

2004~2005 学年第一学期《高等数学》期末考试试题 A 卷答案

一、填空题：(4×5 分)

1、 $a=8; b=3$; 2、 $R=3$; 3、 $2005!$; 4、 $\ln 2$

二、选择题：(4×4 分)

1、C ; 2、B ; 3、B; 4、A .

三、计算下列各题：(6×6 分)

$$1) \text{ 解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{\ln(1+2x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{6x^2} = -\frac{1}{6}$$

$$2) \text{ 解: 由 } y' = \frac{2}{\cos^2 2x} + \cos x \cdot 2^{\sin x} \ln 2$$

$$\text{得 } dy|_{x=\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{2}{\cos^2 \pi} + \cos \frac{\pi}{2} \cdot 2^{\sin \frac{\pi}{2}} \ln 2 \right) dx = 2dx .$$

$$3) \text{ 解: 当 } x=0 \text{ 时 } y=0, \text{ 又 } e^y y' + 6y + 6xy' + 2x = 0, \text{ 故 } y'(0) = 0$$

$$4) \text{ 解: 注意到 } f(x) = f''(x), \text{ 则}$$

$$\begin{aligned} \text{原积分} &= \int \left(\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{f''(x)}{f'(x)} \right) dx = \int d[\ln f(x) + \ln f'(x)] = \ln f(x) f'(x) + C \\ &= \ln \frac{1}{4} (e^{2x} - e^{-2x}) + C \end{aligned}$$

$$5) \text{ 解: } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2}{3} \frac{t-1}{t^2+3}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx} \right)'_t \frac{dt}{dx} = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{t-1}{t^2+3} \right)'_t \frac{1}{x'_t} = \frac{2}{3} \cdot \frac{-t^2+2t+3}{(t^2+3)^2} \cdot \frac{1}{3t^2+9} = \frac{2}{9} \cdot \frac{(3-t)(1+t)}{(t^2+3)^3} .$$

当 $\frac{d^2 y}{dx^2} > 0$ 时曲线下凸., 得 $-1 < t < 3$; 注意到 $x = t^3 + 9t$ 单调升, 即 $x \in (-10, 54)$ 时, 曲

线下凸.

$$6) \text{ 解: 令 } \sqrt{x} = t, \text{ 当 } x=1 \text{ 时 } t=1, \text{ 当 } x=4 \text{ 时, } t=2, \text{ 则}$$

$$\text{原式} = \int_1^2 \frac{2 \ln t}{t} 2t dt = \int_1^2 4 \ln t dt = 4[t \ln t - t]_1^2 = 4[2 \ln 2 - 1]$$

四、(5分) 证明: 由 $0 \leq \left| \frac{f(x)}{x} \right| = |f(x)| \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2} (f^2(x) + \frac{1}{x^2})$ ($x \geq 1 > 0$) 因为 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ 、

$\int_1^{+\infty} f^2(x) dx$ 收敛, 故 $\frac{1}{2} \int_1^{+\infty} (f^2(x) + \frac{1}{x^2}) dx$ 也收敛, 比较判别法知: 广义积分

$\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ 绝对收敛。

五、(6分) 解 设 $(\xi, \ln \xi)$ 为曲线 $y = \ln x$ 上任意一点, 则此点处的切线方程为:

$y = \frac{1}{\xi}(x - \xi) + \ln \xi$, 即 $y = \frac{x}{\xi} + \ln \xi - 1$, 于是所求面积为:

$$A = \int_2^6 \left[\frac{x}{\xi} + \ln \xi - 1 - \ln x \right] dx = \left[\frac{x^2}{\xi} + x \ln \xi - x \ln x \right]_2^6 = 4 \left(\ln \xi + \frac{4}{\xi} \right) + 2 \ln 2 - 6 \ln 6$$

令 $\frac{dA}{d\xi} = 4 \left(\frac{1}{\xi} - \frac{4}{\xi^2} \right) = 0$, 得 $\xi = 4$, 又当 $\xi < 4$ 时, $\frac{dA}{d\xi} < 0$, 当 $\xi > 4$ 时, $\frac{dA}{d\xi} > 0$,

故 $\xi = 4$ 时, A 取得极小值, 也是最小值, 从而得到所求的切线方程为:

$$y = \ln 4 + \frac{1}{4}(x - 4).$$

六、(6分) 解: 因为 $V(\xi) = \int_0^\xi \pi y^2 dy = \pi \int_0^\xi \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{\pi}{2} \frac{1}{1+x^2} \Big|_0^\xi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+\xi^2}$,

所以 $\lim_{\xi \rightarrow \infty} V(\xi) = \frac{\pi}{2}$, 从而 $V(a) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+a^2} = \frac{\pi}{4}$,

由此可得 $1+a^2 = 2$, 所以 $a = 1$ 或 $a = -1$ (舍去), 故 $a = 1$ 。

七、(5分) 证: $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = a^2 \varepsilon$, 则当 $x_1, x_2 \in (a, 1)$, 且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| \sin \frac{1}{x_1} - \sin \frac{1}{x_2} \right| = \left| 2 \cos \frac{\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}}{2} \sin \frac{\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right) \right| \leq \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right|$$

$$= \frac{|x_2 - x_1|}{x_1 x_2} < \frac{1}{a^2} |x_2 - x_1| < \frac{1}{a^2} \delta = \varepsilon, \text{ 所以 } f(x) = \sin \frac{1}{x} \text{ 在 } (a, 1) \text{ 内一致连续。}$$

八、(6分) 证: 由题设知 $g(x)$ 在 $[-1, 0]$ 上连续, 在区间 $(-1, 0)$ 内可导, 且 $g(-1) = g(0) = 0$,

于是由罗尔定理知, 在 $(-1, 0)$ 内至少存在一点 ξ , 使得 $g'(\xi) = 0$ ($-1 < \xi < 0$), 又在区间 $[-1, \xi]$ 上函数,

$g'(x) = \pi f(x) \cos \pi(x+1) + f'(x) \sin \pi(x+1)$, 由题设知,

$g'(x)$ 在 $[-1, \xi]$ 上连续, 在区间 $(-1, \xi)$ 内可导, 且 $g'(-1) = g'(\xi) = 0$, 故由罗尔定理

知在 $(-1, \xi)$ 内至少存在一点 c , 使得 $g''(c) = 0$ 。