

# Chapter 2

## 矩阵

### Linear Algebra

December 8, 2016

黄正华, 数学与统计学院, 武汉大学

### 目录

1	高斯消元法	3
2	矩阵的加法 数量乘法 乘法	10
2.1	矩阵的加法 . . . . .	10
2.2	矩阵的数量乘法 . . . . .	11
2.3	矩阵的乘法 . . . . .	12
2.4	矩阵的行列式 . . . . .	17
3	矩阵的转置 对称矩阵	21
4	可逆矩阵的逆矩阵	22
5	矩阵的初等变换和初等矩阵	27
6	分块矩阵	36
6.1	分块矩阵的定义与运算 . . . . .	36
6.2	分块矩阵的初等变换和分块初等阵 . . . . .	39
7	习题解答	41
8	小结与复习	49
8.1	内容小结 . . . . .	49
8.2	题型举例 . . . . .	51
8.2.1	矩阵运算 . . . . .	51
8.2.2	伴随矩阵 . . . . .	52
8.2.3	逆矩阵 . . . . .	54
8.2.4	矩阵方程 . . . . .	55

8.2.5 初等变换 . . . . .	57
----------------------	----

## 9 杂谈 58

9.1 矩阵乘法引发的问题: 运算是什?	58
9.2 逆矩阵为什么要出现 . . . . .	60
9.3 矩阵溯源 . . . . .	62
9.4 矩阵乘法在图论中的一个简单而有效的应用 . . . . .	63

2.2

学习本章过程中, 请思考以下问题:

- (1) 矩阵的乘法为什么要这样定义?
- (2) 为什么矩阵乘法不满足交换律?
- (3) 矩阵为什么没有除法?

2.3

## 矩阵: Matrix

Google 搜索 Matrix 会找到什么?

The screenshot shows a Google search for "matrix". The search bar is at the top with "matrix" entered. Below the search bar, there are tabs for "网页" (Web), "图片" (Images), "视频" (Videos), "新闻" (News), "地图" (Maps), and "更多" (More). The search results are displayed below the tabs. On the left, there are image search results for "matrix" showing the movie poster and the green code rain. On the right, there is a knowledge panel for "矩阵" (Matrix) with a definition and a diagram of a matrix. Below the knowledge panel, there are search results for "The Matrix (1999) - IMDb" and "Matrix multiplication - Invertible matrix - Matrix calculus - Matrix string theory".

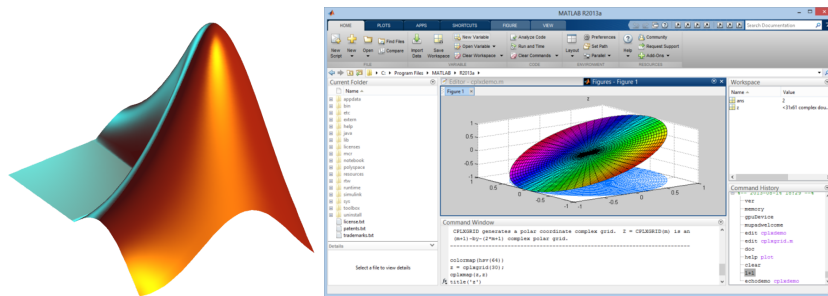
2.4

## Matrix



## MATLAB

MATLAB (matrix laboratory)



## 1 高斯消元法

- 本节通过高斯消元法, 说明矩阵概念出现的必要性.
- 高斯消元法虽然简单, 但是整个线性代数可以认为是由此发端的. 后续的很多话题, 无不渗透着高斯消元法的影子.
- 《线性代数》——一个线性方程组引发的故事.

故事的开始, 是这样的。。。。。

*Example 1.* 用高斯消元法解线性方程组

$$\begin{cases} 2x + y - z = 8, & (r_1) \\ -3x - y + 2z = -11, & (r_2) \\ -2x + y + 2z = -3. & (r_3) \end{cases}$$

高斯消元法的原理是:

1. 要将  $r_1$  以下的等式中的  $x$  消除, 然后再将  $r_2$  以下的等式中的  $y$  消除. 使整个方程组变成一个**阶梯形**的格式.
2. 再将已得出的答案一个个地**回代**到已被简化的等式中的未知数中, 即得其余的答案.

方程组	行变换
$\begin{cases} 2x + y - z = 8, \\ -3x - y + 2z = -11, \\ -2x + y + 2z = -3. \end{cases}$	$\begin{aligned} r_2 + \frac{3}{2}r_1 &\rightarrow r_2 \\ r_3 + r_1 &\rightarrow r_3 \end{aligned}$
$\begin{cases} 2x + y - z = 8, \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 1, \\ 2y + z = 5. \end{cases}$	$r_3 - 4r_2 \rightarrow r_3$
$\begin{cases} 2x + y - z = 8, \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 1, \\ -z = 1. \end{cases}$	$\begin{aligned} r_2 + \frac{1}{2}r_3 &\rightarrow r_2 \\ r_1 - r_3 &\rightarrow r_1 \end{aligned}$
$\begin{cases} 2x + y = 7, \\ \frac{1}{2}y = \frac{3}{2}, \\ -z = 1. \end{cases}$	$\begin{aligned} 2r_2 &\rightarrow r_2 \\ -r_3 &\rightarrow r_3 \end{aligned}$
$\begin{cases} 2x + y = 7, \\ y = 3, \\ z = -1. \end{cases}$	$\begin{aligned} r_1 - r_2 &\rightarrow r_1 \\ \frac{1}{2}r_1 &\rightarrow r_1 \end{aligned}$
$\begin{cases} x = 2, \\ y = 3, \\ z = -1. \end{cases}$	

实际参与运算的只有系数和常数, 把方程组的主要信息记录在一个**矩形阵列**里, 方程的运算与变换, 体现为矩形阵列中, 各行元素的相应运算.

2.12


线性方程组的主要信息可以紧凑地记录在一个矩形阵列里, 称之为**矩阵**. 矩阵

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

称为方程组的**系数矩阵**, 矩阵

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array} \right)$$

称为方程组的**增广矩阵** (augmented matrix).

 增广矩阵由系数矩阵加上方程组右端常数列组成.

2.13

2.14

方程组	行变换	增广矩阵
$\begin{cases} 2x + y - z = 8, \\ -3x - y + 2z = -11, \\ -2x + y + 2z = -3. \end{cases}$	$\begin{aligned} r_2 + \frac{3}{2}r_1 &\rightarrow r_2 \\ r_3 + r_1 &\rightarrow r_3 \end{aligned}$	$\left( \begin{array}{ccc c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array} \right)$
$\begin{cases} 2x + y - z = 8, \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 1, \\ 2y + z = 5. \end{cases}$	$r_3 - 4r_2 \rightarrow r_3$	$\left( \begin{array}{ccc c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right)$
$\begin{cases} 2x + y - z = 8, \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 1, \\ -z = 1. \end{cases}$	$\begin{aligned} r_2 + \frac{1}{2}r_3 &\rightarrow r_2 \\ r_1 - r_3 &\rightarrow r_1 \end{aligned}$	$\left( \begin{array}{ccc c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$
$\begin{cases} 2x + y = 7, \\ \frac{1}{2}y = \frac{3}{2}, \\ -z = 1. \end{cases}$	$\begin{aligned} 2r_2 &\rightarrow r_2 \\ -r_3 &\rightarrow r_3 \end{aligned}$	$\left( \begin{array}{ccc c} 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$
$\begin{cases} 2x + y = 7, \\ y = 3, \\ z = -1. \end{cases}$	$\begin{aligned} r_1 - r_2 &\rightarrow r_1 \\ \frac{1}{2}r_1 &\rightarrow r_1 \end{aligned}$	$\left( \begin{array}{ccc c} 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$
$\begin{cases} x = 2, \\ y = 3, \\ z = -1. \end{cases}$		$\left( \begin{array}{ccc c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$

2.15

如果一个线性方程组有唯一解或无穷多解, 则称它是**相容的** (consistent); 如果无解, 则称它是**不相容的** (inconsistent).

线性方程组的所有解的集合, 称为方程组的**解集**. 如果线性方程组不相容, 则其解集为空集.

2.16

## 矩阵的定义

**Definition 2** (矩阵). 由  $m \times n$  个数  $a_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ ) 排成  $m$  行  $n$  列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

称为  $m \times n$  **矩阵** (Matrix), 通常记为  $\mathbf{A}_{m \times n}$  或  $\mathbf{A}$ .

- $a_{ij}$  位于矩阵的第  $i$  行、第  $j$  列, 叫做矩阵  $\mathbf{A}$  的**元素**;
- 以数  $a_{ij}$  为  $(i, j)$  元的  $m \times n$  矩阵可简记作

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) \text{ 或 } \mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}.$$

- 元素是实数的矩阵称为**实矩阵**; 元素为复数的矩阵称为**复矩阵**. 本课程中的矩阵除特别说明外, 都指实矩阵.

2.17

- 只有一行的矩阵

$$\mathbf{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

称为**行矩阵**, 又称**行向量**.

- 只有一列的矩阵

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

称为**列矩阵**, 又称**列向量**.

- 当  $m = n = 1$  时, 即  $\mathbf{A} = (a_{11})$ , 此时矩阵退化为一个数  $a_{11}$ .
- 所有元素都为零的矩阵, 称为**零矩阵**. 记作  $\mathbf{0}$ , 或  $\mathbf{0}_{m \times n}$ .

2.18

用消元法解线性方程组, 实际上是对方程组反复施行以下 3 种变换:

- 把一个方程的倍数加到另一个方程上;
- 互换两个方程的位置;
- 用一个非零数乘以某一个方程.

这 3 类变换称为线性方程组的**初等变换**. 经过初等变换, 把原方程组变成阶梯型方程组, 然后用回代方法 (从最后一个方程开始, 逐次往上解) 去求得方程组的解.

2.19

 高斯消元法的过程体现为对增广矩阵做初等行变换:

- 把矩阵的第  $j$  行的  $\mu$  倍加到第  $i$  行, 记作  $r_i + \mu r_j$ ;
- 互换矩阵的  $i, j$  两行, 记作  $r_i \leftrightarrow r_j$ ;
- 用任意非零数  $\alpha$  乘以矩阵的第  $i$  行, 记作  $r_i \times \alpha$ .

矩阵初等变换的具体讨论, 在本章第 5 节展开.

2.20

Example 3 (P.35 T.32). 解线性方程组

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$$

2.21

**解:** 原题要求使用克拉默法则, 这里我们使用高斯消元法.

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{(r_1+r_2+r_3+r_4+r_5) \div 4} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{15}{4} \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 5 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow[r_i - r_1, i=2,3,4,5]{} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{15}{4} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{4} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{5}{4} \end{array} \right) \xrightarrow[r_i \times (-1), i=2,3,4,5]{} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{4} \end{array} \right) \end{aligned}$$

故方程组的解为

$$x_1 = \frac{11}{4}, \quad x_2 = \frac{7}{4}, \quad x_3 = \frac{3}{4}, \quad x_4 = -\frac{1}{4}, \quad x_5 = -\frac{5}{4}.$$

2.22

## 行阶梯形矩阵

前例中, 形如

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{15}{4} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{4} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{5}{4} \end{array} \right)$$

的矩阵, 称为**行阶梯形矩阵**.

2.23

行阶梯形矩阵的形式:

$$\left( \begin{array}{ccccc} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

这里  $\blacksquare$  表示任意非零值;  $*$  可取任意值, 包括零. 其特点是:

- 可画出一条阶梯线, 线的下方全为 0;
- 每个台阶只有一阶, 台阶数即是非零行的行数;
- 阶梯线的竖线 (每段竖线的长度为一行) 后面的第一个元素为非零元, 也就是非零行的第一个非零元.

2.24

## 行简化阶梯形矩阵

形如

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{4} \end{array} \right)$$

的矩阵, 称为**行简化阶梯形矩阵**, 或**行最简形矩阵**.


2.25

行简化阶梯形矩阵的形式:

$$\left( \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

其中 \* 可取任意值, 包括零. 其特点是:

- 非零行的第一个非零元为 1;
- 这些非零元所在列的其他元素都为 0.

 行简化阶梯形矩阵当然是行阶梯形矩阵的一种.

高斯消元法的两个步骤: (1) 转化为阶梯形线性方程组; (2) 回代得到方程组的解. 这两个步骤, 在增广矩阵中分别对应于两个矩阵的出现: (1) 行阶梯形矩阵; (2) 行简化阶梯形矩阵.

用归纳法不难证明: 对于任何矩阵  $\mathbf{A}_{m \times n}$ , 总可经过有限次初等行变换, 把它变为行阶梯形矩阵和行简化阶梯形矩阵.

$\mathbf{A}_{m \times n}$  的行简化阶梯形矩阵的一般形式:

$$\left( \begin{array}{cccccccccccccccc} & & & k_1 & & & & k_2 & & & & k_r & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \color{red}{1} & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & 0 & * & \cdots & * & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \color{red}{1} & * & \cdots & 0 & * & \cdots & * & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \color{red}{1} & * & \cdots & * & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} r \text{ 个非零行} \\ \\ \\ \\ m-r \text{ 个零行} \end{array}$$

其中 \* 可取任意值 (包括零), 第  $k_j$  列中的元素除了第  $j$  个元素为 1 外, 其余元素均为 0 ( $1 \leq j \leq r$ ).

Example 4. 解线性方程组 
$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 4, \\ x - 2y + 4z = -5, \\ 3x + 8y - 2z = 13, \\ 4x - y + 9z = -6. \end{cases}$$

**解:** 对方程的增广矩阵实施初等行变换, 注意到  $r_3 = 2r_1 - r_2$ ,  $r_4 = r_1 + 2r_2$ , 有:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & -5 \\ 3 & 8 & -2 & 13 \\ 4 & -1 & 9 & -6 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - 2r_1 + r_2]{r_4 - r_1 - 2r_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 7 & -7 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{r_2 \div 7} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 + 2r_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$



即原方程组等价于

$$\begin{cases} x + 2z = -1, \\ y - z = 2, \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2z - 1, \\ y = z + 2, \end{cases}$$

取  $z = k$ ,  $k$  为任意实数, 则原方程组的解为

$$x = -2k - 1, \quad y = k + 2, \quad z = k.$$

或记为

$$(x, y, z) = (-2k - 1, k + 2, k), \quad k \in \mathbb{R}.$$

2.29

## 方阵, 各种特殊形式的方阵

**方阵** 若  $m = n$ , 称  $\mathbf{A}$  为  $n$  阶**方阵**, 也可记作  $\mathbf{A}_n$ . 此时  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  称为**对角元素**.

**上三角矩阵** 对角线以下的元素全为零, 则为**上三角矩阵**. 形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \text{或简记为} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

**下三角矩阵** 对角线以上的元素全为零, 则为**下三角矩阵**. 形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \text{或简记为} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

2.30

**对角矩阵** 非对角线元素全为零, 则为**对角矩阵** (diagonal matrix). 形如

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \text{或简记为} \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

也常记作

$$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$


2.31

**单位矩阵** 对角元素全为 1 的对角矩阵, 称为**单位矩阵** (identity matrix). 记作  $\mathbf{I}$  或  $\mathbf{I}_n$  ( $n$  阶), 即

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{或简记为} \quad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

也可用克罗内克符号记作

$$\mathbf{I} = (\delta_{ij}).$$

 零矩阵和单位矩阵在矩阵运算中所起的作用, 类似于 0 和 1 在数的运算中所起的作用.

零矩阵也常记为  $\mathbf{O}$ , 单位矩阵也常记为  $\mathbf{E}$  (例如同济版教材).

2.32

**数量矩阵** 对角元素全为非零常数  $k$  的对角矩阵,

$$\begin{pmatrix} k & & & \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ & & & k \end{pmatrix},$$

称为**数量矩阵**, 记作  $k\mathbf{I}$ , 即


$$k\mathbf{I} = \text{diag}(k, k, \cdots, k).$$

2.33

## 区别矩阵与行列式

请勿混淆了它们实质以及形式上的区别

- (1) 行列式的本质是一个数; 矩阵是一个数表, 是一个由数字构成的**矩形阵列**. 它本身并不包含任何运算.
- (2) 行列式的行数与列数必相等; 矩阵的行数与列数不一定相等.
- (3) 行列式的符号与矩阵的符号也不一样.

 约定: 矩阵符号只能是 ( ), 或 [ ].

2.34

## 2 矩阵的加法 数量乘法 乘法


### 2.1 矩阵的加法

**同型矩阵** 具有相同行数和相同列数的矩阵, 称为**同型矩阵**.

**矩阵相等** 若同型矩阵  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$  和  $\mathbf{B} = (b_{ij})_{m \times n}$  在对应位置上的元素都相等, 即

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad i = 1, \cdots, m, \quad j = 1, \cdots, n,$$

则称  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  相等.

 不同型的零矩阵是不相等的, 注意它们可能都简记为  $\mathbf{O}$ . 不同型的单位矩阵  $\mathbf{I}$  也是不相等的.

2.35

**Definition 5** (矩阵加法). 设  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  和  $\mathbf{B} = (b_{ij})$  均为  $m \times n$  矩阵,  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  的**加法** (或称**和**), 记作

$$\mathbf{A} + \mathbf{B},$$

定义为一个  $m \times n$  矩阵

$$C = (c_{ij}) = A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

 只有同型矩阵才可以相加.

2.36

Example 6. 设

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$A + B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 4 & 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

但是  $A + C$  没有定义, 因为  $A$  和  $C$  不是同型矩阵.

2.37

**负矩阵** 设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , 称矩阵  $-A = (-a_{ij})$  为矩阵  $A$  的**负矩阵**.

**矩阵减法** 设  $A, B$  为同型矩阵,

$$\begin{aligned} A - B &\triangleq A + (-B) \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \cdots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \cdots & a_{2n} - b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \cdots & a_{mn} - b_{mn} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

由定义, 容易验证矩阵的加法满足下列运算法则:

2.38

- (1) 交换律  $A + B = B + A$ ;
- (2) 结合律  $(A + B) + C = A + (B + C)$ ;
- (3)  $A + 0 = A$ ;
- (4)  $A - A = 0$ .

其中  $A, B, C, 0$  为同型矩阵.

可能有人认为上述表达是画蛇添足: 加法本来就满足交换律、结合律啊? 事实上, 这是一个全新的运算, 运算对象不同于普通的数, 只是名称叫做加法而已, 它完全可以取名为别的什么法. 其运算规律是不可预知的.

2.39

## 2.2 矩阵的数量乘法

**Definition 7** (矩阵数乘). 数  $\lambda$  与矩阵  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  的乘积, 称为**数乘**, 记作  $\lambda A$ , 定义为一个  $m \times n$  的矩阵


$$C = (c_{ij}) = \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

注意

$$k \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k & k \\ k & k & k \\ k & k & k \end{pmatrix},$$

而

$$k \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & k & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \text{或} \quad \begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & k & 1 \end{vmatrix} \text{等}.$$

 这是一个常见的错误:

$$k \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & k & k \\ k & k & k \\ k & k & k \end{vmatrix}.$$

2.41

由定义, 数乘运算满足下列运算法则 (设  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{0}$  是同型矩阵,  $\lambda, \mu$  是数):

1. 数对矩阵的分配律:  $\lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}$ ;
2. 矩阵对数的分配律:  $(\lambda + \mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}$ ;
3. 结合律:  $(\lambda\mu)\mathbf{A} = \lambda(\mu\mathbf{A})$ ;
4.  $0\mathbf{A} = \mathbf{0}, 1\mathbf{A} = \mathbf{A}$ . 其中  $0, 1$  是数.

2.42

## 2.3 矩阵的乘法

### 矩阵乘法引入的第一个途径: 线性变换

矩阵的乘法是阿瑟·凯莱 (Arthur Cayley, 1821 ~ 1895) 于 1858 年根据线性变换乘积的需要提出的.

$n$  个变量  $x_1, x_2, \dots, x_n$  与  $m$  个变量  $y_1, y_2, \dots, y_m$  之间的关系式

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ \vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n, \end{cases} \quad (1)$$

表示一个从变量  $x_1, x_2, \dots, x_n$  到变量  $y_1, y_2, \dots, y_m$  的线性变换, 其中  $a_{ij}$  为常数.

2.43

设有两个线性变换

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}t_1 + b_{12}t_2, \\ x_2 = b_{21}t_1 + b_{22}t_2, \\ x_3 = b_{31}t_1 + b_{32}t_2. \end{cases} \quad (3)$$

将 (3) 代入 (2), 可得从  $t_1, t_2$  到  $y_1, y_2$  的线性变换:

$$\begin{cases} y_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})t_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})t_2, \\ y_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})t_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32})t_2, \end{cases} \quad (4)$$

2.44

我们把线性变换 (4) 叫做线性变换 (2) 与 (3) 的乘积, 相应地把 (4) 所对应的矩阵定义为 (2) 与 (3) 所对应矩阵的乘积, 即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}.$$

其规律是:


- 第一个矩阵中取行向量, 第二个矩阵中取列向量, 将这个两个向量进行“点乘”. (这也导致: 第一个矩阵的列数必须等于第二个矩阵的行数.)
- 第一个矩阵中第  $i$  行向量与第二个矩阵中第  $j$  列向量的点乘, 得到结果矩阵中  $(i, j)$  位置元素的值.

2.45

**Definition 8.** 设  $A = (a_{ij})$  是一个  $m \times s$  矩阵,  $B = (b_{ij})$  是一个  $s \times n$  矩阵,  $A$  与  $B$  的乘法, 记作  $AB$ , 定义为一个  $m \times n$  的矩阵  $C = AB = (c_{ij})$ , 其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj},$$

$$(i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n).$$

  $c_{ij}$  等于  $A$  的第  $i$  行向量与  $B$  的第  $j$  列向量的点乘.

1. 只有“ $A$  的列数 =  $B$  的行数”时, 才能定义乘法  $AB$ ;
2.  $AB$  的行数 =  $A$  的行数,  $AB$  的列数 =  $B$  的列数.

2.46

*Example 9.* 设  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ , 求  $AB, BA$ .

**解:**

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cdot (-2) - 2 \cdot 4 & 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 & 3 \cdot 3 - 2 \cdot 6 \\ 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 4 & 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 4 \cdot 6 \\ 1 \cdot (-2) - 3 \cdot 4 & 1 \cdot 1 - 3 \cdot 1 & 1 \cdot 3 - 3 \cdot 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -14 & 1 & -3 \\ 12 & 6 & 30 \\ -14 & -2 & -15 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{BA} &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & -2 \cdot (-2) + 1 \cdot 4 + 3 \cdot (-3) \\ 4 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 6 \cdot 1 & 4 \cdot (-2) + 1 \cdot 4 + 6 \cdot (-3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 20 & -22 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



### 矩阵乘法引入的另一个途径: 线性方程组的表示

Step 1. 先定义行矩阵与列矩阵的乘法为两个向量的内积. 即对

$$\mathbf{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

有

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n.$$

Step 2. 再定义  $m \times n$  矩阵与  $n \times 1$  矩阵的乘法.

设线性方程组

[illegible]

记

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$


### 定义

$$\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix},$$



则有

$$AX = B.$$

 解矩阵方程, 相当于在一次性求解多个线性方程组 (它们的系数矩阵相同).

2.54

*Example 10.* 设  $A$  是  $1 \times n$  的矩阵 (行向量),  $B$  是  $n \times 1$  的矩阵 (列向量), 即

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

求  $AB$  和  $BA$ .

**解:**  $AB = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$ ,

$$BA = \begin{pmatrix} b_1a_1 & b_1a_2 & \cdots & b_1a_n \\ b_2a_1 & b_2a_2 & \cdots & b_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_na_1 & b_na_2 & \cdots & b_na_n \end{pmatrix}.$$

2.55

*Example 11.* 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

求  $AB$  和  $BA$ .

**解:**  $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$

  $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$  或  $B = 0$ .

2.56

关于矩阵乘法的三个重要结论★

(1) 矩阵乘法不满足交换律.

即一般情况下,  $AB \neq BA$ .

**Definition 12.** 若两个矩阵  $A$  和  $B$  满足

$$AB = BA,$$

则称矩阵  $A$  和  $B$  是可交换的.

- 单位矩阵与任何同阶矩阵可交换, 即成立  $AI = IA$ .
- 任何两个同阶对角矩阵也都是可交换的.
- 一个矩阵与任何同阶矩阵可交换, 当且仅当该矩阵为数量矩阵. (作为习题)



(2) 当  $AB = 0$  时, 不能推出  $A = 0$  或  $B = 0$ .

若  $A \neq 0$  且  $B \neq 0$ , 而  $AB = 0$  时, 称  $B$  是  $A$  的右零因子,  $A$  是  $B$  的左零因子.

(3) 矩阵乘法不满足消去律.

即当  $AB = AC$ , 且  $A \neq 0$  时, 不能得到  $B = C$ .

以后我们会了解到: 当行列式  $|A| \neq 0$  时,

- $AB = 0 \Rightarrow B = 0$ ;
- $AB = AC \Rightarrow B = C$ .

### 注意

虽然矩阵也有所谓的“加法”、“乘法”, 但是这和我们熟知的实数加法、乘法是完全不同的. 运算的对象不同, 运算的内容不同, 当然, 运算的规律也不同. 这是两个不同的讨论范围里的不同运算, 相同的只不过是沿用了以前的称谓或记号而已, 我们不要被这一点“相同”而忘记二者本质的不同.

但矩阵乘法仍满足分配律和结合律:

1. 分配律  $A(B + C) = AB + AC$ ;  $(B + C)A = BA + CA$ .
2. 结合律  $(AB)C = A(BC)$ .
3. 数乘结合律  $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ , 其中  $\lambda$  是一个数.
4.  $AI = IA = A$ .


## 2.4 矩阵的行列式

### 矩阵的行列式

**Definition 13.** 设  $A = (a_{ij})$  是  $n$  阶矩阵, 称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为矩阵  $A$  的行列式, 记作  $|A|$  或  $\det A$ .

 只有方阵才有行列式.

- 当  $|A| = 0$  时, 称  $A$  为奇异矩阵 (Singular Matrix);
- 当  $|A| \neq 0$  时, 称  $A$  为非奇异矩阵 (Nonsingular Matrix).

## 矩阵的行列式的性质

性质 1  $|A^T| = |A|$ . (由行列式性质 1)

性质 2  $|kA| = k^n|A|$ , 这里  $n$  为矩阵  $A$  的阶数. (由矩阵的数乘和行列式性质 3)

Example 14. 例如 
$$\left| k \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} ka_1 & ka_2 & ka_3 \\ kb_1 & kb_2 & kb_3 \\ kc_1 & kc_2 & kc_3 \end{pmatrix} \right| = k^3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$



初学者容易犯的一个错误是:  $|kA| = k|A|$ .

2.62

性质 3  $|AB| = |A||B|$ .

证: 不妨以  $A, B$  为 3 阶矩阵来说明. 构造 6 阶行列式:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & -1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & -1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ -I & B \end{vmatrix}.$$

则  $D = |A||B|$ .

2.63

另一方面, 对  $D$  做下列变换:

第一步: 消去  $b_{11}, b_{12}, b_{13}$ , 有

$$D \xrightarrow[c_5+b_{12}c_2, c_6+b_{13}c_3]{c_4+b_{11}c_1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{11}b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{21}b_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31}b_{11} & a_{31}b_{12} & a_{31}b_{13} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & -1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}.$$

2.64

第二步、第三步: 消去  $b_{21}, b_{22}, b_{23}$  和  $b_{31}, b_{32}, b_{33}$ , 得

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \sum_{k=1}^3 a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^3 a_{1k}b_{k2} & \sum_{k=1}^3 a_{1k}b_{k3} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \sum_{k=1}^3 a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^3 a_{2k}b_{k2} & \sum_{k=1}^3 a_{2k}b_{k3} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \sum_{k=1}^3 a_{3k}b_{k1} & \sum_{k=1}^3 a_{3k}b_{k2} & \sum_{k=1}^3 a_{3k}b_{k3} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} A & AB \\ -I & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[j=1,2,3]{r_j \leftrightarrow r_{3+j}} (-1)^3 \begin{vmatrix} -I & 0 \\ A & AB \end{vmatrix}.$$

故

$$D = (-1)^3 |-\mathbf{I}| |\mathbf{AB}| = (-1)^3 (-1)^3 |\mathbf{AB}| = |\mathbf{AB}|.$$

从而结论成立.

2.65

*Example 15.* 已知  $\mathbf{A}$  是三阶方阵,  $\mathbf{B}$  是四阶方阵, 且  $|\mathbf{A}| = 3$ ,  $|\mathbf{B}| = 2$ , 求  $||\mathbf{A}| \mathbf{B}|$ .

**解:**  $||\mathbf{A}| \mathbf{B}| = |3\mathbf{B}| = 3^4 |\mathbf{B}| = 81 \times 2 = 162.$

□

2.66

## 矩阵的幂

**Definition 16.** 设  $\mathbf{A}$  是  $n$  阶矩阵, 定义  $\mathbf{A}$  的幂为:

$$\mathbf{A}^1 = \mathbf{A}, \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A}, \dots, \mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{A}^k,$$

其中,  $k$  是正整数; 特别规定  $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$ .

由于矩阵乘法满足分配律、结合律, 有

$$\mathbf{A}^{k+l} = \mathbf{A}^k \mathbf{A}^l, \quad (\mathbf{A}^k)^l = \mathbf{A}^{kl}.$$

2.67

注意:

1. 只有方阵有幂.
2. 因不满足交换律, 故

$$\begin{aligned} (\mathbf{AB})^k &\neq \mathbf{A}^k \mathbf{B}^k; \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) &\neq \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2; \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 &\neq \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2. \end{aligned}$$

事实上,

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) &= \mathbf{A}^2 - \mathbf{AB} + \mathbf{BA} - \mathbf{B}^2, \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 &= \mathbf{A}^2 + \mathbf{AB} + \mathbf{BA} + \mathbf{B}^2. \end{aligned}$$

3. 二项式定理只在下面的情形成立

$$(\mathbf{A} + \lambda \mathbf{I})^n = \mathbf{A}^n + C_n^1 \lambda \mathbf{A}^{n-1} + C_n^2 \lambda^2 \mathbf{A}^{n-2} + \dots + C_n^{n-1} \lambda^{n-1} \mathbf{A} + \lambda^n \mathbf{I}.$$

2.68

**Definition 17.** 设  $f(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0$  是  $x$  的  $k$  次多项式,  $\mathbf{A}$  是  $n$  阶矩阵, 则

$$f(\mathbf{A}) = a_k \mathbf{A}^k + a_{k-1} \mathbf{A}^{k-1} + \dots + a_1 \mathbf{A} + a_0 \mathbf{I}$$

称为矩阵  $\mathbf{A}$  的  $k$  次多项式.

2.69

**Exercise 18** (P.102, T.84). 计算矩阵的幂

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}^n.$$

解: 记  $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 则

$$A = aI + B.$$

于是

$$A^n = (aI + B)^n = a^n I + C_n^1 a^{n-1} B + C_n^2 a^{n-2} B^2 + C_n^3 a^{n-3} B^3 + \cdots + C_n^n B^n.$$

2.70

注意到:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B^3 = B^2 B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B^4 = B^3 B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.71

所以

$$\begin{aligned} A^n &= a^n I + C_n^1 a^{n-1} B + C_n^2 a^{n-2} B^2 + C_n^3 a^{n-3} B^3 \\ &= \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & C_n^1 a^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_n^1 a^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_n^1 a^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0 & 0 & C_n^2 a^{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_n^2 a^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & C_n^3 a^{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} a^n & C_n^1 a^{n-1} & C_n^2 a^{n-2} & C_n^3 a^{n-3} \\ 0 & a^n & C_n^1 a^{n-1} & C_n^2 a^{n-2} \\ 0 & 0 & a^n & C_n^1 a^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

### 3 矩阵的转置 对称矩阵

**Definition 19** (转置矩阵). 设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$


将  $\mathbf{A}$  的行和列对应互换得到的  $n \times m$  矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

称为  $\mathbf{A}$  的**转置矩阵** (Transpose), 记作  $\mathbf{A}^T$ .

矩阵转置运算满足下列运算法则:

1.  $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$ ;
2.  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$ ;
3.  $(\lambda \mathbf{A})^T = \lambda(\mathbf{A}^T)$ ,  $\lambda$  是数;
4.  $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$ .

  $(\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_k)^T = \mathbf{A}_k^T \cdots \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_1^T.$

**Definition 20.** 设  $\mathbf{A}$  是  $n$  阶矩阵.

1. 若


$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A},$$

则称  $\mathbf{A}$  是**对称矩阵**.

2. 若

$$\mathbf{A}^T = -\mathbf{A},$$

则称  $\mathbf{A}$  是**反对称矩阵**.

 反对称矩阵的主对角元素全为 0.

*Example 21.*  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -8 \\ 2 & -8 & 3 \end{pmatrix}$  是对称矩阵,  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -8 \\ -2 & 8 & 0 \end{pmatrix}$  是反

对称矩阵.

## 4 可逆矩阵的逆矩阵

### 矩阵有没有除法?

矩阵有加法、减法、乘法, 矩阵有没有除法呢?

如果类似实数定义矩阵的除法, 则

$$AX = B, \quad XA = B$$


的解都是

$$X = \frac{B}{A}.$$

而事实上, 以后我们会看到, 这两个方程的解一般不相同.  $A$  可逆时, 两个方程的解分别是

$$X = A^{-1}B, \quad X = BA^{-1}.$$

而矩阵乘法不满足交换律, 一般  $A^{-1}B \neq BA^{-1}$ .

 一句话: 矩阵没有除法. 根本原因是因为矩阵乘法不满足交换律.

通过逆矩阵, 完成了乘法的逆运算, 实现了除法的功能.

2.76

**Definition 22.** 对于矩阵  $A \in F^{n \times n}$ , 如果存在矩阵  $B \in F^{n \times n}$ , 使得

$$AB = BA = I,$$

则称矩阵  $A$  为**可逆矩阵** (invertible matrix), 简称  $A$  **可逆**, 并称  $B$  是  $A$  的**逆矩阵** (inverse), 记作  $A^{-1}$ , 即  $A^{-1} = B$ .

此时,  $A$  也是  $B$  的逆矩阵,  $A, B$  互为逆矩阵;

这里的  $F$  泛指实数域  $\mathbb{R}$  或复数域  $\mathbb{C}$  等. 比如,  $F$  取  $\mathbb{R}$ , 则  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  表示  $A$  为  $n$  阶实矩阵.

- 只有方阵才可能有逆矩阵; 不是方阵, 肯定不可逆.
- 记号  $A^{-1}$  是一个特定的记号, 不要错写为  $\frac{1}{A}$ .
- 在本课程中  $\frac{1}{A}, \frac{B}{A}$  是错误的表达, 不具备任何含义.

2.77

**Theorem 23.** 逆矩阵存在则唯一.

**证:** 设  $B$  和  $C$  都是  $A$  的逆矩阵, 则

$$AB = BA = I, \quad AC = CA = I,$$

可得

$$B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C.$$

故矩阵  $A$  的逆矩阵是唯一的. □

2.78

## 伴随矩阵

**Definition 24.** 设  $A = (a_{ij})$ , 由行列式  $|A|$  的代数余子式  $A_{ij}$  所构成的矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

称为矩阵  $A$  的伴随矩阵.



伴随矩阵  $A^*$  在位置  $(i, j)$  上的元素是矩阵  $A$  在位置  $(j, i)$  上的代数余子式.

例如,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  的伴随矩阵是  $A^* = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ .

2.79

伴随矩阵为什么这样定义? 是因为  $AA^*$  或  $A^*A$  会得到一个非常漂亮的结果.

2.80

**Theorem 25.** 设  $A^*$  是矩阵  $A$  的伴随矩阵, 则

$$AA^* = A^*A = |A|I.$$

**证:** 注意到  $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} |A|, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases}$  所以

$$\begin{aligned} AA^* &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix} = |A|I. \end{aligned}$$

同理得  $A^*A = |A|I$ . □

2.81

伴随矩阵的贡献: 从理论上给出了求逆矩阵的方法.

这一点和克拉默法则相似: 理论意义重大, 但实际计算中并不使用.

**Theorem 26.** 1. 若矩阵  $A$  可逆, 则  $|A| \neq 0$ ;

2. 若  $|A| \neq 0$ , 则矩阵  $A$  可逆, 且

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*.$$

以下命题等价:

1.  $A$  为非奇异矩阵.

2.  $|\mathbf{A}| \neq 0$ .

3.  $\mathbf{A}$  可逆.

**证:** (1) 若  $\mathbf{A}$  可逆, 则存在矩阵  $\mathbf{B}$  使得

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I},$$

故

$$|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}| = |\mathbf{AB}| = |\mathbf{I}| = 1,$$

所以  $|\mathbf{A}| \neq 0$ .

(2) 若  $|\mathbf{A}| \neq 0$ , 由  $\mathbf{AA}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\mathbf{I}$ , 得

$$\mathbf{A} \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^* = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^* \mathbf{A} = \mathbf{I},$$

由逆矩阵定义, 即知  $\mathbf{A}$  可逆, 且

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^*. \quad (6)$$

*Example 27.* 求二阶矩阵  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  的逆矩阵.

**解:** 因为


$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &= (-1)^{1+1}d = d, & \mathbf{A}_{12} &= (-1)^{1+2}c = -c, \\ \mathbf{A}_{21} &= (-1)^{2+1}b = -b, & \mathbf{A}_{22} &= (-1)^{2+2}a = a. \end{aligned}$$

故

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{21} \\ \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

所以当  $|\mathbf{A}| = ad - bc \neq 0$  时, 有

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^* = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

 请记住这个公式.

*Example 28.* 矩阵  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$  是否可逆? 若可逆, 求其逆矩阵.

**解:** 因  $|\mathbf{A}| = 2$ , 故  $\mathbf{A}^{-1}$  存在. 又

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &= -4, & \mathbf{A}_{21} &= 2, & \mathbf{A}_{31} &= 0, \\ \mathbf{A}_{12} &= -13, & \mathbf{A}_{22} &= 6, & \mathbf{A}_{32} &= -1, \\ \mathbf{A}_{13} &= -32, & \mathbf{A}_{23} &= 14, & \mathbf{A}_{33} &= -2. \end{aligned}$$



故

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -\frac{13}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \\ -16 & 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.85

公式

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^*$$

从理论上给出了求  $\mathbf{A}^{-1}$  的方法, 但因计算量较大, 实际计算中并不使用此方法.

下一节将给出一种简单实用的方法: 用矩阵的初等变换, 求逆矩阵.

但因为伴随矩阵的理论重要性, 关于伴随矩阵的全部内容要非常清楚.

2.86

**Corollary 29.** 若  $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$  (或  $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$ ), 则  $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}$ .

**证:**  $|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}| = |\mathbf{AB}| = |\mathbf{I}| = 1$ , 则  $|\mathbf{A}| \neq 0$ , 故  $\mathbf{A}^{-1}$  存在. 且

$$\mathbf{B} = \mathbf{IB} = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1}.$$

逆矩阵定义中的条件可以减弱. 即条件

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$$

可以减弱为

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I}, \quad \text{或} \quad \mathbf{BA} = \mathbf{I}.$$

当然, 这里的  $\mathbf{B}$  必须是方阵.

2.87

*Example 30.* 设  $\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$ , 求其逆矩阵.

**解:**  $|\mathbf{\Lambda}| = a_1 a_2 \cdots a_n$ , 故当  $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$  时, 矩阵  $\mathbf{\Lambda}$  可逆.

由

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

故当  $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$  时,

2.88

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}.$$

2.89

可逆矩阵满足以下运算规律 (下设同阶方阵  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  都可逆, 数  $k \neq 0$ ):

1.  $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$ ;
2.  $(k\mathbf{A})^{-1} = k^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ ;
3.  $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ ;
4.  $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$ ;
5.  $|\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|^{-1}$ .

**分析:** 寻找  $\mathbf{A}$  的逆矩阵, 需验证

$$\mathbf{A}(\cdots) = \mathbf{I}, \quad \text{或} \quad (\cdots)\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

例如要找到  $\mathbf{A}^{-1}$  的逆矩阵, 需验证  $\mathbf{A}^{-1}(\cdots) = \mathbf{I}$ , 则

$$\mathbf{A}^{-1}(\underbrace{\cdots}_{(\mathbf{A}^{-1})^{-1}}) = \mathbf{I}.$$

**证:** (1) 因

$$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}) = \mathbf{I},$$


故  $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$ .

(2)  $(k\mathbf{A})^{-1} = k^{-1}\mathbf{A}^{-1}$  成立, 是因为

$$k\mathbf{A}(k^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = kk^{-1}(\mathbf{AA}^{-1}) = \mathbf{I}.$$

(3)  $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ , 是因为

$$\mathbf{AB}(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}(\mathbf{BB}^{-1})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AIA}^{-1} = \mathbf{I}.$$

 推广:

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\cdots\mathbf{A}_k)^{-1} = \mathbf{A}_k^{-1}\cdots\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1^{-1}.$$

(4)  $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$ , 是因为

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})^T = \mathbf{I}^T = \mathbf{I}.$$

(5) 要证明  $|\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|^{-1}$ , 只需验证

$$|\mathbf{A}^{-1}| \cdot |\mathbf{A}| = 1. \tag{7}$$

因为  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ , 所以  $|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^{-1}| \cdot |\mathbf{A}| = 1$ .

之前我们谈到:

- 当  $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ , 且  $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$  时, 不能得到  $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ .
- 当  $|\mathbf{A}| \neq 0$  时,
  - (i)  $\mathbf{AB} = \mathbf{0} \implies \mathbf{B} = \mathbf{0}$ ;
  - (ii)  $\mathbf{AB} = \mathbf{AC} \implies \mathbf{B} = \mathbf{C}$ .

现在给出其证明.

$|A| \neq 0$  即  $A$  可逆. 在  $AB = 0$  两边左乘以  $A^{-1}$ , 得

$$A^{-1}AB = A^{-1}0,$$

即

$$B = 0.$$

同理, 在  $AB = AC$  两边左乘以  $A^{-1}$ , 得

$$B = C.$$


2.93

## 5 矩阵的初等变换和初等矩阵

### 初等变换与初等矩阵

**Definition 31.** 下面三种对矩阵的变换, 统称为矩阵的初等变换:

1. **倍乘变换**: 用任意数  $\alpha \neq 0$  乘以矩阵的第  $i$  行 (列); 记作  $r_i \times \alpha$  ( $c_i \times \alpha$ )
2. **倍加变换**: 把矩阵的第  $j$  行 (列) 的  $\mu$  倍加到第  $i$  行 (列); 记作  $r_i + \mu r_j$  ( $c_i + \mu c_j$ ).
3. **对换变换**: 互换矩阵的  $i, j$  两行 (列); 记作  $r_i \leftrightarrow r_j$  ( $c_i \leftrightarrow c_j$ ).

 高斯消元法的过程体现为对增广矩阵做初等行变换.


2.94

### 初等变换矩阵

**Definition 32.** 将单位矩阵  $I$  进行一次初等变换所得的矩阵, 统称为初等矩阵:

(1) **初等倍乘矩阵**. 用任意数  $c \neq 0$  乘以矩阵  $I$  的第  $i$  行, 得到的矩阵, 记为  $E_i(c)$ , 即

$$E_i(c) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & c & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \quad (8)$$


  $E_i(c)$  也可以由列变换  $c_i \times c$  得来.

2.95

(2) **初等倍加矩阵**. 把矩阵  $I$  的第  $i$  行的  $c$  倍加到第  $j$  行, 得到的矩阵, 记为

$E_{ij}(c)$ , 即


$$E_{ij}(c) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & \vdots & \ddots & & \\ & & c & \cdots & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \quad (9)$$

  $E_{ij}(c)$  也可以视为由列变换  $c_i + c \cdot c_j$  得来.

2.96

(3) 初等对换矩阵. 互换矩阵  $I$  的  $i, j$  两行, 得到的矩阵, 记为  $E_{ij}$ , 即

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ & & & \vdots & 1 & & \vdots \\ & & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & \vdots & & & 1 & \vdots \\ & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \quad (10)$$

  $E_{ij}$  也可以是列变换  $c_i \leftrightarrow c_j$  得来.

2.97

### 初等矩阵在矩阵乘法中的功能

“复制、传递”——初等矩阵是怎么由单位阵得来的, 它将把该变换过程传递到它所乘的矩阵; 并遵循“左乘则行变, 右乘则列变”的特点.

例如, 设  $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$ ,  $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$ .

(1) 若计算  $PA$ , “左乘则行变”, 意味着把  $A$  进行初等行变换,  $P$  是由单位矩阵  $I$  经行变换  $r_1 + \alpha r_3$  得来, 则把  $A$  就进行相同的行变换:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + \alpha c_1 & a_2 + \alpha c_2 & a_3 + \alpha c_3 & a_4 + \alpha c_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}.$$

(2) 若计算  $\mathbf{AP}$ , “右乘则列变”, 此时要视  $\mathbf{P}$  是由单位矩阵  $\mathbf{I}$  通过初等列变换  $c_3 + kc_1$  得来, 并有

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 + \alpha a_1 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 + \alpha b_1 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 + \alpha c_1 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 + \alpha d_1 & d_4 \end{bmatrix}.$$

2.98

具体而言, 设  $\mathbf{P}$  为初等矩阵,

- (i) 若  $\mathbf{P}$  左乘矩阵  $\mathbf{A}$ , 则  $\mathbf{PA}$  的结果是: 把矩阵  $\mathbf{A}$  进行初等行变换, 并且  $\mathbf{P}$  是怎样由单位矩阵  $\mathbf{I}$  通过行变换得来, 矩阵  $\mathbf{A}$  就进行完全相同的行变换.
- (ii) 若  $\mathbf{P}$  右乘矩阵  $\mathbf{A}$ , 则  $\mathbf{AP}$  的结果是: 把矩阵  $\mathbf{A}$  进行初等列变换, 并且  $\mathbf{P}$  是怎样由单位矩阵  $\mathbf{I}$  通过列变换得来, 矩阵  $\mathbf{A}$  就进行完全相同的列变换.

简言之: 初等矩阵  $\mathbf{P}$  把自己生成的过程复制、传递到了矩阵  $\mathbf{A}$  上.

2.99

### 初等矩阵的逆矩阵

初等矩阵的逆矩阵仍然是初等矩阵. 例如

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & c & \\ & & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \frac{1}{c} & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

利用初等矩阵的乘法功能, 如何求下列初等矩阵的逆矩阵?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

注意到  $\mathbf{A} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_4} \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{B} \xrightarrow{r_2 - r_4} \mathbf{I}$ .

2.100

具备  $r_2 \leftrightarrow r_4$ ,  $r_2 - r_4$  功能的初等矩阵分别是

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

此即所求逆矩阵.

综上知

$$(\mathbf{E}_i(c))^{-1} = \mathbf{E}_i\left(\frac{1}{c}\right), \quad (\mathbf{E}_{ij}(c))^{-1} = \mathbf{E}_{ij}(-c), \quad (\mathbf{E}_{ij})^{-1} = \mathbf{E}_{ij}.$$

2.101

**Theorem 33.** 可逆矩阵可以经过若干次初等行变换化为单位矩阵.

2.102

**Corollary 34.** 可逆矩阵  $A$  可以表示为若干个初等矩阵的乘积.

**证:** 可逆矩阵  $A$  可以经过若干次初等行变换化为单位矩阵, 初等行变换意味着左边乘以初等矩阵, 故总可以在  $A$  左边乘以某些初等矩阵  $P_1, P_2, \dots, P_s$ , 使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A = I.$$

从而

$$A = (P_s \cdots P_2 P_1)^{-1} = P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_s^{-1}.$$

初等矩阵的逆矩阵仍然是初等矩阵, 得证  $A$  可以表示为若干个初等矩阵  $P_1^{-1}, P_2^{-1}, \dots, P_s^{-1}$  的乘积.  $\square$

 由若干个初等矩阵的乘积而得的矩阵, 是可逆矩阵.

2.103

**Corollary 35.** 如果对可逆矩阵  $A$  和同阶矩阵  $I$  做同样的初等行变换, 那么当  $A$  变为单位阵时,  $I$  就变为  $A^{-1}$ , 即

$$(A, I) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (I, A^{-1}).$$

**证:** 矩阵  $A$  可逆, 故可设

$$P_s \cdots P_2 P_1 A = I.$$

得

$$A^{-1} = P_s \cdots P_2 P_1.$$

又  $I$  进行了完全相同的初等行变换, 故相当于用  $P_1, P_2, \dots, P_s$  左乘  $I$ ,

$$P_s \cdots P_2 P_1 I = A^{-1}.$$

即证: 用  $P_1, P_2, \dots, P_s$  分别左乘  $A, I$ , 当  $A$  变化为单位矩阵时,  $I$  变化为  $A^{-1}$ .

2.104

同理, 也可以用初等列变换求逆矩阵, 即

$$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} I \\ A^{-1} \end{pmatrix}.$$

事实上, 对  $A$  进行初等列变换使之变换为  $I$ , 相当于在其右侧乘以初等矩阵  $Q_1, Q_2, \dots, Q_t$ , 使得

$$A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = I.$$

则  $Q_1 Q_2 \cdots Q_t = A^{-1}$ .

对  $\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix}$  进行初等列变换时,  $I$  进行了与  $A$  一样的列变换, 即相当于在  $I$

右侧乘以初等矩阵  $Q_1, Q_2, \dots, Q_t$ , 使其变换为

$$I Q_1 Q_2 \cdots Q_t = I A^{-1} = A^{-1}.$$

2.105

Example 36. 试利用矩阵的初等变换, 求方阵的逆矩阵:  $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

解: (1) 
$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$
  

$$\xrightarrow[r_2 - 2r_3]{r_1 - r_3/2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 \div 2]{r_1 - 2r_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & 2 & -\frac{9}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$
  

$$\xrightarrow{r_1 \div 3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right).$$

即逆矩阵为  $\begin{pmatrix} \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \\ -1 & -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$

□

建议: 求出逆矩阵, 一定要验证.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \\ -1 & -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Example 37 (P.76 例题 4 重解). 用初等列变换求矩阵  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

的逆矩阵.

解: 
$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[c_1 \times (-1)]{c_2 + 2c_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{c_2 \leftrightarrow c_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[\begin{smallmatrix} c_1+2c_2 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} c_3-5c_2 \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3 \div 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\begin{smallmatrix} c_1+c_3 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} c_2+c_3 \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 在矩阵  $\mathbf{A}$  的左边乘以可逆矩阵  $\mathbf{P}$ , 意味着将  $\mathbf{A}$  进行若干初等行变换;
- 将  $\mathbf{A}$  进行若干初等行变换, 等价于在矩阵  $\mathbf{A}$  的左边乘以某个可逆矩阵.

事实上, 可逆矩阵总可以表示为若干初等矩阵的乘积, 设存在初等矩阵  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_s$  使得

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_s \cdots \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1.$$

故

$$\mathbf{PA} = \mathbf{P}_s \cdots \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \mathbf{A},$$

由初等矩阵在乘法中的功能, 上式右侧相当于对  $\mathbf{A}$  进行  $s$  次初等行变换. 反之亦然.

同理,

- 在矩阵  $\mathbf{A}$  的右边乘以可逆矩阵  $\mathbf{Q}$ , 意味着将  $\mathbf{A}$  进行若干初等列变换;
- 将  $\mathbf{A}$  进行若干初等列变换, 等价于在矩阵  $\mathbf{A}$  的右边乘以某个可逆矩阵.

问: 行列式计算中行变换、列变换可以任意交替进行, 初等变换求逆矩阵时是否也可以行变换、列变换交替进行?

答: 不可以!

对  $\mathbf{A}$  进行初等行变换, 相当于左乘以逆矩阵  $\mathbf{P}$ ; 对  $\mathbf{A}$  进行初等列变换, 相当于右乘以逆矩阵  $\mathbf{Q}$ , 且  $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$  都不是单位矩阵. 假定  $\mathbf{A}$  可逆, 由前述行变换、列变换成为  $\mathbf{I}$ , 即

$$\mathbf{PAQ} = \mathbf{I}, \quad (11)$$



则

$$(A, I) \xrightarrow[\text{初等列变换 } Q]{\text{初等行变换 } P} (I, \textcolor{red}{PIQ}) = (I, PQ),$$

但是,  $PQ$  显然不是  $A$  的逆矩阵. 事实上, 由 (11) 可得

$$A^{-1} = PQ.$$



用初等行变换求逆矩阵时, 必须始终做行变换, 其间不能做任何列变换. 还有一个本质的原因是: 初等行变换求逆矩阵, 其实就是高斯消元法解矩阵方程.

2.112

### 初等行变换求逆矩阵的本质是高斯消元法

求  $A$  的逆矩阵, 相当于解矩阵方程  $AX = I$ .

记  $I = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ , 则  $AX = I$  等价于

$$Ax = e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

对  $(A, I)$  进行初等行变换, 相当于在同时求解  $n$  个系数矩阵相同的线性方程组  $Ax = e_i$ , 其本质是高斯消元法.

消元法过程中, 只有方程与方程之间的相互运算, 当然只能对应于行变换.

2.113

### 解矩阵方程

最简单的矩阵方程有两种:  $AX = B$ ,  $XA = B$ . 以下的讨论, 仅限于矩阵  $A$  可逆的情形.

(1) 求解矩阵方程  $AX = B$ .

若  $A$  可逆, 两边左乘  $A^{-1}$ , 得

$$\textcolor{red}{A}^{-1}AX = \textcolor{red}{A}^{-1}B,$$

即  $X = A^{-1}B$ .

可以先单独求  $A^{-1}$ , 再得到  $X = A^{-1}B$ .

2.114

另一个简单的方法: 对  $(A, B)$  进行初等行变换.

动作要领: (1) 将  $A$  初等行变换为  $I$ , (2) 同时,  $B$  进行完全相同的初等行变换.

结果:  $A$  变换为  $I$  时,  $B$  将变换为  $A^{-1}B$ . 即

$$(A, B) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (I, A^{-1}B).$$

理由: 对  $A$  初等行变换为  $I$ , 意味着左乘可逆矩阵  $P$ , 使得

$$\textcolor{red}{P}A = I.$$

故

$$P = A^{-1}.$$

而  $B$  进行了完全相同的初等行变换, 故相当于用  $P$  左乘  $B$ , 即

$$\textcolor{red}{P}B = A^{-1}B.$$



若  $A$  不可逆, 此方法不适应. 这类题型以后再介绍.

2.115

Example 38. 设  $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ , 求  $X$  使  $AX = B$ .

解:

$$\begin{aligned}
 (A, B) &= \left( \begin{array}{ccc|cc} 4 & 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 - r_3} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 9 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 9 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 6 & 6 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow{r_3 - 2r_2} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -12 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 \times (-1)]{\begin{array}{l} r_1 - r_3 \\ r_2 + 2r_3 \end{array}} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -15 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & 4 \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

所以

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ -15 & -3 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}.$$

以上是解矩阵方程的一个重要方法, 也是一个必须掌握的题型.

在解题中有一处细节要注意: 不要在解题的开始就写上

$$\text{已知 } AX = B, \text{ 所以 } X = A^{-1}B.$$

因为  $A$  是否可逆, 暂时还是未知的. 严格地讲就不能出现该写法.

**(A, B) 初等行变换求解矩阵方程  $AX = B$  的本质是高斯消元法**

一个矩阵方程其实包含了多个线性方程组 (它们的系数矩阵相同). 比如前例中记  $B = (b_1, b_2)$ , 即

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

则  $AX = B$  等价于两个线性方程组

$$Ax = b_1, \quad Ax = b_2.$$

对

$$(A, B) = \left( \begin{array}{ccc|cc} 4 & 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{array} \right)$$

进行初等行变换, 其实质是用高斯消元法同时求解两个线性方程组  $Ax = b_1$ ,  $Ax = b_2$ .

求  $A$  的逆矩阵, 相当于解矩阵方程  $AX = I$ , 其初等行变换求逆矩阵的本质也是高斯消元法.

## 线性方程组 v.s. 矩阵方程

### 1. 线性方程组

$$Ax = b$$

也是矩阵方程的一种, 是矩阵方程  $AX = B$  在  $X, B$  为列矩阵的情形.

### 2. 反过来, $AX = B$ 相当于多个线性方程组 $Ax = b_i$ .

解法都是对增广矩阵使用初等行变换, 但其本质是高斯消元法.

🔊 目前遇到的线性方程组求解题目,  $A$  都是可逆的. 不可逆的情形 (包括  $A$  不是方阵), 在下一章讨论.

2.120

### (2) 求解矩阵方程 $XA = B$ .

若  $A$  可逆, 两边右乘以  $A^{-1}$ , 得  $XA A^{-1} = B A^{-1}$ . 即

$$X = B A^{-1}.$$

求  $BA^{-1}$  的方法:

进行初等列变换

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} I \\ B A^{-1} \end{pmatrix}.$$

动作要领: (1) 将  $A$  初等列变换为  $I$ , (2) 同时,  $B$  进行完全相同的初等列变换.

解释:  $A \xrightarrow{\text{初等列变换}} I$ , 相当于在  $A$  的右侧乘上若干初等矩阵  $Q_1, \dots, Q_t$ , 即  $A Q_1 \cdots Q_t = I$ , 故  $Q_1 \cdots Q_t = A^{-1}$ .

$B$  进行完全相同的初等列变换, 相当于在  $B$  的右侧乘上初等矩阵  $Q_1, \dots, Q_t$ . 即

$$B Q_1 \cdots Q_t = B A^{-1}.$$

2.121

Example 39. 设  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ , 求  $X$  使  $XA =$

$B$ .

2.122

解:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & -3 \\ \hline 3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{c_2 - 2c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & 2 \\ -4 & 11 & -3 \\ \hline 3 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 + 4c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & -3 \\ \hline 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{c_3-2c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & -1 \\ \hline 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_1-4c_3 \\ c_3 \times (-1)}]{c_2-c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline -1 & -1 & 1 \\ 17 & 7 & -4 \end{pmatrix}$$

2.123

$$\xrightarrow{c_1-3c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 2 & -1 & -1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

所以

$$\mathbf{X} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

2.124

上述解法仍然是高斯消元法

对  $\mathbf{X}\mathbf{A} = \mathbf{B}$  两边取转置, 得

$$\mathbf{A}^T \mathbf{X}^T = \mathbf{B}^T.$$

对  $(\mathbf{A}^T, \mathbf{B}^T)$  进行初等行变换, 可以解得  $\mathbf{X}^T$ . 这等同于对  $\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}$  进行初等列变换.

2.125

## 6 分块矩阵

### 6.1 分块矩阵的定义与运算

在这一节, 我们来介绍一个处理阶数较高的矩阵时常用的方法, 即矩阵的分块. 有时候, 我们把一个大矩阵看成是由一些小矩阵组成的, 就如矩阵是由数组成的一样. 特别在运算中, 把这些小矩阵当作数一样来处理. 这就是所谓矩阵的分块.

为了说明这个方法, 下面看一个例子.

2.126

在矩阵

$$\mathbf{A} = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix}$$

中,  $\mathbf{I}_2$  表示 2 阶单位矩阵, 而

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

在矩阵

$$B = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

中,

$$B_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B_{12} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, B_{22} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.127

在计算  $AB$  时, 把  $A, B$  都看成是由这些小矩阵组成的, 即按 2 阶矩阵来运算. 于是

$$AB = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ A_1 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ A_1 B_{11} + B_{21} & A_1 B_{12} + B_{22} \end{pmatrix},$$

其中

$$A_1 B_{11} + B_{21} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_1 B_{12} + B_{22} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

因此

$$AB = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline -2 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 3 \end{array} \right).$$

不难验证, 直接按 4 阶矩阵乘积的定义来作, 结果是一样的.

2.128

Example 40. 记

$$e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

则  $n$  阶单位矩阵  $I_n$  可以写为如下两种分块形式:

$$I_n = [e_1, e_2, \dots, e_n], \quad (12)$$

$$I_n = [e_1, e_2, \dots, e_n]^T. \quad (13)$$

2.129

## 分块矩阵的乘法

一般地说, 设  $A = [a_{ik}]_{s \times n}$ ,  $B = [b_{kj}]_{n \times m}$ , 把  $A, B$  分成一些小矩阵:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} n_1 & n_2 & \cdots & n_l \end{matrix} \\ \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_t \end{matrix} & \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1l} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{t1} & A_{t2} & \cdots & A_{tl} \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad B = \begin{matrix} & \begin{matrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_r \end{matrix} \\ \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_l \end{matrix} & \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{l1} & B_{l2} & \cdots & B_{lr} \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad (14)$$

其中矩阵  $\mathbf{A}$  的列的分法必须与矩阵  $\mathbf{B}$  的行的分法一致.

则

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{matrix} & m_1 & m_2 & \cdots & m_r \\ \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_t \end{matrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & \cdots & \mathbf{C}_{1r} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} & \cdots & \mathbf{C}_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{C}_{t1} & \mathbf{C}_{t2} & \cdots & \mathbf{C}_{tr} \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad (15)$$

其中,  $\mathbf{C}_{pq} = \mathbf{A}_{p1}\mathbf{B}_{1q} + \mathbf{A}_{p2}\mathbf{B}_{2q} + \cdots + \mathbf{A}_{pl}\mathbf{B}_{lq}$ .

### 准对角矩阵

形式为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_l \end{pmatrix}$$

的矩阵, 其中  $\mathbf{A}_i$  是  $n_i \times n_i$  矩阵 ( $i = 1, 2, \cdots, l$ ), 称为**准对角矩阵**. 或记为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & & & \\ & \mathbf{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_l \end{pmatrix}$$

当然, 准对角矩阵包括对角矩阵作为特殊情形.

对于两个有相同分块的准对角矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & & & \\ & \mathbf{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_l \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & & & \\ & \mathbf{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{B}_l \end{pmatrix},$$

如果它们相应的分块是同级的, 那么显然有

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 & & & \\ & \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_l\mathbf{B}_l \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1 & & & \\ & \mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_l + \mathbf{B}_l \end{pmatrix}.$$

它们还是准对角矩阵.

其次, 如果  $A_1, A_2, \dots, A_l$  都是可逆矩阵, 那么

$$\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ & & & A_l \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & \\ & A_2^{-1} & \\ & & \ddots \\ & & & A_l^{-1} \end{pmatrix}.$$


2.134

*Example 41.* 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $n \times s$  矩阵, 将  $B$  分块为  $1 \times s$  个分块矩阵, 即

$$B = (b_1, b_2, \dots, b_s),$$

则

$$AB = A(b_1, b_2, \dots, b_s) = (Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_s).$$

 若已知  $AB = 0$ , 则  $b_1, b_2, \dots, b_s$  都是线性方程组

$$Ax = 0$$

的解.

2.135

## 6.2 分块矩阵的初等变换和分块初等阵

将分块乘法与初等变换结合就成为矩阵运算中极端重要的手段.

将某个单位矩阵进行如下分块:

$$\begin{pmatrix} I_m & O \\ O & I_n \end{pmatrix},$$

对它进行

1. 两行 (列) 对换;
2. 某一行 (列) 左乘 (右乘) 一个矩阵  $P$ ;
3. 一行 (列) 加上另一行 (列) 的  $P$  倍数,

就可得到如下三类分块初等矩阵:

$$\begin{pmatrix} O & I_n \\ I_m & O \end{pmatrix}, \quad (\text{分块对换初等阵})$$

$$\begin{pmatrix} P & O \\ O & I_n \end{pmatrix}, \quad (\text{分块倍乘初等阵})$$

$$\begin{pmatrix} I_m & O \\ P & I_n \end{pmatrix}. \quad (\text{分块倍加初等阵})$$

2.136

## 左乘行变, 右乘列变

分块初等矩阵左乘任一一个分块矩阵

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix},$$

只要乘法能够进行, 其结果就是对它进行相应的分块初等行变换:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I}_m \\ \mathbf{I}_n & \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{PA} & \mathbf{PB} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{O} \\ \mathbf{P} & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} + \mathbf{PA} & \mathbf{D} + \mathbf{PB} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

同样, 用它们右乘任一矩阵, 相当于对该矩阵作相应的分块初等列变换.

2.137

Example 42 (P.99 T.61, 64). 设  $n$  阶矩阵  $\mathbf{A}$  及  $s$  阶矩阵  $\mathbf{B}$  都可逆, 求

$$(1) \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{O} \end{pmatrix}^{-1}; \quad (2) \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{pmatrix}^{-1}.$$

解: (1) 解法一. 设

$$\begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{C}_3 & \mathbf{C}_4 \end{pmatrix} = \mathbf{I},$$

求解  $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4$  得结果. 下略.

2.138

解法二. 利用分块初等矩阵在矩阵乘法中的功能. 因为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I}_s \\ \mathbf{I}_n & \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B}^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_s & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} = \mathbf{I}.$$

所以

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B}^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I}_s \\ \mathbf{I}_n & \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{O} \end{pmatrix} = \mathbf{I},$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{O} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I}_s \\ \mathbf{I}_n & \mathbf{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \end{pmatrix}.$$

2.139

解法三. 利用分块初等变换求解. 由

$$\left( \begin{array}{cc|cc} \mathbf{O} & \mathbf{A} & \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{B} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left( \begin{array}{cc|cc} \mathbf{B} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A} & \mathbf{I} & \mathbf{O} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[\mathbf{A}^{-1} \times r_2]{\mathbf{B}^{-1} \times r_1} \left( \begin{array}{cc|cc} \mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} & \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \end{array} \right),$$



得

$$\begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{O} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \end{pmatrix}.$$

2.140

更一般的结论是, 若矩阵  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_k$  可逆, 则

$$\begin{pmatrix} & & \mathbf{A}_1 & & \\ & & & \mathbf{A}_2 & \\ & \ddots & & & \\ & & & & \mathbf{A}_k \\ \mathbf{A}_k & & & & \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} & & & & \mathbf{A}_k^{-1} \\ & & & & \\ & & & \mathbf{A}_2^{-1} & \\ & & \mathbf{A}_1^{-1} & & \\ & & & & \end{pmatrix}.$$

2.141

(2) 直接利用分块初等变换求解.

$$\left( \begin{array}{cc|cc} \mathbf{A} & \mathbf{O} & \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} & \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{array} \right) \xrightarrow{\mathbf{A}^{-1} \times r_1} \left( \begin{array}{cc|cc} \mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} & \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{array} \right) \quad (19)$$

$$\xrightarrow{r_2 - \mathbf{C} \times r_1} \left( \begin{array}{cc|cc} \mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} & -\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{I} \end{array} \right) \quad (20)$$

$$\xrightarrow{\mathbf{B}^{-1} \times r_2} \left( \begin{array}{cc|cc} \mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} & -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{B}^{-1} \end{array} \right). \quad (21)$$

所以

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix}.$$


2.142

**注 1.** 上述的 (20) 式中的变换为什么写成  $r_2 - \mathbf{C} \times r_1$ , 而不是  $r_2 - r_1 \times \mathbf{C}$ ?

注意这里是行变换, 应该是左乘. 否则会导致下面的错误:

$$\begin{aligned} (19) \quad & \xrightarrow{r_2 - r_1 \times \mathbf{C}} \left( \begin{array}{cc|cc} \mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} & \mathbf{I} \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{r_2 \times \mathbf{B}^{-1}} \left( \begin{array}{cc|cc} \mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{B}^{-1} & \mathbf{B}^{-1} \end{array} \right). \end{aligned}$$

或者, 注意到  $\mathbf{C}$  是  $s \times n$  阵,  $\mathbf{A}$  是  $n \times n$  阵, 导致  $\mathbf{C}$  无法右乘  $\mathbf{A}^{-1}$ .

 其实, 分块初等矩阵可以分解为有限个初等矩阵的乘积, 分块初等矩阵在矩阵乘法中体现出的功能, 是初等矩阵的相应功能的“浓缩”.

比如 (21) 中只写了一步  $\mathbf{B}^{-1} \times r_2$  来表示变换过程, 其实就是数个初等行变换的集中反映.

这也是利用分块初等矩阵解题, 在方法上成立的真正原因.

2.143

## 7 习题解答

学完本章之后要具备的最基本能力

- 求逆矩阵.

- 矩阵乘法不满足的三条规律.
- 解矩阵方程.
- 伴随矩阵的定义与公式.

*Example 43.* 设方阵  $A$  满足  $A^2 - A - 2I = 0$ , 证明  $A$  及  $A + 2I$  都可逆, 并求  $A^{-1}$  及  $(A + 2I)^{-1}$ .

证:

$$\begin{aligned}
 A^2 - A - 2I = 0 &\implies A(A - I) = 2I \\
 &\implies A \left[ \frac{1}{2}(A - I) \right] = I \\
 &\implies A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I). \\
 A^2 - A - 2I = 0 &\implies (A + 2I)A - 3(A + 2I) = -4I \\
 &\implies (A + 2I)(A - 3I) = -4I \\
 &\implies (A + 2I) \left[ -\frac{1}{4}(A - 3I) \right] = I \\
 &\implies (A + 2I)^{-1} = \frac{1}{4}(3I - A).
 \end{aligned}$$

这类题目的解法就是“凑”出求逆的式子. 比如本题, 要从  $A^2 - A - 2I = 0$  中凑出式子  $A + 2I$ .


**思考:** 由  $A^2 - A - 2I = 0$ , 试求  $A + kI$  的逆矩阵,  $k$  为任意实数.

**解:** 设法凑出  $A + kI$ .

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &\implies A(A + kI) - (k + 1)A - 2I = 0 \\
 &\implies A(A + kI) - (k + 1)(A + kI) + (k + 1)kI - 2I = 0 \\
 &\implies (A - (k + 1)I)(A + kI) = (2 - k(k + 1))I,
 \end{aligned}$$

故当  $2 - k(k + 1) \neq 0$ , 即  $k \neq 1, k \neq -2$  时, 有

$$(A + kI)^{-1} = \frac{1}{2 - k(k + 1)}(A - (k + 1)I).$$

 但这并不意味着  $A + I$  和  $A - 2I$  一定不可逆.

*Example 44* (P.97 习题 45). 设方阵  $A$  满足  $A^2 - A - 2I = 0$ , 试证:  $A + I$  和  $A - 2I$  不同时可逆.

解:

$$\begin{aligned}
 A^2 - A - 2I = 0 &\implies (A - 2I)(A + I) = 0 \\
 &\implies |A - 2I| \cdot |A + I| = 0,
 \end{aligned}$$

从而  $|A - 2I| = 0$  和  $|A + I| = 0$  至少有一个成立, 所以  $A - 2I$  和  $A + I$  不同时可逆.

Example 45. 证明下列结论:

- (1) 若  $|\mathbf{A}| = 0$ , 则  $|\mathbf{A}^*| = 0$ . ( $\mathbf{A}$  不可逆, 则  $\mathbf{A}^*$  也不可逆.)  
 (2) 若  $\mathbf{A}$  可逆, 则  $\mathbf{A}^*$  也可逆.

$$\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}| \mathbf{A}^{-1}, \quad (\mathbf{A}^*)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^* = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}.$$

- (3)  $|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1}$ .  
 (4)  $(k\mathbf{A})^* = k^{n-1} \mathbf{A}^*$ .  
 (5)  $(\mathbf{A}^*)^T = (\mathbf{A}^T)^*$ .

**分析:** 关于伴随矩阵, 要抓住重要公式

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\mathbf{I}.$$

上述公式并不要求  $\mathbf{A}$  可逆.  $\mathbf{A}$  可逆时, 有

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^*.$$

2.148

**解:** (1) 反证法. 假设  $|\mathbf{A}^*| \neq 0$ , 即  $\mathbf{A}^*$  可逆. 由  $|\mathbf{A}| = 0$ , 则

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{I} = \mathbf{0}.$$

而  $\mathbf{A}^*$  可逆, 则

$$\mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

这导致

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{0}.$$

与假设  $|\mathbf{A}^*| \neq 0$  矛盾. 故若  $|\mathbf{A}| = 0$ , 则  $|\mathbf{A}^*| = 0$ .

2.149

(2) 若  $\mathbf{A}$  可逆, 在  $\mathbf{A}^*\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\mathbf{I}$  两边右乘  $\mathbf{A}^{-1}$ , 得

$$\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}| \mathbf{A}^{-1}.$$

又  $\mathbf{A}$  可逆, 则  $|\mathbf{A}| \neq 0$ , 且  $\mathbf{A}^{-1}$  可逆, 知  $\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}| \mathbf{A}^{-1}$  可逆, 且

$$(\mathbf{A}^*)^{-1} = (|\mathbf{A}| \mathbf{A}^{-1})^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}. \quad (22)$$

另由伴随矩阵性质有

$$(\mathbf{A}^{-1})^* \mathbf{A}^{-1} = |\mathbf{A}^{-1}|\mathbf{I}, \quad (23)$$

两边右乘  $\mathbf{A}$ , 得

$$(\mathbf{A}^{-1})^* = |\mathbf{A}^{-1}| \mathbf{A} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}. \quad (24)$$


2.150

(3) 由  $\mathbf{A}\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{I}$ , 取行列式得到:

$$|\mathbf{A}| |\mathbf{A}^*| = | |\mathbf{A}|\mathbf{I} | = |\mathbf{A}|^n.$$

若  $|\mathbf{A}| \neq 0$ , 则  $|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1}$ .

若  $|\mathbf{A}| = 0$ , 由 (1) 知  $|\mathbf{A}^*| = 0$ , 此时命题也成立.

 请对比教材 P.60 结论: 当  $|\mathbf{A}| \neq 0$  时,  $|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1}$ .

(4) 矩阵  $\mathbf{A}$  在  $(i, j)$  位置的元素对应的代数余子式记为  $\mathbf{A}_{ij}$ , 则矩阵  $k\mathbf{A}$  在  $(i, j)$  位置的元素对应的代数余子式为

$$(-1)^{i+j} \begin{vmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1,j-1} & ka_{1,j+1} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i-1,1} & \cdots & ka_{i-1,j-1} & ka_{i-1,j+1} & \cdots & ka_{i-1,n} \\ ka_{i+1,1} & \cdots & ka_{i+1,j-1} & ka_{i+1,j+1} & \cdots & ka_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{n1} & \cdots & ka_{n,j-1} & ka_{n,j+1} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix} = k^{n-1} \mathbf{A}_{ij}, \quad (25)$$

故

$$(k\mathbf{A})^* = \begin{pmatrix} k^{n-1} \mathbf{A}_{11} & k^{n-1} \mathbf{A}_{21} & \cdots & k^{n-1} \mathbf{A}_{n1} \\ k^{n-1} \mathbf{A}_{12} & k^{n-1} \mathbf{A}_{22} & \cdots & k^{n-1} \mathbf{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k^{n-1} \mathbf{A}_{1n} & k^{n-1} \mathbf{A}_{2n} & \cdots & k^{n-1} \mathbf{A}_{nn} \end{pmatrix} = k^{n-1} \mathbf{A}^*.$$

(5) 由伴随矩阵的定义知

$$(\mathbf{A}^*)^T = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \cdots & \mathbf{A}_{1n} \\ \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{n1} & \mathbf{A}_{n2} & \cdots & \mathbf{A}_{nn} \end{pmatrix}.$$

用  $M_{ij}$ ,  $A_{ij}$  分别表示  $\mathbf{A}$  在  $(i, j)$  位置的元素  $a_{ij}$  对应的余子式、代数余子式, 则矩阵  $\mathbf{A}^T$  在  $(i, j)$  位置的元素  $a_{ji}$  对应的余子式为

$$M_{ji}^T = M_{ji}.$$

则  $\mathbf{A}^T$  在  $(i, j)$  位置的元素  $a_{ji}$  对应的代数余子式为  $A_{ji}$ .

从而伴随矩阵  $(\mathbf{A}^T)^*$  在  $(i, j)$  位置的元素为  $A_{ij}$ , 得证  $(\mathbf{A}^*)^T = (\mathbf{A}^T)^*$ .

**Exercise 46** (P.100 习题 67). 设  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  均为 4 阶方阵, 已知  $|\mathbf{A}| = -2$ ,  $|\mathbf{B}| = 3$ , 计算:

- (1)  $|\frac{1}{2}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}|$ ; (2)  $|- \mathbf{A}\mathbf{B}^T|$ ; (3)  $|(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1}|$ ; (4)  $\det[(\mathbf{A}\mathbf{B})^T]^{-1}$ ;  
(5)  $|-3\mathbf{A}^*|$  ( $\mathbf{A}^*$  为  $\mathbf{A}$  的伴随矩阵).

**解:**

$$|\frac{1}{2}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}| = (\frac{1}{2})^4 |\mathbf{A}||\mathbf{B}|^{-1} = \frac{1}{16} \times (-2) \times (\frac{1}{3}) = -\frac{1}{24}.$$

$$|- \mathbf{A}\mathbf{B}^T| = (-1)^4 |\mathbf{A}||\mathbf{B}^T| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| = (-2) \times 3 = -6.$$

$$|(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1}| = |\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{B}|^{-1}|\mathbf{A}|^{-1} = \frac{1}{3} \times (-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{6}.$$

$$\det[(\mathbf{A}\mathbf{B})^T]^{-1} = |[(\mathbf{A}\mathbf{B})^T]^{-1}| = |[(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1}]^T| = |(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1}| = -\frac{1}{6}.$$

$$|-3\mathbf{A}^*| = (-3)^4 |\mathbf{A}|^{4-1} = 81 \times (-8) = -648.$$

**Exercise 47** (P.100 习题 68). 设  $\alpha = (1, -2, 3)^T$ ,  $\beta = (-1, \frac{1}{2}, 0)^T$ ,  $A = \alpha\beta^T$ , 求  $|A^{100}|$ .

**解:**  $|A| = |\alpha\beta^T| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} (-1, \frac{1}{2}, 0) \right| = \begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & \frac{3}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0,$

因此

$$|A^{100}| = |A|^{100} = 0.$$

2.155

**Example 48.** 已知  $A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}$ , 求  $A^{2016}$ .

**解:** 注意到

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (1, 1, 1),$$

而

$$(1, 1, 1) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a + b + c.$$

2.156

则

$$\begin{aligned} A^{2016} &= \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (1, 1, 1) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (1, 1, 1) \cdots \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (1, 1, 1)}_{2016 \text{ 个 } A} \\ &= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (1, 1, 1) \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (1, 1, 1) \cdots \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (1, 1, 1)}_{2015 \text{ 个 } (a+b+c) \text{ 相乘}} \\ &= (a + b + c)^{2015} \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.157

**Exercise 49** (P.101 习题 77). 设  $\alpha = (1, 0, -1)^T$ ,  $k$  为正整数,  $A = \alpha\alpha^T$ , 求  $|kI - A^n|$ .

**解:** 注意到  $\alpha^T\alpha = 2$ , 得

$$A^n = (\alpha\alpha^T)(\alpha\alpha^T) \cdots (\alpha\alpha^T) = \alpha(\alpha^T\alpha)^{n-1}\alpha^T = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

于是

$$|k\mathbf{I} - \mathbf{A}^n| = \begin{vmatrix} k - 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & k & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & k - 2^{n-1} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} k - 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & k - 2^{n-1} \end{vmatrix} = k^2(k - 2^n).$$

2.158

**Exercise 50** (P.101 习题 80). 设  $\mathbf{B}$  是元素全为 1 的  $n$  阶矩阵 ( $n \geq 2$ ), 证明:

$$(1) \mathbf{B}^k = n^{k-1}\mathbf{B} \quad (k \geq 2 \text{ 为正整数}); \quad (2) (\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{I} - \frac{1}{n-1}\mathbf{B}.$$

**证:** (1) 设  $\alpha = (1, 1, \dots, 1)$ , 则  $\mathbf{B} = \alpha^T \alpha$ , 注意到

$$\alpha \alpha^T = (1, 1, \dots, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n,$$

所以当  $k \geq 2$  时, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^k &= \alpha^T (\alpha \alpha^T) (\alpha \alpha^T) \cdots (\alpha \alpha^T) \alpha \\ &= \alpha^T \cdot n \cdot n \cdots n \cdot \alpha \\ &= n^{k-1} \alpha^T \alpha \\ &= n^{k-1} \mathbf{B}. \end{aligned}$$

2.159

(2) 因为

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} - \mathbf{B})(\mathbf{I} - \frac{1}{n-1}\mathbf{B}) &= \mathbf{I} - \frac{1}{n-1}\mathbf{B} - \mathbf{B} + \frac{1}{n-1}\mathbf{B}^2 \\ &= \mathbf{I} - \frac{n}{n-1}\mathbf{B} + \frac{1}{n-1}n\mathbf{B} \\ &= \mathbf{I}. \end{aligned}$$

所以

$$(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{I} - \frac{1}{n-1}\mathbf{B}.$$

2.160

**Exercise 51** (P.100 习题 71). 设  $\alpha = (a, b, c)$ ,  $\beta = (x, y, z)$ , 已知

$$\alpha^T \beta = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix},$$

求  $\alpha \beta^T$ .

解: 因为

$$\alpha^T \beta = \begin{pmatrix} ax & ay & az \\ bx & by & bz \\ cx & cy & cz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix},$$

故

$$\alpha \beta^T = ax + by + cz = (-2) + (-2) + (-3) = -7.$$

2.161

**Exercise 52** (P.101 习题 73). 设  $A$  为 3 阶矩阵,  $|A| > 0$ , 已知  $A^* = \text{diag}(1, -1, -4)$ , 且  $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3I$ , 求  $B$ .

解: 在  $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3I$  两边右乘  $A$ , 得

$$AB = B + 3A, \quad (26)$$

两边左乘  $A^*$ , 得

$$A^*AB = A^*B + 3A^*A, \implies |A|B = A^*B + 3|A|I. \quad (27)$$

由  $|A^*| = |\text{diag}(1, -1, -4)| = 4$ , 又  $|A^*| = |A|^{n-1}$ , 及已知  $|A| > 0$ , 得  $|A| = 2$ . 于是 (27) 式即

$$2B = A^*B + 6I, \implies (2I - A^*)B = 6I.$$

又  $2I - A^* = \text{diag}(1, 3, 6)$ , 则  $(2I - A^*)^{-1} = \text{diag}(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$ , 故

$$B = 6(2I - A^*)^{-1} = \text{diag}(6, 2, 1).$$

2.162

另解: 可以直接求出  $A$ . 如前述, 先得到  $|A| = 2$ , 故

$$AA^* = |A|I = 2I.$$

又  $(A^*)^{-1} = \text{diag}(1, -1, -\frac{1}{4})$ , 故

$$A = 2(A^*)^{-1} = \text{diag}(2, -2, -\frac{1}{2}).$$

由 (26) 式, 有  $(A - I)B = 3A$ . 而  $A - I = \text{diag}(1, -3, -\frac{3}{2})$ , 故

$$B = 3(A - I)^{-1}A = 3 \text{diag}(1, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}) \text{diag}(2, -2, -\frac{1}{2}) = \text{diag}(6, 2, 1).$$

2.163

**Exercise 53** (P.101 习题 74). 设  $n$  阶矩阵  $A$  满足:  $A^T A = I$  和  $|A| < 0$ , 求  $|A + I|$ .

解: 由  $A^T A = I$  得

$$|A^T||A| = |A|^2 = 1,$$

因为  $|A| < 0$ , 所以  $|A| = -1$ . 从而

$$|A + I| = |A + A^T A| = |(I + A^T)A| = |(I + A)^T||A| = |I + A||A| = -|A + I|.$$

故

$$|\mathbf{A} + \mathbf{I}| = 0.$$

2.164

**Exercise 54** (P.101 习题 81). 设  $\mathbf{A}$  为 3 阶实对称矩阵, 且主对角元全为 0,  $\mathbf{B} = \text{diag}(0, 1, 2)$ , 求使  $\mathbf{AB} + \mathbf{I}$  为可逆矩阵的条件.

**解:** 依题意设  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{pmatrix}$ , 则

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} + \mathbf{I} &= \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 2a_{13} \\ 0 & 0 & 2a_{23} \\ 0 & a_{23} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & 2a_{13} \\ 0 & 1 & 2a_{23} \\ 0 & a_{23} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

那么

$$|\mathbf{AB} + \mathbf{I}| = 1 - 2a_{23}^2.$$

故矩阵  $\mathbf{AB} + \mathbf{I}$  可逆的充要条件是:

2.165

$$|\mathbf{AB} + \mathbf{I}| = 1 - 2a_{23}^2 \neq 0,$$

即  $a_{23} \neq \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

2.166

**Exercise 55** (P.102 习题 82). 已知  $\mathbf{P}, \mathbf{A}$  均为  $n$  阶矩阵, 且  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$  (有  $r$  个 1), 试计算  $|\mathbf{A} + 2\mathbf{I}|$ .

**解:** 注意到  $|\mathbf{P}^{-1}||\mathbf{P}| = 1$ , 得

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} + 2\mathbf{I}| &= |\mathbf{P}^{-1}| \cdot |\mathbf{A} + 2\mathbf{I}| \cdot |\mathbf{P}| \\ &= |\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}^{-1}2\mathbf{I}\mathbf{P}| = |\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} + 2\mathbf{I}| \\ &= |\text{diag}(1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0) + \text{diag}(2, 2, \dots, 2)| \\ &= |\text{diag}(3, 3, \dots, 3, 2, \dots, 2)|, \end{aligned}$$

其中有  $r$  个 3,  $n - r$  个 2, 所以

$$|\mathbf{A} + 2\mathbf{I}| = 3^r \cdot 2^{n-r}.$$

2.167



## 8 小结与复习

### 8.1 内容小结

#### (一) 都是高斯消元法

解线性方程组  $Ax = b$ , 解矩阵方程  $AX = B$ , 初等行变换求逆矩阵, 它们使用的方法形式上是矩阵的初等行变换, 本质上是高斯消元法.

(1) 解矩阵方程  $AX = B$  相当于同时解多个线性方程组  $Ax_i = b_i$ .

(2) 初等变换求逆矩阵, 其实是在解矩阵方程  $AX = I$ .

2.168

#### (二) 矩阵乘法不满足的几个运算律.

I. 不满足交换律, 即  $AB = BA$  一般不成立. (特别地, 若  $AB = BA$ , 则称矩阵  $A$  和  $B$  是可交换的.)

相应地要注意以下几点:

(1) 矩阵乘法特别地有“左乘”和“右乘”的说法, 比如  $B$  左乘  $A$  (即  $BA$ ) 和  $B$  右乘  $A$  (即  $AB$ ) 是完全不同的.

(2) 在提取公因子的时候, 要分清楚是从左侧还是右侧提出. 比如

$$AB - B = (A - I)B,$$

即  $B$  只能从右侧提出, 而

$$AB - B \neq B(A - I).$$

2.169

下列两个写法正确吗?

$$AB - BC = (A - C)B,$$

$$AB - BC = B(A - C).$$

2.170

(3) 下列公式一般不成立:

- $(AB)^k = A^k B^k$ ;
- $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ ;
- 牛顿二项式展开式一般不成立, 比如最简单的公式

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

就不成立. 而  $A$  与  $\lambda I$  当然是可交换的, 所以牛顿二项式展开式只在下面的情形成立:

$$(A + \lambda I)^n = A^n + C_n^1 \lambda A^{n-1} + C_n^2 \lambda^2 A^{n-2} + \cdots + C_n^{n-1} \lambda^{n-1} A + \lambda^n I.$$

2.171

II. 不满足消去律:

(1) 当  $AB = 0$  时, 不能推出  $A = 0$  或  $B = 0$ .

(2) 当  $AB = AC$ , 且  $A \neq 0$  时, 不能得到  $B = C$ .

注意, 当  $A$  可逆时, 消去律是成立的, 即

注

当  $AB = 0$  时, 且  $|A| \neq 0$  时, 有  $B = 0$ ;

当  $AB = AC$ , 且  $|A| \neq 0$  时, 有  $B = C$ .

问:

- 由  $A^2 = 0$ , 能否得到  $A = 0$ ?
- 由  $A^2 = I$ , 能否得到  $A = \pm I$ ?
- 由  $aA^2 + bA + cI = 0$  且  $b^2 - 4ac \geq 0$ , 能否得到  $A = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} I$ ?

答: 上述都是不成立的, 根源仍然是因为矩阵乘法不满足消去律.

2.172

矩阵乘法不满足交换律, 不满足消去律, 还有一些过去熟知的公式在矩阵理论里并不成立. 这些是线性代数初学者最容易犯的几个错误之一, 为数不少的人会一直犯这个错误.

我们要注意, 虽然矩阵也有所谓的“加法”、“乘法”, 但是这和我们熟知的实数加法、乘法是完全不同的. —— 运算的对象不同, 运算的内容不同, 当然, 运算的规律也不同.

这是两个不同的讨论范围里的不同运算, 相同的只不过是沿用了以前的称谓或记号而已, 我们不要被这一点“相同”而忘记二者本质的不同.

2.173

### (三) 伴随矩阵

(1)  $AA^* = A^*A = |A|I$ .

这个公式要牢记! 其重大意义是由此引入了逆矩阵的讨论. 注意这里的  $A$  不一定是可逆的.

(2) 若  $|A| \neq 0$ , 则  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$ .

它在理论上给出了求逆矩阵的方法, 但是并不实用.

2.174

### (四) 逆矩阵

(0) 记号  $A^{-1}$  是特定的, 它不能写成  $\frac{1}{A}$ .

(1) 矩阵定义中的条件 “ $AB = BA = I$ ” 是可以弱化的: 设  $A, B$  为方阵, 若  $AB = I$ , 则  $A, B$  可逆, 且互为逆矩阵.

更一般地, 对方阵而言, 若  $A_1 A_2 \cdots A_k = \lambda I$  且  $\lambda \neq 0$ , 则矩阵  $A_1, A_2, \cdots, A_k$  都是可逆的.

(2) 逆矩阵在运算中实现了除法的功能. 在矩阵中没有除法, 或者说, 我们通过引入逆矩阵, 避免了对除法的讨论.

2.175

### (五) 其他重要公式与结论.

- $|\lambda A| = \lambda^n |A|$ .
- $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ .
- $(AB)^T = B^T A^T$ .

$$\begin{aligned}
& \bullet \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, (ad-bc \neq 0). \\
& \bullet \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & & \\ & \mathbf{A}_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \mathbf{A}_k \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} & & \\ & \mathbf{A}_2^{-1} & \\ & & \ddots \\ & & & \mathbf{A}_k^{-1} \end{pmatrix}. \\
& \bullet \begin{vmatrix} \mathbf{A}_1 & & \\ & \mathbf{A}_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \mathbf{A}_k \end{vmatrix} = |\mathbf{A}_1| |\mathbf{A}_2| \cdots |\mathbf{A}_k|.
\end{aligned}$$

2.176

$$\begin{aligned}
& \bullet \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \\
& \bullet \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_{m \times m} \\ \mathbf{B}_{n \times n} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |\mathbf{A}| |\mathbf{B}|.
\end{aligned}$$

2.177

## 8.2 题型举例

### 8.2.1 矩阵运算

Example 56. 设  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  均为  $n \times n$  矩阵, 则必有

【    】

- (A)  $|\mathbf{A} + \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$ .                      (B)  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ .  
 (C)  $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{BA}|$ .                              (D)  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1}$ .

解: 选 (C). 特别注意选项 (D):  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1}$ , 是错误的.  $\square$

2.178

Example 57. 设  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{A} + \mathbf{B}, \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1}$  均为  $n$  阶可逆矩阵, 则  $(\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1})^{-1} =$

【    】

- (A)  $\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1}$ .                              (B)  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ .  
 (C)  $\mathbf{A}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}$ .                          (D)  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}$ .

解: 首先就可以排除 (A), (B). 选项 (B) 和上例中的 (D) 是一样的错误. 直接验证, 知正确选项是 (C). 事实上,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1})^{-1} &= (\mathbf{I}\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{I})^{-1} \\
&= (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1})^{-1} \\
&= (\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{B} + \mathbf{A})\mathbf{A}^{-1})^{-1} \\
&= (\mathbf{A}^{-1})^{-1}(\mathbf{B} + \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{B}^{-1})^{-1} \\
&= \mathbf{A}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}.
\end{aligned}$$

 $\square$ 

2.179

Example 58. 已知  $\alpha = (1, 2, 3)$ ,  $\beta = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ , 设  $\mathbf{A} = \alpha^T \beta$ , 求  $\mathbf{A}^n$ .

解:

$$\mathbf{A}^n = (\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\beta})^n = \boldsymbol{\alpha}^T (\boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\alpha}^T)^{n-1} \boldsymbol{\beta} = 3^{n-1} \boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\beta} = 3^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

□

2.180

Example 59. 设  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 而  $n$  为正整数, 求  $\mathbf{A}^n - 2\mathbf{A}^{n-1}$ . ( $n \geq 2$ )

解: 由  $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{A}$ , 得

$$\mathbf{A}^n - 2\mathbf{A}^{n-1} = \mathbf{A}^{n-2} (\mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A}) = \mathbf{0}.$$

□

2.181

Example 60. 设  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}$ , 其中  $\mathbf{P}$  为三阶可逆矩阵, 求  $\mathbf{B}^{2008} - 2\mathbf{A}^2$ .

解: 由  $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ , 且  $\mathbf{A}^4 = \mathbf{I}$ , 得

$$\mathbf{B}^{2008} - 2\mathbf{A}^2 = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}^{2008} \mathbf{P} - 2\mathbf{A}^2 = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{P} - 2\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & -1 \end{pmatrix}.$$

□

2.182

### 8.2.2 伴随矩阵

Example 61. 设  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  为  $n$  阶矩阵,  $\mathbf{A}^*, \mathbf{B}^*$  分别为  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  的伴随矩阵, 分块矩阵

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{pmatrix}$ , 则  $\mathbf{C}$  的伴随矩阵  $\mathbf{C}^* =$

【    】

(A)  $\begin{pmatrix} |\mathbf{A}| \mathbf{A}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & |\mathbf{B}| \mathbf{B}^* \end{pmatrix}.$                       (B)  $\begin{pmatrix} |\mathbf{B}| \mathbf{B}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & |\mathbf{A}| \mathbf{A}^* \end{pmatrix}.$

(C)  $\begin{pmatrix} |\mathbf{A}| \mathbf{B}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & |\mathbf{B}| \mathbf{A}^* \end{pmatrix}.$                       (D)  $\begin{pmatrix} |\mathbf{B}| \mathbf{A}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & |\mathbf{A}| \mathbf{B}^* \end{pmatrix}.$

解: 为了方便地得到正确选项, 不妨设  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  为可逆矩阵, 则  $\mathbf{C}$  也可逆.

$$\mathbf{C}^* = |\mathbf{C}| \mathbf{C}^{-1} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{pmatrix}^{-1} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix},$$

所以选 (D).

□

2.183

*Example 62.* 已知 3 阶方阵  $\mathbf{A}$  的逆矩阵为  $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ , 试求  $\mathbf{A}$  的伴随

矩阵  $\mathbf{A}^*$  的逆矩阵.

**解:** 已知  $\mathbf{A}$  可逆, 由  $\mathbf{A}^*\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\mathbf{I}$ , 知  $\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$ . 所以

$$(\mathbf{A}^*)^{-1} = (|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = |\mathbf{A}^{-1}|(\mathbf{A}^{-1})^{-1}.$$

计算得

$$|\mathbf{A}^{-1}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2,$$

且

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}^{-1}, \mathbf{I}) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \cong \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\cong \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right), \end{aligned}$$

所以

$$(\mathbf{A}^*)^{-1} = 2 \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

*Example 63.* 设  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  均为  $n$  阶矩阵,  $|\mathbf{A}| = 2, |\mathbf{B}| = -3$ , 求  $|2\mathbf{A}^*\mathbf{B}^{-1}|$ .

**解:** 由  $|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1}$ , 所以

$$|2\mathbf{A}^*\mathbf{B}^{-1}| = 2^n |\mathbf{A}^*| \cdot |\mathbf{B}^{-1}| = 2^n |\mathbf{A}|^{n-1} \frac{1}{|\mathbf{B}|} = -\frac{2^{2n-1}}{3}.$$

□

*Example 64.* 设矩阵  $\mathbf{A}$  的伴随矩阵  $\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ , 且  $\mathbf{ABA}^{-1} =$

$\mathbf{BA}^{-1} + 3\mathbf{I}$ , 求矩阵  $\mathbf{B}$ .

**解:** 在  $\mathbf{ABA}^{-1} = \mathbf{BA}^{-1} + 3\mathbf{I}$  两边同时右乘  $\mathbf{A}$ , 得

$$\mathbf{AB} = \mathbf{B} + 3\mathbf{A}.$$

再两边左乘  $\mathbf{A}^*$ , 得

$$|\mathbf{A}|\mathbf{B} = \mathbf{A}^*\mathbf{B} + 3|\mathbf{A}|\mathbf{I},$$

即

$$(|\mathbf{A}| \mathbf{I} - \mathbf{A}^*) \mathbf{B} = 3 |\mathbf{A}| \mathbf{I}.$$

注意到  $|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1}$ , 由题设得  $|\mathbf{A}| = 2$ . 所以  $(2\mathbf{I} - \mathbf{A}^*) \mathbf{B} = 6\mathbf{I}$ , 得

2.187

$$\mathbf{B} = 6(2\mathbf{I} - \mathbf{A}^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

2.188

### 8.2.3 逆矩阵

Example 65. 已知  $n$  阶矩阵  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  满足  $\mathbf{B} = (\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ , 证明:  $\mathbf{I} + \mathbf{B}$  可

逆, 并求其逆. 若  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{pmatrix}$ , 求  $(\mathbf{I} + \mathbf{B})^{-1}$ .

解: (方法一) 由  $\mathbf{B} = (\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ , 两边左乘  $\mathbf{I} + \mathbf{A}$ , 得

$$\begin{aligned} \mathbf{B} + \mathbf{AB} &= \mathbf{I} - \mathbf{A}, \\ \Rightarrow (\mathbf{I} + \mathbf{A}) \mathbf{B} + \mathbf{I} + \mathbf{A} &= 2\mathbf{I}, \\ \Rightarrow (\mathbf{I} + \mathbf{A})(\mathbf{I} + \mathbf{B}) &= 2\mathbf{I}. \end{aligned}$$

故  $\mathbf{I} + \mathbf{B}$  可逆, 且  $(\mathbf{I} + \mathbf{B})^{-1} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} + \mathbf{A})$ .

2.189

(方法二) 由  $\mathbf{B} = (\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ , 得

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= (\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}(2\mathbf{I} - (\mathbf{I} + \mathbf{A})), \\ \Rightarrow \mathbf{B} &= 2(\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1} - \mathbf{I}, \\ \Rightarrow \mathbf{B} + \mathbf{I} &= 2(\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}. \end{aligned}$$

故  $\mathbf{I} + \mathbf{B}$  可逆, 且  $(\mathbf{I} + \mathbf{B})^{-1} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} + \mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ . □

2.190

Example 66. 已知矩阵  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  满足  $2\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{B} - 4\mathbf{I}$ , 证明矩阵  $\mathbf{A} - 2\mathbf{I}$  可逆. 若

$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ , 求矩阵  $\mathbf{A}$ .

解: 由  $2\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{B} - 4\mathbf{I}$  得

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} - 2\mathbf{B} &= 4\mathbf{A}, \\ \Rightarrow (\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) \mathbf{B} &= 4(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) + 8\mathbf{I}, \\ \Rightarrow (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})(\mathbf{B} - 4\mathbf{I}) &= 8\mathbf{I}, \end{aligned}$$

故  $A - 2I$  可逆. 且  $A = 2I + 8(B - 4I)^{-1} = 2I + 8 \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

2.191

*Example 67.* 设  $A$  是  $n$  阶矩阵, 且满足  $A^3 = 2I$ , 又  $B = A^2 - 2A + I$ , 试求  $B^{-1}$ .

**解:** 由  $A^3 = 2I$  可得  $A^3 - I = I$ . 故

$$A^3 - I = (A - I)(A^2 + A + I) = I.$$

得  $A - I$  可逆, 且

$$(A - I)^{-1} = A^2 + A + I.$$

又  $B = A^2 - 2A + I = (A - I)^2$ , 故  $B$  可逆, 且

$$B^{-1} = (A^2 + A + I)^2 = 3A^2 + 4A + 5I.$$

2.192

#### 8.2.4 矩阵方程

*Example 68.* 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $I$  为 2 阶单位矩阵, 矩阵  $B$  满足  $BA = B + 2I$ , 求  $B$ .

**解:** 由题设得  $B(A - I) = 2I$ , 则  $A - I$  可逆, 两边右乘  $(A - I)^{-1}$ , 得

$$B = 2(A - I)^{-1} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

2.193

*Example 69.* 设  $A, B, C$  均为  $n$  阶矩阵, 若  $B = I + AB$ ,  $C = A + CA$ , 求证  $B - C = I$ .

**解:** 由  $B = I + AB$ , 得  $(I - A)B = I$ , 知  $I - A$  可逆, 且

$$B = (I - A)^{-1} \quad (28)$$

由  $C = A + CA$ , 得  $C(I - A) = A$ , 而  $I - A$  可逆, 所以

$$C = A(I - A)^{-1}. \quad (29)$$

将 (28) 和 (29) 相减得

$$B - C = (I - A)(I - A)^{-1} = I.$$

□

2.194

Example 70. 设矩阵  $\mathbf{X}$  满足  $\mathbf{A}^* \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} + 2\mathbf{X}$ , 求矩阵  $\mathbf{X}$ .

解: 由  $\mathbf{A}^* \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} + 2\mathbf{X}$ , 两边左乘  $\mathbf{A}$  得

$$|\mathbf{A}| \mathbf{X} = \mathbf{I} + 2\mathbf{A}\mathbf{X},$$

即

$$(|\mathbf{A}| \mathbf{I} - 2\mathbf{A}) \mathbf{X} = \mathbf{I},$$

故  $\mathbf{X} = (|\mathbf{A}| \mathbf{I} - 2\mathbf{A})^{-1}$ . □

2.195

Example 71. 矩阵  $\mathbf{X}$  满足  $\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{X}\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B} + \mathbf{B}\mathbf{X}\mathbf{A} + \mathbf{I}$ , 矩阵  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , 求  $\mathbf{X}$ .

解: 移项得  $\mathbf{A}\mathbf{X}(\mathbf{A} - \mathbf{B}) - \mathbf{B}\mathbf{X}(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{I}$ , 即  $(\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{B}\mathbf{X})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{I}$ , 所以

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B})\mathbf{X}(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{I}.$$

则  $(\mathbf{A} - \mathbf{B})$  可逆, 且

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A} - \mathbf{B})^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{B})^{-1}.$$

又

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 且 } (\mathbf{A} - \mathbf{B})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

得

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

2.197

Example 72. 已知  $n$  阶矩阵  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  满足条件  $\mathbf{A}\mathbf{B} - \mathbf{B} = \mathbf{A}$ , 求  $\mathbf{A}$ .

解: 由  $\mathbf{A}\mathbf{B} - \mathbf{B} = \mathbf{A}$  得

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})(\mathbf{B} - \mathbf{I}) = \mathbf{I},$$

故  $\mathbf{A} = \mathbf{I} + (\mathbf{B} - \mathbf{I})^{-1}$ . □

2.198

Example 73. 设矩阵  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  满足关系式  $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{A} + 2\mathbf{B}$ , 求矩阵  $\mathbf{B}$ .

解: 由题设得  $\mathbf{A}(\mathbf{B} - \mathbf{I}) = 2\mathbf{B}$ , 则

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} - \mathbf{I}) = 2(\mathbf{B} - \mathbf{I}) + 2\mathbf{I},$$

得

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})(\mathbf{B} - \mathbf{I}) = 2\mathbf{I},$$

从而

$$\mathbf{B} - \mathbf{I} = 2(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^{-1},$$

故  $\mathbf{B} = \mathbf{I} + 2(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^{-1}$ . □

2.199



Example 74. 设矩阵  $A, B$  满足  $A^*BA = 2BA - 8I$ , 求  $B$ .

解: 由  $A^*BA = 2BA - 8I$  得

$$(A^* - 2I)BA = -8I,$$

故  $A^* - 2I, A, B$  均可逆, 所以

$$B = -8(A^* - 2I)^{-1}A^{-1} = -8(A(A^* - 2I))^{-1} = -8(|A|I - 2A)^{-1}.$$

□

2.200

## 8.2.5 初等变换

### 初等变换

Example 75. 设  $A$  是 3 阶方阵, 将  $A$  的第 1 列与第 2 列交换得  $B$ , 再把  $B$  的第 2 列加到第 3 列得  $C$ , 则满足  $AQ = C$  的可逆矩阵  $Q$  为

(A)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . (B)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

(C)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . (D)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

解: 因为  $A \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_2} B \xrightarrow{c_3 + c_2} C$ , 所以

$$A \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = C.$$

取

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

所以应选 (D).

□

2.202

Example 76. 设  $A$  为 3 阶矩阵, 将  $A$  第 2 行加到第 1 行得  $B$ , 再将  $B$  的第 1

列的  $-1$  倍加到第 2 列得到  $C$ , 记  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 则

(A)  $C = P^{-1}AP$ . (B)  $C = PAP^{-1}$ .

(C)  $C = P^TAP$ . (D)  $C = PAP^T$ .

解: 由题设知

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = C,$$

所以  $C = PAP^{-1}$ . 选 (B).

□

2.203

Example 77 (2005 数一、二, 4 分). 设  $A$  为  $n$  ( $n \geq 2$ ) 阶可逆矩阵, 交换  $A$  的第 1 行与第 2 行得矩阵  $B$ ,  $A^*$ ,  $B^*$  分别为  $A$ ,  $B$  的伴随矩阵, 则 【 】

- (A) 交换  $A^*$  的第 1 列与第 2 列得矩阵  $B^*$ .  
 (B) 交换  $A^*$  的第 1 行与第 2 行得矩阵  $B^*$ .  
 (C) 交换  $A^*$  的第 1 列与第 2 列得矩阵  $-B^*$ .  
 (D) 交换  $A^*$  的第 1 行与第 2 行得矩阵  $-B^*$ .

解: 为表述方便, 把交换  $n$  阶单位矩阵  $I$  的第 1 行与第 2 行得的初等矩阵记为  $P$ . 由题设知  $PA = B$ . 由  $(PA)^*(PA) = |PA|I$ , 得

$$(PA)^* = |PA|A^{-1}P^{-1} = |P||A|A^{-1}P^{-1}.$$

注意到  $P^{-1} = P$ ,  $|P| = -1$ , 而由  $A^*A = |A|I$ , 知  $A^* = |A|A^{-1}$ . 得

$$B^* = (PA)^* = -|A|A^{-1}P = -A^*P,$$

即  $A^*P = -B^*$ . 因  $P$  亦可视为交换  $n$  阶单位矩阵  $I$  的第 1 列与第 2 列得的初等矩阵,  $A^*P$  意味着要交换矩阵  $A^*$  的第 1 列与第 2 列, 所以选 (C).  $\square$

2.204

Example 78. 设  $B = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} + a_{11} & a_{32} + a_{12} & a_{33} + a_{13} \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ,

试给出  $A$ ,  $B$  间的关系式, 并证明  $A$ ,  $B$  同时可逆或同时不可逆.

解: 由题设知  $A$ ,  $B$  间的关系式为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = B, \text{ 即 } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = B.$$

两边取行列式得

$$-|A| = |B|,$$

即  $A$ ,  $B$  同时为零或同时不为零, 得证  $A$ ,  $B$  同时可逆或同时不可逆.  $\square$

2.205

## 9 杂谈

### 9.1 矩阵乘法引发的问题: 运算是什?

矩阵乘法的规则, 很多人不能理解为什么要这样定义. 要理解这个问题, 我们不妨看看什么叫运算. 简单说, 运算不是规定, 而是量与量之间关系的抽象, 其实就是函数, 但它过于普遍, 干脆把它叫做一种运算了.

我们接触过“定义新运算”. 例如定义一种新的运算  $\star$ :  $x \star y \triangleq x^2 + y^2, \forall x, y \in \mathbb{R}$ . 但这其实是一个二元函数, 完全可以记为  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .

函数本质上是描述量与量之间的对应关系, 只不过加减乘除等等所描述的关系过于普遍和常见, 所以单独把它们叫做运算了. 另外运算有很多种, 例如矩阵的转置运算.

2.206

## Universe

论域 (Universe) 是讨论某个数学话题时, 其讨论对象的集合. 例如, 小学阶段讨论算术时, 论域是自然数集  $\mathbb{N}$ . 到中学, 讨论的范围逐步扩大到有理数域  $\mathbb{Q}$ 、实数域  $\mathbb{R}$  和复数域  $\mathbb{C}$ . 在讨论向量时, 论域是  $n$  维实向量空间  $\mathbb{R}^n$ . 现在讨论矩阵, 论域是  $m \times n$  维实矩阵空间  $\mathbb{R}^{m \times n}$ .

在这些不同的 Universe, 讨论的对象不同, 其运算当然也不同. 可能一些运算使用了相同的名称, 比如矩阵有“乘法”, 实数也有“乘法”. 但这些乘法是不同 Universe (“世界”) 发生的不同事情, 是完全不同的两个运算, 只是名字都取为乘法而已. 其运算律也没有理由保证完全相同. 矩阵乘法不能满足交换律, 并不是对“乘法满足交换律”的否定. 要看这个乘法的具体内容.

2.207

## Operation

运算 (Operation) 的本质是集合之间的映射. 它抽象出集合里的元素之间的一种特定的、稳定的关系.

一个典型的例子是关于向量的“乘法”. 向量的内积运算, 抽象于常力沿直线做功. 两个向量按照某种固定的规则, 映射于一个数量, 把这个规则抽取出来, 就是一种运算. 因为是映射于数量, 故也叫数量积. 而所谓的向量积, 是两个向量按照某个固定的规则, 映射于一个向量.

这些抽象都来自于实际, 而且有普遍性和应用性, 不是无端端的硬性规定.

2.208

运算可以跨越不同的 Universe. 比如实数和向量的数乘运算, 其结果是向量, 即  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ . 实数与矩阵的数乘运算, 其结果是矩阵, 即  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m \times n} \mapsto \mathbb{R}^{m \times n}$ . 向量与向量的内积运算, 其结果是实数, 即  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ .

只接受一个输入的运算, 称为一元运算, 例如绝对值、三角函数、集合的补运算、向量的模长、矩阵的转置、矩阵的行列式等.

接受两个输入的运算, 称为二元运算. 例如加、减、乘、除, 乘方、开方、对数运算, 集合的交、并, 函数的复合运算  $g \circ f : (g \circ f)(x) = g(f(x))$ , 等等.

运算可能满足也可能不满足某种运算律, 比如结合律、交换律、反交换律<sup>1</sup>等.

2.209

## 矩阵乘法的理解

同样地, 矩阵的乘法运算, 也是抽象于实际, 是因为两个矩阵会按照这一规律, 映射到另外一个矩阵. 这个乘法只不过是对这个对应法则的一种表述. 这种运算既有实际背景 (两个线性变换的乘积), 又有实际用途 (线性方程组的表示等).

矩阵加法是将对应位置元素相加, 那么, 矩阵乘法为什么不定义为将对应位置元素相乘? 譬如

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 c_1 & a_2 c_2 & a_3 c_3 \\ b_1 d_1 & b_2 d_2 & b_3 d_3 \end{pmatrix},$$

那要看这种运算有没有用处. 如果有实际来源或用途, 我们当然可以定义这个运算. 事实上, 已经有人定义了这种运算, 称为阿达马乘积 (Hadamard product),

<sup>1</sup>Anticommutativity, 例如减法、向量的叉乘, 交换两个运算量的位置, 其结果要反号.

也叫做 element-wise product, pointwise product, entrywise product 或 Schur product. Hadamard 乘积可以用于图像压缩算法.

还有别的矩阵乘法, 例如克罗内克乘积 (Kronecker product).

给定任两个矩阵  $A$  和  $B$ , 我们可以得到两个矩阵的直积, 或称为克罗内克乘积  $A \otimes B$ , 其定义如下

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}.$$

当  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $p \times r$  矩阵时,  $A \otimes B$  是  $mp \times nr$  矩阵.

克罗内克乘积可以用于解线性矩阵方程.

在 MATLAB 中, Hadamard 乘积用符号  $.*$  表示, 克罗内克乘积  $A \otimes B$  用  $\text{kron}(A, B)$  表示, 普通矩阵乘法用  $A * B$  表示. 例如

<pre>&gt;&gt; A=[1,2;3,4]  A =       1     2      3     4  &gt;&gt; B=[5,6;7,8]  B =       5     6      7     8</pre>	<pre>&gt;&gt; A.*B  ans =       5    12     21    32  &gt;&gt; A*B  ans =      19    22     43    50</pre>	<pre>&gt;&gt; kron(A,B)  ans =       5     6    10    12      7     8    14    16     15    18    20    24     21    24    28    32</pre>
(a) 给定 $A, B$ .	(b) $A.*B$ 与 $A*B$ .	(c) $\text{kron}(A, B)$ 即 $A \otimes B$ .

以上这些所谓的乘法和普通的矩阵乘法, 都在描述两个矩阵按某种规律对应于新的矩阵, 在这一点上, 它们的地位和作用是一样的. 只不过教材中所说的矩阵乘法, 更加普遍, 就把“乘法”这个名字给它优先命名了. 它完全可以取一个别的什么名字, 不叫矩阵乘法.

向量有数量积、向量积、混合积, 并没有特意把哪一个命名为“乘法”.

一定要注意: 可以叫“乘法”的运算有非常多种. 千万不要认为: 世界上只有一个乘法, 并把矩阵乘法看做是这个“唯一乘法”在矩阵中的应用.

## 9.2 逆矩阵为什么要出现

### 逆矩阵实现了矩阵乘法的逆运算

用逆矩阵实现矩阵乘法的逆运算, 而不直接定义矩阵除法, 根本原因在于矩阵乘法不满足交换律. 矩阵乘法有左乘、右乘之分, 其逆运算应该有“左除”、“右除”之分.

如果类似实数定义矩阵的除法, 则

$$AX = B, \quad XA = B$$

的解都是

$$X = \frac{B}{A}.$$

而事实上,  $A$  可逆时, 两个方程的解分别是

$$X = A^{-1}B, \quad X = BA^{-1}.$$

而矩阵乘法不满足交换律, 一般  $A^{-1}B \neq BA^{-1}$ .

2.214

在 MATLAB 中, 左除、右除分别用符号  $\backslash$ ,  $/$  表示:

- $\backslash$ : 左除,  $A \backslash B \triangleq A^{-1}B$ .
- $/$ : 右除,  $B/A \triangleq BA^{-1}$ .

下图是 MATLAB 运行结果.

<pre>&gt;&gt; A=[1,2;3,4]  A =       1     2      3     4  &gt;&gt; B=[5,6;7,8]  B =       5     6      7     8</pre>	<pre>&gt;&gt; A\B  ans =      -3    -4      4     5  &gt;&gt; A*(A\B)  ans =       5     6      7     8</pre>	<pre>&gt;&gt; B/A  ans =     -1.0000    2.0000    -2.0000    3.0000  &gt;&gt; (B/A)*A  ans =      5.0000    6.0000     7.0000    8.0000</pre>
---	---	---

(a) 给定  $A, B$ .

(b)  $A \backslash B = A^{-1}B$ .

(c)  $B/A = BA^{-1}$ .

2.215

## 逆元

简单说, 逆矩阵的出现, 完成了矩阵除法的功能. 虽然没有一个叫做矩阵除法的运算, 但是有了逆矩阵, 我们照样可以实现矩阵乘法的逆运算.

在实数域, 四则运算是加减乘除, 但我们其实可以只保留加法、乘法, 而让减法和除法不出现. 方法是定义加法的逆元、乘法的逆元.

2.216

## 单位元

讲到逆元, 必须要先提到**单位元**.

设论域  $U$  中定义了运算  $\circ$ , 如果存在一个元素  $e$ , 它与任何元素  $c$  运算的结果都是对方, 即

$$e \circ c = c \circ e = c,$$

则元素  $e$  就是对应于运算  $\circ$  的单位元.

例如常数 1 是对应于乘法的单位元; 单位矩阵  $I$  是矩阵乘法中的单位元; 常数 0 是对应于加法的单位元 (请自行验证).

给定某个元素  $a$ , 若存在元素  $b$ , 满足  $a, b$  运算的结果是单位元, 即

$$a \circ b = b \circ a = e,$$

则  $b$  关于运算  $\circ$  是  $a$  的**逆元**, 记为  $a^{-1}$ .

非零元  $a$  关于乘法的逆元是  $\frac{1}{a}$ , 或记为  $a^{-1}$ ;  $a$  关于加法的逆元是  $-a$ , 在语境清楚的情况下, 也常常记为  $a^{-1}$ .

有了逆元, 就可以定义逆运算. 减法  $a - b$  定义为  $a + b^{-1}$ ; 除法  $a \div b$  定义为  $a \times b^{-1}$ .

抽象地看, 上述两个逆运算形式都是  $a \circ b^{-1}$ .

2.217

## 逆矩阵的出现, 完成了矩阵除法的功能

逆矩阵其实就是逆元, 是逆元概念在矩阵问题中的具体反映. 有了逆矩阵, 可以方便地实现除法的功能.

例如  $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$ , 若  $\mathbf{A}$  可逆, 则  $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ .

这在形式上完全类同于实数域中发生的除法这件事情:  $ax = b$ , 若  $a \neq 0$ , 则  $x = a^{-1}b$ .

2.218

## 9.3 矩阵溯源

### 矩阵溯源

中文“矩阵”的概念最早见于 1922 年. 1922 年, 北京高等师范学校附属中学校 (今北京师范大学附属中学) 数学老师程廷熙, 在一篇介绍文章中将 Matrix 译为“纵横阵”. 1925 年, 科学名词审查会算学名词审查组在《科学》第十卷第四期刊登的审定名词表中, Matrix 被翻译为“矩阵式”, 方块矩阵翻译为“方阵式”, 而各类矩阵如“正交矩阵”、“伴随矩阵”中的“矩阵”则被翻译为“方阵”. 1935 年, 中国数学会审查后, 中华民国教育部审定的《数学名词》中, “矩阵”作为译名首次出现 (并“通令全国各院校一律遵用, 以昭划一”). 中华人民共和国成立后编订的《数学名词》中, 则将译名定为“(矩) 阵”. 1993 年, 中国自然科学名词审定委员会公布的《数学名词》中, “矩阵”被定为正式译名, 并沿用至今.

The term “matrix” (Latin for “womb”, derived from *mater*—mother) was coined by James Joseph Sylvester<sup>2</sup> in 1850, who understood a matrix as an object giving rise to a number of determinants today called *minors*, that is to say, determinants of smaller matrices that derive from the original one by removing columns and rows. In an 1851 paper, Sylvester explains:

*I have in previous papers defined a “Matrix” as a rectangular array of terms, out of which different systems of determinants may be engendered as from the womb of a common parent.*

2.219

**matrix** /ˈmɛtrɪks/ *noun*

*plural* **matrices** /ˈmɛtrəˌsiːz/ also **matrixes** /ˈmɛtrɪksəz/  
[count] *technical*

<sup>2</sup>James Joseph Sylvester (3 September 1814 –15 March 1897) was an English mathematician. He made fundamental contributions to matrix theory, invariant theory, number theory, partition theory and combinatorics. He played a leadership role in American mathematics in the later half of the 19th century as a professor at the Johns Hopkins University and as founder of the American Journal of Mathematics.

I have in previous papers defined a "Matrix" as a rectangular array of terms, out of which different systems of determinants may be engendered, as from the womb of a common parent; these cognate determinants being by no means isolated in their relations to one another, but subject to certain simple laws of mutual dependence and simultaneous deperition. The condensed representation of any such Matrix, according to my improved Vandermondian notation, will be

$$\begin{Bmatrix} a_1, & a_2 \dots a_n \\ a_1, & a_2 \dots a_m \end{Bmatrix}.$$

图 1: 截图源自: The Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester, (Cambridge, England: Cambridge University Press, 1904) vol.1, p.247

- 1: something (such as a situation or a set of conditions) in which something else develops or forms
  - the complex social *matrix* in which people live their lives
- 2: something shaped like a pattern of lines and spaces
  - The wires all crossed each other and formed a *matrix*.
- 3: a container that can be filled with a material (such as very hot metal) to give the material a new shape : mold
  - a *matrix* used for making knives
- 4: rock in which something hard (such as a diamond or a fossil) has been formed
  - pieces of light blue turquoise in a dark *matrix*
- 5: the area on a human finger or toe from which the fingernail or toenail grows
- 6: *mathematics* : a set of numbers in which the numbers are listed in rows and columns and can be added or multiplied according to special rules

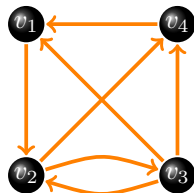
<http://www.learnersdictionary.com/definition/matrix>

2.220

## 9.4 矩阵乘法在图论中的一个简单而有效的应用

图由若干结点和连线构成. 如果两个结点可以通过连线直接或间接相连, 则这两个结点是可达的; 这些连线直接或间接相连, 称为路; 一条路中直接连线的数目, 称为该路的长度.

例如下图,



$v_2$  到  $v_4$  是可达的, 有至少两条路:  $v_2$  直接到  $v_4$ ;  $v_2$  经过  $v_3$  再到  $v_4$ . 这个两条路的长度分别为 1 和 2. (还有第 3 条路:  $v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_2 \rightarrow v_4$ .)

**问题:** 如何计算连结  $v_i$  与  $v_j$  长度为 2 的路的数目?

2.221

## 图的矩阵表示: 邻接矩阵

**Definition 79.** 设图  $G$  有  $n$  个结点  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , 则  $n$  阶方阵  $A(G) = (a_{ij})$  称为  $G$  的邻接矩阵, 其中

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{ 与 } v_j \text{ 有直接连线;} \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

Example 80. 例如, 上图的邻接矩阵为:

$$A(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$



有  $v_i$  到  $v_j$  的有向连线, 则  $a_{ij} = 1$ ; 否则,  $a_{ij} = 0$ .

## 矩阵乘法解决问题

**分析:** 注意从  $v_i$  到  $v_j$  长度为 2 的路中间必经由某个结点  $v_k$ , 即  $v_i \rightarrow v_k \rightarrow v_j$ , 而且  $a_{ik} = a_{kj} = 1$ , 那么  $a_{ik} \cdot a_{kj} = 1$ .

反之, 如果不存在路径  $v_i v_k v_j$ , 则  $a_{ik} = 0$  或  $a_{kj} = 0$ , 从而  $a_{ik} \cdot a_{kj} = 0$ .

所以从  $v_i$  到  $v_j$  长度为 2 的路径的数目等于

$$\underbrace{a_{i1} \cdot a_{1j}}_{v_i v_1 v_j} + \underbrace{a_{i2} \cdot a_{2j}}_{v_i v_2 v_j} + \cdots + \underbrace{a_{in} \cdot a_{nj}}_{v_i v_n v_j} = \sum_{k=1}^n \underbrace{a_{ik} \cdot a_{kj}}_{v_i v_k v_j}$$

按矩阵的乘法法则, 此和式恰好是  $(A(G))^2$  中第  $i$  行第  $j$  列元素  $a_{ij}^{(2)}$ .

$$\left(a_{ij}^{(2)}\right)_{n \times n} = (A(G))^2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

例如,

$$(A(G))^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(A(G))^2$  中的第 2 行第 1 列元素等于 2, 说明连结  $v_2$  与  $v_1$  长度为 2 的路的有 2 条, 即  $v_2 v_4 v_1, v_2 v_3 v_1$ .

$$\begin{aligned} a_{21}^{(2)} &= a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21} + a_{23}a_{31} + a_{24}a_{41} \\ &= 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2. \end{aligned}$$

注意从  $v_2$  到  $v_1$  长度为 2 的路中间必经由一个结点  $v_k$ , 即  $v_2 \rightarrow v_k \rightarrow v_1$ .



比如,  $k = 3$  时,  $a_{23}a_{31} = 1 \cdot 1$  表示从  $v_2$  到  $v_3$ , 再  $v_3$  到  $v_1$  有路.

还可以进一步计算从  $v_i$  到  $v_j$  长度为 3 的路的数目.

从  $v_i$  到  $v_j$  长度为 3 的路径可视为从  $v_i$  到中间结点  $v_k$  长度为 1 的路径, 再连接从  $v_k$  到  $v_j$  长度为 2 的路径.

所以从  $v_i$  到  $v_j$  长度为 3 的路径的数目等于

$$a_{ij}^{(3)} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot a_{kj}^{(2)},$$

即

$$(a_{ij}^{(3)})_{n \times n} = (A(G))^3 = (A(G)) \cdot (A(G))^2.$$

一般地有:

$$(a_{ij}^{(l)})_{n \times n} = (A(G))^l = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_l \cdots \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$a_{ij}^{(l)}$  表示从  $v_i$  到  $v_j$  长度为  $l$  的路的数目.

*Example 81.* 比如,

$$\begin{aligned} (A(G))^3 &= A(G) \cdot (A(G))^2 \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$(A(G))^3$  中的第 2 行第 1 列元素等于 1, 说明连结  $v_2$  与  $v_1$  长度为 3 的路的有一条 (即  $v_2v_3v_4v_1$ ).