武汉大学 2012–2013 学年第二学期

《线性代数 B》(工科 54 学时) 试题

一. (10 分) 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,1)^T$ 为向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, 求向量 $\boldsymbol{\beta}=(2,0,0)^T$ 在这组基下的坐标向量.

二. (10 分) 已知 A 为 3 阶矩阵, $B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, 且满足方程 $2A^{-1}B=B-4I$, I 为 3 阶单位阵, 求矩阵 A.

三. (12 分) 已知四阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&0&0\\-1&-1&3&0\\0&-1&-2&4\\0&0&-1&-3\end{vmatrix}$.

1. 计算四阶行列式 D 的值; 2. 计算四阶行列式 D 的第一行元素的代数余子式之和.

四. (10 分) 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{pmatrix}$, 矩阵 $B=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}(2,1,0)$, 且 $r(A-AB)=2$, 求参数 t 的值.

五. (16 分) 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\7\\1\\3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\a\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}3\\10\\b\\4\end{pmatrix}$, 问 a,b 为何值时

1. $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示;
2. $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示? 并写出表示式;
3. $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 用无穷多方式线性表示? 并写出一般表示式;
4. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关, 并在此时求它的秩和一个最大无关组, 且用该最大无关组表示其余向量.

六. (14 分) 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2,

1. 求 a 的值; 2. 求正交变换 $x=Qy$, 将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形.

七. (12 分) 设 A 为三阶实对称阵, 且满足条件 $A^2+2A=O$, 已知 A 的秩 $r(A)=2$,

1. 求 A 的全部特征值; 2. 计算 $|A+4I|$; 3. 当 k 为何值时, $A+kI$ 为正定阵, 其中 I 为 3 阶单位阵.

八. (8 分) 已知 A 为 3 阶方阵, λ_1, λ_2, λ_3 为 A 的 3 个不同的特征值, $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 分别为相应的特征向量, 又 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, 试证: $\boldsymbol{\beta}$, $A\boldsymbol{\beta}$, $A^2\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

九. (8 分) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 n 维非零实向量, $\boldsymbol{\alpha}_4=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$, k_1, k_2 为使得 $\boldsymbol{\alpha}_4\neq\mathbf{0}$ 的任意常数, 以下结论若正确, 请证明; 若不正确, 请举出反例.

1. 若 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 正交, 且 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 也正交, 则 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 正交.
2. 若 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关, 且 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 也线性无关, 则 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

武汉大学 2012–2013 学年第二学期

《线性代数 D》(工科 36 学时) 试题

一. (10 分) 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 4 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ 3 & 4 & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 3 & 3 & \cdots & 4 & 3 \\ 3 & 3 & \cdots & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

二. (15 分) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 矩阵 B 满足 $A^*BA=2BA-9E$, 求 B.

三. (15 分) 设向量组 A: $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,2,0)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(7,0,14,3)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(2,-1,0,1)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(5,1,6,2)^T$

1. 求向量组的秩; 2. 求向量组的一个最大线性无关组, 并把其余向量分别用求得的最大无关组线性表示.

四. (15 分) 问 λ 为何值时, 线性方程组 $\begin{cases} 2x_1+4x_2+(\lambda-5)x_3 &= \lambda+1 \\ 2x_1+(5-\lambda)x_2-4x_3 &= 2 \\ (2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3 &= 1 \end{cases}$ 有唯一解, 无解或有无穷多解? 并在有无穷多解时求其通解.

五. (15 分) 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$

1. 把二次型 f 写成 $f=X^TAX$ 的形式;
2. 求矩阵 A 的特征值与特征向量.
3. 求正交矩阵 P, 使 f 通过正交变换 $\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}$ 化为标准形.

六. (15 分) 已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 $1,2,3$, 求 $|A^3-5A^2+7A|$.

七. (7 分) 证明: 设矩阵 A 为 n 阶非零实对称矩阵, 则存在 n 维列向量 X, 使得 $X^TAX\neq 0$.

八. (8 分) 证明: 设 A 为 $n\times m$ 矩阵, B 为 $m\times n$ 矩阵, $n<m$, 且 $AB=E$, 证明 B 的列向量组线性无关.