

武汉大学数学与统计学院

2010—2011 第一学期《高等数学 A1》期末考试试题 A

一、(42 分) 试解下列各题:

1、计算  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [e^{\frac{1}{x}} - 1]^{\frac{1}{\ln x}}$

2、求解微分方程  $y''' - y'' + 2y' - 2y = 0$  的通解。

3、判断函数  $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$  的间断点, 并说明是可去间断点、跳跃间断点、无穷间断点还是振荡间断点。

4、求曲线  $y = \frac{x^2 - 5}{x - 3}$  的渐近线方程。

5、设  $y = \ln(x^2 + 3x + 2)$ , 求  $y^{(n)}$

6、讨论函数  $y = \ln(x^2 + 1)$  的单调性和曲线  $y = \ln(x^2 + 1)$  的凹凸性, 并求函数  $y = \ln(x^2 + 1)$  的极值和曲线  $y = \ln(x^2 + 1)$  的拐点。

二、(8 分) 设函数  $y = f(x)$  与  $y = g(x)$  互为反函数,  $f(x)$  可导, 且  $f'(x) \neq 0$ ,  $f(a) = 3a$ ,

$F(x) = f\left[\frac{1}{a}g^2(4x - a)\right]$ , 求  $F'(a)$ 。

三、(10 分) 设函数  $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b \tan x + c & x \leq 0 \\ \ln(1 + x) & x > 0 \end{cases}$ , 试问  $a, b, c$  为何值时,  $f(x)$  在  $x = 0$  处一

阶导数连续, 但二阶导数不存在。

四、(12 分) 设函数  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2} + x \cos^5 x & -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{\arctan x}{x^2} & x > 1 \end{cases}$ , 求积分:  $\int_{-1}^{+\infty} f(x) dx$

五、(12 分) 已知一容器的侧面是由曲线  $L: x^2 - y^2 = 1 \quad (-1 \leq y \leq 1)$  (单位:  $m$ ), 绕着  $oy$

轴旋转而成, 容器中装有其一半容量的水若以每分钟  $\frac{\pi}{3}$  的速度将水从容器口处抽出, 问:

1、需要多少分钟才能抽完?

2、需要做多少功?

六、(10 分) 求曲线  $y = \sqrt{x}$  的一条切线, 使得该曲线与切线  $l$  及直线  $x = 0$  和  $x = 2$  所围成的图形绕  $x$  轴旋转的旋转体的体积为最小。

七、(6 分) 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内二阶可导, 且  $f(a) = f(b) \geq 0$ , 又有

$f(c) < 0 \quad (a < c < b)$ . 试证: 在  $(a, b)$  内至少存在两点  $\xi_1, \xi_2$  使  $f''(\xi_1) > 0, f''(\xi_2) > 0$ .

武汉大学数学与统计学院

2010—2011 第一学期《高等数学 A1》期末考试试题参考答案

一、(42 分) 试解下列各题:

$$1、解: 原极限 = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x - 1)}{\ln x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{e^x - 1}(-\frac{1}{x^2})}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}} = e^{-1} \text{ 或原极限} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{1}{x}}{\ln x}} = e^{-1}$$

2、解: 齐次方程  $y''' - y'' + 2y' - 2y = 0$  的特征方程为  $\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 2) = 0$ , 它有复数根为:  $\lambda = \pm\sqrt{2}i$ , 实特征根为:  $\lambda = 1$ , 故原方程的通解为:  
 $y = C_1 e^x + C_2 \cos \sqrt{2}x + C_3 \sin \sqrt{2}x$

3、解: 由  $f(x) = \frac{x(x-1)\sqrt{1+x^2}}{(x+1)(x-1)|x|}$  知,  $x = 0; x = 1; x = -1$  是间断点,

又  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{x(x-1)\sqrt{1+x^2}}{(x+1)(x-1)|x|} = -1$   $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{x(x-1)\sqrt{1+x^2}}{(x+1)(x-1)|x|} = 1$  所以  $x = 0$  是

跳跃间断点;  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{x(x-1)\sqrt{1+x^2}}{(x+1)(x-1)|x|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  所以  $x = 1$  是可去间断点;

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{x(x-1)\sqrt{1+x^2}}{(x+1)(x-1)|x|} = -\infty$  所以  $x = -1$  是无穷间断点; 没有振荡间断点。

4、解: 由  $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ ,  $b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow \infty} [\frac{x^2 - 5}{x - 3} - x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5 - x^2 + 3x}{x - 3} = 3$

故有斜渐近线:  $y = x + 3$ , 又  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$ , 所以  $x = 3$  为垂直渐近线。

而  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ , 所以没有水平渐近线。

5、解:  $y = \ln(x+1)(x+2) = \ln(x+1) + \ln(x+2)$   $y' = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}$   $y^{(n+1)} = (-1)^n n! [(1+x)^{-(n+1)} + (2+x)^{-(n+1)}]$

6、解: 定义域为  $(-\infty, +\infty)$   $y' = \frac{2x}{x^2 + 1}$ ,  $y'' = \frac{2(1-x^2)}{(x^2 + 1)^2}$

由  $y' = 0$  得驻点  $x = 0$ . 由  $y'' = 0$  得  $x_1 = 1$  和  $x_2 = -1$

$x$	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$y'$	—	0	+
$y$	$\searrow$	0 极小 值	$\nearrow$

$x$	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$y''$	—	0	+	0	—
$y$	$\cap$	$\ln 2$	$\cup$	$\ln 2$	$\cap$

由上表可以看出, 单调增区间为  $(0, +\infty)$ , 单调减区间为  $(-\infty, 0)$ , 凹区间为  $(-1, 1)$ , 凸区间有两个:  $(-\infty, -1)$  和  $(1, +\infty)$ , 极小值为 0, 拐点有两个:  $(-1, \ln 2)$  和  $(1, \ln 2)$

二、(8 分) 解:  $F'(x) = f'[\frac{1}{a} g^2(4x-a)] \frac{8}{a} g(4x-a) g'(4x-a)$ , 故

$$F'(a) = f'[\frac{1}{a} g^2(3a)] \frac{8}{a} g(3a) g'(3a) = f'(a) \frac{8}{a} g(3a) g'(3a) = \frac{8}{a} g(3a) = 8$$

三、(10分) 解: 因为一阶导数连续, 故  $f(0-0) = f(0+0) \Rightarrow f(0) = c = 0$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax^2 + b \tan x - 0}{x} = b \quad f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1) - 0}{x} = 1$$

所以有:  $b = 1$  故有

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + \sec^2 x & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ \frac{1}{1+x} & x > 0 \end{cases} \quad f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2ax + \sec^2 x - 1}{x} = 2a \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{x(1+x)} = -1 \end{cases}$$

当  $2a \neq -1$  时  $f(x)$  在  $x = 0$  处二阶导不存在。

四、(12分) 解:  $\int_{-1}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-1}^1 (\sqrt{1-x^2} + x \cos^5 x)dx + \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx$

$$= 2 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx - \int_1^{+\infty} \arctan x d\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \stackrel{x = \sin t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx = \int_1^{+\infty} \arctan x d\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\arctan x}{x} \Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{\pi}{4} + \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{1+x^2} \Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$$

$$\text{故 } \int_{-1}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-1}^1 (\sqrt{1-x^2} + x \cos^5 x)dx + \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx = \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$$

五、(12分) 解: 1、 $V = \pi \int_{-1}^0 (1+y^2)dy = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow t = 4$  2、 $W = \pi g \int_{-1}^0 (1+y^2)(1-y)dy = \frac{25}{12} \pi g$

六、(10分) 解: 设切点坐标为  $(t, \sqrt{t})$ , 由  $y = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ , 可知曲线  $y = \sqrt{x}$  在  $(t, \sqrt{t})$  处的切线方程

为  $y - \sqrt{t} = \frac{1}{2\sqrt{t}}(x - t)$ , 或  $y = \frac{1}{2\sqrt{t}}(x + t)$ . 因此所求旋转体的体积为

$$V = \pi \int_0^2 \left\{ \left[ \frac{1}{2\sqrt{t}}(x + t) \right]^2 - (\sqrt{x})^2 \right\} dx = \frac{\pi}{4} \left( \frac{8}{3t} - 4 + 2t \right) \text{ 所以, } \frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4} \left( -\frac{8}{3t^2} + 2 \right) = 0. \text{ 得}$$

驻点  $t = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$ , 舍去  $t = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ . 由于  $\left. \frac{d^2V}{dt^2} \right|_{t=\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{16}{3t^2} \Big|_{t=\frac{2}{\sqrt{3}}} > 0$ , 因而函数  $V$  在  $t = \frac{2}{\sqrt{3}}$  处达

到极小值, 而且也是最小值. 因此所求切线方程为  $y = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{2}$ .

七、(6分) 证明: 法一: 由  $f(a) = f(b) \geq 0$ ,  $f(c) < 0$ , 根据零点值定理知, 至少存在一点  $\eta_1 \in (a, c)$ , 使得  $f(\eta_1) = 0$ , 至少存在一点  $\eta_2 \in (c, b)$ , 使得  $f(\eta_2) = 0$ , 在  $[\eta_1, c]$  与  $[c, \eta_2]$  上, 由拉格朗日中值定理知, 至少存在一点  $\varsigma_1 \in (\eta_1, c)$ , 使得  $f'(\varsigma_1) = \frac{f(c) - f(\eta_1)}{c - \eta_1} < 0$ , 由拉格朗日中值定理知, 至少存在一

点  $\varsigma_2 \in (c, \eta_2)$ , 使得  $f'(\varsigma_2) = \frac{f(\eta_2) - f(c)}{\eta_2 - c} > 0$ , 再在区间  $[\varsigma_1, \varsigma_2]$  上, 运用零点值定理知, 至少存在一

点  $\eta \in (\varsigma_1, \varsigma_2)$  使得  $f'(\eta) = 0$ , 又由拉格朗日中值定理知, 至少存在一点  $\xi_1 \in (\varsigma_1, \eta)$ , 使得  $f''(\xi_1) = \frac{f'(\eta) - f'(\varsigma_1)}{\eta - \varsigma_1} > 0$ , 由拉格朗日中值定理知, 至少存在一点  $\xi_2 \in (\eta, \varsigma_2)$ , 使得

$$f''(\xi_2) = \frac{f'(\varsigma_2) - f'(\eta)}{\varsigma_2 - \eta} > 0, \text{ 故在 } (a, b) \text{ 内至少存在两点 } \xi_1, \xi_2 \text{ 使 } f''(\xi_1) > 0, f''(\xi_2) > 0$$

法二：由  $f(a) = f(b) \geq 0$ ,  $f(c) < 0$ , 根据零点值定理知, 至少存在一点  $\eta_1 \in (a, c)$ , 使得  $f(\eta_1) = 0$ , 至少存在一点  $\eta_2 \in (c, b)$ , 使得  $f(\eta_2) = 0$ , 再由罗尔定理知, 至少存在一点  $\eta \in (\eta_1, \eta_2)$  使得  $f'(\eta) = 0$ , 又在  $[\eta_1, c]$  与  $[c, \eta_2]$  上, 由拉格朗日中值定理知, 至少存在一点  $\varsigma_1 \in (\eta_1, c)$ , 使得

$$f'(\varsigma_1) = \frac{f(c) - f(\eta_1)}{c - \eta_1} < 0, \text{ 由拉格朗日中值定理知, 至少存在一点 } \varsigma_2 \in (c, \eta_2), \text{ 使得}$$

$$f'(\varsigma_2) = \frac{f(\eta_2) - f(c)}{\eta_2 - c} > 0, \text{ 再在区间 } [\varsigma_1, \eta] \text{ 与 } [\eta, \varsigma_2] \text{ 上, 由拉格朗日中值定理知, 至少存在一点}$$

$$\xi_1 \in (\varsigma_1, \eta), \text{ 使得 } f''(\xi_1) = \frac{f'(\eta) - f'(\varsigma_1)}{\eta - \varsigma_1} > 0, \text{ 由拉格朗日中值定理知, 至少存在一点 } \xi_2 \in (\eta, \varsigma_2), \text{ 使}$$

$$\text{得 } f''(\xi_2) = \frac{f'(\varsigma_2) - f'(\eta)}{\varsigma_2 - \eta} > 0, \text{ 故在 } (a, b) \text{ 内至少存在两点 } \xi_1, \xi_2 \text{ 使 } f''(\xi_1) > 0, f''(\xi_2) > 0$$