangle$ 是一个格, 任取 $a \in S$, 构造 S 的子集为:

$$T = \left\{ x \,\middle|\, x \in S \text{ 且 } x \preccurlyeq a \right\},$$

则 $\langle T, \preccurlyeq \rangle$ 是 $\langle S, \preccurlyeq \rangle$ 的一个子格.

证 对任意的 $x, y \in T$, 必有 $x \preccurlyeq a$ 和 $y \preccurlyeq a$, 所以

$$x \vee y \preccurlyeq a, \qquad (a \text{ 是 } x, y \text{ 的上界})$$

$$x \wedge y \preccurlyeq a, \qquad (x \wedge y \preccurlyeq x \vee y)$$

故

$$x \vee y \in T, \qquad x \wedge y \in T.$$

运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 关于 T 是封闭的, 因此, $\langle T, \preccurlyeq \rangle$ 是 $\langle S, \preccurlyeq \rangle$ 的一个子格. □

注意

若 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是格, $B \subseteq A$ 且 $B \neq \varnothing$, 则 $\langle B, \preccurlyeq\rangle$ 仍然是偏序集,

- 但 $\langle B, \preccurlyeq\rangle$ 不一定是格.

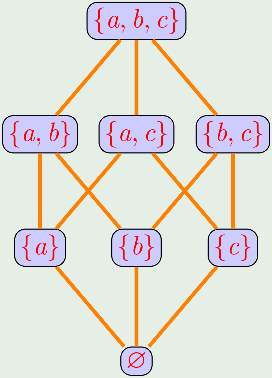
注意

若 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是格, $B \subseteq A$ 且 $B \neq \varnothing$, 则 $\langle B, \preccurlyeq\rangle$ 仍然是偏序集,

- 但 $\langle B, \preccurlyeq\rangle$ 不一定是格.
- 即使是格, 也不一定是 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 的子格.

Example 2.4

设 $S = \{a, b, c\}$, 则 $\langle \mathscr{P}(S), \subseteq \rangle$ 是格, 其哈斯图如下.



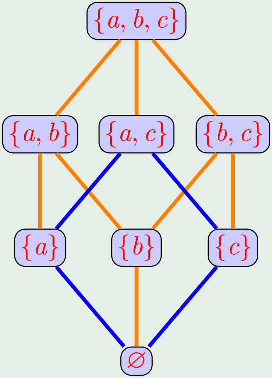
取

$$A = \big\{\varnothing, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}\big\},$$

$$B = \big\{\varnothing, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\big\}.$$

Example 2.4

设 $S=\{a,b,c\}$, 则 $\langle\mathscr{P}(S),\subseteq\rangle$ 是格, 其哈斯图如下.



取

$A=\Big\{\varnothing,\{a\},\{c\},\{a,c\}\Big\}$,

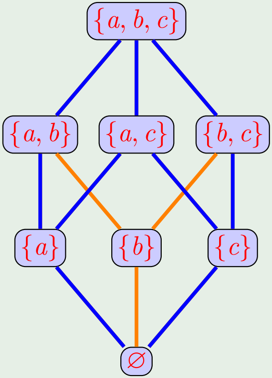
$B=\Big\{\varnothing,\{a\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\Big\}$.

则

- $\langle A,\subseteq\rangle$ 是 $\langle\mathscr{P}(S),\subseteq\rangle$ 的子格;

Example 2.4

设 $S=\{a,b,c\}$, 则 $\langle \mathscr{P}(S), \subseteq\rangle$ 是格, 其哈斯图如下.



取

$$A=\{\varnothing,\{a\},\{c\},\{a,c\}\},$$

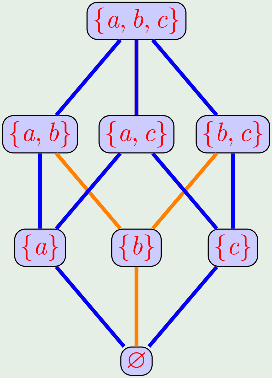
$$B=\{\varnothing,\{a\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}.$$

则

- $\langle A,\subseteq\rangle$ 是 $\langle \mathscr{P}(S),\subseteq\rangle$ 的子格;
- $\langle B,\subseteq\rangle$ 是格, 但不是 $\langle \mathscr{P}(S),\subseteq\rangle$ 的子格.

Example 2.4

设 $S = \{a, b, c\}$, 则 $\langle \mathscr{P}(S), \subseteq \rangle$ 是格, 其哈斯图如下.



取

$A = \{\varnothing, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$,

$B = \{\varnothing, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

则

- $\langle A, \subseteq \rangle$ 是 $\langle \mathscr{P}(S), \subseteq \rangle$ 的子格;
- $\langle B, \subseteq \rangle$ 是格, 但不是 $\langle \mathscr{P}(S), \subseteq \rangle$ 的子格. 这是因为

$$\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\} \notin B.$$

格同态

格 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 可视为具有两个二元运算的代数系统 $\langle A, \vee, \wedge \rangle$, 其中运算满足交换律、结合律、吸收律和幂等律.

因此, 对格可引入代数系统中同态的概念.

格同态

Definition 2.5

设 $\langle A_1, \preccurlyeq_1\rangle, \langle A_2, \preccurlyeq_2\rangle$ 是格, 它们所诱导的代数系统分别是 $\langle A_1, \vee_1, \wedge_1\rangle$, $\langle A_2, \vee_2, \wedge_2\rangle$. 如果存在映射 $f\colon A_1 \to A_2$, 使对任意 $a, b \in A_1$, 有

$$f(a \vee_1 b) = f(a) \vee_2 f(b), \qquad f(a \wedge_1 b) = f(a) \wedge_2 f(b).$$

格同态

Definition 2.5

设 $\langle A_1, \preccurlyeq_1\rangle$, $\langle A_2, \preccurlyeq_2\rangle$ 是格, 它们所诱导的代数系统分别是 $\langle A_1, \vee_1, \wedge_1\rangle$, $\langle A_2, \vee_2, \wedge_2\rangle$. 如果存在映射 $f\colon A_1 \to A_2$, 使对任意 a, $b \in A_1$, 有

$$f(a \vee_1 b) = f(a) \vee_2 f(b), \qquad f(a \wedge_1 b) = f(a) \wedge_2 f(b).$$

- 则称 f 是从 $\langle A_1, \vee_1, \wedge_1\rangle$ 到 $\langle A_2, \vee_2, \wedge_2\rangle$ 的格同态.

格同态

Definition 2.5

设 $\langle A_1, \preccurlyeq_1\rangle$, $\langle A_2, \preccurlyeq_2\rangle$ 是格, 它们所诱导的代数系统分别是 $\langle A_1, \vee_1, \wedge_1\rangle$, $\langle A_2, \vee_2, \wedge_2\rangle$. 如果存在映射 $f\colon A_1 \to A_2$, 使对任意 a, $b \in A_1$, 有

$$f(a \vee_1 b) = f(a) \vee_2 f(b), \qquad f(a \wedge_1 b) = f(a) \wedge_2 f(b).$$

- 则称 f 是从 $\langle A_1, \vee_1, \wedge_1\rangle$ 到 $\langle A_2, \vee_2, \wedge_2\rangle$ 的格同态.
- 称 $\langle f(A_1), \preccurlyeq_2\rangle$ 是 $\langle A_1, \preccurlyeq_1\rangle$ 的格同态象.

格同态

Definition 2.5

设 $\langle A_1, \preccurlyeq_1\rangle$, $\langle A_2, \preccurlyeq_2\rangle$ 是格, 它们所诱导的代数系统分别是 $\langle A_1, \vee_1, \wedge_1\rangle$, $\langle A_2, \vee_2, \wedge_2\rangle$. 如果存在映射 $f\colon A_1 \to A_2$, 使对任意 a, $b \in A_1$, 有

$$f(a \vee_1 b) = f(a) \vee_2 f(b), \qquad f(a \wedge_1 b) = f(a) \wedge_2 f(b).$$

- 则称 f 是从 $\langle A_1, \vee_1, \wedge_1\rangle$ 到 $\langle A_2, \vee_2, \wedge_2\rangle$ 的格同态.
- 称 $\langle f(A_1), \preccurlyeq_2\rangle$ 是 $\langle A_1, \preccurlyeq_1\rangle$ 的格同态象.
- 如果 f 是双射, 则称 f 是从 $\langle A_1, \vee_1, \wedge_1\rangle$ 到 $\langle A_2, \vee_2, \wedge_2\rangle$ 的格同构. 也称格 $\langle A_1, \preccurlyeq_1\rangle$, $\langle A_2, \preccurlyeq_2\rangle$ 同构.

Theorem 2.6

设 f 是格 $\langle A_1, \preccurlyeq_1 \rangle$ 到 $\langle A_2, \preccurlyeq_2 \rangle$ 的格同态. 对任意 $x, y \in A_1$, 如果 $x \preccurlyeq_1 y$, 则 $f(x) \preccurlyeq_2 f(y)$.

Theorem 2.6

设 f 是格 $\langle A_1, \preccurlyeq_1\rangle$ 到 $\langle A_2, \preccurlyeq_2\rangle$ 的格同态. 对任意 $x, y \in A_1$, 如果 $x \preccurlyeq_1 y$, 则 $f(x) \preccurlyeq_2 f(y)$.

证 已知 $x \preccurlyeq_1 y$, 因 $x \preccurlyeq_1 y \Longleftrightarrow x \wedge_1 y = x$, 则

$$x \wedge_1 y = x.$$

Theorem 2.6

设 f 是格 $\langle A_1, \preccurlyeq_1\rangle$ 到 $\langle A_2, \preccurlyeq_2\rangle$ 的格同态. 对任意 $x, y \in A_1$, 如果 $x \preccurlyeq_1 y$, 则 $f(x) \preccurlyeq_2 f(y)$.

证 已知 $x \preccurlyeq_1 y$, 因 $x \preccurlyeq_1 y \Longleftrightarrow x \wedge_1 y = x$, 则

$$x \wedge_1 y = x.$$

所以

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x \wedge_1 y) && (x \wedge_1 y = x) \\ &= f(x) \wedge_2 f(y). && (f \text{ 是格同态}) \end{aligned}$$

Theorem 2.6

设 f 是格 $\langle A_1, \preccurlyeq_1 \rangle$ 到 $\langle A_2, \preccurlyeq_2 \rangle$ 的格同态. 对任意 $x, y \in A_1$, 如果 $x \preccurlyeq_1 y$, 则 $f(x) \preccurlyeq_2 f(y)$.

证 已知 $x \preccurlyeq_1 y$, 因 $x \preccurlyeq_1 y \Longleftrightarrow x \wedge_1 y = x$, 则

$$x \wedge_1 y = x.$$

所以

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x \wedge_1 y) && (x \wedge_1 y = x) \\ &= f(x) \wedge_2 f(y). && (f \text{ 是格同态}) \end{aligned}$$

而 $f(x) \wedge_2 f(y) = f(x) \Longleftrightarrow f(x) \preccurlyeq_2 f(y)$, 所以

$$f(x) \preccurlyeq_2 f(y).$$

□

Theorem 2.6

设 f 是格 $\langle A_1, \preccurlyeq_1\rangle$ 到 $\langle A_2, \preccurlyeq_2\rangle$ 的格同态. 对任意 $x, y \in A_1$, 如果 $x \preccurlyeq_1 y$, 则 $f(x) \preccurlyeq_2 f(y)$.

证 已知 $x \preccurlyeq_1 y$, 因 $x \preccurlyeq_1 y \Longleftrightarrow x \wedge_1 y = x$, 则

$$x \wedge_1 y = x.$$

所以

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x \wedge_1 y) && (x \wedge_1 y = x) \\ &= f(x) \wedge_2 f(y). && (f \text{ 是格同态}) \end{aligned}$$

而 $f(x) \wedge_2 f(y) = f(x) \Longleftrightarrow f(x) \preccurlyeq_2 f(y)$, 所以

$$f(x) \preccurlyeq_2 f(y).$$

□

注:

此定理说明, 格同态是保序的.

Theorem 2.6

设 f 是格 $\langle A_1, \preccurlyeq_1\rangle$ 到 $\langle A_2, \preccurlyeq_2\rangle$ 的格同态. 对任意 $x, y \in A_1$, 如果 $x \preccurlyeq_1 y$, 则 $f(x) \preccurlyeq_2 f(y)$.

证 已知 $x \preccurlyeq_1 y$, 因 $x \preccurlyeq_1 y \Longleftrightarrow x \wedge_1 y = x$, 则

$$x \wedge_1 y = x.$$

所以

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x \wedge_1 y) && (x \wedge_1 y = x) \\ &= f(x) \wedge_2 f(y). && (f \text{ 是格同态}) \end{aligned}$$

而 $f(x) \wedge_2 f(y) = f(x) \Longleftrightarrow f(x) \preccurlyeq_2 f(y)$, 所以

$$f(x) \preccurlyeq_2 f(y).$$

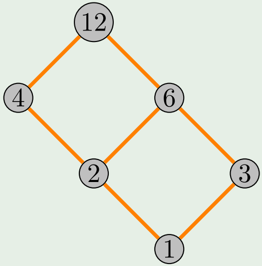
□

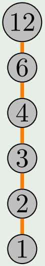
注:

此定理说明, 格同态是保序的. 但, 其逆不真.

Example 2.7

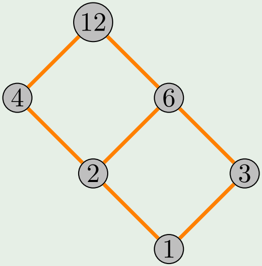
设 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $\langle A, | \rangle$ 和 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 都是格, 其中 " | " 表示整除关系, "$\preccurlyeq$" 表示数的 "小于等于" 关系.

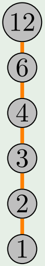




Example 2.7

设 $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $\langle A, \mid\rangle$ 和 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 都是格, 其中 “ $\mid$ ” 表示整除关系, “$\preccurlyeq$” 表示数的 “小于等于” 关系.

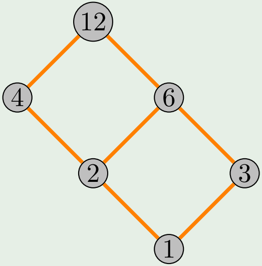


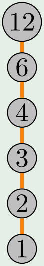


作映射 $f\colon A\to A$, $f(x)=x$.

Example 2.7

设 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $\langle A, |\rangle$ 和 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 都是格, 其中 “ | ” 表示整除关系, “$\preccurlyeq$” 表示数的 “小于等于” 关系.

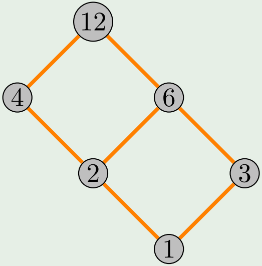


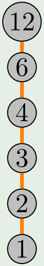


作映射 $f\colon A \to A$, $f(x) = x$. 显然, 若 $x|y$, 则 $f(x) \preccurlyeq f(y)$, 因而 f 是保序的.

Example 2.7

设 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $\langle A, |\rangle$ 和 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 都是格, 其中 " | " 表示整除关系, "$\preccurlyeq$" 表示数的 "小于等于" 关系.

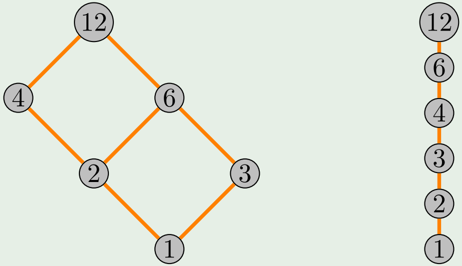




作映射 $f\colon A \to A$, $f(x) = x$. 显然, 若 $x|y$, 则 $f(x) \preccurlyeq f(y)$, 因而 f 是保序的.
但 f 不是格同态.

Example 2.7

设 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $\langle A, | \rangle$ 和 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 都是格, 其中 " $|$ " 表示整除关系, "$\preccurlyeq$" 表示数的 "小于等于" 关系.



作映射 $f : A \to A$, $f(x) = x$. 显然, 若 $x|y$, 则 $f(x) \preccurlyeq f(y)$, 因而 f 是保序的.
但 f 不是格同态. 例如:

$$\underbrace{f(4 \wedge_1 6)}_{=2} \neq \underbrace{f(4) \wedge_2 f(6)}_{=4}.$$

Theorem 2.8

设两个格为 $\langle A_1, \preccurlyeq_1\rangle$ 和 $\langle A_2, \preccurlyeq_2\rangle$, f 是 A_1 到 A_2 的双射. 则 f 是格 $\langle A_1, \preccurlyeq_1\rangle$ 到 $\langle A_2, \preccurlyeq_2\rangle$ 的格同构, 当且仅当

$$\forall\ a,\ b \in A_1, \quad a \preccurlyeq_1 b \iff f(a) \preccurlyeq_2 f(b). \tag{14}$$

Theorem 2.8

设两个格为 $\langle A_1, \preccurlyeq_1\rangle$ 和 $\langle A_2, \preccurlyeq_2\rangle$, f 是 A_1 到 A_2 的双射. 则 f 是格 $\langle A_1, \preccurlyeq_1\rangle$ 到 $\langle A_2, \preccurlyeq_2\rangle$ 的格同构, 当且仅当

$$\forall\ a,\ b \in A_1, \quad a \preccurlyeq_1 b \iff f(a) \preccurlyeq_2 f(b). \tag{14}$$

证 (1) 设 f 是格 $\langle A_1, \preccurlyeq_1\rangle$ 到 $\langle A_2, \preccurlyeq_2\rangle$ 的格同构. 下证 (14) 式成立.

Theorem 2.8

设两个格为 $\langle A_1, \preccurlyeq_1 \rangle$ 和 $\langle A_2, \preccurlyeq_2 \rangle$, f 是 A_1 到 A_2 的双射. 则 f 是格 $\langle A_1, \preccurlyeq_1 \rangle$ 到 $\langle A_2, \preccurlyeq_2 \rangle$ 的格同构, 当且仅当

$$\forall\ a,\ b \in A_1, \quad a \preccurlyeq_1 b \iff f(a) \preccurlyeq_2 f(b). \tag{14}$$

证 (1) 设 f 是格 $\langle A_1, \preccurlyeq_1 \rangle$ 到 $\langle A_2, \preccurlyeq_2 \rangle$ 的格同构. 下证 (14) 式成立.

i) 对任意 $a, b \in A_1$, 如果 $a \preccurlyeq_1 b$, 由保序性, 则 $f(a) \preccurlyeq_2 f(b)$.

Theorem 2.8

设两个格为 $\langle A_1, \preccurlyeq_1 \rangle$ 和 $\langle A_2, \preccurlyeq_2 \rangle$, f 是 A_1 到 A_2 的双射. 则 f 是格 $\langle A_1, \preccurlyeq_1 \rangle$ 到 $\langle A_2, \preccurlyeq_2 \rangle$ 的格同构, 当且仅当

$$\forall\ a,\ b \in A_1, \quad a \preccurlyeq_1 b \iff f(a) \preccurlyeq_2 f(b). \tag{14}$$

证 (1) 设 f 是格 $\langle A_1, \preccurlyeq_1 \rangle$ 到 $\langle A_2, \preccurlyeq_2 \rangle$ 的格同构. 下证 (14) 式成立.

i) 对任意 $a, b \in A_1$, 如果 $a \preccurlyeq_1 b$, 由保序性, 则 $f(a) \preccurlyeq_2 f(b)$.

ii) 若 $f(a) \preccurlyeq_2 f(b)$, 则

Theorem 2.8

设两个格为 $\langle A_1, \preccurlyeq_1\rangle$ 和 $\langle A_2, \preccurlyeq_2\rangle$, f 是 A_1 到 A_2 的双射. 则 f 是格 $\langle A_1, \preccurlyeq_1\rangle$ 到 $\langle A_2, \preccurlyeq_2\rangle$ 的格同构, 当且仅当

$$\forall\ a,\ b \in A_1,\quad a \preccurlyeq_1 b \iff f(a) \preccurlyeq_2 f(b). \tag{14}$$

证 (1) 设 f 是格 $\langle A_1, \preccurlyeq_1\rangle$ 到 $\langle A_2, \preccurlyeq_2\rangle$ 的格同构. 下证 (14) 式成立.

i) 对任意 $a, b \in A_1$, 如果 $a \preccurlyeq_1 b$, 由保序性, 则 $f(a) \preccurlyeq_2 f(b)$.

ii) 若 $f(a) \preccurlyeq_2 f(b)$, 则

$$f(a) = f(a) \wedge_2 f(b)$$

Theorem 2.8

设两个格为 $\langle A_1, \preccurlyeq_1 \rangle$ 和 $\langle A_2, \preccurlyeq_2 \rangle$, f 是 A_1 到 A_2 的双射. 则 f 是格 $\langle A_1, \preccurlyeq_1 \rangle$ 到 $\langle A_2, \preccurlyeq_2 \rangle$ 的格同构, 当且仅当

$$\forall\ a,\ b \in A_1, \quad a \preccurlyeq_1 b \iff f(a) \preccurlyeq_2 f(b). \tag{14}$$

证 (1) 设 f 是格 $\langle A_1, \preccurlyeq_1 \rangle$ 到 $\langle A_2, \preccurlyeq_2 \rangle$ 的格同构. 下证 (14) 式成立.

i) 对任意 $a, b \in A_1$, 如果 $a \preccurlyeq_1 b$, 由保序性, 则 $f(a) \preccurlyeq_2 f(b)$.

ii) 若 $f(a) \preccurlyeq_2 f(b)$, 则

$$\begin{aligned} f(a) &= f(a) \wedge_2 f(b) \\ &= f(a \wedge_1 b). && (f\ \text{是同构}) \end{aligned}$$

Theorem 2.8

设两个格为 $\langle A_1, \preccurlyeq_1\rangle$ 和 $\langle A_2, \preccurlyeq_2\rangle$, f 是 A_1 到 A_2 的双射. 则 f 是格 $\langle A_1, \preccurlyeq_1\rangle$ 到 $\langle A_2, \preccurlyeq_2\rangle$ 的格同构, 当且仅当

$$\forall\ a, b \in A_1, \quad a \preccurlyeq_1 b \iff f(a) \preccurlyeq_2 f(b). \tag{14}$$

证 (1) 设 f 是格 $\langle A_1, \preccurlyeq_1\rangle$ 到 $\langle A_2, \preccurlyeq_2\rangle$ 的格同构. 下证 (14) 式成立.

i) 对任意 $a, b \in A_1$, 如果 $a \preccurlyeq_1 b$, 由保序性, 则 $f(a) \preccurlyeq_2 f(b)$.

ii) 若 $f(a) \preccurlyeq_2 f(b)$, 则

$$\begin{aligned} f(a) &= f(a) \wedge_2 f(b) \\ &= f(a \wedge_1 b). \qquad (f\text{ 是同构}) \end{aligned}$$

而 f 是双射, 则

$$\begin{aligned} f(a \wedge_1 b) = f(a) &\iff a \wedge_1 b = a \\ &\iff a \preccurlyeq_1 b. \end{aligned}$$

续证: (2) 假设对任意 $a, b \in A_1$, $a \preccurlyeq_1 b \Longleftrightarrow f(a) \preccurlyeq_2 f(b)$. 即映射 f 是保序的.

续证: (2) 假设对任意 $a, b \in A_1$, $a \preccurlyeq_1 b \Longleftrightarrow f(a) \preccurlyeq_2 f(b)$. 即映射 f 是保序的. 要证 f 是 $\langle A_1, \preccurlyeq_1 \rangle$ 到 $\langle A_2, \preccurlyeq_2 \rangle$ 的格同构, 即要证

$$f(a \wedge_1 b) = f(a) \wedge_2 f(b), \tag{15}$$

$$f(a \vee_1 b) = f(a) \vee_2 f(b). \tag{16}$$

续证: (2) 假设对任意 $a, b \in A_1$, $a \preccurlyeq_1 b \iff f(a) \preccurlyeq_2 f(b)$. 即映射 f 是保序的. 要证 f 是 $\langle A_1, \preccurlyeq_1\rangle$ 到 $\langle A_2, \preccurlyeq_2\rangle$ 的格同构, 即要证

$$f(a \wedge_1 b) = f(a) \wedge_2 f(b), \tag{15}$$

$$f(a \vee_1 b) = f(a) \vee_2 f(b). \tag{16}$$

要证 (15) 式成立, 即要证

$$f(a \wedge_1 b) \preccurlyeq_2 f(a) \wedge_2 f(b), \qquad f(a) \wedge_2 f(b) \preccurlyeq_2 f(a \wedge_1 b)$$

同时成立.

续证: (2) 假设对任意 $a, b \in A_1$, $a \preccurlyeq_1 b \Longleftrightarrow f(a) \preccurlyeq_2 f(b)$. 即映射 f 是保序的.
要证 f 是 $\langle A_1, \preccurlyeq_1 \rangle$ 到 $\langle A_2, \preccurlyeq_2 \rangle$ 的格同构, 即要证

$$f(a \wedge_1 b) = f(a) \wedge_2 f(b), \tag{15}$$

$$f(a \vee_1 b) = f(a) \vee_2 f(b). \tag{16}$$

要证 (15) 式成立, 即要证

$$f(a \wedge_1 b) \preccurlyeq_2 f(a) \wedge_2 f(b), \qquad f(a) \wedge_2 f(b) \preccurlyeq_2 f(a \wedge_1 b)$$

同时成立.

因为 $a \wedge_1 b \preccurlyeq_1 a$, $a \wedge_1 b \preccurlyeq_1 b$, 由 f 的保序性, 得

$$f(a \wedge_1 b) \preccurlyeq_2 f(a), \qquad f(a \wedge_1 b) \preccurlyeq_2 f(b).$$

续证: (2) 假设对任意 $a, b \in A_1$, $a \preccurlyeq_1 b \Longleftrightarrow f(a) \preccurlyeq_2 f(b)$. 即映射 f 是保序的.

要证 f 是 $\langle A_1, \preccurlyeq_1\rangle$ 到 $\langle A_2, \preccurlyeq_2\rangle$ 的格同构, 即要证

$$f(a \wedge_1 b) = f(a) \wedge_2 f(b), \tag{15}$$

$$f(a \vee_1 b) = f(a) \vee_2 f(b). \tag{16}$$

要证 (15) 式成立, 即要证

$$f(a \wedge_1 b) \preccurlyeq_2 f(a) \wedge_2 f(b), \qquad f(a) \wedge_2 f(b) \preccurlyeq_2 f(a \wedge_1 b)$$

同时成立.

因为 $a \wedge_1 b \preccurlyeq_1 a$, $a \wedge_1 b \preccurlyeq_1 b$, 由 f 的保序性, 得

$$f(a \wedge_1 b) \preccurlyeq_2 f(a), \qquad f(a \wedge_1 b) \preccurlyeq_2 f(b).$$

所以

$$f(a \wedge_1 b) \preccurlyeq_2 f(a) \wedge_2 f(b).$$

续证: 记 $f(a) \wedge_2 f(b) \triangleq f(d)$, 则 $f(d) \preccurlyeq_2 f(a)$, $f(d) \preccurlyeq_2 f(b)$.

续证: 记 $f(a) \wedge_2 f(b) \triangleq f(d)$, 则 $f(d) \preccurlyeq_2 f(a)$, $f(d) \preccurlyeq_2 f(b)$. 由 f 的保序性, 得

$$d \preccurlyeq_1 a, \qquad d \preccurlyeq_1 b.$$

所以, $d \preccurlyeq_1 a \wedge_1 b$.

续证: 记 $f(a) \wedge_2 f(b) \triangleq f(d)$, 则 $f(d) \preccurlyeq_2 f(a)$, $f(d) \preccurlyeq_2 f(b)$. 由 f 的保序性, 得

$$d \preccurlyeq_1 a, \qquad d \preccurlyeq_1 b.$$

所以, $d \preccurlyeq_1 a \wedge_1 b$. 再由保序性, 得 $f(d) \preccurlyeq_2 f(a \wedge_1 b)$, 即

$$f(a) \wedge_2 f(b) \preccurlyeq_2 f(a \wedge_1 b).$$

续证: 记 $f(a) \wedge_2 f(b) \triangleq f(d)$, 则 $f(d) \preccurlyeq_2 f(a)$, $f(d) \preccurlyeq_2 f(b)$. 由 f 的保序性, 得

$$d \preccurlyeq_1 a, \qquad d \preccurlyeq_1 b.$$

所以, $d \preccurlyeq_1 a \wedge_1 b$. 再由保序性, 得 $f(d) \preccurlyeq_2 f(a \wedge_1 b)$, 即

$$f(a) \wedge_2 f(b) \preccurlyeq_2 f(a \wedge_1 b).$$

类似可证 $f(a \vee_1 b) = f(a) \vee_2 f(b)$ 成立.

故 f 是 $\langle A_1, \preccurlyeq_1 \rangle$ 到 $\langle A_2, \preccurlyeq_2 \rangle$ 的格同构. $\square$

练习

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是一个格, 任取 a, b 且 $a \prec b$ (意指 $a \preccurlyeq b$ 且 $a \neq b$). 构造集合

$$B = \left\{ x \,\middle|\, x \in A \text{ 且 } a \preccurlyeq x \preccurlyeq b \right\}$$

则 $\langle B, \preccurlyeq \rangle$ 也是一个格,

练习

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是一个格, 任取 a, b 且 $a \prec b$ (意指 $a \preccurlyeq b$ 且 $a \neq b$). 构造集合

$$B = \left\{ x \,\middle|\, x \in A \text{ 且 } a \preccurlyeq x \preccurlyeq b \right\}$$

则 $\langle B, \preccurlyeq \rangle$ 也是一个格,

证 可证 $\langle B, \preccurlyeq \rangle$ 是 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 的子格.

练习

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是一个格, 任取 a, b 且 $a \prec b$ (意指 $a \preccurlyeq b$ 且 $a \neq b$). 构造集合

$$B = \left\{ x \,\middle|\, x \in A \text{ 且 } a \preccurlyeq x \preccurlyeq b \right\}$$

则 $\langle B, \preccurlyeq \rangle$ 也是一个格,

证 可证 $\langle B, \preccurlyeq \rangle$ 是 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 的子格. 下证 "集合 B 关于运算是封闭的" 即可.

练习

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是一个格, 任取 a, b 且 $a \prec b$ (意指 $a \preccurlyeq b$ 且 $a \neq b$). 构造集合

$$B = \{\, x \mid x \in A \text{ 且 } a \preccurlyeq x \preccurlyeq b \,\}$$

则 $\langle B, \preccurlyeq \rangle$ 也是一个格,

证 可证 $\langle B, \preccurlyeq \rangle$ 是 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 的子格. 下证 "集合 B 关于运算是封闭的" 即可. 任意 $x, y \in B \subseteq A$, 有

$$a \preccurlyeq x \preccurlyeq b, \quad a \preccurlyeq y \preccurlyeq b.$$

练习

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是一个格, 任取 a, b 且 $a \prec b$ (意指 $a \preccurlyeq b$ 且 $a \neq b$). 构造集合

$$B = \left\{ x \,\middle|\, x \in A \text{ 且 } a \preccurlyeq x \preccurlyeq b \right\}$$

则 $\langle B, \preccurlyeq \rangle$ 也是一个格,

证 可证 $\langle B, \preccurlyeq \rangle$ 是 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 的子格. 下证 "集合 B 关于运算是封闭的" 即可. 任意 x, $y \in B \subseteq A$, 有

$$a \preccurlyeq x \preccurlyeq b, \quad a \preccurlyeq y \preccurlyeq b.$$

所以由 $a \preccurlyeq x$, 和 $a \preccurlyeq y$,

练习

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是一个格, 任取 a, b 且 $a \prec b$ (意指 $a \preccurlyeq b$ 且 $a \neq b$). 构造集合

$$B = \left\{ x \,\middle|\, x \in A \text{ 且 } a \preccurlyeq x \preccurlyeq b \right\}$$

则 $\langle B, \preccurlyeq \rangle$ 也是一个格,

证 可证 $\langle B, \preccurlyeq \rangle$ 是 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 的子格. 下证 "集合 B 关于运算是封闭的" 即可. 任意 $x, y \in B \subseteq A$, 有

$$a \preccurlyeq x \preccurlyeq b, \quad a \preccurlyeq y \preccurlyeq b.$$

所以由 $a \preccurlyeq x$, 和 $a \preccurlyeq y$, 可得

$$a \preccurlyeq x \vee y.$$

练习

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是一个格, 任取 a, b 且 $a \prec b$ (意指 $a \preccurlyeq b$ 且 $a \neq b$). 构造集合

$$B = \left\{ x \,\middle|\, x \in A \text{ 且 } a \preccurlyeq x \preccurlyeq b \right\}$$

则 $\langle B, \preccurlyeq\rangle$ 也是一个格,

证 可证 $\langle B, \preccurlyeq\rangle$ 是 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 的子格. 下证 "集合 B 关于运算是封闭的" 即可. 任意 $x, y \in B \subseteq A$, 有

$$a \preccurlyeq x \preccurlyeq b, \quad a \preccurlyeq y \preccurlyeq b.$$

所以由 $a \preccurlyeq x$, 和 $a \preccurlyeq y$, 可得

$$a \preccurlyeq x \vee y.$$

由 $x \preccurlyeq b$, 和 $y \preccurlyeq b$,

练习

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是一个格, 任取 a, b 且 $a \prec b$ (意指 $a \preccurlyeq b$ 且 $a \neq b$). 构造集合

$$B = \{\, x \mid x \in A \text{ 且 } a \preccurlyeq x \preccurlyeq b \,\}$$

则 $\langle B, \preccurlyeq\rangle$ 也是一个格,

证 可证 $\langle B, \preccurlyeq\rangle$ 是 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 的子格. 下证 “集合 B 关于运算是封闭的” 即可.
任意 $x, y \in B \subseteq A$, 有

$$a \preccurlyeq x \preccurlyeq b, \quad a \preccurlyeq y \preccurlyeq b.$$

所以由 $a \preccurlyeq x$, 和 $a \preccurlyeq y$, 可得

$$a \preccurlyeq x \vee y.$$

由 $x \preccurlyeq b$, 和 $y \preccurlyeq b$, 可得

$$x \vee y \preccurlyeq b.$$

练习

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是一个格, 任取 a, b 且 $a \prec b$ (意指 $a \preccurlyeq b$ 且 $a \neq b$). 构造集合

$$B = \{\, x \mid x \in A \text{ 且 } a \preccurlyeq x \preccurlyeq b \,\}$$

则 $\langle B, \preccurlyeq\rangle$ 也是一个格,

证 可证 $\langle B, \preccurlyeq\rangle$ 是 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 的子格. 下证 "集合 B 关于运算是封闭的" 即可. 任意 $x, y \in B \subseteq A$, 有

$$a \preccurlyeq x \preccurlyeq b, \quad a \preccurlyeq y \preccurlyeq b.$$

所以由 $a \preccurlyeq x$, 和 $a \preccurlyeq y$, 可得

$$a \preccurlyeq x \vee y.$$

由 $x \preccurlyeq b$, 和 $y \preccurlyeq b$, 可得

$$x \vee y \preccurlyeq b.$$

所以 $a \preccurlyeq x \vee y \preccurlyeq b$, 即 $x \vee y \in B$.

练习

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是一个格, 任取 a, b 且 $a \prec b$ (意指 $a \preccurlyeq b$ 且 $a \neq b$). 构造集合

$$B = \{\, x \mid x \in A \text{ 且 } a \preccurlyeq x \preccurlyeq b \,\}$$

则 $\langle B, \preccurlyeq\rangle$ 也是一个格,

证 可证 $\langle B, \preccurlyeq\rangle$ 是 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 的子格. 下证 “集合 B 关于运算是封闭的” 即可. 任意 $x, y \in B \subseteq A$, 有

$$a \preccurlyeq x \preccurlyeq b, \quad a \preccurlyeq y \preccurlyeq b.$$

所以由 $a \preccurlyeq x$, 和 $a \preccurlyeq y$, 可得

$$a \preccurlyeq x \vee y.$$

由 $x \preccurlyeq b$, 和 $y \preccurlyeq b$, 可得

$$x \vee y \preccurlyeq b.$$

所以 $a \preccurlyeq x \vee y \preccurlyeq b$, 即 $x \vee y \in B$. 同理可证 $x \wedge y \in B$. □

本节介绍几种特殊的格：

- 分配格；
- 有补格；
- 模格.

分配格

格中任意三个元素 a, b, c 满足分配不等式:

$$a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c) \tag{17}$$

$$a \wedge (b \vee c) \succcurlyeq (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \tag{18}$$

分配格

格中任意三个元素 a, b, c 满足分配不等式:

$$a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c) \tag{17}$$

$$a \wedge (b \vee c) \succcurlyeq (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \tag{18}$$

是否存在格使上述两式等号成立呢?

分配格

格中任意三个元素 a, b, c 满足分配不等式:

$$a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c) \tag{17}$$

$$a \wedge (b \vee c) \succcurlyeq (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \tag{18}$$

是否存在格使上述两式等号成立呢?

回答是肯定的. 比如格的典型例子 $\langle \mathscr{P}(S), \subseteq \rangle$, 其分配律是成立的.

分配格

Definition 3.1

设 $\langle A, \vee, \wedge \rangle$ 是由格 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 诱导的代数系统. 如果对任意 $a,\ b,\ c \in A$, 满足

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c), \qquad \text{(并对交可分配)}$$

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c). \qquad \text{(交对并可分配)}$$

则称 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是分配格.

分配格

Definition 3.1

设 $\langle A, \vee, \wedge\rangle$ 是由格 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 诱导的代数系统. 如果对任意 a, b, $c \in A$, 满足

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c), \qquad \text{(并对交可分配)}$$

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c). \qquad \text{(交对并可分配)}$$

则称 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是分配格.

☞ 这和我们熟知的集合运算的分配律, 有完全相同的形式:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

分配格

Definition 3.1

设 $\langle A, \vee, \wedge\rangle$ 是由格 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 诱导的代数系统. 如果对任意 a, b, $c \in A$, 满足

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c), \qquad \text{(并对交可分配)}$$

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c). \qquad \text{(交对并可分配)}$$

则称 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是分配格.

☞ 这和我们熟知的集合运算的分配律, 有完全相同的形式:

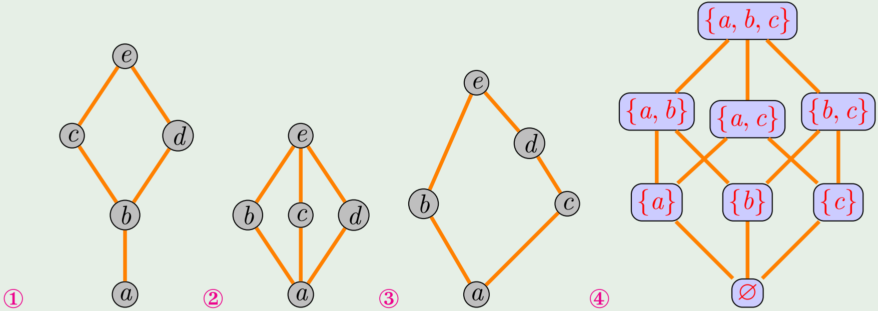
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

可见 $\langle \mathscr{P}(S), \subseteq \rangle$ 也是分配格的典型例子.

Example 3.2

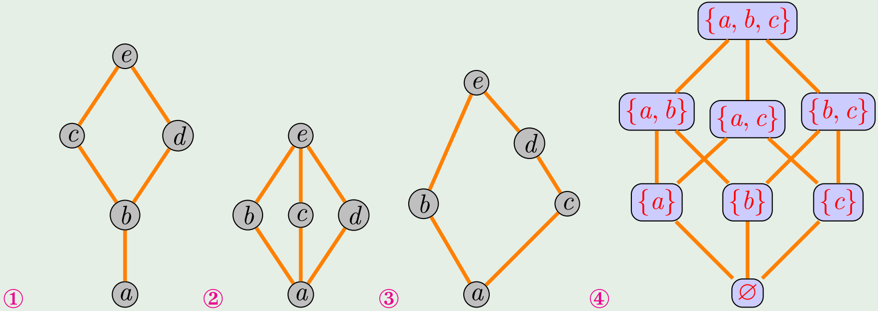
判断下列各图是否为分配格?



解 (1), (4) 是分配格. (2), (3) 不是分配格.

Example 3.2

判断下列各图是否为分配格?

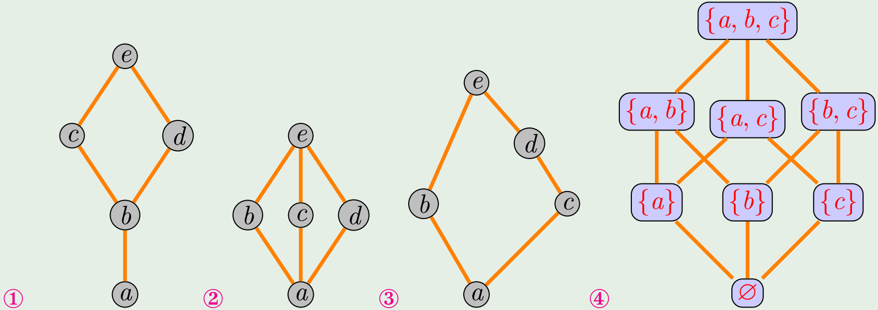


解 (1), (4) 是分配格. (2), (3) 不是分配格. 在 (2) 中,

$$b \wedge (c \vee d) = b \wedge e = b, \quad (b \wedge c) \vee (b \wedge d) = a \vee a = a,$$

Example 3.2

判断下列各图是否为分配格?



解 (1), (4) 是分配格. (2), (3) 不是分配格. 在 (2) 中,

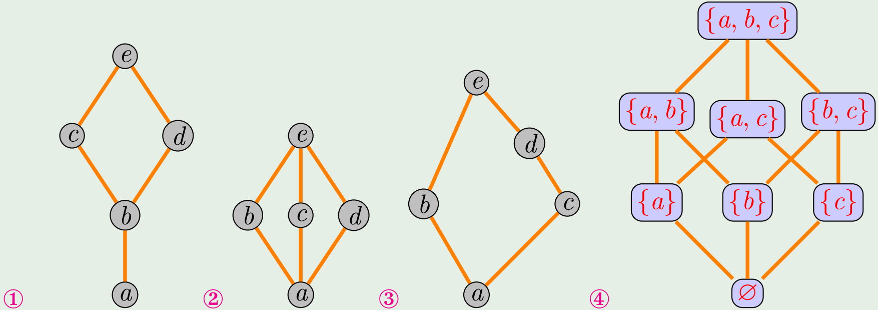
$$b \wedge (c \vee d) = b \wedge e = b, \quad (b \wedge c) \vee (b \wedge d) = a \vee a = a,$$

在 (3) 中,

$$d \wedge (b \vee c) = d \wedge e = d, \quad (d \wedge b) \vee (d \wedge c) = a \vee c = c. \qquad \square$$

Example 3.2

判断下列各图是否为分配格?

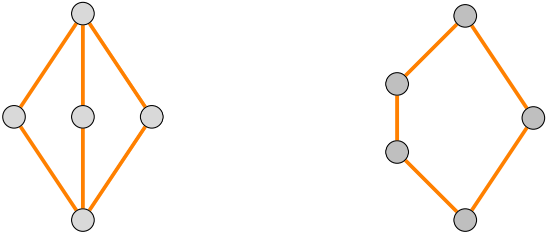


(2), (3) 这两个具有五个元素的格是很重要的, 分别称为钻石格 (diamond lattice) 和五角格 (pentagon lattice), 分别记为 M_3 和 N_5.

有一个如下的重要结论 (证明略去).

Theorem 3.3

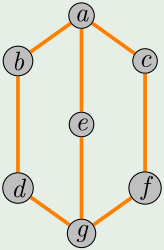
一个格是分配格的充要条件是, 在该格中没有任何子格与 M_3 和 N_5 中的任一个同构.



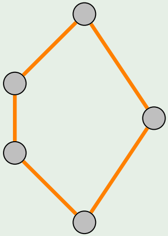
(a) 钻石格 M_3 (b) 五角格 N_5

Example 3.4

如图 (a) 所示的格中, $\langle\{a, b, d, g, e\}, \preccurlyeq\ \rangle$ 是格 $\langle\{a, b, c, d, e, f, g\}, \preccurlyeq\ \rangle$ 的子格,



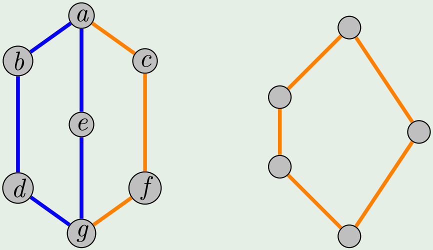
(a)



(b)

Example 3.4

如图 (a) 所示的格中, $\langle\{a, b, d, g, e\}, \preccurlyeq\ \rangle$ 是格 $\langle\{a, b, c, d, e, f, g\}, \preccurlyeq\ \rangle$ 的子格,



(a) (b)

而这个子格与图 (b) 是同构的, 所以, 图 (a) 所示的格不是分配格.

Theorem 3.5

如果格中运算 $\wedge$ 对运算 $\vee$ 可分配, 则运算 $\vee$ 对运算 $\wedge$ 可分配. 反之亦然.

Theorem 3.5

如果格中运算 $\wedge$ 对运算 $\vee$ 可分配, 则运算 $\vee$ 对运算 $\wedge$ 可分配. 反之亦然.

证 设 a, b, c 是格中任意元素, 如果

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \tag{19}$$

Theorem 3.5

如果格中运算 $\wedge$ 对运算 $\vee$ 可分配, 则运算 $\vee$ 对运算 $\wedge$ 可分配. 反之亦然.

证 设 a, b, c 是格中任意元素, 如果

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \tag{19}$$

则

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

Theorem 3.5

如果格中运算 $\wedge$ 对运算 $\vee$ 可分配, 则运算 $\vee$ 对运算 $\wedge$ 可分配. 反之亦然.

证 设 a, b, c 是格中任意元素, 如果

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \tag{19}$$

则

$$\begin{aligned} & (a \vee b) \wedge (a \vee c) \\ = & \big((a \vee b) \wedge a\big) \vee \big((a \vee b) \wedge c\big) \qquad (\wedge \text{ 对 } \vee \text{ 可分配}) \end{aligned}$$

Theorem 3.5

如果格中运算 $\wedge$ 对运算 $\vee$ 可分配, 则运算 $\vee$ 对运算 $\wedge$ 可分配. 反之亦然.

证 设 a, b, c 是格中任意元素, 如果

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \tag{19}$$

则

$$\begin{aligned}
& (a \vee b) \wedge (a \vee c) \\
= & \big((a \vee b) \wedge a\big) \vee \big((a \vee b) \wedge c\big) && (\wedge \text{ 对 } \vee \text{ 可分配}) \\
= & a \vee \big((a \vee b) \wedge c\big) && \big((a \vee b) \wedge a = a\big)
\end{aligned}$$

Theorem 3.5

如果格中运算 $\wedge$ 对运算 $\vee$ 可分配, 则运算 $\vee$ 对运算 $\wedge$ 可分配. 反之亦然.

证 设 a, b, c 是格中任意元素, 如果

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \tag{19}$$

则

$$\begin{aligned}
& (a \vee b) \wedge (a \vee c) \\
= & \big((a \vee b) \wedge a\big) \vee \big((a \vee b) \wedge c\big) && (\wedge \text{ 对 } \vee \text{ 可分配}) \\
= & a \vee \big((a \vee b) \wedge c\big) && \big((a \vee b) \wedge a = a\big) \\
= & a \vee \big((a \wedge c) \vee (b \wedge c)\big) && (\wedge \text{ 对 } \vee \text{ 可分配})
\end{aligned}$$

Theorem 3.5

如果格中运算 $\wedge$ 对运算 $\vee$ 可分配, 则运算 $\vee$ 对运算 $\wedge$ 可分配. 反之亦然.

证 设 a, b, c 是格中任意元素, 如果

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \tag{19}$$

则

$$
\begin{aligned}
& (a \vee b) \wedge (a \vee c) \\
= & \big((a \vee b) \wedge a\big) \vee \big((a \vee b) \wedge c\big) && (\wedge \text{ 对 } \vee \text{ 可分配}) \\
= & a \vee \big((a \vee b) \wedge c\big) && \big((a \vee b) \wedge a = a\big) \\
= & a \vee \big((a \wedge c) \vee (b \wedge c)\big) && (\wedge \text{ 对 } \vee \text{ 可分配}) \\
= & \big(a \vee (a \wedge c)\big) \vee (b \wedge c) && (\text{结合律})
\end{aligned}
$$

Theorem 3.5

如果格中运算 $\wedge$ 对运算 $\vee$ 可分配，则运算 $\vee$ 对运算 $\wedge$ 可分配. 反之亦然.

证 设 a, b, c 是格中任意元素, 如果

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \tag{19}$$

则

$$\begin{aligned}
& (a \vee b) \wedge (a \vee c) \\
= & \big((a \vee b) \wedge a\big) \vee \big((a \vee b) \wedge c\big) && (\wedge \text{ 对 } \vee \text{ 可分配}) \\
= & a \vee \big((a \vee b) \wedge c\big) && \big((a \vee b) \wedge a = a\big) \\
= & a \vee \big((a \wedge c) \vee (b \wedge c)\big) && (\wedge \text{ 对 } \vee \text{ 可分配}) \\
= & \big(a \vee (a \wedge c)\big) \vee (b \wedge c) && (\text{结合律}) \\
= & a \vee (b \wedge c).
\end{aligned}$$

Theorem 3.5

如果格中运算 $\wedge$ 对运算 $\vee$ 可分配, 则运算 $\vee$ 对运算 $\wedge$ 可分配. 反之亦然.

证 设 a, b, c 是格中任意元素, 如果

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \tag{19}$$

则

$$\begin{aligned}
& (a \vee b) \wedge (a \vee c) \\
={}& \big((a \vee b) \wedge a\big) \vee \big((a \vee b) \wedge c\big) && (\wedge \text{ 对 } \vee \text{ 可分配}) \\
={}& a \vee \big((a \vee b) \wedge c\big) && \big((a \vee b) \wedge a = a\big) \\
={}& a \vee \big((a \wedge c) \vee (b \wedge c)\big) && (\wedge \text{ 对 } \vee \text{ 可分配}) \\
={}& \big(a \vee (a \wedge c)\big) \vee (b \wedge c) && (\text{结合律}) \\
={}& a \vee (b \wedge c).
\end{aligned}$$

类似可证 $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \Rightarrow a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$. □

Theorem 3.6

链是分配格.

Theorem 3.6

链是分配格.

证 设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是链, 则 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是格.

Theorem 3.6

链是分配格.

证 设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是链, 则 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是格. (链中的任意两个元都是可比的. 比如 $a \preccurlyeq b$, 则 $a \wedge b = a$, $a \vee b = b$. 任意两个元素都有最小上界和最大下界, 所以是格.)

Theorem 3.6

链是分配格.

证 设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是链, 则 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是格. (链中的任意两个元都是可比的. 比如 $a \preccurlyeq b$, 则 $a \wedge b = a$, $a \vee b = b$. 任意两个元素都有最小上界和最大下界, 所以是格.)

对任意 a, b, $c \in A$, 可分两种情况讨论:

1. $a \preccurlyeq b$ **或** $a \preccurlyeq c$.
2. $b \preccurlyeq a$ **且** $c \preccurlyeq a$.

Theorem 3.6

链是分配格.

证　设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是链, 则 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是格. (链中的任意两个元都是可比的. 比如 $a \preccurlyeq b$, 则 $a \wedge b = a$, $a \vee b = b$. 任意两个元素都有最小上界和最大下界, 所以是格.)

对任意 a, b, $c \in A$, 可分两种情况讨论:

1. $a \preccurlyeq b$ 或 $a \preccurlyeq c$.
2. $b \preccurlyeq a$ 且 $c \preccurlyeq a$.

① $a \preccurlyeq b$ 或 $a \preccurlyeq c$.

$$a \wedge (b \vee c) = \begin{cases} a \wedge c = a, & b \preccurlyeq c, \\ a \wedge b = a, & c \preccurlyeq b. \end{cases}$$

Theorem 3.6

链是分配格.

证 设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是链, 则 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是格. (链中的任意两个元都是可比的. 比如 $a \preccurlyeq b$, 则 $a \wedge b = a$, $a \vee b = b$. 任意两个元素都有最小上界和最大下界, 所以是格.)

对任意 a, b, $c \in A$, 可分两种情况讨论:

1. $a \preccurlyeq b$ 或 $a \preccurlyeq c$.
2. $b \preccurlyeq a$ 且 $c \preccurlyeq a$.

① $a \preccurlyeq b$ 或 $a \preccurlyeq c$.

$$a \wedge (b \vee c) = \begin{cases} a \wedge c = a, & b \preccurlyeq c, \\ a \wedge b = a, & c \preccurlyeq b. \end{cases}$$

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = \begin{cases} a \vee (a \wedge c) = a, & a \preccurlyeq b, \\ (a \wedge b) \vee a = a, & a \preccurlyeq c. \end{cases}$$

Theorem 3.6

链是分配格.

证 设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是链, 则 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是格. (链中的任意两个元都是可比的. 比如 $a \preccurlyeq b$, 则 $a \wedge b = a$, $a \vee b = b$. 任意两个元素都有最小上界和最大下界, 所以是格.)

对任意 $a, b, c \in A$, 可分两种情况讨论:

1. $a \preccurlyeq b$ 或 $a \preccurlyeq c$.
2. $b \preccurlyeq a$ 且 $c \preccurlyeq a$.

① $a \preccurlyeq b$ 或 $a \preccurlyeq c$.

$$a \wedge (b \vee c) = \begin{cases} a \wedge c = a, & b \preccurlyeq c, \\ a \wedge b = a, & c \preccurlyeq b. \end{cases}$$

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = \begin{cases} a \vee (a \wedge c) = a, & a \preccurlyeq b, \\ (a \wedge b) \vee a = a, & a \preccurlyeq c. \end{cases}$$

所以, $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

续证: ② $b \preccurlyeq a$ 且 $c \preccurlyeq a$.

这时必有 $b \vee c \preccurlyeq a$ (上界). 进而有

$$a \wedge (b \vee c) = b \vee c$$

续证: ② $b \preccurlyeq a$ 且 $c \preccurlyeq a$.

这时必有 $b \vee c \preccurlyeq a$ (上界). 进而有

$$a \wedge (b \vee c) = b \vee c$$

另一方面, 由 $b \preccurlyeq a$ 且 $c \preccurlyeq a$ 可得:

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = b \vee c$$

续证: ② $b \preccurlyeq a$ 且 $c \preccurlyeq a$.

这时必有 $b \vee c \preccurlyeq a$ (上界). 进而有

$$a \wedge (b \vee c) = b \vee c$$

另一方面, 由 $b \preccurlyeq a$ 且 $c \preccurlyeq a$ 可得:

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = b \vee c$$

所以,

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

续证: ② $b \preccurlyeq a$ 且 $c \preccurlyeq a$.

这时必有 $b \vee c \preccurlyeq a$ (上界). 进而有

$$a \wedge (b \vee c) = b \vee c$$

另一方面, 由 $b \preccurlyeq a$ 且 $c \preccurlyeq a$ 可得:

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = b \vee c$$

所以,

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

得证: 链是分配格. □

模格

Theorem 3.7

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是一个格, 则对于任意的 a, b, $c \in A$, 有

$$a \preccurlyeq c \iff a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge c.$$

模格

Theorem 3.7

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是一个格, 则对于任意的 a, b, $c \in A$, 有

$$a \preccurlyeq c \iff a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge c.$$

证 ① 设 $a \preccurlyeq c$.

模格

Theorem 3.7

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是一个格, 则对于任意的 $a,\ b,\ c \in A$, 有

$$a \preccurlyeq c \iff a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge c.$$

证 ① 设 $a \preccurlyeq c$. 由 $a \preccurlyeq c \iff (a \vee c) = c$,

模格

Theorem 3.7

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是一个格，则对于任意的 $a,\ b,\ c\in A$，有

$$a\preccurlyeq c \iff a\vee(b\wedge c)\preccurlyeq(a\vee b)\wedge c.$$

证 ① 设 $a\preccurlyeq c$. 由 $a\preccurlyeq c\iff(a\vee c)=c$，得

$$\begin{aligned} a\vee(b\wedge c) &\preccurlyeq (a\vee b)\wedge(a\vee c) && \text{(分配不等式)}\\ &=(a\vee b)\wedge c. && ((a\vee c)=c) \end{aligned}$$

Theorem 3.7

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是一个格，则对于任意的 $a, b, c \in A$，有

$$a \preccurlyeq c \iff a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge c.$$

证 ① 设 $a \preccurlyeq c$. 由 $a \preccurlyeq c \iff (a \vee c) = c$，得

$$\begin{aligned} a \vee (b \wedge c) &\preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c) && \text{(分配不等式)} \\ &= (a \vee b) \wedge c. && ((a \vee c) = c) \end{aligned}$$

② 若 $a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge c$,

Theorem 3.7

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是一个格, 则对于任意的 $a, b, c \in A$, 有

$$a \preccurlyeq c \iff a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge c.$$

证 ① 设 $a \preccurlyeq c$. 由 $a \preccurlyeq c \iff (a \vee c) = c$, 得

$$\begin{aligned} a \vee (b \wedge c) &\preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c) && \text{(分配不等式)} \\ &= (a \vee b) \wedge c. && \big((a \vee c) = c\big) \end{aligned}$$

② 若 $a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge c$, 则由

Theorem 3.7

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是一个格, 则对于任意的 $a, b, c \in A$, 有

$$a \preccurlyeq c \iff a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge c.$$

证 ① 设 $a \preccurlyeq c$. 由 $a \preccurlyeq c \iff (a \vee c) = c$, 得

$$\begin{aligned} a \vee (b \wedge c) &\preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c) && \text{(分配不等式)} \\ &= (a \vee b) \wedge c. && ((a \vee c) = c) \end{aligned}$$

② 若 $a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge c$, 则由

Theorem 3.7

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是一个格，则对于任意的 a, b, $c \in A$, 有

$$a \preccurlyeq c \iff a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge c.$$

证 ① 设 $a \preccurlyeq c$. 由 $a \preccurlyeq c \iff (a \vee c) = c$, 得

$$\begin{aligned} a \vee (b \wedge c) &\preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c) && \text{(分配不等式)} \\ &= (a \vee b) \wedge c. && ((a \vee c) = c) \end{aligned}$$

② 若 $a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge c$, 则由

$$a \preccurlyeq a \vee (b \wedge c)$$

Theorem 3.7

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是一个格, 则对于任意的 $a, b, c \in A$, 有

$$a \preccurlyeq c \iff a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge c.$$

证 ① 设 $a \preccurlyeq c$. 由 $a \preccurlyeq c \iff (a \vee c) = c$, 得

$$\begin{aligned} a \vee (b \wedge c) &\preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c) && \text{(分配不等式)} \\ &= (a \vee b) \wedge c. && ((a \vee c) = c) \end{aligned}$$

② 若 $a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge c$, 则由

$$a \preccurlyeq a \vee (b \wedge c)$$

$$(a \vee b) \wedge c \preccurlyeq c.$$

模格

Theorem 3.7

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是一个格，则对于任意的 $a,\ b,\ c \in A$，有

$$a \preccurlyeq c \iff a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge c.$$

证 ① 设 $a \preccurlyeq c$. 由 $a \preccurlyeq c \iff (a \vee c) = c$，得

$$\begin{aligned} a \vee (b \wedge c) &\preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c) && \text{(分配不等式)} \\ &= (a \vee b) \wedge c. && ((a \vee c) = c) \end{aligned}$$

② 若 $a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge c$，则由

$$\begin{aligned} a &\preccurlyeq a \vee (b \wedge c) \\ &\preccurlyeq (a \vee b) \wedge c \preccurlyeq c. \end{aligned}$$

Theorem 3.7

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是一个格，则对于任意的 $a, b, c \in A$，有

$$a \preccurlyeq c \iff a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge c.$$

证 ① 设 $a \preccurlyeq c$. 由 $a \preccurlyeq c \iff (a \vee c) = c$，得

$$\begin{aligned} a \vee (b \wedge c) &\preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c) && \text{(分配不等式)} \\ &= (a \vee b) \wedge c. && ((a \vee c) = c) \end{aligned}$$

② 若 $a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge c$，则由

$$\begin{aligned} a &\preccurlyeq a \vee (b \wedge c) \\ &\preccurlyeq (a \vee b) \wedge c \preccurlyeq c. \end{aligned}$$

所以，$a \preccurlyeq c$. □

模格

Definition 3.8

设 $\langle A, \vee, \wedge \rangle$ 是由格 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 诱导的代数系统. 如果对任意 a, b, $c \in A$, 只要 $a \preccurlyeq c$, 就有

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c, \tag{20}$$

则称 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是模格(modular lattice).

模格

Definition 3.8

设 $\langle A, \vee, \wedge\rangle$ 是由格 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 诱导的代数系统. 如果对任意 a, b, $c \in A$, 只要 $a \preccurlyeq c$, 就有

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c, \tag{20}$$

则称 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是模格(modular lattice).

☞ 对照前述结论:

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是一个格, 则对于任意的 a, b, $c \in A$, 有

$$a \preccurlyeq c \iff a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge c. \tag{21}$$

☞ 把 (20) 式与 "分配等式" 相比较:

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c), \tag{22}$$

Definition 3.8

设 $\langle A, \vee, \wedge\rangle$ 是由格 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 诱导的代数系统. 如果对任意 a, b, $c \in A$, 只要 $a \preccurlyeq c$, 就有

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c, \tag{20}$$

则称 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是模格(modular lattice).

☞ 对照前述结论:

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是一个格, 则对于任意的 a, b, $c \in A$, 有

$$a \preccurlyeq c \iff a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge c. \tag{21}$$

☞ 把 (20) 式与 "分配等式" 相比较:

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c), \tag{22}$$

知分配格必定是模格.

Theorem 3.9

分配格必定是模格.

Theorem 3.9

分配格必定是模格.

证 设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是分配格, 任意的 a, b, $c \in A$, 若 $a \preccurlyeq c$, 则

$$a \vee c = c.$$

Theorem 3.9

分配格必定是模格.

证 设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是分配格, 任意的 a, b, $c \in A$, 若 $a \preccurlyeq c$, 则

$$a \vee c = c.$$

故

$$\begin{aligned} a \vee (b \wedge c) &= (a \vee b) \wedge (a \vee c) && \text{(分配律)} \\ &= (a \vee b) \wedge c. \end{aligned}$$

Theorem 3.9

分配格必定是模格.

证 设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是分配格, 任意的 a, b, $c \in A$, 若 $a \preccurlyeq c$, 则

$$a \vee c = c.$$

故

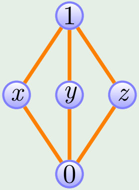
$$\begin{aligned} a \vee (b \wedge c) &= (a \vee b) \wedge (a \vee c) && \text{(分配律)} \\ &= (a \vee b) \wedge c. \end{aligned}$$

即证 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是模格. $\square$

模格不一定是分配格

Example 3.10

钻石格 M_3 不是分配格, 但它是模格.

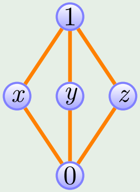


模格不一定是分配格

Example 3.10

钻石格 M_3 不是分配格, 但它是模格.

对于任意的 $a, b, c \in \{0, 1, x, y, z\}$, 若有 $a \preccurlyeq c$, 则必有 $a = 0$ 或者 $c = 1$.



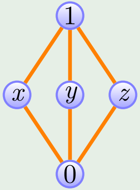
模格不一定是分配格

Example 3.10

钻石格 M_3 不是分配格, 但它是模格.

对于任意的 $a, b, c \in \{0, 1, x, y, z\}$, 若有 $a \preccurlyeq c$, 则必有 $a = 0$ 或者 $c = 1$.

若 $a = 0$, 则

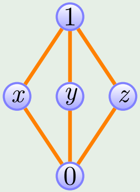


$$a \vee (b \wedge c) = b \wedge c,$$

$$(a \vee b) \wedge c = b \wedge c.$$

模格不一定是分配格

Example 3.10



钻石格 M_3 不是分配格, 但它是模格.

对于任意的 $a, b, c \in \{0, 1, x, y, z\}$, 若有 $a \preccurlyeq c$, 则必有 $a = 0$ 或者 $c = 1$.

若 $a = 0$, 则

$$a \vee (b \wedge c) = b \wedge c,$$

$$(a \vee b) \wedge c = b \wedge c.$$

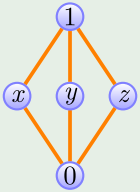
若 $c = 1$, 则

$$a \vee (b \wedge c) = a \vee b,$$

$$(a \vee b) \wedge c = a \vee b.$$

模格不一定是分配格

Example 3.10



钻石格 M_3 不是分配格, 但它是模格.

对于任意的 $a, b, c \in \{0, 1, x, y, z\}$, 若有 $a \preccurlyeq c$, 则必有 $a = 0$ 或者 $c = 1$.

若 $a = 0$, 则

$$a \vee (b \wedge c) = b \wedge c,$$

$$(a \vee b) \wedge c = b \wedge c.$$

若 $c = 1$, 则

$$a \vee (b \wedge c) = a \vee b,$$

$$(a \vee b) \wedge c = a \vee b.$$

所以它是模格. $\square$

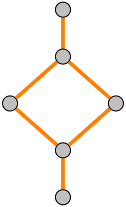
练习

试举两个含有 6 个元素的格, 一个是分配格, 另一个不是分配格.

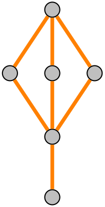
练习

试举两个含有 6 个元素的格, 一个是分配格, 另一个不是分配格.

解 分配格如图 (a) 所示, 不是分配格如图 (b) 所示.



(a)

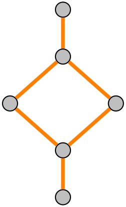


(b)

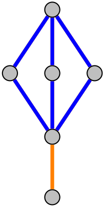
练习

试举两个含有 6 个元素的格, 一个是分配格, 另一个不是分配格.

解 分配格如图 (a) 所示, 不是分配格如图 (b) 所示.



(a)



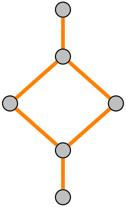
(b)

图 (b) 中有子格与钻石格同构, 所以图 (b) 不是分配格. □

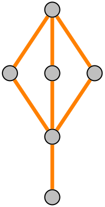
练习

试举两个含有 6 个元素的格, 一个是分配格, 另一个不是分配格.

解 分配格如图 (a) 所示, 不是分配格如图 (b) 所示.



(a)



(b)

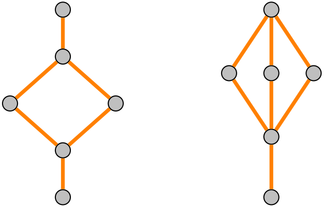
图 (b) 中有子格与钻石格同构, 所以图 (b) 不是分配格. □

当然, 分配格的最直接例子是链.

练习

试举两个含有 6 个元素的格, 一个是分配格, 另一个不是分配格.

解 分配格如图 (a) 所示, 不是分配格如图 (b) 所示.



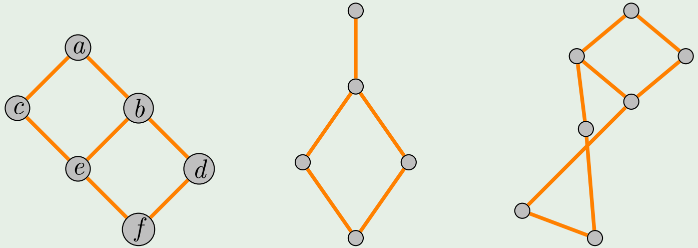
(a) (b)

图 (b) 中有子格与钻石格同构, 所以图 (b) 不是分配格. □

当然, 分配格的最直接例子是链. 非分配格还有很多, 比如六个元素组成的一个环形结构, 此时在其中任取 5 点都是和五角格 N_5 同构的.

练习

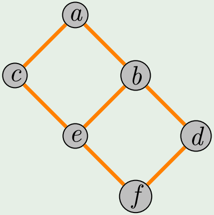
在下图中给出的几个格, 哪个是分配格?



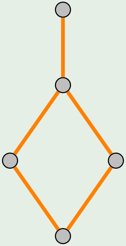
(a) (b) (c)

练习

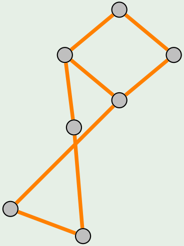
在下图中给出的几个格, 哪个是分配格?



(a)

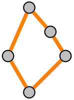


(b)



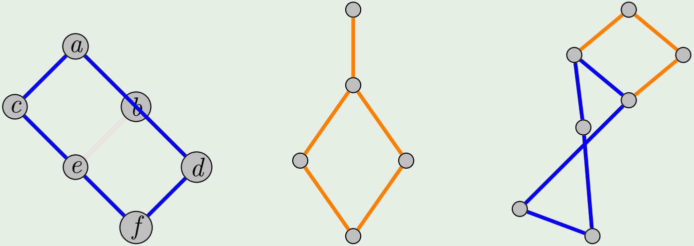
(c)

解 图 (b) 是分配格.

图 (a), (c) 中都有子格与  同构, 所以图 (a), (c) 不是分配格. □

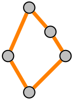
练习

在下图中给出的几个格, 哪个是分配格?



(a) (b) (c)

解 图 (b) 是分配格.

图 (a), (c) 中都有子格与  同构, 所以图 (a), (c) 不是分配格. □

格的全下界、全上界

Definition 3.11

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是格, 如果存在元素 $a \in A$, 对任意 $x \in A$, 都有

$$a \preccurlyeq x,$$

则称 a 为格 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 的全下界. 格的全下界记为 0.

格的全下界、全上界

Definition 3.11

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是格, 如果存在元素 $a \in A$, 对任意 $x \in A$, 都有

$$a \preccurlyeq x,$$

则称 a 为格 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 的全下界. 格的全下界记为 0.

Definition 3.12

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是格, 如果存在元素 $a \in A$, 对任意 $x \in A$, 都有

$$x \preccurlyeq a,$$

则称 a 为格 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 的全上界. 格的全上界记为 1.

格的全下界、全上界

Theorem 3.13

格的全下界 (全上界) 如果存在, 则必惟一.

格的全下界、全上界

Theorem 3.13

格的全下界 (全上界) 如果存在, 则必惟一.

证 假设格 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 有两个全下界 a 和 b.

Theorem 3.13

格的全下界 (全上界) 如果存在, 则必惟一.

证 假设格 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 有两个全下界 a 和 b. 那么按全下界的定义, 应有

$$a \preccurlyeq b \text{ 和 } b \preccurlyeq a$$

同时成立,

格的全下界、全上界

Theorem 3.13

格的全下界 (全上界) 如果存在, 则必惟一.

证 假设格 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 有两个全下界 a 和 b. 那么按全下界的定义, 应有

$$a \preccurlyeq b \text{ 和 } b \preccurlyeq a$$

同时成立, 从而

$$a = b.$$

□

有界格

Definition 3.14

具有全下界和全上界的格称为有界格.

有界格

Definition 3.14

具有全下界和全上界的格称为有界格.

Example 3.15

设 S 是有限集合, 那么格 $\langle \mathscr{P}(S), \subseteq \rangle$ 是有界格, 其全下界是 $\varnothing$, 全上界是 S.

有界格

Definition 3.14

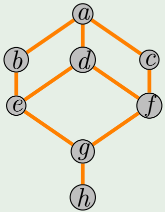
具有全下界和全上界的格称为有界格.

Example 3.15

设 S 是有限集合, 那么格 $\langle \mathscr{P}(S), \subseteq \rangle$ 是有界格, 其全下界是 $\varnothing$, 全上界是 S.

Example 3.16

如图所示的格中, h 是全下界, a 是全上界. 该格是有界格.



Theorem 3.17

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是有界格, 则对任意 $a \in A$, 必有

$$a \vee 1 = 1, \qquad a \wedge 1 = a; \tag{23}$$

$$a \vee 0 = a, \qquad a \wedge 0 = 0. \tag{24}$$

Theorem 3.17

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是有界格, 则对任意 $a \in A$, 必有

$$a \vee 1 = 1, \qquad a \wedge 1 = a; \tag{23}$$

$$a \vee 0 = a, \qquad a \wedge 0 = 0. \tag{24}$$

证 因 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是有界格, 对任意 $a \in A$, 应有 $0 \preccurlyeq a \preccurlyeq 1$.

Theorem 3.17

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是有界格, 则对任意 $a \in A$, 必有

$$a \vee 1 = 1, \qquad a \wedge 1 = a; \tag{23}$$

$$a \vee 0 = a, \qquad a \wedge 0 = 0. \tag{24}$$

证 因 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是有界格, 对任意 $a \in A$, 应有 $0 \preccurlyeq a \preccurlyeq 1$. 再由格的性质, 即可得:

$$a \vee 1 = 1, \qquad a \wedge 1 = a;$$

$$a \vee 0 = a, \qquad a \wedge 0 = 0.$$

□

Theorem 3.17

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是有界格, 则对任意 $a \in A$, 必有

$$a \vee 1 = 1, \qquad a \wedge 1 = a; \tag{23}$$

$$a \vee 0 = a, \qquad a \wedge 0 = 0. \tag{24}$$

注

- 运算 $\vee$ 的零元和幺元分别为 1 和 0.

Theorem 3.17

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是有界格, 则对任意 $a \in A$, 必有

$$a \vee 1 = 1, \qquad a \wedge 1 = a; \tag{23}$$

$$a \vee 0 = a, \qquad a \wedge 0 = 0. \tag{24}$$

注

- 运算 $\vee$ 的零元和幺元分别为 1 和 0.
  - $a \vee 1 = 1 \vee a = 1 \quad \Rightarrow \quad 1$ 是 $\vee$ 的零元;

Theorem 3.17

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是有界格, 则对任意 $a \in A$, 必有

$$a \vee 1 = 1, \qquad a \wedge 1 = a; \tag{23}$$

$$a \vee 0 = a, \qquad a \wedge 0 = 0. \tag{24}$$

注

- 运算 $\vee$ 的零元和幺元分别为 1 和 0.
  - $a \vee 1 = 1 \vee a = 1 \;\Rightarrow\; 1$ 是 $\vee$ 的零元;
  - $a \vee 0 = 0 \vee a = a \;\Rightarrow\; 0$ 是 $\vee$ 的幺元.

Theorem 3.17

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是有界格，则对任意 $a \in A$，必有

$$a \vee 1 = 1, \qquad a \wedge 1 = a; \tag{23}$$

$$a \vee 0 = a, \qquad a \wedge 0 = 0. \tag{24}$$

注

- 运算 $\vee$ 的零元和幺元分别为 1 和 0.
  - $a \vee 1 = 1 \vee a = 1 \quad \Rightarrow \quad 1$ 是 $\vee$ 的零元;
  - $a \vee 0 = 0 \vee a = a \quad \Rightarrow \quad 0$ 是 $\vee$ 的幺元.
- 运算 $\wedge$ 的零元和幺元分别为 0 和 1.

Theorem 3.17

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是有界格，则对任意 $a \in A$，必有

$$a \vee 1 = 1, \qquad a \wedge 1 = a; \tag{23}$$

$$a \vee 0 = a, \qquad a \wedge 0 = 0. \tag{24}$$

注

- 运算 $\vee$ 的零元和幺元分别为 1 和 0.
  - $a \vee 1 = 1 \vee a = 1 \quad \Rightarrow \quad 1$ 是 $\vee$ 的零元;
  - $a \vee 0 = 0 \vee a = a \quad \Rightarrow \quad 0$ 是 $\vee$ 的幺元.
- 运算 $\wedge$ 的零元和幺元分别为 0 和 1.
  - $a \wedge 0 = 0 \wedge a = 0 \quad \Rightarrow \quad 0$ 是 $\wedge$ 的零元;

Theorem 3.17

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是有界格，则对任意 $a \in A$，必有

$$a \vee 1 = 1, \qquad a \wedge 1 = a; \tag{23}$$

$$a \vee 0 = a, \qquad a \wedge 0 = 0. \tag{24}$$

注

- 运算 $\vee$ 的零元和幺元分别为 1 和 0.
  - $a \vee 1 = 1 \vee a = 1 \quad \Rightarrow \quad 1$ 是 $\vee$ 的零元;
  - $a \vee 0 = 0 \vee a = a \quad \Rightarrow \quad 0$ 是 $\vee$ 的幺元.
- 运算 $\wedge$ 的零元和幺元分别为 0 和 1.
  - $a \wedge 0 = 0 \wedge a = 0 \quad \Rightarrow \quad 0$ 是 $\wedge$ 的零元;
  - $a \wedge 1 = 1 \wedge a = a \quad \Rightarrow \quad 1$ 是 $\wedge$ 的幺元.

补元

Definition 3.18

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是有界格, 对 $a \in A$, 若存在 $b \in A$, 使

$$a \vee b = 1, \qquad a \wedge b = 0,$$

则称 b 是 a 的补元.

Definition 3.18

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是有界格, 对 $a \in A$, 若存在 $b \in A$, 使

$$a \vee b = 1, \qquad a \wedge b = 0,$$

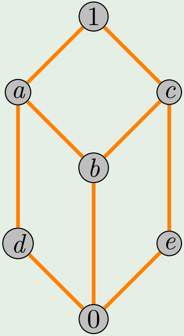
则称 b 是 a 的补元.

Example 3.19

设 S 是有限集合, 对有界格 $\langle \mathscr{P}(S), \subseteq \rangle$, 其全下界是 $\varnothing$, 全上界是 S. 任意 $A \in \mathscr{P}(S)$, A 的补元是 $S - A$.

补元

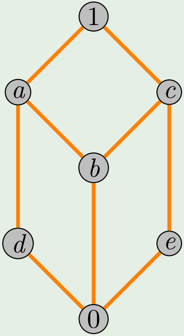
Example 3.20



如图所示有界格中,

- d 和 c, d 和 e, a 和 e, 0 和 1 互为补元, 即 a, c, d, e, 0, 1 都有补元.

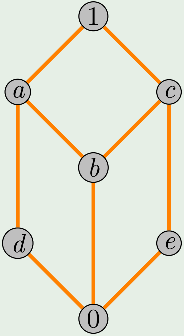
Example 3.20



如图所示有界格中,

- d 和 c, d 和 e, a 和 e, 0 和 1 互为补元, 即 a, c, d, e, 0, 1 都有补元.
- 但 b 没有补元.

Example 3.20

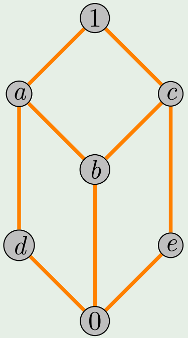


如图所示有界格中,

- d 和 c, d 和 e, a 和 e, 0 和 1 互为补元, 即 a, c, d, e, 0, 1 都有补元.
- 但 b 没有补元.
- 一个元的补元可以有多个: 例如, d, e 有两个补元;

补元

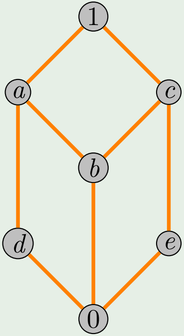
Example 3.20



如图所示有界格中,

- d 和 c, d 和 e, a 和 e, 0 和 1 互为补元, 即 a, c, d, e, 0, 1 都有补元.
- 但 b 没有补元.
- 一个元的补元可以有多个: 例如, d, e 有两个补元;
- 0 是 1 惟一的补元; 1 是 0 惟一的补元.

Example 3.20



如图所示有界格中,

- d 和 c, d 和 e, a 和 e, 0 和 1 互为补元, 即 a, c, d, e, 0, 1 都有补元.
- 但 b 没有补元.
- 一个元的补元可以有多个: 例如, d, e 有两个补元;
- 0 是 1 惟一的补元; 1 是 0 惟一的补元.

对于元素 $a \in A$, 可以存在多个补元, 也可以不存在补元.

有补格

Definition 3.21

在一个有界格中, 如果每个元素至少有一个补元, 则称此格为有补格.

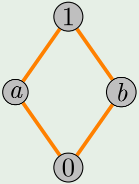
有补格

Definition 3.21

在一个有界格中, 如果每个元素至少有一个补元, 则称此格为有补格.

Example 3.22

如下是一些有补格的例子.



(a)

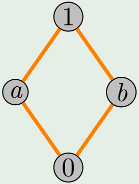
有补格

Definition 3.21

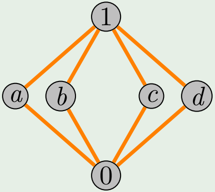
在一个有界格中, 如果每个元素至少有一个补元, 则称此格为有补格.

Example 3.22

如下是一些有补格的例子.



(a)



(b)

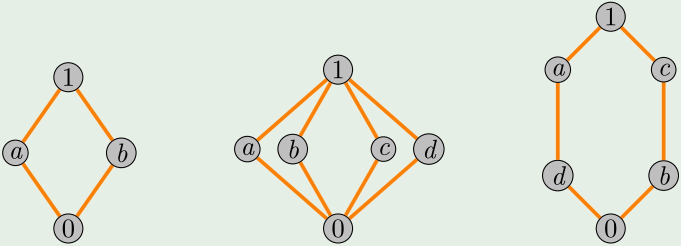
有补格

Definition 3.21

在一个有界格中, 如果每个元素至少有一个补元, 则称此格为有补格.

Example 3.22

如下是一些有补格的例子.



(a) (b) (c)

Theorem 3.23

在有界分配格中, 若某元素有补元, 则必惟一.

Theorem 3.23

在有界分配格中, 若某元素有补元, 则必惟一.

证 设 a 有补元 b, c, 则有

$$a \vee b = 1, \qquad a \wedge b = 0; \tag{25}$$

$$a \vee c = 1, \qquad a \wedge c = 0. \tag{26}$$

Theorem 3.23

在有界分配格中, 若某元素有补元, 则必惟一.

证　设 a 有补元 b, c, 则有

$$a \vee b = 1, \qquad a \wedge b = 0; \tag{25}$$

$$a \vee c = 1, \qquad a \wedge c = 0. \tag{26}$$

那么,

$$a \vee b = a \vee c, \qquad a \wedge b = a \wedge c,$$

Theorem 3.23

在有界分配格中，若某元素有补元，则必惟一.

证 设 a 有补元 b, c, 则有

$$a \vee b = 1, \qquad a \wedge b = 0; \tag{25}$$

$$a \vee c = 1, \qquad a \wedge c = 0. \tag{26}$$

那么,

$$a \vee b = a \vee c, \qquad a \wedge b = a \wedge c,$$

由分配格的性质得

$$b = c. \qquad \square$$

Theorem 3.23

在有界分配格中, 若某元素有补元, 则必惟一.

证 设 a 有补元 b, c, 则有

$$a \vee b = 1, \qquad a \wedge b = 0; \tag{25}$$

$$a \vee c = 1, \qquad a \wedge c = 0. \tag{26}$$

那么,

$$a \vee b = a \vee c, \qquad a \wedge b = a \wedge c,$$

由分配格的性质得

$$b = c.$$

□

注

- 当补元惟一时, 我们通常用 x', $\overline{x}$ 或 $\neg x$ 表示 x 的补元.

Theorem 3.23

在有界分配格中, 若某元素有补元, 则必惟一.

证 设 a 有补元 b, c, 则有

$$a \vee b = 1, \qquad a \wedge b = 0; \tag{25}$$

$$a \vee c = 1, \qquad a \wedge c = 0. \tag{26}$$

那么,

$$a \vee b = a \vee c, \qquad a \wedge b = a \wedge c,$$

由分配格的性质得

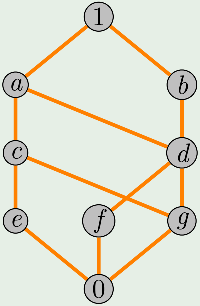
$$b = c.$$

□

注

- 当补元惟一时, 我们通常用 x', $\bar{x}$ 或 $\neg x$ 表示 x 的补元.
- 注意到有补格是有界格, 故有补分配格中, 每个元素必有惟一的补元.

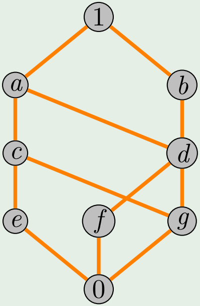
练习



试根据如图所示有界格, 回答以下问题.

- a 和 f 的补元素分别是哪些元素?
- 该有界格是分配格吗?
- 该有界格是有补格吗?

练习



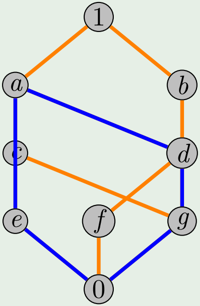
试根据如图所示有界格, 回答以下问题.

- a 和 f 的补元素分别是哪些元素?
- 该有界格是分配格吗?
- 该有界格是有补格吗?

解

- a 和 f 都没有补元;

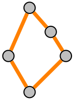
练习



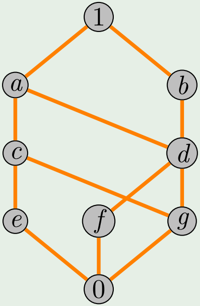
试根据如图所示有界格, 回答以下问题.

- a 和 f 的补元素分别是哪些元素?
- 该有界格是分配格吗?
- 该有界格是有补格吗?

解

- a 和 f 都没有补元;
- 该有界格不是是分配格: 有子格与  同构;

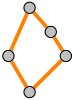
练习



试根据如图所示有界格, 回答以下问题.

- a 和 f 的补元素分别是哪些元素?
- 该有界格是分配格吗?
- 该有界格是有补格吗?

解

- a 和 f 都没有补元;
- 该有界格不是是分配格: 有子格与  同构;
- 该有界格不是有补格.

□

布尔代数 (或布尔格) 是抽象了集合运算和逻辑运算二者的根本性质的一个代数结构.

在这一节中将证明:

任何一个有限布尔代数必定与格 $\langle \mathscr{P}(S), \subseteq \rangle$ 所诱导的代数系统同构.

主要内容

布尔代数 (或布尔格) 是抽象了集合运算和逻辑运算二者的根本性质的一个代数结构.

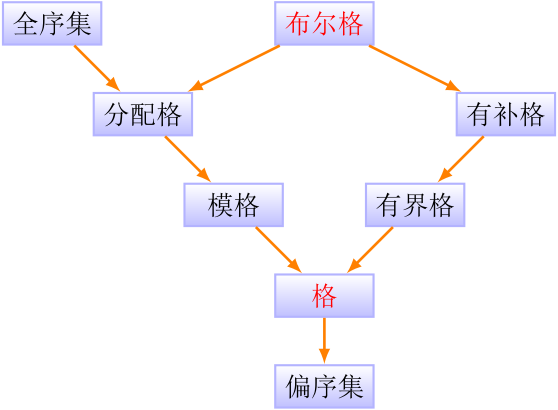
在这一节中将证明:

任何一个有限布尔代数必定与格 $\langle \mathscr{P}(S), \subseteq \rangle$ 所诱导的代数系统同构.

Definition 4.1

一个有补分配格称为布尔格(**Boolean lattice**).

概念之间的关系



布尔代数

注意到有补分配格 (布尔格) 的每个元素有补元, 且惟一.

在布尔格 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 上可以确定一个一元运算, 记为 "$^{-}$", 使得 $\overline{a}$ 为 a 的补元. 这个一元运算称为补运算.

布尔代数

注意到有补分配格 (布尔格) 的每个元素有补元, 且惟一.

在布尔格 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 上可以确定一个一元运算, 记为 "$^{-}$", 使得 $\bar{a}$ 为 a 的补元. 这个一元运算称为补运算.

Definition 4.2

由布尔格 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$, 可以诱导一个代数系统 $\langle A, \vee, \wedge, ^{-} \rangle$, 这个代数系统称为布尔代数(**Boolean lattice**).

布尔代数

注意到有补分配格 (布尔格) 的每个元素有补元, 且惟一.

在布尔格 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 上可以确定一个一元运算, 记为 "$^-$", 使得 $\bar{a}$ 为 a 的补元. 这个一元运算称为补运算.

Definition 4.2

由布尔格 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$, 可以诱导一个代数系统 $\langle A, \vee, \wedge, ^- \rangle$, 这个代数系统称为布尔代数(**Boolean lattice**).

☞ 为了强调布尔代数中的最小元 0 和最大元 1, 也记布尔代数为 $\langle A, \vee, \wedge, ^-, 0, 1 \rangle$.

布尔代数

注意到有补分配格 (布尔格) 的每个元素有补元, 且惟一.

在布尔格 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 上可以确定一个一元运算, 记为 "$^{-}$", 使得 $\bar{a}$ 为 a 的补元. 这个一元运算称为补运算.

Definition 4.2

由布尔格 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$, 可以诱导一个代数系统 $\langle A, \vee, \wedge, ^{-} \rangle$, 这个代数系统称为布尔代数(**Boolean lattice**).

☞ 为了强调布尔代数中的最小元 0 和最大元 1, 也记布尔代数为 $\langle A, \vee, \wedge, ^{-}, 0, 1 \rangle$.

Example 4.3

设 S 是非空有限集合, 则 $\langle \mathscr{P}(S), \subseteq \rangle$ 是一个布尔格.

布尔代数

注意到有补分配格 (布尔格) 的每个元素有补元, 且惟一.

在布尔格 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 上可以确定一个一元运算, 记为 "$^-$", 使得 $\bar{a}$ 为 a 的补元. 这个一元运算称为补运算.

Definition 4.2

由布尔格 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$, 可以诱导一个代数系统 $\langle A, \vee, \wedge, ^- \rangle$, 这个代数系统称为布尔代数(**Boolean lattice**).

☞ 为了强调布尔代数中的最小元 0 和最大元 1, 也记布尔代数为 $\langle A, \vee, \wedge, ^-, 0, 1 \rangle$.

Example 4.3

设 S 是非空有限集合, 则 $\langle \mathscr{P}(S), \subseteq \rangle$ 是一个布尔格. 而由这个布尔格所诱导的代数系统 $\langle \mathscr{P}(S), \cup, \cap, \ \sim \rangle$ 是一个布尔代数.

布尔代数的等价定义

Definition 4.4

布尔代数是一个集合 A, 提供了两个二元运算 $\wedge, \vee$, 一个一元运算 $\neg$ 和两个元素 0 和 1, 对于集合 A 的任意元素 a, b 和 c, 满足

1. 结合律: $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$, $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$;
2. 交换律: $a \vee b = b \vee a$, $a \wedge b = b \wedge a$;
3. 吸收律: $a \vee (a \wedge b) = a$, $a \wedge (a \vee b) = a$;
4. 分配律: $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$, $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$;
5. 互补律: $a \vee \neg a = 1$, $a \wedge \neg a = 0$.

布尔代数的等价定义

Definition 4.4

布尔代数是一个集合 A, 提供了两个二元运算 $\wedge$, $\vee$, 一个一元运算 $\neg$ 和两个元素 0 和 1, 对于集合 A 的任意元素 a, b 和 c, 满足

1. 结合律: $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$, $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$;
2. 交换律: $a \vee b = b \vee a$, $a \wedge b = b \wedge a$;
3. 吸收律: $a \vee (a \wedge b) = a$, $a \wedge (a \vee b) = a$;
4. 分配律: $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$, $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$;
5. 互补律: $a \vee \neg a = 1$, $a \wedge \neg a = 0$.

☞ 前三条就是格的定义; 加上后面两条, 说明布尔代数是有补分配格.

Example 4.5

最简单的布尔代数只有两个元素 0 和 1, 其运算表为:

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

a	$\neg a$
0	1
1	0

Example 4.5

最简单的布尔代数只有两个元素 0 和 1, 其运算表为:

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

a	$\neg a$
0	1
1	0

☞ 应用于逻辑和电路设计.

Theorem 4.6

设 a, b 是布尔代数中任意两个元素, 则

$$\overline{(\overline{a})} = a; \tag{27}$$

$$\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}; \tag{28}$$

$$\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}. \tag{29}$$

Theorem 4.6

设 a, b 是布尔代数中任意两个元素, 则

$$\overline{(\overline{a})} = a; \tag{27}$$

$$\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}; \tag{28}$$

$$\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}. \tag{29}$$

证 ① 按定义, a 与 $\overline{a}$ 互补, 所以 $\overline{a}$ 的补元是 a, 即

$$\overline{(\overline{a})} = a. \tag{30}$$

Theorem 4.6

设 a, b 是布尔代数中任意两个元素，则

$$\overline{(\overline{a})} = a; \tag{27}$$

$$\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}; \tag{28}$$

$$\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}. \tag{29}$$

证 ② 可直接验证 $a \vee b$ 的补元是 $(\overline{a} \wedge \overline{b})$:

Theorem 4.6

设 a, b 是布尔代数中任意两个元素, 则

$$\overline{(\overline{a})} = a; \tag{27}$$

$$\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}; \tag{28}$$

$$\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}. \tag{29}$$

证 ② 可直接验证 $a \vee b$ 的补元是 $(\overline{a} \wedge \overline{b})$:

$$(a \vee b) \vee (\overline{a} \wedge \overline{b}) = (a \vee b \vee \overline{a}) \wedge (a \vee b \vee \overline{b}) \qquad \text{(分配律)}$$

Theorem 4.6

设 a, b 是布尔代数中任意两个元素, 则

$$\overline{(\overline{a})} = a; \tag{27}$$

$$\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}; \tag{28}$$

$$\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}. \tag{29}$$

证 ② 可直接验证 $a \vee b$ 的补元是 $(\overline{a} \wedge \overline{b})$:

$$(a \vee b) \vee (\overline{a} \wedge \overline{b}) = (a \vee b \vee \overline{a}) \wedge (a \vee b \vee \overline{b}) \quad \text{(分配律)}$$

$$= (1 \vee b) \wedge (a \vee 1)$$

Theorem 4.6

设 a, b 是布尔代数中任意两个元素，则

$$\overline{(\overline{a})} = a; \tag{27}$$

$$\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}; \tag{28}$$

$$\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}. \tag{29}$$

证 ② 可直接验证 $a \vee b$ 的补元是 $(\overline{a} \wedge \overline{b})$:

$$\begin{aligned}(a \vee b) \vee (\overline{a} \wedge \overline{b}) &= (a \vee b \vee \overline{a}) \wedge (a \vee b \vee \overline{b}) \qquad \text{(分配律)} \\ &= (1 \vee b) \wedge (a \vee 1) \\ &= 1 \wedge 1 = 1,\end{aligned}$$

Theorem 4.6

设 a, b 是布尔代数中任意两个元素, 则

$$\overline{(\overline{a})} = a; \tag{27}$$

$$\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}; \tag{28}$$

$$\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}. \tag{29}$$

证 ② 可直接验证 $a \vee b$ 的补元是 $(\overline{a} \wedge \overline{b})$:

$$\begin{aligned}(a \vee b) \vee (\overline{a} \wedge \overline{b}) &= (a \vee b \vee \overline{a}) \wedge (a \vee b \vee \overline{b}) && \text{(分配律)}\\ &= (1 \vee b) \wedge (a \vee 1)\\ &= 1 \wedge 1 = 1,\\ (a \vee b) \wedge (\overline{a} \wedge \overline{b}) &= (a \wedge \overline{a} \wedge \overline{b}) \vee (b \wedge \overline{a} \wedge \overline{b})\end{aligned}$$

Theorem 4.6

设 a, b 是布尔代数中任意两个元素, 则

$$\overline{(\overline{a})} = a; \tag{27}$$

$$\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}; \tag{28}$$

$$\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}. \tag{29}$$

证 ② 可直接验证 $a \vee b$ 的补元是 $(\overline{a} \wedge \overline{b})$:

$$\begin{aligned}
(a \vee b) \vee (\overline{a} \wedge \overline{b}) &= (a \vee b \vee \overline{a}) \wedge (a \vee b \vee \overline{b}) && \text{(分配律)} \\
&= (1 \vee b) \wedge (a \vee 1) \\
&= 1 \wedge 1 = 1, \\
(a \vee b) \wedge (\overline{a} \wedge \overline{b}) &= (a \wedge \overline{a} \wedge \overline{b}) \vee (b \wedge \overline{a} \wedge \overline{b}) \\
&= (0 \wedge \overline{b}) \vee (\overline{a} \wedge 0)
\end{aligned}$$

Theorem 4.6

设 a, b 是布尔代数中任意两个元素，则

$$\overline{(\overline{a})} = a; \tag{27}$$

$$\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}; \tag{28}$$

$$\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}. \tag{29}$$

证 ② 可直接验证 $a \vee b$ 的补元是 $(\overline{a} \wedge \overline{b})$:

$$\begin{aligned}
(a \vee b) \vee (\overline{a} \wedge \overline{b}) &= (a \vee b \vee \overline{a}) \wedge (a \vee b \vee \overline{b}) && \text{(分配律)} \\
&= (1 \vee b) \wedge (a \vee 1) \\
&= 1 \wedge 1 = 1, \\
(a \vee b) \wedge (\overline{a} \wedge \overline{b}) &= (a \wedge \overline{a} \wedge \overline{b}) \vee (b \wedge \overline{a} \wedge \overline{b}) \\
&= (0 \wedge \overline{b}) \vee (\overline{a} \wedge 0) \\
&= 0 \vee 0 = 0.
\end{aligned}$$

Theorem 4.6

设 a, b 是布尔代数中任意两个元素, 则

$$\overline{(\overline{a})} = a; \tag{27}$$

$$\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}; \tag{28}$$

$$\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}. \tag{29}$$

证 ② 可直接验证 $a \vee b$ 的补元是 $(\overline{a} \wedge \overline{b})$:

$$\begin{aligned}
(a \vee b) \vee (\overline{a} \wedge \overline{b}) &= (a \vee b \vee \overline{a}) \wedge (a \vee b \vee \overline{b}) && \text{(分配律)}\\
&= (1 \vee b) \wedge (a \vee 1)\\
&= 1 \wedge 1 = 1,\\
(a \vee b) \wedge (\overline{a} \wedge \overline{b}) &= (a \wedge \overline{a} \wedge \overline{b}) \vee (b \wedge \overline{a} \wedge \overline{b})\\
&= (0 \wedge \overline{b}) \vee (\overline{a} \wedge 0)\\
&= 0 \vee 0 = 0.
\end{aligned}$$

所以 $\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}$. 同理可证 (29) 式. □

布尔代数的同构

Definition 4.7

设 $\langle A, \vee, \wedge, ^{-} \rangle$ 和 $\langle B, \vee, \wedge, ^{-} \rangle$ 是两个布尔代数, 如果存在双射 $f\colon A \to B$, 对任意 a, $b \in A$, 有

$$f(a \vee b) = f(a) \vee f(b) \tag{30}$$

$$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b) \tag{31}$$

$$f(\overline{a}) = \overline{f(a)} \tag{32}$$

则称 $\langle A, \vee, \wedge, ^{-} \rangle$ 和 $\langle B, \vee, \wedge, ^{-} \rangle$ 同构.

有限布尔代数

Definition 5.1

具有有限个元素的布尔代数叫有限布尔代数.

有限布尔代数

Definition 5.1

具有有限个元素的布尔代数叫有限布尔代数.

注

关于有限布尔代数有如下重要结论:

- 对任一正整数 n, 必存在含有 2^n 个元素的布尔代数.

有限布尔代数

Definition 5.1

具有有限个元素的布尔代数叫有限布尔代数.

注

关于有限布尔代数有如下重要结论:

- 对任一正整数 n, 必存在含有 2^n 个元素的布尔代数.
- 任一有限布尔代数的元素的个数必为 2^n, n 为正整数.

有限布尔代数

Definition 5.1

具有有限个元素的布尔代数叫有限布尔代数.

注

关于有限布尔代数有如下重要结论:

- 对任一正整数 n, 必存在含有 2^n 个元素的布尔代数.
- 任一有限布尔代数的元素的个数必为 2^n, n 为正整数.
- 元素个数相同的布尔代数, 都是同构的.

有限布尔代数

Definition 5.1

具有有限个元素的布尔代数叫有限布尔代数.

注

关于有限布尔代数有如下重要结论:

- 对任一正整数 n, 必存在含有 2^n 个元素的布尔代数.
- 任一有限布尔代数的元素的个数必为 2^n, n 为正整数.
- 元素个数相同的布尔代数, 都是同构的.

为了证明上述关于有限布尔代数的结论, 先引入原子的概念.

原子

Definition 5.2

设格 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 具有全下界 0, 如果有元素 a 盖住[a] 0, 则称元素 a 为原子.

[a]在偏序集 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 中, $\forall x, y \in A$, 如果 $x \preccurlyeq y$, $x \neq y$, 且不存在 $z \in A$ 使得 $x \preccurlyeq z \preccurlyeq y$, 则称 y 盖住 x. (见第二章)

原子

Definition 5.2

设格 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 具有全下界 0, 如果有元素 a 盖住[a] 0, 则称元素 a 为原子.

[a]在偏序集 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 中, $\forall x, y \in A$, 如果 $x \preccurlyeq y$, $x \neq y$, 且不存在 $z \in A$ 使得 $x \preccurlyeq z \preccurlyeq y$, 则称 y 盖住 x. (见第二章)

注

如果 a, b 皆为原子, $a \neq b$, 则 $a \wedge b = 0$.

原子

Definition 5.2

设格 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 具有全下界 0, 如果有元素 a 盖住[a] 0, 则称元素 a 为原子.

---

[a] 在偏序集 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 中, $\forall x, y \in A$, 如果 $x \preccurlyeq y$, $x \neq y$, 且不存在 $z \in A$ 使得 $x \preccurlyeq z \preccurlyeq y$, 则称 y 盖住 x. (见第二章)

注

如果 a, b 皆为原子, $a \neq b$, 则 $a \wedge b = 0$.

因为, 若 $a \wedge b \neq 0$, 则

$$0 \preccurlyeq a \wedge b \preccurlyeq a \ (\text{或}\ b),$$

原子

Definition 5.2

设格 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 具有全下界 0, 如果有元素 a 盖住[a] 0, 则称元素 a 为原子.

[a] 在偏序集 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 中, $\forall x, y \in A$, 如果 $x \preccurlyeq y$, $x \neq y$, 且不存在 $z \in A$ 使得 $x \preccurlyeq z \preccurlyeq y$, 则称 y 盖住 x. (见第二章)

注

如果 a, b 皆为原子, $a \neq b$, 则 $a \wedge b = 0$.

因为, 若 $a \wedge b \neq 0$, 则

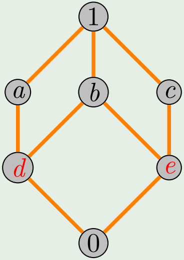
$$0 \preccurlyeq a \wedge b \preccurlyeq a\ (\text{或 } b),$$

则 a 和 b 没有盖住 0, 导致 " a 和 b 不是原子" 的矛盾.

原子

Example 5.3

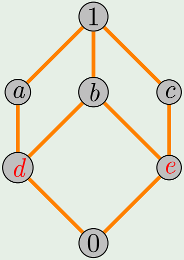
例如, 如图所示格中, 元素 d, e 是原子.



原子

Example 5.3

例如, 如图所示格中, 元素 d, e 是原子.



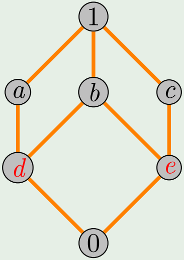
☞ 可见

- 原子不是惟一的.

原子

Example 5.3

例如, 如图所示格中, 元素 d, e 是原子.



☞ 可见

- 原子不是惟一的.
- 一个元素可以盖住多个元素. 例如, 1 盖住 a, b, c; b 盖住 d, e.

Theorem 5.4

设 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 是一个具有全下界 0 的有限格. 若 $b \neq 0$, 则至少存在一个原子 a, 使得 $a \preccurlyeq b$.

Theorem 5.4

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是一个具有全下界 0 的有限格. 若 $b \neq 0$, 则至少存在一个原子 a, 使得 $a \preccurlyeq b$.

证 如果 b 本身为原子, 因 $b \preccurlyeq b$, 命题得证.

Theorem 5.4

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是一个具有全下界 0 的有限格. 若 $b \neq 0$, 则至少存在一个原子 a, 使得 $a \preccurlyeq b$.

证 如果 b 本身为原子, 因 $b \preccurlyeq b$, 命题得证.

如果 b 不是原子, 按盖住的定义, 必存在 $b_1 \in A$, 使得

$$0 \prec b_1 \prec b.$$

Theorem 5.4

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是一个具有全下界 0 的有限格. 若 $b \neq 0$, 则至少存在一个原子 a, 使得 $a \preccurlyeq b$.

证 如果 b 本身为原子, 因 $b \preccurlyeq b$, 命题得证.

如果 b 不是原子, 按盖住的定义, 必存在 $b_1 \in A$, 使得

$$0 \prec b_1 \prec b.$$

若 b_1 为原子, 命题得证.

Theorem 5.4

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是一个具有全下界 0 的有限格. 若 $b \neq 0$, 则至少存在一个原子 a, 使得 $a \preccurlyeq b$.

证 如果 b 本身为原子, 因 $b \preccurlyeq b$, 命题得证.

如果 b 不是原子, 按盖住的定义, 必存在 $b_1 \in A$, 使得

$$0 \prec b_1 \prec b.$$

若 b_1 为原子, 命题得证. 否则, 必存在 $b_2 \in A$, 使

$$0 \prec b_2 \prec b_1 \prec b.$$

Theorem 5.4

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是一个具有全下界 0 的有限格. 若 $b \neq 0$, 则至少存在一个原子 a, 使得 $a \preccurlyeq b$.

证 如果 b 本身为原子, 因 $b \preccurlyeq b$, 命题得证.

如果 b 不是原子, 按盖住的定义, 必存在 $b_1 \in A$, 使得

$$0 \prec b_1 \prec b.$$

若 b_1 为原子, 命题得证. 否则, 必存在 $b_2 \in A$, 使

$$0 \prec b_2 \prec b_1 \prec b.$$

因为 A 是有限集合, 经过上述有限的步骤之后, 必可找到一个原子 b_i, 使

$$0 \prec b_i \prec \cdots \prec b_2 \prec b_1 \prec b,$$

Theorem 5.4

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是一个具有全下界 0 的有限格. 若 $b \neq 0$, 则至少存在一个原子 a, 使得 $a \preccurlyeq b$.

证 如果 b 本身为原子, 因 $b \preccurlyeq b$, 命题得证.

如果 b 不是原子, 按盖住的定义, 必存在 $b_1 \in A$, 使得

$$0 \prec b_1 \prec b.$$

若 b_1 为原子, 命题得证. 否则, 必存在 $b_2 \in A$, 使

$$0 \prec b_2 \prec b_1 \prec b.$$

因为 A 是有限集合, 经过上述有限的步骤之后, 必可找到一个原子 b_i, 使

$$0 \prec b_i \prec \cdots \prec b_2 \prec b_1 \prec b,$$

它是 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 中的一条链, 其中 b_i 是原子, 且 $b_i \preccurlyeq b$. □

引理 1

在布尔格中, $b \wedge \overline{c} = 0$ 当且仅当 $b \preccurlyeq c$.

引理 1

在布尔格中, $b \wedge \overline{c} = 0$ 当且仅当 $b \preccurlyeq c$.

用集合的情形, 很容易理解这个结论:

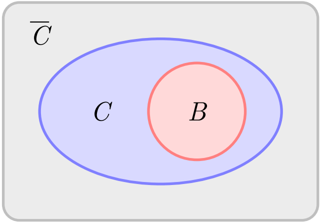


Figure : $B \cap \overline{C} = \varnothing$ 当且仅当 $B \subseteq C$.

引理 1

在布尔格中, $b \wedge \overline{c} = 0$ 当且仅当 $b \preccurlyeq c$.

证 如果 $b \wedge \overline{c} = 0$, 则

引理 1

在布尔格中, $b \wedge \overline{c} = 0$ 当且仅当 $b \preccurlyeq c$.

证 如果 $b \wedge \overline{c} = 0$, 则

$$(b \wedge \overline{c}) \vee c = 0 \vee c = c,$$

引理 1

在布尔格中, $b \wedge \overline{c} = 0$ 当且仅当 $b \preccurlyeq c$.

证 如果 $b \wedge \overline{c} = 0$, 则

$$(b \wedge \overline{c}) \vee c = 0 \vee c = c,$$

$$\text{又} \quad (b \wedge \overline{c}) \vee c = (b \vee c) \wedge (\overline{c} \vee c) \qquad \text{(分配律)}$$

引理 1

在布尔格中, $b \wedge \overline{c} = 0$ 当且仅当 $b \preccurlyeq c$.

证 如果 $b \wedge \overline{c} = 0$, 则

$$(b \wedge \overline{c}) \vee c = 0 \vee c = c,$$

$$\text{又}\quad (b \wedge \overline{c}) \vee c = (b \vee c) \wedge (\overline{c} \vee c) \qquad \text{(分配律)}$$

$$= (b \vee c) \wedge 1$$

引理 1

在布尔格中, $b\wedge\overline{c}=0$ 当且仅当 $b\preccurlyeq c$.

证 如果 $b\wedge\overline{c}=0$, 则

$$(b\wedge\overline{c})\vee c=0\vee c=c,$$

又
$$\begin{aligned}(b\wedge\overline{c})\vee c&=(b\vee c)\wedge(\overline{c}\vee c) \quad \text{(分配律)}\\ &=(b\vee c)\wedge 1\\ &=b\vee c.\end{aligned}$$

引理 1

在布尔格中, $b \wedge \overline{c} = 0$ 当且仅当 $b \preccurlyeq c$.

证 如果 $b \wedge \overline{c} = 0$, 则

$$(b \wedge \overline{c}) \vee c = 0 \vee c = c,$$

$$\text{又} \quad (b \wedge \overline{c}) \vee c = (b \vee c) \wedge (\overline{c} \vee c) \qquad \text{(分配律)}$$

$$= (b \vee c) \wedge 1$$

$$= b \vee c.$$

$$\Rightarrow \quad b \vee c = c$$

引理 1

在布尔格中, $b \wedge \overline{c} = 0$ 当且仅当 $b \preccurlyeq c$.

证 如果 $b \wedge \overline{c} = 0$, 则

$$(b \wedge \overline{c}) \vee c = 0 \vee c = c,$$

$$\text{又} \quad (b \wedge \overline{c}) \vee c = (b \vee c) \wedge (\overline{c} \vee c) \qquad \text{(分配律)}$$

$$= (b \vee c) \wedge 1$$

$$= b \vee c.$$

$$\Rightarrow \quad b \vee c = c$$

$$\Longleftrightarrow \quad b \preccurlyeq c.$$

引理 1

在布尔格中, $b \wedge \overline{c} = 0$ 当且仅当 $b \preccurlyeq c$.

证 如果 $b \wedge \overline{c} = 0$, 则

$$(b \wedge \overline{c}) \vee c = 0 \vee c = c,$$

$$\begin{aligned} \text{又}\quad (b \wedge \overline{c}) \vee c &= (b \vee c) \wedge (\overline{c} \vee c) && \text{(分配律)} \\ &= (b \vee c) \wedge 1 \\ &= b \vee c. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad b \vee c = c$$

$$\Longleftrightarrow \quad b \preccurlyeq c.$$

反之, 如果 $b \preccurlyeq c$, 则

引理 1

在布尔格中, $b \wedge \overline{c} = 0$ 当且仅当 $b \preccurlyeq c$.

证 如果 $b \wedge \overline{c} = 0$, 则

$$(b \wedge \overline{c}) \vee c = 0 \vee c = c,$$

$$\text{又} \quad (b \wedge \overline{c}) \vee c = (b \vee c) \wedge (\overline{c} \vee c) \qquad \text{(分配律)}$$

$$= (b \vee c) \wedge 1$$

$$= b \vee c.$$

$$\Rightarrow \quad b \vee c = c$$

$$\Longleftrightarrow \quad b \preccurlyeq c.$$

反之, 如果 $b \preccurlyeq c$, 则

$$b \wedge \overline{c} \preccurlyeq c \wedge \overline{c} \qquad \text{(格的保序性)}$$

引理 1

在布尔格中, $b \wedge \overline{c} = 0$ 当且仅当 $b \preccurlyeq c$.

证 如果 $b \wedge \overline{c} = 0$, 则

$$(b \wedge \overline{c}) \vee c = 0 \vee c = c,$$

$$\begin{aligned} \text{又}\quad (b \wedge \overline{c}) \vee c &= (b \vee c) \wedge (\overline{c} \vee c) \qquad \text{(分配律)} \\ &= (b \vee c) \wedge 1 \\ &= b \vee c. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad b \vee c = c$$

$$\Longleftrightarrow \quad b \preccurlyeq c.$$

反之, 如果 $b \preccurlyeq c$, 则

$$b \wedge \overline{c} \preccurlyeq c \wedge \overline{c} \qquad \text{(格的保序性)}$$

$$\Rightarrow \quad b \wedge \overline{c} \preccurlyeq 0$$

引理 1

在布尔格中, $b \wedge \overline{c} = 0$ 当且仅当 $b \preccurlyeq c$.

证 如果 $b \wedge \overline{c} = 0$, 则

$$(b \wedge \overline{c}) \vee c = 0 \vee c = c,$$

$$\text{又} \quad (b \wedge \overline{c}) \vee c = (b \vee c) \wedge (\overline{c} \vee c) \qquad \text{(分配律)}$$

$$= (b \vee c) \wedge 1$$

$$= b \vee c.$$

$$\Rightarrow \quad b \vee c = c$$

$$\Longleftrightarrow \quad b \preccurlyeq c.$$

反之, 如果 $b \preccurlyeq c$, 则

$$b \wedge \overline{c} \preccurlyeq c \wedge \overline{c} \qquad \text{(格的保序性)}$$

$$\Rightarrow \quad b \wedge \overline{c} \preccurlyeq 0$$

$$\Rightarrow \quad b \wedge \overline{c} = 0. \qquad \square$$

引理 2

设 $\langle A, \vee, \wedge, ^{-}\rangle$ 是一个有限布尔代数, 若 $b \in A$, 且 $b \neq 0$, 又设 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是 A 中满足 $a_j \preccurlyeq b$ $(j = 1, 2, \cdots, k)$ 的所有原子, 则

$$b = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k.$$

引理 2

设 $\langle A, \vee, \wedge, ^{-} \rangle$ 是一个有限布尔代数, 若 $b \in A$, 且 $b \neq 0$, 又设 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是 A 中满足 $a_j \preccurlyeq b$ $(j = 1, 2, \cdots, k)$ 的所有原子, 则

$$b = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k.$$

证 令 $c = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k$, 因 $a_j \preccurlyeq b$ $(0 \leqslant j \leqslant k)$, 所以 $c \preccurlyeq b$.

引理 2

设 $\langle A, \vee, \wedge, ^{-} \rangle$ 是一个有限布尔代数, 若 $b \in A$, 且 $b \neq 0$, 又设 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是 A 中满足 $a_j \preccurlyeq b$ $(j = 1, 2, \cdots, k)$ 的所有原子, 则

$$b = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k.$$

证 令 $c = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k$, 因 $a_j \preccurlyeq b$ $(0 \leqslant j \leqslant k)$, 所以 $c \preccurlyeq b$. 下面证明 $b \preccurlyeq c$.

引理 2

设 $\langle A, \vee, \wedge, {}^{-}\rangle$ 是一个有限布尔代数, 若 $b \in A$, 且 $b \neq 0$, 又设 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是 A 中满足 $a_j \preccurlyeq b$ $(j = 1, 2, \cdots, k)$ 的所有原子, 则

$$b = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k.$$

证 令 $c = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k$, 因 $a_j \preccurlyeq b$ $(0 \leqslant j \leqslant k)$, 所以 $c \preccurlyeq b$. 下面证明 $b \preccurlyeq c$. 根据引理 1, 只须证 $b \wedge \overline{c} = 0$.

引理 2

设 $\langle A, \vee, \wedge, ^{-}\rangle$ 是一个有限布尔代数, 若 $b \in A$, 且 $b \neq 0$, 又设 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是 A 中满足 $a_j \preccurlyeq b$ $(j = 1, 2, \cdots, k)$ 的所有原子, 则

$$b = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k.$$

证 令 $c = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k$, 因 $a_j \preccurlyeq b$ $(0 \leqslant j \leqslant k)$, 所以 $c \preccurlyeq b$. 下面证明 $b \preccurlyeq c$. 根据引理 1, 只须证 $b \wedge \overline{c} = 0$. 用反证法.

引理 2

设 $\langle A, \vee, \wedge, ^{-}\rangle$ 是一个有限布尔代数, 若 $b \in A$, 且 $b \neq 0$, 又设 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是 A 中满足 $a_j \preccurlyeq b$ $(j = 1, 2, \cdots, k)$ 的所有原子, 则

$$b = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k.$$

证 令 $c = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k$, 因 $a_j \preccurlyeq b$ $(0 \leqslant j \leqslant k)$, 所以 $c \preccurlyeq b$. 下面证明 $b \preccurlyeq c$.
根据引理 1, 只须证 $b \wedge \overline{c} = 0$. 用反证法.
假设 $b \wedge \overline{c} \neq 0$. 则存在原子 a, 使

$$a \preccurlyeq b \wedge \overline{c}.$$

引理 2

设 $\langle A, \vee, \wedge, ^{-} \rangle$ 是一个有限布尔代数, 若 $b \in A$, 且 $b \neq 0$, 又设 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是 A 中满足 $a_j \preccurlyeq b$ $(j = 1, 2, \cdots, k)$ 的所有原子, 则

$$b = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k.$$

证 令 $c = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k$, 因 $a_j \preccurlyeq b$ $(0 \leqslant j \leqslant k)$, 所以 $c \preccurlyeq b$. 下面证明 $b \preccurlyeq c$. 根据引理 1, 只须证 $b \wedge \overline{c} = 0$. 用反证法.
假设 $b \wedge \overline{c} \neq 0$. 则存在原子 a, 使

$$a \preccurlyeq b \wedge \overline{c}.$$

又 $b \wedge \overline{c} \preccurlyeq b$, $b \wedge \overline{c} \preccurlyeq \overline{c}$, 由传递性得:

$$a \preccurlyeq b, \qquad a \preccurlyeq \overline{c}.$$

引理 2

设 $\langle A, \vee, \wedge, {}^{-}\rangle$ 是一个有限布尔代数, 若 $b \in A$, 且 $b \neq 0$, 又设 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是 A 中满足 $a_j \preccurlyeq b$ $(j = 1, 2, \cdots, k)$ 的所有原子, 则

$$b = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k.$$

证 令 $c = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k$, 因 $a_j \preccurlyeq b$ $(0 \leqslant j \leqslant k)$, 所以 $c \preccurlyeq b$. 下面证明 $b \preccurlyeq c$. 根据引理 1, 只须证 $b \wedge \overline{c} = 0$. 用反证法.
假设 $b \wedge \overline{c} \neq 0$. 则存在原子 a, 使

$$a \preccurlyeq b \wedge \overline{c}.$$

又 $b \wedge \overline{c} \preccurlyeq b$, $b \wedge \overline{c} \preccurlyeq \overline{c}$, 由传递性得:

$$a \preccurlyeq b, \qquad a \preccurlyeq \overline{c}.$$

因 a 是原子, 且 $a \preccurlyeq b$, 所以

$$a \in \{a_1, a_2, \cdots, a_k\},$$

引理 2

设 $\langle A, \vee, \wedge, ^{-} \rangle$ 是一个有限布尔代数, 若 $b \in A$, 且 $b \neq 0$, 又设 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是 A 中满足 $a_j \preccurlyeq b$ $(j = 1, 2, \cdots, k)$ 的所有原子, 则

$$b = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k.$$

证 令 $c = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k$, 因 $a_j \preccurlyeq b$ $(0 \leqslant j \leqslant k)$, 所以 $c \preccurlyeq b$. 下面证明 $b \preccurlyeq c$.

根据引理 1, 只须证 $b \wedge \overline{c} = 0$. 用反证法.

假设 $b \wedge \overline{c} \neq 0$. 则存在原子 a, 使

$$a \preccurlyeq b \wedge \overline{c}.$$

又 $b \wedge \overline{c} \preccurlyeq b$, $b \wedge \overline{c} \preccurlyeq \overline{c}$, 由传递性得:

$$a \preccurlyeq b, \qquad a \preccurlyeq \overline{c}.$$

因 a 是原子, 且 $a \preccurlyeq b$, 所以

$$a \in \{a_1, a_2, \cdots, a_k\},$$

故 $a \preccurlyeq c$.

引理 2

设 $\langle A, \vee, \wedge, ^{-} \rangle$ 是一个有限布尔代数, 若 $b \in A$, 且 $b \neq 0$, 又设 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是 A 中满足 $a_j \preccurlyeq b$ $(j = 1, 2, \cdots, k)$ 的所有原子, 则

$$b = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k.$$

证 令 $c = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k$, 因 $a_j \preccurlyeq b$ $(0 \leqslant j \leqslant k)$, 所以 $c \preccurlyeq b$. 下面证明 $b \preccurlyeq c$.

根据引理 1, 只须证 $b \wedge \overline{c} = 0$. 用反证法.

假设 $b \wedge \overline{c} \neq 0$. 则存在原子 a, 使

$$a \preccurlyeq b \wedge \overline{c}.$$

又 $b \wedge \overline{c} \preccurlyeq b$, $b \wedge \overline{c} \preccurlyeq \overline{c}$, 由传递性得:

$$a \preccurlyeq b, \qquad a \preccurlyeq \overline{c}.$$

因 a 是原子, 且 $a \preccurlyeq b$, 所以

$$a \in \{a_1, a_2, \cdots, a_k\},$$

故 $a \preccurlyeq c$.

引理 2

设 $\langle A, \vee, \wedge, {}^{-}\rangle$ 是一个有限布尔代数, 若 $b \in A$, 且 $b \neq 0$, 又设 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是 A 中满足 $a_j \preccurlyeq b\ (j = 1, 2, \cdots, k)$ 的所有原子, 则

$$b = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k.$$

证 令 $c = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k$, 因 $a_j \preccurlyeq b\ (0 \leqslant j \leqslant k)$, 所以 $c \preccurlyeq b$. 下面证明 $b \preccurlyeq c$.
根据引理 1, 只须证 $b \wedge \overline{c} = 0$. 用反证法.
假设 $b \wedge \overline{c} \neq 0$. 则存在原子 a, 使

$$a \preccurlyeq b \wedge \overline{c}.$$

又 $b \wedge \overline{c} \preccurlyeq b$, $b \wedge \overline{c} \preccurlyeq \overline{c}$, 由传递性得:

$$a \preccurlyeq b, \qquad a \preccurlyeq \overline{c}.$$

因 a 是原子, 且 $a \preccurlyeq b$, 所以

$$a \in \{a_1, a_2, \cdots, a_k\},$$

故 $a \preccurlyeq c$.

引理 2

设 $\langle A, \vee, \wedge, ^{-}\rangle$ 是一个有限布尔代数, 若 $b \in A$, 且 $b \neq 0$, 又设 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是 A 中满足 $a_j \preccurlyeq b$ $(j = 1, 2, \cdots, k)$ 的所有原子, 则

$$b = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k.$$

证 令 $c = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k$, 因 $a_j \preccurlyeq b$ $(0 \leqslant j \leqslant k)$, 所以 $c \preccurlyeq b$. 下面证明 $b \preccurlyeq c$.

根据引理 1, 只须证 $b \wedge \overline{c} = 0$. 用反证法.

假设 $b \wedge \overline{c} \neq 0$. 则存在原子 a, 使

$$a \preccurlyeq b \wedge \overline{c}.$$

又 $b \wedge \overline{c} \preccurlyeq b$, $b \wedge \overline{c} \preccurlyeq \overline{c}$, 由传递性得:

$$a \preccurlyeq b, \qquad a \preccurlyeq \overline{c}.$$

因 a 是原子, 且 $a \preccurlyeq b$, 所以

$$a \in \{a_1, a_2, \cdots, a_k\},$$

故 $a \preccurlyeq c$.

引理 3

设 $\langle A, \vee, \wedge, ^{-} \rangle$ 是一个有限布尔代数, 若 $b \in A$, 且 $b \neq 0$, 又设 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是 A 中满足 $a_j \preccurlyeq b$ $(j = 1, 2, \cdots, k)$ 的所有原子, 则 $b = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k$ 是将 b 表示为原子的并的惟一形式.

引理 3

设 $\langle A, \vee, \wedge, ^{-} \rangle$ 是一个有限布尔代数, 若 $b \in A$, 且 $b \neq 0$, 又设 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是 A 中满足 $a_j \preccurlyeq b$ $(j = 1, 2, \cdots, k)$ 的所有原子, 则 $b = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k$ 是将 b 表示为原子的并的惟一形式.

证 设 b 有另一表达式: $b = a_{j_1} \vee a_{j_2} \vee \cdots \vee a_{j_t}$, 其中 a_{j_r} $(0 \leqslant r \leqslant t)$ 是原子.

引理 3

设 $\langle A, \vee, \wedge, ^{-} \rangle$ 是一个有限布尔代数, 若 $b \in A$, 且 $b \neq 0$, 又设 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是 A 中满足 $a_j \preccurlyeq b$ $(j = 1, 2, \cdots, k)$ 的所有原子, 则 $b = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k$ 是将 b 表示为原子的并的惟一形式.

证 设 b 有另一表达式: $b = a_{j_1} \vee a_{j_2} \vee \cdots \vee a_{j_t}$, 其中 a_{j_r} $(0 \leqslant r \leqslant t)$ 是原子. 于是有 $a_{j_r} \preccurlyeq b$ $(0 \leqslant r \leqslant t)$.

引理 3

设 $\langle A, \vee, \wedge, ^{-} \rangle$ 是一个有限布尔代数, 若 $b \in A$, 且 $b \neq 0$, 又设 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是 A 中满足 $a_j \preccurlyeq b$ $(j = 1, 2, \cdots, k)$ 的所有原子, 则 $b = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k$ 是将 b 表示为原子的并的惟一形式.

证 设 b 有另一表达式: $b = a_{j_1} \vee a_{j_2} \vee \cdots \vee a_{j_t}$, 其中 a_{j_r} $(0 \leqslant r \leqslant t)$ 是原子. 于是有 $a_{j_r} \preccurlyeq b$ $(0 \leqslant r \leqslant t)$.

因为已设 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是 A 中所有满足 $a_i \preccurlyeq b$ 的不同原子, 所以 $t \leqslant k$. 问题转化为证明 $t = k$.

引理 3

设 $\langle A, \vee, \wedge, {}^{-} \rangle$ 是一个有限布尔代数, 若 $b \in A$, 且 $b \neq 0$, 又设 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是 A 中满足 $a_j \preccurlyeq b$ $(j = 1, 2, \cdots, k)$ 的所有原子, 则 $b = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k$ 是将 b 表示为原子的并的惟一形式.

证 设 b 有另一表达式: $b = a_{j_1} \vee a_{j_2} \vee \cdots \vee a_{j_t}$, 其中 a_{j_r} $(0 \leqslant r \leqslant t)$ 是原子. 于是有 $a_{j_r} \preccurlyeq b$ $(0 \leqslant r \leqslant t)$.

因为已设 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是 A 中所有满足 $a_i \preccurlyeq b$ 的不同原子, 所以 $t \leqslant k$. 问题转化为证明 $t = k$.

假设 $t < k$, 则 $\exists\ a_{j_0} \in \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$, 使得 $a_{j_0} \notin \{a_{j_1}, a_{j_2}, \cdots, a_{j_t}\}$.

引理 3

设 $\langle A, \vee, \wedge, ^- \rangle$ 是一个有限布尔代数, 若 $b \in A$, 且 $b \neq 0$, 又设 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是 A 中满足 $a_j \preccurlyeq b$ $(j = 1, 2, \cdots, k)$ 的所有原子, 则 $b = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k$ 是将 b 表示为原子的并的惟一形式.

证 设 b 有另一表达式: $b = a_{j_1} \vee a_{j_2} \vee \cdots \vee a_{j_t}$, 其中 a_{j_r} $(0 \leqslant r \leqslant t)$ 是原子. 于是有 $a_{j_r} \preccurlyeq b$ $(0 \leqslant r \leqslant t)$.

因为已设 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是 A 中所有满足 $a_i \preccurlyeq b$ 的不同原子, 所以 $t \leqslant k$. 问题转化为证明 $t = k$.

假设 $t < k$, 则 $\exists\, a_{j_0} \in \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$, 使得 $a_{j_0} \notin \{a_{j_1}, a_{j_2}, \cdots, a_{j_t}\}$. 因

$$a_{j_0} \wedge (a_{j_1} \vee a_{j_2} \vee \cdots \vee a_{j_t}) = a_{j_0} \wedge (a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_{j_0} \vee \cdots \vee a_k)$$

引理 3

设 $\langle A, \vee, \wedge, \bar{\ } \rangle$ 是一个有限布尔代数, 若 $b \in A$, 且 $b \neq 0$, 又设 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是 A 中满足 $a_j \preccurlyeq b$ $(j = 1, 2, \cdots, k)$ 的所有原子, 则 $b = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k$ 是将 b 表示为原子的并的惟一形式.

证 设 b 有另一表达式: $b = a_{j_1} \vee a_{j_2} \vee \cdots \vee a_{j_t}$, 其中 a_{j_r} $(0 \leqslant r \leqslant t)$ 是原子. 于是有 $a_{j_r} \preccurlyeq b$ $(0 \leqslant r \leqslant t)$.

因为已设 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是 A 中所有满足 $a_i \preccurlyeq b$ 的不同原子, 所以 $t \leqslant k$. 问题转化为证明 $t = k$.

假设 $t < k$, 则 $\exists\ a_{j_0} \in \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$, 使得 $a_{j_0} \notin \{a_{j_1}, a_{j_2}, \cdots, a_{j_t}\}$. 因

$$
\begin{aligned}
& a_{j_0} \wedge (a_{j_1} \vee a_{j_2} \vee \cdots \vee a_{j_t}) = a_{j_0} \wedge (a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_{j_0} \vee \cdots \vee a_k) \\
\Longleftrightarrow\ & (a_{j_0} \wedge a_{j_1}) \vee (a_{j_0} \wedge a_{j_2}) \vee \cdots \vee (a_{j_0} \wedge a_{j_t}) \\
& \qquad = (a_{j_0} \wedge a_1) \vee (a_{j_0} \wedge a_2) \vee \cdots \vee (a_{j_0} \wedge a_{j_0}) \vee \cdots \vee (a_{j_0} \wedge a_k)
\end{aligned}
$$

引理 3

设 $\langle A, \vee, \wedge, ^- \rangle$ 是一个有限布尔代数, 若 $b \in A$, 且 $b \neq 0$, 又设 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是 A 中满足 $a_j \preccurlyeq b$ $(j = 1, 2, \cdots, k)$ 的所有原子, 则 $b = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k$ 是将 b 表示为原子的并的惟一形式.

证 设 b 有另一表达式: $b = a_{j_1} \vee a_{j_2} \vee \cdots \vee a_{j_t}$, 其中 a_{j_r} $(0 \leqslant r \leqslant t)$ 是原子. 于是有 $a_{j_r} \preccurlyeq b$ $(0 \leqslant r \leqslant t)$.

因为已设 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是 A 中所有满足 $a_i \preccurlyeq b$ 的不同原子, 所以 $t \leqslant k$. 问题转化为证明 $t = k$.

假设 $t < k$, 则 $\exists\, a_{j_0} \in \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$, 使得 $a_{j_0} \notin \{a_{j_1}, a_{j_2}, \cdots, a_{j_t}\}$. 因

$$a_{j_0} \wedge (a_{j_1} \vee a_{j_2} \vee \cdots \vee a_{j_t}) = a_{j_0} \wedge (a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_{j_0} \vee \cdots \vee a_k)$$

$$\Longleftrightarrow (a_{j_0} \wedge a_{j_1}) \vee (a_{j_0} \wedge a_{j_2}) \vee \cdots \vee (a_{j_0} \wedge a_{j_t})$$

$$= (a_{j_0} \wedge a_1) \vee (a_{j_0} \wedge a_2) \vee \cdots \vee (a_{j_0} \wedge a_{j_0}) \vee \cdots \vee (a_{j_0} \wedge a_k)$$

$$\Longleftrightarrow 0 \vee 0 \vee \cdots \vee 0 = 0 \vee 0 \vee \cdots \vee a_{j_0} \vee 0 \vee \cdots \vee 0$$

引理 3

设 $\langle A, \vee, \wedge, ^{-}\rangle$ 是一个有限布尔代数, 若 $b \in A$, 且 $b \neq 0$, 又设 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是 A 中满足 $a_j \preccurlyeq b$ ($j = 1, 2, \cdots, k$) 的所有原子, 则 $b = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k$ 是将 b 表示为原子的并的惟一形式.

证 设 b 有另一表达式: $b = a_{j_1} \vee a_{j_2} \vee \cdots \vee a_{j_t}$, 其中 a_{j_r} $(0 \leqslant r \leqslant t)$ 是原子. 于是有 $a_{j_r} \preccurlyeq b$ $(0 \leqslant r \leqslant t)$.

因为已设 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是 A 中所有满足 $a_i \preccurlyeq b$ 的不同原子, 所以 $t \leqslant k$. 问题转化为证明 $t = k$.

假设 $t < k$, 则 $\exists\ a_{j_0} \in \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$, 使得 $a_{j_0} \notin \{a_{j_1}, a_{j_2}, \cdots, a_{j_t}\}$. 因

$$
\begin{aligned}
& a_{j_0} \wedge (a_{j_1} \vee a_{j_2} \vee \cdots \vee a_{j_t}) = a_{j_0} \wedge (a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_{j_0} \vee \cdots \vee a_k) \\
\Longleftrightarrow\ & (a_{j_0} \wedge a_{j_1}) \vee (a_{j_0} \wedge a_{j_2}) \vee \cdots \vee (a_{j_0} \wedge a_{j_t}) \\
& \qquad = (a_{j_0} \wedge a_1) \vee (a_{j_0} \wedge a_2) \vee \cdots \vee (a_{j_0} \wedge a_{j_0}) \vee \cdots \vee (a_{j_0} \wedge a_k) \\
\Longleftrightarrow\ & 0 \vee 0 \vee \cdots \vee 0 = 0 \vee 0 \vee \cdots \vee a_{j_0} \vee 0 \vee \cdots \vee 0 \\
\Longleftrightarrow\ & a_{j_0} = 0.
\end{aligned}
$$

引理 3

设 $\langle A, \vee, \wedge, ^{-} \rangle$ 是一个有限布尔代数, 若 $b \in A$, 且 $b \neq 0$, 又设 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是 A 中满足 $a_j \preccurlyeq b\ (j = 1, 2, \cdots, k)$ 的所有原子, 则 $b = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k$ 是将 b 表示为原子的并的惟一形式.

证 设 b 有另一表达式: $b = a_{j_1} \vee a_{j_2} \vee \cdots \vee a_{j_t}$, 其中 $a_{j_r}\ (0 \leqslant r \leqslant t)$ 是原子. 于是有 $a_{j_r} \preccurlyeq b\ (0 \leqslant r \leqslant t)$.

因为已设 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是 A 中所有满足 $a_i \preccurlyeq b$ 的不同原子, 所以 $t \leqslant k$. 问题转化为证明 $t = k$.

假设 $t < k$, 则 $\exists\ a_{j_0} \in \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$, 使得 $a_{j_0} \notin \{a_{j_1}, a_{j_2}, \cdots, a_{j_t}\}$. 因

$$a_{j_0} \wedge (a_{j_1} \vee a_{j_2} \vee \cdots \vee a_{j_t}) = a_{j_0} \wedge (a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_{j_0} \vee \cdots \vee a_k)$$

$$\Longleftrightarrow (a_{j_0} \wedge a_{j_1}) \vee (a_{j_0} \wedge a_{j_2}) \vee \cdots \vee (a_{j_0} \wedge a_{j_t})$$

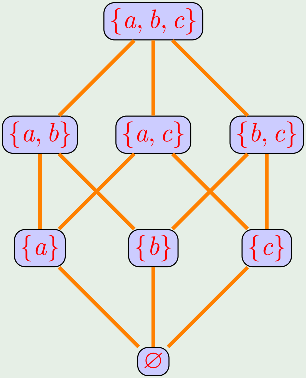
$$= (a_{j_0} \wedge a_1) \vee (a_{j_0} \wedge a_2) \vee \cdots \vee (a_{j_0} \wedge a_{j_0}) \vee \cdots \vee (a_{j_0} \wedge a_k)$$

$$\Longleftrightarrow 0 \vee 0 \vee \cdots \vee 0 = 0 \vee 0 \vee \cdots \vee a_{j_0} \vee 0 \vee \cdots \vee 0$$

$$\Longleftrightarrow a_{j_0} = 0.$$

与 a_{j_0} 是原子相矛盾, 故必有 $t = k$. □

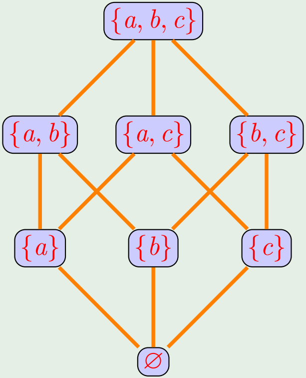
Example 5.5



比如布尔代数 $\langle \mathscr{P}(S), \cup, \cap, \sim \rangle$, 其中

$$S = \{a,\ b,\ c\}.$$

Example 5.5



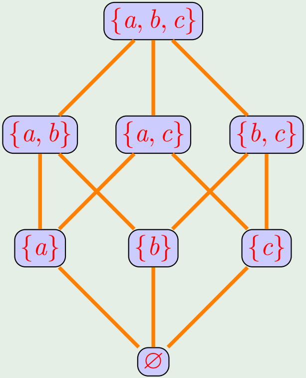
比如布尔代数 $\langle \mathscr{P}(S), \cup, \cap, \sim \rangle$, 其中

$$S = \{a,\ b,\ c\}.$$

对 $\mathscr{P}(S)$ 中的元素 $\{a,\ b\}$ 来说, $\{a\}$, $\{b\}$ 是满足 " $\preccurlyeq \{a,\ b\}$" 的所有原子, 有

$$\{a,\ b\} = \{a\} \cup \{b\}.$$

Example 5.5



比如布尔代数 $\langle \mathscr{P}(S), \cup, \cap, \sim\rangle$, 其中

$$S = \{a,\ b,\ c\}.$$

对 $\mathscr{P}(S)$ 中的元素 $\{a,\ b\}$ 来说, $\{a\}$, $\{b\}$ 是满足 "$\preccurlyeq \{a,\ b\}$" 的所有原子, 有

$$\{a,\ b\} = \{a\} \cup \{b\}.$$

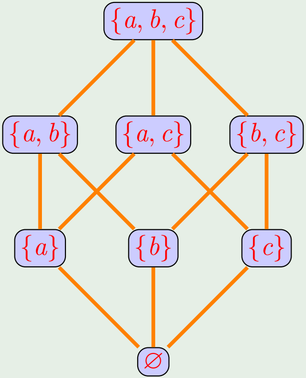
类似地,

$$\{a,\ c\} = \{a\} \cup \{c\},$$

$$\{b,\ c\} = \{b\} \cup \{c\},$$

$$\{a,\ b,\ c\} = \{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}.$$

Example 5.5



比如布尔代数 $\langle \mathscr{P}(S), \cup, \cap, \sim \rangle$, 其中

$$S = \{a,\ b,\ c\}.$$

对 $\mathscr{P}(S)$ 中的元素 $\{a,\ b\}$ 来说, $\{a\}$, $\{b\}$ 是满足 "$\preccurlyeq \{a,\ b\}$" 的所有原子, 有

$$\{a,\ b\} = \{a\} \cup \{b\}.$$

类似地,

$$\{a,\ c\} = \{a\} \cup \{c\},$$
$$\{b,\ c\} = \{b\} \cup \{c\},$$
$$\{a,\ b,\ c\} = \{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}.$$

这些表示为原子的并的形式当然是惟一的.

引理 4

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是布尔格, a 为任意一个原子, $b \neq 0$, 则

$$a \preccurlyeq b \quad \text{和} \quad a \preccurlyeq \overline{b}$$

两式中, 有且仅有一个成立.

引理 4

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是布尔格, a 为任意一个原子, $b \neq 0$, 则

$$a \preccurlyeq b \quad \text{和} \quad a \preccurlyeq \overline{b}$$

两式中, 有且仅有一个成立.

分析　这从含义上是不难理解的. b 的 "原子表达式"

$$b = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k$$

是惟一的.

引理 4

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是布尔格, a 为任意一个原子, $b \neq 0$, 则

$$a \preccurlyeq b \quad \text{和} \quad a \preccurlyeq \overline{b}$$

两式中, 有且仅有一个成立.

分析 这从含义上是不难理解的. b 的 "原子表达式"

$$b = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k$$

是惟一的.

对任意的原子 a, 它要么是 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 其中之一, 要么不在其中.

引理 4

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是布尔格, a 为任意一个原子, $b \neq 0$, 则

$$a \preccurlyeq b \quad 和 \quad a \preccurlyeq \overline{b}$$

两式中, 有且仅有一个成立.

分析 这从含义上是不难理解的. b 的 "原子表达式"

$$b = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k$$

是惟一的.

对任意的原子 a, 它要么是 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 其中之一, 要么不在其中. 易知,

$$a \preccurlyeq b \text{ 和 } a \preccurlyeq \overline{b}$$

两式中有且仅有一个成立.

引理 4

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是布尔格, a 为任意一个原子, $b \neq 0$, 则

$$a \preccurlyeq b \quad \text{和} \quad a \preccurlyeq \overline{b}$$

两式中, 有且仅有一个成立.

证 因 $a \wedge b \preccurlyeq a$, 而 a 为原子, 则只可能有

$$a \wedge b = 0 \quad \text{或者} \quad a \wedge b = a.$$

引理 4

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是布尔格, a 为任意一个原子, $b \neq 0$, 则

$$a \preccurlyeq b \quad \text{和} \quad a \preccurlyeq \overline{b}$$

两式中, 有且仅有一个成立.

证 因 $a \wedge b \preccurlyeq a$, 而 a 为原子, 则只可能有

$$a \wedge b = 0 \quad \text{或者} \quad a \wedge b = a.$$

1. 若 $a \wedge b = 0$, 即 $a \wedge \overline{(\overline{b})} = 0$, 根据引理 1,

$$a \wedge \overline{(\overline{b})} = 0 \Longleftrightarrow a \preccurlyeq \overline{b}$$

引理 4

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是布尔格, a 为任意一个原子, $b \neq 0$, 则

$$a \preccurlyeq b \quad \text{和} \quad a \preccurlyeq \overline{b}$$

两式中, 有且仅有一个成立.

证 因 $a \wedge b \preccurlyeq a$, 而 a 为原子, 则只可能有

$$a \wedge b = 0 \quad \text{或者} \quad a \wedge b = a.$$

1. 若 $a \wedge b = 0$, 即 $a \wedge \overline{(\overline{b})} = 0$, 根据引理 1,

$$a \wedge \overline{(\overline{b})} = 0 \Longleftrightarrow a \preccurlyeq \overline{b}$$

2. 若 $a \wedge b = a$, 由格的性质有

$$a \wedge b = a \Longleftrightarrow a \preccurlyeq b.$$

引理 4

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是布尔格, a 为任意一个原子, $b \neq 0$, 则

$$a \preccurlyeq b \quad \text{和} \quad a \preccurlyeq \overline{b}$$

两式中, 有且仅有一个成立.

证 因 $a \wedge b \preccurlyeq a$, 而 a 为原子, 则只可能有

$$a \wedge b = 0 \quad \text{或者} \quad a \wedge b = a.$$

1. 若 $a \wedge b = 0$, 即 $a \wedge \overline{(\overline{b})} = 0$, 根据引理 1,

$$a \wedge \overline{(\overline{b})} = 0 \Longleftrightarrow a \preccurlyeq \overline{b}$$

2. 若 $a \wedge b = a$, 由格的性质有

$$a \wedge b = a \Longleftrightarrow a \preccurlyeq b.$$

下面证明两式仅有一个成立.

引理 4

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是布尔格, a 为任意一个原子, $b \neq 0$, 则

$$a \preccurlyeq b \quad \text{和} \quad a \preccurlyeq \overline{b}$$

两式中, 有且仅有一个成立.

证 因 $a \wedge b \preccurlyeq a$, 而 a 为原子, 则只可能有

$$a \wedge b = 0 \quad \text{或者} \quad a \wedge b = a.$$

1. 若 $a \wedge b = 0$, 即 $a \wedge \overline{(\overline{b})} = 0$, 根据引理 1,
$$a \wedge \overline{(\overline{b})} = 0 \Longleftrightarrow a \preccurlyeq \overline{b}$$
2. 若 $a \wedge b = a$, 由格的性质有
$$a \wedge b = a \Longleftrightarrow a \preccurlyeq b.$$

下面证明两式仅有一个成立.

假设 $a \preccurlyeq b$ 和 $a \preccurlyeq \overline{b}$ 同时成立,

引理 4

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 是布尔格, a 为任意一个原子, $b \neq 0$, 则

$$a \preccurlyeq b \quad \text{和} \quad a \preccurlyeq \overline{b}$$

两式中, 有且仅有一个成立.

证 因 $a \wedge b \preccurlyeq a$, 而 a 为原子, 则只可能有

$$a \wedge b = 0 \quad \text{或者} \quad a \wedge b = a.$$

1. 若 $a \wedge b = 0$, 即 $a \wedge \overline{(\overline{b})} = 0$, 根据引理 1,

$$a \wedge \overline{(\overline{b})} = 0 \iff a \preccurlyeq \overline{b}$$

2. 若 $a \wedge b = a$, 由格的性质有

$$a \wedge b = a \iff a \preccurlyeq b.$$

下面证明两式仅有一个成立.

假设 $a \preccurlyeq b$ 和 $a \preccurlyeq \overline{b}$ 同时成立, 则

Theorem 5.6 (Stone 表示定理)

设 $\langle A, \vee, \wedge, ^{-} \rangle$ 是由有限布尔格 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 所诱导的有限布尔代数, S 是布尔格 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 中所有原子的集合, 则

$$\langle A, \vee, \wedge, ^{-} \rangle \text{ 和 } \langle \mathscr{P}(S), \cup, \cap, \sim \rangle \text{ 同构.}$$

Theorem 5.6 (Stone 表示定理)

设 $\langle A, \vee, \wedge, ^{-} \rangle$ 是由有限布尔格 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 所诱导的有限布尔代数, S 是布尔格 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 中所有原子的集合, 则

$$\langle A, \vee, \wedge, ^{-} \rangle \text{ 和 } \langle \mathscr{P}(S), \cup, \cap, \sim \rangle \text{ 同构.}$$

证明的主要思路 (具体证明略):

1. 作映射 $f\colon A \to \mathscr{P}(S)$,
   - 当 $a = 0$ 时, $f(a) = \varnothing$;
   - 当 $a \neq 0$ 时, $f(a) = S_i$, S_i 表示所有满足 $x \preccurlyeq a$ 的原子 x 的集合. 然后证明 f 是双射.

Theorem 5.6 (Stone 表示定理)

设 $\langle A, \vee, \wedge, ^{-}\rangle$ 是由有限布尔格 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 所诱导的有限布尔代数, S 是布尔格 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 中所有原子的集合, 则

$$\langle A, \vee, \wedge, ^{-}\rangle \text{ 和 } \langle \mathscr{P}(S), \cup, \cap, \sim\rangle \text{ 同构.}$$

证明的主要思路 (具体证明略):

1. 作映射 $f\colon A \to \mathscr{P}(S)$,
   - 当 $a = 0$ 时, $f(a) = \varnothing$;
   - 当 $a \neq 0$ 时, $f(a) = S_i$, S_i 表示所有满足 $x \preccurlyeq a$ 的原子 x 的集合. 然后证明 f 是双射.
2. 证明 f 是同构映射:

$$f(a \vee b) = f(a) \cup f(b),$$

$$f(a \wedge b) = f(a) \cap f(b),$$

$$f(\overline{a}) = \overline{f(a)}.$$

Stone 表示定理

推论 1

有限布尔格的元素的个数必等于 2^n, 其中 n 是布尔格中所有原子的个数.

推论 1

有限布尔格的元素的个数必等于 2^n, 其中 n 是布尔格中所有原子的个数.

推论 2

元素的个数相同的有限布尔代数是同构的.

Example 5.7

设 $\langle S, \vee, \wedge, ^- \rangle$ 是布尔代数, x, $y \in S$. 证明 $x \preccurlyeq y$ 当且仅当 $\overline{y} \preccurlyeq \overline{x}$.

Example 5.7

设 $\langle S, \vee, \wedge, ^{-} \rangle$ 是布尔代数, x, $y \in S$. 证明 $x \preccurlyeq y$ 当且仅当 $\overline{y} \preccurlyeq \overline{x}$.

解 由引理 1,

$$\overline{y} \preccurlyeq \overline{x} \iff \overline{y} \wedge \overline{(\overline{x})} = 0$$

Example 5.7

设 $\langle S, \vee, \wedge, ^{-} \rangle$ 是布尔代数, x, $y \in S$. 证明 $x \preccurlyeq y$ 当且仅当 $\overline{y} \preccurlyeq \overline{x}$.

解 由引理 1,

$$\overline{y} \preccurlyeq \overline{x} \iff \overline{y} \wedge \overline{(\overline{x})} = 0$$

Example 5.7

设 $\langle S, \vee, \wedge, ^{-} \rangle$ 是布尔代数, x, $y \in S$. 证明 $x \preccurlyeq y$ 当且仅当 $\overline{y} \preccurlyeq \overline{x}$.

解 由引理 1,

$$\begin{aligned} \overline{y} \preccurlyeq \overline{x} &\iff \overline{y} \wedge \overline{(\overline{x})} = 0 \\ &\iff \overline{y} \wedge x = 0 \end{aligned}$$

Example 5.7

设 $\langle S, \vee, \wedge, ^{-} \rangle$ 是布尔代数, x, $y \in S$. 证明 $x \preccurlyeq y$ 当且仅当 $\overline{y} \preccurlyeq \overline{x}$.

解 由引理 1,

$$\begin{aligned} \overline{y} \preccurlyeq \overline{x} &\iff \overline{y} \wedge \overline{(\overline{x})} = 0 \\ &\iff \overline{y} \wedge x = 0 \\ &\iff x \wedge \overline{y} = 0 \end{aligned}$$

Example 5.7

设 $\langle S, \vee, \wedge, ^{-} \rangle$ 是布尔代数, x, $y \in S$. 证明 $x \preccurlyeq y$ 当且仅当 $\overline{y} \preccurlyeq \overline{x}$.

解 由引理 1,

$$\begin{aligned}
\overline{y} \preccurlyeq \overline{x} &\iff \overline{y} \wedge \overline{(\overline{x})} = 0 \\
&\iff \overline{y} \wedge x = 0 \\
&\iff x \wedge \overline{y} = 0 \\
&\iff x \preccurlyeq y.
\end{aligned}$$

Example 5.7

设 $\langle S, \vee, \wedge, {}^{-} \rangle$ 是布尔代数, x, $y \in S$. 证明 $x \preccurlyeq y$ 当且仅当 $\overline{y} \preccurlyeq \overline{x}$.

解 由引理 1,

$$
\begin{aligned}
\overline{y} \preccurlyeq \overline{x} &\iff \overline{y} \wedge \overline{(\overline{x})} = 0 \\
&\iff \overline{y} \wedge x = 0 \\
&\iff x \wedge \overline{y} = 0 \\
&\iff x \preccurlyeq y.
\end{aligned}
$$

故在任何布尔代数中, $x \preccurlyeq y$ 当且仅当 $\overline{y} \preccurlyeq \overline{x}$. □

布尔表达式

Definition 5.8

设 $\langle A, \vee, \wedge, ^{-}\rangle$ 是布尔代数, 称 A 中的元素为布尔常元. 以 A 为取值范围的变元叫布尔变元.

布尔表达式

Definition 5.8

设 $\langle A, \vee, \wedge, ^{-} \rangle$ 是布尔代数, 称 A 中的元素为布尔常元. 以 A 为取值范围的变元叫布尔变元.

Definition 5.9

设 $\langle A, \vee, \wedge, ^{-} \rangle$ 是布尔代数, 在其上的布尔表达式 (Boolean expressions) 定义为:

1. A 中任何元素 (即布尔常元) 是布尔表达式;
2. 任何布尔变元是一个布尔表达式;
3. 若 e_1, e_2 是布尔表达式, 则 $\overline{e_1}$, $e_1 \vee e_2$, $e_1 \wedge e_2$ 也都是布尔表达式;
4. 只有通过有限次运用规则 (2), (3) 所构造的符号串是布尔表达式.

布尔表达式

Definition 5.8

设 $\langle A, \vee, \wedge, {}^{-}\rangle$ 是布尔代数, 称 A 中的元素为布尔常元. 以 A 为取值范围的变元叫布尔变元.

Definition 5.9

设 $\langle A, \vee, \wedge, {}^{-}\rangle$ 是布尔代数, 在其上的布尔表达式 (Boolean expressions) 定义为:

1. A 中任何元素 (即布尔常元) 是布尔表达式;
2. 任何布尔变元是一个布尔表达式;
3. 若 e_1, e_2 是布尔表达式, 则 $\overline{e_1}$, $e_1 \vee e_2$, $e_1 \wedge e_2$ 也都是布尔表达式;
4. 只有通过有限次运用规则 (2), (3) 所构造的符号串是布尔表达式.

☞ 我们见过类似的定义方式: 命题演算的合式公式; 谓词演算的合式公式.

Example 5.10

设 $\langle \{0, a, b, 1\}, \vee, \wedge, ^{-} \rangle$ 是布尔代数, 则

$$a, \tag{33}$$

$$1 \vee x_1, \tag{34}$$

$$(1 \vee x_1) \wedge x_2, \tag{35}$$

$$(a \wedge x_2) \vee (b \wedge x_1) \vee (x_2 \wedge x_3), \tag{36}$$

都是布尔表达式, 这里 x_1, x_2, x_3 是布尔变元.

Example 5.10

设 $\langle\{0,a,b,1\},\vee,\wedge,\bar{\ }\rangle$ 是布尔代数, 则

$$a, \tag{33}$$

$$1\vee x_1, \tag{34}$$

$$(1\vee x_1)\wedge x_2, \tag{35}$$

$$(a\wedge x_2)\vee(b\wedge x_1)\vee(x_2\wedge x_3), \tag{36}$$

都是布尔表达式, 这里 x_1, x_2, x_3 是布尔变元.

并且 (34), (35), (36) 式分别称为

- 含有单个变元 x_1 的布尔表达式;
- 含有两个变元 x_1, x_2 的布尔表达式;
- 含有三个变元 x_1, x_2, x_3 的布尔表达式.

n 元布尔表达式

Definition 5.11

一个含 n 个相异变元的布尔表达式, 称为 n 元布尔表达式, 记作

$$E(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为变元.

n 元布尔表达式

Definition 5.11

一个含 n 个相异变元的布尔表达式, 称为 n 元布尔表达式, 记作

$$E(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为变元.

Definition 5.12 (布尔表达式的值)

设 $\langle A, \vee, \wedge, ^{-} \rangle$ 是布尔代数. n 元布尔表达式 $E(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的值是指: 将 A 中的布尔常元作为变元 x_i 的值来代替表达式中相应的变元 (即对变元赋值), 从而计算得出的表达式的值.

n 元布尔表达式

Example 5.13

设布尔代数 $\langle\{0, 1\}, \vee, \wedge, ^{-}\rangle$ 上的一个 3 元布尔表达式为

$$E(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) \wedge (\overline{x_2 \vee x_3}).$$

n 元布尔表达式

Example 5.13

设布尔代数 $\langle\{0, 1\}, \vee, \wedge, ^{-}\rangle$ 上的一个 3 元布尔表达式为

$$E(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) \wedge (\overline{x_2 \vee x_3}).$$

当赋值为 $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ 时,

n 元布尔表达式

Example 5.13

设布尔代数 $\langle\{0,1\},\vee,\wedge,^{-}\rangle$ 上的一个 3 元布尔表达式为

$$E(x_1,x_2,x_3)=(x_1\vee x_2)\wedge(\overline{x_1}\vee\overline{x_2})\wedge(\overline{x_2\vee x_3}).$$

当赋值为 $x_1=1$, $x_2=0$, $x_3=1$ 时, 其值为:

$$\begin{aligned}E(1,0,1)&=(1\vee 0)\wedge(\bar{1}\vee\bar{0})\wedge\overline{(0\vee 1)}\\&=1\wedge 1\wedge 0\\&=0.\end{aligned}$$

布尔表达式的等价

Definition 5.14

设 $E_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 $E_2(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是布尔代数 $\langle A, \vee, \wedge, ^- \rangle$ 上的两个 n 元布尔表达式, 如果对 n 个变元的任意赋值均相等, 即对任意赋值 $x_i = \widetilde{x}_i$, $\widetilde{x}_i \in A$ 均有

$$E_1(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \cdots, \widetilde{x}_n) = E_2(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \cdots, \widetilde{x}_n), \tag{37}$$

则称布尔表达式 E_1, E_2 是等价的. 记作:

$$E_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = E_2(x_1, x_2, \cdots, x_n). \tag{38}$$

布尔表达式的等价

Definition 5.14

设 $E_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 $E_2(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是布尔代数 $\langle A, \vee, \wedge, {}^{-} \rangle$ 上的两个 n 元布尔表达式, 如果对 n 个变元的任意赋值均相等, 即对任意赋值 $x_i = \widetilde{x}_i$, $\widetilde{x}_i \in A$ 均有

$$E_1(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \cdots, \widetilde{x}_n) = E_2(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \cdots, \widetilde{x}_n), \tag{37}$$

则称布尔表达式 E_1, E_2 是等价的. 记作:

$$E_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = E_2(x_1, x_2, \cdots, x_n). \tag{38}$$

☞ 这类似于定义 “命题公式的等价”、“谓词公式的等价”.

Example 5.15

在布尔代数 $\langle \{0, 1\}, \vee, \wedge, ^{-} \rangle$ 上的两个布尔表达式

$$E_1(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \overline{x_3}), \tag{39}$$

$$E_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 \wedge (x_2 \vee \overline{x_3}), \tag{40}$$

容易验证, 它们是等价的.

Example 5.15

在布尔代数 $\langle\{0, 1\}, \vee, \wedge, {}^-\rangle$ 上的两个布尔表达式

$$E_1(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \overline{x_3}), \tag{39}$$

$$E_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 \wedge (x_2 \vee \overline{x_3}), \tag{40}$$

容易验证, 它们是等价的. 比如

$$E_1(0, 1, 1) = (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge \overline{1}) = 0 \wedge 0 = 0,$$

$$E_2(0, 1, 1) = 0 \wedge (1 \vee \overline{1}) = 0,$$

等等.

Example 5.15

在布尔代数 $\langle\{0, 1\}, \vee, \wedge, ^{-}\rangle$ 上的两个布尔表达式

$$E_1(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \overline{x_3}), \tag{39}$$

$$E_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 \wedge (x_2 \vee \overline{x_3}), \tag{40}$$

容易验证, 它们是等价的. 比如

$$E_1(0, 1, 1) = (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge \overline{1}) = 0 \wedge 0 = 0,$$

$$E_2(0, 1, 1) = 0 \wedge (1 \vee \overline{1}) = 0,$$

等等.

或者直接由运算规律验证

Example 5.15

在布尔代数 $\langle\{0, 1\}, \vee, \wedge, ^{-}\rangle$ 上的两个布尔表达式

$$E_1(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \overline{x_3}), \tag{39}$$

$$E_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 \wedge (x_2 \vee \overline{x_3}), \tag{40}$$

容易验证, 它们是等价的. 比如

$$E_1(0, 1, 1) = (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge \overline{1}) = 0 \wedge 0 = 0,$$
$$E_2(0, 1, 1) = 0 \wedge (1 \vee \overline{1}) = 0,$$

等等.

或者直接由运算规律验证:

$$\begin{aligned} E_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1 \wedge (x_2 \vee \overline{x_3}) \\ &= (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \overline{x_3}) && \text{(分配律)} \\ &= E_1(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

布尔函数

设 $E(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是布尔代数 $\langle A, \vee, \wedge, ^- \rangle$ 上的一个 n 元布尔表达式, 因为运算 $\vee$, $\wedge$, $^-$ 在 A 上封闭, 任意有序 n 元组 $\langle a_1, a_2, \cdots, a_n \rangle$ $(a_i \in A)$, 可以对应着布尔表达式 $E(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的一个值, 这个值必属于 A.

布尔函数

设 $E(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是布尔代数 $\langle A, \vee, \wedge, ^- \rangle$ 上的一个 n 元布尔表达式, 因为运算 $\vee$, $\wedge$, $^-$ 在 A 上封闭, 任意有序 n 元组 $\langle a_1, a_2, \cdots, a_n \rangle$ $(a_i \in A)$, 可以对应着布尔表达式 $E(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的一个值, 这个值必属于 A.

因此, $E(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 确定了一个由 A^n 到 A 的函数.

布尔函数

设 $E(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是布尔代数 $\langle A, \vee, \wedge, ^{-} \rangle$ 上的一个 n 元布尔表达式, 因为运算 $\vee$, $\wedge$, $^{-}$ 在 A 上封闭, 任意有序 n 元组 $\langle a_1, a_2, \cdots, a_n \rangle$ $(a_i \in A)$, 可以对应着布尔表达式 $E(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的一个值, 这个值必属于 A.

因此, $E(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 确定了一个由 A^n 到 A 的函数.

Definition 5.16

设 $\langle A, \vee, \wedge, ^{-} \rangle$ 是布尔代数, 一个由 A^n 到 A 的函数如果能用 $\langle A, \vee, \wedge, ^{-} \rangle$ 上的一个 n 元布尔表达式来表示, 则称该函数为布尔函数.

布尔函数

设 $E(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是布尔代数 $\langle A, \vee, \wedge, ^- \rangle$ 上的一个 n 元布尔表达式, 因为运算 $\vee$, $\wedge$, $^-$ 在 A 上封闭, 任意有序 n 元组 $\langle a_1, a_2, \cdots, a_n \rangle$ $(a_i \in A)$, 可以对应着布尔表达式 $E(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的一个值, 这个值必属于 A.

因此, $E(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 确定了一个由 A^n 到 A 的函数.

Definition 5.16

设 $\langle A, \vee, \wedge, ^- \rangle$ 是布尔代数, 一个由 A^n 到 A 的函数如果能用 $\langle A, \vee, \wedge, ^- \rangle$ 上的一个 n 元布尔表达式来表示, 则称该函数为**布尔函数**.

一个由 A^n 到 A 的函数并不是一定能用 $\langle A, \vee, \wedge, ^- \rangle$ 上的一个布尔表达式表示.

Example 5.17

设 $A=\{0,1\}$, 下面的表格表示了一个从 A^3 到 A 的函数 f.

	f
$\langle 0,\ 0,\ 0\rangle$	0
$\langle 0,\ 0,\ 1\rangle$	0
$\langle 0,\ 1,\ 0\rangle$	1
$\langle 0,\ 1,\ 1\rangle$	0
$\langle 1,\ 0,\ 0\rangle$	1
$\langle 1,\ 0,\ 1\rangle$	1
$\langle 1,\ 1,\ 0\rangle$	0
$\langle 1,\ 1,\ 1\rangle$	1

Example 5.17

设 $A=\{0,1\}$, 下面的表格表示了一个从 A^3 到 A 的函数 f.

	f
$\langle 0,\ 0,\ 0\rangle$	0
$\langle 0,\ 0,\ 1\rangle$	0
$\langle 0,\ 1,\ 0\rangle$	1
$\langle 0,\ 1,\ 1\rangle$	0
$\langle 1,\ 0,\ 0\rangle$	1
$\langle 1,\ 0,\ 1\rangle$	1
$\langle 1,\ 1,\ 0\rangle$	0
$\langle 1,\ 1,\ 1\rangle$	1

容易验证其布尔函数表达式为:

$$E(x_1,x_2,x_3)=(\overline{x_1}\wedge x_2\wedge\overline{x_3})\vee(x_1\wedge\overline{x_2})\vee(x_1\wedge x_3).$$

小项 & 大项

在给出下一个定理之前, 我们先给出小项、大项、析取范式、合取范式的概念.

小项 & 大项

在给出下一个定理之前, 我们先给出小项、大项、析取范式、合取范式的概念.

Definition 5.18

一个含有 n 个变元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的布尔表达式, 如果它有形式

$$\widetilde{x_1} \wedge \widetilde{x_2} \wedge \cdots \wedge \widetilde{x_n} \tag{41}$$

其中 $\widetilde{x_i}$ 是 x_i 或 $\overline{x_i}$ 中的任一个, 则我们称这个布尔表达式为小项.

小项 & 大项

在给出下一个定理之前, 我们先给出小项、大项、析取范式、合取范式的概念.

Definition 5.18

一个含有 n 个变元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的布尔表达式, 如果它有形式

$$\widetilde{x_1} \wedge \widetilde{x_2} \wedge \cdots \wedge \widetilde{x_n} \tag{41}$$

其中 $\widetilde{x_i}$ 是 x_i 或 $\overline{x_i}$ 中的任一个, 则我们称这个布尔表达式为小项.
如果它有形式

$$\widetilde{x_1} \vee \widetilde{x_2} \vee \cdots \vee \widetilde{x_n} \tag{42}$$

则我们称这个布尔表达式为大项.

在给出下一个定理之前, 我们先给出小项、大项、析取范式、合取范式的概念.

Definition 5.18

一个含有 n 个变元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的布尔表达式, 如果它有形式

$$\widetilde{x_1} \wedge \widetilde{x_2} \wedge \cdots \wedge \widetilde{x_n} \tag{41}$$

其中 $\widetilde{x_i}$ 是 x_i 或 $\overline{x_i}$ 中的任一个, 则我们称这个布尔表达式为小项.
如果它有形式

$$\widetilde{x_1} \vee \widetilde{x_2} \vee \cdots \vee \widetilde{x_n} \tag{42}$$

则我们称这个布尔表达式为大项.

☞ 每个位置 x_i 或 $\overline{x_i}$ 必出现且仅出现一次.

小项 & 大项

在给出下一个定理之前，我们先给出小项、大项、析取范式、合取范式的概念.

Definition 5.18

一个含有 n 个变元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的布尔表达式，如果它有形式

$$\widetilde{x_1} \wedge \widetilde{x_2} \wedge \cdots \wedge \widetilde{x_n} \tag{41}$$

其中 $\widetilde{x_i}$ 是 x_i 或 $\overline{x_i}$ 中的任一个，则我们称这个布尔表达式为小项.
如果它有形式

$$\widetilde{x_1} \vee \widetilde{x_2} \vee \cdots \vee \widetilde{x_n} \tag{42}$$

则我们称这个布尔表达式为大项.

☞ 每个位置 x_i 或 $\overline{x_i}$ 必出现且仅出现一次. 和命题逻辑里的定义完全一样，后面的很多概念均是如此.

小项 & 大项

- 两个布尔变元 x_1, x_2 可构成 2^2 个小项和 2^2 个大项;

小项 & 大项

- 两个布尔变元 x_1, x_2 可构成 2^2 个小项和 2^2 个大项;

小项	二进制下标	十进制下标
$\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}$	m_{00}	m_0
$\overline{x_1} \wedge x_2$	m_{01}	m_1
$x_1 \wedge \overline{x_2}$	m_{10}	m_2
$x_1 \wedge x_2$	m_{11}	m_3

小项 & 大项

- 两个布尔变元 x_1, x_2 可构成 2^2 个小项和 2^2 个大项;

小项	二进制下标	十进制下标	大项	二进制下标	十进制下标
$\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}$	m_{00}	m_0	$x_1 \vee x_2$	M_{00}	M_0
$\overline{x_1} \wedge x_2$	m_{01}	m_1	$x_1 \vee \overline{x_2}$	M_{01}	M_1
$x_1 \wedge \overline{x_2}$	m_{10}	m_2	$\overline{x_1} \vee x_2$	M_{10}	M_2
$x_1 \wedge x_2$	m_{11}	m_3	$\overline{x_1} \vee \overline{x_2}$	M_{11}	M_3

小项 & 大项

- 两个布尔变元 x_1, x_2 可构成 2^2 个小项和 2^2 个大项;

小项	二进制下标	十进制下标	大项	二进制下标	十进制下标
$\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}$	m_{00}	m_0	$x_1 \vee x_2$	M_{00}	M_0
$\overline{x_1} \wedge x_2$	m_{01}	m_1	$x_1 \vee \overline{x_2}$	M_{01}	M_1
$x_1 \wedge \overline{x_2}$	m_{10}	m_2	$\overline{x_1} \vee x_2$	M_{10}	M_2
$x_1 \wedge x_2$	m_{11}	m_3	$\overline{x_1} \vee \overline{x_2}$	M_{11}	M_3

- n 个布尔变元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 可构成 2^n 个小 (大) 项.

Definition 5.19

形如

$$m_0 \vee m_1 \vee \cdots \vee m_t \tag{43}$$

的布尔表达式称为析取范式;

析取范式 & 合取范式

Definition 5.19

形如

$$m_0 \vee m_1 \vee \cdots \vee m_t \tag{43}$$

的布尔表达式称为析取范式;

形如

$$M_0 \wedge M_1 \wedge \cdots \wedge M_t \tag{44}$$

的布尔表达式称为合取范式.

其中 m_i 表示小项, M_i 表示大项, $i = 1, 2, \cdots, t$.

Definition 5.19

形如

$$m_0 \vee m_1 \vee \cdots \vee m_t \tag{43}$$

的布尔表达式称为**析取范式**;

形如

$$M_0 \wedge M_1 \wedge \cdots \wedge M_t \tag{44}$$

的布尔表达式称为**合取范式**.

其中 m_i 表示小项, M_i 表示大项, $i = 1, 2, \cdots, t$.

☞ 简言之,

- 析取范式: 小项之并;
- 合取范式: 大项之交.

Theorem 5.20

对于两个元素的布尔代数 $\langle\{0,1\},\vee,\wedge,^{-}\rangle$, 任意一个从 $\{0,1\}^n$ 到 $\{0,1\}$ 的函数都是布尔函数.

证 对于一个从 $\{0,1\}^n$ 到 $\{0,1\}$ 的函数, 先用那些使函数值为 1 的有序 n 元组分别构造小项

$$\widetilde{x_1} \wedge \widetilde{x_2} \wedge \cdots \wedge \widetilde{x_n}, \tag{45}$$

其中

$$\widetilde{x_i} = \begin{cases} x_i, & \text{如果有序 } n \text{ 元组中的第 } i \text{ 个分量为 } 1, \\ \overline{x_i} & \text{如果有序 } n \text{ 元组中的第 } i \text{ 个分量为 } 0. \end{cases}$$

Theorem 5.20

对于两个元素的布尔代数 $\langle\{0, 1\}, \vee, \wedge, ^{-}\rangle$, 任意一个从 $\{0, 1\}^n$ 到 $\{0, 1\}$ 的函数都是布尔函数.

证 对于一个从 $\{0, 1\}^n$ 到 $\{0, 1\}$ 的函数, 先用那些使函数值为 1 的有序 n 元组分别构造小项

$$\widetilde{x_1} \wedge \widetilde{x_2} \wedge \cdots \wedge \widetilde{x_n}, \tag{45}$$

其中

$$\widetilde{x_i} = \begin{cases} x_i, & \text{如果有序 } n \text{ 元组中的第 } i \text{ 个分量为 } 1, \\ \overline{x_i} & \text{如果有序 } n \text{ 元组中的第 } i \text{ 个分量为 } 0. \end{cases}$$

然后, 再由这些小项所构成的析取范式, 它就是给定函数对应的布尔表达式, 从而该函数是布尔函数. □

Theorem 5.20

对于两个元素的布尔代数 $\langle\{0,1\},\vee,\wedge,^{-}\rangle$, 任意一个从 $\{0,1\}^n$ 到 $\{0,1\}$ 的函数都是布尔函数.

☞ 注: 当然, 也可用那些使函数值为 0 的有序 n 元组分别构造大项

$$\widetilde{x_1} \vee \widetilde{x_2} \vee \cdots \vee \widetilde{x_n}, \tag{45}$$

其中

$$\widetilde{x_i} = \begin{cases} x_i, & \text{如果有序 } n \text{ 元组中的第 } i \text{ 个分量为 } 0, \\ \overline{x_i} & \text{如果有序 } n \text{ 元组中的第 } i \text{ 个分量为 } 1. \end{cases}$$

由这些大项所构成的合取范式, 也是给定函数对应的布尔表达式. □

Example 5.21

求由下表所给定的函数 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的析取范式、合取范式.

	f
$\langle 0, 0, 0\rangle$	1
$\langle 0, 0, 1\rangle$	0
$\langle 0, 1, 0\rangle$	1
$\langle 0, 1, 1\rangle$	0
$\langle 1, 0, 0\rangle$	0
$\langle 1, 0, 1\rangle$	0
$\langle 1, 1, 0\rangle$	0
$\langle 1, 1, 1\rangle$	1

Example 5.21

求由下表所给定的函数 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的析取范式、合取范式.

	f	构造小项
$\langle 0, 0, 0\rangle$	1	$\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}$
$\langle 0, 0, 1\rangle$	0	
$\langle 0, 1, 0\rangle$	1	$\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}$
$\langle 0, 1, 1\rangle$	0	
$\langle 1, 0, 0\rangle$	0	
$\langle 1, 0, 1\rangle$	0	
$\langle 1, 1, 0\rangle$	0	
$\langle 1, 1, 1\rangle$	1	$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$

Example 5.21

求由下表所给定的函数 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的析取范式、合取范式.

	f	构造小项
$\langle 0, 0, 0\rangle$	1	$\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}$
$\langle 0, 0, 1\rangle$	0	
$\langle 0, 1, 0\rangle$	1	$\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}$
$\langle 0, 1, 1\rangle$	0	
$\langle 1, 0, 0\rangle$	0	
$\langle 1, 0, 1\rangle$	0	
$\langle 1, 1, 0\rangle$	0	
$\langle 1, 1, 1\rangle$	1	$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$

解 函数 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的析取范式:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}) \vee (\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3).$$

Example 5.21

求由下表所给定的函数 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的析取范式、合取范式.

	f	构造小项	构造大项
$\langle 0, 0, 0\rangle$	1	$\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}$	
$\langle 0, 0, 1\rangle$	0		$x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}$
$\langle 0, 1, 0\rangle$	1	$\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}$	
$\langle 0, 1, 1\rangle$	0		$x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$
$\langle 1, 0, 0\rangle$	0		$\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3$
$\langle 1, 0, 1\rangle$	0		$\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}$
$\langle 1, 1, 0\rangle$	0		$\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3$
$\langle 1, 1, 1\rangle$	1	$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$	

Example 5.21

求由下表所给定的函数 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的析取范式、合取范式.

	f	构造小项	构造大项
$\langle 0, 0, 0\rangle$	1	$\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}$	
$\langle 0, 0, 1\rangle$	0		$x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}$
$\langle 0, 1, 0\rangle$	1	$\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}$	
$\langle 0, 1, 1\rangle$	0		$x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$
$\langle 1, 0, 0\rangle$	0		$\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3$
$\langle 1, 0, 1\rangle$	0		$\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}$
$\langle 1, 1, 0\rangle$	0		$\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3$
$\langle 1, 1, 1\rangle$	1	$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$	

解 合取范式:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$$
$$\wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3). \qquad \square$$

一般布尔代数上的析 (合) 取范式

布尔代数 $\langle\{0, 1\}, \vee, \wedge, \bar{\ }\rangle$ 上的布尔表达式的析取范式、合取范式可以扩充到一般的布尔代数上.

一般布尔代数上的析 (合) 取范式

布尔代数 $\langle\{0, 1\}, \vee, \wedge, ^{-}\rangle$ 上的布尔表达式的析取范式、合取范式可以扩充到一般的布尔代数上.

Definition 5.22

设 $E(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是布尔代数 $\langle A, \vee, \wedge, ^{-}\rangle$ 上任一布尔表达式.

- 若 $E(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 能表示成

$$(a_0 \wedge m_0) \vee (a_1 \wedge m_1) \vee \cdots \vee (a_t \wedge m_t), \tag{46}$$

  则称形如 (46) 式的布尔表达式为析取范式;

一般布尔代数上的析 (合) 取范式

布尔代数 $\langle\{0, 1\}, \vee, \wedge, \bar{\ }\rangle$ 上的布尔表达式的析取范式、合取范式可以扩充到一般的布尔代数上.

Definition 5.22

设 $E(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是布尔代数 $\langle A, \vee, \wedge, \bar{\ }\rangle$ 上任一布尔表达式.

- 若 $E(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 能表示成

$$(a_0 \wedge m_0) \vee (a_1 \wedge m_1) \vee \cdots \vee (a_t \wedge m_t), \tag{46}$$

  则称形如 (46) 式的布尔表达式为析取范式;

- 若 $E(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 能表示成

$$(a_0 \vee M_0) \wedge (a_1 \vee M_1) \wedge \cdots \wedge (a_t \vee M_t), \tag{47}$$

  则称形如 (47) 式的布尔表达式为合取范式.

其中 a_i 表示布尔常元, m_i 表示小项, M_i 表示大项, $i = 1, 2, \cdots, t$.

Theorem 5.23

设 $E(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是布尔代数 $\langle A, \vee, \wedge, ^- \rangle$ 上任一布尔表达式, 则它一定可化为析 (合) 取范式.

(证明略.)

Theorem 5.23

设 $E(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是布尔代数 $\langle A, \vee, \wedge, ^- \rangle$ 上任一布尔表达式, 则它一定可化为析 (合) 取范式.

(证明略.)

☞ 作为布尔代数的直接应用, 命题逻辑可用布尔代数

$$\left\langle \{\mathbf{F}, \mathbf{T}\}, \vee, \wedge, ^- \right\rangle$$

来描述.

Theorem 5.23

设 $E(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是布尔代数 $\langle A, \vee, \wedge, ^{-}\rangle$ 上任一布尔表达式, 则它一定可化为析 (合) 取范式.

(证明略.)

☞ 作为布尔代数的直接应用, 命题逻辑可用布尔代数

$$\langle \{\mathbf{F}, \mathbf{T}\}, \vee, \wedge, ^{-}\rangle$$

来描述.

一个原子命题可视为一个布尔变元, 其值非 **T** 即 **F**. 因此, 任一复合命题都能用布尔代数

$$\langle \{\mathbf{F}, \mathbf{T}\}, \vee, \wedge, ^{-}\rangle$$

中的一个布尔函数来表示.

练习

将布尔代数 $\langle\{0, 1\}, \vee, \wedge, {}^{-}\rangle$ 上的布尔表达式

$$E(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee x_3 \tag{48}$$

化为合取范式.

解

$$\begin{aligned}
E(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 \wedge x_2) \vee x_3 \\
&= (x_1 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_3) \\
&= (x_1 \vee (x_2 \wedge \overline{x_2}) \vee x_3) \vee ((x_1 \wedge \overline{x_1}) \vee x_2 \vee x_3) \\
&= (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \\
&= M_0 \wedge M_2 \wedge M_4.
\end{aligned}$$

练习

将布尔代数 $\langle\{0, 1\}, \vee, \wedge, {}^{-}\rangle$ 上的布尔表达式

$$E(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee x_3 \tag{48}$$

化为合取范式.

解

$$\begin{aligned}
E(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 \wedge x_2) \vee x_3 \\
&= (x_1 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_3) \\
&= (x_1 \vee (x_2 \wedge \overline{x_2}) \vee x_3) \vee ((x_1 \wedge \overline{x_1}) \vee x_2 \vee x_3) \\
&= (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \\
&= M_0 \wedge M_2 \wedge M_4.
\end{aligned}$$

或者用列表的方式确定大项...

练习

将布尔代数 $\langle\{0, 1\}, \vee, \wedge, \bar{}\rangle$ 上的布尔表达式

$$E(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee x_3 \tag{48}$$

化为合取范式.

解

	$E(x_1, x_2, x_3)$	构造大项
$\langle 0, 0, 0\rangle$	0	$x_1 \vee x_2 \vee x_3$
$\langle 0, 0, 1\rangle$	1	
$\langle 0, 1, 0\rangle$	0	$x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3$
$\langle 0, 1, 1\rangle$	1	
$\langle 1, 0, 0\rangle$	0	$\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3$
$\langle 1, 0, 1\rangle$	1	
$\langle 1, 1, 0\rangle$	1	
$\langle 1, 1, 1\rangle$	1	

得 $E(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$. □

习题

设 $E(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_2 \wedge x_3) \vee (\overline{x_2} \wedge x_3)$ 是布尔代数 $\langle\{0, 1\}, \vee, \wedge, {}^{-}\rangle$ 上的一个布尔表达式. 试写出 $E(x_1, x_2, x_3)$ 的析取范式和合取范式.

习题

设 $E(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_2 \wedge x_3) \vee (\overline{x_2} \wedge x_3)$ 是布尔代数 $\langle \{0, 1\}, \vee, \wedge, ^{-} \rangle$ 上的一个布尔表达式. 试写出 $E(x_1, x_2, x_3)$ 的析取范式和合取范式.

解 对 $E(x_1, x_2, x_3)$ 写出其对应的函数表, 然后构造小项、大项:

	$E(x_1, x_2, x_3)$	构造小项	构造大项
$\langle 0, 0, 0 \rangle$	0		$x_1 \vee x_2 \vee x_3$
$\langle 0, 0, 1 \rangle$	1	$\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_3$	
$\langle 0, 1, 0 \rangle$	0		$x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3$
$\langle 0, 1, 1 \rangle$	1	$\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_3$	
$\langle 1, 0, 0 \rangle$	0		$\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3$
$\langle 1, 0, 1 \rangle$	1	$x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3$	
$\langle 1, 1, 0 \rangle$	1	$x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}$	
$\langle 1, 1, 1 \rangle$	1	$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$	

习题

设 $E(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_2 \wedge x_3) \vee (\overline{x_2} \wedge x_3)$ 是布尔代数 $\langle \{0, 1\}, \vee, \wedge, ^- \rangle$ 上的一个布尔表达式. 试写出 $E(x_1, x_2, x_3)$ 的析取范式和合取范式.

解 $E(x_1, x_2, x_3)$ 的析取范式:

$$
\begin{aligned}
E(x_1, x_2, x_3) = & \left(\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_3\right) \vee \left(\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_3\right) \vee \left(x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3\right) \\
& \vee \left(x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}\right) \vee \left(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3\right).
\end{aligned}
$$

习题

设 $E(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_2 \wedge x_3) \vee (\overline{x_2} \wedge x_3)$ 是布尔代数 $\langle \{0, 1\}, \vee, \wedge, ^{-} \rangle$ 上的一个布尔表达式. 试写出 $E(x_1, x_2, x_3)$ 的析取范式和合取范式.

解 $E(x_1, x_2, x_3)$ 的析取范式:

$$\begin{aligned} E(x_1, x_2, x_3) = & \left(\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_3\right) \vee \left(\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_3\right) \vee \left(x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3\right) \\ & \vee \left(x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}\right) \vee \left(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3\right). \end{aligned}$$

$E(x_1, x_2, x_3)$ 的合取范式:

$$E(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1 \vee x_2 \vee x_3\right) \wedge \left(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3\right) \wedge \left(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3\right).$$

□