概率论与数理统计
第二章 随机变量及其概率分布

黄 正 华

Email: huangzh@whu.edu.cn

武汉大学 数学与统计学院

2012 年 10 月 16 日

目录

Example 1

有 5 件产品, 其中 2 件是次品. 从中不放回地任取 2 件, 求抽取到的次品数分别是 0, 1, 2 的概率.

解: 设 A_k={抽取到 k 件次品}, $k = 0, 1, 2.$

$$P(A_0) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = 0.3$$

$$P(A_1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = 0.6$$

$$P(A_2) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = 0.1$$

为什么要引入“随机变量”?

Example 1

有 5 件产品, 其中 2 件是次品. 从中不放回地任取 2 件, 求抽取到的次品数分别是 0, 1, 2 的概率.

解: 设 A_k={抽取到 k 件次品}, $k = 0, 1, 2$.

另一种表达方式是: 用 X 表示抽取到的次品数. 则

为什么要引入“随机变量”?

Example 1

有 5 件产品, 其中 2 件是次品. 从中不放回地任取 2 件, 求抽取到的次品数分别是 0, 1, 2 的概率.

解: 设 A_k={抽取到 k 件次品}, $k = 0, 1, 2$.

另一种表达方式是: 用 X 表示抽取到的次品数. 则

$$P\{X = 0\} = 0.3, \quad P\{X = 1\} = 0.6, \quad P\{X = 2\} = 0.1$$

为什么要引入“随机变量”?

Example 1

有 5 件产品, 其中 2 件是次品. 从中不放回地任取 2 件, 求抽取到的次品数分别是 0, 1, 2 的概率.

解: 设 A_k={抽取到 k 件次品}, $k = 0, 1, 2$.

另一种表达方式是: 用 X 表示抽取到的次品数. 则

$$P\{X = 0\} = 0.3, \quad P\{X = 1\} = 0.6, \quad P\{X = 2\} = 0.1$$

求某一事件发生的概率, 表达为变量 X 取某一值的概率.

随机变量(Random Variable)

再例如

$$X = \begin{cases} 0, & \text{正面} \\ 1. & \text{背面} \end{cases} \qquad X = \begin{cases} 1, & \text{黑} \\ 2, & \text{白} \\ 3. & \text{红} \end{cases}$$

随机变量(Random Variable)

再例如

$$X = \begin{cases} 0, & \text{正面} \\ 1. & \text{背面} \end{cases} \qquad X = \begin{cases} 1, & \text{黑} \\ 2, & \text{白} \\ 3. & \text{红} \end{cases}$$

变量 X 表达了随机试验的结果, 我们谓之“随机变量 X”.

随机变量: 离散型& 连续型

- 离散型 —— 比如掷硬币, X 的取值为 0, 1 这样离散的点.

随机变量: 离散型& 连续型

- 离散型 —— 比如掷硬币, X 的取值为 0, 1 这样离散的点.
- 连续型 —— 比如"灯泡的使用寿命在 700 小时至 1000 小时", 可以表达成

$$700 \leqslant X \leqslant 1000$$

随机变量 X 是连续地取 700 到 1000 之间的任意值.

随机变量的方便之处

引入了随机变量之后, 随机事件就可以用随机变量来描述.

随机变量的方便之处

引入了随机变量之后, 随机事件就可以用随机变量来描述.

例如, 在某城市中考察人口的年龄结构, 年龄在 80 岁以上的长寿者, 年龄介于 18 岁至 35 岁之间的年轻人, 以及不到 12 岁的儿童, 它们各自的比率如何.

随机变量的方便之处

引入了随机变量之后, 随机事件就可以用随机变量来描述.

例如, 在某城市中考察人口的年龄结构, 年龄在 80 岁以上的长寿者, 年龄介于 18 岁至 35 岁之间的年轻人, 以及不到 12 岁的儿童, 它们各自的比率如何.

引进随机变量 X: X 表示随机抽取一个人的年龄; 则上述几个事件可以分别表示成 $\{X > 80\}$, $\{18 \leqslant X \leqslant 35\}$ 及 $\{X < 12\}$.

分布函数

Definition 2

设 X 为一个随机变量, x 为任意实数, 称函数

$$F(x) = P(X \leqslant x)$$

为 X 的分布函数.

分布函数

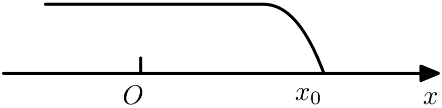
Definition 2

设 X 为一个随机变量, x 为任意实数, 称函数

$$F(x) = P(X \leqslant x)$$

为 X 的分布函数.

$F(x_0) = P(X \leqslant x_0)$ 的含义:



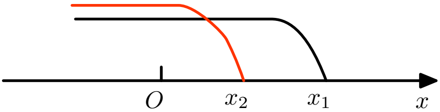
随机点能落到 x_0 左边的概率.

关于 $F(x) = P(X \leqslant x)$

1. 为什么是函数?
2. 定义域和值域是什么?
3. 方便之处?

$F(x) = P(X \leqslant x)$ 为什么是函数?

对于每一个实数 x, $\{X \leqslant x\}$ 都是一个事件, 因此有一个确定的概率 $P(X \leqslant x)$ 与 x 相对应.

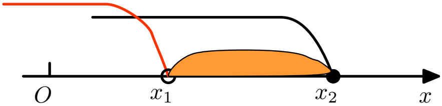


所以, 概率 $P(X \leqslant x)$ 是 x 的函数.

$F(x) = P(X \leqslant x)$ 的定义域和值域是什么?

- 定义域: $(-\infty, +\infty)$.
- 值域: $[0, 1]$.

比如



$$P\{x_1 < X \leqslant x_2\} = P\{X \leqslant x_2\} - P\{X \leqslant x_1\}$$
$$= F(x_2) - F(x_1)$$

分布函数的性质 1

$F(x)$ 是自变量 x 的非降函数, 即当 $x_1 < x_2$ 时, 必有$F(x_1) \leqslant F(x_2)$.

分布函数的性质 1

$F(x)$ 是自变量 x 的非降函数, 即当 $x_1 < x_2$ 时, 必有$F(x_1) \leqslant F(x_2)$.

因为当 $x_1 < x_2$ 时有

$$F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 < X \leqslant x_2) \geqslant 0,$$

从而有 $F(x_1) \leqslant F(x_2)$.

分布函数的性质 2

$F(x)$ 对自变量 x 右连续, 即对任意实数 x, $F(x+0)=F(x)$.

分布函数的性质 2

$F(x)$ 对自变量 x 右连续, 即对任意实数 x, $F(x+0)=F(x)$.

事实上,

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0^+}[F(x+\Delta x)-F(x)] &= \lim_{\Delta x\to 0^+} P(x<X\leqslant x+\Delta x)\\ &= P(x<X\leqslant x)\\ &= P(\varnothing)=0\end{aligned}$$

分布函数的性质 2

$F(x)$ 对自变量 x 右连续, 即对任意实数 x, $F(x+0)=F(x)$.

事实上,

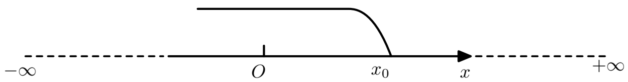
$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0^+}[F(x+\Delta x)-F(x)] &= \lim_{\Delta x\to 0^+} P(x<X\leqslant x+\Delta x)\\ &= P(x<X\leqslant x)\\ &= P(\varnothing)=0\end{aligned}$$

右连续性是随机变量的分布函数的普遍性质.

1. 对连续的随机变量, $F(x)$ 是连续函数.
2. 对离散的随机变量, 在可能值 x_i, $(i=1,2,...)$ 处, $F(x)$ 是右连续的.

分布函数的性质 3

$F(-\infty) = 0,\ F(+\infty) = 1.$



为什么是 $F(x) = P(X \leqslant x)$?

- 这种定义方式当然是人为的;
- 可以定义为 $F(x) = P(X \geqslant x)$, 其他的内容也作相应的改写.
- 这时的函数就是“左连续”的了.

离散型随机变量(Discrete Random Variable)

离散型随机变量的取值为

1. 有限个: $x_1, x_2, \cdots, x_n$.
2. 可列无穷个: $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$.

离散型随机变量(Discrete Random Variable)

离散型随机变量的取值为

1. 有限个: $x_1, x_2, \cdots, x_n$.
2. 可列无穷个: $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$.

Definition 3 (分布律(以可列无穷个的情形为例))

设离散型随机变量 X 可能取的值为 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$, 则

$$P(X = x_k) = p_k \qquad (k = 1, 2, \cdots, n, \cdots)$$

称为离散型随机变量 X 的分布律或分布列.

也称为概率分布(Probability Distribution).

分布律的表示

分布律常用表格的形式表示:

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

分布律的表示

分布律常用表格的形式表示:

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

比如例 1 中随机变量 X 的分布律为

X	0	1	2
p_k	0.3	0.6	0.1

分布律的表示

分布律常用表格的形式表示:

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

其中 p_k 满足以下两个**性质**:

1. $p_k \geqslant 0$;
2. $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$ (验算的依据)

Example 4

设袋中装有 6 个球, 编号为{-1, 2, 2, 2, 3, 3}. 从袋中任取一球, 求取到的球的号 X 的分布律.

Example 4

设袋中装有 6 个球, 编号为{-1, 2, 2, 2, 3, 3}. 从袋中任取一球, 求取到的球的号 X 的分布律.

解: X 所有可能取值为 -1, 2, 3, 而且

$$P\{X=-1\}=1/6$$

$$P\{X=2\}=3/6=1/2$$

$$P\{X=3\}=2/6=1/3$$

Example 4

设袋中装有 6 个球, 编号为{-1, 2, 2, 2, 3, 3}. 从袋中任取一球, 求取到的球的号 X 的分布律.

解: X 所有可能取值为 -1, 2, 3, 而且

$$P\{X=-1\}=1/6$$

$$P\{X=2\}=3/6=1/2$$

$$P\{X=3\}=2/6=1/3$$

所以X的分布律为

X	-1	2	3
p_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

回答为什么要引入随机变量

- 方便性 —— 将试验结果数字化, 方便表达.

回答为什么要引入随机变量

- 方便性 —— 将试验结果数字化, 方便表达.
- 全面性 —— 在第一章我们只是求某一单独结果, 这里是要把所有的结果都求出来.

几类重要的离散型随机变量的分布

- 0 — 1 分布
- 二项分布
- 泊松分布

0 — 1 分布

Definition 5

如果随机变量 X 只可能取 0 和 1 两个值, 且它的分布列为

$$P(X=1)=p,$$

$$P(X=0)=1-p.$$

其中 $0<p<1$. 则称 X 服从 0 — 1 分布(或两点分布).

$0 — 1$ 分布

Definition 5

如果随机变量 X 只可能取 0 和 1 两个值, 且它的分布列为

$$P(X=1)=p,$$

$$P(X=0)=1-p.$$

其中 $0<p<1$. 则称 X 服从 $0 — 1$ 分布(或两点分布).

$0 — 1$ 分布的概率分布表为:

X	1	0
P	p	$1-p$

0 — 1 分布

Definition 5

如果随机变量 X 只可能取 0 和 1 两个值, 且它的分布列为

$$P(X=1)=p,$$

$$P(X=0)=1-p.$$

其中 $0<p<1$. 则称 X 服从 0 — 1 分布(或两点分布).

0 — 1 分布的概率分布表为:

X	1	0
P	p	$1-p$

我们当然可以制造一个“1 — 2 分布”出来.

二项分布

Definition 6

如果随机变量 X 只可能取的值为 0, 1, 2, . . . , n, 它的分布列为

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k} \quad k=0,1,2,\cdots n$$

其中 $0<p<1$, $q=1-p$. 则称 X 服从参数为 n, p 的二项分布(the Binomial Distribution), 记为$X\sim B(n,p)$.

二项分布

Definition 6

如果随机变量 X 只可能取的值为 0, 1, 2, ..., n, 它的分布列为

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^kq^{n-k} \quad k=0,1,2,\cdots n$$

其中 $0<p<1$, $q=1-p$. 则称 X 服从参数为 n, p 的二项分布(the Binomial Distribution), 记为$X\sim B(n,p)$.

- X 是 n 重 Bernoulli 试验中, 事件 A 发生的次数.

二项分布

Definition 6

如果随机变量 X 只可能取的值为 0, 1, 2, . . . , n, 它的分布列为

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}\quad k=0,1,2,\cdots n$$

其中 $0<p<1$, $q=1-p$. 则称 X 服从参数为 n, p 的二项分布(the Binomial Distribution), 记为$X\sim B(n,p)$.

- X 是 n 重 Bernoulli 试验中, 事件 A 发生的次数.
- $\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$ 是二项式 $(p+q)^n$ 展开的一般项, 所以谓之二项分布.

二项分布

Definition 6

如果随机变量 X 只可能取的值为 0, 1, 2, . . . , n, 它的分布列为

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k} \quad k=0,1,2,\cdots n$$

其中 $0<p<1$, $q=1-p$. 则称 X 服从参数为 n, p 的二项分布(the Binomial Distribution), 记为$X\sim B(n,p)$.

- X 是 n 重 Bernoulli 试验中, 事件 A 发生的次数.
- $\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$ 是二项式 $(p+q)^n$ 展开的一般项, 所以谓之二项分布.
- 当 $n=1$ 时, 二项分布就是 0 — 1 分布.

Example 7

某车间有 8 台 5.6 千瓦的车床, 每台车床由于工艺上的原因, 常要停车. 设各车床停车是相互独立的, 每台车床平均每小时停车 12 分钟.

1. 求在某一指定的时刻车间恰有两台车床停车的概率.
2. 全部车床用电超过 30 千瓦的可能有多大?

Example 7

某车间有 8 台 5.6 千瓦的车床, 每台车床由于工艺上的原因, 常要停车. 设各车床停车是相互独立的, 每台车床平均每小时停车 12 分钟.

1. 求在某一指定的时刻车间恰有两台车床停车的概率.
2. 全部车床用电超过 30 千瓦的可能有多大?

解: 由于每台车床使用是独立的, 而且只有开车与停车两种情况, 且停车的概率为 $12/60 = 0.2$, 因此, 这是一个 8 重伯努利试验.

Example 7

某车间有 8 台 5.6 千瓦的车床, 每台车床由于工艺上的原因, 常要停车. 设各车床停车是相互独立的, 每台车床平均每小时停车 12 分钟.

1. 求在某一指定的时刻车间恰有两台车床停车的概率.
2. 全部车床用电超过 30 千瓦的可能有多大?

解: 由于每台车床使用是独立的, 而且只有开车与停车两种情况, 且停车的概率为 $12/60 = 0.2$, 因此, 这是一个 8 重伯努利试验.

若用 X 表示"任意时刻同时停车的车床数", 则 $X \sim B(8, 0.2)$, 其分布律为

$$P(X = k) = \binom{8}{k}(0.2)^k(0.8)^{8-k}, \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, 8)$$

1. 所求概率为

$$P(X=2)=\binom{8}{2}(0.2)^2(0.8)^6=0.2936$$

1. 所求概率为

$$P(X=2)=\binom{8}{2}(0.2)^2(0.8)^6=0.2936$$

2. 由于 30 千瓦的电量至多能供 5 台车床同时工作, “用电超过 30 千瓦”意味着有 6 台或 6 台以上的车床同时工作,

1. 所求概率为

$$P(X=2)=\binom{8}{2}(0.2)^2(0.8)^6=0.2936$$

2. 由于 30 千瓦的电量至多能供 5 台车床同时工作, “用电超过 30 千瓦”意味着有 6 台或 6 台以上的车床同时工作, 所求事件的概率为

$$\begin{aligned}P(X\geqslant 6)&=P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)\\&=\binom{8}{6}(0.2)^6(0.8)^2+\binom{8}{7}(0.2)^7 0.8+(0.2)^8\\&=0.00123\end{aligned}$$

Example 8 (课堂练习)

抛硬币 10 次, 写出正面向上的次数 X 的分布律; 并求正面向上次数不小于 3 的概率.

Example 8 (课堂练习)

抛硬币 10 次, 写出正面向上的次数 X 的分布律; 并求正面向上次数不小于 3 的概率.

解: 随机变量服从二项分布: $X \sim B(10, 0.5)$. 分布律为

$$\begin{aligned} P(x=k) &= \binom{10}{k} 0.5^k \times 0.5^{10-k} \\ &= \binom{10}{k} 0.5^{10}, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, 10. \end{aligned}$$

Example 8 (课堂练习)

抛硬币 10 次, 写出正面向上的次数 X 的分布律; 并求正面向上次数不小于 3 的概率.

解: 随机变量服从二项分布: $X \sim B(10,\, 0.5)$. 分布律为

$$\begin{aligned} P(x=k) &= \binom{10}{k} 0.5^k \times 0.5^{10-k} \\ &= \binom{10}{k} 0.5^{10}, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, 10. \end{aligned}$$

正面向上次数不小于 3 的概率:

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 3) &= 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) \\ &= 1 - 0.5^{10} - \binom{10}{1} 0.5^{10} - \binom{10}{2} 0.5^{10} \\ &= 1 - (1 + 10 + 45) \times 0.5^{10} \approx 0.945 \end{aligned}$$

泊松定理(Poisson theorem)

Theorem 9 (泊松定理)

设对每个自然数 n, $0 < p_n < 1$. 若存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty} np_n = \lambda$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots).$$

证: 令 $np_n=\lambda_n$, 有

$$\begin{aligned}&\binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^{n-k}\\=&\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}(\frac{\lambda_n}{n})^k(1-\frac{\lambda_n}{n})^n(1-\frac{\lambda_n}{n})^{-k}\\=&(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})\frac{\lambda_n^k}{k!}(1-\frac{\lambda_n}{n})^n(1-\frac{\lambda_n}{n})^{-k}\end{aligned}$$

证: 令 $np_n = \lambda_n$, 有

$$
\begin{aligned}
&\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k} \\
&= \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{\lambda_n^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k}
\end{aligned}
$$

对任意固定的 $k\,(0 \leqslant k \leqslant n)$, 当 $n \to \infty$ 时

$$
\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \to 1, \quad \left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k} \to 1, \quad \lambda_n^k \to \lambda^k
$$

证: 令 $np_n = \lambda_n$, 有

$$\begin{aligned}
&\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k} \\
&= \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{\lambda_n^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k}
\end{aligned}$$

对任意固定的 $k\,(0 \leqslant k \leqslant n)$, 当 $n \to \infty$ 时

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \to 1, \quad \left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k} \to 1, \quad \lambda_n^k \to \lambda^k$$

及

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda_n}(-\lambda_n)} = e^{-\lambda}$$

证: 令 $np_n = \lambda_n$, 有

$$\begin{aligned}&\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k}\\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k}\\ &= \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{\lambda_n^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k}\end{aligned}$$

对任意固定的 $k\,(0 \leqslant k \leqslant n)$, 当 $n \to \infty$ 时

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \to 1, \quad \left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k} \to 1, \quad \lambda_n^k \to \lambda^k$$

及

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda_n}(-\lambda_n)} = e^{-\lambda}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

泊松定理的应用

在应用中, 当 n 很大, 且 p 很小(比如 $n \geqslant 20, p \leqslant 0.05$)时, 有以下的泊松分布近似公式

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

其中 $\lambda = np$.

而关于 $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ 的值, 可以查表(见教材附表 2).

泊松分布(Poisson distribution)

Definition 10 (泊松分布)

如果随机变量 X 所有可能取的值为 $0, 1, 2, \ldots,$ 它取各个值的概率为

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

其中 $\lambda > 0$ 是常数, 则称 X 服从参数为 λ 的 泊松分布, 记为 $X \sim P(\lambda)$.

关于泊松分布

1. λ 的含义将在第四章给出(随机变量的期望与方差);

关于泊松分布

1. λ 的含义将在第四章给出(随机变量的期望与方差);
2. 可以验证

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} &= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\\ &= e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = 1\end{aligned}$$

(泰勒级数展开式: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$.)

关于泊松分布

1. λ 的含义将在第四章给出(随机变量的期望与方差);
2. 可以验证

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$$
$$= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$$

(泰勒级数展开式: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$.)

3. 在现实生活中有着广泛的应用. 例如

关于泊松分布

1. λ 的含义将在第四章给出(随机变量的期望与方差);
2. 可以验证

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$$
$$= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$$

(泰勒级数展开式: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$.)

3. 在现实生活中有着广泛的应用. 例如
   - 某段时间内电话机接到的呼唤次数;

关于泊松分布

1. λ 的含义将在第四章给出(随机变量的期望与方差);
2. 可以验证

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}$$
$$=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=1$$

(泰勒级数展开式: $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots$.)

3. 在现实生活中有着广泛的应用. 例如
   - 某段时间内电话机接到的呼唤次数;
   - 候车的乘客数;

关于泊松分布

1. λ 的含义将在第四章给出(随机变量的期望与方差);
2. 可以验证
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}$$
$$=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=1$$
(泰勒级数展开式: $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots.$)
3. 在现实生活中有着广泛的应用. 例如
   - 某段时间内电话机接到的呼唤次数;
   - 候车的乘客数;
   - 一本书一页中的印刷错误数.

Example 11

某商店出售某种商品. 根据经验, 此商品的月销售量 X 服从 $\lambda = 3$ 的泊松分布. 问在月初进货时要库存多少件此种商品, 才能以 99% 的概率满足顾客要求?

Example 11

某商店出售某种商品. 根据经验, 此商品的月销售量 X 服从 $\lambda = 3$ 的泊松分布. 问在月初进货时要库存多少件此种商品, 才能以 99% 的概率满足顾客要求?

解: 设月初库存 M 件, 依题意

$$P(X = k) = \frac{3^k}{k!}e^{-3}, \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

Example 11

某商店出售某种商品. 根据经验, 此商品的月销售量 X 服从 $\lambda = 3$ 的泊松分布. 问在月初进货时要库存多少件此种商品, 才能以 99% 的概率满足顾客要求?

解: 设月初库存 M 件, 依题意

$$P(X = k) = \frac{3^k}{k!} e^{-3}, \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

那么

$$P(X \leqslant M) = \sum_{k=0}^{M} \frac{3^k}{k!} e^{-3} \geqslant 0.99$$

Example 11

某商店出售某种商品. 根据经验, 此商品的月销售量 X 服从 $\lambda = 3$ 的泊松分布. 问在月初进货时要库存多少件此种商品, 才能以 99% 的概率满足顾客要求?

解: 设月初库存 M 件, 依题意

$$P(X=k)=\frac{3^k}{k!}e^{-3}, \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

那么

$$P(X \leqslant M)=\sum_{k=0}^{M}\frac{3^k}{k!}e^{-3} \geqslant 0.99$$

即

$$\sum_{k=M+1}^{\infty}\frac{3^k}{k!}e^{-3} \leqslant 0.01$$

Example 11

某商店出售某种商品. 根据经验, 此商品的月销售量 X 服从 $\lambda = 3$ 的泊松分布. 问在月初进货时要库存多少件此种商品, 才能以 99% 的概率满足顾客要求?

解: 设月初库存 M 件, 依题意

$$P(X = k) = \frac{3^k}{k!} e^{-3}, \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

那么

$$P(X \leqslant M) = \sum_{k=0}^{M} \frac{3^k}{k!} e^{-3} \geqslant 0.99$$

即

$$\sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{3^k}{k!} e^{-3} \leqslant 0.01$$

查附表 2 (see next slide),

Example 11

某商店出售某种商品. 根据经验, 此商品的月销售量 X 服从 $\lambda = 3$ 的泊松分布. 问在月初进货时要库存多少件此种商品, 才能以 99% 的概率满足顾客要求?

解: 设月初库存 M 件, 依题意

$$P(X = k) = \frac{3^k}{k!}e^{-3}, \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

那么

$$P(X \leqslant M) = \sum_{k=0}^{M} \frac{3^k}{k!}e^{-3} \geqslant 0.99$$

即

$$\sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{3^k}{k!}e^{-3} \leqslant 0.01$$

查附表 2 (see next slide), 得 $M + 1 \geqslant 9$ 时有上式成立. 所以 M 最小应是 8.

见教材泊松分布表.

$$P(X \geqslant x) = \sum_{r=x}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda}$$

x	$\lambda = 2.5$	$\lambda = 3.0$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
8	$\vdots$	0.011905	$\vdots$
9	$\vdots$	0.003803	$\vdots$
10	$\vdots$	0.001102	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Example 12

一本 500 页的书, 共 500 错字, 每个字等可能的出现在每一页上, 求在给定的某一页上最多两个错字的概率.

Example 12

一本 500 页的书, 共 500 错字, 每个字等可能的出现在每一页上, 求在给定的某一页上最多两个错字的概率.

解: 设 X 表示在给定的某一页上出现的错字的个数, 则 $X \sim B(500, \dfrac{1}{500})$.

Example 12

一本 500 页的书, 共 500 错字, 每个字等可能的出现在每一页上, 求在给定的某一页上最多两个错字的概率.

解: 设 X 表示在给定的某一页上出现的错字的个数, 则 $X \sim B(500, \dfrac{1}{500})$.

因为 n 很大, p 很小, 所以可以用泊松分布近似计算. 依题意, X 近似服从 $\lambda = np = 1$ 的泊松分布.

Example 12

一本 500 页的书, 共 500 错字, 每个字等可能的出现在每一页上, 求在给定的某一页上最多两个错字的概率.

解: 设 X 表示在给定的某一页上出现的错字的个数, 则 $X \sim B(500, \dfrac{1}{500})$.

因为 n 很大, p 很小, 所以可以用泊松分布近似计算. 依题意, X 近似服从 $\lambda = np = 1$ 的泊松分布.

$$\begin{aligned} P(X \leqslant 2) &\approx \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{k!} e^{-1} \\ &= e^{-1} + e^{-1} + \frac{e^{-1}}{2} \\ &= \frac{5}{2} e^{-1} \approx 0.92 \end{aligned}$$

Example 12

一本 500 页的书, 共 500 错字, 每个字等可能的出现在每一页上, 求在给定的某一页上最多两个错字的概率.

解: 设 X 表示在给定的某一页上出现的错字的个数, 则 $X \sim B(500, \frac{1}{500})$.

因为 n 很大, p 很小, 所以可以用泊松分布近似计算. 依题意, X 近似服从 $\lambda = np = 1$ 的泊松分布.

$$\begin{aligned} P(X \leqslant 2) &\approx \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{k!} e^{-1} \\ &= e^{-1} + e^{-1} + \frac{e^{-1}}{2} \\ &= \frac{5}{2} e^{-1} \approx 0.92 \end{aligned}$$

或者查表得 $P(X \leqslant 2) = 1 - P(X \geqslant 3) = 1 - 0.080301 \approx 0.92$.

小结: 三种重要的离散型随机变量分布的关系

1. 二项分布在三者中处于中心地位;
2. $0—1$ 分布是二项分布中 $n = 1$ 的情形.
   所以, $0—1$ 分布也可以记成: $X \sim B(1, p)$.
3. 泊松分布是二项分布中 $n \to \infty$ 的极限情形.
   在二项分布计算中, 当 n 较大, p 较小时, 常转化为泊松分布来近似计算.

练习

1. 对离散型随机变量 X, $P\{X=k\}=\dfrac{a}{N}$, $k=1, 2, \cdots, N$. 则 $a=$____.
2. 对离散型随机变量 X, $P\{X=k\}=a\dfrac{\lambda^k}{k!}$, $k=0, 1, 2, \cdots$. 则 $a=$____.
3. 设随机变量 $X\sim P(\lambda)$, 且 $P\{X=1\}=P\{X=2\}$. 求 $P\{X=4\}$.

练习

1. 对离散型随机变量 X, $P\{X=k\}=\dfrac{a}{N}$, $k=1,2,\cdots,N$. 则 $a=$____.
2. 对离散型随机变量 X, $P\{X=k\}=a\dfrac{\lambda^k}{k!}$, $k=0,1,2,\cdots$. 则 $a=$____.
3. 设随机变量 $X\sim P(\lambda)$, 且 $P\{X=1\}=P\{X=2\}$. 求 $P\{X=4\}$.

① $a=1$; ② $a=e^{-\lambda}$; ③ $\dfrac{2}{3}e^{-2}$.

Example 13

设随机变量 X 的分布律为

X	-1	2	3
p_k	0.25	0.5	0.25

求 X 的分布函数, 并求 $P\{X \leqslant 0.5\}$, $P\{1.5 < X \leqslant 2.5\}$, $P\{2 \leqslant X \leqslant 3\}$.

Example 13

设随机变量 X 的分布律为

X	-1	2	3
p_k	0.25	0.5	0.25

求 X 的分布函数, 并求 $P\{X \leqslant 0.5\}$, $P\{1.5 < X \leqslant 2.5\}$, $P\{2 \leqslant X \leqslant 3\}$.

解: 要求 $F(x) = P\{X \leqslant x\}$, 注意到随机变量 X 的所有可能取值为 -1, 2, 3.

Example 13

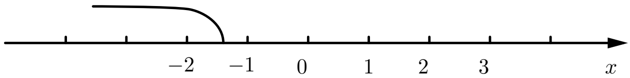
设随机变量 X 的分布律为

X	-1	2	3
p_k	0.25	0.5	0.25

求 X 的分布函数, 并求 $P\{X \leqslant 0.5\}$, $P\{1.5 < X \leqslant 2.5\}$, $P\{2 \leqslant X \leqslant 3\}$.

解: 要求 $F(x) = P\{X \leqslant x\}$, 注意到随机变量 X 的所有可能取值为 $-1, 2, 3$.

① 当 $x < -1$ 时,



$F(x) = P\{X \leqslant x\}$

Example 13

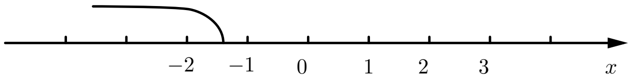
设随机变量 X 的分布律为

X	-1	2	3
p_k	0.25	0.5	0.25

求 X 的分布函数, 并求 $P\{X \leqslant 0.5\}$, $P\{1.5 < X \leqslant 2.5\}$, $P\{2 \leqslant X \leqslant 3\}$.

解: 要求 $F(x) = P\{X \leqslant x\}$, 注意到随机变量 X 的所有可能取值为 -1, 2, 3.

① 当 $x < -1$ 时,



$F(x) = P\{X \leqslant x\} = P\{\varnothing\} = 0.$

X	-1	2	3
p_k	0.25	0.5	0.25

② 当 $x=-1$ 时, $F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X\leqslant -1\}$

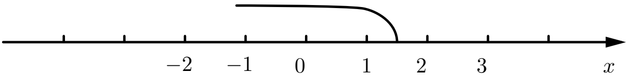
X	-1	2	3
p_k	0.25	0.5	0.25

② 当 $x=-1$ 时, $F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X\leqslant -1\}=P\{X=-1\}=0.25$.

X	-1	2	3
p_k	0.25	0.5	0.25

② 当 $x=-1$ 时, $F(x)=P\{X \leqslant x\}=P\{X \leqslant -1\}=P\{X=-1\}=0.25$.

③ 当 $-1<x<2$ 时,

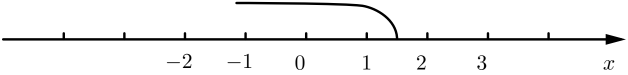


$F(x)=P\{X \leqslant x\}$

X	-1	2	3
p_k	0.25	0.5	0.25

② 当 $x=-1$ 时, $F(x)=P\{X \leqslant x\}=P\{X \leqslant -1\}=P\{X=-1\}=0.25.$

③ 当 $-1<x<2$ 时,

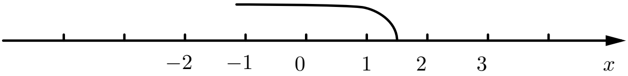


$F(x)=P\{X \leqslant x\}=P\{X=-1\}=0.25.$

X	-1	2	3
p_k	0.25	0.5	0.25

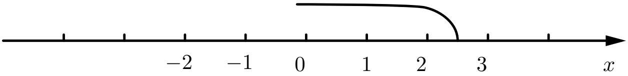
② 当 $x=-1$ 时, $F(x)=P\{X \leqslant x\}=P\{X \leqslant -1\}=P\{X=-1\}=0.25.$

③ 当 $-1<x<2$ 时,



$F(x)=P\{X \leqslant x\}=P\{X=-1\}=0.25.$

④ 当 $2 \leqslant x<3$ 时,

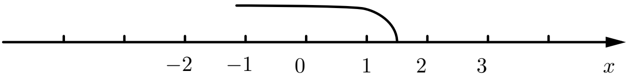


$F(x)=P\{X \leqslant x\}$

X	-1	2	3
p_k	0.25	0.5	0.25

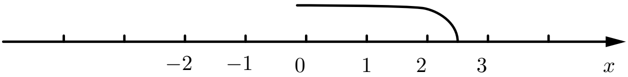
② 当 $x=-1$ 时, $F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X\leqslant -1\}=P\{X=-1\}=0.25.$

③ 当 $-1<x<2$ 时,



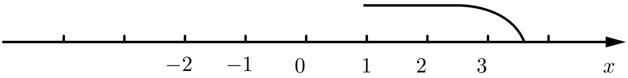
$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X=-1\}=0.25.$

④ 当 $2\leqslant x<3$ 时,



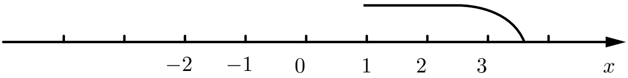
$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X=-1\}+P\{X=2\}=0.75.$

⑤ 当 $x \geqslant 3$ 时,



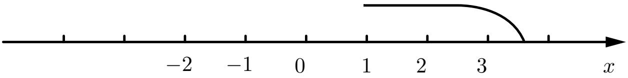
$$F(x) = P\{X \leqslant x\}$$

⑤ 当 $x \geqslant 3$ 时,



$$F(x) = P\{X \leqslant x\} = P\{X = -1\} + P\{X = 2\} + P\{X = 3\} = 1.$$

⑤ 当 $x \geqslant 3$ 时,

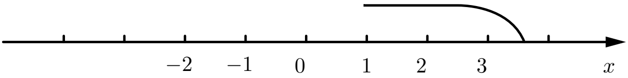


$$F(x) = P\{X \leqslant x\} = P\{X = -1\} + P\{X = 2\} + P\{X = 3\} = 1.$$

所以

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 0.25 & -1 \leqslant x < 2 \\ 0.75 & 2 \leqslant x < 3 \\ 1 & x \geqslant 3 \end{cases}$$

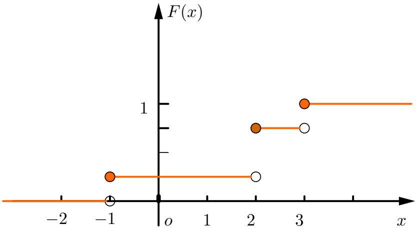
⑤ 当 $x \geqslant 3$ 时,



$$F(x) = P\{X \leqslant x\} = P\{X = -1\} + P\{X = 2\} + P\{X = 3\} = 1.$$

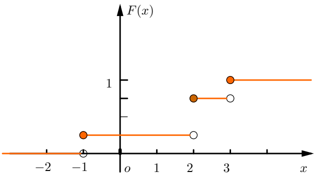
所以

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 0.25 & -1 \leqslant x < 2 \\ 0.75 & 2 \leqslant x < 3 \\ 1 & x \geqslant 3 \end{cases}$$

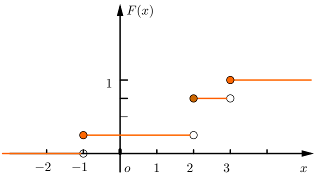


$$P\{X \leqslant 0.5\} = F(0.5) = 0.25$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 0.25 & -1 \leqslant x < 2 \\ 0.75 & 2 \leqslant x < 3 \\ 1 & x \geqslant 3 \end{cases}$$



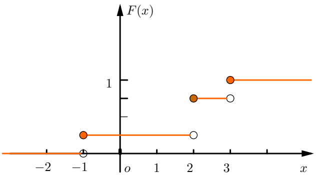
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 0.25 & -1 \leqslant x < 2 \\ 0.75 & 2 \leqslant x < 3 \\ 1 & x \geqslant 3 \end{cases}$$



$$P\{X \leqslant 0.5\} = F(0.5) = 0.25$$

$$\begin{aligned} P\{1.5 < X \leqslant 2.5\} &= F(2.5) - F(1.5) \\ &= 0.75 - 0.25 \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 0.25 & -1 \leqslant x < 2 \\ 0.75 & 2 \leqslant x < 3 \\ 1 & x \geqslant 3 \end{cases}$$



$$P\{X \leqslant 0.5\} = F(0.5) = 0.25$$

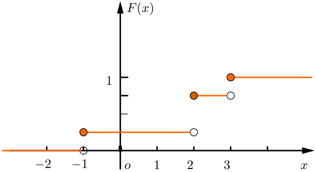
$$\begin{aligned} P\{1.5 < X \leqslant 2.5\} &= F(2.5) - F(1.5) \\ &= 0.75 - 0.25 \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{2 \leqslant X \leqslant 3\} &= F(3) - F(2) + P\{X = 2\} \\ &= 1 - 0.75 + 0.5 \\ &= 0.75 \end{aligned}$$

$$P\{X \leqslant 0.5\} = F(0.5) = 0.25$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 0.25 & -1 \leqslant x < 2 \\ 0.75 & 2 \leqslant x < 3 \\ 1 & x \geqslant 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P\{1.5 < X \leqslant 2.5\} &= F(2.5) - F(1.5) \\ &= 0.75 - 0.25 \\ &= 0.5 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} P\{2 \leqslant X \leqslant 3\} &= F(3) - F(2) + P\{X = 2\} \\ &= 1 - 0.75 + 0.5 \\ &= 0.75 \end{aligned}$$

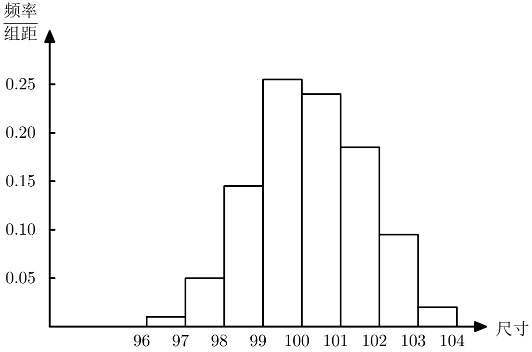
也可以直接求, 比如:

$$\begin{aligned} P\{1.5 < X \leqslant 2.5\} &= P\{X = 2\} \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

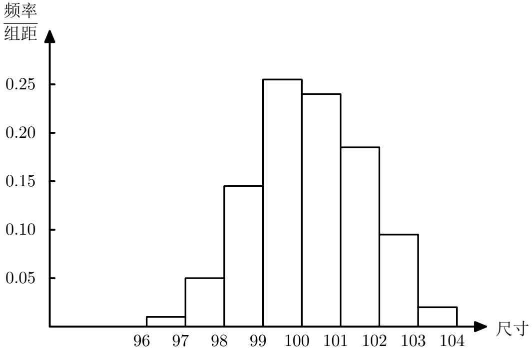
任意抽取 500 个零件, 测得其长度落在 $96 \sim 104$ 范围内(单位毫米).

组	频数	频率
$96 \sim 97$	6	0.012
$97 \sim 98$	25	0.050
$98 \sim 99$	72	0.144
$99 \sim 100$	133	0.266
$100 \sim 101$	120	0.240
$101 \sim 102$	88	0.176
$102 \sim 103$	46	0.092
$103 \sim 104$	10	0.020

给出统计直方图



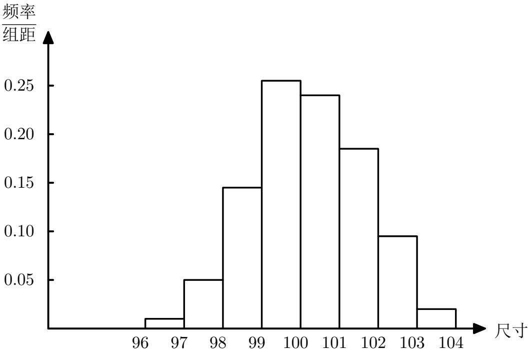
给出统计直方图



特点:

1. 每一个小矩形的面积 = 这一组数据发生的频率;

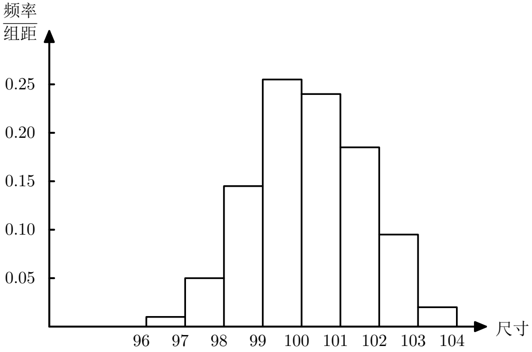
给出统计直方图



特点:

1. 每一个小矩形的面积 = 这一组数据发生的频率;
2. 所有的小矩形面积之和 = 1.

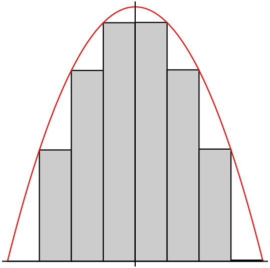
给出统计直方图



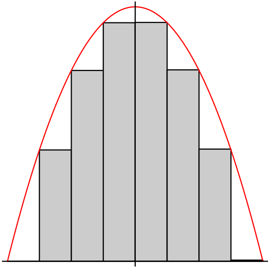
特点:

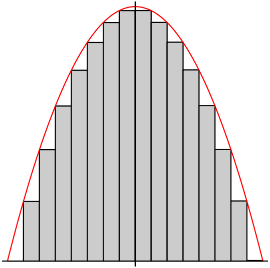
1. 每一个小矩形的面积 = 这一组数据发生的频率;
2. 所有的小矩形面积之和 = 1.
3. 直方图的纵坐标, 体现了频率分布的疏密程度, 不妨称之“频率密度”.

当观测值增多, 且分组越细时, 可以看到一条理论分布曲线.

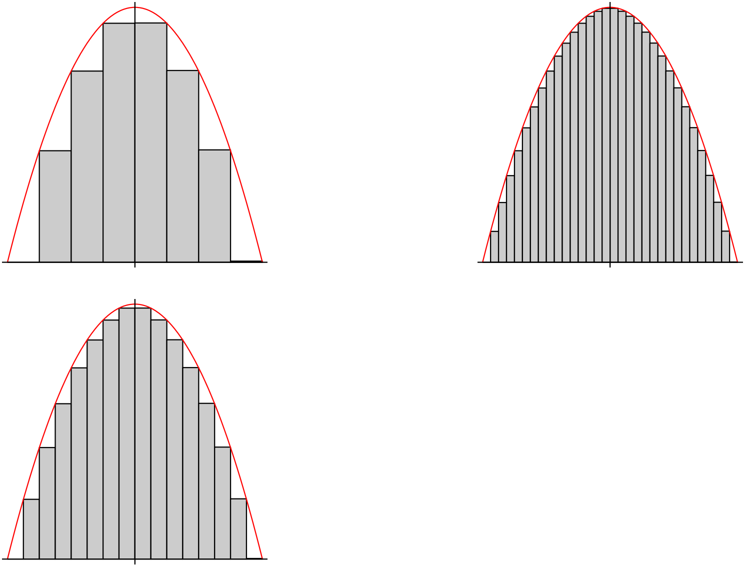


当观测值增多, 且分组越细时, 可以看到一条理论分布曲线.

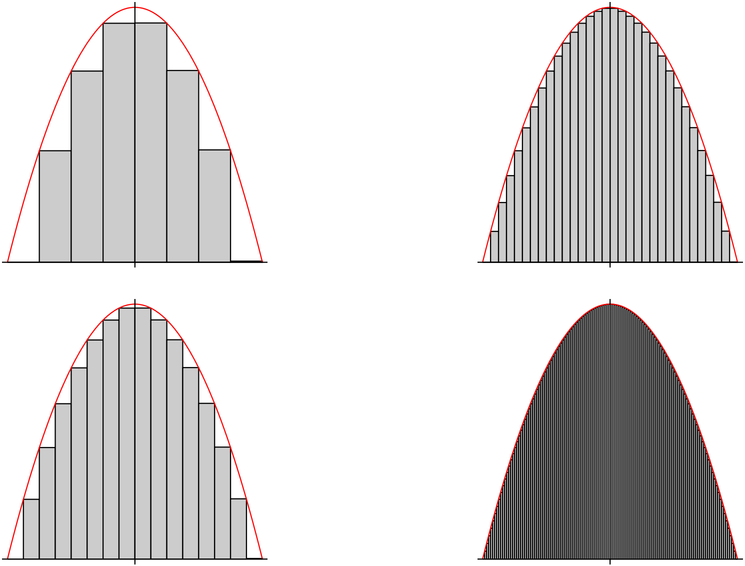




当观测值增多, 且分组越细时, 可以看到一条理论分布曲线.



当观测值增多, 且分组越细时, 可以看到一条理论分布曲线.



概率密度函数

这条理论分布曲线, 反映了连续型随机变量的概率分布密度, 谓之概率密度函数, 记为 $f(x)$.

概率密度函数

这条理论分布曲线, 反映了连续型随机变量的概率分布密度, 谓之概率密度函数, 记为 $f(x)$.

且易知 $f(x)$ 的性质:

- $f(x) \geqslant 0$;

概率密度函数

这条理论分布曲线, 反映了连续型随机变量的概率分布密度, 谓之概率密度函数, 记为 $f(x)$.

且易知 $f(x)$ 的性质:

- $f(x) \geqslant 0$; 从几何上看, 概率密度函数的曲线在横轴的上方;

概率密度函数

这条理论分布曲线, 反映了连续型随机变量的概率分布密度, 谓之概率密度函数, 记为 $f(x)$.

且易知 $f(x)$ 的性质:

- $f(x) \geqslant 0$; 从几何上看, 概率密度函数的曲线在横轴的上方;
- $P\{a \leqslant X \leqslant b\} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$;

概率密度函数

这条理论分布曲线, 反映了连续型随机变量的概率分布密度, 谓之概率密度函数, 记为 $f(x)$.

且易知 $f(x)$ 的性质:

- $f(x) \geqslant 0$; 从几何上看, 概率密度函数的曲线在横轴的上方;
- $P\{a \leqslant X \leqslant b\} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$;
  $P\{a < X \leqslant b\} = P\{a \leqslant X < b\} = P\{a < X < b\} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$;

概率密度函数

这条理论分布曲线, 反映了连续型随机变量的概率分布密度, 谓之概率密度函数, 记为 $f(x)$.

且易知 $f(x)$ 的性质:

- $f(x) \geqslant 0$; 从几何上看, 概率密度函数的曲线在横轴的上方;
- $P\{a \leqslant X \leqslant b\} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$;
  $P\{a < X \leqslant b\} = P\{a \leqslant X < b\} = P\{a < X < b\} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$;
  计算连续型随机变量在某一区间上取值的概率时, 区间端点对概率无影响.

概率密度函数

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$;

概率密度函数

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$; 这是因为 $-\infty < X < +\infty$ 是必然事件, 所以
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = P\{-\infty < X < +\infty\} = P(\Omega) = 1$$

概率密度函数

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$; 这是因为 $-\infty < X < +\infty$ 是必然事件, 所以
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = P\{-\infty < X < +\infty\} = P(\Omega) = 1$$
从几何上看, 对于任一连续型随机变量, 概率密度函数与数轴所围成的面积是 1;

概率密度函数

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$; 这是因为 $-\infty < X < +\infty$ 是必然事件, 所以
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = P\{-\infty < X < +\infty\} = P(\Omega) = 1$$
从几何上看, 对于任一连续型随机变量, 概率密度函数与数轴所围成的面积是 1;
- $P\{X = a\} = 0$.

概率密度函数

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$; 这是因为 $-\infty < X < +\infty$ 是必然事件, 所以
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = P\{-\infty < X < +\infty\} = P(\Omega) = 1$$
从几何上看, 对于任一连续型随机变量, 概率密度函数与数轴所围成的面积是 1;
- $P\{X = a\} = 0$. 即连续型随机变量取某一实数值的概率为零.

强调一个问题: 概率为 0 的事件不一定是不可能事件. 即

$$P(A) = 0 \quad \nRightarrow A = \varnothing.$$

概率密度函数

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$; 这是因为 $-\infty < X < +\infty$ 是必然事件, 所以
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = P\{-\infty < X < +\infty\} = P(\Omega) = 1$$
从几何上看, 对于任一连续型随机变量, 概率密度函数与数轴所围成的面积是 1;
- $P\{X = a\} = 0$. 即连续型随机变量取某一实数值的概率为零.

强调一个问题: 概率为 0 的事件不一定是不可能事件. 即
$$P(A) = 0 \quad \not\Rightarrow A = \varnothing.$$
比如, $P(AB) = 0$, 就不能推得“A, B 是互不相容事件”.

连续型随机变量的分布函数

- 设连续型随机变量的概率密度函数为 $f(x)$, 则其概率分布函数为

$$\begin{aligned} F(x) &= P\{X \leqslant x\} && (1) \\ &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t && (2) \\ &= \int_{-\infty}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x && (3) \end{aligned}$$

连续型随机变量的分布函数

- 设连续型随机变量的概率密度函数为 $f(x)$, 则其概率分布函数为

$$F(x) = P\{X \leqslant x\} \tag{1}$$
$$= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{2}$$
$$= \int_{-\infty}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{3}$$

- 对于任意实数 $a \leqslant b$, 有 $P\{a < X \leqslant b\} = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$;

连续型随机变量的分布函数

- 设连续型随机变量的概率密度函数为 $f(x)$, 则其概率分布函数为

$$
\begin{aligned}
F(x) &= P\{X \leqslant x\} &(1)\\
&= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t &(2)\\
&= \int_{-\infty}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x &(3)
\end{aligned}
$$

- 对于任意实数 $a \leqslant b$, 有 $P\{a < X \leqslant b\} = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$;
- 若 $f(x)$ 在点 x 处连续, 则 $F'(x) = f(x)$.

Example 14

设随机变量 X 具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases} kx, & 0\leqslant x<3,\\ 2-\dfrac{x}{2}, & 3\leqslant x\leqslant 4,\\ 0, & \text{其它}. \end{cases} \tag{4}$$

① 确定常数 k; ② 求 X 的分布函数 $F(x)$; ③ 求 $P\{1<X\leqslant 3.5\}$.

Example 14

设随机变量 X 具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases} kx, & 0\leqslant x<3,\\ 2-\dfrac{x}{2}, & 3\leqslant x\leqslant 4,\\ 0, & \text{其它}. \end{cases} \tag{4}$$

① 确定常数 k; ② 求 X 的分布函数 $F(x)$; ③ 求 $P\{1<X\leqslant 3.5\}$.

解: ① 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=1$, 得

$$\int_0^3 kx\,\mathrm{d}x+\int_3^4 (2-\frac{x}{2})\,\mathrm{d}x=1$$

Example 14

设随机变量 X 具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases} kx, & 0\leqslant x<3, \\ 2-\dfrac{x}{2}, & 3\leqslant x\leqslant 4, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases} \tag{4}$$

① 确定常数 k; ② 求 X 的分布函数 $F(x)$; ③ 求 $P\{1<X\leqslant 3.5\}$.

解: ① 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=1$, 得

$$\int_0^3 kx\,\mathrm{d}x+\int_3^4 (2-\frac{x}{2})\,\mathrm{d}x=1$$

解得 $k=\dfrac{1}{6}$.

Example 14

设随机变量 X 具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases} kx, & 0\leqslant x<3,\\ 2-\dfrac{x}{2}, & 3\leqslant x\leqslant 4,\\ 0, & \text{其它}. \end{cases} \tag{4}$$

① 确定常数 k; ② 求 X 的分布函数 $F(x)$; ③ 求 $P\{1<X\leqslant 3.5\}$.

解: ① 更为详细的解释是: 由积分的区域可加性, 得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{3}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{4}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Example 14

设随机变量 X 具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases} kx, & 0\leqslant x<3,\\ 2-\dfrac{x}{2}, & 3\leqslant x\leqslant 4,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases} \tag{4}$$

① 确定常数 k; ② 求 X 的分布函数 $F(x)$; ③ 求 $P\{1<X\leqslant 3.5\}$.

解: ① 更为详细的解释是: 由积分的区域可加性, 得

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{3}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{4}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{3} kx\,\mathrm{d}x+\int_{3}^{4} (2-\frac{x}{2})\,\mathrm{d}x+\int_{4}^{+\infty} 0\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Example 14

设随机变量 X 具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases} kx, & 0\leqslant x<3,\\ 2-\dfrac{x}{2}, & 3\leqslant x\leqslant 4,\\ 0, & \text{其它}. \end{cases} \tag{4}$$

① 确定常数 k; ② 求 X 的分布函数 $F(x)$; ③ 求 $P\{1<X\leqslant 3.5\}$.

解: ① 更为详细的解释是: 由积分的区域可加性, 得

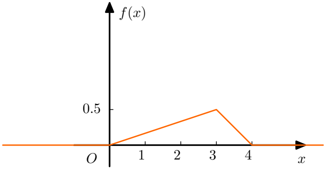
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{3}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{4}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{3} kx\,\mathrm{d}x+\int_{3}^{4}(2-\frac{x}{2})\,\mathrm{d}x+\int_{4}^{+\infty} 0\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{0}^{3} kx\,\mathrm{d}x+\int_{3}^{4}(2-\frac{x}{2})\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

得 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{6}, & 0 \leqslant x < 3, \\ 2 - \dfrac{x}{2}, & 3 \leqslant x \leqslant 4, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

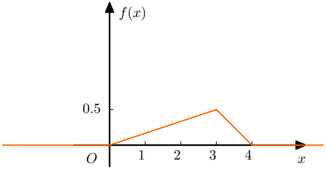
得 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{6}, & 0\leqslant x<3,\\ 2-\dfrac{x}{2}, & 3\leqslant x\leqslant 4,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$



得 X 的概率密度为

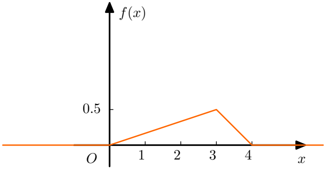
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{6}, & 0\leqslant x<3,\\ 2-\dfrac{x}{2}, & 3\leqslant x\leqslant 4,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$



② 对 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t$

得 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{6}, & 0\leqslant x<3,\\ 2-\dfrac{x}{2}, & 3\leqslant x\leqslant 4,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$



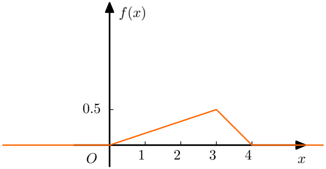
② 对 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t$

- $x<0$ 时,

  $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{x}0\,\mathrm{d}t=0.$

得 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{6}, & 0\leqslant x<3,\\ 2-\dfrac{x}{2}, & 3\leqslant x\leqslant 4,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$



② 对 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$

- $x<0$ 时，

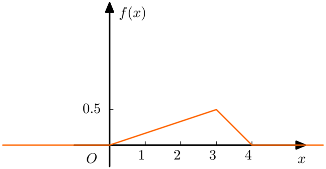
  $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t=0.$

- $0\leqslant x<3$ 时，

  $F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}\dfrac{t}{6}\,\mathrm{d}t=\dfrac{x^2}{12}.$

得 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{6}, & 0\leqslant x<3,\\ 2-\dfrac{x}{2}, & 3\leqslant x\leqslant 4,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$



② 对 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$

- $x<0$ 时，

  $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t=0.$

- $0\leqslant x<3$ 时，

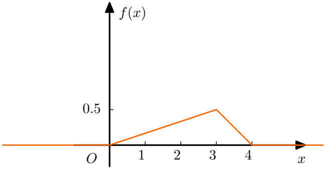
  $F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}\dfrac{t}{6}\,\mathrm{d}t=\dfrac{x^2}{12}.$

- $3\leqslant x<4$ 时，

$$\begin{aligned}&F(x)\\ &=\int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t+\int_{0}^{3}\frac{t}{6}\,\mathrm{d}t+\int_{3}^{x}(2-\frac{t}{2})\,\mathrm{d}t\\ &=-3+2x-x^2/4\end{aligned}$$

得 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{6}, & 0\leqslant x<3,\\ 2-\dfrac{x}{2}, & 3\leqslant x\leqslant 4,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$



② 对 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t$

- $x<0$ 时,

  $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{x}0\,\mathrm{d}t=0.$

- $0\leqslant x<3$ 时,

  $F(x)=\int_{-\infty}^{0}0\,\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}\dfrac{t}{6}\,\mathrm{d}t=\dfrac{x^2}{12}.$

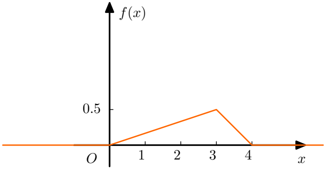
- $3\leqslant x<4$ 时,

$$\begin{aligned}&F(x)\\&=\int_{-\infty}^{0}0\,\mathrm{d}t+\int_{0}^{3}\frac{t}{6}\,\mathrm{d}t+\int_{3}^{x}(2-\frac{t}{2})\,\mathrm{d}t\\&=-3+2x-x^2/4\end{aligned}$$

- $x\geqslant 4$ 时, $F(x)=1.$

得 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{6}, & 0\leqslant x<3,\\ 2-\dfrac{x}{2}, & 3\leqslant x\leqslant 4,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$



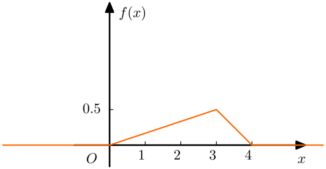
② 即

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x^2}{12}, & 0\leqslant x<3,\\ -3+2x-\dfrac{x^2}{4}, & 3\leqslant x<4,\\ 1, & x\geqslant 4.\end{cases}$$

注意：等号加在分段点的左边、右边均可.

得 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{6}, & 0\leqslant x<3,\\ 2-\dfrac{x}{2}, & 3\leqslant x\leqslant 4,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$



② 即

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x^2}{12}, & 0\leqslant x<3,\\ -3+2x-\dfrac{x^2}{4}, & 3\leqslant x<4,\\ 1, & x\geqslant 4.\end{cases}$$

注意: 等号加在分段点的左边、右边均可.

③ $P\{1<x\leqslant 3.5\}=F(3.5)-F(1)=41/48.$

三种重要的连续型随机变量的分布类型

1. 均匀分布;
2. 指数分布;
3. 正态分布.

Example 15

设概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}C, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases} \tag{5}$$

求常数 C.

Example 15

设概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}C, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases} \tag{5}$$

求常数 C.

解: 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b C\,\mathrm{d}x=C(b-a)=1$, 得

$$C=\frac{1}{b-a}$$

均匀分布

Definition 16

如果随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases} \tag{6}$$

则称 X 服从 $[a,\,b]$ 上的均匀分布(Uniform distribution).
记为 $X\sim U[a,\,b]$.

均匀分布

分布函数为

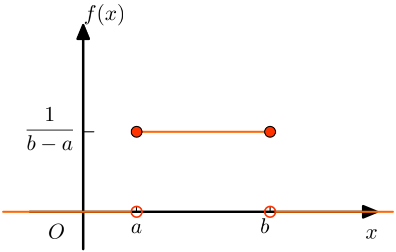
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x<b,\\ 1, & x\geqslant b.\end{cases}$$

均匀分布

分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \leqslant x < b, \\ 1, & x \geqslant b. \end{cases}$$

$f(x)$ 及 $F(x)$ 的图形分别为

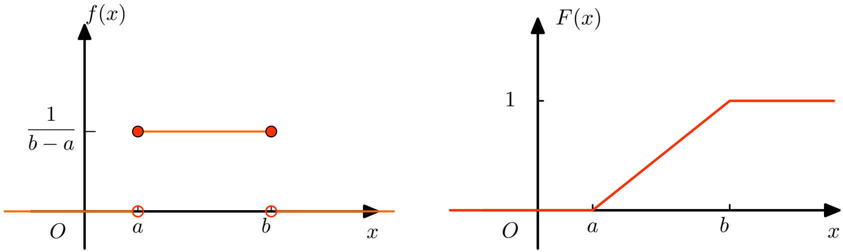


均匀分布

分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x<b,\\ 1, & x\geqslant b.\end{cases}$$

$f(x)$ 及 $F(x)$ 的图形分别为



均匀分布

如果 $X \sim U[a,\, b]$, 则对区间 $(c,\, c+l) \subset [a,\, b]$, 有

$$P\{c < X \leqslant c+l\} = \int_c^{c+l} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^{c+l} \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{l}{b-a}$$

均匀分布

如果 $X \sim U[a,\, b]$, 则对区间 $(c,\, c+l) \subset [a,\, b]$, 有

$$P\{c < X \leqslant c+l\} = \int_c^{c+l} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^{c+l} \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{l}{b-a}$$

这说明 X 取值于 $[a, b]$ 中任意小区间的概率与该小区间的长度成正比, 而与该小区间的具体位置无关. 这就是均匀分布的概率意义.

指数分布

Definition 17

如果随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases} \tag{7}$$

(其中 $\lambda > 0$ 为常数), 则称 X 服从参数为 λ 的指数分布(Exponential distribution).

记为 $X \sim E(\lambda)$.

指数分布

- 若 $X \sim E(\lambda)$, 则 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

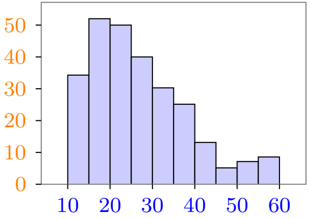
指数分布

- 若 $X \sim E(\lambda)$, 则 X 的分布函数为

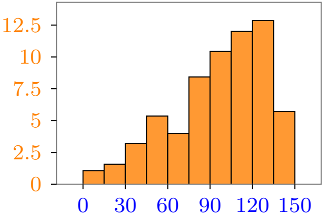
$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

- 指数分布也被称为“寿命分布”, 如下列事件都可近似看作是服从指数分布的:
  - 电子元件的寿命,
  - 电话通话的时间,
  - 随机服务系统的服务时间等.

数据的分布形态

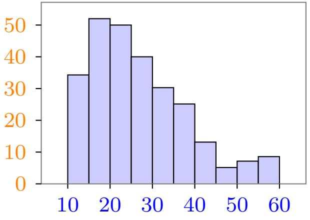


(a)



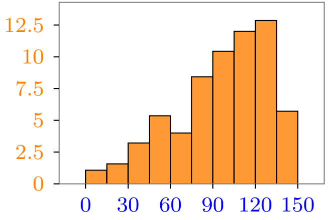
(b)

数据的分布形态



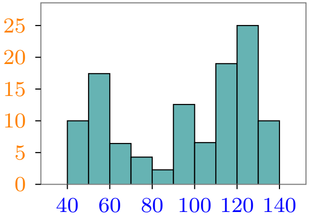
50
40
30
20
10
0
10 20 30 40 50 60

(a)



12.5
10
7.5
5
2.5
0
0 30 60 90 120 150

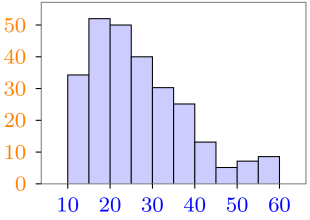
(b)



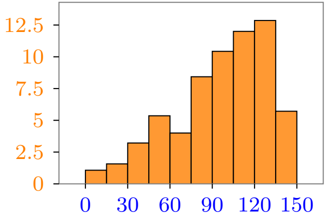
25
20
15
10
5
0
40 60 80 100 120 140

(c)

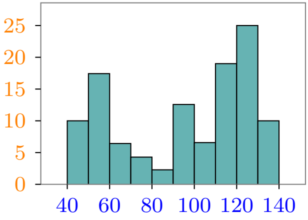
数据的分布形态



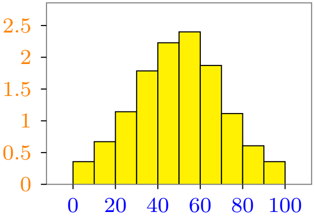
(a)



(b)

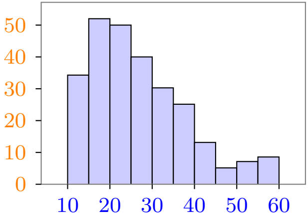


(c)

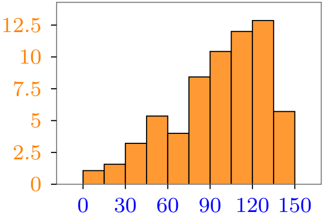


(d)

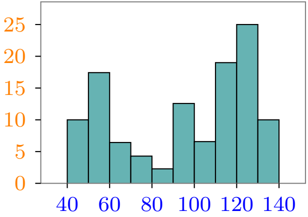
数据的分布形态



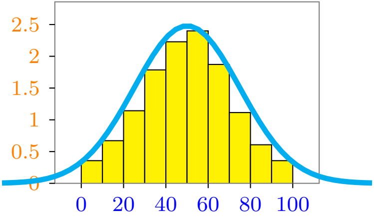
(a)



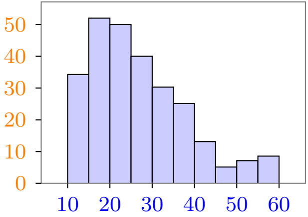
(b)



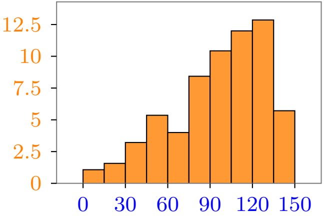
(c)



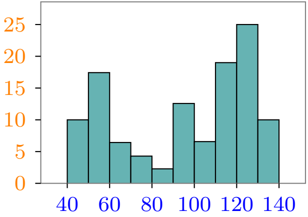
(d)


50
40
30
20
10
0
10 20 30 40 50 60

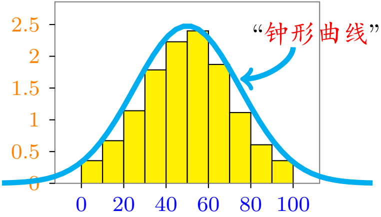
(a)


12.5
10
7.5
5
2.5
0
0 30 60 90 120 150

(b)

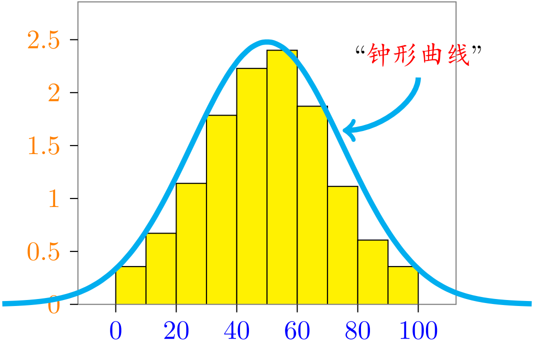

25
20
15
10
5
0
40 60 80 100 120 140

(c)


2.5
2
1.5
1
0.5
0
0 20 40 60 80 100
“钟形曲线”

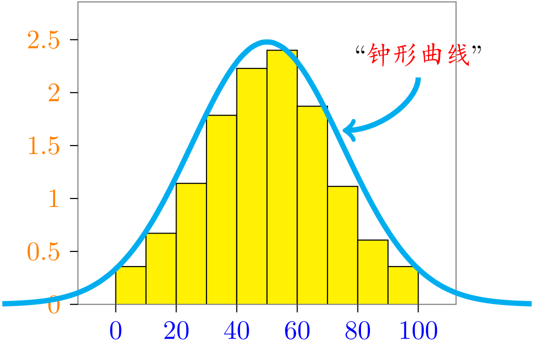
(d)

最常见的分布形态



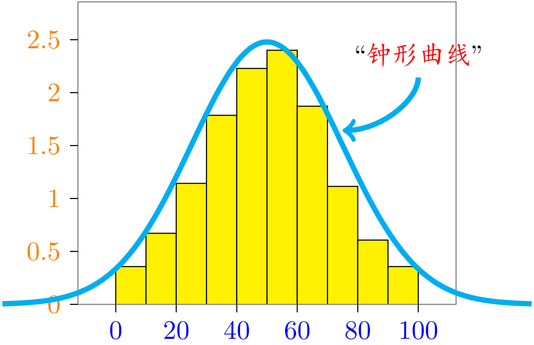
最常见的分布形态

☞ 正态分布 (Normal distribution)



最常见的分布形态

☞ 正态分布 (Normal distribution)



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}. \tag{8}$$

正态分布的定义

Definition 18

如果随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\}, \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

其中 μ, σ $(\sigma > 0)$ 为常数,

正态分布的定义

Definition 18

如果随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\}, \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

其中 μ, σ $(\sigma > 0)$ 为常数,

则称 X 服从参数为 μ, σ 的正态分布(Normal distribution),

正态分布的定义

Definition 18

如果随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\}, \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

其中 μ, σ $(\sigma > 0)$ 为常数,

则称 X 服从参数为 μ, σ 的正态分布(Normal distribution),

记为

$$X \sim N(\mu, \sigma^2).$$

正态分布实例

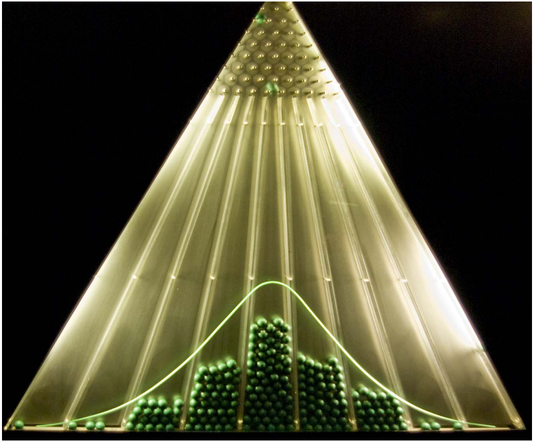
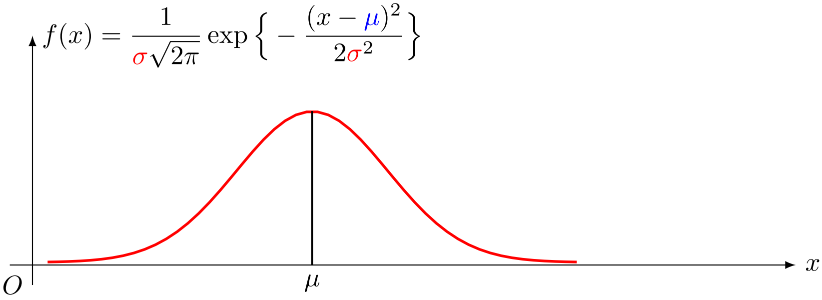


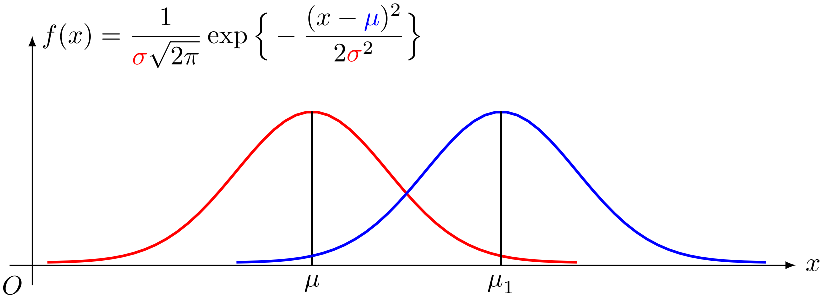
图: 高尔顿机[1]

[1]高尔顿: Francis Galton (1822 – 1911), 英国人.


$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\}$
O
μ
x

1. 对称轴为 $x = \mu$.

性质

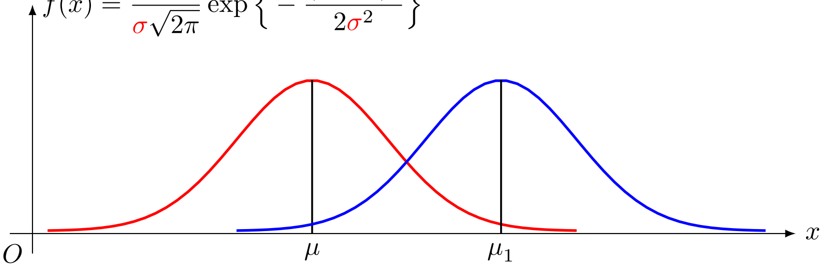


$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$
O
μ
μ_1
x

1. 对称轴为 $x=\mu$.

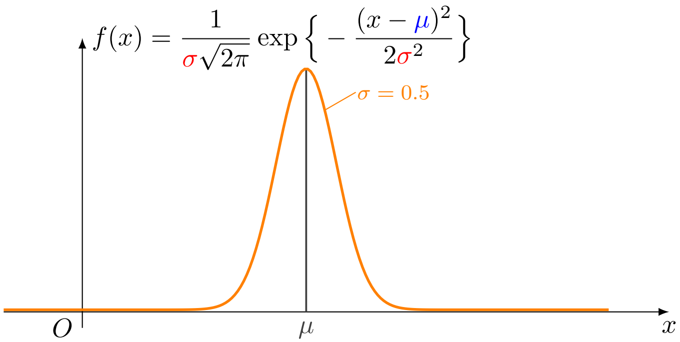
性质

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\}$$



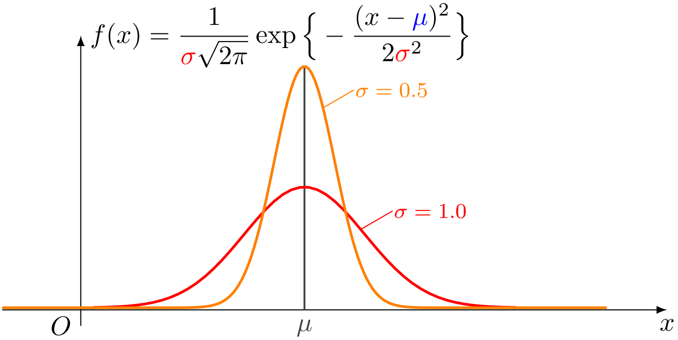
1. 对称轴为 $x = \mu$.
2. μ 称为"位置参数".

性质



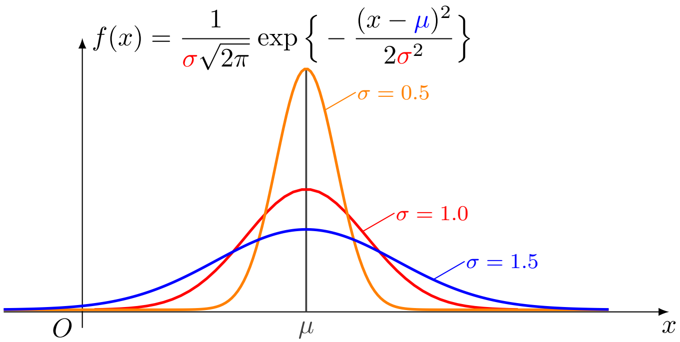
1. $f_{\max}(x) = f(\mu) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

性质



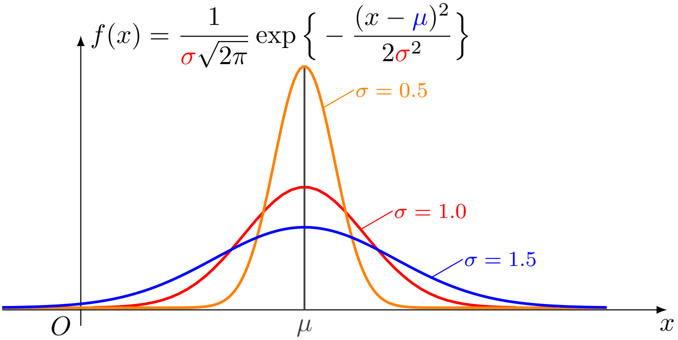
1. $f_{\max}(x) = f(\mu) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

性质



1. $f_{\max}(x)=f(\mu)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$

性质



1. $f_{\max}(x) = f(\mu) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.
2. σ 称为“形状参数”.

Example 19 (选择题)

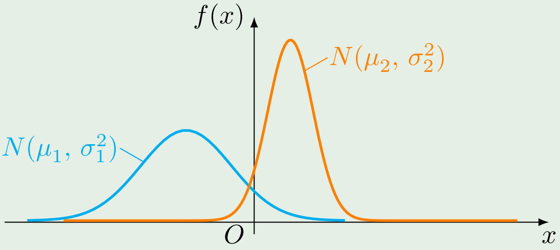
设两个正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的密度函数如图所示, 则有【　　】

(A). $\mu_1 < \mu_2, \sigma_1 < \sigma_2$.

(B). $\mu_1 < \mu_2, \sigma_1 > \sigma_2$.

(C). $\mu_1 > \mu_2, \sigma_1 < \sigma_2$.

(D). $\mu_1 > \mu_2, \sigma_1 > \sigma_2$.



Example 19 (选择题)

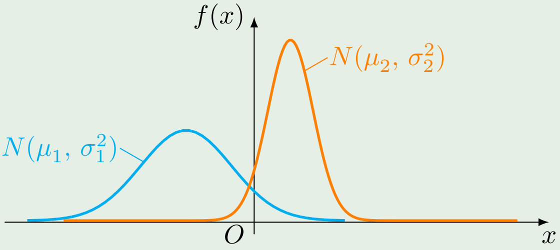
设两个正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的密度函数如图所示, 则有【　　】

(A). $\mu_1 < \mu_2, \sigma_1 < \sigma_2$.

(B). $\mu_1 < \mu_2, \sigma_1 > \sigma_2$.

(C). $\mu_1 > \mu_2, \sigma_1 < \sigma_2$. ✗

(D). $\mu_1 > \mu_2, \sigma_1 > \sigma_2$. ✗



Example 19 (选择题)

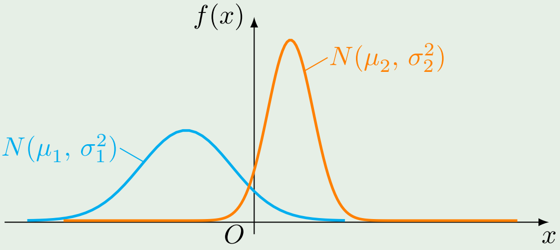
设两个正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的密度函数如图所示, 则有【　　】

(A). $\mu_1 < \mu_2, \sigma_1 < \sigma_2$. ✗

(B). $\mu_1 < \mu_2, \sigma_1 > \sigma_2$. ✓

(C). $\mu_1 > \mu_2, \sigma_1 < \sigma_2$. ✗

(D). $\mu_1 > \mu_2, \sigma_1 > \sigma_2$. ✗



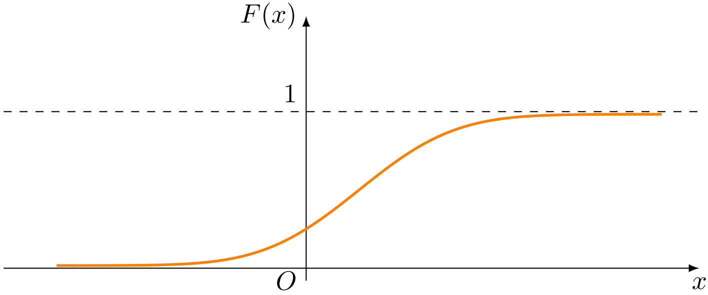
分布函数

正态分布的分布函数为

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\Big\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \Big\} \mathrm{d}x, \quad (-\infty < x < +\infty) \tag{9}$$

正态分布的分布函数为

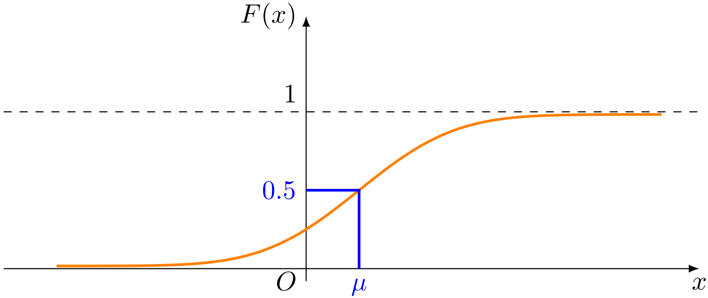
$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\} \mathrm{d}x, \quad (-\infty < x < +\infty) \tag{9}$$



分布函数

正态分布的分布函数为

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\} \mathrm{d}x, \quad (-\infty < x < +\infty) \tag{9}$$



标准正态分布(Standard normal distribution)

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\},$$

当 $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$ 时, 称 X 服从标准正态分布, 即 $X \sim N(0, 1)$.

1. 密度函数为

$$\varphi(x) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{x^2}{2} \right\}, \quad (-\infty < x < +\infty) \tag{10}$$

标准正态分布(Standard normal distribution)

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\},$$

当 $\mu=0,\ \sigma^2=1$ 时, 称 X 服从标准正态分布, 即 $X\sim N(0,\,1)$.

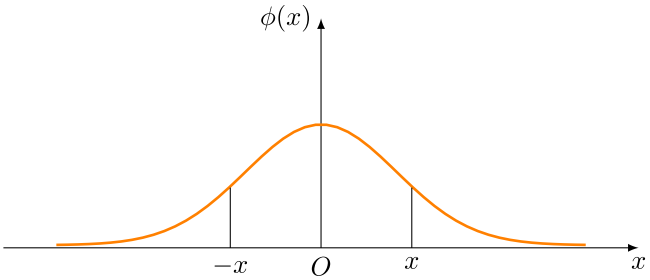
1. 密度函数为
$$\varphi(x)\triangleq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\},\quad(-\infty<x<+\infty)\tag{10}$$
2. 分布函数为
$$\Phi(x)\triangleq\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}\mathrm{d}\,x,\quad(-\infty<x<+\infty)\tag{11}$$

标准正态分布的重要特性

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \tag{12}$$

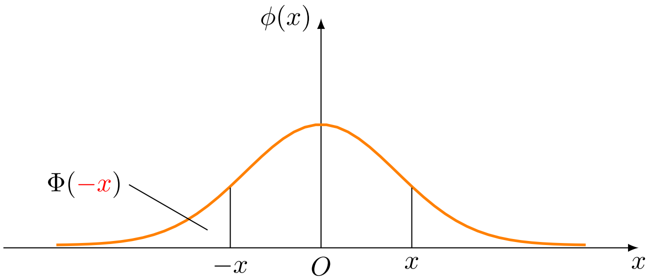
标准正态分布的重要特性

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \tag{12}$$



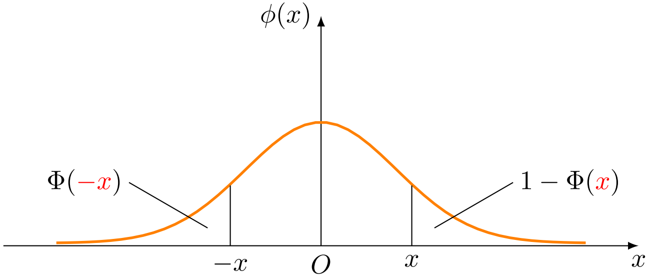
标准正态分布的重要特性

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \tag{12}$$



标准正态分布的重要特性

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \tag{12}$$



Theorem 20 (正态分布的标准化)

若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

Theorem 20 (正态分布的标准化)

若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,\,1)$.

证: 记 $Y \triangleq \dfrac{X-\mu}{\sigma}$.

Theorem 20 (正态分布的标准化)

若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,\,1)$.

证: 记 $Y \triangleq \dfrac{X-\mu}{\sigma}$. 则

$$P\{Y \leqslant y\} = P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant y\right\}$$

Theorem 20 (正态分布的标准化)

若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,\, 1)$.

证: 记 $Y \triangleq \dfrac{X-\mu}{\sigma}$. 则

$$
\begin{aligned}
P\{Y \leqslant y\} &= P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant y\right\} \\
&= P\{X \leqslant \sigma y + \mu\}
\end{aligned}
$$

Theorem 20 (正态分布的标准化)

若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,\, 1)$.

证: 记 $Y \triangleq \dfrac{X-\mu}{\sigma}$. 则

$$
\begin{aligned}
P\{Y \leqslant y\} &= P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant y\right\} \\
&= P\{X \leqslant \sigma y + \mu\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\sigma y+\mu} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \,\mathrm{d}\, x
\end{aligned}
$$

Theorem 20 (正态分布的标准化)

若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,\, 1)$.

证: 记 $Y \triangleq \dfrac{X-\mu}{\sigma}$. 则

$$\begin{aligned} P\{Y \leqslant y\} &= P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant y\right\} \\ &= P\{X \leqslant \sigma y + \mu\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\sigma y+\mu} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}\, x \end{aligned}$$

令 $\dfrac{x-\mu}{\sigma} = t$,

Theorem 20 (正态分布的标准化)

若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,\,1)$.

证: 记 $Y \triangleq \dfrac{X-\mu}{\sigma}$. 则

$$\begin{aligned}P\{Y \leqslant y\} &= P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant y\right\}\\ &= P\{X \leqslant \sigma y + \mu\}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\sigma y+\mu} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}\,x\end{aligned}$$

令 $\dfrac{x-\mu}{\sigma} = t$, 则 $\mathrm{d}\,x = \sigma \mathrm{d}\,t$; 且 $x = \sigma y + \mu \iff t = y$.

Theorem 20 (正态分布的标准化)

若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,\,1)$.

证: 记 $Y \triangleq \dfrac{X-\mu}{\sigma}$. 则

$$
\begin{aligned}
P\{Y \leqslant y\} &= P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant y\right\} \\
&= P\{X \leqslant \sigma y + \mu\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\sigma y+\mu} e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}\,x
\end{aligned}
$$

令 $\dfrac{x-\mu}{\sigma} = t$, 则 $\mathrm{d}\,x = \sigma \mathrm{d}\,t$; 且 $x = \sigma y + \mu \iff t = y$. 所以

$$
P\{Y \leqslant y\} = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}\,t
$$

Theorem 20 (正态分布的标准化)

若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

证: 记 $Y \triangleq \dfrac{X-\mu}{\sigma}$. 则

$$
\begin{aligned}
P\{Y \leqslant y\} &= P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant y\right\} \\
&= P\{X \leqslant \sigma y + \mu\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\sigma y+\mu} e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, \mathrm{d}\, x
\end{aligned}
$$

令 $\dfrac{x-\mu}{\sigma} = t$, 则 $\mathrm{d}\, x = \sigma \mathrm{d}\, t$; 且 $x = \sigma y + \mu \iff t = y$. 所以

$$
P\{Y \leqslant y\} = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}\, t
$$

得 $Y \sim N(0, 1)$. $\square$

$P\{x_1 < X \leqslant x_2\}$ 的计算

- 对 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,

$$P\{X \leqslant a\} = P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{a-\mu}{\sigma}\right\}$$
$$= \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$P\{x_1 < X \leqslant x_2\}$ 的计算

- 对 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,
$$P\{X \leqslant a\} = P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{a-\mu}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$
- $P\{x_1 < X \leqslant x_2\} = \Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right).$

Example 21

公共汽车的车门高度, 是按男子与车门定碰头的机会在 0.01 以下来设计的, 设男子身高 X 服从正态分布 $N(170, 6^2)$ (单位:cm), 试确定车门的高度.

Example 21

公共汽车的车门高度, 是按男子与车门定碰头的机会在 0.01 以下来设计的, 设男子身高 X 服从正态分布 $N(170, 6^2)$ (单位:cm), 试确定车门的高度.

解: 设车门的高度为 h (cm).

Example 21

公共汽车的车门高度, 是按男子与车门定碰头的机会在 0.01 以下来设计的, 设男子身高 X 服从正态分布 $N(170, 6^2)$ (单位:cm), 试确定车门的高度.

解: 设车门的高度为 h (cm). 依题意有

$$P\{X > h\} = 1 - P\{X \leqslant h\} < 0.01$$

Example 21

公共汽车的车门高度, 是按男子与车门定碰头的机会在 0.01 以下来设计的, 设男子身高 X 服从正态分布 $N(170, 6^2)$ (单位:cm), 试确定车门的高度.

解: 设车门的高度为 h (cm). 依题意有

$$P\{X > h\} = 1 - P\{X \leqslant h\} < 0.01$$

即

$$P\{X \leqslant h\} > 0.99$$

Example 21

公共汽车的车门高度, 是按男子与车门定碰头的机会在 0.01 以下来设计的, 设男子身高 X 服从正态分布 $N(170, 6^2)$ (单位:cm), 试确定车门的高度.

解: 设车门的高度为 h (cm). 依题意有

$$P\{X > h\} = 1 - P\{X \leqslant h\} < 0.01$$

即

$$P\{X \leqslant h\} > 0.99$$

因为 $P\{X \leqslant h\} = \Phi(\dfrac{h-1.70}{6})$,

Example 21

公共汽车的车门高度, 是按男子与车门定碰头的机会在 0.01 以下来设计的, 设男子身高 X 服从正态分布 $N(170, 6^2)$ (单位:cm), 试确定车门的高度.

解: 设车门的高度为 h (cm). 依题意有

$$P\{X > h\} = 1 - P\{X \leqslant h\} < 0.01$$

即

$$P\{X \leqslant h\} > 0.99$$

因为 $P\{X \leqslant h\} = \Phi(\dfrac{h-1.70}{6})$, 查标准正态分布表得 $\Phi(2.33) = 0.9901 > 0.99$,

Example 21

公共汽车的车门高度, 是按男子与车门定碰头的机会在 0.01 以下来设计的, 设男子身高 X 服从正态分布 $N(170, 6^2)$ (单位:cm), 试确定车门的高度.

解: 设车门的高度为 h (cm). 依题意有

$$P\{X > h\} = 1 - P\{X \leqslant h\} < 0.01$$

即

$$P\{X \leqslant h\} > 0.99$$

因为 $P\{X \leqslant h\} = \Phi(\dfrac{h-1.70}{6})$, 查标准正态分布表得 $\Phi(2.33) = 0.9901 > 0.99$, 所以得

$$\frac{h-1.70}{6} = 2.33$$

Example 21

公共汽车的车门高度, 是按男子与车门定碰头的机会在 0.01 以下来设计的, 设男子身高 X 服从正态分布 $N(170, 6^2)$ (单位:cm), 试确定车门的高度.

解: 设车门的高度为 h (cm). 依题意有

$$P\{X > h\} = 1 - P\{X \leqslant h\} < 0.01$$

即

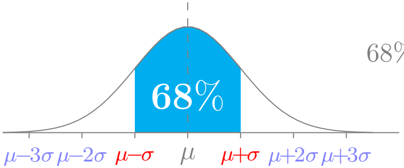
$$P\{X \leqslant h\} > 0.99$$

因为 $P\{X \leqslant h\} = \Phi(\frac{h-1.70}{6})$, 查标准正态分布表得 $\Phi(2.33) = 0.9901 > 0.99$, 所以得

$$\frac{h-1.70}{6} = 2.33$$

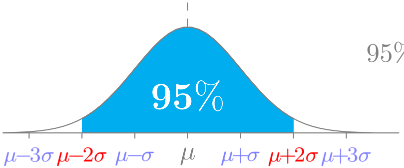
即 $h = 184(\text{cm})$. □

68—95—99.7% 法则



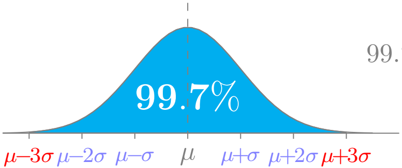
68% 的数据分布在距离均值 1 个方差的范围

$$P\{\mu - \sigma < X < \mu + \sigma\} = 0.68$$



95% 的数据分布在距离均值 2 个方差的范围

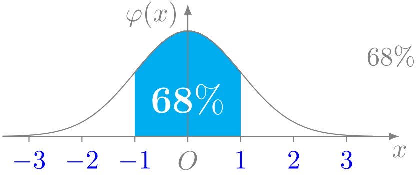
$$P\{\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma\} = 0.95$$



99.7% 的数据分布在距离均值 3 个方差的范

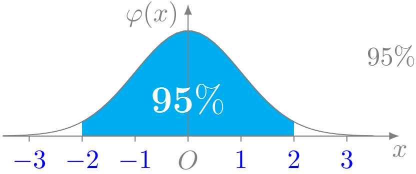
$$P\{\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma\} = 0.997$$

68—95—99.7% 法则



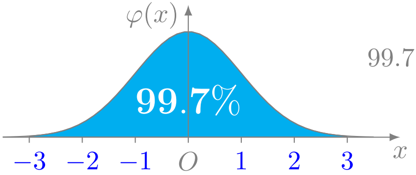
68% 的数据分布在距离均值 1 个方差的范围内

$$P\{\mu - \sigma < X < \mu + \sigma\} = 0.68$$



95% 的数据分布在距离均值 2 个方差的范围内

$$P\{\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma\} = 0.95$$



99.7% 的数据分布在距离均值 3 个方差的范围

$$P\{\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma\} = 0.997$$

引子

在许多实际问题中, 所考虑的随机变量往往依赖于另一个随机变量.

引子

在许多实际问题中, 所考虑的随机变量往往依赖于另一个随机变量.

比方, 设 X 是圆柱体的直径, 它是随机变量. 而圆柱体的横断面面积 Y 也是随机变量.

引子

在许多实际问题中, 所考虑的随机变量往往依赖于另一个随机变量.

比方, 设 X 是圆柱体的直径, 它是随机变量. 而圆柱体的横断面面积 Y 也是随机变量. 在试验中, 当 X 取的可能值 x 时, Y 就取得可能值 y.

引子

在许多实际问题中, 所考虑的随机变量往往依赖于另一个随机变量.

比方, 设 X 是圆柱体的直径, 它是随机变量. 而圆柱体的横断面面积 Y 也是随机变量. 在试验中, 当 X 取的可能值 x 时, Y 就取得可能值 y.

不过 y 不是试验的直接结果, 而是通过普通的函数关系 $y = \frac{\pi}{4}x^2$ 而得.

引子

在许多实际问题中, 所考虑的随机变量往往依赖于另一个随机变量.

比方, 设 X 是圆柱体的直径, 它是随机变量. 而圆柱体的横断面面积 Y 也是随机变量. 在试验中, 当 X 取的可能值 x 时, Y 就取得可能值 y.

不过 y 不是试验的直接结果, 而是通过普通的函数关系 $y = \frac{\pi}{4}x^2$ 而得. 这时随机变量 Y 是随机变量 X 的函数, 记为 $Y = \frac{\pi}{4}X^2$.

引子

在许多实际问题中, 所考虑的随机变量往往依赖于另一个随机变量.

比方, 设 X 是圆柱体的直径, 它是随机变量. 而圆柱体的横断面面积 Y 也是随机变量. 在试验中, 当 X 取的可能值 x 时, Y 就取得可能值 y.

不过 y 不是试验的直接结果, 而是通过普通的函数关系 $y = \frac{\pi}{4}x^2$ 而得. 这时随机变量 Y 是随机变量 X 的函数, 记为 $Y = \frac{\pi}{4}X^2$.

一般地, 设 X 是随机变量, 则函数 $Y = f(X)$ 也是随机变量.

引子

在许多实际问题中, 所考虑的随机变量往往依赖于另一个随机变量.

比方, 设 X 是圆柱体的直径, 它是随机变量. 而圆柱体的横断面面积 Y 也是随机变量. 在试验中, 当 X 取的可能值 x 时, Y 就取得可能值 y.

不过 y 不是试验的直接结果, 而是通过普通的函数关系 $y=\frac{\pi}{4}x^2$ 而得. 这时随机变量 Y 是随机变量 X 的函数, 记为 $Y=\frac{\pi}{4}X^2$.

一般地, 设 X 是随机变量, 则函数 $Y=f(X)$ 也是随机变量.

本节将讨论如何从一些随机变量的概率分布, 导出这些随机变量的函数的概率分布.

Example 22

设 X 的分布律为

X	-1	0	1	2
p_k	0.1	0.2	0.3	0.4

求 ① $Y = 2X - 1$ 的分布律; ② $Y = X^2$ 的分布律.

Example 22

设 X 的分布律为

X	-1	0	1	2
p_k	0.1	0.2	0.3	0.4

求 ① $Y = 2X - 1$ 的分布律; ② $Y = X^2$ 的分布律.

解: ① 因为 Y 的可能取值为 -3, -1, 1, 3,

Example 22

设 X 的分布律为

X	-1	0	1	2
p_k	0.1	0.2	0.3	0.4

求 ① $Y = 2X - 1$ 的分布律; ② $Y = X^2$ 的分布律.

解: ① 因为 Y 的可能取值为 -3, -1, 1, 3, 而且

$$P\{Y=-3\} = P\{X=-1\} = 0.1, \quad P\{Y=-1\} = P\{X=0\} = 0.2,$$

Example 22

设 X 的分布律为

X	-1	0	1	2
p_k	0.1	0.2	0.3	0.4

求 ① $Y = 2X - 1$ 的分布律; ② $Y = X^2$ 的分布律.

解: ① 因为 Y 的可能取值为 $-3, -1, 1, 3$, 而且

$$P\{Y=-3\} = P\{X=-1\} = 0.1, \quad P\{Y=-1\} = P\{X=0\} = 0.2,$$

$$P\{Y=1\} = P\{X=1\} = 0.3, \quad P\{Y=3\} = P\{X=2\} = 0.4$$

Example 22

设 X 的分布律为

X	-1	0	1	2
p_k	0.1	0.2	0.3	0.4

求 ① $Y=2X-1$ 的分布律; ② $Y=X^2$ 的分布律.

解: ① 因为 Y 的可能取值为 $-3, -1, 1, 3$, 而且

$$P\{Y=-3\}=P\{X=-1\}=0.1,\quad P\{Y=-1\}=P\{X=0\}=0.2,$$

$$P\{Y=1\}=P\{X=1\}=0.3,\quad P\{Y=3\}=P\{X=2\}=0.4$$

因而, Y 的分布律为

Y	-3	-1	1	3
p_k	0.1	0.2	0.3	0.4

Example 22

设 X 的分布律为

X	-1	0	1	2
p_k	0.1	0.2	0.3	0.4

求 ① $Y = 2X - 1$ 的分布律; ② $Y = X^2$ 的分布律.

解: ① 更直观的表达式是:

X	-1	0	1	2

Example 22

设 X 的分布律为

X	-1	0	1	2
p_k	0.1	0.2	0.3	0.4

求 ① $Y = 2X - 1$ 的分布律; ② $Y = X^2$ 的分布律.

解: ① 更直观的表达方式是:

X	-1	0	1	2
$Y = 2X - 1$	-3	-1	1	3

Example 22

设 X 的分布律为

X	-1	0	1	2
p_k	0.1	0.2	0.3	0.4

求 ① $Y = 2X - 1$ 的分布律; ② $Y = X^2$ 的分布律.

解: ① 更直观的表达方式是:

X	-1	0	1	2
$Y = 2X - 1$	-3	-1	1	3
p_k	0.1	0.2	0.3	0.4

② 类似地可求出 $Y = X^2$ 的分布律为

X	-1	0	1	2
$Y = X^2$	$(-1)^2$	$(0)^2$	$(1)^2$	$(2)^2$
p_k	0.1	0.2	0.3	0.4

② 类似地可求出 $Y = X^2$ 的分布律为

X	-1	0	1	2
$Y = X^2$	$(-1)^2$	$(0)^2$	$(1)^2$	$(2)^2$
p_k	0.1	0.2	0.3	0.4

因为 Y 的可能取的值为 0, 1, 4, 而且

$$P\{Y = 1\} = P\{X = -1\} + P\{X = 1\} = 0.1 + 0.3 = 0.4$$

② 类似地可求出 $Y = X^2$ 的分布律为

X	-1	0	1	2
$Y = X^2$	$(-1)^2$	$(0)^2$	$(1)^2$	$(2)^2$
p_k	0.1	0.2	0.3	0.4

因为 Y 的可能取的值为 0, 1, 4, 而且

$$P\{Y = 1\} = P\{X = -1\} + P\{X = 1\} = 0.1 + 0.3 = 0.4$$

所以 $Y = X^2$ 的分布律可整理为

Y	0	1	4
p_k	0.2	0.4	0.4

离散型随机变量的函数的分布

当 X 是离散型随机变量时, $Y = f(X)$ 也是随机变量, 这时设随机变量 X 的概率分布为

X	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_k	$\dots$
P	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_k	$\dots$

离散型随机变量的函数的分布

当 X 是离散型随机变量时, $Y=f(X)$ 也是随机变量, 这时设随机变量 X 的概率分布为

X	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_k	$\dots$
P	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_k	$\dots$

当 X 取某值 x_k 时, 随机变量 Y 取值 $y_k=f(x_k)$, 如果所有 $f(x_k)$ 的值全不相等, 则随机变量 Y 的概率分布是:

Y	y_1	y_2	y_3	$\dots$	y_k	$\dots$
P	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_k	$\dots$

离散型随机变量的函数的分布

当 X 是离散型随机变量时, $Y=f(X)$ 也是随机变量, 这时设随机变量 X 的概率分布为

X	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_k	$\ldots$
P	p_1	p_2	p_3	$\ldots$	p_k	$\ldots$

当 X 取某值 x_k 时, 随机变量 Y 取值 $y_k=f(x_k)$, 如果所有 $f(x_k)$ 的值全不相等, 则随机变量 Y 的概率分布是:

Y	y_1	y_2	y_3	$\ldots$	y_k	$\ldots$
P	p_1	p_2	p_3	$\ldots$	p_k	$\ldots$

如果某些 $y_k=f(x_k)$ 有相同的值, 则这些相同的值仅取一次. 根据概率加法定理应把相应的概率值 p_i 加起来, 就得到 Y 的分布.

Example 23

设随机变量 X 的分布律为

X	1	2	$\cdots$	n	$\cdots$
p	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2})^2$	$\cdots$	$(\frac{1}{2})^n$	$\cdots$

求随机变量 $Y=\cos(\dfrac{\pi}{2}X)$ 的分布律.

Example 23

设随机变量 X 的分布律为

X	1	2	$\cdots$	n	$\cdots$
p	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2})^2$	$\cdots$	$(\frac{1}{2})^n$	$\cdots$

求随机变量 $Y = \cos(\dfrac{\pi}{2}X)$ 的分布律.

解: 因为

$$\cos(\frac{n\pi}{2}) = \begin{cases} -1, & n = 2(2k-1), \\ 0, & n = 2k-1, \\ 1, & n = 2(2k), \end{cases} \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

Example 23

设随机变量 X 的分布律为

X	1	2	$\cdots$	n	$\cdots$
p	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2})^2$	$\cdots$	$(\frac{1}{2})^n$	$\cdots$

求随机变量 $Y = \cos(\frac{\pi}{2}X)$ 的分布律.

解: 因为

$$\cos(\frac{n\pi}{2}) = \begin{cases} -1, & n = 2(2k-1), \\ 0, & n = 2k-1, \\ 1, & n = 2(2k), \end{cases} \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

所以 $Y = \cos(\frac{\pi}{2}X)$ 的所有可能的取值为 -1, 0, 1.

由于 X 取值 $2, 6, 10, \cdots$ 时, 对应的 Y 都取 -1, 得

由于 X 取值 $2, 6, 10, \cdots$ 时, 对应的 Y 都取 -1, 得

$$P\{Y=-1\}=(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^6+(\frac{1}{2})^{10}+\cdots=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{16}}=\frac{4}{15}, \tag{13}$$

由于 X 取值 $2, 6, 10, \cdots$ 时, 对应的 Y 都取 -1, 得

$$P\{Y=-1\}=(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^6+(\frac{1}{2})^{10}+\cdots=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{16}}=\frac{4}{15}, \tag{13}$$

$$P\{Y=0\}=(\frac{1}{2})^1+(\frac{1}{2})^3+(\frac{1}{2})^5+\cdots=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}, \tag{14}$$

由于 X 取值 $2, 6, 10, \cdots$ 时, 对应的 Y 都取 -1, 得

$$P\{Y=-1\}=(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^6+(\frac{1}{2})^{10}+\cdots=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{16}}=\frac{4}{15}, \tag{13}$$

$$P\{Y=0\}=(\frac{1}{2})^1+(\frac{1}{2})^3+(\frac{1}{2})^5+\cdots=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}, \tag{14}$$

$$P\{Y=1\}=(\frac{1}{2})^4+(\frac{1}{2})^8+(\frac{1}{2})^{12}+\cdots=\frac{\frac{1}{16}}{1-\frac{1}{16}}=\frac{1}{15}. \tag{15}$$

由于 X 取值 $2, 6, 10, \cdots$ 时, 对应的 Y 都取 -1, 得

$$P\{Y=-1\}=(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^6+(\frac{1}{2})^{10}+\cdots=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{16}}=\frac{4}{15}, \tag{13}$$

$$P\{Y=0\}=(\frac{1}{2})^1+(\frac{1}{2})^3+(\frac{1}{2})^5+\cdots=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}, \tag{14}$$

$$P\{Y=1\}=(\frac{1}{2})^4+(\frac{1}{2})^8+(\frac{1}{2})^{12}+\cdots=\frac{\frac{1}{16}}{1-\frac{1}{16}}=\frac{1}{15}. \tag{15}$$

故 $Y=\cos(\frac{\pi}{2}X)$ 的分布律为

Y	-1	0	1
p	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{15}$

- 设 X 是连续型随机变量, 已知 $f_X(x)$ 为其概率密度, 那么应当如何确定随机变量 $Y = g(X)$ 的概率密度 $f_Y(x)$ 呢?

连续型随机变量的函数的分布

- 设 X 是连续型随机变量, 已知 $f_X(x)$ 为其概率密度, 那么应当如何确定随机变量 $Y = g(X)$ 的概率密度 $f_Y(x)$ 呢?
- 注: 为了区分不同随机变量的概率密度, 将随机变量 X, Y 的概率密度函数分别记为 $f_X(x)$, $f_Y(x)$.

连续型随机变量的函数的分布

- 设 X 是连续型随机变量, 已知 $f_X(x)$ 为其概率密度, 那么应当如何确定随机变量 $Y = g(X)$ 的概率密度 $f_Y(x)$ 呢?
- 注: 为了区分不同随机变量的概率密度, 将随机变量 X, Y 的概率密度函数分别记为 $f_X(x)$, $f_Y(x)$.
- 下面先简单复习"积分上限的函数"的有关内容.

关于积分上限的函数

关于积分上限的函数

其一般形式为

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \tag{16}$$

关于积分上限的函数

其一般形式为

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \tag{16}$$

关于此函数, 有一个重要的定理

Theorem 24

若函数 f 连续, 则

$$\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = f(x) \tag{17}$$

关于积分上限的函数

其一般形式为

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \tag{16}$$

关于此函数, 有一个重要的定理

Theorem 24

若函数 f 连续, 则

$$\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = f(x) \tag{17}$$

积分上限函数通常也记为

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x \tag{18}$$

关于积分上限的函数

其一般形式为

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \tag{16}$$

关于此函数, 有一个重要的定理

Theorem 24

若函数 f 连续, 则

$$\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = f(x) \tag{17}$$

积分上限函数通常也记为

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x \tag{18}$$

那么相应的结论为

$$\left(\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x) \tag{19}$$

关于积分上限的函数

其一般形式为

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \tag{16}$$

关于此函数，有一个重要的定理

Theorem 24

若函数 f 连续，则

$$\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = f(x) \tag{17}$$

积分上限函数通常也记为

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x \tag{18}$$

那么相应的结论为

$$\left(\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x) \tag{19}$$

积分上限的函数也可以构造复合函数，比如 $F\big(\varphi(x)\big)$，则

$$F\big(\varphi(x)\big) = \int_a^{\varphi(x)} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{20}$$

关于积分上限的函数

其一般形式为

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \tag{16}$$

关于此函数, 有一个重要的定理

Theorem 24

若函数 f 连续, 则

$$\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = f(x) \tag{17}$$

积分上限函数通常也记为

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x \tag{18}$$

那么相应的结论为

$$\left(\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x) \tag{19}$$

积分上限的函数也可以构造复合函数, 比如 $F\big(\varphi(x)\big)$, 则

$$F\big(\varphi(x)\big) = \int_a^{\varphi(x)} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{20}$$

而

$$\Big(F\big(\varphi(x)\big)\Big)' = F'\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x) \tag{21}$$

关于积分上限的函数

其一般形式为

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \tag{16}$$

关于此函数, 有一个重要的定理

Theorem 24

若函数 f 连续, 则

$$\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)'=f(x) \tag{17}$$

积分上限函数通常也记为

$$F(x)=\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x \tag{18}$$

那么相应的结论为

$$\left(\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x\right)'=f(x) \tag{19}$$

积分上限的函数也可以构造复合函数, 比如 $F\big(\varphi(x)\big)$, 则

$$F\big(\varphi(x)\big)=\int_a^{\varphi(x)} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{20}$$

而

$$\Big(F\big(\varphi(x)\big)\Big)'=F'\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x) \tag{21}$$

所以

$$\left(\int_a^{\varphi(x)} f(x)\,\mathrm{d}x\right)'=f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)$$

进一步有

$$\left(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x) - f\big(\psi(x)\big)\psi'(x) \tag{22}$$

进一步有

$$\left(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x) - f\big(\psi(x)\big)\psi'(x) \tag{22}$$

这是因为

$$\begin{aligned}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\psi(x)}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{\varphi(x)} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{a}^{\varphi(x)} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{a}^{\psi(x)} f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

进一步有

$$\left(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x) - f\big(\psi(x)\big)\psi'(x) \tag{22}$$

这是因为

$$\begin{aligned}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\psi(x)}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{\varphi(x)} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{a}^{\varphi(x)} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{a}^{\psi(x)} f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Example 25

试计算下列各式

① $\left(\int_a^x xf(x)\,\mathrm{d}x\right)'$; ② $\left(\int_a^x f(x^2)\,\mathrm{d}x\right)'$; ③ $\left(\int_a^{x^2} f(x)\,\mathrm{d}x\right)'$.

Example 26

设随机变量 X 具有概率密度

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{8}, & 0 < x < 4, \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

求 $Y = 2X + 8$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

Example 26

设随机变量 X 具有概率密度

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{8}, & 0 < x < 4, \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

求 $Y = 2X + 8$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

解: 先来求 Y 的分布函数.

$$F_Y(y) = P\{Y \leqslant y\}$$

Example 26

设随机变量 X 具有概率密度

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{8}, & 0 < x < 4, \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

求 $Y = 2X + 8$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

解: 先来求 Y 的分布函数.

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leqslant y\} \\ &= P\{2X + 8 \leqslant y\} \end{aligned}$$

Example 26

设随机变量 X 具有概率密度

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{8}, & 0 < x < 4, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

求 $Y = 2X + 8$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

解: 先来求 Y 的分布函数.

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leqslant y\} \\ &= P\{2X + 8 \leqslant y\} \\ &= P\left\{X \leqslant \frac{y-8}{2}\right\} \end{aligned}$$

Example 26

设随机变量 X 具有概率密度

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{8}, & 0 < x < 4, \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

求 $Y = 2X + 8$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

解: 先来求 Y 的分布函数.

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leqslant y\} \\ &= P\{2X + 8 \leqslant y\} \\ &= P\left\{X \leqslant \frac{y-8}{2}\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{y-8}{2}} f_X(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Example 26

设随机变量 X 具有概率密度

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{8}, & 0 < x < 4, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

求 $Y = 2X + 8$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

注意到

$$\left(\int_{-\infty}^{\varphi(x)} f(x)\,\mathrm{d}x \right)' = f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x),$$

解: 先来求 Y 的分布函数.

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leqslant y\} \\ &= P\{2X + 8 \leqslant y\} \\ &= P\left\{X \leqslant \frac{y-8}{2}\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{y-8}{2}} f_X(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Example 26

设随机变量 X 具有概率密度

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{8}, & 0<x<4,\\ 0, & \text{otherwise}.\end{cases}$$

求 $Y=2X+8$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

解: 先来求 Y 的分布函数.

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{Y\leqslant y\}\\&=P\{2X+8\leqslant y\}\\&=P\left\{X\leqslant\frac{y-8}{2}\right\}\\&=\int_{-\infty}^{\frac{y-8}{2}} f_X(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

注意到

$$\left(\int_{-\infty}^{\varphi(x)} f(x)\,\mathrm{d}x\right)'=f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x),$$

对此积分上限函数求导, 得

$$f_Y(y)=f_X\left(\frac{y-8}{2}\right)\cdot\left(\frac{y-8}{2}\right)'_y$$

Example 26

设随机变量 X 具有概率密度

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{8}, & 0 < x < 4, \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

求 $Y = 2X + 8$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

解: 先来求 Y 的分布函数.

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leqslant y\} \\ &= P\{2X + 8 \leqslant y\} \\ &= P\left\{X \leqslant \frac{y-8}{2}\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{y-8}{2}} f_X(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

注意到

$$\left(\int_{-\infty}^{\varphi(x)} f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x),$$

对此积分上限函数求导, 得

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X\left(\frac{y-8}{2}\right) \cdot \left(\frac{y-8}{2}\right)'_y \\ &= \frac{1}{2} f_X\left(\frac{y-8}{2}\right) \end{aligned}$$

Example 26

设随机变量 X 具有概率密度

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{8}, & 0<x<4,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

求 $Y=2X+8$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

解: 先来求 Y 的分布函数.

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{Y\leqslant y\}\\&=P\{2X+8\leqslant y\}\\&=P\left\{X\leqslant\frac{y-8}{2}\right\}\\&=\int_{-\infty}^{\frac{y-8}{2}}f_X(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

注意到

$$\left(\int_{-\infty}^{\varphi(x)}f(x)\,\mathrm{d}x\right)'=f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x),$$

对此积分上限函数求导, 得

$$\begin{aligned}f_Y(y)&=f_X\left(\frac{y-8}{2}\right)\cdot\left(\frac{y-8}{2}\right)'_y\\&=\frac{1}{2}f_X\left(\frac{y-8}{2}\right)\\&=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\frac{y-8}{2}}{8}, & 0<\frac{y-8}{2}<4,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}\end{aligned}$$

Example 26

设随机变量 X 具有概率密度

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{8}, & 0 < x < 4, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

求 $Y = 2X + 8$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

解: 先来求 Y 的分布函数.

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leqslant y\} \\ &= P\{2X + 8 \leqslant y\} \\ &= P\left\{X \leqslant \frac{y-8}{2}\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{y-8}{2}} f_X(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

注意到

$$\left(\int_{-\infty}^{\varphi(x)} f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x),$$

对此积分上限函数求导, 得

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X\left(\frac{y-8}{2}\right) \cdot \left(\frac{y-8}{2}\right)'_y \\ &= \frac{1}{2} f_X\left(\frac{y-8}{2}\right) \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\frac{y-8}{2}}{8}, & 0 < \frac{y-8}{2} < 4, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{y-8}{32}, & 8 < y < 16, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

□

Theorem 27

已知随机变量 X 具有概率密度

$$f_X(x) = \begin{cases} f(x), & a < x < b, \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

对随机变量 $Y = g(X)$, 要求 $f_Y(y)$.

公式法

Theorem 27

已知随机变量 X 具有概率密度

$$f_X(x) = \begin{cases} f(x), & a < x < b, \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

对随机变量 $Y = g(X)$, 要求 $f_Y(y)$.

则对函数关系 $y = g(x)$, 给出反函数 $x = h(y)$, 有

$$f_Y(y) = \begin{cases} f\big(h(y)\big) \cdot |h'(y)|, & a < h(y) < b, \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

其中函数 $y = g(x)$ 处处可导且单调.

解释: 设 $g(x)$ 单增, 则

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leqslant y\} = P\{g(X) \leqslant y\} \\ &= P\{X \leqslant h(y)\} \\ &= \int_{-\infty}^{h(y)} f_X(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X\big(h(y)\big) \cdot h'(y) \\ &= \begin{cases} f\big(h(y)\big) \cdot h'(y), & a < h(y) < b, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

若 $g(x)$ 单减, 同理.

Example 28

设随机变量 X 具有概率密度

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{8}, & 0 < x < 4, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

求 $Y = 2X + 8$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

Example 28

设随机变量 X 具有概率密度

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{8}, & 0 < x < 4, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

求 $Y = 2X + 8$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

解: 由 $y = g(x) = 2x + 8$,

Example 28

设随机变量 X 具有概率密度

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{8}, & 0 < x < 4, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

求 $Y = 2X + 8$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

解: 由 $y = g(x) = 2x + 8$, 得

$$x = h(y) = \frac{y-8}{2}, \qquad h'(y) = \frac{1}{2}.$$

Example 28

设随机变量 X 具有概率密度

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{8}, & 0 < x < 4, \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

求 $Y = 2X + 8$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

解: 由 $y = g(x) = 2x + 8$, 得

$$x = h(y) = \frac{y-8}{2}, \qquad h'(y) = \frac{1}{2}.$$

所以

$$f_Y(y) = \begin{cases} f\big(h(y)\big) \cdot |h'(y)| = \dfrac{h(y)}{8} \cdot |h'(y)|, & 0 < \frac{y-8}{2} < 4, \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

Example 28

设随机变量 X 具有概率密度

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{8}, & 0 < x < 4, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

求 $Y = 2X + 8$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

解: 由 $y = g(x) = 2x + 8$, 得

$$x = h(y) = \frac{y-8}{2}, \qquad h'(y) = \frac{1}{2}.$$

所以

$$f_Y(y) = \begin{cases} f\big(h(y)\big) \cdot |h'(y)| = \dfrac{h(y)}{8} \cdot |h'(y)|, & 0 < \frac{y-8}{2} < 4, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{y-8}{32}, & 8 < y < 16, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Example 29

设连续型随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)$, 求随机变量 $Y = kX + b$ 的概率密度 $f_Y(x)$ (其中 k, b 为常数, 且 $k \neq 0$).

Example 29

设连续型随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)$, 求随机变量 $Y = kX + b$ 的概率密度 $f_Y(x)$ (其中 k, b 为常数, 且 $k \neq 0$).

解: 设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$.

当 $k > 0$, 则

$$F_Y(y) = P\{Y \leqslant y\} = P\{kX + b \leqslant y\}$$

Example 29

设连续型随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)$, 求随机变量 $Y = kX + b$ 的概率密度 $f_Y(x)$ (其中 k, b 为常数, 且 $k \neq 0$).

解: 设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$.

当 $k > 0$, 则

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P\{Y \leqslant y\} = P\{kX + b \leqslant y\} \\
&= P\{X \leqslant \frac{y-b}{k}\}
\end{aligned}
$$

Example 29

设连续型随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)$, 求随机变量 $Y = kX + b$ 的概率密度 $f_Y(x)$ (其中 k, b 为常数, 且 $k \neq 0$).

解: 设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$.

当 $k > 0$, 则

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P\{Y \leqslant y\} = P\{kX + b \leqslant y\} \\
&= P\{X \leqslant \frac{y-b}{k}\} \\
&= \int_{-\infty}^{\frac{y-b}{k}} f_X(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Example 29

设连续型随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)$, 求随机变量 $Y = kX + b$ 的概率密度 $f_Y(x)$ (其中 k, b 为常数, 且 $k \neq 0$).

解: 设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$.

当 $k > 0$, 则

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leqslant y\} = P\{kX + b \leqslant y\} \\ &= P\{X \leqslant \frac{y-b}{k}\} \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{y-b}{k}} f_X(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

上式两边对 y 求导数得

$$f_Y(y) = \frac{1}{k} f_X\left(\frac{y-b}{k}\right) \tag{23}$$

Example 29

设连续型随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)$, 求随机变量 $Y = kX + b$ 的概率密度 $f_Y(x)$ (其中 k, b 为常数, 且 $k \neq 0$).

解: 设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$.

当 $k > 0$, 则

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P\{Y \leqslant y\} = P\{kX + b \leqslant y\} \\
&= P\{X \leqslant \frac{y-b}{k}\} \\
&= \int_{-\infty}^{\frac{y-b}{k}} f_X(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

上式两边对 y 求导数得

$$
f_Y(y) = \frac{1}{k} f_X(\frac{y-b}{k}) \tag{23}
$$

当 $k < 0$, 则

$$
F_Y(y) = P\{Y \leqslant y\} = P\{kX + b \leqslant y\}
$$

Example 29

设连续型随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)$, 求随机变量 $Y = kX + b$ 的概率密度 $f_Y(x)$ (其中 k, b 为常数, 且 $k \neq 0$).

解: 设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$.

当 $k > 0$, 则

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P\{Y \leqslant y\} = P\{kX + b \leqslant y\} \\
&= P\{X \leqslant \frac{y-b}{k}\} \\
&= \int_{-\infty}^{\frac{y-b}{k}} f_X(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

上式两边对 y 求导数得

$$
f_Y(y) = \frac{1}{k} f_X(\frac{y-b}{k}) \tag{23}
$$

当 $k < 0$, 则

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P\{Y \leqslant y\} = P\{kX + b \leqslant y\} \\
&= P\{X \geqslant \frac{y-b}{k}\}
\end{aligned}
$$

Example 29

设连续型随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)$, 求随机变量 $Y = kX + b$ 的概率密度 $f_Y(x)$ (其中 k, b 为常数, 且 $k \neq 0$).

解: 设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$.

当 $k > 0$, 则

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P\{Y \leqslant y\} = P\{kX + b \leqslant y\} \\
&= P\{X \leqslant \frac{y-b}{k}\} \\
&= \int_{-\infty}^{\frac{y-b}{k}} f_X(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

上式两边对 y 求导数得

$$
f_Y(y) = \frac{1}{k} f_X(\frac{y-b}{k}) \tag{23}
$$

当 $k < 0$, 则

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P\{Y \leqslant y\} = P\{kX + b \leqslant y\} \\
&= P\{X \geqslant \frac{y-b}{k}\} \\
&= \int_{\frac{y-b}{k}}^{+\infty} f_X(x)
\end{aligned}
$$

Example 29

设连续型随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)$, 求随机变量 $Y = kX + b$ 的概率密度 $f_Y(x)$ (其中 k, b 为常数, 且 $k \neq 0$).

解: 设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$.

当 $k > 0$, 则

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leqslant y\} = P\{kX + b \leqslant y\} \\ &= P\{X \leqslant \frac{y-b}{k}\} \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{y-b}{k}} f_X(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

上式两边对 y 求导数得

$$f_Y(y) = \frac{1}{k} f_X(\frac{y-b}{k}) \qquad (23)$$

当 $k < 0$, 则

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leqslant y\} = P\{kX + b \leqslant y\} \\ &= P\{X \geqslant \frac{y-b}{k}\} \\ &= \int_{\frac{y-b}{k}}^{+\infty} f_X(x) \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{\frac{y-b}{k}} f_X(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Example 29

设连续型随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)$, 求随机变量 $Y=kX+b$ 的概率密度 $f_Y(x)$ (其中 k,b 为常数, 且 $k\neq 0$).

解: 设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$.

当 $k>0$, 则

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{Y\leqslant y\}=P\{kX+b\leqslant y\}\\&=P\{X\leqslant \frac{y-b}{k}\}\\&=\int_{-\infty}^{\frac{y-b}{k}} f_X(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

上式两边对 y 求导数得

$$f_Y(y)=\frac{1}{k}f_X(\frac{y-b}{k}) \tag{23}$$

当 $k<0$, 则

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{Y\leqslant y\}=P\{kX+b\leqslant y\}\\&=P\{X\geqslant \frac{y-b}{k}\}\\&=\int_{\frac{y-b}{k}}^{+\infty} f_X(x)\\&=1-\int_{-\infty}^{\frac{y-b}{k}} f_X(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

上式两边对 y 求导数得

$$f_Y(y)=-\frac{1}{k}f_X(\frac{y-b}{k}) \tag{24}$$

Example 29

设连续型随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)$, 求随机变量 $Y = kX + b$ 的概率密度 $f_Y(x)$ (其中 k, b 为常数, 且 $k \neq 0$).

解: 设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$.

当 $k > 0$, 则

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leqslant y\} = P\{kX + b \leqslant y\} \\ &= P\{X \leqslant \frac{y-b}{k}\} \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{y-b}{k}} f_X(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

上式两边对 y 求导数得

$$f_Y(y) = \frac{1}{k} f_X(\frac{y-b}{k}) \tag{23}$$

当 $k < 0$, 则

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leqslant y\} = P\{kX + b \leqslant y\} \\ &= P\{X \geqslant \frac{y-b}{k}\} \\ &= \int_{\frac{y-b}{k}}^{+\infty} f_X(x) \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{\frac{y-b}{k}} f_X(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

上式两边对 y 求导数得

$$f_Y(y) = -\frac{1}{k} f_X(\frac{y-b}{k}) \tag{24}$$

于是

$$f_Y(y) = \frac{1}{|k|} f_X(\frac{y-b}{k}) \tag{25}$$

若连续型随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)$, 则随机变量 $Y = kX + b$ 的概率密度为

$$f_Y(y) = \frac{1}{|k|} f_X(\frac{y-b}{k}) \tag{26}$$

若连续型随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)$, 则随机变量 $Y = kX + b$ 的概率密度为

$$f_Y(y) = \frac{1}{|k|} f_X\left(\frac{y-b}{k}\right) \tag{26}$$

对 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ 的概率密度为

若连续型随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)$, 则随机变量 $Y = kX + b$ 的概率密度为

$$f_Y(y) = \frac{1}{|k|} f_X(\frac{y-b}{k}) \tag{26}$$

对 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ 的概率密度为

$$f_Y(y) = \frac{1}{|k|} f_X(\frac{y-b}{k})$$

若连续型随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)$, 则随机变量 $Y = kX + b$ 的概率密度为

$$f_Y(y) = \frac{1}{|k|} f_X(\frac{y-b}{k}) \tag{26}$$

对 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ 的概率密度为

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{1}{|k|} f_X(\frac{y-b}{k}) \\ &= \sigma f_X(\sigma y + \mu) \end{aligned}$$

若连续型随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)$, 则随机变量 $Y = kX + b$ 的概率密度为

$$f_Y(y) = \frac{1}{|k|} f_X(\frac{y-b}{k}) \tag{26}$$

对 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ 的概率密度为

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{1}{|k|} f_X(\frac{y-b}{k}) \\ &= \sigma f_X(\sigma y + \mu) \\ &= \sigma \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{ -\frac{\left((\sigma y + \mu) - \mu\right)^2}{2\sigma^2} \right\} \end{aligned}$$

若连续型随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)$, 则随机变量 $Y = kX + b$ 的概率密度为

$$f_Y(y) = \frac{1}{|k|} f_X(\frac{y-b}{k}) \tag{26}$$

对 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ 的概率密度为

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{1}{|k|} f_X(\frac{y-b}{k}) \\
&= \sigma f_X(\sigma y + \mu) \\
&= \sigma \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{ -\frac{\big((\sigma y + \mu) - \mu\big)^2}{2\sigma^2} \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}},
\end{aligned}$$

若连续型随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)$, 则随机变量 $Y = kX + b$ 的概率密度为

$$f_Y(y) = \frac{1}{|k|} f_X(\frac{y-b}{k}) \tag{26}$$

对 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ 的概率密度为

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{1}{|k|} f_X(\frac{y-b}{k}) \\ &= \sigma f_X(\sigma y + \mu) \\ &= \sigma \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{ -\frac{\left((\sigma y + \mu) - \mu\right)^2}{2\sigma^2} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, \end{aligned}$$

即 $Y \sim N(0, 1)$.

类似的, 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则

$$Y = aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2) \tag{27}$$

类似的, 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则

$$Y = aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2) \tag{27}$$

一个常识: 正态随机变量的线性函数仍为正态分布.

Example 30

设 $X \sim N(0, 1)$, 求 $Y = X^2$ 的概率密度.

Example 30

设 $X \sim N(0, 1)$, 求 $Y = X^2$ 的概率密度.

解: 当 $y < 0$ 时, 注意到 $Y = X^2$ 总是取非负值,

Example 30

设 $X \sim N(0, 1)$, 求 $Y = X^2$ 的概率密度.

解: 当 $y < 0$ 时, 注意到 $Y = X^2$ 总是取非负值, 因此,

$$F_Y(y) = P\{Y \leqslant y\} = P\{\varnothing\} = 0$$

Example 30

设 $X \sim N(0,\, 1)$, 求 $Y = X^2$ 的概率密度.

解: 当 $y < 0$ 时, 注意到 $Y = X^2$ 总是取非负值, 因此,

$$F_Y(y) = P\{Y \leqslant y\} = P\{\varnothing\} = 0$$

当 $y \geqslant 0$ 时,

$$F_Y(y) = P\{Y \leqslant y\} = P\{X^2 \leqslant y\}$$

Example 30

设 $X \sim N(0, 1)$, 求 $Y = X^2$ 的概率密度.

解: 当 $y < 0$ 时, 注意到 $Y = X^2$ 总是取非负值, 因此,

$$F_Y(y) = P\{Y \leqslant y\} = P\{\varnothing\} = 0$$

当 $y \geqslant 0$ 时,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leqslant y\} = P\{X^2 \leqslant y\} \\ &= P\{-\sqrt{y} \leqslant X \leqslant \sqrt{y}\} \end{aligned}$$

Example 30

设 $X \sim N(0, 1)$, 求 $Y = X^2$ 的概率密度.

解: 当 $y < 0$ 时, 注意到 $Y = X^2$ 总是取非负值, 因此,

$$F_Y(y) = P\{Y \leqslant y\} = P\{\varnothing\} = 0$$

当 $y \geqslant 0$ 时,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leqslant y\} = P\{X^2 \leqslant y\} \\ &= P\{-\sqrt{y} \leqslant X \leqslant \sqrt{y}\} \\ &= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Example 30

设 $X \sim N(0, 1)$, 求 $Y = X^2$ 的概率密度.

解: 当 $y < 0$ 时, 注意到 $Y = X^2$ 总是取非负值, 因此,

$$F_Y(y) = P\{Y \leqslant y\} = P\{\varnothing\} = 0$$

当 $y \geqslant 0$ 时,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leqslant y\} = P\{X^2 \leqslant y\} \\ &= P\{-\sqrt{y} \leqslant X \leqslant \sqrt{y}\} \\ &= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

对 y 求导数, 综合得

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}}, & y > 0, \\ 0, & y \leqslant 0. \end{cases}$$

Example 31

设

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < 1, \\ 2 - x, & 1 \leqslant x < 2, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

求 X 的分布函数 $F(x)$.

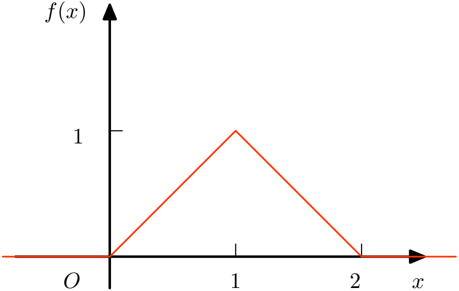
Example 31

设

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x<1,\\ 2-x, & 1\leqslant x<2,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

求 X 的分布函数 $F(x)$.

解:



分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \int_0^x x\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}, & 0\leqslant x<1,\\ \int_0^1 x\,\mathrm{d}x+\int_1^x(2-x)\,\mathrm{d}x=-\dfrac{x^2}{2}+2x-1, & 1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2.\end{cases}$$

分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \int_0^x x\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^2}{2}, & 0 \leqslant x < 1, \\ \int_0^1 x\,\mathrm{d}x + \int_1^x (2-x)\,\mathrm{d}x = -\dfrac{x^2}{2} + 2x - 1, & 1 \leqslant x < 2, \\ 1, & x \geqslant 2. \end{cases}$$

详解: 比如 $0 \leqslant x < 1$ 时,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 0 + \int_{-\infty}^{x} x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

Example 32 (练习)

设

$$f(x)=\begin{cases}2(1-1/x^2), & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

求 X 的分布函数 $F(x)$.

Example 33 (练习)

设

$$f(x)=\begin{cases}c+x, & -1<x\leqslant 0,\\ c-x, & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

确定常数 c, 并求分布函数 $F(x)$.