六、（10 分）若 2 阶实矩阵 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的两个特征值都是 λ_0，且 $b\neq 0$，证明：矩 $C=\begin{bmatrix} b & 0 \\ \lambda_0-a & 1 \end{bmatrix}$ 满足 $C^{-1}AC=\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$.

七、（8 分）若二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$（式中 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$），适合 $|A|<0$．求证：必存在向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，使 $f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\alpha^TA\alpha<0$.

八、（8 分）若 $n\times r$ 矩阵 A 的秩为 r，其 r 个列向量为某一齐次线性方程组的一个基础解系，B 为 r 阶可逆方阵，证明 AB 的 r 个列向量也是该齐次线性方程组一个基础解系．

九、（16 分）对线性方程组 $\begin{cases} x_1+a_1x_2+a_1^2x_3=a_1^3, \\ x_1+a_2x_2+a_2^2x_3=a_2^3, \\ x_1+a_3x_2+a_3^2x_3=a_3^3, \\ x_1+a_4x_2+a_4^2x_3=a_4^3. \end{cases}$ (1) 若 a_1,a_2,a_3,a_4 两两不等，问方程组是否有解，为什么？(2) 若 $a_1=a_3=b$，$a_2=a_4=-b$（$b\neq 0$），且已知方程的两个解 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_2=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$，试给出方程组的通解．

十、（10 分）设二次曲面的方程 $axy+2xz+2byz=1$）$a>0$ 经正交变换 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}$，化成 $\xi^2+\eta^2-2\zeta^2=1$，求 a、b 的值及正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.