武汉大学2013-2014学年第二学期期末考试线性代数B解答

一、（6分）下列命题是否正确？如正确，请证明，若不正确请举反例：向量组 $a_1,a_2,...,a_s(s\geq 2)$ 线性无关的充分必要条件是存在一组不全为零的常数 $k_1,...,k_s$，使得 $k_1a_1+...+k_sa_s\neq 0.$

解 不正确。3分

如 $a_1=(1,2,3),a_2=(2,4,6)$，存在 $k_1=k_2=1\neq 0$，使得 $k_1a_1+k_2a_2\neq 0$，但是 a_1,a_2 线性相关。3分

二、（6分）设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\-2&1&3\\0&5&1\end{pmatrix}$，问 A 是否可逆？如可逆求 A^{-1}，如不可逆，求 A 的伴随矩阵 A^*.

解 $|A|=\begin{vmatrix}1&2&-1\\0&5&1\\0&5&1\end{vmatrix}=0$ A 不可逆 3分

而 $A^*=\begin{pmatrix}-14&-7&7\\2&1&-1\\-10&-5&5\end{pmatrix}$ 3分

三、（6分）给正交矩阵 A 的某一行（或某一列）乘上 -1 后所得的矩阵 B 是否仍是正交矩阵？为什么？

解 设 $A=(a_{ij})$ 是正交矩阵，给第 i 行乘以 -1 得 $B=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\cdots&\cdots&\cdots\\-a_{i1}&\cdots&-a_{in}\\\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$，则由

$a_{k1}^2+\cdots+a_{kn}^2=1(k=1,...,n)$ 当 $k=i$ 时为 $(-a_{k1})^2+...+(-a_{kn})^2=1$ 仍成立 4分

$a_{k1}a_{p1}+...+a_{kn}a_{pn}=0(k\neq p)$ 当 $k=i$ 时得 $-a_{i1}a_{p1}+...+(-a_{in}a_{pn})=0$ 即 B 仍是正交矩阵。

2分

四、（12分）设 $A=\begin{pmatrix}1&4&5&6&9\\3&-2&1&4&-1\\-1&0&-1&-2&-1\\2&3&5&7&8\end{pmatrix}$，求 A 的列向量组的一个最大无关组，并用最大无关组线性表示出列向量组中其它向量。

解 设 A 的第 j 列为 $\alpha_j\left(j=1,\cdots,5\right)$，

对 A 作初等行变换：$A \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 故 α_1 ,α_2 是 A 的列向量组的一个最大无关组，

8 分

且有 $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_4 = 2\alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_5 = \alpha_1 + 2\alpha_2$ 4 分

五、（12 分）设 $A^2 + AB - A = E$，$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 求行列式 $|AB|$ 的值.

解 $A^2 = 4E$ $\quad AB = A - 3E = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ 6 分

$|AB| = 5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$ 6 分

六、（12 分）设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3)$,(1) 写出二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$;(2) 求一个正交矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 成对角矩阵;(3) 写出 f 在正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 下化成的标准形.

解 (1) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$; 3 分

(2) 特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 0$，

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 6$ 时，解方程组 $(A\text{-}6I)x = 0$ 得特征向量，正交单位化得 $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，当 $\lambda_3 = 0$ 时，解方程组 $Ax = 0$，得特征向量，单位化得

$e_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$，取 $P=(e_1,e_2,e_3)$ 为正交矩阵，可,使 $\boldsymbol{P^{-1}AP=diag(6,6,0)}$； 6 分

(3) $f=6y_1^2+6y_2^2$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 下化成的标准形。 3 分

七、（16分）设 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&a+2&-b-2\\0&-3a&a+2b\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix},X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，试就 a,b 的各种情况，讨论线性方程组 $AX=B$ 的解，如果有解，求其解.

解 $\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\2&a+2&-b-2&3\\0&-3a&a+2b&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&a&-b&1\\0&-3a&a+2b&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&a&-b&1\\0&0&a-b&0\end{pmatrix}$ 10 分

当 $a=0$ 时，方程组无解；

当 $a\neq 0$ 时，且 $b\neq a$ 时，方程组有唯一解: $x_1=1-\frac{1}{a},x_2=\frac{1}{a},x_3=0$

当 $a\neq 0$，且 $b=a$ 时，方程组有无穷多解 $\begin{cases}x_1=1-\frac{1}{a}\\x_2=x_3+\frac{1}{a}\\x_3=x_3\end{cases}$ x_3 为任意常数 6 分

八、（10 分）设 n 阶矩阵 A 满足关系 $A^2-A-2E=0$，试证明 A 及 $A+2E$ 均可逆，且当 $A\neq -E$ 时，$A-2E$ 必不可逆.

证 由 $A(A-E)=2E$ 知 A 可逆. 又 $A+2E=A^2$ 故 $A+2E$ 可逆 6 分

而 $A^2-A-2E=(A-2E)(A+E)=0$ ，若 $|A-2E|\neq 0,$ 则 $(A-2E)X=0$ 只有零解, 令

$A+E\neq 0$ 故 $|A-2E|=0,$ 即 $A-2E$ 必不可逆 4 分

（或 $A-2E$ 可逆，有 $A+E=(A-2E)^{-1}\cdot 0=0$ 与 $A\neq -E$ 矛盾）

九、（10 分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是实数域上的线性空间 V 的一个基，向量组 $\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2,\cdots,$ $\beta_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ (1) 证明 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 也是 V 的一个基，并求出由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵 C；（2）设向量 $\alpha=n\alpha_1+(n-1)\alpha_2+\cdots+2\alpha_{n-1}+\alpha_n$，求 α 在基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 下的坐标.

解(1) $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{1}&\vdots&\mathbf{1}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\vdots&\mathbf{1}\\\vdots&\vdots&\vdots&\mathbf{1}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\vdots&\mathbf{1}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{1}&\cdots&\mathbf{1}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\cdots&\mathbf{1}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\cdots&\mathbf{1}\end{pmatrix}$ 5 分

(2) $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{n}\boldsymbol{\alpha}_1+(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\mathbf{2}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+\boldsymbol{\alpha}_n=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}\boldsymbol{n}\\\boldsymbol{n}-\mathbf{1}\\\vdots\\\mathbf{1}\end{pmatrix}$ $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{1}\\\cdots\\\mathbf{1}\end{pmatrix}$；

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}\boldsymbol{n}\\\boldsymbol{n}-\mathbf{1}\\\vdots\\\mathbf{1}\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{1}&\vdots&\mathbf{1}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\vdots&\mathbf{1}\\\vdots&\vdots&\vdots&\mathbf{1}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\vdots&\mathbf{1}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{n}\\\boldsymbol{n}-\mathbf{1}\\\vdots\\\mathbf{1}\end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix}\mathbf{1}&-\mathbf{1}&\vdots&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\vdots&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\vdots&\mathbf{1}&-\mathbf{1}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\vdots&\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{n}\\\boldsymbol{n}-\mathbf{1}\\\vdots\\\mathbf{1}\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{1}\\\vdots\\\mathbf{1}\end{pmatrix}$$ 5 分

十、(10 分) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-3\\-1&4&-3\\1&a&5\end{pmatrix}$ 的全部特征值之积为 24.(1) 求 a 的值；(2) 讨论 A 能否对角化，若能，求一个可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP=\Lambda$ 为对角阵.

解 (1) 因 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|A|$ 得 $a=-2$；　　　　5 分

(2) 由 $|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}\mathbf{1}-\lambda&\mathbf{2}&-\mathbf{3}\\-\mathbf{1}&\mathbf{4}-\lambda&-\mathbf{3}\\\mathbf{1}&-\mathbf{2}&\mathbf{5}-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-\mathbf{2})^2(\lambda-\mathbf{6})$,故特征值为

$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=6$，又当 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 时，$r(2I-A)=1$，矩阵 A 有 3 个线性无关的特征向量，故 A 能对角化，当 $\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{2}$ **时，解方程组** $(\mathbf{2}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 得基础解系

$$\boldsymbol{p}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{p}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$$

当 $\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{6}$ 时，解方程组 $(\mathbf{6}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 得基础解系

$$\boldsymbol{p}_3=(1,-2,3)^{\mathrm{T}}$$

取可逆矩阵 $P=\begin{pmatrix}2&-3&1\\1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$，使 $P^{-1}AP=D=diag(2,2,6)$ 为对角阵。5 分