第 5 章　特征值和特征向量　矩阵的对角化

Liner Algebra

黄 正 华

Email: huangzh@whu.edu.cn

武汉大学　数学与统计学院

January 3, 2017

Outline

1. 矩阵的特征值和特征向量
   - 特征值与特征向量的基本概念
   - 应用举例: Google 财富的秘密
   - 特征值和特征向量的性质
   - 相似矩阵及其性质

2. 矩阵可对角化的条件

3. 实对称矩阵的对角化

4. 习题

5. 总结与复习

为什么要研究矩阵的特征值?

➢ 特征值分析应用广泛:

- Google 搜索;
- 图像处理: 压缩、识别、去噪、修复、去模糊、融合、变形等.
- 汽车设计、建筑设计.

为什么要研究矩阵的特征值?

➢ 特征值分析应用广泛:

- Google 搜索;
- 图像处理: 压缩、识别、去噪、修复、去模糊、融合、变形等.
- 汽车设计、建筑设计.

为什么要研究矩阵的特征值?

➢ 特征值分析应用广泛:

- Google 搜索;
- 图像处理: 压缩、识别、去噪、修复、去模糊、融合、变形等.
- 汽车设计、建筑设计.

为什么要研究矩阵的特征值?

➢ 特征值分析应用广泛:

- Google 搜索;
- 图像处理: 压缩、识别、去噪、修复、去模糊、融合、变形等.
- 汽车设计、建筑设计.

桥发生了什么情况?

Tacoma 桥, 美国, 1940 年

Outline

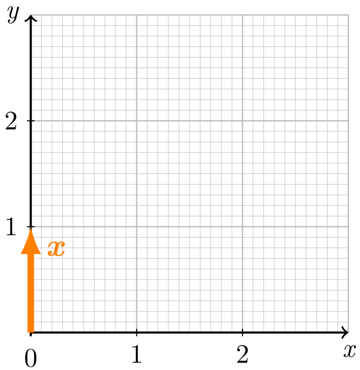
1. 矩阵的特征值和特征向量
   - 特征值与特征向量的基本概念
   - 应用举例: Google 财富的秘密
   - 特征值和特征向量的性质
   - 相似矩阵及其性质
2. 矩阵可对角化的条件
3. 实对称矩阵的对角化
4. 习题
5. 总结与复习

矩阵乘以向量, 其功能是什么?

给定 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$,

矩阵乘以向量, 其功能是什么?

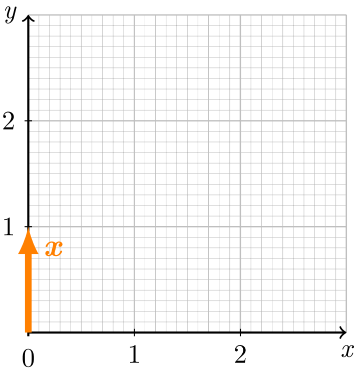
给定 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 取 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,



矩阵乘以向量, 其功能是什么?

给定 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$, 取 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, 有

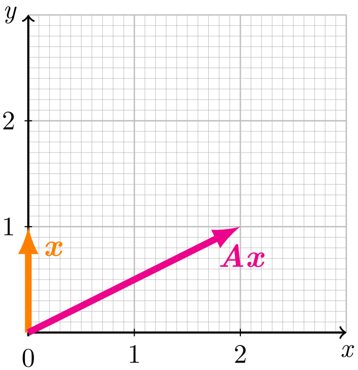
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$



矩阵乘以向量, 其功能是什么?

给定 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 取 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 有

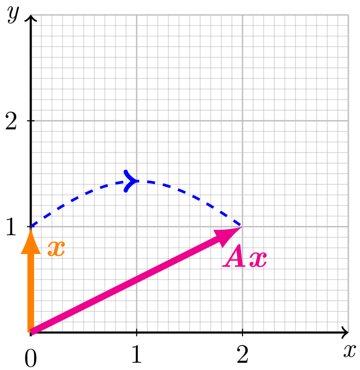
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



矩阵乘以向量, 其功能是什么?

给定 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, 取 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$, 有

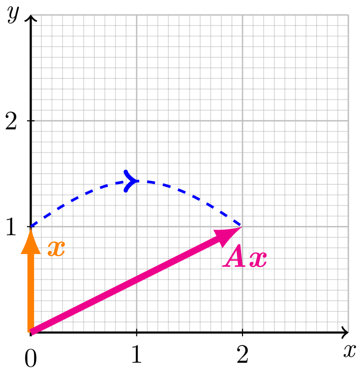
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}.$$



矩阵乘以向量, 其功能是什么?

给定 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 取 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 有

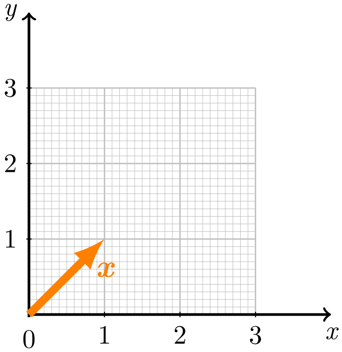
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



☞ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$: 将 $\boldsymbol{x}$ 旋转, 并改变长度.

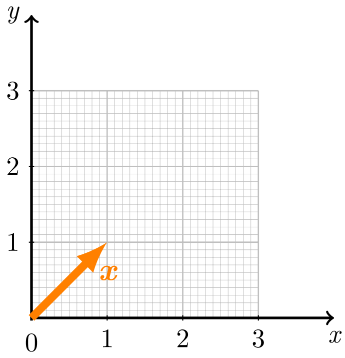
对 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 取 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

对 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 取 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,



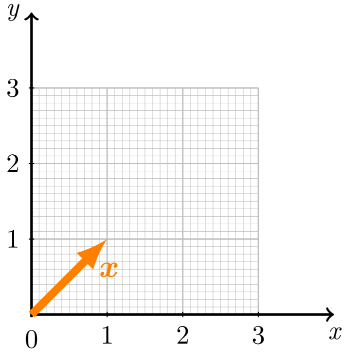
对 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, 取 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$, 有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$



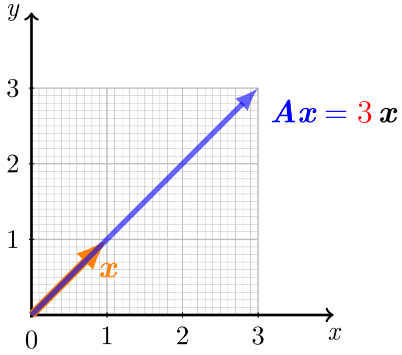
对 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 取 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\,\boldsymbol{x}.$$



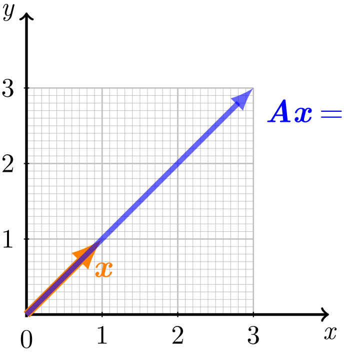
对 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 取 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\,\boldsymbol{x}.$$



对 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, 取 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$, 有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 3\end{pmatrix}=3\,\boldsymbol{x}.$$



$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=3\,\boldsymbol{x}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\,\boldsymbol{x}.}$

定义 1. (特征值与特征向量)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, 若存在数 λ 和 n 维非零向量 $\boldsymbol{x}$, 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}, \tag{1}$$

定义 1. (特征值与特征向量)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, 若存在数 λ 和 n 维非零向量 $\boldsymbol{x}$, 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}, \tag{1}$$

则

1. λ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值;

定义 1. (特征值与特征向量)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, 若存在数 λ 和 n 维非零向量 $\boldsymbol{x}$, 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}, \tag{1}$$

则

1. λ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值;
2. $\boldsymbol{x}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量.

定义 1. (特征值与特征向量)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, 若存在数 λ 和 n 维非零向量 $\boldsymbol{x}$, 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}, \tag{1}$$

则

1. λ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值;
2. $\boldsymbol{x}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量.

注

- 特征向量是非零向量;

定义 1. (特征值与特征向量)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, 若存在数 λ 和 n 维非零向量 $\boldsymbol{x}$, 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}, \tag{1}$$

则

1. λ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值;
2. $\boldsymbol{x}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 对应于特征值 λ 的特征向量 .

注

➢ 特征向量是非零向量; 零向量不是特征向量!

定义 1. (特征值与特征向量)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, 若存在数 λ 和 n 维非零向量 $\boldsymbol{x}$, 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}, \tag{1}$$

则

1. λ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值;
2. $\boldsymbol{x}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量.

注

- 特征向量是非零向量; 零向量不是特征向量!
- $k\boldsymbol{x}$ 也是对应于特征值 λ 的特征向量

定义 1. (特征值与特征向量)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, 若存在数 λ 和 n 维非零向量 $\boldsymbol{x}$, 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}, \tag{1}$$

则

1. λ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值;
2. $\boldsymbol{x}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量.

注

- 特征向量是非零向量; 零向量不是特征向量!
- $k\boldsymbol{x}$ 也是对应于特征值 λ 的特征向量, $k \neq 0$.

特征值与特征向量的求法

问题:

已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$, 求满足关系式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ 的 λ 和 $\boldsymbol{x}$?

特征值与特征向量的求法

问题:

已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$, 求满足关系式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ 的 λ 和 $\boldsymbol{x}$? $\boxed{\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}}$

特征值与特征向量的求法

问题:

已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$, 求满足关系式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ 的 λ 和 $\boldsymbol{x}$? $\boxed{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}}$

$$\boxed{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}}$$

特征值与特征向量的求法

问题:

已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$, 求满足关系式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ 的 λ 和 $\boldsymbol{x}$? $\boxed{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}}$

$$\boxed{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}}$$

特征值与特征向量的求法

问题:

已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$, 求满足关系式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ 的 λ 和 $\boldsymbol{x}$? $\boxed{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}}$

$$\boxed{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}}$$

$$\Downarrow \longleftarrow \boxed{\text{特征向量 } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}}$$

$$\boxed{|\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0}$$

特征值与特征向量的求法

问题:

已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$, 求满足关系式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ 的 λ 和 $\boldsymbol{x}$? $\boxed{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}}$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

$$(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

特征向量 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$

$$|\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$$

特征值与特征向量的求法

问题:

已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$, 求满足关系式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ 的 λ 和 $\boldsymbol{x}$? $\boxed{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}}$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

$$\downarrow$$

$$(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

$$\downarrow$$

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$$

$$\downarrow$$

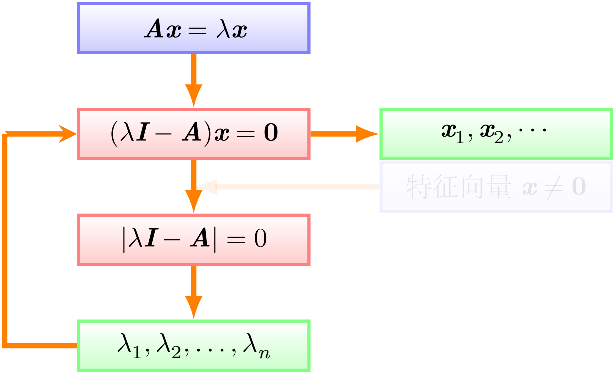
$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$$

特征向量 $\boldsymbol{x} \neq 0$

特征值与特征向量的求法

问题:

已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$, 求满足关系式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ 的 λ 和 $\boldsymbol{x}$? $\boxed{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}}$



特征值与特征向量的求法

问题:

已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$, 求满足关系式 $\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{x}$ 的 λ 和 $\boldsymbol{x}$? $\boxed{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}}$

$$\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{x}$$

$$(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots$$

特征向量 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$$

☞ $|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$ 称为**特征方程**.

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0, \tag{2}$$

即

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} & \dots & -a_{2n} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} & \dots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0, \tag{2}$$

即

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} & \cdots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

1. $|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}|$ 称为**特征多项式**.
2. $\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ 称为**特征矩阵**.
3. n 阶矩阵在复数范围内有 n 个特征值 (含重根).

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0, \tag{2}$$

即

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} & \cdots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

1. $|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}|$ 称为**特征多项式**.
2. $\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ 称为**特征矩阵**.
3. n 阶矩阵在复数范围内有 n 个特征值 (含重根).

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0, \tag{2}$$

即

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} & \cdots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

1. $|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}|$ 称为**特征多项式**.
2. $\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ 称为**特征矩阵**.
3. n 阶矩阵在复数范围内有 n 个特征值 (含重根).

说明:

由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, 也可等价写为

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$$

说明:

由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, 也可等价写为

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$$

它有非零解的充要条件是

$$|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}| = 0.$$

说明:

由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, 也可等价写为

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.$$

它有非零解的充要条件是

$$|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}| = 0.$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{4}$$

说明:

由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$, 也可等价写为

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}.$$

它有非零解的充要条件是

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=0.$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0, \tag{4}$$

从而, 也可以记

- 特征多项式为: $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|$.

说明:

由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, 也可等价写为

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$$

它有非零解的充要条件是

$$|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}| = 0.$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{4}$$

从而, 也可以记

- 特征多项式为: $|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}|$.
- 特征方程为: $|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}| = 0$.

特征值与特征向量的求解步骤

1. 特征值: 解特征方程 $|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$, 得到特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.
2. 特征向量: 求方程组 $(\lambda_i \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的所有非零解.

特征值与特征向量的求解步骤

1. 特征值: 解特征方程 $|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$, 得到特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.
2. 特征向量: 求方程组 $(\lambda_i \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的所有非零解.

例 1.1

求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

例 1.1

求矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解: Step 1 解特征方程 $|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$.

例 1.1

求矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解: Step 1 解特征方程 $|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0.$

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| =$$

例 1.1

求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解: Step 1 解特征方程 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$.

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\ -2 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

例 1.1

求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解: Step 1 解特征方程 $|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$.

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\ -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-4$$

例 1.1

求矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解: Step 1 解特征方程 $|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0.$

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 4 = (\lambda - 3)(\lambda + 1),$$

例 1.1

求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解: Step 1 解特征方程 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$.

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\ -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-4=(\lambda-3)(\lambda+1),$$

由 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$,

例 1.1

求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解: Step 1 解特征方程 $|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$.

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\ -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-4=(\lambda-3)(\lambda+1),$$

由 $|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$, 得特征值为

$$\lambda_1=3, \quad \lambda_2=-1.$$

Step 2 求方程 $(\lambda_i \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的所有非零解.

Step 2 求方程 $(\lambda_i \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的所有非零解.

① 对 $\lambda_1 = 3$, 求解线性方程组 $(\lambda_i \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

Step 2 求方程 $(\lambda_i \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的所有非零解.

① 对 $\lambda_1 = 3$, 求解线性方程组 $(\lambda_i \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 由

$$3\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Step 2 求方程 $(\lambda_i \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的所有非零解.

① 对 $\lambda_1 = 3$, 求解线性方程组 $(\lambda_i \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 由

$$3\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

Step 2 求方程 $(\lambda_i \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的所有非零解.

① 对 $\lambda_1 = 3$, 求解线性方程组 $(\lambda_i \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 由

$$3\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 即对应于 $\lambda_1 = 3$ 的全部特征向量为

$$k_1 \boldsymbol{p}_1 = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad k_1 \neq 0.$$

② 对 $\lambda_2 = -1$, 求解线性方程组 $(\lambda_i \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

② 对 $\lambda_2 = -1$, 求解线性方程组 $(\lambda_i \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. 由

$$(-1)\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

② 对 $\lambda_2 = -1$, 求解线性方程组 $(\lambda_i \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 由

$$(-1)\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

② 对 $\lambda_2 = -1$, 求解线性方程组 $(\lambda_i \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 由

$$(-1)\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, 即对应于 $\lambda_2 = -1$ 的全部特征向量为

$$k_2 \boldsymbol{p}_2 = k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad k_2 \neq 0.$$

□

例 1.2

求矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

例 1.2

求矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解: $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-1)^2,$$

例 1.2

求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解: $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)^2,$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\ \lambda_2=\lambda_3=1.$

当 $\lambda_1 = 2$ 时, 解方程 $(2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$,

当 $\lambda_1 = 2$ 时, 解方程 $(2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1 = (0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$,

当 $\lambda_1 = 2$ 时, 解方程 $(2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1 = (0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$, 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_1 = 2$ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1$ $(k_1 \neq 0)$.

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_2=(-1,-2,1)^{\mathrm{T}}$, 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的全部特征向量为 $k_2\boldsymbol{\xi}_2$ $(k_2\neq 0)$.

例 1.3

求矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

例 1.3

求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解: $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 4 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-2)^2,$$

例 1.3

求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解: $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+2&-1&-1\\0&\lambda-2&0\\4&-1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-2)^2,$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=\lambda_3=2.$

当 $\lambda_1 = -1$ 时, 解方程 $(-\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$,

当 $\lambda_1 = -1$ 时, 解方程 $(-\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$-\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & -1 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1 = (1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$,

当 $\lambda_1=-1$ 时, 解方程 $(-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & -3 & 0\\ 4 & -1 & -4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$, 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_1=-1$ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1\ (k_1\neq 0)$.

当 $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 时, 解方程组 $(2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_2 = (0, 1, -1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_3 = (1, 0, 4)^{\mathrm{T}}$, 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 的全部特征向量为 $k_2\boldsymbol{\xi}_2 + k_3\boldsymbol{\xi}_3$ (k_2, k_3 不同时为零). □

当 $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 时, 解方程组 $(2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_2 = (0, 1, -1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_3 = (1, 0, 4)^{\mathrm{T}}$, 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 的全部特征向量为 $k_2\boldsymbol{\xi}_2 + k_3\boldsymbol{\xi}_3$ (k_2, k_3 不同时为零). □

☞ 上述 $\boldsymbol{\xi}_2$, $\boldsymbol{\xi}_3$ 的任意线性组合, 构造成一个平面.

当 $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 时, 解方程组 $(2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_2 = (0, 1, -1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_3 = (1, 0, 4)^{\mathrm{T}}$, 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 的全部特征向量为 $k_2\boldsymbol{\xi}_2 + k_3\boldsymbol{\xi}_3$ (k_2, k_3 不同时为零). □

☞ 上述 $\boldsymbol{\xi}_2$, $\boldsymbol{\xi}_3$ 的任意线性组合, 构造成一个平面. 在这个平面上, 除了零向量以外的任意向量, 都是特征值 $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 所对应的特征向量.

当 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 时, 解方程组 $(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 由

$$2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 4 & -1 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-4 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_2=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_3=(1,0,4)^{\mathrm{T}}$, 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的全部特征向量为 $k_2\boldsymbol{\xi}_2+k_3\boldsymbol{\xi}_3$ (k_2, k_3 不同时为零). □

☞ 上述 $\boldsymbol{\xi}_2$, $\boldsymbol{\xi}_3$ 的任意线性组合, 构造成一个平面. 在这个平面上, 除了零向量以外的任意向量, 都是特征值 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 所对应的特征向量. 我们把这个平面, 称为特征值 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的特征子空间.

当 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 时, 解方程组 $(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 4 & -1 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-4 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_2=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_3=(1,0,4)^{\mathrm{T}}$, 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的全部特征向量为 $k_2\boldsymbol{\xi}_2+k_3\boldsymbol{\xi}_3$ (k_2, k_3 不同时为零). □

☞ 上述 $\boldsymbol{\xi}_2$, $\boldsymbol{\xi}_3$ 的任意线性组合, 构造成一个平面. 在这个平面上, 除了零向量以外的任意向量, 都是特征值 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 所对应的特征向量. 我们把这个平面, 称为特征值 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的特征子空间.

综合这两个例子可以看到: k 重根特征值所对应的线性无关特征向量的个数 l, 不一定等于特征值的重数 k.

当 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 时, 解方程组 $(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 4 & -1 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-4 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_2=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_3=(1,0,4)^{\mathrm{T}}$, 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的全部特征向量为 $k_2\boldsymbol{\xi}_2+k_3\boldsymbol{\xi}_3$ (k_2, k_3 不同时为零). □

☞ 上述 $\boldsymbol{\xi}_2$, $\boldsymbol{\xi}_3$ 的任意线性组合, 构造成一个平面. 在这个平面上, 除了零向量以外的任意向量, 都是特征值 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 所对应的特征向量. 我们把这个平面, 称为特征值 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的特征子空间.

综合这两个例子可以看到: k 重根特征值所对应的线性无关特征向量的个数 l, 不一定等于特征值的重数 k. 事实上, 其规律是 $l\leqslant k$.

特征子空间

定义 1.4

在特征值 λ_0 对应的全部特征向量中, 设有极大无关组 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_l$,

特征子空间

定义 1.4

在特征值 λ_0 对应的全部特征向量中, 设有极大无关组 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_l$, 这个极大无关组所张成的空间, 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 关于特征值 λ_0 的**特征子空间**, 记作 V_{λ_0}.

特征子空间

定义 1.4

在特征值 λ_0 对应的全部特征向量中, 设有极大无关组 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_l$, 这个极大无关组所张成的空间, 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 关于特征值 λ_0 的**特征子空间**, 记作 V_{λ_0}. 这个特征子空间的维数, 称为特征值 λ_0 的**几何重数**.

特征子空间

定义 1.4

在特征值 λ_0 对应的全部特征向量中, 设有极大无关组 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_l$, 这个极大无关组所张成的空间, 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 关于特征值 λ_0 的**特征子空间**, 记作 V_{λ_0}. 这个特征子空间的维数, 称为特征值 λ_0 的**几何重数**.

注

- 特征子空间 V_{λ_0}, 就是方程组 $(\lambda_0 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解空间.

特征子空间

定义 1.4

在特征值 λ_0 对应的全部特征向量中, 设有极大无关组 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_l$, 这个极大无关组所张成的空间, 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 关于特征值 λ_0 的**特征子空间**, 记作 V_{λ_0}. 这个特征子空间的维数, 称为特征值 λ_0 的**几何重数**.

注

- 特征子空间 V_{λ_0}, 就是方程组 $(\lambda_0 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解空间.
- "λ_0 对应的全部特征向量" + "零向量"="特征子空间 V_{λ_0}" .

几何重数的等价含义

λ_0 的几何重数 l 的等价含义

(1) l 等于方程组 $(\lambda_0 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系所包含的解向量的个数, 即: $l = n - \mathrm{r}(\lambda_0 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$.

几何重数的等价含义

λ_0 的几何重数 l 的等价含义

(1) l 等于方程组 $(\lambda_0 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系所包含的解向量的个数, 即: $l = n - \mathrm{r}(\lambda_0 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$.

(2) l 等于 λ_0 的特征子空间的维数, 即: $l = \dim V_{\lambda_0}$.

几何重数的等价含义

λ_0 的几何重数 l 的等价含义

(1) l 等于方程组 $(\lambda_0 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系所包含的解向量的个数, 即: $l = n - \mathrm{r}(\lambda_0 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$.

(2) l 等于 λ_0 的特征子空间的维数, 即: $l = \dim V_{\lambda_0}$.

故

$$l = \dim V_{\lambda_0} = n - \mathrm{r}(\lambda_0 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}).$$

几何重数的等价含义

λ_0 的几何重数 l 的等价含义

(1) l 等于方程组 $(\lambda_0 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系所包含的解向量的个数, 即: $l = n - \mathrm{r}(\lambda_0 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$.

(2) l 等于 λ_0 的特征子空间的维数, 即: $l = \dim V_{\lambda_0}$.

故

$$l = \dim V_{\lambda_0} = n - \mathrm{r}(\lambda_0 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}).$$

设 λ_0 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 重特征值, 则 k 称为特征值 λ_0 的**代数重数**.

代数重数 v.s. 几何重数

一般地, 有下述重要结论.

定理 1.5

若 λ_0 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 重特征值, 设其几何重数为 l, 则 $l \leqslant k$.

证明略.

代数重数 v.s. 几何重数

一般地, 有下述重要结论.

定理 1.5

若 λ_0 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 重特征值, 设其几何重数为 l, 则 $l \leqslant k$.

证明略.

☞ 简单讲: 几何重数 $\leqslant$ 代数重数.

代数重数 v.s. 几何重数

一般地, 有下述重要结论.

定理 1.5

若 λ_0 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 重特征值, 设其几何重数为 l, 则 $l \leqslant k$.

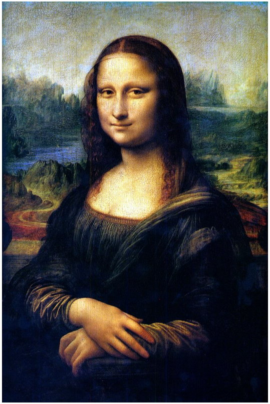
证明略.

☞ 简单讲: 几何重数 $\leqslant$ 代数重数.

显然, 单根特征值的代数重数 = 几何重数 =1.

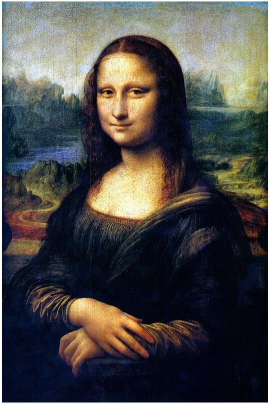
问题

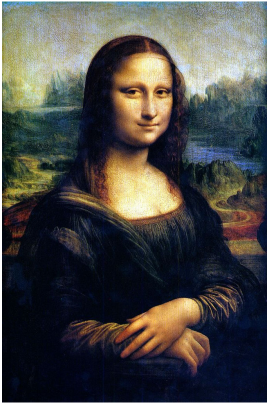
图形的变换, 如何实现?



问题

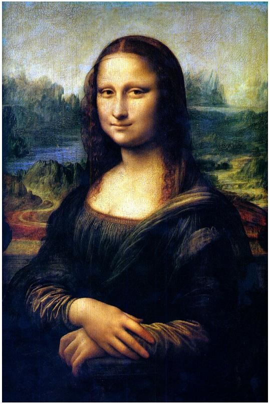
图形的变换, 如何实现?

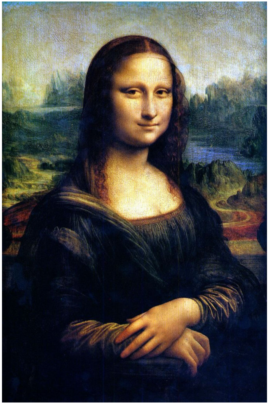




问题

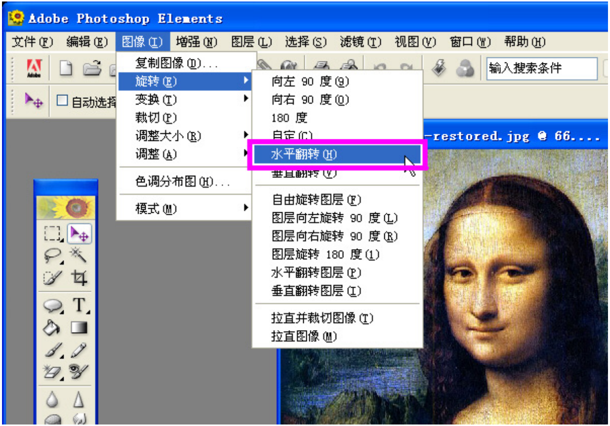
图形的变换, 如何实现?





?

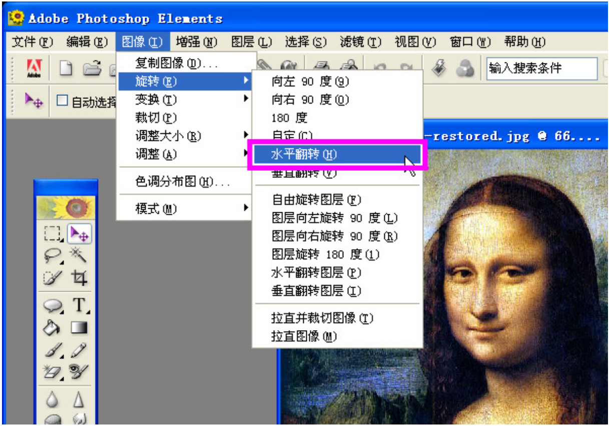
问题

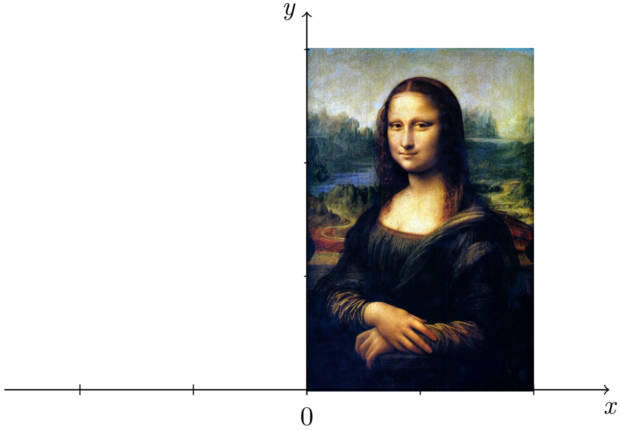


Adobe Photoshop Elements
文件(F) 编辑(E) 图像(I) 增强(N) 图层(L) 选择(S) 滤镜(T) 视图(V) 窗口(W) 帮助(H)
输入搜索条件
自动选择
复制图像(D)...
旋转(R)
变换(T)
裁切(P)
调整大小(R)
调整(A)
色调分布图(H)...
模式(M)
向左 90 度(9)
向右 90 度(0)
180 度
水平翻转(H)
自由旋转图层(F)
图层向左旋转 90 度(L)
图层向右旋转 90 度(R)
图层旋转 180 度(1)
水平翻转图层(P)
垂直翻转图层(I)
拉直并裁切图像(T)
拉直图像(M)
-restored.jpg @ 66....

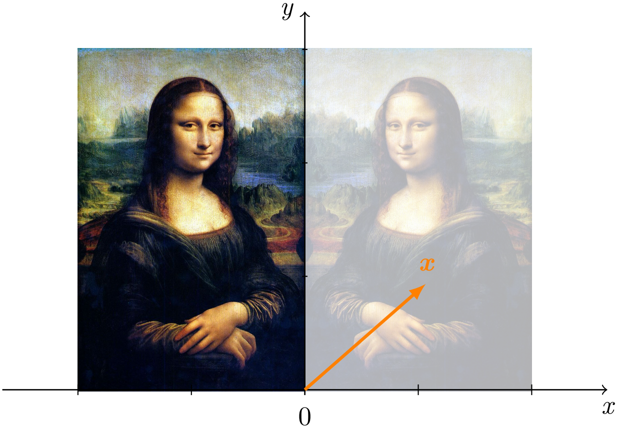
问题

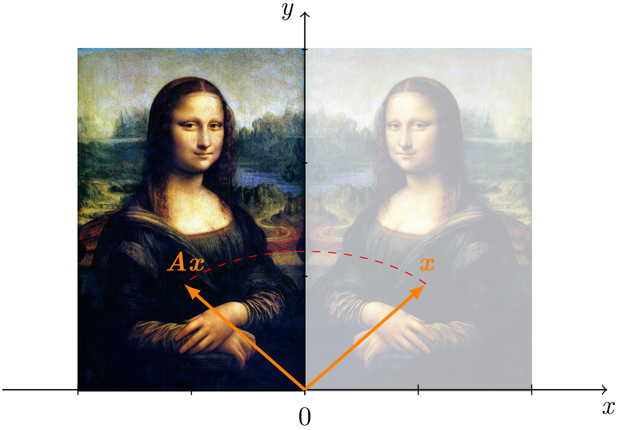
☞ 其数学方法是什么?


Adobe Photoshop Elements
文件(F) 编辑(E) 图像(I) 增强(N) 图层(L) 选择(S) 滤镜(T) 视图(V) 窗口(W) 帮助(H)
输入搜索条件
自动选择
复制图像(D)...
旋转(R)
变换(T)
裁切(P)
调整大小(R)
调整(A)
色调分布图(H)...
模式(M)
向左 90 度(9)
向右 90 度(0)
180 度
自定(C)
水平翻转(H)
垂直翻转(V)
自由旋转图层(F)
图层向左旋转 90 度(L)
图层向右旋转 90 度(R)
图层旋转 180 度(1)
水平翻转图层(P)
垂直翻转图层(I)
拉直并裁切图像(T)
拉直图像(M)
-restored.jpg @ 66....

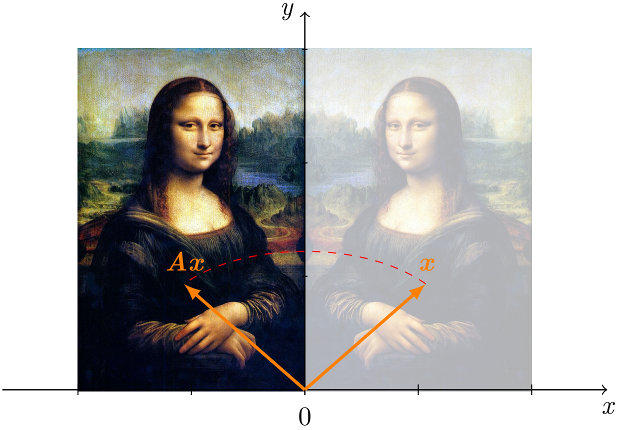

y
x
0


y
0
x

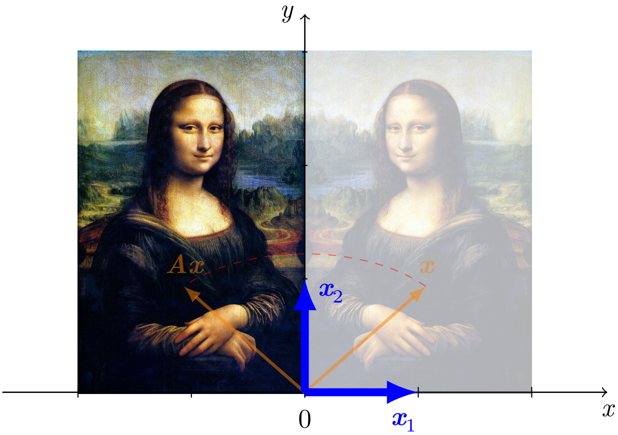

y
$\boldsymbol{x}$
x
0



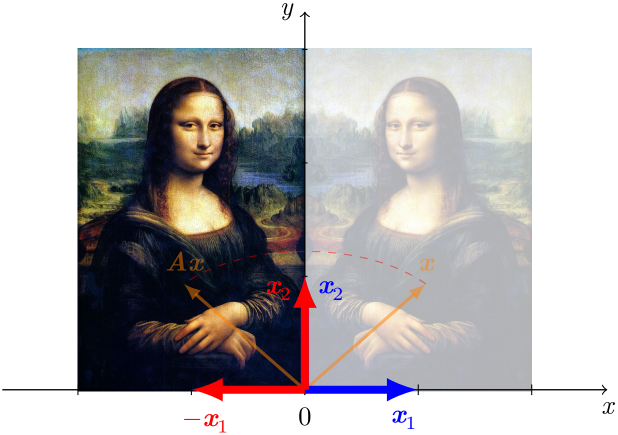
y
Ax
x
0
x



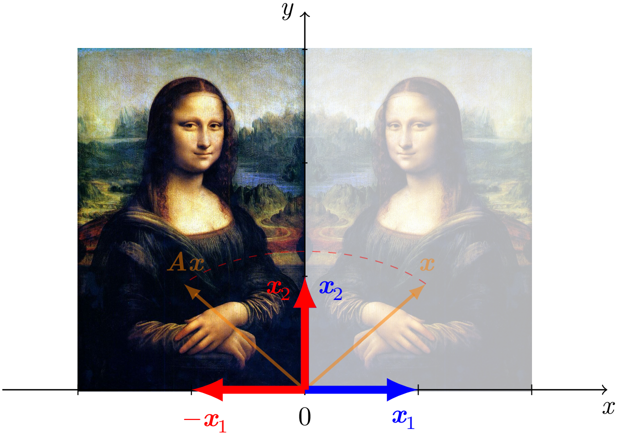
➢ 特征向量在什么方向上?


y
$A\boldsymbol{x}$
$\boldsymbol{x}$
$\boldsymbol{x}_2$
0
$\boldsymbol{x}_1$
x

➢ 特征向量在什么方向上?


y
$A\boldsymbol{x}$
$\boldsymbol{x}$
$\boldsymbol{x}_2$
$\boldsymbol{x}_2$
$-\boldsymbol{x}_1$
0
$\boldsymbol{x}_1$
x

➢ 特征向量在什么方向上?



- 特征向量在什么方向上?
- 特征值是什么?

求出矩阵 $\boldsymbol{A}$？

特征值 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$

求出矩阵 $\boldsymbol{A}$？

特征值 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

求出矩阵 $\boldsymbol{A}$？

特征值 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

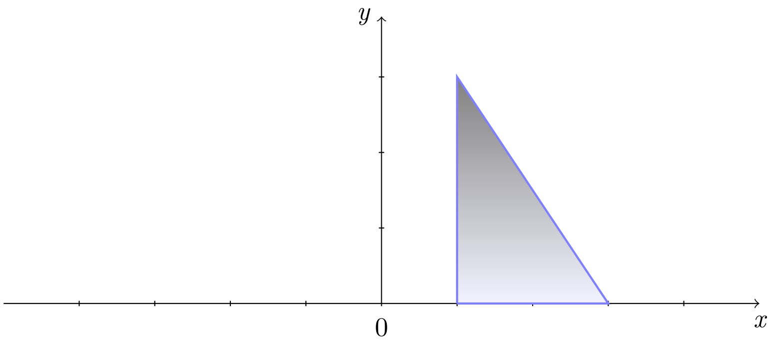
由 $\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{x}_1,\, \boldsymbol{x}_2\right) = \left(\lambda_1 \boldsymbol{x}_1,\, \lambda_2 \boldsymbol{x}_2\right) = \left(\boldsymbol{x}_1,\, \boldsymbol{x}_2\right) \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}$,

求出矩阵 $\boldsymbol{A}$?

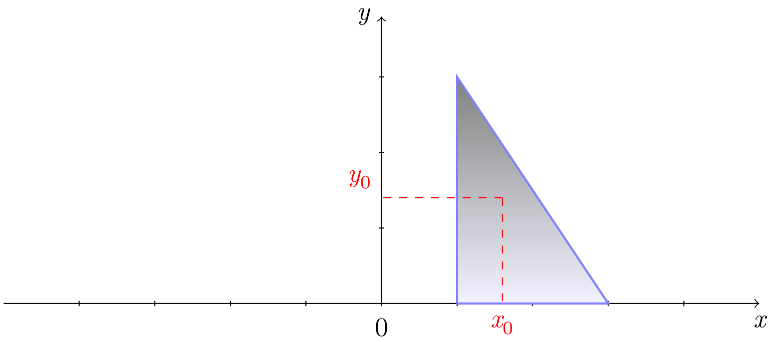
特征值 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = (\lambda_1 \boldsymbol{x}_1, \lambda_2 \boldsymbol{x}_2) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}$，得

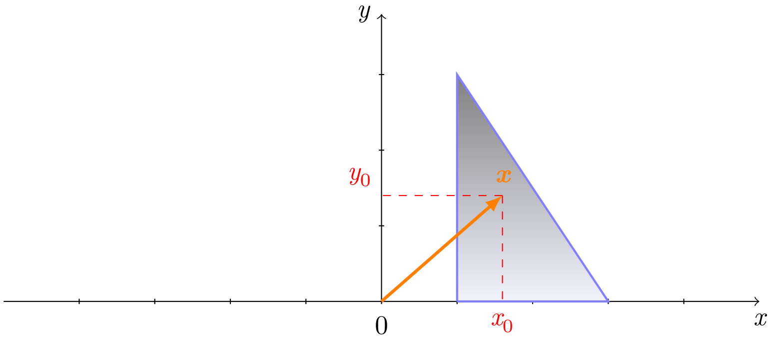
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$



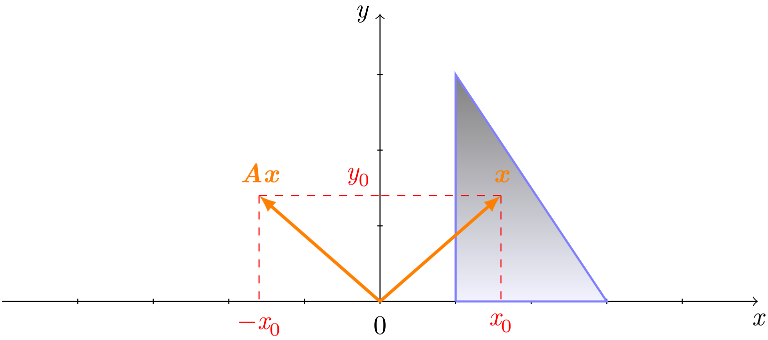
y
0
x

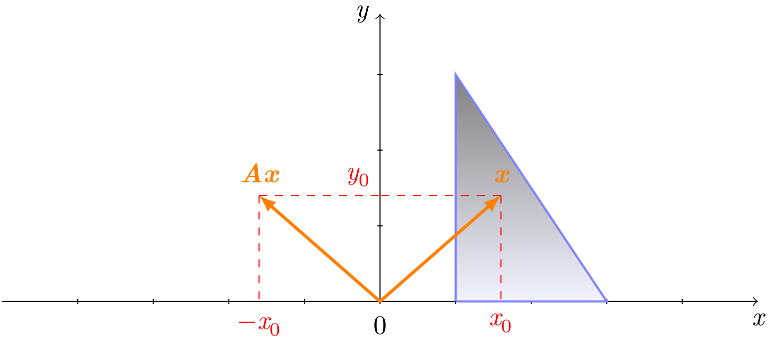


y
x
0
y_0
x_0

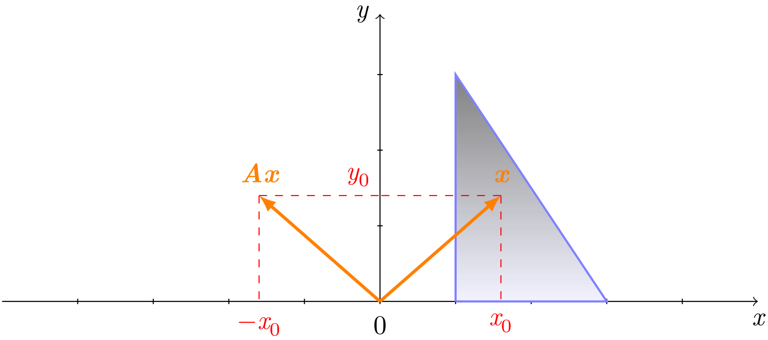


y
y_0
$\boldsymbol{x}$
0
x_0
x

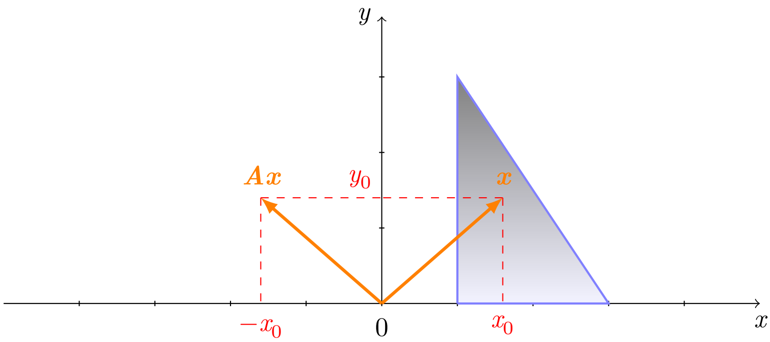

y
Ax
y_0
x
$-x_0$
0
x_0
x



对任意的 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$,

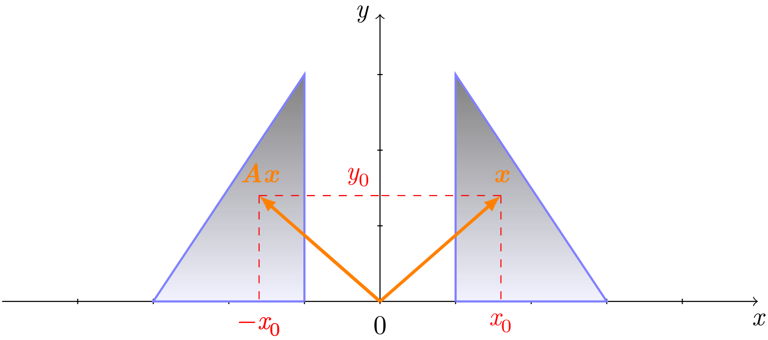


对任意的 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$，要使 $\boldsymbol{Ax} = \begin{pmatrix} -x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$，



对任意的 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$，要使 $\boldsymbol{Ax} = \begin{pmatrix} -x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$，可以取

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

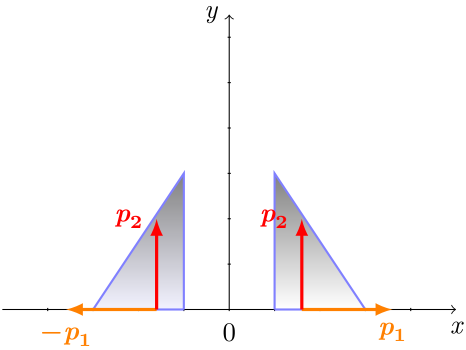


对任意的 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$，要使 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$，可以取

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

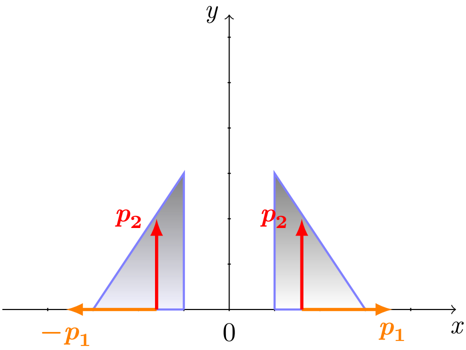
镜面反射矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



镜面反射矩阵

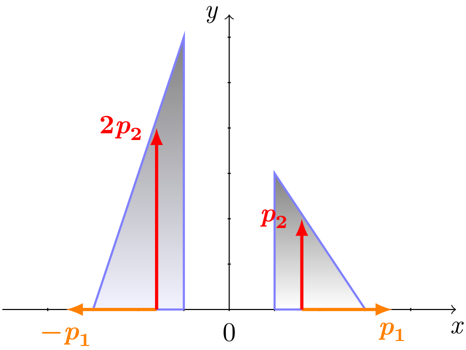
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



问题: 翻转, 且纵向拉伸 2 倍, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ =?

镜面反射矩阵

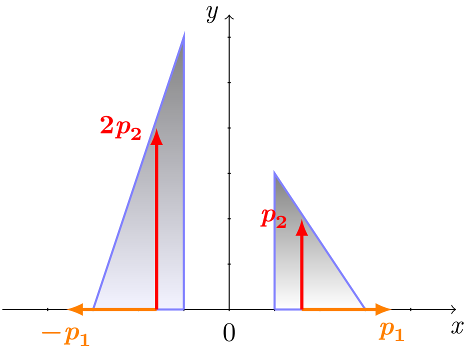
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



问题: 翻转, 且纵向拉伸 2 倍, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ =?

镜面反射矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

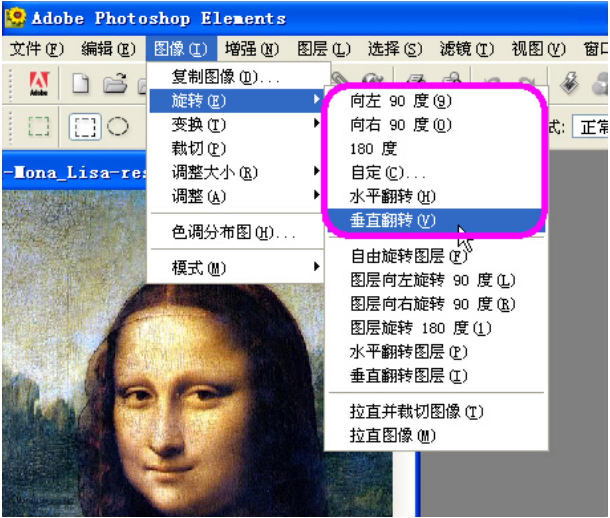


问题: 翻转, 且纵向拉伸 2 倍, 矩阵 A =?

答案:

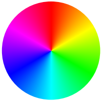
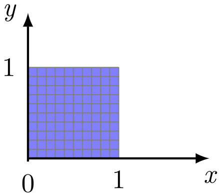
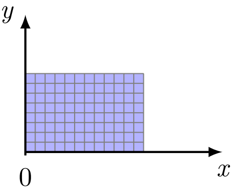
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

课后思考

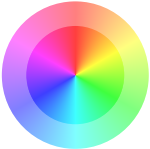
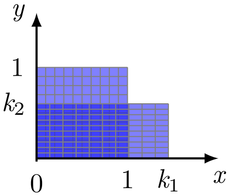
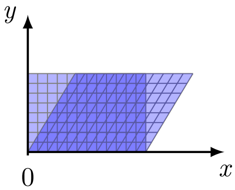


Adobe Photoshop Elements
文件(F) 编辑(E) 图像(I) 增强(N) 图层(L) 选择(S) 滤镜(T) 视图(V) 窗口
-Mona_Lisa-re
复制图像(D)...
旋转(E)
变换(T)
裁切(P)
调整大小(R)
调整(A)
色调分布图(H)...
模式(M)
向左 90 度(9)
向右 90 度(0)
180 度
自定(C)...
水平翻转(H)
垂直翻转(V)
自由旋转图层(F)
图层向左旋转 90 度(L)
图层向右旋转 90 度(R)
图层旋转 180 度(1)
水平翻转图层(P)
垂直翻转图层(I)
拉直并裁切图像(T)
拉直图像(M)

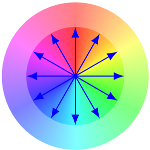
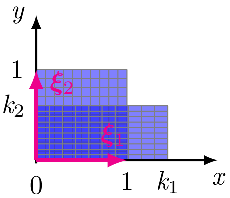
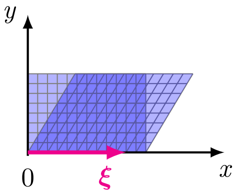
几种常见的图形变换矩阵

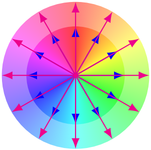
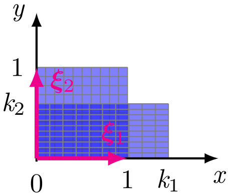
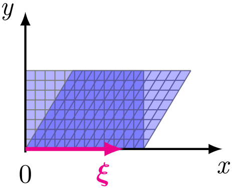
	放缩 scaling	变形 unequal scaling	horizontal shear
图例			
矩阵	$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
特征值	$\lambda_1 = \lambda_2 = k$	$\lambda_1 = k_1, \lambda_2 = k_2$	$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$
特征向量	任意非零向量	$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

几种常见的图形变换矩阵

	放缩 scaling	变形 unequal scaling	horizontal shear
图例			
矩阵	$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
特征值	$\lambda_1 = \lambda_2 = k$	$\lambda_1 = k_1, \lambda_2 = k_2$	$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$
特征向量	任意非零向量	$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

几种常见的图形变换矩阵

	放缩 scaling	变形 unequal scaling	horizontal shear
图例			
矩阵	$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
特征值	$\lambda_1 = \lambda_2 = k$	$\lambda_1 = k_1, \lambda_2 = k_2$	$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$
特征向量	任意非零向量	$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

<table>
<tr><th></th><th>放缩 scaling</th><th>变形 unequal scaling</th><th>horizontal shear</th></tr>
<tr><td>图例</td><td></td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>矩阵</td><td>$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$</td><td>$\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$</td><td>$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$</td></tr>
<tr><td>特征值</td><td>$\lambda_1 = \lambda_2 = k$</td><td>$\lambda_1 = k_1, \lambda_2 = k_2$</td><td>$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$</td></tr>
<tr><td>特征向量</td><td>任意非零向量</td><td>$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$</td><td>$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$</td></tr>
</table>

特征值与特征向量

1. 特征值: eigenvalue;
2. 特征向量: eigenvector.

特征值与特征向量

1. 特征值: eigenvalue;
2. 特征向量: eigenvector.

注

- eigen [德语]: 自己的, 特有的.

特征值与特征向量

1. 特征值: eigenvalue;
2. 特征向量: eigenvector.

注

- eigen [德语]: 自己的, 特有的.
- "本征值" 与 "本征向量".

特征值与特征向量

1. 特征值: eigenvalue;
2. 特征向量: eigenvector.

注

- eigen [德语]: 自己的, 特有的.
- “本征值” 与 “本征向量”.

历史

希尔伯特 (David Hilbert, 1862–1943) 于 1904 年首创该词汇.

Outline

1. 矩阵的特征值和特征向量
   - 特征值与特征向量的基本概念
   - 应用举例: Google 财富的秘密
   - 特征值和特征向量的性质
   - 相似矩阵及其性质
2. 矩阵可对角化的条件
3. 实对称矩阵的对角化
4. 习题
5. 总结与复习

应用举例

Google 财富的秘密?

Google

成立	1998 年 9 月 4 日, California, U.S.
创办人	Larry Page, Sergey Brin

应用举例

Google 财富的秘密?

Google

成立	1998 年 9 月 4 日, California, U.S.
创办人	Larry Page, Sergey Brin
营业额	US$ 858 亿 (2016)
净利润	US$ 190 亿 (2016)
总资产	US$ 1304 亿 (2014)

应用举例

Google 财富的秘密?

Google

成立	1998 年 9 月 4 日, California, U.S.
创办人	Larry Page, Sergey Brin
营业额	US$ 858 亿 (2016)
净利润	US$ 190 亿 (2016)
总资产	US$ 1304 亿 (2014)
员工数	59,976 (Q3 2015)

应用举例

Google 财富的秘密?

Google

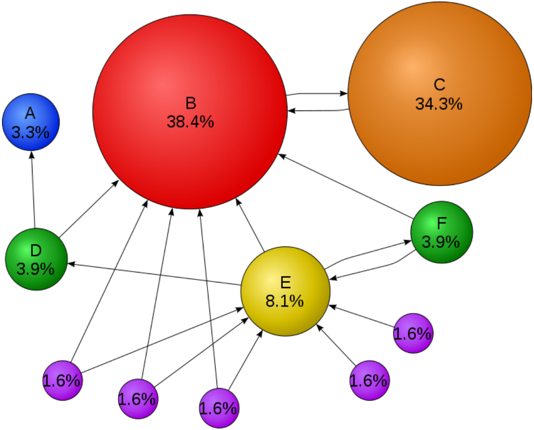
成立	1998 年 9 月 4 日, California, U.S.
创办人	Larry Page, Sergey Brin
营业额	US$ 858 亿 (2016)
净利润	US$ 190 亿 (2016)
总资产	US$ 1304 亿 (2014)
员工数	59,976 (Q3 2015)

☞ PageRank 算法.

图: Larry Page and Sergey Brin in 2003

PageRank 算法的思想

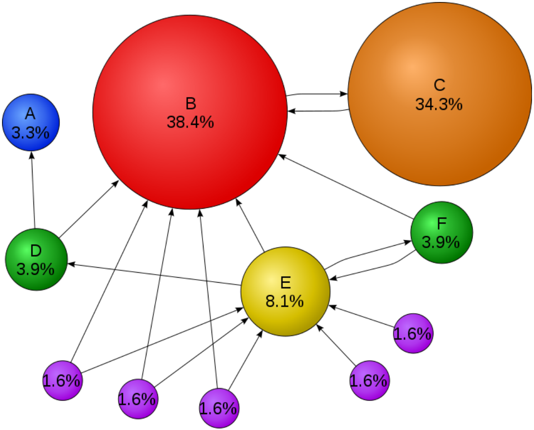
(1) 网页的重要度, 随着指向该网页的链接的增加而提高;



PageRank 算法的思想

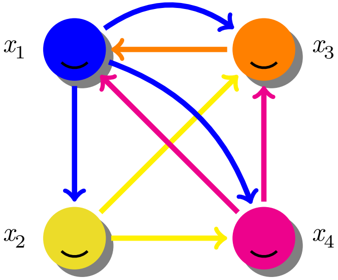
(1) 网页的重要度, 随着指向该网页的链接的增加而提高;

(2) 网页的重要度, 平均分配给被其指向的网页.

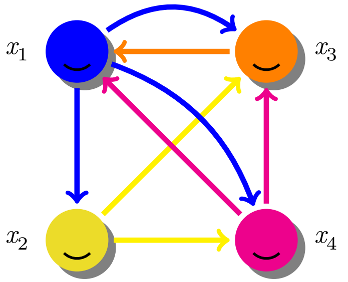


举例


www.page1.com – Windows Int...
I:\HOMEPAGE\pag
收藏夹
www.page1.com
Page1
更多背景知识请参看：
http://www.page2.com
http://www.page3.com
http://www.page4.com
www.page3.com
file:///I:/HOMEPAGE/p
Google
维基百科
黄正华
其他书签
Page3
具体信息可参看：
http://www.page1.com
www.page2.com
file:///I:/HOMEPAGE/p
Google
维基百科
黄正华
其他书签
Page2
这里有一些有用的网页：
http://www.page3.com
http://www.page4.com
www.page4.com
file:///I:/HOMEPAGE/p
Google
维基百科
黄正华
其他书签
Page4
信息来源：
http://www.page1.com
http://www.page3.com

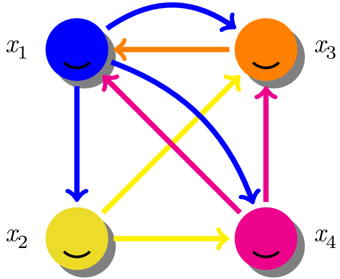


x_1
x_3
x_2
x_4



x_1 x_2 x_3 x_4

$$
\begin{aligned}
x_1 &= & & & &+\frac{x_3}{1} & &+\frac{x_4}{2}\\
x_2 &= \frac{x_1}{3} & & & & & &\\
x_3 &= \frac{x_1}{3} & &+\frac{x_2}{2} & & & &+\frac{x_4}{2}\\
x_4 &= \frac{x_1}{3} & &+\frac{x_2}{2} & & & &
\end{aligned}
$$



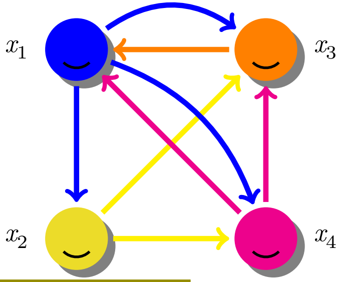
$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4$

$$x_1 = \frac{x_3}{1} + \frac{x_4}{2}$$

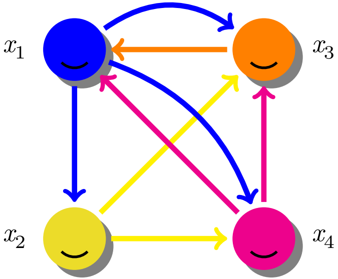
$$x_2 = \frac{x_1}{3}$$

$$x_3 = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_4}{2}$$

$$x_4 = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2}$$

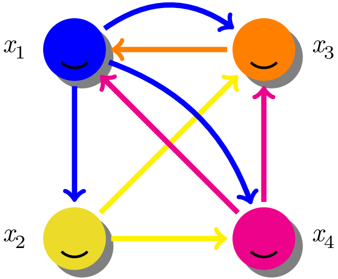


$$
\begin{array}{rcccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\
x_1 = & & & +\dfrac{x_3}{1} & +\dfrac{x_4}{2} \\[2ex]
x_2 = & \dfrac{x_1}{3} & & & \\[2ex]
x_3 = & \dfrac{x_1}{3} & +\dfrac{x_2}{2} & & +\dfrac{x_4}{2} \\[2ex]
x_4 = & \dfrac{x_1}{3} & +\dfrac{x_2}{2} & &
\end{array}
$$

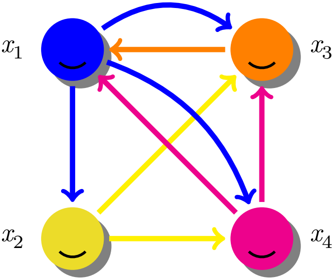


x_1 x_2 x_3 x_4

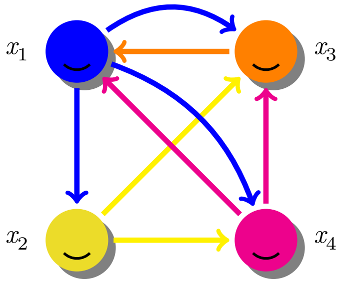
$$
\begin{array}{rcllll}
x_1 & = & & & +\dfrac{x_3}{1} & +\dfrac{x_4}{2} \\
x_2 & = & \dfrac{x_1}{3} & & & \\
x_3 & = & \dfrac{x_1}{3} & +\dfrac{x_2}{2} & & +\dfrac{x_4}{2} \\
x_4 & = & \dfrac{x_1}{3} & +\dfrac{x_2}{2} & &
\end{array}
$$



$$
\begin{array}{rcccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\
x_1 = & & & +\dfrac{x_3}{1} & +\dfrac{x_4}{2} \\
x_2 = & \dfrac{x_1}{3} & & & \\
x_3 = & \dfrac{x_1}{3} & +\dfrac{x_2}{2} & & +\dfrac{x_4}{2} \\
x_4 = & \dfrac{x_1}{3} & +\dfrac{x_2}{2} & &
\end{array}
$$



$$
\begin{array}{ccccccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\
x_1 = & & & +\frac{x_3}{1} & +\frac{x_4}{2} \\
x_2 = & \frac{x_1}{3} & & & \\
x_3 = & \frac{x_1}{3} & +\frac{x_2}{2} & & +\frac{x_4}{2} \\
x_4 = & \frac{x_1}{3} & +\frac{x_2}{2} & &
\end{array}
$$

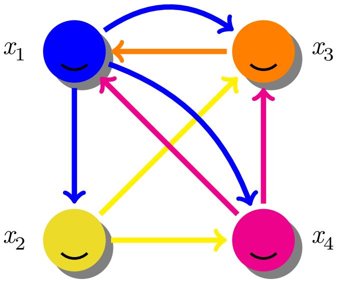


x_1 x_2 x_3 x_4

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{x_3}{1} + \frac{x_4}{2} \\
x_2 &= \frac{x_1}{3} \\
x_3 &= \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_4}{2} \\
x_4 &= \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2}
\end{aligned}
$$

即

$$
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},
$$



x_1 x_2 x_3 x_4

$$x_1 = \frac{x_3}{1} + \frac{x_4}{2}$$

$$x_2 = \frac{x_1}{3}$$

$$x_3 = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_4}{2}$$

$$x_4 = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2}$$

即

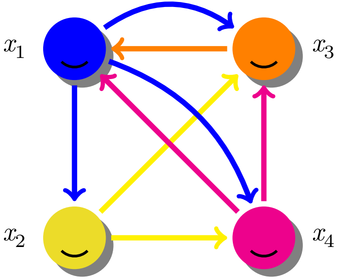
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

记为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x},$$

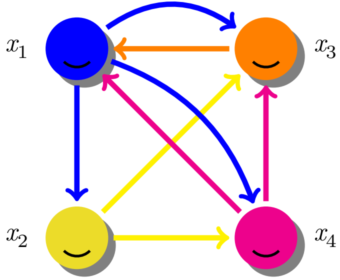
或者

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 1 \cdot \boldsymbol{x}.$$



解得对应的特征向量为

$$k\begin{pmatrix}12\\4\\9\\6\end{pmatrix}, \quad k \neq 0$$

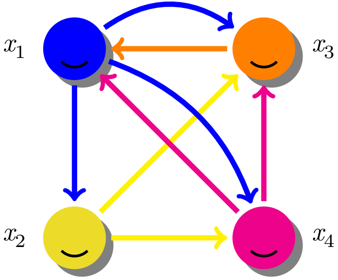


解得对应的特征向量为

$$k\begin{pmatrix}12\\4\\9\\6\end{pmatrix},\quad k\neq 0$$

若约定 $x_1+x_2+x_3+x_4=1$, 则

$$\begin{aligned}x_1&=\frac{12}{31}\approx 38.7\%,\\x_2&=\frac{4}{31}\approx 12.9\%,\\x_3&=\frac{9}{31}\approx 29.0\%,\\x_4&=\frac{6}{31}\approx 19.4\%.\end{aligned}$$



解得对应的特征向量为

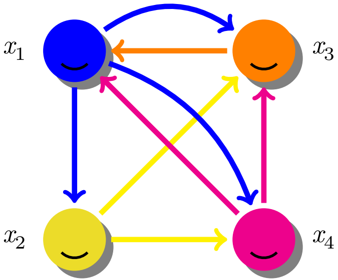
$$k\begin{pmatrix}12\\4\\9\\6\end{pmatrix},\quad k\neq 0$$

若约定 $x_1+x_2+x_3+x_4=1$, 则

$$x_1=\frac{12}{31}\approx 38.7\%,$$
$$x_2=\frac{4}{31}\approx 12.9\%,$$
$$x_3=\frac{9}{31}\approx 29.0\%,$$
$$x_4=\frac{6}{31}\approx 19.4\%.$$

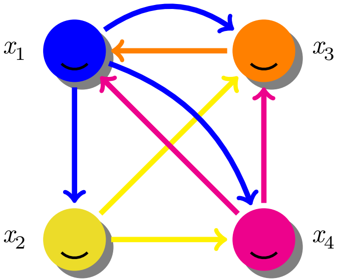
➤ 哪个网页最重要?

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的直接求法



$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的直接求法

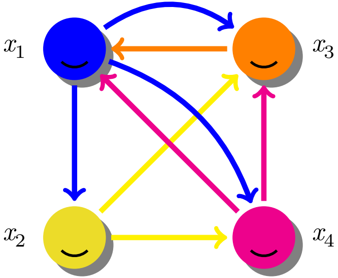


$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

邻接关系矩阵

$$M_R = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{array}\right) \end{array}.$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的直接求法

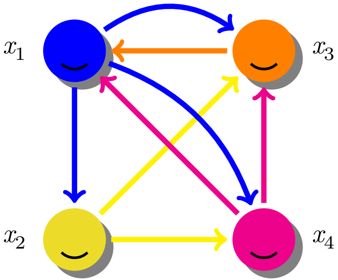


$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

邻接关系矩阵

$$M_R = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \boxed{1} & & & \\ \boxed{1} & & & \\ \boxed{1} & & & \end{pmatrix} \end{array}.$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的直接求法

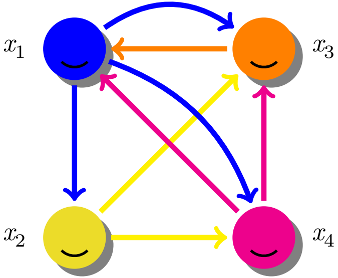


$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

邻接关系矩阵

$$M_R = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & & \end{pmatrix} \end{array}.$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的直接求法

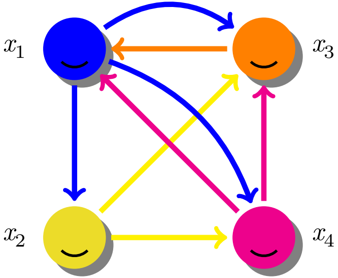


邻接关系矩阵

$$M_R = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的直接求法



$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

邻接关系矩阵

$$M_R = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

☞ 矩阵 $\boldsymbol{A}$: 修正的邻接关系矩阵.

参考

参考

Google ← PageRank

Google ← PageRank ← 矩阵特征值

参考

Google ← PageRank ← 矩阵特征值

☞

THE $25,000,000,000* EIGENVECTOR
THE LINEAR ALGEBRA BEHIND GOOGLE

KURT BRYAN† AND TANYA LEISE‡

Abstract. Google's success derives in large part from its PageRank algorithm, which ranks the importance of webpages according to an eigenvector of a weighted link matrix. Analysis of the PageRank formula provides a wonderful applied topic for a linear algebra course. Instructors may assign this article as a project to more advanced students, or spend one or two lectures presenting the material with assigned homework from the exercises. This material also complements the discussion of Markov chains in matrix algebra. Maple and Mathematica files supporting this material can be found at www.rose-hulman.edu/∼bryan.

桥为什么垮塌?

图: Tacoma 桥, 美国, 1940 年

桥为什么垮塌?

- 自然频率 (natural frequency)

  桥的自然频率

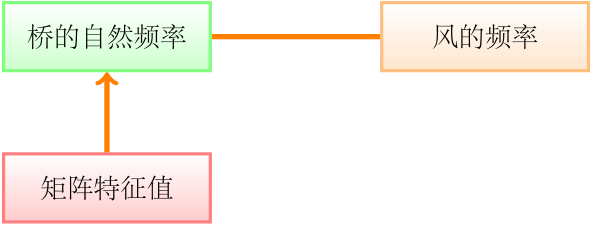
桥为什么垮塌?

- 自然频率 (natural frequency)

桥的自然频率 —— 风的频率

桥为什么垮塌?

- 自然频率 (natural frequency)



玻璃杯的频率 v.s. 声波的频率

Outline

1. 矩阵的特征值和特征向量
   - 特征值与特征向量的基本概念
   - 应用举例: Google 财富的秘密
   - 特征值和特征向量的性质
   - 相似矩阵及其性质
2. 矩阵可对角化的条件
3. 实对称矩阵的对角化
4. 习题
5. 总结与复习

定理 1.6

若 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_0 的特征向量, 则 $k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_0 的特征向量 (其中 k_1, k_2 是任意常数, 但是 $k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 \neq \boldsymbol{0}$).

定理 1.6

若 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_0 的特征向量，则 $k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_0 的特征向量 (其中 k_1, k_2 是任意常数，但是 $k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 \neq \boldsymbol{0}$).

证: 由于 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 是齐次线性方程组

$$(\lambda_0\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

的解,

定理 1.6

若 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_0 的特征向量, 则 $k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_0 的特征向量 (其中 k_1, k_2 是任意常数, 但是 $k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 \neq \mathbf{0}$).

证: 由于 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 是齐次线性方程组

$$(\lambda_0\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

的解, 因此 $k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2$ 也是上式的解,

定理 1.6

若 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_0 的特征向量, 则 $k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_0 的特征向量 (其中 k_1, k_2 是任意常数, 但是 $k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 \neq \mathbf{0}$).

证: 由于 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 是齐次线性方程组

$$(\lambda_0 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

的解, 因此 $k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2$ 也是上式的解, 故当 $k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 \neq \mathbf{0}$ 时, 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_0 的特征向量. □

☞ 一个特征向量不能属于不同的特征值.

☞ 一个特征向量不能属于不同的特征值.

事实上, 如果 $\boldsymbol{x}$ 同时是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_1, λ_2 $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ 的特征向量,

☞ 一个特征向量不能属于不同的特征值.

事实上, 如果 $\boldsymbol{x}$ 同时是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_1, λ_2 $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ 的特征向量, 即有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{x}, \qquad \text{且} \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda_2 \boldsymbol{x},$$

☞ 一个特征向量不能属于不同的特征值.

事实上, 如果 $\boldsymbol{x}$ 同时是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_1, λ_2 $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ 的特征向量, 即有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{x}, \qquad \text{且} \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda_2 \boldsymbol{x},$$

则

$$\lambda_1 \boldsymbol{x} = \lambda_2 \boldsymbol{x}$$

☞ 一个特征向量不能属于不同的特征值.

事实上, 如果 $\boldsymbol{x}$ 同时是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_1, λ_2 $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ 的特征向量, 即有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{x}, \qquad \text{且} \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda_2 \boldsymbol{x},$$

则

$$\lambda_1 \boldsymbol{x} = \lambda_2 \boldsymbol{x} \qquad \text{即} \qquad (\lambda_1 - \lambda_2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},$$

☞ 一个特征向量不能属于不同的特征值.

事实上, 如果 $\boldsymbol{x}$ 同时是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_1, λ_2 $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ 的特征向量, 即有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{x}, \qquad \text{且} \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda_2 \boldsymbol{x},$$

则

$$\lambda_1 \boldsymbol{x} = \lambda_2 \boldsymbol{x} \qquad \text{即} \qquad (\lambda_1 - \lambda_2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},$$

由于 $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, 故 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$,

☞ 一个特征向量不能属于不同的特征值.

事实上, 如果 $\boldsymbol{x}$ 同时是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_1, λ_2 $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ 的特征向量, 即有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{x}, \qquad \text{且} \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda_2 \boldsymbol{x},$$

则

$$\lambda_1 \boldsymbol{x} = \lambda_2 \boldsymbol{x} \qquad \text{即} \qquad (\lambda_1 - \lambda_2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},$$

由于 $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, 故 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 这与特征向量 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ 矛盾.

定理 1.7 (重要性质☆)

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值. 证明重要性质:

- $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$;

定理 1.7 (重要性质☆)

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值. 证明重要性质:

- $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$;
- $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = \left|\boldsymbol{A}\right|$.

定理 1.7 (重要性质☆)

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值. 证明重要性质:

- $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$;
- $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = \left|\boldsymbol{A}\right|$.

其中 $a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ 称为矩阵的迹, 记为 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$.

定理 1.7 (重要性质☆)

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值. 证明重要性质:

- $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$;
- $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = \left|\boldsymbol{A}\right|$.

其中 $a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ 称为矩阵的迹, 记为 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$.

证: 在特征多项式

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

的展开式中, 有一项是主对角线上元素的连乘积:

$$(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \cdots (\lambda - a_{nn}),$$

展开式中的其余各项, 至多包含 $n-2$ 个主对角线上的元素, 它们对 λ 的次数最多是 $n-2$.

故特征多项式中含 λ 的 n 次与 $n-1$ 次的项只能在主对角线上元素的连乘积中出现, 它们是

$$\lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1}.$$

故特征多项式中含 λ 的 n 次与 $n-1$ 次的项只能在主对角线上元素的连乘积中出现, 它们是

$$\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}.$$

因此, 如果只写出特征多项式展开式的前两项与常数项, 则有

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|\boldsymbol{A}|.$$

故特征多项式中含 λ 的 n 次与 $n-1$ 次的项只能在主对角线上元素的连乘积中出现, 它们是

$$\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}.$$

因此, 如果只写出特征多项式展开式的前两项与常数项, 则有

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|\boldsymbol{A}|.$$

令 $|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$, 则

$$\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|\boldsymbol{A}|=0. \tag{5}$$

故特征多项式中含 λ 的 n 次与 $n-1$ 次的项只能在主对角线上元素的连乘积中出现, 它们是

$$\lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1}.$$

因此, 如果只写出特征多项式展开式的前两项与常数项, 则有

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n|\boldsymbol{A}|.$$

令 $|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$, 则

$$\lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n|\boldsymbol{A}| = 0. \tag{5}$$

另一方面, 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是特征方程的根, 则

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n) = 0, \tag{6}$$

故特征多项式中含 λ 的 n 次与 $n-1$ 次的项只能在主对角线上元素的连乘积中出现, 它们是

$$\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}.$$

因此, 如果只写出特征多项式展开式的前两项与常数项, 则有

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|\boldsymbol{A}|.$$

令 $|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$, 则

$$\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|\boldsymbol{A}|=0. \tag{5}$$

另一方面, 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是特征方程的根, 则

$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)=0, \tag{6}$$

如果只写出 (6) 式前两项与常数项, 则有

$$\lambda^n-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=0. \tag{7}$$

故特征多项式中含 λ 的 n 次与 $n-1$ 次的项只能在主对角线上元素的连乘积中出现, 它们是

$$\lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1}.$$

因此, 如果只写出特征多项式展开式的前两项与常数项, 则有

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n|\boldsymbol{A}|.$$

令 $|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$, 则

$$\lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n|\boldsymbol{A}| = 0. \tag{5}$$

另一方面, 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是特征方程的根, 则

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n) = 0, \tag{6}$$

如果只写出 (6) 式前两项与常数项, 则有

$$\lambda^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = 0. \tag{7}$$

比照 (7) 式与 (5) 式, 得证

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}; \qquad \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = \big|\boldsymbol{A}\big|.$$

定理 1.8 (☒)

若 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ 的特征向量, 则

(i) $k\lambda$ 是 $k\boldsymbol{A}$ 的特征值 (k 是任意常数);

定理 1.8 (☒)

若 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ 的特征向量, 则

(i) $k\lambda$ 是 $k\boldsymbol{A}$ 的特征值 (k 是任意常数);

(ii) λ^m 是 $\boldsymbol{A}^m$ 的特征值 (m 是正整数);

定理 1.8 (⊠)

若 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ 的特征向量, 则

(i) $k\lambda$ 是 $k\boldsymbol{A}$ 的特征值 (k 是任意常数);

(ii) λ^m 是 $\boldsymbol{A}^m$ 的特征值 (m 是正整数);

(iii) 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时, λ^{-1} 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值;

定理 1.8 (⊠)

若 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ 的特征向量, 则

(i) $k\lambda$ 是 $k\boldsymbol{A}$ 的特征值 (k 是任意常数);

(ii) λ^m 是 $\boldsymbol{A}^m$ 的特征值 (m 是正整数);

(iii) 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时, λ^{-1} 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值;

(iv) 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时, $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值.

定理 1.8 (⊠)

若 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ 的特征向量, 则

(i) $k\lambda$ 是 $k\boldsymbol{A}$ 的特征值 (k 是任意常数);

(ii) λ^m 是 $\boldsymbol{A}^m$ 的特征值 (m 是正整数);

(iii) 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时, λ^{-1} 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值;

(iv) 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时, $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值.

证: (i) 已知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$,

定理 1.8 (☒)

若 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ 的特征向量, 则

(i) $k\lambda$ 是 $k\boldsymbol{A}$ 的特征值 (k 是任意常数);

(ii) λ^m 是 $\boldsymbol{A}^m$ 的特征值 (m 是正整数);

(iii) 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时, λ^{-1} 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值;

(iv) 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时, $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值.

证: (i) 已知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, 则 $\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{x}) = \lambda(k\boldsymbol{x})$.

定理 1.8 (☒)

若 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ 的特征向量, 则

(i) $k\lambda$ 是 $k\boldsymbol{A}$ 的特征值 (k 是任意常数);

(ii) λ^m 是 $\boldsymbol{A}^m$ 的特征值 (m 是正整数);

(iii) 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时, λ^{-1} 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值;

(iv) 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时, $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值.

证: (i) 已知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, 则 $\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{x}) = \lambda(k\boldsymbol{x})$. 故 $k\lambda$ 是 $k\boldsymbol{A}$ 的特征值 (对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$).

定理 1.8 (☒)

若 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ 的特征向量, 则

(i) $k\lambda$ 是 $k\boldsymbol{A}$ 的特征值 (k 是任意常数);

(ii) λ^m 是 $\boldsymbol{A}^m$ 的特征值 (m 是正整数);

(iii) 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时, λ^{-1} 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值;

(iv) 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时, $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值.

证: (i) 已知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, 则 $\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{x}) = \lambda(k\boldsymbol{x})$. 故 $k\lambda$ 是 $k\boldsymbol{A}$ 的特征值 (对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$).

(ii) 在 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ 两端同时左乘以矩阵 $\boldsymbol{A}$, 得

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{x})$$

定理 1.8 (☒)

若 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ 的特征向量, 则

(i) $k\lambda$ 是 $k\boldsymbol{A}$ 的特征值 (k 是任意常数);

(ii) λ^m 是 $\boldsymbol{A}^m$ 的特征值 (m 是正整数);

(iii) 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时, λ^{-1} 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值;

(iv) 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时, $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值.

证: (i) 已知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, 则 $\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{x}) = \lambda(k\boldsymbol{x})$. 故 $k\lambda$ 是 $k\boldsymbol{A}$ 的特征值 (对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$).

(ii) 在 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ 两端同时左乘以矩阵 $\boldsymbol{A}$, 得

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda^2\boldsymbol{x}. \tag{8}$$

定理 1.8 (☒)

若 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ 的特征向量, 则

(i) $k\lambda$ 是 $k\boldsymbol{A}$ 的特征值 (k 是任意常数);

(ii) λ^m 是 $\boldsymbol{A}^m$ 的特征值 (m 是正整数);

(iii) 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时, λ^{-1} 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值;

(iv) 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时, $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值.

证: (i) 已知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, 则 $\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{x}) = \lambda(k\boldsymbol{x})$. 故 $k\lambda$ 是 $k\boldsymbol{A}$ 的特征值 (对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$).

(ii) 在 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ 两端同时左乘以矩阵 $\boldsymbol{A}$, 得

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda^2\boldsymbol{x}. \tag{8}$$

所以 λ^2 是方阵 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征值.

定理 1.8 (☒)

若 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ 的特征向量, 则

(i) $k\lambda$ 是 $k\boldsymbol{A}$ 的特征值 (k 是任意常数);

(ii) λ^m 是 $\boldsymbol{A}^m$ 的特征值 (m 是正整数);

(iii) 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时, λ^{-1} 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值;

(iv) 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时, $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值.

证: (i) 已知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, 则 $\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{x}) = \lambda(k\boldsymbol{x})$. 故 $k\lambda$ 是 $k\boldsymbol{A}$ 的特征值 (对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$).

(ii) 在 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ 两端同时左乘以矩阵 $\boldsymbol{A}$, 得

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda^2\boldsymbol{x}. \tag{8}$$

所以 λ^2 是方阵 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征值. 重复以上步骤可得

$$\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{x} = \lambda^m\boldsymbol{x},$$

故 λ^m 是 $\boldsymbol{A}^m$ 的特征值 (对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$).

(iii) 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时, 由 $|\boldsymbol{A}| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$, 知 $\lambda \neq 0$.

(iii) 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时, 由 $|\boldsymbol{A}| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$, 知 $\lambda \neq 0$. 在 $\boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{x}$ 两端同时左乘以矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 得

$$\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x},$$

(iii) 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时, 由 $|\boldsymbol{A}| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$, 知 $\lambda \neq 0$. 在 $\boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{x}$ 两端同时左乘以矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 得

$$\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x},$$

故

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x} = \lambda^{-1}\boldsymbol{x},$$

(iii) 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时, 由 $|\boldsymbol{A}| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$, 知 $\lambda \neq 0$. 在 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ 两端同时左乘以矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 得

$$\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x},$$

故

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x} = \lambda^{-1}\boldsymbol{x},$$

得证 λ^{-1} 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值 (对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$).

(iii) 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时, 由 $|\boldsymbol{A}| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$, 知 $\lambda \neq 0$. 在 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ 两端同时左乘以矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 得

$$\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x},$$

故

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x} = \lambda^{-1}\boldsymbol{x},$$

得证 λ^{-1} 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值 (对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$).

结论☆

设 λ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则

$$a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_m\lambda^m$$

是

$$a_0\boldsymbol{I} + a_1\boldsymbol{A} + \cdots + a_m\boldsymbol{A}^m$$

的特征值.

(iv) 因 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$, 由 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 得

$$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}.$$

(iv) 因 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$, 由 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 得

$$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}.$$

从而

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}$$

(iv) 因 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$, 由 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 得

$$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}.$$

从而

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{A}|\lambda^{-1}\boldsymbol{x}.$$

(iv) 因 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$, 由 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 得

$$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}.$$

从而

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{A}|\lambda^{-1}\boldsymbol{x}.$$

即

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}\boldsymbol{x}.$$

(iv) 因 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$, 由 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 得

$$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}.$$

从而

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{A}|\lambda^{-1}\boldsymbol{x}.$$

即

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}\boldsymbol{x}.$$

得证 $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值 (对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$). □

例 1.9

已知 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1, 2, 3. 求行列式 $|\boldsymbol{A}^3-5\boldsymbol{A}^2+7\boldsymbol{A}|$ 的值.

例 1.9

已知 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1, 2, 3. 求行列式 $|\boldsymbol{A}^3 - 5\boldsymbol{A}^2 + 7\boldsymbol{A}|$ 的值.

分析: 使用结论

1. $|\boldsymbol{A}| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.
2. $\varphi(\lambda)$ 是 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的特征值, 若 λ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

例 1.9

已知 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1, 2, 3. 求行列式 $|\boldsymbol{A}^3 - 5\boldsymbol{A}^2 + 7\boldsymbol{A}|$ 的值.

分析: 使用结论

1. $|\boldsymbol{A}| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.
2. $\varphi(\lambda)$ 是 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的特征值, 若 λ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

例 1.9

已知 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1, 2, 3. 求行列式 $|\boldsymbol{A}^3 - 5\boldsymbol{A}^2 + 7\boldsymbol{A}|$ 的值.

分析: 使用结论

1. $|\boldsymbol{A}| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$.
2. $\varphi(\lambda)$ 是 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的特征值, 若 λ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

解: 设 λ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $\varphi(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 7\lambda$ 是矩阵 $\varphi(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^3 - 5\boldsymbol{A}^2 + 7\boldsymbol{A}$ 的特征值.

例 1.9

已知 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1, 2, 3. 求行列式 $|\boldsymbol{A}^3 - 5\boldsymbol{A}^2 + 7\boldsymbol{A}|$ 的值.

分析: 使用结论

1. $|\boldsymbol{A}| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.
2. $\varphi(\lambda)$ 是 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的特征值, 若 λ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

解: 设 λ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $\varphi(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 7\lambda$ 是矩阵 $\varphi(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^3 - 5\boldsymbol{A}^2 + 7\boldsymbol{A}$ 的特征值.

又

$$\varphi(1) = 3, \quad \varphi(2) = 2, \quad \varphi(3) = 3,$$

例 1.9

已知 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1, 2, 3. 求行列式 $|\boldsymbol{A}^3 - 5\boldsymbol{A}^2 + 7\boldsymbol{A}|$ 的值.

分析: 使用结论

1. $|\boldsymbol{A}| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.
2. $\varphi(\lambda)$ 是 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的特征值, 若 λ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

解: 设 λ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $\varphi(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 7\lambda$ 是矩阵 $\varphi(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^3 - 5\boldsymbol{A}^2 + 7\boldsymbol{A}$ 的特征值.

又

$$\varphi(1) = 3, \quad \varphi(2) = 2, \quad \varphi(3) = 3,$$

知 3 阶方阵 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的全部特征值为 3, 2, 3.

例 1.9

已知 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1, 2, 3. 求行列式 $|\boldsymbol{A}^3-5\boldsymbol{A}^2+7\boldsymbol{A}|$ 的值.

分析: 使用结论

1. $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.
2. $\varphi(\lambda)$ 是 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的特征值, 若 λ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

解: 设 λ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $\varphi(\lambda)=\lambda^3-5\lambda^2+7\lambda$ 是矩阵 $\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^3-5\boldsymbol{A}^2+7\boldsymbol{A}$ 的特征值.

又

$$\varphi(1)=3,\quad \varphi(2)=2,\quad \varphi(3)=3,$$

知 3 阶方阵 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的全部特征值为 3, 2, 3. 所以

$$|\boldsymbol{A}^3-5\boldsymbol{A}^2+7\boldsymbol{A}|=3\times 2\times 3=18. \quad \square$$

例 1.10 (经典题型 ⊠)

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1, −1, 2, 求 $\boldsymbol{A}^* + 3\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}$ 的特征值.

例 1.10 (经典题型 ⊠)

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1, −1, 2, 求 $\boldsymbol{A}^* + 3\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}$ 的特征值.

解: 由题设知 $|\boldsymbol{A}| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -2$,

例 1.10 (经典题型 ⊠)

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1, -1, 2, 求 $\boldsymbol{A}^* + 3\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}$ 的特征值.

解: 由题设知 $|\boldsymbol{A}| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -2$, 故 $\boldsymbol{A}$ 可逆,

例 1.10 (经典题型 ☒)

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1, −1, 2, 求 $\boldsymbol{A}^* + 3\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}$ 的特征值.

解: 由题设知 $|\boldsymbol{A}| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -2$, 故 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda} = \dfrac{-2}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值.

例 1.10 (经典题型 ⊠)

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1, −1, 2, 求 $\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}$ 的特征值.

解: 由题设知 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-2$, 故 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}=\dfrac{-2}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值. 从而, 若 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则

$$\frac{-2}{\lambda}+3\lambda-2$$

是 $\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}$ 的特征值.

例 1.10 (经典题型 ⊠)

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1, -1, 2$, 求 $\boldsymbol{A}^* + 3\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}$ 的特征值.

解: 由题设知 $|\boldsymbol{A}| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -2$, 故 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda} = \dfrac{-2}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值. 从而, 若 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则

$$\frac{-2}{\lambda} + 3\lambda - 2$$

是 $\boldsymbol{A}^* + 3\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}$ 的特征值.

记

$$\varphi(\lambda) = \frac{-2}{\lambda} + 3\lambda - 2,$$

算得 $\boldsymbol{A}^* + 3\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}$ 的特征值为

$$\varphi(1) = -1, \quad \varphi(-1) = -3, \quad \varphi(2) = 3.$$

例 1.11

设 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$. 证明 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能取 1 或 2.

例 1.11

设 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$. 证明 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能取 1 或 2.

解: 设 λ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $\lambda^2-3\lambda+2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}$ 的特征值.

例 1.11

设 $\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}$. 证明 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能取 1 或 2.

解: 设 λ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $\lambda^2 - 3\lambda + 2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{I}$ 的特征值. 则存在非零向量 $\boldsymbol{x}$ 使得

$$\left(\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{x} = \left(\lambda^2 - 3\lambda + 2\right)\boldsymbol{x}, \tag{9}$$

例 1.11

设 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$. 证明 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能取 1 或 2.

解: 设 λ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $\lambda^2-3\lambda+2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}$ 的特征值. 则存在非零向量 $\boldsymbol{x}$ 使得

$$\left(\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{x}=\left(\lambda^2-3\lambda+2\right)\boldsymbol{x}, \tag{9}$$

将 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$ 带入上式得

$$\left(\lambda^2-3\lambda+2\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}. \tag{10}$$

例 1.11

设 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$. 证明 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能取 1 或 2.

解: 设 λ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $\lambda^2-3\lambda+2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}$ 的特征值. 则存在非零向量 $\boldsymbol{x}$ 使得

$$\left(\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{x}=\left(\lambda^2-3\lambda+2\right)\boldsymbol{x}, \tag{9}$$

将 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$ 带入上式得

$$\left(\lambda^2-3\lambda+2\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}. \tag{10}$$

而特征向量 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 所以只能有

$$\lambda^2-3\lambda+2=0.$$

例 1.11

设 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$. 证明 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能取 1 或 2.

解: 设 λ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $\lambda^2-3\lambda+2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}$ 的特征值. 则存在非零向量 $\boldsymbol{x}$ 使得

$$\left(\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{x}=\left(\lambda^2-3\lambda+2\right)\boldsymbol{x}, \tag{9}$$

将 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$ 带入上式得

$$\left(\lambda^2-3\lambda+2\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}. \tag{10}$$

而特征向量 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 所以只能有

$$\lambda^2-3\lambda+2=0.$$

解得 $\lambda=1$ 或 2.

例 1.11

设 $\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}$. 证明 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能取 1 或 2.

解: 设 λ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $\lambda^2 - 3\lambda + 2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{I}$ 的特征值. 则存在非零向量 $\boldsymbol{x}$ 使得

$$\left(\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{x} = \left(\lambda^2 - 3\lambda + 2\right)\boldsymbol{x}, \tag{9}$$

将 $\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}$ 带入上式得

$$\left(\lambda^2 - 3\lambda + 2\right)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}. \tag{10}$$

而特征向量 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, 所以只能有

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

解得 $\lambda = 1$ 或 2.

得证 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能取 1 或 2. $\square$

一个有缺陷的证明:

由 $\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}$, 得 $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}) = \boldsymbol{0}$.

一个有缺陷的证明:

由 $\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}$, 得 $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}) = \boldsymbol{0}$. 两边取行列式得

$$|(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})| = |\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}|\,|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}| = 0.$$

一个有缺陷的证明:

由 $\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}$, 得 $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}) = \boldsymbol{0}$. 两边取行列式得

$$|(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})| = |\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}|\,|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}| = 0.$$

所以

$$|\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}| = 0 \text{ 或 } |\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}| = 0,$$

一个有缺陷的证明:

由 $\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}$, 得 $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}) = \boldsymbol{0}$. 两边取行列式得

$$|(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})| = |\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}|\,|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}| = 0.$$

所以

$$|\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}| = 0 \text{ 或 } |\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}| = 0,$$

则 1 或 2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

一个有缺陷的证明:

由 $\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{I} = \mathbf{0}$, 得 $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}) = \mathbf{0}$. 两边取行列式得

$$|(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})| = |\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}|\,|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}| = 0.$$

所以

$$|\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}| = 0 \text{ 或 } |\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}| = 0,$$

则 1 或 2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

但是这样只是说明了 1 或 2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是否还有别的特征值没有得到证明, 这就不能下结论说 “$\boldsymbol{A}$ 的特征值只能取 1 或 2”.

定理 1.12

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的特征值相同.

定理 1.12

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的特征值相同.

证: 因为

$$(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=(\lambda \boldsymbol{I})^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$

定理 1.12

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的特征值相同.

证: 因为

$$(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=(\lambda \boldsymbol{I})^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},$$

定理 1.12

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的特征值相同.

证: 因为

$$(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=(\lambda \boldsymbol{I})^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},$$

所以

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|,$$

定理 1.12

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的特征值相同.

证: 因为

$$(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{\mathrm{T}} = (\lambda \boldsymbol{I})^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},$$

所以

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = |\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|,$$

因此, $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的特征值相同. □

例 1.13

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量;

例 1.13

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量;

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

例 1.13

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量;

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

解: (i) 由

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+2),$$

得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=4$.

当 $\lambda_1 = -2$ 时, 由 $(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 即

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系为

$$\boldsymbol{x}_1 = (1, 2, 2)^{\mathrm{T}},$$

当 $\lambda_1=-2$ 时, 由 $(\lambda_1 \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 即

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系为

$$\boldsymbol{x}_1=(1,2,2)^{\mathrm{T}},$$

故 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 $\lambda_1=-2$ 的全部特征向量为

$$k_1(1,2,2)^{\mathrm{T}},$$

其中 k_1 为不为零的任意常数.

当 $\lambda_2 = 1$ 时, 由 $(\lambda_2 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 即

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系为

$$\boldsymbol{x}_2 = (2, 1, -2)^{\mathrm{T}},$$

当 $\lambda_2 = 1$ 时, 由 $(\lambda_2 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 即

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系为

$$\boldsymbol{x}_2 = (2, 1, -2)^{\mathrm{T}},$$

故 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 $\lambda_2 = 1$ 的全部特征向量为

$$k_2(2, 1, -2)^{\mathrm{T}},$$

其中 k_2 为不为零的任意常数.

当 $\lambda_3 = 4$ 时, 由 $(\lambda_3 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 即

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系为

$$\boldsymbol{x}_3 = (2, -2, 1)^{\mathrm{T}},$$

当 $\lambda_3 = 4$ 时, 由 $(\lambda_3 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, 即

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系为

$$\boldsymbol{x}_3 = (2, -2, 1)^{\mathrm{T}},$$

故 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 $\lambda_3 = 4$ 的全部特征向量为

$$k_3(2, -2, 1)^{\mathrm{T}},$$

其中 k_3 为不为零的任意常数.

(ii) 由

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{x}_3) &= (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_3) \\ &= (\lambda_1\boldsymbol{x}_1,\ \lambda_2\boldsymbol{x}_2,\ \lambda_3\boldsymbol{x}_3) = (\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{x}_3)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix},\end{aligned}$$

(ii) 由

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{x}_3) &= (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_3) \\
&= (\lambda_1\boldsymbol{x}_1,\ \lambda_2\boldsymbol{x}_2,\ \lambda_3\boldsymbol{x}_3) = (\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{x}_3)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

记

$$
\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{x}_3), \qquad \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix},
$$

(ii) 由

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{x}_3) &= (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_3) \\
&= (\lambda_1\boldsymbol{x}_1,\ \lambda_2\boldsymbol{x}_2,\ \lambda_3\boldsymbol{x}_3) = (\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{x}_3)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

记

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{x}_3), \qquad \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}.$$

又 $|\boldsymbol{P}| = -27 \neq 0$, 故存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

MATLAB 求特征值和特征向量

用命令 eig(A) 可以同时得到特征向量和特征值.

```
>> A=[2,-2, 0;
      -2, 1, -2;
      0,-2, 0]

A =

     2    -2     0
    -2     1    -2
     0    -2     0
```

(a) 录入矩阵 $\boldsymbol{A}$.

```
>> [P,T]=eig(A)

P =

   -0.3333    0.6667   -0.6667
   -0.6667    0.3333    0.6667
   -0.6667   -0.6667   -0.3333


T =

   -2.0000         0         0
         0    1.0000         0
         0         0    4.0000
```

(b) 矩阵 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{T}$ 记录特征向量及其对应的特征值.

```
>> 3*P

ans =

   -1.0000    2.0000   -2.0000
   -2.0000    1.0000    2.0000
   -2.0000   -2.0000   -1.0000

>> P\A*P

ans =

   -2.0000   -0.0000    0.0000
   -0.0000    1.0000   -0.0000
    0.0000    0.0000    4.0000
```

(c) 验证 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{T}$.

Outline

1. 矩阵的特征值和特征向量
   - 特征值与特征向量的基本概念
   - 应用举例: Google 财富的秘密
   - 特征值和特征向量的性质
   - 相似矩阵及其性质
2. 矩阵可对角化的条件
3. 实对称矩阵的对角化
4. 习题
5. 总结与复习

定义 1.14

对于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$, 若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B},$$

就称 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$, 记作 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

定义 1.14

对于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$, 若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B},$$

就称 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$, 记作 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

在同济版教材中, 记号 $\sim$ 表示 “等价”(也就是本教材中的 “相抵”).

定义 1.14

对于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$, 若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B},$$

就称 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$, 记作 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

在同济版教材中, 记号 $\sim$ 表示 "等价"(也就是本教材中的 "相抵"). 矩阵的相似关系也是一种等价关系, 满足以下三条性质:

(i) 反身性: $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{A}$;

(ii) 对称性: 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{A}$;

(iii) 传递性: 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{C}$, 则 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}$.

相似矩阵有以下性质:

(i) 若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{A}^m \sim \boldsymbol{B}^m$ (m 为正整数).

相似矩阵有以下性质:

(i) 若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{A}^m \sim \boldsymbol{B}^m$ (m 为正整数).

(ii) 若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, 则 $f(\boldsymbol{A}) \sim f(\boldsymbol{B})$, 其中

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$$f(\boldsymbol{A}) = a_n \boldsymbol{A}^n + a_{n-1} \boldsymbol{A}^{n-1} + \cdots + a_1 \boldsymbol{A} + a_0 \boldsymbol{I},$$

$$f(\boldsymbol{B}) = a_n \boldsymbol{B}^n + a_{n-1} \boldsymbol{B}^{n-1} + \cdots + a_1 \boldsymbol{B} + a_0 \boldsymbol{I}.$$

相似矩阵有以下性质:

(i) 若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{A}^m \sim \boldsymbol{B}^m$ (m 为正整数).

(ii) 若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, 则 $f(\boldsymbol{A}) \sim f(\boldsymbol{B})$, 其中

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$$f(\boldsymbol{A}) = a_n \boldsymbol{A}^n + a_{n-1} \boldsymbol{A}^{n-1} + \cdots + a_1 \boldsymbol{A} + a_0 \boldsymbol{I},$$

$$f(\boldsymbol{B}) = a_n \boldsymbol{B}^n + a_{n-1} \boldsymbol{B}^{n-1} + \cdots + a_1 \boldsymbol{B} + a_0 \boldsymbol{I}.$$

证: 若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1} \boldsymbol{A} \boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}.$$

于是

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}^m &= (\boldsymbol{P}^{-1} \boldsymbol{A} \boldsymbol{P})(\boldsymbol{P}^{-1} \boldsymbol{A} \boldsymbol{P}) \cdots (\boldsymbol{P}^{-1} \boldsymbol{A} \boldsymbol{P}) \\ &= \boldsymbol{P}^{-1} \boldsymbol{A}^m \boldsymbol{P}, \end{aligned}$$

相似矩阵有以下性质:

(i) 若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{A}^m \sim \boldsymbol{B}^m$ (m 为正整数).

(ii) 若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, 则 $f(\boldsymbol{A}) \sim f(\boldsymbol{B})$, 其中

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \\ f(\boldsymbol{A}) &= a_n \boldsymbol{A}^n + a_{n-1} \boldsymbol{A}^{n-1} + \cdots + a_1 \boldsymbol{A} + a_0 \boldsymbol{I}, \\ f(\boldsymbol{B}) &= a_n \boldsymbol{B}^n + a_{n-1} \boldsymbol{B}^{n-1} + \cdots + a_1 \boldsymbol{B} + a_0 \boldsymbol{I}. \end{aligned}$$

证: 若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1} \boldsymbol{A} \boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}.$$

于是

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}^m &= (\boldsymbol{P}^{-1} \boldsymbol{A} \boldsymbol{P})(\boldsymbol{P}^{-1} \boldsymbol{A} \boldsymbol{P}) \cdots (\boldsymbol{P}^{-1} \boldsymbol{A} \boldsymbol{P}) \\ &= \boldsymbol{P}^{-1} \boldsymbol{A}^m \boldsymbol{P}, \end{aligned}$$

故

$$\boldsymbol{A}^m \sim \boldsymbol{B}^m.$$

类似可证 $f(\boldsymbol{A}) \sim f(\boldsymbol{B})$. □

定理 1.15

若两个矩阵相似，则它们的特征多项式相同，从而特征值也相同.

定理 1.15

若两个矩阵相似，则它们的特征多项式相同，从而特征值也相同.

证: 设 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}.$$

定理 1.15

若两个矩阵相似，则它们的特征多项式相同，从而特征值也相同.

证: 设 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}.$$

于是

$$\begin{aligned} |\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}| &= |\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}| \\ &= |\boldsymbol{P}^{-1}(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{P}| \\ &= |\boldsymbol{P}^{-1}||\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}||\boldsymbol{P}| \\ &= |\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}|. \qquad (|\boldsymbol{P}^{-1}||\boldsymbol{P}| = 1) \end{aligned}$$

证毕. □

定理 1.15

若两个矩阵相似，则它们的特征多项式相同，从而特征值也相同.

证: 设 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}.$$

于是

$$\begin{aligned}
|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}| &= |\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}| \\
&= |\boldsymbol{P}^{-1}(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{P}| \\
&= |\boldsymbol{P}^{-1}||\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}||\boldsymbol{P}| \\
&= |\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}|. \qquad (|\boldsymbol{P}^{-1}||\boldsymbol{P}| = 1)
\end{aligned}$$

证毕. □

相似的矩阵，它们的特征向量是否一定相同呢？答案为否. 后文会有讨论.

推论 1.16

若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

相似, 则 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值.

推论 1.16

若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

相似, 则 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值.

证: 因 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的特征多项式为

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n),$$

故 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的 n 个特征值, 由前述定理知 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值. □

Outline

所谓矩阵可对角化, 是指矩阵与对角阵相似,

所谓矩阵可对角化, 是指矩阵与对角阵相似, 即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$$

为对角矩阵.

所谓矩阵可对角化, 是指矩阵与对角阵相似, 即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$$

为对角矩阵.

本节的主要结论:

- n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是: $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

所谓矩阵可对角化, 是指矩阵与对角阵相似, 即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$$

为对角矩阵.

本节的主要结论:

- n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是: $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.
- n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是: $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值的代数重数, 等于其几何重数.

定理 2.1

n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是: $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

定理 2.1

n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是: $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

证: 必要性. 设

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

定理 2.1

n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是: $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

证: 必要性. 设

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \triangleq \boldsymbol{\Lambda},$$

定理 2.1

n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是: $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

证: 必要性. 设

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \triangleq \boldsymbol{\Lambda},$$

即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}.$$

定理 2.1

n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是: $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

证: 必要性. 设

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \triangleq \boldsymbol{\Lambda},$$

即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}.$$

记 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$, 则

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

定理 2.1

n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是: $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

证: 必要性. 设

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\triangleq\boldsymbol{\Lambda},$$

即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}.$$

记 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)$, 则

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix},$$

即

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n)=(\lambda_1\boldsymbol{x}_1,\lambda_2\boldsymbol{x}_2,\cdots,\lambda_n\boldsymbol{x}_n),$$

于是

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i = \lambda_i \boldsymbol{x}_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

于是

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i = \lambda_i \boldsymbol{x}_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

从而 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征向量,

于是

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i = \lambda_i \boldsymbol{x}_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

从而 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征向量, 而 $\boldsymbol{P}$ 可逆, 故它们是线性无关的.

于是

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i = \lambda_i \boldsymbol{x}_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

从而 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征向量, 而 $\boldsymbol{P}$ 可逆, 故它们是线性无关的.

上述步骤显然可逆, 得充分性也成立. □

若忽略 λ_k 的排列顺序, 则 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是唯一的,

于是

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i = \lambda_i \boldsymbol{x}_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

从而 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征向量, 而 $\boldsymbol{P}$ 可逆, 故它们是线性无关的.

上述步骤显然可逆, 得充分性也成立. $\square$

若忽略 λ_k 的排列顺序, 则 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是唯一的, 称 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的相似标准形.

定理 2.2

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量是线性无关的.

定理 2.2

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量是线性无关的.

证: 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个互不相同的特征值, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 依次是与之对应的特征向量.

定理 2.2

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量是线性无关的.

证: 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个互不相同的特征值, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 依次是与之对应的特征向量.

用数学归纳法.

定理 2.2

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量是线性无关的.

证: 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个互不相同的特征值, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 依次是与之对应的特征向量.

用数学归纳法.

当 $m = 1$ 时, 因特征向量 $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{0}$, 故只含有一个向量的向量组 $\boldsymbol{x}_1$ 线性无关.

定理 2.2

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量是线性无关的.

证: 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个互不相同的特征值, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 依次是与之对应的特征向量.

用数学归纳法.

当 $m = 1$ 时, 因特征向量 $\boldsymbol{x}_1 \neq \mathbf{0}$, 故只含有一个向量的向量组 $\boldsymbol{x}_1$ 线性无关.

假设 $m = k$ 时结论成立, 即 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ 线性无关.

定理 2.2

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量是线性无关的.

证: 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个互不相同的特征值, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 依次是与之对应的特征向量.

用数学归纳法.

当 $m=1$ 时, 因特征向量 $\boldsymbol{x}_1 \neq \mathbf{0}$, 故只含有一个向量的向量组 $\boldsymbol{x}_1$ 线性无关.

假设 $m=k$ 时结论成立, 即 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ 线性无关. 下证 $m=k+1$ 时结论也成立. 设

$$a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_k\boldsymbol{x}_k + a_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} = \mathbf{0}, \tag{11}$$

用 $\boldsymbol{A}$ 左乘上式, 得

$$a_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_k\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k + a_{k+1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{k+1} = \mathbf{0},$$

定理 2.2

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量是线性无关的.

证: 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个互不相同的特征值, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 依次是与之对应的特征向量.

用数学归纳法.

当 $m = 1$ 时, 因特征向量 $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{0}$, 故只含有一个向量的向量组 $\boldsymbol{x}_1$ 线性无关.

假设 $m = k$ 时结论成立, 即 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ 线性无关. 下证 $m = k+1$ 时结论也成立. 设

$$a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_k\boldsymbol{x}_k + a_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{0}, \tag{11}$$

用 $\boldsymbol{A}$ 左乘上式, 得

$$a_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_k\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k + a_{k+1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{0},$$

即

$$a_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\lambda_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_k\lambda_k\boldsymbol{x}_k + a_{k+1}\lambda_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{0}, \tag{12}$$

令 $(12) - \lambda_{k+1}(11)$,

令 $(12) - \lambda_{k+1}(11)$, 得

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\boldsymbol{x}_1 + a_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1})\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})\boldsymbol{x}_k = \mathbf{0}.$$

令 $(12) - \lambda_{k+1}(11)$, 得

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\boldsymbol{x}_1 + a_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1})\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})\boldsymbol{x}_k = \mathbf{0}.$$

因 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ 线性无关, 故

$$a_i(\lambda_i - \lambda_{k+1}) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, k).$$

令 $(12) - \lambda_{k+1}(11)$, 得

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\boldsymbol{x}_1 + a_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1})\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})\boldsymbol{x}_k = \mathbf{0}.$$

因 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ 线性无关, 故

$$a_i(\lambda_i - \lambda_{k+1}) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, k).$$

而 $\lambda_i - \lambda_{k+1} \neq 0$, $i = 1, 2, \cdots, k$, 从而

$$a_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, k).$$

代入到 (11) 式, 得

$$a_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} = \mathbf{0},$$

令 $(12) - \lambda_{k+1}(11)$, 得

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\boldsymbol{x}_1 + a_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1})\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})\boldsymbol{x}_k = \mathbf{0}.$$

因 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ 线性无关, 故

$$a_i(\lambda_i - \lambda_{k+1}) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, k).$$

而 $\lambda_i - \lambda_{k+1} \neq 0$, $i = 1, 2, \cdots, k$, 从而

$$a_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, k).$$

代入到 (11) 式, 得

$$a_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} = \mathbf{0},$$

而特征向量 $\boldsymbol{x}_{k+1} \neq \mathbf{0}$, 故 $a_{k+1} = 0$.

令 (12) $-\lambda_{k+1}$(11), 得

$$a_1(\lambda_1-\lambda_{k+1})\boldsymbol{x}_1+a_2(\lambda_2-\lambda_{k+1})\boldsymbol{x}_2+\cdots+a_k(\lambda_k-\lambda_{k+1})\boldsymbol{x}_k=\mathbf{0}.$$

因 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ 线性无关, 故

$$a_i(\lambda_i-\lambda_{k+1})=0 \qquad (i=1,2,\cdots,k).$$

而 $\lambda_i-\lambda_{k+1}\neq 0$, $i=1,2,\cdots,k$, 从而

$$a_i=0 \qquad (i=1,2,\cdots,k).$$

代入到 (11) 式, 得

$$a_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1}=\mathbf{0},$$

而特征向量 $\boldsymbol{x}_{k+1}\neq\mathbf{0}$, 故 $a_{k+1}=0$. 得证 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_{k+1}$ 线性无关. □

推论 2.3

若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值, 则 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似.

定理 2.4

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个互不相同的特征值, 对应于 λ_i 的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{x}_{i_1}, \boldsymbol{x}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{x}_{i_{r_i}}$, $(i = 1, 2, \cdots, m)$, 则由所有这些特征向量 (共 $r_1 + r_2 + \cdots + r_m$ 个) 构成的向量组是线性无关的.

定理 2.4

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个互不相同的特征值, 对应于 λ_i 的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{x}_{i_1}, \boldsymbol{x}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{x}_{i_{r_i}}, (i=1,2,\cdots,m)$, 则由所有这些特征向量 (共 $r_1+r_2+\cdots+r_m$ 个) 构成的向量组是线性无关的.

下面通过一个简单情形的证明, 说明该结论.

例 2.5

设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有三个实特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 且满足 $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, 如果 λ_1 对应两个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$, λ_3 对应一个特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$, 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

例 2.5

设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有三个实特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 且满足 $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, 如果 λ_1 对应两个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$, λ_3 对应一个特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$, 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

证: 设有 k_1, k_2, k_3 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}, \tag{13}$$

例 2.5

设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有三个实特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 且满足 $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, 如果 λ_1 对应两个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$, λ_3 对应一个特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$, 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

证: 设有 k_1, k_2, k_3 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}, \tag{13}$$

则 $\boldsymbol{A}k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{A}k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{A}k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}$, 即

$$k_1\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}. \tag{14}$$

例 2.5

设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有三个实特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 且满足 $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, 如果 λ_1 对应两个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$, λ_3 对应一个特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$, 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

证: 设有 k_1, k_2, k_3 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}, \tag{13}$$

则 $\boldsymbol{A}k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{A}k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{A}k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}$, 即

$$k_1\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}. \tag{14}$$

用 λ_1 乘以 (13) 式, 然后与 (14) 式相减, 并注意到 $\lambda_1 = \lambda_2$, 得

$$k_3(\lambda_3 - \lambda_1)\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}, \tag{15}$$

例 2.5

设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有三个实特征值 λ_1, λ_2, λ_3, 且满足 $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, 如果 λ_1 对应两个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$, λ_3 对应一个特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$, 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

证: 设有 k_1, k_2, k_3 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}, \tag{13}$$

则 $\boldsymbol{A}k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{A}k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{A}k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}$, 即

$$k_1\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}. \tag{14}$$

用 λ_1 乘以 (13) 式, 然后与 (14) 式相减, 并注意到 $\lambda_1 = \lambda_2$, 得

$$k_3(\lambda_3 - \lambda_1)\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}, \tag{15}$$

因 $\lambda_3 - \lambda_1 \neq 0$, 特征向量为非零向量, 则 (15) 式中 $k_3 = 0$.

例 2.5

设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有三个实特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 且满足 $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, 如果 λ_1 对应两个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$, λ_3 对应一个特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$, 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

证: 设有 k_1, k_2, k_3 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}, \tag{13}$$

则 $\boldsymbol{A}k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{A}k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{A}k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}$, 即

$$k_1\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}. \tag{14}$$

用 λ_1 乘以 (13) 式, 然后与 (14) 式相减, 并注意到 $\lambda_1 = \lambda_2$, 得

$$k_3(\lambda_3 - \lambda_1)\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}, \tag{15}$$

因 $\lambda_3 - \lambda_1 \neq 0$, 特征向量为非零向量, 则 (15) 式中 $k_3 = 0$. 再返回 (13) 式, 得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}$, 由于 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 则 $k_1 = k_2 = 0$,

例 2.5

设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有三个实特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 且满足 $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, 如果 λ_1 对应两个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$, λ_3 对应一个特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$, 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

证: 设有 k_1, k_2, k_3 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}, \tag{13}$$

则 $\boldsymbol{A}k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{A}k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{A}k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}$, 即

$$k_1\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}. \tag{14}$$

用 λ_1 乘以 (13) 式, 然后与 (14) 式相减, 并注意到 $\lambda_1 = \lambda_2$, 得

$$k_3(\lambda_3 - \lambda_1)\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}, \tag{15}$$

因 $\lambda_3 - \lambda_1 \neq 0$, 特征向量为非零向量, 则 (15) 式中 $k_3 = 0$. 再返回 (13) 式, 得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}$, 由于 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 则 $k_1 = k_2 = 0$, 于是 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. 即 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

另证 设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}, \tag{16}$$

假设 $k_3 \neq 0$.

另证 设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}, \tag{16}$$

假设 $k_3 \neq 0$. 则 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 的线性组合, 不妨记 $\boldsymbol{\alpha}_3 = c_1\boldsymbol{\alpha}_1 + c_2\boldsymbol{\alpha}_2$, 由

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3 &= \boldsymbol{A}(c_1\boldsymbol{\alpha}_1 + c_2\boldsymbol{\alpha}_2) = c_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 + c_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = c_1\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + c_2\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_2 \\ &= \lambda_1(c_1\boldsymbol{\alpha}_1 + c_2\boldsymbol{\alpha}_2) = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_3,\end{aligned}$$

另证 设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}, \tag{16}$$

假设 $k_3 \neq 0$. 则 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 的线性组合, 不妨记 $\boldsymbol{\alpha}_3 = c_1\boldsymbol{\alpha}_1 + c_2\boldsymbol{\alpha}_2$, 由

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3 &= \boldsymbol{A}(c_1\boldsymbol{\alpha}_1 + c_2\boldsymbol{\alpha}_2) = c_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 + c_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = c_1\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + c_2\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_2 \\ &= \lambda_1(c_1\boldsymbol{\alpha}_1 + c_2\boldsymbol{\alpha}_2) = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_3,\end{aligned}$$

得 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 λ_1 所对应的特征向量. 与题设矛盾, 所以假设不成立. 即只能是 $k_3 = 0$,

另证 设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}, \tag{16}$$

假设 $k_3 \neq 0$. 则 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 的线性组合, 不妨记 $\boldsymbol{\alpha}_3 = c_1\boldsymbol{\alpha}_1 + c_2\boldsymbol{\alpha}_2$, 由

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3 &= \boldsymbol{A}(c_1\boldsymbol{\alpha}_1 + c_2\boldsymbol{\alpha}_2) = c_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 + c_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = c_1\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + c_2\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_2 \\ &= \lambda_1(c_1\boldsymbol{\alpha}_1 + c_2\boldsymbol{\alpha}_2) = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_3, \end{aligned}$$

得 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 λ_1 所对应的特征向量. 与题设矛盾, 所以假设不成立. 即只能是 $k_3 = 0$, 代入 (16) 式得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}$, 又 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 得 $k_1 = k_2 = 0$.

另证 设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}, \tag{16}$$

假设 $k_3 \neq 0$. 则 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 的线性组合, 不妨记 $\boldsymbol{\alpha}_3 = c_1\boldsymbol{\alpha}_1 + c_2\boldsymbol{\alpha}_2$, 由

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3 &= \boldsymbol{A}(c_1\boldsymbol{\alpha}_1 + c_2\boldsymbol{\alpha}_2) = c_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 + c_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = c_1\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + c_2\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_2 \\ &= \lambda_1(c_1\boldsymbol{\alpha}_1 + c_2\boldsymbol{\alpha}_2) = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_3,\end{aligned}$$

得 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 λ_1 所对应的特征向量. 与题设矛盾, 所以假设不成立. 即只能是 $k_3 = 0$, 代入 (16) 式得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}$, 又 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 得 $k_1 = k_2 = 0$.

综上, 要使 (16) 式成立, 只能是 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, 得证 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关. □

可对角化的第二个充要条件

定理 2.6

n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是: $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值的代数重数等于其几何重数.

可对角化的第二个充要条件

定理 2.6

n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是: $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值的代数重数等于其几何重数.

推论 2.7

n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是: $\boldsymbol{A}$ 的每个重根特征值的代数重数等于其几何重数.

可对角化的第二个充要条件

定理 2.6

n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是: $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值的代数重数等于其几何重数.

推论 2.7

n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是: $\boldsymbol{A}$ 的每个重根特征值的代数重数等于其几何重数.

检验矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是否可对角化, 只需检验: 重根特征值的代数重数 $\overset{?}{=}$ 几何重数. 单根特征值不予考虑.

例 2.8

讨论矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 是否可以对角化.

例 2.8

讨论矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 是否可以对角化.

解: $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-2),$$

例 2.8

讨论矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ 是否可以对角化.

解: $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2$, $\lambda_2=\lambda_3=1$.

例 2.8

讨论矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 是否可以对角化.

解: $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-2),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

因 $\lambda_1 = 2$ 是单根, 其对应的线性无关特征向量的个数一定为 1.

例 2.8

讨论矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ 是否可以对角化.

解: $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2$, $\lambda_2=\lambda_3=1$.

因 $\lambda_1=2$ 是单根, 其对应的线性无关特征向量的个数一定为 1. 故只需要考虑重根特征值.

当 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 时, 解方程 $(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 由

$$\lambda_2 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

当 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 时, 解方程 $(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 由

$$\lambda_2 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时, 解方程 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\lambda_2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\4&-2&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\eta}=(-1,-2,1)^{\mathrm{T}}$,

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时, 解方程 $(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\lambda_2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\eta}=(-1,-2,1)^{\mathrm{T}}$, 故 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 所对应的线性无关特征向量的个数是 1.

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时, 解方程 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. 由

$$\lambda_2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\eta}=(-1,-2,1)^{\mathrm{T}}$, 故 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 所对应的线性无关特征向量的个数是 1.

可见 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不存在 3 个线性无关的特征向量, 故 $\boldsymbol{A}$ 不能对角化. □

或者: 因 $\mathrm{r}(\lambda_2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=2$, 则 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的几何重数为

$$n-\mathrm{r}(\lambda_2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=3-2=1,$$

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时, 解方程 $(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. 由

$$\lambda_2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\eta}=(-1,-2,1)^{\mathrm{T}}$, 故 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 所对应的线性无关特征向量的个数是 1.

可见 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不存在 3 个线性无关的特征向量, 故 $\boldsymbol{A}$ 不能对角化. □

或者: 因 $\mathrm{r}(\lambda_2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=2$, 则 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的几何重数为

$$n-\mathrm{r}(\lambda_2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=3-2=1,$$

重根特征值的几何重数不等于其代数重数, 故 $\boldsymbol{A}$ 不能对角化.

例 2.9 (经典好题 ⊠)

设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 问 x 为何值时, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能对角化?

例 2.9 (经典好题 ⊠)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&x\\1&0&0\end{pmatrix}$, 问 x 为何值时, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能对角化?

解: $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\-1&\lambda-1&-x\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1),$$

例 2.9 (经典好题 ☒)

设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 问 x 为何值时, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能对角化?

解: $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & -x \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1),$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

例 2.9 (经典好题 ⊠)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&x\\1&0&0\end{pmatrix}$, 问 x 为何值时, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能对角化?

解: $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\-1&\lambda-1&-x\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1),$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=\lambda_3=1$.

对应单根 $\lambda_1=-1$, 可求得线性无关的特征向量恰有 1 个,

例 2.9 (经典好题 ⊠)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&x\\1&0&0\end{pmatrix}$, 问 x 为何值时, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能对角化?

解: $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\-1&\lambda-1&-x\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1),$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=\lambda_3=1.$

对应单根 $\lambda_1=-1$, 可求得线性无关的特征向量恰有 1 个, 故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是: 重根 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 对应有 2 个线性无关的特征向量,

例 2.9 (经典好题 ☒)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&x\\1&0&0\end{pmatrix}$, 问 x 为何值时, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能对角化?

解: $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\-1&\lambda-1&-x\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1),$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=\lambda_3=1$.

对应单根 $\lambda_1=-1$, 可求得线性无关的特征向量恰有 1 个, 故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是: 重根 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 对应有 2 个线性无关的特征向量, 即方程组

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

有 2 个线性无关的解.

亦即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$ 满足 $n-r=2$, 即

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=1.$$

亦即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$ 满足 $n-r=2$, 即

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=1.$$

由

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -x \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+r_1]{(r_2+r_1)\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & x+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

亦即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$ 满足 $n-r=2$, 即

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=1.$$

由

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -x \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+r_1]{(r_2+r_1)\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & x+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

要 $\mathrm{r}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=1$, 得 $x+1=0$, 即 $x=-1$.

亦即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$ 满足 $n-r=2$, 即

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=1.$$

由

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -x \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+r_1]{(r_2+r_1)\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & x+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

要 $\mathrm{r}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=1$, 得 $x+1=0$, 即 $x=-1$.

因此, 当 $x=-1$ 时, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能对角化. □

Outline

1. 矩阵的特征值和特征向量

2. 矩阵可对角化的条件

3. 实对称矩阵的对角化
   - 实对称矩阵的特征值和特征向量
   - 实对称矩阵的对角化

4. 习题

5. 总结与复习

复数常记为如下的形式:

$$a + b\mathrm{i},$$

这里 i 为虚数单位, 它满足

$$\mathrm{i}^2 = -1.$$

复数常记为如下的形式:

$$a + b\mathrm{i},$$

这里 i 为虚数单位, 它满足

$$\mathrm{i}^2 = -1.$$

而 a, b 是实数, 分别称为实部和虚部.

复数常记为如下的形式:

$$a + b\mathrm{i},$$

这里 i 为虚数单位, 它满足

$$\mathrm{i}^2 = -1.$$

而 a, b 是实数, 分别称为实部和虚部.

定义 3.1

元素为复数的矩阵和向量, 称为复矩阵和复向量.

复数常记为如下的形式:

$$a+bi,$$

这里 i 为虚数单位, 它满足

$$i^2=-1.$$

而 a, b 是实数, 分别称为实部和虚部.

定义 3.1

元素为复数的矩阵和向量, 称为复矩阵和复向量.

例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2+4i & 1-3i \\ 2-4i & 3 & 8+6i \\ 1+3i & 8-6i & 5 \end{pmatrix}.$$

$a+b\mathrm{i}$ 与 $a-b\mathrm{i}$ 互为共轭复数.

$a+b\mathrm{i}$ 与 $a-b\mathrm{i}$ 互为共轭复数. 复数 x 的共轭复数记为 $\bar{x}$.

$a + b\mathrm{i}$ 与 $a - b\mathrm{i}$ 互为共轭复数. 复数 x 的共轭复数记为 $\bar{x}$.
例如 $x = 2 + 3\mathrm{i}$, 则 $\bar{x} = 2 - 3\mathrm{i}$.

$a+b\mathrm{i}$ 与 $a-b\mathrm{i}$ 互为共轭复数. 复数 x 的共轭复数记为 $\bar{x}$.
例如 $x=2+3\mathrm{i}$, 则 $\bar{x}=2-3\mathrm{i}$.

定义 3.2

设 a_{ij} 为复数, $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, 则其共轭矩阵为

$$\overline{\boldsymbol{A}}=(\bar{a}_{ij})_{m\times n}.$$

$a+b\mathrm{i}$ 与 $a-b\mathrm{i}$ 互为共轭复数. 复数 x 的共轭复数记为 $\bar{x}$.

例如 $x=2+3\mathrm{i}$, 则 $\bar{x}=2-3\mathrm{i}$.

定义 3.2

设 a_{ij} 为复数, $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, 则其共轭矩阵为

$$\overline{\boldsymbol{A}}=(\bar{a}_{ij})_{m\times n}.$$

例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2+4\mathrm{i} & 1-3\mathrm{i} \\ 2-4\mathrm{i} & 3 & 8+6\mathrm{i} \end{pmatrix}, \qquad \overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} 1 & 2-4\mathrm{i} & 1+3\mathrm{i} \\ 2+4\mathrm{i} & 3 & 8-6\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

$a+b\mathrm{i}$ 与 $a-b\mathrm{i}$ 互为共轭复数. 复数 x 的共轭复数记为 $\bar{x}$.
例如 $x=2+3\mathrm{i}$, 则 $\bar{x}=2-3\mathrm{i}$.

定义 3.2

设 a_{ij} 为复数, $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, 则其共轭矩阵为

$$\overline{\boldsymbol{A}}=(\bar{a}_{ij})_{m\times n}.$$

例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2+4\mathrm{i} & 1-3\mathrm{i} \\ 2-4\mathrm{i} & 3 & 8+6\mathrm{i} \end{pmatrix}, \qquad \overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} 1 & 2-4\mathrm{i} & 1+3\mathrm{i} \\ 2+4\mathrm{i} & 3 & 8-6\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

☞ $\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}=\boldsymbol{A}$,

$a+b\mathrm{i}$ 与 $a-b\mathrm{i}$ 互为共轭复数. 复数 x 的共轭复数记为 $\bar{x}$.

例如 $x=2+3\mathrm{i}$, 则 $\bar{x}=2-3\mathrm{i}$.

定义 3.2

设 a_{ij} 为复数, $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, 则其共轭矩阵为

$$\overline{\boldsymbol{A}}=(\bar{a}_{ij})_{m\times n}.$$

例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2+4\mathrm{i} & 1-3\mathrm{i} \\ 2-4\mathrm{i} & 3 & 8+6\mathrm{i} \end{pmatrix}, \qquad \overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} 1 & 2-4\mathrm{i} & 1+3\mathrm{i} \\ 2+4\mathrm{i} & 3 & 8-6\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

☞ $\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}=\boldsymbol{A}$, $\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}=\overline{(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})}$.

$a+b\mathrm{i}$ 与 $a-b\mathrm{i}$ 互为共轭复数. 复数 x 的共轭复数记为 $\bar{x}$.

例如 $x=2+3\mathrm{i}$, 则 $\bar{x}=2-3\mathrm{i}$.

定义 3.2

设 a_{ij} 为复数, $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, 则其共轭矩阵为

$$\overline{\boldsymbol{A}}=(\bar{a}_{ij})_{m\times n}.$$

例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2+4\mathrm{i} & 1-3\mathrm{i} \\ 2-4\mathrm{i} & 3 & 8+6\mathrm{i} \end{pmatrix}, \qquad \overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} 1 & 2-4\mathrm{i} & 1+3\mathrm{i} \\ 2+4\mathrm{i} & 3 & 8-6\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

☞ $\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}=\boldsymbol{A}$, $\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}=\overline{(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})}$.

当 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵时, $\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$.

容易证明共轭矩阵有以下性质:

(1) $\overline{k\boldsymbol{A}} = \bar{k}\,\overline{\boldsymbol{A}}$;

容易证明共轭矩阵有以下性质:

(1) $\overline{k\boldsymbol{A}} = \bar{k}\,\overline{\boldsymbol{A}}$;

(2) $\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}} + \overline{\boldsymbol{B}}$;

容易证明共轭矩阵有以下性质:

(1) $\overline{k\boldsymbol{A}} = \bar{k}\,\overline{\boldsymbol{A}}$;

(2) $\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}} + \overline{\boldsymbol{B}}$;

(3) $\overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}}\,\overline{\boldsymbol{B}}$;

容易证明共轭矩阵有以下性质:

(1) $\overline{k\boldsymbol{A}} = \bar{k}\,\overline{\boldsymbol{A}}$;

(2) $\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}} + \overline{\boldsymbol{B}}$;

(3) $\overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}}\,\overline{\boldsymbol{B}}$;

(4) $\overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}} = \overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}$;

容易证明共轭矩阵有以下性质:

(1) $\overline{k\boldsymbol{A}} = \bar{k}\,\overline{\boldsymbol{A}}$;

(2) $\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}} + \overline{\boldsymbol{B}}$;

(3) $\overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}}\,\overline{\boldsymbol{B}}$;

(4) $\overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}} = \overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}$;

(5) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\overline{\boldsymbol{A}^{-1}} = (\overline{\boldsymbol{A}})^{-1}$;

容易证明共轭矩阵有以下性质:

(1) $\overline{k\boldsymbol{A}} = \bar{k}\,\overline{\boldsymbol{A}}$;

(2) $\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}} + \overline{\boldsymbol{B}}$;

(3) $\overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}}\,\overline{\boldsymbol{B}}$;

(4) $\overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}} = \overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}$;

(5) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\overline{\boldsymbol{A}^{-1}} = (\overline{\boldsymbol{A}})^{-1}$;

(6) $\det\overline{\boldsymbol{A}} = \overline{\det\boldsymbol{A}}$.

n 维复向量 $\boldsymbol{x}$ 满足性质:

$$\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geqslant 0,$$

等号成立当且仅当 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

n 维复向量 $\boldsymbol{x}$ 满足性质:

$$\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geqslant 0,$$

等号成立当且仅当 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

事实上, 若 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $x_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

n 维复向量 $\boldsymbol{x}$ 满足性质:

$$\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geqslant 0,$$

等号成立当且仅当 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

事实上, 若 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $x_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 则

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} &= \bar{x}_1 x_1 + \bar{x}_2 x_2 + \cdots + \bar{x}_n x_n \\ &= |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2 \\ &\geqslant 0,\end{aligned}$$

n 维复向量 $\boldsymbol{x}$ 满足性质:

$$\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geqslant 0,$$

等号成立当且仅当 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

事实上, 若 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $x_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 则

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} &= \bar{x}_1 x_1 + \bar{x}_2 x_2 + \cdots + \bar{x}_n x_n \\ &= |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2 \\ &\geqslant 0,\end{aligned}$$

其中 $|x_i|$ 是复数 x_i 的模.

n 维复向量 $\boldsymbol{x}$ 满足性质:

$$\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geqslant 0,$$

等号成立当且仅当 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

事实上, 若 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $x_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 则

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} &= \bar{x}_1 x_1 + \bar{x}_2 x_2 + \cdots + \bar{x}_n x_n \\ &= |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2 \\ &\geqslant 0,\end{aligned}$$

其中 $|x_i|$ 是复数 x_i 的模. 且 $\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 当且仅当 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

Outline

1. 矩阵的特征值和特征向量
2. 矩阵可对角化的条件
3. 实对称矩阵的对角化
   - 实对称矩阵的特征值和特征向量
   - 实对称矩阵的对角化
4. 习题
5. 总结与复习

定理 3.3

实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一个特征值都是实数.

定理 3.3

实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一个特征值都是实数.

证: 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值.

定理 3.3

实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一个特征值都是实数.

证: 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值. 由 $\boldsymbol{A}$ 为实矩阵, 有 $\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}$, 故

$$\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{A}}\,\overline{\boldsymbol{x}}$$

定理 3.3

实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一个特征值都是实数.

证: 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值. 由 $\boldsymbol{A}$ 为实矩阵, 有 $\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}$, 故

$$\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{A}}\,\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}$$

定理 3.3

实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一个特征值都是实数.

证: 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值. 由 $\boldsymbol{A}$ 为实矩阵, 有 $\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}$, 故

$$\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{A}}\,\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}} = \overline{\lambda\boldsymbol{x}}$$

定理 3.3

实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一个特征值都是实数.

证: 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值. 由 $\boldsymbol{A}$ 为实矩阵, 有 $\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}$, 故

$$\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{A}}\,\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}} = \overline{\lambda\boldsymbol{x}} = \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}}.$$

定理 3.3

实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一个特征值都是实数.

证: 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值. 由 $\boldsymbol{A}$ 为实矩阵, 有 $\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}$, 故

$$\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{A}}\,\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}} = \overline{\lambda\boldsymbol{x}} = \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}}.$$

于是有

$$\begin{aligned}
\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\lambda\boldsymbol{x} = \lambda\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},\\
\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= (\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = (\overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},
\end{aligned}$$

定理 3.3

实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一个特征值都是实数.

证: 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值. 由 $\boldsymbol{A}$ 为实矩阵, 有 $\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}$, 故

$$\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{A}}\,\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}} = \overline{\lambda\boldsymbol{x}} = \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}}.$$

于是有

$$\begin{aligned}
\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\lambda\boldsymbol{x} = \lambda\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}, \\
\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= (\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = (\overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},
\end{aligned}$$

两式相减得

$$(\lambda - \overline{\lambda})\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0,$$

定理 3.3

实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一个特征值都是实数.

证: 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值. 由 $\boldsymbol{A}$ 为实矩阵, 有 $\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}$, 故

$$\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{A}}\,\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}} = \overline{\lambda\boldsymbol{x}} = \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}}.$$

于是有

$$\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\lambda\boldsymbol{x} = \lambda\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},$$
$$\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = (\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = (\overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},$$

两式相减得

$$(\lambda - \overline{\lambda})\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0,$$

但特征向量 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, 从而 $\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} > 0$,

定理 3.3

实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一个特征值都是实数.

证: 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值. 由 $\boldsymbol{A}$ 为实矩阵, 有 $\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}$, 故

$$\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{A}}\,\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}} = \overline{\lambda\boldsymbol{x}} = \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}}.$$

于是有

$$\begin{aligned}
\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\lambda\boldsymbol{x} = \lambda\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}, \\
\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= (\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = (\overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},
\end{aligned}$$

两式相减得

$$(\lambda - \overline{\lambda})\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0,$$

但特征向量 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, 从而 $\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} > 0$, 故 $\lambda - \overline{\lambda} = 0$, 即 $\lambda = \overline{\lambda}$, 得证 λ 为实数. □

定理 3.4

实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于不同特征值的特征向量是正交的.

定理 3.4

实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于不同特征值的特征向量是正交的.

证: 设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2\boldsymbol{x}_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

定理 3.4

实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于不同特征值的特征向量是正交的.

证: 设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2\boldsymbol{x}_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

因 $\boldsymbol{A}$ 对称, 故 $\lambda_1\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}} = (\lambda_1\boldsymbol{x}_1)^{\mathrm{T}}$

定理 3.4

实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于不同特征值的特征向量是正交的.

证: 设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2\boldsymbol{x}_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

因 $\boldsymbol{A}$ 对称, 故 $\lambda_1\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}} = (\lambda_1\boldsymbol{x}_1)^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1)^{\mathrm{T}}$

定理 3.4

实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于不同特征值的特征向量是正交的.

证: 设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{x}_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

因 $\boldsymbol{A}$ 对称, 故 $\lambda_1 \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}} = (\lambda_1 \boldsymbol{x}_1)^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

定理 3.4

实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于不同特征值的特征向量是正交的.

证: 设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2\boldsymbol{x}_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

因 $\boldsymbol{A}$ 对称, 故 $\lambda_1\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}} = (\lambda_1\boldsymbol{x}_1)^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$,

定理 3.4

实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于不同特征值的特征向量是正交的.

证: 设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2\boldsymbol{x}_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

因 $\boldsymbol{A}$ 对称, 故 $\lambda_1\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}} = (\lambda_1\boldsymbol{x}_1)^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$, 于是

$$\lambda_1\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2$$

定理 3.4

实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于不同特征值的特征向量是正交的.

证: 设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2\boldsymbol{x}_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

因 $\boldsymbol{A}$ 对称, 故 $\lambda_1\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}} = (\lambda_1\boldsymbol{x}_1)^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$, 于是

$$\lambda_1\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}(\lambda_2\boldsymbol{x}_2)$$

定理 3.4

实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于不同特征值的特征向量是正交的.

证: 设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{x}_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

因 $\boldsymbol{A}$ 对称, 故 $\lambda_1 \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}} = (\lambda_1 \boldsymbol{x}_1)^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}$, 于是

$$\lambda_1 \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}} (\lambda_2 \boldsymbol{x}_2) = \lambda_2 \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_2,$$

定理 3.4

实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于不同特征值的特征向量是正交的.

证: 设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{x}_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

因 $\boldsymbol{A}$ 对称, 故 $\lambda_1 \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}} = (\lambda_1 \boldsymbol{x}_1)^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}$, 于是

$$\lambda_1 \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}} (\lambda_2 \boldsymbol{x}_2) = \lambda_2 \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_2,$$

即

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_2 = 0.$$

定理 3.4

实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于不同特征值的特征向量是正交的.

证: 设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2\boldsymbol{x}_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

因 $\boldsymbol{A}$ 对称, 故 $\lambda_1\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}} = (\lambda_1\boldsymbol{x}_1)^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$, 于是

$$\lambda_1\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}(\lambda_2\boldsymbol{x}_2) = \lambda_2\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_2,$$

即

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_2 = 0.$$

但 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 故 $\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_2 = 0$, 即 $\boldsymbol{x}_1$ 与 $\boldsymbol{x}_2$ 正交. □

Outline

定理 3.5

对任一个 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$, 存在 n 阶正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n).$$

定理 3.5

对任一个 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$, 存在 n 阶正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n).$$

证明略.

推论 3.6

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵, λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程的 k 重根, 则对应特征值 λ_0 恰有 k 个线性无关的特征向量, 亦即矩阵 $\lambda_0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的秩 $\mathrm{r}(\lambda_0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=n-k$.

推论 3.6

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵, λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程的 k 重根, 则对应特征值 λ_0 恰有 k 个线性无关的特征向量, 亦即矩阵 $\lambda_0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的秩 $\mathrm{r}(\lambda_0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=n-k$.

事实上, 因实对称矩阵必可对角化,

推论 3.6

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵, λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程的 k 重根, 则对应特征值 λ_0 恰有 k 个线性无关的特征向量, 亦即矩阵 $\lambda_0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的秩 $\mathrm{r}(\lambda_0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=n-k$.

事实上, 因实对称矩阵必可对角化, 而任意矩阵可对角化的充要条件是特征值的代数重数等于其几何重数.

推论 3.6

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵, λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程的 k 重根, 则对应特征值 λ_0 恰有 k 个线性无关的特征向量, 亦即矩阵 $\lambda_0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的秩 $\mathrm{r}(\lambda_0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=n-k$.

事实上, 因实对称矩阵必可对角化, 而任意矩阵可对角化的充要条件是特征值的代数重数等于其几何重数. 即有上述结论成立.

实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正交对角化的步骤

(i) 求出 $\boldsymbol{A}$ 的全部互不相等的特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$, 它们的重数依次为 $k_1, \cdots,$ k_s $(k_1 + \cdots + k_s = n)$.

实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正交对角化的步骤

(i) 求出 $\boldsymbol{A}$ 的全部互不相等的特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$, 它们的重数依次为 $k_1, \cdots, k_s$ ($k_1 + \cdots + k_s = n$).

(ii) 对每个 k_i 重特征值 λ_i, 求方程 $(\lambda_i \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系, 得 k_i 个线性无关的特征向量.

实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正交对角化的步骤

(i) 求出 $\boldsymbol{A}$ 的全部互不相等的特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$, 它们的重数依次为 $k_1, \cdots, k_s$ $(k_1 + \cdots + k_s = n)$.

(ii) 对每个 k_i 重特征值 λ_i, 求方程 $(\lambda_i \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系, 得 k_i 个线性无关的特征向量. 再把它们用施密特过程进行正交化, 并单位化, 得到 k_i 个两两正交的单位特征向量.

实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正交对角化的步骤

(i) 求出 $\boldsymbol{A}$ 的全部互不相等的特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$, 它们的重数依次为 $k_1, \cdots, k_s$ $(k_1 + \cdots + k_s = n)$.

(ii) 对每个 k_i 重特征值 λ_i, 求方程 $(\lambda_i \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的基础解系, 得 k_i 个线性无关的特征向量. 再把它们用施密特过程进行正交化, 并单位化, 得到 k_i 个两两正交的单位特征向量. 因 $k_1 + \cdots + k_s = n$, 故总共可得 n 个两两正交的单位特征向量.

实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正交对角化的步骤

(i) 求出 $\boldsymbol{A}$ 的全部互不相等的特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$, 它们的重数依次为 $k_1, \cdots, k_s$ $(k_1 + \cdots + k_s = n)$.

(ii) 对每个 k_i 重特征值 λ_i, 求方程 $(\lambda_i \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系, 得 k_i 个线性无关的特征向量. 再把它们用施密特过程进行正交化, 并单位化, 得到 k_i 个两两正交的单位特征向量. 因 $k_1 + \cdots + k_s = n$, 故总共可得 n 个两两正交的单位特征向量.

(iii) 将这 n 个两两正交的单位特征向量构成正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 便有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$.

实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正交对角化的步骤

(i) 求出 $\boldsymbol{A}$ 的全部互不相等的特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$, 它们的重数依次为 $k_1, \cdots, k_s$ $(k_1 + \cdots + k_s = n)$.

(ii) 对每个 k_i 重特征值 λ_i, 求方程 $(\lambda_i \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系, 得 k_i 个线性无关的特征向量. 再把它们用施密特过程进行正交化, 并单位化, 得到 k_i 个两两正交的单位特征向量. 因 $k_1 + \cdots + k_s = n$, 故总共可得 n 个两两正交的单位特征向量.

(iii) 将这 n 个两两正交的单位特征向量构成正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 便有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$. 注意 $\boldsymbol{\Lambda}$ 中对角元的排列次序与 $\boldsymbol{P}$ 中列向量的排列次序相对应.

实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正交对角化的步骤

(i) 求出 $\boldsymbol{A}$ 的全部互不相等的特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$, 它们的重数依次为 $k_1, \cdots, k_s$ $(k_1 + \cdots + k_s = n)$.

(ii) 对每个 k_i 重特征值 λ_i, 求方程 $(\lambda_i \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系, 得 k_i 个线性无关的特征向量. 再把它们用施密特过程进行正交化, 并单位化, 得到 k_i 个两两正交的单位特征向量. 因 $k_1 + \cdots + k_s = n$, 故总共可得 n 个两两正交的单位特征向量.

(iii) 将这 n 个两两正交的单位特征向量构成正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 便有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$. 注意 $\boldsymbol{\Lambda}$ 中对角元的排列次序与 $\boldsymbol{P}$ 中列向量的排列次序相对应.

思考: 上述施密特正交化过程得到的向量, 还是对应于 λ_i 的特征向量吗? 为什么?

例 3.7 (精讲题目 ⊠)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 求一个正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角阵.

例 3.7 (精讲题目 ⊠)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 求一个正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角阵.

解: 由

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \xlongequal{r_1-r_2} \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2+c_1} \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda+1 & -1 \\ -1 & -2 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2),$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=\lambda_3=1$.

对应 $\lambda_1=-2$, 解方程 $(\lambda_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\lambda_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&1&-1\\1&-2&-1\\-1&-1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$,

对应 $\lambda_1=-2$, 解方程 $(\lambda_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\lambda_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&1&-1\\1&-2&-1\\-1&-1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$, 将 $\boldsymbol{\xi}_1$ 单位化得 $\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

对应 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, 解方程 $(\lambda_2 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 由

$$\lambda_2 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

对应 $\lambda_2=\lambda_3=1$, 解方程 $(\lambda_2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\lambda_2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

将 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 正交化: 取 $\boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{\xi}_2$,

对应 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, 解方程 $(\lambda_2 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 由

$$\lambda_2 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

将 $\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3$ 正交化: 取 $\boldsymbol{\eta}_2 = \boldsymbol{\xi}_2$,

$$\boldsymbol{\eta}_3 = \boldsymbol{\xi}_3 - \frac{(\boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\xi}_3)}{|\boldsymbol{\eta}_2|^2}\boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

将 $\boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$ 单位化, 得 $\boldsymbol{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

将 $\boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$ 单位化, 得 $\boldsymbol{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

将 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ 构成正交矩阵

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

将 $\boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$ 单位化, 得 $\boldsymbol{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

将 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ 构成正交矩阵

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

说明:

(1) 要看清楚题目的要求. 如果没有要求 $\boldsymbol{P}$ 为正交阵, 则作一般的对角化即可,

说明:

(1) 要看清楚题目的要求. 如果没有要求 $\boldsymbol{P}$ 为正交阵, 则作一般的对角化即可, 即取

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

说明:

(1) 要看清楚题目的要求. 如果没有要求 $\boldsymbol{P}$ 为正交阵, 则作一般的对角化即可, 即取

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

则有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-2 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}.$$

说明:

(1) 要看清楚题目的要求. 如果没有要求 $\boldsymbol{P}$ 为正交阵, 则作一般的对角化即可, 即取

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

则有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-2 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}.$$

(2) 正交化过程只出现在重根特征值对应的特征向量.

说明:

(1) 要看清楚题目的要求. 如果没有要求 $\boldsymbol{P}$ 为正交阵, 则作一般的对角化即可, 即取

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 正交化过程只出现在重根特征值对应的特征向量. 因为对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量是正交的,

说明:

(1) 要看清楚题目的要求. 如果没有要求 $\boldsymbol{P}$ 为正交阵, 则作一般的对角化即可, 即取

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 正交化过程只出现在重根特征值对应的特征向量. 因为对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量是正交的, 所以只需要将重根特征值对应的特征向量进行施密特正交化, 而无需将 $\boldsymbol{A}$ 所有的特征向量放在一起正交化.

(3) $\boldsymbol{P}$ 中 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ 的排列顺序要和 $\boldsymbol{\Lambda}$ 中对角元素 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的排列顺序一致.

(3) $\boldsymbol{P}$ 中 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ 的排列顺序要和 $\boldsymbol{\Lambda}$ 中对角元素 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的排列顺序一致. 比如若取

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

(3) $\boldsymbol{P}$ 中 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ 的排列顺序要和 $\boldsymbol{\Lambda}$ 中对角元素 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的排列顺序一致. 比如若取

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

则由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_3) = (\lambda_2\boldsymbol{p}_2, \lambda_1\boldsymbol{p}_1, \lambda_3\boldsymbol{p}_3) = (\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_3)\,\mathrm{diag}(\lambda_2, \lambda_1, \lambda_3)$,

(3) $\boldsymbol{P}$ 中 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ 的排列顺序要和 $\boldsymbol{\Lambda}$ 中对角元素 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的排列顺序一致. 比如若取

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

则由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_3) = (\lambda_2 \boldsymbol{p}_2, \lambda_1 \boldsymbol{p}_1, \lambda_3 \boldsymbol{p}_3) = (\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_3)\,\mathrm{diag}(\lambda_2, \lambda_1, \lambda_3)$, 得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

(4)★ 正交化过程其实是可以避免的: 对重根求对应方程组的基础解系时, 可以直接凑出一组正交的基础解系.

(4)★ 正交化过程其实是可以避免的: 对重根求对应方程组的基础解系时, 可以直接凑出一组正交的基础解系.

对应 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, 求解 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 时, 得同解方程

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0.$$

(4)★ 正交化过程其实是可以避免的: 对重根求对应方程组的基础解系时, 可以直接凑出一组正交的基础解系.

对应 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, 求解 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 时, 得同解方程

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0.$$

下面构造一组正交的基础解系: 若取 $\boldsymbol{\xi}_2 = (1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$,

(4)★ 正交化过程其实是可以避免的: 对重根求对应方程组的基础解系时, 可以直接凑出一组正交的基础解系.

对应 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, 求解 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 时, 得同解方程

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0.$$

下面构造一组正交的基础解系: 若取 $\boldsymbol{\xi}_2 = (1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$, 要满足正交, 则应有 $\boldsymbol{\xi}_3 = (1, \square, -1)^{\mathrm{T}}$,

(4)★ 正交化过程其实是可以避免的: 对重根求对应方程组的基础解系时, 可以直接凑出一组正交的基础解系.

对应 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, 求解 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 时, 得同解方程

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0.$$

下面构造一组正交的基础解系: 若取 $\boldsymbol{\xi}_2 = (1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$, 要满足正交, 则应有 $\boldsymbol{\xi}_3 = (1, \square, -1)^{\mathrm{T}}$, 又要满足方程, 所以 $\boldsymbol{\xi}_3 = (1, -2, -1)^{\mathrm{T}}$,

(4)★ 正交化过程其实是可以避免的: 对重根求对应方程组的基础解系时, 可以直接凑出一组正交的基础解系.

对应 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, 求解 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 时, 得同解方程

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0.$$

下面构造一组正交的基础解系: 若取 $\boldsymbol{\xi}_2 = (1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$, 要满足正交, 则应有 $\boldsymbol{\xi}_3 = (1, \square, -1)^{\mathrm{T}}$, 又要满足方程, 所以 $\boldsymbol{\xi}_3 = (1, -2, -1)^{\mathrm{T}}$, 从而得到一组正交的基础解系:

$$\boldsymbol{\xi}_2 = (1, 0, 1)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{\xi}_3 = (1, -2, -1)^{\mathrm{T}}. \tag{17}$$

(4)★ 正交化过程其实是可以避免的: 对重根求对应方程组的基础解系时, 可以直接凑出一组正交的基础解系.

对应 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, 求解 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 时, 得同解方程

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0.$$

下面构造一组正交的基础解系: 若取 $\boldsymbol{\xi}_2 = (1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$, 要满足正交, 则应有 $\boldsymbol{\xi}_3 = (1, \square, -1)^{\mathrm{T}}$, 又要满足方程, 所以 $\boldsymbol{\xi}_3 = (1, -2, -1)^{\mathrm{T}}$, 从而得到一组正交的基础解系:

$$\boldsymbol{\xi}_2 = (1, 0, 1)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{\xi}_3 = (1, -2, -1)^{\mathrm{T}}. \tag{17}$$

类似地, 还可以取

$$\boldsymbol{\xi}_2 = (1, -1, 0)^{\mathrm{T}},$$

(4)★ 正交化过程其实是可以避免的: 对重根求对应方程组的基础解系时, 可以直接凑出一组正交的基础解系.

对应 $\lambda_2=\lambda_3=1$, 求解 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 时, 得同解方程

$$x_1+x_2-x_3=0.$$

下面构造一组正交的基础解系: 若取 $\boldsymbol{\xi}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$, 要满足正交, 则应有 $\boldsymbol{\xi}_3=(1,\square,-1)^{\mathrm{T}}$, 又要满足方程, 所以 $\boldsymbol{\xi}_3=(1,-2,-1)^{\mathrm{T}}$, 从而得到一组正交的基础解系:

$$\boldsymbol{\xi}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\xi}_3=(1,-2,-1)^{\mathrm{T}}. \tag{17}$$

类似地, 还可以取

$$\boldsymbol{\xi}_2=(1,-1,0)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\xi}_3=(1,1,2)^{\mathrm{T}}. \tag{18}$$

(4)★ 正交化过程其实是可以避免的: 对重根求对应方程组的基础解系时, 可以直接凑出一组正交的基础解系.

对应 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, 求解 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 时, 得同解方程

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0.$$

下面构造一组正交的基础解系: 若取 $\boldsymbol{\xi}_2 = (1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$, 要满足正交, 则应有 $\boldsymbol{\xi}_3 = (1, \square, -1)^{\mathrm{T}}$, 又要满足方程, 所以 $\boldsymbol{\xi}_3 = (1, -2, -1)^{\mathrm{T}}$, 从而得到一组正交的基础解系:

$$\boldsymbol{\xi}_2 = (1, 0, 1)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{\xi}_3 = (1, -2, -1)^{\mathrm{T}}. \tag{17}$$

类似地, 还可以取

$$\boldsymbol{\xi}_2 = (1, -1, 0)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{\xi}_3 = (1, 1, 2)^{\mathrm{T}}. \tag{18}$$

或者 $\boldsymbol{\xi}_2 = (0, 1, 1)^{\mathrm{T}}$,

(4)★ 正交化过程其实是可以避免的: 对重根求对应方程组的基础解系时, 可以直接凑出一组正交的基础解系.

对应 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, 求解 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 时, 得同解方程

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0.$$

下面构造一组正交的基础解系: 若取 $\boldsymbol{\xi}_2 = (1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$, 要满足正交, 则应有 $\boldsymbol{\xi}_3 = (1, \square, -1)^{\mathrm{T}}$, 又要满足方程, 所以 $\boldsymbol{\xi}_3 = (1, -2, -1)^{\mathrm{T}}$, 从而得到一组正交的基础解系:

$$\boldsymbol{\xi}_2 = (1, 0, 1)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{\xi}_3 = (1, -2, -1)^{\mathrm{T}}. \tag{17}$$

类似地, 还可以取

$$\boldsymbol{\xi}_2 = (1, -1, 0)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{\xi}_3 = (1, 1, 2)^{\mathrm{T}}. \tag{18}$$

或者 $\boldsymbol{\xi}_2 = (0, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_3 = (-2, 1, -1)^{\mathrm{T}}$, 等等.

(5) 满足条件的正交阵不是唯一的 (即便忽略 $\boldsymbol{P}$ 中 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ 的排列顺序). 事实上有无穷多个: 这里特征子空间 V_{λ_2} 是一个平面, 在其中任取两个正交的单位向量即可.

(5) 满足条件的正交阵不是唯一的 (即便忽略 $\boldsymbol{P}$ 中 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ 的排列顺序). 事实上有无穷多个: 这里特征子空间 V_{λ_2} 是一个平面, 在其中任取两个正交的单位向量即可.

把 (17) 式中的向量单位化得

$$\boldsymbol{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,-1)^{\mathrm{T}},$$

(5) 满足条件的正交阵不是唯一的 (即便忽略 $\boldsymbol{P}$ 中 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ 的排列顺序). 事实上有无穷多个: 这里特征子空间 V_{λ_2} 是一个平面, 在其中任取两个正交的单位向量即可.

把 (17) 式中的向量单位化得

$$\boldsymbol{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,-1)^{\mathrm{T}},$$

从而得满足条件的正交阵

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

(5) 满足条件的正交阵不是唯一的 (即便忽略 $\boldsymbol{P}$ 中 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ 的排列顺序). 事实上有无穷多个: 这里特征子空间 V_{λ_2} 是一个平面, 在其中任取两个正交的单位向量即可.

把 (17) 式中的向量单位化得

$$\boldsymbol{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, -1)^{\mathrm{T}},$$

从而得满足条件的正交阵

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

把 (17) 式中的向量单位化得满足条件的正交阵

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

例 3.8

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^n$.

例 3.8

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^n$.

解: 因 $\boldsymbol{A}$ 对称, 故 $\boldsymbol{A}$ 可对角化,

例 3.8

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^n$.

解: 因 $\boldsymbol{A}$ 对称, 故 $\boldsymbol{A}$ 可对角化, 即有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 及对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

例 3.8

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^n$.

解: 因 $\boldsymbol{A}$ 对称, 故 $\boldsymbol{A}$ 可对角化, 即有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 及对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$. 于是 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$,

例 3.8

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^n$.

解: 因 $\boldsymbol{A}$ 对称, 故 $\boldsymbol{A}$ 可对角化, 即有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 及对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$. 于是 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$, 从而

$$\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}\cdots\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}.$$

例 3.8

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^n$.

解: 因 $\boldsymbol{A}$ 对称, 故 $\boldsymbol{A}$ 可对角化, 即有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 及对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$. 于是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$, 从而

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}\cdots\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}.$$

由

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 \\ 1 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3),$$

例 3.8

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^n$.

解: 因 $\boldsymbol{A}$ 对称, 故 $\boldsymbol{A}$ 可对角化, 即有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 及对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$. 于是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$, 从而

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}\cdots\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}.$$

由

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 \\ 1 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3),$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=3$.

例 3.8

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^n$.

解: 因 $\boldsymbol{A}$ 对称, 故 $\boldsymbol{A}$ 可对角化, 即有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 及对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$. 于是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$, 从而

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}\cdots\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}.$$

由

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 \\ 1 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3),$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=3$. 于是

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} 1 & \\ & 3 \end{pmatrix},$$

例 3.8

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^n$.

解: 因 $\boldsymbol{A}$ 对称, 故 $\boldsymbol{A}$ 可对角化, 即有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 及对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$. 于是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$, 从而

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}\cdots\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}.$$

由

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 \\ 1 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3),$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=3$. 于是

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} 1 & \\ & 3 \end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{\Lambda}^n=\begin{pmatrix} 1 & \\ & 3^n \end{pmatrix}.$$

对应 $\lambda_1 = 1$, 由 $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

对应 $\lambda_1 = 1$, 由 $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 得 $\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

对应 $\lambda_1 = 1$, 由 $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 得 $\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

对应 $\lambda_2 = 3$, 由 $3\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

对应 $\lambda_1 = 1$, 由 $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 得 $\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

对应 $\lambda_2 = 3$, 由 $3\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 得 $\boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

对应 $\lambda_1 = 1$, 由 $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 得 $\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

对应 $\lambda_2 = 3$, 由 $3\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 得 $\boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

从而 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$,

对应 $\lambda_1=1$, 由 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, 得 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$;

对应 $\lambda_2=3$, 由 $3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, 得 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$;

从而 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, 再求出 $\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

对应 $\lambda_1=1$, 由 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, 得 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$;

对应 $\lambda_2=3$, 由 $3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, 得 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$;

从而 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, 再求出 $\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$. 于是

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \\ & 3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+3^n & 1-3^n\\ 1-3^n & 1+3^n\end{pmatrix}.$$

例 3.9

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 0 & -3 & 4\\ 0 & 4 & 3\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^{100}$.

解: 先把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对角化.

例 3.9

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 0 & -3 & 4\\ 0 & 4 & 3\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^{100}$.

解: 先把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对角化. 由

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -4 & -2\\ 0 & \lambda+3 & -4\\ 0 & -4 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-5)(\lambda+5),$$

例 3.9

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^{100}$.

解: 先把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对角化. 由

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -4 & -2 \\ 0 & \lambda + 3 & -4 \\ 0 & -4 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 5)(\lambda + 5),$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = -5.$

例 3.9

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 0 & -3 & 4\\ 0 & 4 & 3\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^{100}$.

解: 先把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对角化. 由

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -4 & -2\\ 0 & \lambda+3 & -4\\ 0 & -4 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-5)(\lambda+5),$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=5,\ \lambda_3=-5.$

当 $\lambda_1=1$ 时, 解方程 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. 由

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -4 & -2\\ 0 & 4 & -4\\ 0 & -4 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

可取 $\lambda_1 = 1$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1 = (1,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}}$.

可取 $\lambda_1 = 1$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1 = (1,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_2 = 5$ 时, 解方程 $(5\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 由

$$5\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -2 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可取 $\lambda_2 = 5$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_2 = (2,\ 1,\ 2)^{\mathrm{T}}$.

可取 $\lambda_1 = 1$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1 = (1,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_2 = 5$ 时, 解方程 $(5\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 由

$$5\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -2 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可取 $\lambda_2 = 5$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_2 = (2,\ 1,\ 2)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_3 = -5$ 时, 解方程 $(-5\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 由

$$-5\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -6 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可取 $\lambda_3 = -5$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_3 = (1,\ -2,\ 1)^{\mathrm{T}}$.

由

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3) = (\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3)\,\mathrm{diag}(1,\ 5,\ -5),$$

由

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3) = (\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3)\,\mathrm{diag}(1,\ 5,\ -5),$$

记 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3)$, $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(1,\ 5,\ -5)$,

由

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}_1,\, \boldsymbol{p}_2,\, \boldsymbol{p}_3) = (\boldsymbol{p}_1,\, \boldsymbol{p}_2,\, \boldsymbol{p}_3)\,\mathrm{diag}(1,\, 5,\, -5),$$

记 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1,\, \boldsymbol{p}_2,\, \boldsymbol{p}_3)$, $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(1,\, 5,\, -5)$, 则 $\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{P\Lambda}$, 即

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}.$$

由

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3) = (\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3)\operatorname{diag}(1,\ 5,\ -5),$$

记 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3)$, $\boldsymbol{\Lambda} = \operatorname{diag}(1,\ 5,\ -5)$, 则 $\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{P\Lambda}$, 即

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}.$$

则

$$\boldsymbol{A}^{100} = \boldsymbol{P\Lambda}^{100}\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{100} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2\cdot 5^{100} & 5^{100} \\ 0 & 5^{100} & -2\cdot 5^{100} \\ 0 & 2\cdot 5^{100} & 5^{100} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5^{100}-1 \\ 0 & 5^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{100} \end{pmatrix}.$$

注

这个题型很重要. 解此类型的题目的时候, 不要一味地只想到使用对角化的方法, 要灵活地依据题目的特点求解. 比如下面的题目.

注

这个题型很重要. 解此类型的题目的时候, 不要一味地只想到使用对角化的方法, 要灵活地依据题目的特点求解. 比如下面的题目.

例 3.10

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, 计算 $\boldsymbol{A}^5$.

解: (解法一) 注意到

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1, -1, -1),$$

解: (解法一) 注意到

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1, -1, -1),$$

则

$$A^5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1, -1, -1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1, -1, -1) \cdots \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1, -1, -1).$$

而

$$(1,-1,-1)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -3,$$

而

$$(1,-1,-1)\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=-3,$$

所以

$$\boldsymbol{A}^5=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot(-3)^4\cdot(1,-1,-1)=(-3)^4\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}(1,-1,-1)$$

$$=81\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-81&81&81\\81&-81&-81\\81&-81&-81\end{pmatrix}.$$

(解法二) 由

$$
\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -3 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}=-3\boldsymbol{A},
$$

(解法二) 由

$$A^2=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&-1\\1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&-1\\1&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-3&-3\\-3&3&3\\-3&3&3\end{pmatrix}=-3\boldsymbol{A},$$

可知

$$\boldsymbol{A}^5=(-3)^4\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-81&81&81\\81&-81&-81\\81&-81&-81\end{pmatrix}.$$

例 3.11

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & -4\\ -2 & x & -2\\ -4 & -2 & 1\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}5 & & \\ & -4 & \\ & & y\end{pmatrix}$ 相似, 求 x, y; 并求一个正交阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

例 3.11

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} 5 & & \\ & -4 & \\ & & y \end{pmatrix}$ 相似, 求 x, y; 并求一个正交阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

解: 方阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似, 则 5, -4, y 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

例 3.11

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} 5 & & \\ & -4 & \\ & & y \end{pmatrix}$ 相似, 求 x, y; 并求一个正交阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

解: 方阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似, 则 5, -4, y 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 由特征值性质 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a_{11}+a_{22}+a_{33}$ 和 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$,

例 3.11

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & -4\\ -2 & x & -2\\ -4 & -2 & 1\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}5 & & \\ & -4 & \\ & & y\end{pmatrix}$ 相似, 求 x, y; 并求一个正交阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

解: 方阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似, 则 $5, -4, y$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 由特征值性质 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a_{11}+a_{22}+a_{33}$ 和 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$, 得

$$\begin{cases}5+(-4)+y=1+x+1,\\ 5\cdot(-4)\cdot y=|\boldsymbol{A}|.\end{cases}\tag{19}$$

例 3.11

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&-4\\-2&x&-2\\-4&-2&1\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}5&&\\&-4&\\&&y\end{pmatrix}$ 相似, 求 x, y; 并求一个正交阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

解: 方阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似, 则 5, -4, y 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 由特征值性质 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a_{11}+a_{22}+a_{33}$ 和 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$, 得

$$\begin{cases}5+(-4)+y=1+x+1,\\ 5\cdot(-4)\cdot y=|\boldsymbol{A}|.\end{cases}\tag{19}$$

又

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&-2&-4\\-2&x&-2\\-4&-2&1\end{vmatrix}\xlongequal[r_3+4r_1]{r_2+2r_1}\begin{vmatrix}1&-2&-4\\0&x-4&-10\\0&-10&-15\end{vmatrix}=-15x-40,$$

代入 (19) 式得

$$\begin{cases} 1+y=2+x, \\ -20y=-15x-40. \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x=4, \\ y=5. \end{cases}$$

代入 (19) 式得

$$\begin{cases} 1+y=2+x, \\ -20y=-15x-40. \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x=4, \\ y=5. \end{cases}$$

下求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=5$ 时, 解方程 $(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. 由

$$\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

代入 (19) 式得

$$\begin{cases} 1+y=2+x, \\ -20y=-15x-40. \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} x=4, \\ y=5. \end{cases}$$

下求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=5$ 时, 解方程 $(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得一组正交的基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1=(1,\ -2,\ 0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\xi}_2=\left(2,\ 1,\ -\frac{5}{2}\right)^{\mathrm{T}}.$$

单位化得

$$\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(1,\ -2,\ 0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{p}_2=\left(\frac{4}{3\sqrt{5}},\ \frac{2}{3\sqrt{5}},\ -\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{\mathrm{T}}.$$

当 $\lambda_3 = -4$ 时, 解方程 $(\boldsymbol{A} + 4\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. 由

$$\boldsymbol{A} + 4\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_3 = (2,\ 1,\ 2)^{\mathrm{T}}$, 单位化得

$$\boldsymbol{p}_3 = \frac{1}{3}(2,\ 1,\ 2)^{\mathrm{T}}.$$

令

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_3,\ \boldsymbol{p}_2)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{P}$ 为所求的一个正交矩阵, 并满足

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} 5 & & \\ & -4 & \\ & & 5 \end{pmatrix}.$$

令

$$P = (p_1, p_3, p_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix},$$

则 P 为所求的一个正交矩阵, 并满足

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} 5 & & \\ & -4 & \\ & & 5 \end{pmatrix}.$$

注意到 Λ 中的对角元 5, −4, 5 的排列顺序, 故 P 的列向量要对角地取为 p_1, p_3, p_2.

满足条件的正交矩阵不是唯一的. 比如解方程 $(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 时, 构造一组正交的基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=(1,\ 0,\ -1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\xi}_2=(1,\ -4,\ 1)^{\mathrm{T}}.$$

满足条件的正交矩阵不是唯一的. 比如解方程 $(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 时, 构造一组正交的基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=(1,\,0,\,-1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\xi}_2=(1,\,-4,\,1)^{\mathrm{T}}.$$

单位化得

$$\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\,0,\,-1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{p}_2=\frac{1}{3\sqrt{2}}(1,\,-4,\,1)^{\mathrm{T}}.$$

最后可得满足条件的正交矩阵为

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\,\boldsymbol{p}_3,\,\boldsymbol{p}_2)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

例 3.12

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 1$; 对应的特征向量依次为

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{A}$.

例 3.12

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\ \lambda_2=-2,\ \lambda_3=1$; 对应的特征向量依次为

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{A}$.

解: 记 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3)$, $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3)$, 则 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P\Lambda}$, 所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}&=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&&\\&-2&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}^{-1}\\&=\begin{pmatrix}0&-2&1\\2&-2&1\\2&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}^{-1}.\end{aligned}$$

其中

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-c_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3-c_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 5 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_1-c_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hdashline -3 & -2 & 3 \\ -3 & -4 & 5 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hdashline -2 & 3 & -3 \\ -4 & 5 & -3 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix},$$

所以

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -4 & 5 & -3 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

例 3.13

设 3 阶对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 0$; 对应 λ_1, λ_2 的特征向量依次为

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

求 $\boldsymbol{A}$.

例 3.13

设 3 阶对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 0$; 对应 λ_1, λ_2 的特征向量依次为

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

求 $\boldsymbol{A}$.

解: 设 λ_3 对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_3 = (x, y, z)^{\mathrm{T}}$. 注意到 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵,
由 $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$, 知 $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$ 两两正交.

例 3.13

设 3 阶对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 0$; 对应 λ_1, λ_2 的特征向量依次为

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

求 $\boldsymbol{A}$.

解: 设 λ_3 对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_3 = (x, y, z)^{\mathrm{T}}$. 注意到 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵, 由 $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$, 知 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ 两两正交. 则

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0, \\ 2x + y - 2z = 0. \end{cases} \tag{20}$$

例 3.13

设 3 阶对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 0$; 对应 λ_1, λ_2 的特征向量依次为

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

求 $\boldsymbol{A}$.

解: 设 λ_3 对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_3 = (x, y, z)^{\mathrm{T}}$. 注意到 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵, 由 $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$, 知 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ 两两正交. 则

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0, \\ 2x + y - 2z = 0. \end{cases} \tag{20}$$

由系数矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

可取

$$\boldsymbol{p}_3 = (-2,\ 2,\ -1)^{\mathrm{T}},$$

可取

$$\boldsymbol{p}_3 = (-2,\ 2,\ -1)^{\mathrm{T}},$$

因 $\boldsymbol{A}$ 对称, 必有正交阵 $\boldsymbol{Q}$, 使

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \mathrm{diag}(1,\ -1,\ 0).$$

可取

$$\boldsymbol{p}_3 = (-2,\ 2,\ -1)^{\mathrm{T}},$$

因 $\boldsymbol{A}$ 对称, 必有正交阵 $\boldsymbol{Q}$, 使

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \mathrm{diag}(1,\ -1,\ 0).$$

前面已经求得 $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$ 正交, 再单位化, 即得

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

所以

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{Q}\,\mathrm{diag}(1,\,-1,\,0)\,\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \\
&= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

例 3.14

设 3 阶对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$, 与特征值 $\lambda_1 = 6$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1 = (1,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$, 求 $\boldsymbol{A}$.

例 3.14

设 3 阶对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = \lambda_3 = 3$, 与特征值 $\lambda_1 = 6$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1 = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, 求 $\boldsymbol{A}$.

解: 1° 先求出 λ_2, λ_3 所对应的特征向量 $\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$.

例 3.14

设 3 阶对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = \lambda_3 = 3$, 与特征值 $\lambda_1 = 6$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1 = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, 求 $\boldsymbol{A}$.

解: 1° 先求出 λ_2, λ_3 所对应的特征向量 $\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$.

因 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵, 则 $\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ 与 $\boldsymbol{p}_1$ 正交.

例 3.14

设 3 阶对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$, 与特征值 $\lambda_1 = 6$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1 = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, 求 $\boldsymbol{A}$.

解: 1° 先求出 λ_2, λ_3 所对应的特征向量 $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$.

因 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵, 则 $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$ 与 $\boldsymbol{p}_1$ 正交. 设 $(x, y, z)^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{p}_1$ 正交, 则

$$x + y + z = 0.$$

例 3.14

设 3 阶对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$, 与特征值 $\lambda_1 = 6$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1 = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, 求 $\boldsymbol{A}$.

解: 1° 先求出 λ_2, λ_3 所对应的特征向量 $\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$.

因 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵, 则 $\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ 与 $\boldsymbol{p}_1$ 正交. 设 $(x, y, z)^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{p}_1$ 正交, 则

$$x + y + z = 0.$$

得一组正交的基础解系

$$(1, -1, 0)^{\mathrm{T}}, (1, 1, -2)^{\mathrm{T}}.$$

例 3.14

设 3 阶对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$, 与特征值 $\lambda_1 = 6$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1 = (1,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$, 求 $\boldsymbol{A}$.

解: 1° 先求出 λ_2, λ_3 所对应的特征向量 $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$.

因 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵, 则 $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$ 与 $\boldsymbol{p}_1$ 正交. 设 $(x,\ y,\ z)^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{p}_1$ 正交, 则

$$x + y + z = 0.$$

得一组正交的基础解系

$$(1,\ -1,\ 0)^{\mathrm{T}},\ (1,\ 1,\ -2)^{\mathrm{T}}.$$

所以可取

$$\boldsymbol{p}_2 = (1,\ -1,\ 0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{p}_3 = (1,\ 1,\ -2)^{\mathrm{T}}.$$

2° 因 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ 已经两两正交, 将它们单位化得到的向量记为 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$,

2° 因 $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$ 已经两两正交, 将它们单位化得到的向量记为 $\boldsymbol{\eta}_1$, $\boldsymbol{\eta}_2$, $\boldsymbol{\eta}_3$, 得正交矩阵

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

2° 因 $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$ 已经两两正交, 将它们单位化得到的向量记为 $\boldsymbol{\eta}_1$, $\boldsymbol{\eta}_2$, $\boldsymbol{\eta}_3$, 得正交矩阵

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

记 $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(6, 3, 3)$,

2° 因 $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$ 已经两两正交, 将它们单位化得到的向量记为 $\boldsymbol{\eta}_1$, $\boldsymbol{\eta}_2$, $\boldsymbol{\eta}_3$, 得正交矩阵

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

记 $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(6, 3, 3)$, 则

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Outline

1. 矩阵的特征值和特征向量
2. 矩阵可对角化的条件
3. 实对称矩阵的对角化
4. 习题
5. 总结与复习

练习 4.1 (习题 1)

求下列矩阵的特征值与特征向量.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; (3) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; (5) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; (6) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

练习 4.1 (习题 1)

求下列矩阵的特征值与特征向量.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; (3) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; (5) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; (6) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

解: (1) $|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 3 \\ 3 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-1) - 9 = \lambda^2 - 3\lambda - 7.$

练习 4.1 (习题 1)

求下列矩阵的特征值与特征向量.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; (3) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; (5) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; (6) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

解: (1) $|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 3 \\ 3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 1) - 9 = \lambda^2 - 3\lambda - 7.$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为: $\lambda_1 = \dfrac{3 + \sqrt{37}}{2}$, $\lambda_2 = \dfrac{3 - \sqrt{37}}{2}$.

当 $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{37}}{2}$ 时, 解方程组 $(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{37}-1}{2} & 3 \\ 3 & \frac{\sqrt{37}+1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \times \frac{\sqrt{37}+1}{2}} \begin{pmatrix} 9 & 3 \cdot \frac{\sqrt{37}+1}{2} \\ 3 & \frac{\sqrt{37}+1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - 3r_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & \frac{\sqrt{37}+1}{2} \end{pmatrix},$$

当 $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{37}}{2}$ 时, 解方程组 $(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{37}-1}{2} & 3 \\ 3 & \frac{\sqrt{37}+1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \times \frac{\sqrt{37}+1}{2}} \begin{pmatrix} 9 & 3 \cdot \frac{\sqrt{37}+1}{2} \\ 3 & \frac{\sqrt{37}+1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - 3r_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & \frac{\sqrt{37}+1}{2} \end{pmatrix},$$

解得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1 = (6, 1 - \sqrt{37})^{\mathrm{T}}$. 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{37}}{2}$ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1$(k_1 为任意非零常数).

当 $\lambda_1=\frac{3+\sqrt{37}}{2}$ 时, 解方程组 $(\lambda_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{37}-1}{2} & 3\\ 3 & \frac{\sqrt{37}+1}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\times\frac{\sqrt{37}+1}{2}}\begin{pmatrix}9 & 3\cdot\frac{\sqrt{37}+1}{2}\\ 3 & \frac{\sqrt{37}+1}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-3r_2}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 3 & \frac{\sqrt{37}+1}{2}\end{pmatrix},$$

解得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=(6,1-\sqrt{37})^{\mathrm{T}}$. 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_1=\frac{3+\sqrt{37}}{2}$ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1$(k_1 为任意非零常数).

当 $\lambda_2=\frac{3-\sqrt{37}}{2}$ 时, 解方程组 $(\lambda_2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{37}+1}{2} & 3\\ 3 & \frac{1-\sqrt{37}}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\times\frac{1-\sqrt{37}}{2}}\begin{pmatrix}9 & 3\cdot\frac{1-\sqrt{37}}{2}\\ 3 & \frac{1-\sqrt{37}}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-3r_2}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 3 & \frac{1-\sqrt{37}}{2}\end{pmatrix},$$

当 $\lambda_1=\frac{3+\sqrt{37}}{2}$ 时, 解方程组 $(\lambda_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{37}-1}{2} & 3\\ 3 & \frac{\sqrt{37}+1}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\times\frac{\sqrt{37}+1}{2}}\begin{pmatrix}9 & 3\cdot\frac{\sqrt{37}+1}{2}\\ 3 & \frac{\sqrt{37}+1}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-3r_2}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 3 & \frac{\sqrt{37}+1}{2}\end{pmatrix},$$

解得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=(6,1-\sqrt{37})^{\mathrm{T}}$. 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_1=\frac{3+\sqrt{37}}{2}$ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1$(k_1 为任意非零常数).

当 $\lambda_2=\frac{3-\sqrt{37}}{2}$ 时, 解方程组 $(\lambda_2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{37}+1}{2} & 3\\ 3 & \frac{1-\sqrt{37}}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\times\frac{1-\sqrt{37}}{2}}\begin{pmatrix}9 & 3\cdot\frac{1-\sqrt{37}}{2}\\ 3 & \frac{1-\sqrt{37}}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-3r_2}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 3 & \frac{1-\sqrt{37}}{2}\end{pmatrix},$$

解得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_2=(6,1+\sqrt{37})^{\mathrm{T}}$. 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_2=\frac{3+\sqrt{37}}{2}$ 的全部特征向量为 $k_2\boldsymbol{\xi}_2$(k_2 为任意非零常数).

(2)

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & -1 \\ -2 & \lambda & -1 \\ -1 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_2-\lambda r_3]{r_1-r_3} \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 1-\lambda \\ \lambda-2 & 0 & -\lambda^2+2\lambda-1 \\ -1 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1-\lambda \\ \lambda-2 & -\lambda^2+2\lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda-1).$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1$.

(2)

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & -1 \\ -2 & \lambda & -1 \\ -1 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_2-\lambda r_3]{r_1-r_3} \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 1-\lambda \\ \lambda-2 & 0 & -\lambda^2+2\lambda-1 \\ -1 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1-\lambda \\ \lambda-2 & -\lambda^2+2\lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda-1).$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为: $\lambda_1=\lambda_2=2$, $\lambda_3=1$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 时, 解方程组 $(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(r_1+r_2)\times(-1)]{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$. 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1$ (k_1 为任意非零常数).

当 $\lambda_3 = 1$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 - r_3]{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

当 $\lambda_3 = 1$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 - r_3]{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

解得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_2 = (0, 1, 1)^{\mathrm{T}}$. 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_3 = 1$ 的全部特征向量为 $k_2\boldsymbol{\xi}_2$ (k_2 为任意非零常数).

(3)

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^3.$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

(3)

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & 0\\ -1 & \lambda-1 & -1\\ -1 & 1 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1\\ 1 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)^3.$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$ 时, 解方程组 $(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

(3)

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^3.$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 时, 解方程组 $(2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1 = (1,1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\xi}_2 = (-1,0,1)^{\mathrm{T}}$. 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2$, ($k_1$, k_2 不同时为 0).

(4) $|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & \lambda-1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^4$, 故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$.

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 3$, 知其基础解系只包含一个解向量. 而 $(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$ 显然是其解, 故基础解系为 $\boldsymbol{\xi} = (1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$.

(4) $|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & \lambda-1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^4$, 故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=3$, 知其基础解系只包含一个解向量. 而 $(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$ 显然是其解, 故基础解系为 $\boldsymbol{\xi}=(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$. 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1$ 的全部特征向量为 $k\boldsymbol{\xi}$, (k 为任意非零常数).

(5)

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-4 & -5 & 2 \\ 2 & \lambda+2 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \overset{c_1-c_2}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} \lambda-4 & -\lambda-1 & 2 \\ 2 & \lambda & -1 \\ 1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{展开}r_3}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} -\lambda-1 & 2 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix} + (\lambda-1) \begin{vmatrix} \lambda-4 & -\lambda-1 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-\lambda+1) + (\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+2) = (\lambda-1)^3.$$

(5)

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-4 & -5 & 2\\ 2 & \lambda+2 & -1\\ 1 & 1 & \lambda-1\end{vmatrix} \xlongequal{c_1-c_2} \begin{vmatrix}\lambda-4 & -\lambda-1 & 2\\ 2 & \lambda & -1\\ 1 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{展开}r_3} \begin{vmatrix}-\lambda-1 & 2\\ \lambda & -1\end{vmatrix}+(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-4 & -\lambda-1\\ 2 & \lambda\end{vmatrix}$$

$$=(-\lambda+1)+(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+2)=(\lambda-1)^3.$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$.

(5)

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-4 & -5 & 2\\ 2 & \lambda+2 & -1\\ 1 & 1 & \lambda-1\end{vmatrix} \xlongequal{c_1-c_2} \begin{vmatrix}\lambda-4 & -\lambda-1 & 2\\ 2 & \lambda & -1\\ 1 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{展开r_3} \begin{vmatrix}-\lambda-1 & 2\\ \lambda & -1\end{vmatrix}+(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-4 & -\lambda-1\\ 2 & \lambda\end{vmatrix}$$

$$=(-\lambda+1)+(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+2)=(\lambda-1)^3.$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-3 & -5 & 2\\ 2 & 3 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[r_2-2r_3]{r_1+2r_2} \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_1} \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$, 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$ 的全部特征向量为 $k\boldsymbol{\xi}$, (k 为任意非零常数).

(6)

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-1 & 2 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix} \xlongequal{\text{展开}r_1} (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)(\lambda^2-\lambda-4)-4\lambda = (\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-4).$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为: $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4.$

当 $\lambda_1 = -2$ 时, 解方程组 $(-2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+r_3} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \div 2]{r_1+2r_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1 = (1,2,2)^{\mathrm{T}}$. 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_1 = -2$ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1$ (k_1 为任意非零常数).

当 $\lambda_2 = 1$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 \times (-1)]{r_2 + 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_2 = (2, 1, -2)^{\mathrm{T}}$. 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_2 = 1$ 的全部特征向量为 $k_2\boldsymbol{\xi}_2$ (k_2 为任意非零常数).

当 $\lambda_2 = 1$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 \times (-1)]{r_2 + 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_2 = (2, 1, -2)^{\mathrm{T}}$. 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_2 = 1$ 的全部特征向量为 $k_2\boldsymbol{\xi}_2$ (k_2 为任意非零常数).

当 $\lambda_3 = 4$ 时, 解方程组 $(4\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$4\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_3 = (-2, 2, -1)^{\mathrm{T}}$. 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_3 = 4$ 的全部特征向量为 $k_3\boldsymbol{\xi}_3$ (k_3 为任意非零常数).

练习 4.2 (习题 2)

已知矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & x \end{pmatrix}$ 的特征值 $\lambda_1 = 3$ (二重), $\lambda_2 = 12$, 求 x 的值, 并求特征向量.

练习 4.2 (习题 2)

已知矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & x \end{pmatrix}$ 的特征值 $\lambda_1 = 3$ (二重), $\lambda_2 = 12$, 求 x 的值, 并求特征向量.

解: 由特征值的性质 $\lambda_1 + \lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$,

练习 4.2 (习题 2)

已知矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & x \end{pmatrix}$ 的特征值 $\lambda_1 = 3$ (二重), $\lambda_2 = 12$, 求 x 的值, 并求特征向量.

解: 由特征值的性质 $\lambda_1 + \lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$, 得

$$3 + 3 + 12 = 7 + 7 + x,$$

练习 4.2 (习题 2)

已知矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & x \end{pmatrix}$ 的特征值 $\lambda_1 = 3$ (二重), $\lambda_2 = 12$, 求 x 的值, 并求特征向量.

解: 由特征值的性质 $\lambda_1 + \lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$, 得

$$3 + 3 + 12 = 7 + 7 + x,$$

故 $x = 4$.

练习 4.2 (习题 2)

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}7 & 4 & -1\\ 4 & 7 & -1\\ -4 & -4 & x\end{pmatrix}$ 的特征值 $\lambda_1=3$ (二重), $\lambda_2=12$, 求 x 的值, 并求特征向量.

解: 由特征值的性质 $\lambda_1+\lambda_1+\lambda_2=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})$, 得

$$3+3+12=7+7+x,$$

故 $x=4$.

当 $\lambda_1=3$ 时, 解方程组 $(\lambda_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 由

$$3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-4 & -4 & 1\\ -4 & -4 & 1\\ 4 & 4 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}4 & 4 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=(1,0,4)^{\mathrm{T}}$, 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_1=3$ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$ (k_1, k_2 不同时为零).

当 $\lambda_2 = 12$ 时, 解方程组 $(\lambda_2 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, 由

$$12\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & 1 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & 5 & 1 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2+4r_1]{r_3-4r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

当 $\lambda_2 = 12$ 时, 解方程组 $(\lambda_2 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$12\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & 1 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & 5 & 1 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2+4r_1]{r_3-4r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_3 = (1, 1, -1)^{\mathrm{T}}$, 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_2 = 12$ 的全部特征向量为 $k_3\boldsymbol{\xi}_3$ (k_3 为任意非零常数).

练习 4.3 (习题 3)

设 $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不同特征值的特征向量, 证明 $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征向量.

练习 4.3 (习题 3)

设 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不同特征值的特征向量, 证明 $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征向量.

证: 用反证法. 假设 $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量, 对应的特征值为 λ, 即

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \lambda(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2).$$

练习 4.3 (习题 3)

设 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不同特征值的特征向量, 证明 $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征向量.

证: 用反证法. 假设 $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量, 对应的特征值为 λ, 即

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)=\lambda(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2).$$

设 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的分别对应于特征值 λ_1, λ_2 的特征向量, 且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$,

练习 4.3 (习题 3)

设 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不同特征值的特征向量, 证明 $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征向量.

证: 用反证法. 假设 $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量, 对应的特征值为 λ, 即

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)=\lambda(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2).$$

设 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的分别对应于特征值 λ_1, λ_2 的特征向量, 且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 即有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1=\lambda_1\boldsymbol{x}_1, \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2=\lambda_2\boldsymbol{x}_2,$$

练习 4.3 (习题 3)

设 $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不同特征值的特征向量, 证明 $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征向量.

证: 用反证法. 假设 $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量, 对应的特征值为 λ, 即

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)=\lambda(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2).$$

设 $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的分别对应于特征值 λ_1, λ_2 的特征向量, 且 $\lambda_1\neq\lambda_2$, 即有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1=\lambda_1\boldsymbol{x}_1,\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2=\lambda_2\boldsymbol{x}_2,$$

于是

$$\lambda(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)=\lambda_1\boldsymbol{x}_1+\lambda_2\boldsymbol{x}_2,$$

得到

$$(\lambda-\lambda_1)\boldsymbol{x}_1+(\lambda-\lambda_2)\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{0},$$

练习 4.3 (习题 3)

设 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不同特征值的特征向量, 证明 $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征向量.

证: 用反证法. 假设 $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量, 对应的特征值为 λ, 即

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \lambda(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2).$$

设 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的分别对应于特征值 λ_1, λ_2 的特征向量, 且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 即有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1, \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{x}_2,$$

于是

$$\lambda(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2,$$

得到

$$(\lambda - \lambda_1)\boldsymbol{x}_1 + (\lambda - \lambda_2)\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0},$$

因为 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ 对应 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值, 所以 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ 线性无关,

练习 4.3 (习题 3)

设 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不同特征值的特征向量, 证明 $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征向量.

证: 用反证法. 假设 $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量, 对应的特征值为 λ, 即

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)=\lambda(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2).$$

设 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的分别对应于特征值 λ_1, λ_2 的特征向量, 且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 即有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1=\lambda_1\boldsymbol{x}_1, \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2=\lambda_2\boldsymbol{x}_2,$$

于是

$$\lambda(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)=\lambda_1\boldsymbol{x}_1+\lambda_2\boldsymbol{x}_2,$$

得到

$$(\lambda-\lambda_1)\boldsymbol{x}_1+(\lambda-\lambda_2)\boldsymbol{x}_2=\mathbf{0},$$

因为 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ 对应 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值, 所以 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ 线性无关, 从而有
$\lambda-\lambda_1=\lambda-\lambda_2=0$, 得 $\lambda=\lambda_1=\lambda_2$. 矛盾! □

练习 4.4 (习题 4)

设 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ 分别是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于互不相同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的特征向量, 证明 $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

练习 4.4 (习题 4)

设 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ 分别是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于互不相同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的特征向量, 证明 $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

证: 用反证法. 假设 $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量, 对应的特征值为 λ, 即

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3) = \lambda(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3).$$

练习 4.4 (习题 4)

设 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ 分别是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于互不相同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的特征向量, 证明 $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

证: 用反证法. 假设 $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量, 对应的特征值为 λ, 即

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3) = \lambda(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3).$$

由题设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_3 = \lambda_3\boldsymbol{x}_3$, 于是

$$\lambda(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3) = \lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2\boldsymbol{x}_2 + \lambda_3\boldsymbol{x}_3,$$

从而

$$(\lambda - \lambda_1)\boldsymbol{x}_1 + (\lambda - \lambda_2)\boldsymbol{x}_2 + (\lambda - \lambda_3)\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0},$$

因为 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ 对应 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值, 所以 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ 线性无关, 从而有

$$\lambda - \lambda_1 = \lambda - \lambda_2 = \lambda - \lambda_3 = 0 \Longrightarrow \lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3.$$

矛盾! $\square$

练习 4.5 (习题 5)

证明对合矩阵 $\boldsymbol{A}$ (即 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{I}$) 的特征值只能为 1 或 -1.

练习 4.5 (习题 5)

证明对合矩阵 $\boldsymbol{A}$ (即 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{I}$) 的特征值只能为 1 或 -1.

证: 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{x}$ 是对应的特征向量, 即有 $\boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{x}$.

练习 4.5 (习题 5)

证明对合矩阵 $\boldsymbol{A}$ (即 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{I}$) 的特征值只能为 1 或 -1.

证: 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{x}$ 是对应的特征向量, 即有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$.
上式两边同时左乘以 $\boldsymbol{A}$, 得

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda^2\boldsymbol{x},$$

练习 4.5 (习题 5)

证明对合矩阵 $\boldsymbol{A}$ (即 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{I}$) 的特征值只能为 1 或 -1.

证: 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{x}$ 是对应的特征向量, 即有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$. 上式两边同时左乘以 $\boldsymbol{A}$, 得

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda^2\boldsymbol{x},$$

注意到 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{I}$, 则有

$$\boldsymbol{x} = \lambda^2\boldsymbol{x},$$

即

$$(1 - \lambda^2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},$$

练习 4.5 (习题 5)

证明对合矩阵 $\boldsymbol{A}$ (即 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{I}$) 的特征值只能为 1 或 -1.

证: 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{x}$ 是对应的特征向量, 即有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$.
上式两边同时左乘以 $\boldsymbol{A}$, 得

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda^2\boldsymbol{x},$$

注意到 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{I}$, 则有

$$\boldsymbol{x} = \lambda^2\boldsymbol{x},$$

即

$$(1 - \lambda^2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},$$

因为 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, 所以 $1 - \lambda^2 = 0$, 从而 $\lambda = 1$ 或 -1. □

练习 4.6 (习题 6)

设 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 讨论 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值 (特征向量) 之间的相互关系.

练习 4.6 (习题 6)

设 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 讨论 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值 (特征向量) 之间的相互关系.

解: 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$, 即有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$.

练习 4.6 (习题 6)

设 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 讨论 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值 (特征向量) 之间的相互关系.

解: 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$, 即有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$.
因 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$, 由 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 得

$$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}.$$

练习 4.6 (习题 6)

设 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 讨论 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值 (特征向量) 之间的相互关系.

解: 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$, 即有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$.
因 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$, 由 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 得

$$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}.$$

从而

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}$$

练习 4.6 (习题 6)

设 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 讨论 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值 (特征向量) 之间的相互关系.

解: 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$, 即有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$.
因 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$, 由 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 得

$$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}.$$

从而

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{A}|\lambda^{-1}\boldsymbol{x}.$$

练习 4.6 (习题 6)

设 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 讨论 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值 (特征向量) 之间的相互关系.

解: 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$, 即有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$.
因 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$, 由 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 得

$$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}.$$

从而

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{A}|\lambda^{-1}\boldsymbol{x}.$$

即

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}\boldsymbol{x}.$$

练习 4.6 (习题 6)

设 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 讨论 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值 (特征向量) 之间的相互关系.

解: 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$, 即有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$.
因 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$, 由 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 得

$$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}.$$

从而

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{A}|\lambda^{-1}\boldsymbol{x}.$$

即

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}\boldsymbol{x}.$$

得证 $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值 (对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$).

练习 4.6 (习题 6)

设 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 讨论 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值 (特征向量) 之间的相互关系.

解: 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$, 即有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$.

因 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$, 由 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 得

$$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}.$$

从而

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{A}|\lambda^{-1}\boldsymbol{x}.$$

即

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}\boldsymbol{x}.$$

得证 $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值 (对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$).

综上, 如果 λ 是可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 那么 $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 就是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值, 对应的特征向量相同. □

练习 4.7 (习题 7)

若 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$, 问: $\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{I}$ 是否成立?

练习 4.7 (习题 7)

若 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$, 问: $\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{I}$ 是否成立?

解: $\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}-2\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{I}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{I}$, 即成立. □

练习 4.8 (习题 8)

已知 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求 $\det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})$.

练习 4.8 (习题 8)

已知 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求 $\det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})$.

解: 因为 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{\Lambda}$, 所以存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$,

练习 4.8 (习题 8)

已知 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求 $\det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})$.

解: 因为 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{\Lambda}$, 所以存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$, 即 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$, 从而 $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{I}\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{\Lambda} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{P}^{-1}$,

练习 4.8 (习题 8)

已知 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求 $\det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})$.

解: 因为 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{\Lambda}$, 所以存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$, 即 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$, 从而 $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{I}\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{\Lambda} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{P}^{-1}$, 两边取行列式得:

$$|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}| = |\boldsymbol{P}||\boldsymbol{\Lambda} - \boldsymbol{I}||\boldsymbol{P}^{-1}| = |\boldsymbol{\Lambda} - \boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} -1-1 & 0 \\ 0 & 2-1 \end{vmatrix} = -2.$$

练习 4.8 (习题 8)

已知 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求 $\det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})$.

解: 因为 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{\Lambda}$, 所以存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$, 即 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$, 从而 $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{I}\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{\Lambda} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{P}^{-1}$, 两边取行列式得:

$$|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}| = |\boldsymbol{P}||\boldsymbol{\Lambda} - \boldsymbol{I}||\boldsymbol{P}^{-1}| = |\boldsymbol{\Lambda} - \boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} -1-1 & 0 \\ 0 & 2-1 \end{vmatrix} = -2.$$

另解: 由已知条件可知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 -1 和 2, 那么 $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}$ 的特征值为 $-1 - 1 = -2$ 和 $2 - 1 = 1$, 于是

$$|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}| = (-2) \times 1 = -2.$$

练习 4.9 (习题 9)

已知 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^n$.

练习 4.9 (习题 9)

已知 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^n$.

解: 由题设得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$,

练习 4.9 (习题 9)

已知 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^n$.

解: 由题设得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$, 又

$$\boldsymbol{P}^{-1}=-\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},$$

练习 4.9 (习题 9)

已知 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^n$.

解: 由题设得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$, 又

$$\boldsymbol{P}^{-1}=-\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n\boldsymbol{P}^{-1}&=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix} 4(-1)^n-3\cdot 2^n & 2(-1)^{n+1}+2^{n+1} \\ 6(-1)^n-3\cdot 2^{n+1} & 3(-1)^{n+1}+2^{n+2} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

练习 4.10 (习题 10)

设 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{x}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 λ_0 的特征向量. 证明 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 对应特征值 λ_0 的一个特征向量.

练习 4.10 (习题 10)

设 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{x}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 λ_0 的特征向量. 证明 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 对应特征值 λ_0 的一个特征向量.

证: 即要证

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x})=\lambda_0(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}).$$

练习 4.10 (习题 10)

设 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{x}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 λ_0 的特征向量. 证明 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 对应特征值 λ_0 的一个特征向量.

证: 即要证

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x})=\lambda_0(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}).$$

两边左乘 $\boldsymbol{P}$, 得

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}=\lambda_0\boldsymbol{x}.$$

练习 4.10 (习题 10)

设 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{x}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 λ_0 的特征向量. 证明 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 对应特征值 λ_0 的一个特征向量.

证: 即要证

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x})=\lambda_0(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}).$$

两边左乘 $\boldsymbol{P}$, 得

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}=\lambda_0\boldsymbol{x}.$$

又 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}$,

练习 4.10 (习题 10)

设 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{x}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 λ_0 的特征向量. 证明 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 对应特征值 λ_0 的一个特征向量.

证: 即要证

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x})=\lambda_0(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}).$$

两边左乘 $\boldsymbol{P}$, 得

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}=\lambda_0\boldsymbol{x}.$$

又 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}$, 故上式即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda_0\boldsymbol{x}.$$

而这是题设.

练习 4.10 (习题 10)

设 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{x}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 λ_0 的特征向量. 证明 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 对应特征值 λ_0 的一个特征向量.

证: 即要证

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x})=\lambda_0(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}).$$

两边左乘 $\boldsymbol{P}$, 得

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}=\lambda_0\boldsymbol{x}.$$

又 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}$, 故上式即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda_0\boldsymbol{x}.$$

而这是题设. 故结论成立. □

练习 4.11 (习题 11)

设 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵, 证明 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 相似.

练习 4.11 (习题 11)

设 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵, 证明 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 相似.

证: 由 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵,

练习 4.11 (习题 11)

设 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵, 证明 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 相似.

证: 由 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵, 得

$$\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{A},$$

练习 4.11 (习题 11)

设 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵, 证明 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 相似.

证: 由 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵, 得

$$\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{A},$$

即 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 相似. (从而也有相同的特征值.) □

练习 4.12 (习题 12)

设 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C} \sim \boldsymbol{D}$, 证明: $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$.

练习 4.12 (习题 12)

设 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C} \sim \boldsymbol{D}$, 证明: $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$.

证: 由 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C} \sim \boldsymbol{D}$, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, 使得

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}, \quad \boldsymbol{D} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q},$$

练习 4.12 (习题 12)

设 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C} \sim \boldsymbol{D}$, 证明: $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$.

证: 由 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C} \sim \boldsymbol{D}$, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, 使得

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}, \quad \boldsymbol{D} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q},$$

作矩阵 $\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Q} \end{pmatrix}$, 因为 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ 都可逆, 所以 $\boldsymbol{T}$ 也可逆, 且

$$\boldsymbol{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}^{-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Q}^{-1} \end{pmatrix}.$$

于是

$$\boldsymbol{T}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}\end{pmatrix}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Q}^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{P} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Q}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}.$$

所以 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}$. □

练习 4.13 (习题 13)

证明: m 阶矩阵 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ 只有零特征值, 且其特征子空间是 $\mathbb{R}^m$ 的一维子空间, 并求它的基.

练习 4.13 (习题 13)

证明: m 阶矩阵 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ 只有零特征值, 且其特征子空间是 $\mathbb{R}^m$ 的一维子空间, 并求它的基.

证: 由 $|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{J}|=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ & & & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^m=0$, 得 $\lambda=0$, 即矩阵 $\boldsymbol{J}$ 只有零特征值.

练习 4.13 (习题 13)

证明: m 阶矩阵 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ 只有零特征值, 且其特征子空间是 $\mathbb{R}^m$ 的一维子空间, 并求它的基.

证: 由 $|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{J}|=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ & & & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^m=0$, 得 $\lambda=0$, 即矩阵 $\boldsymbol{J}$ 只有零特征值.

因为 $\mathrm{r}(\boldsymbol{J})=m-1$, 所以 $(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{J})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 即 $\boldsymbol{J}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中只有一个解向量, 取为 $\boldsymbol{\xi}=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$.

练习 4.13 (习题 13)

证明: m 阶矩阵 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ 只有零特征值, 且其特征子空间是 $\mathbb{R}^m$ 的一维子空间, 并求它的基.

证: 由 $|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{J}|=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ & & & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^m=0$, 得 $\lambda=0$, 即矩阵 $\boldsymbol{J}$ 只有零特征值.

因为 $\mathrm{r}(\boldsymbol{J})=m-1$, 所以 $(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{J})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 即 $\boldsymbol{J}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中只有一个解向量, 取为 $\boldsymbol{\xi}=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$. 即 $\boldsymbol{J}$ 的关于特征值 $\lambda=0$ 的特征子空间是 $\mathbb{R}^m$ 的一维子空间, 且 $\boldsymbol{\xi}$ 为特征子空间的一个基. □

练习 4.14 (习题 14)

若 $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$ 可逆, $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 不可逆, 那么, 关于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值能作出怎样的断语?

练习 4.14 (习题 14)

若 $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$ 可逆, $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 不可逆, 那么, 关于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值能作出怎样的断语?

解: 由题设可知 $|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}|\neq 0$, 即 $|-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|\neq 0$, 且 $|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$, 所以 1 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 而 -1 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. □

练习 4.15 (习题 15)

若 $\det(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^2) = 0$, 证明: 1 或 -1 至少有一个是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

练习 4.15 (习题 15)

若 $\det(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^2)=0$, 证明: 1 或 -1 至少有一个是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

证: 因为

$$|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^2|=|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}||\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}|=0,$$

所以 $|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$ 和 $|-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$ 至少有一个成立, 从而 1 或 -1 至少有一个是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. □

练习 4.16 (习题 18)

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n^2 个元素全为 1, 试求可逆阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵, 并写出与 $\boldsymbol{A}$ 相似的对角阵.

练习 4.16 (习题 18)

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n^2 个元素全为 1, 试求可逆阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵, 并写出与 $\boldsymbol{A}$ 相似的对角阵.

解: 计算 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式:

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \lambda-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-1 \end{vmatrix} \xlongequal[j=2,3,\cdots,n]{c_1+c_j} \begin{vmatrix} \lambda-n & -1 & \cdots & -1 \\ \lambda-n & \lambda-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda-n & -1 & \cdots & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} \lambda-n & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^{n-1}(\lambda-n),$$

练习 4.16 (习题 18)

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n^2 个元素全为 1, 试求可逆阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵, 并写出与 $\boldsymbol{A}$ 相似的对角阵.

解: 计算 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式:

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \lambda-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-1 \end{vmatrix} \xlongequal[j=2,3,\cdots,n]{c_1+c_j} \begin{vmatrix} \lambda-n & -1 & \cdots & -1 \\ \lambda-n & \lambda-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda-n & -1 & \cdots & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} \lambda-n & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^{n-1}(\lambda-n),$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0,\ \lambda_n=n.$

对于特征值 0, 解方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$,

对于特征值 0, 解方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 其同解方程组为

$$x_1 = -x_2 - x_3 - \cdots - x_n.$$

对于特征值 0, 解方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 其同解方程组为

$$x_1=-x_2-x_3-\cdots-x_n.$$

故取对应的特征向量为:

$$\boldsymbol{\xi}_1=(1,-1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=(1,0,-1,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-1}=(1,0,0,\cdots,-1)^{\mathrm{T}}.$$

对于特征值 0, 解方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 其同解方程组为

$$x_1=-x_2-x_3-\cdots-x_n.$$

故取对应的特征向量为:

$$\boldsymbol{\xi}_1=(1,-1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=(1,0,-1,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-1}=(1,0,0,\cdots,-1)^{\mathrm{T}}.$$

对于特征值 n, 解方程组 $(n\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$,

对于特征值 0, 解方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 其同解方程组为

$$x_1=-x_2-x_3-\cdots-x_n.$$

故取对应的特征向量为:

$$\boldsymbol{\xi}_1=(1,-1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=(1,0,-1,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-1}=(1,0,0,\cdots,-1)^{\mathrm{T}}.$$

对于特征值 n, 解方程组 $(n\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 因为 $n\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和均为 0, 所以对应的特征向量可取为 $\boldsymbol{\xi}_n=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$.

对于特征值 0, 解方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 其同解方程组为

$$x_1=-x_2-x_3-\cdots-x_n.$$

故取对应的特征向量为:

$$\boldsymbol{\xi}_1=(1,-1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=(1,0,-1,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-1}=(1,0,0,\cdots,-1)^{\mathrm{T}}.$$

对于特征值 n, 解方程组 $(n\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 因为 $n\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和均为 0, 所以对应的特征向量可取为 $\boldsymbol{\xi}_n=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$.

取

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & n \end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{P}$ 可逆, 且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$. □

练习 4.17 (习题 19)

已知 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1 = 1$ (三重), $\lambda_2 = -3$; 对应于 λ_1 的特征向量有 $\boldsymbol{x}_1 = (1, -1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x}_2 = (-1, 1, -1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x}_3 = (0, -1, 1, -1)^{\mathrm{T}}$, 对应于 λ_2 的特征向量为 $\boldsymbol{x}_4 = (0, 0, -1, 1)^{\mathrm{T}}$. 问 $\boldsymbol{A}$ 可否对角化? 如能对角化, 求出 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}^n$.

练习 4.17 (习题 19)

已知 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=1$ (三重), $\lambda_2=-3$; 对应于 λ_1 的特征向量有 $\boldsymbol{x}_1=(1,-1,0,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x}_2=(-1,1,-1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x}_3=(0,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}$, 对应于 λ_2 的特征向量为 $\boldsymbol{x}_4=(0,0,-1,1)^{\mathrm{T}}$. 问 $\boldsymbol{A}$ 可否对角化? 如能对角化, 求出 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}^n$.

解: 因为

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3+r_4]{r_2+r_1} \left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4-r_2]{r_1-r_3} \left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

即矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_4)$ 可逆, 且 $\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

即矩阵 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4)$ 可逆, 且 $\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

从而 $\boldsymbol{A}$ 有 4 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$, $\boldsymbol{x}_4$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化.

即矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_4)$ 可逆, 且 $\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

从而 $\boldsymbol{A}$ 有 4 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$, $\boldsymbol{x}_4$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化.

记 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(1,1,1,-3)$, 则有 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P\Lambda}$, 从而

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}&=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}\\
&=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1+(-3)^n & -1+(-3)^n & 1 & 1-(-3)^n \\ 1-(-3)^n & 1-(-3)^n & 0 & (-3)^n \end{pmatrix}.$$

练习 4.18 (习题 21)

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}^4$, $\boldsymbol{A}^5$, $\boldsymbol{A}^k$ (k 为正整数).

(2) 若 $f(x)=\begin{vmatrix}x^4-1 & x\\ x^3 & x^6+1\end{vmatrix}$, 求 $f(\boldsymbol{A})$.

练习 4.18 (习题 21)

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}^4$, $\boldsymbol{A}^5$, $\boldsymbol{A}^k$ (k 为正整数).

(2) 若 $f(x)=\begin{vmatrix}x^4-1 & x\\ x^3 & x^6+1\end{vmatrix}$, 求 $f(\boldsymbol{A})$.

解: $|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+3 & -2\\ 2 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+3)+4=(\lambda+2)(\lambda-1)$.

即 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-2, \lambda_2=1$.

当 $\lambda_1=-2$ 时, 解齐次线性方程组 $(-2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 因为

$$(-2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 $\lambda_1=-2$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=(2,1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_2 = 1$ 时, 解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 因为

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 $\lambda_2 = 1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_2 = (1, 2)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_2 = 1$ 时, 解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 因为

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 $\lambda_2 = 1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_2 = (1, 2)^{\mathrm{T}}$.

取

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

当 $\lambda_2 = 1$ 时, 解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 因为

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 $\lambda_2 = 1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_2 = (1, 2)^{\mathrm{T}}$.

取

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则有 $\boldsymbol{P}^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, 且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$, 或 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$.

于是

$$\boldsymbol{A}^4=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^4\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-2)^4&0\\0&1\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21&-10\\10&-4\end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{A}^5=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^4\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-2)^5&0\\0&1\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-43&22\\-22&12\end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^k\boldsymbol{P}^{-1}&=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-2)^k&0\\0&1\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1+(-2)^{k+2}&2+(-2)^{k+1}\\-2-(-2)^{k+1}&4-(-2)^k\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(2) 因为 $f(x)=(x^4-1)(x^6+1)-x^4=x^{10}-x^6-1$, 所以

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{A}) &= \boldsymbol{A}^{10}-\boldsymbol{A}^6-\boldsymbol{I}=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\Lambda}^{10}-\boldsymbol{\Lambda}^6-\boldsymbol{I})\boldsymbol{P}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 959 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1279 & -640 \\ 640 & -321 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

练习 4.19 (习题 22)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^k$ (k 为正整数).

练习 4.19 (习题 22)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 4 & 0 & 0\\ 4 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^k$ (k 为正整数).

解: 将 $\boldsymbol{A}$ 分块为 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}$, 那么 $\boldsymbol{A}^k=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^k & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2^k\end{pmatrix}$.

练习 4.19 (习题 22)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^k$ (k 为正整数).

解: 将 $\boldsymbol{A}$ 分块为 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix}$, 那么 $\boldsymbol{A}^k=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1^k & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2^k \end{pmatrix}$. 下面分别求 $\boldsymbol{A}_1^k$ 和 $\boldsymbol{A}_2^k$.

练习 4.19 (习题 22)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&4&0&0\\4&-3&0&0\\0&0&2&4\\0&0&0&2\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^k$ (k 为正整数).

解: 将 $\boldsymbol{A}$ 分块为 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}$, 那么 $\boldsymbol{A}^k=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^k&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}_2^k\end{pmatrix}$. 下面分别求 $\boldsymbol{A}_1^k$ 和 $\boldsymbol{A}_2^k$.

由

$$\boldsymbol{A}_1^2=\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25&0\\0&25\end{pmatrix}=25\boldsymbol{I}=5^2\boldsymbol{I},$$

练习 4.19 (习题 22)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&4&0&0\\4&-3&0&0\\0&0&2&4\\0&0&0&2\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^k$ (k 为正整数).

解: 将 $\boldsymbol{A}$ 分块为 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}$, 那么 $\boldsymbol{A}^k=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^k&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}_2^k\end{pmatrix}$. 下面分别求 $\boldsymbol{A}_1^k$ 和 $\boldsymbol{A}_2^k$.

由

$$\boldsymbol{A}_1^2=\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25&0\\0&25\end{pmatrix}=25\boldsymbol{I}=5^2\boldsymbol{I},$$

一般地,

$$\boldsymbol{A}_1^k=\begin{cases}5^k\boldsymbol{I}, & k\text{ 为偶数},\\ 5^{k-1}\boldsymbol{A}_1, & k\text{ 为奇数}.\end{cases}$$

由

$$A_2^2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 4 \cdot 2 \cdot 2 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 16 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$A_2^3 = \begin{pmatrix} 2^2 & 4 \cdot 2 \cdot 2 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 4 \cdot 3 \cdot 2^2 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix}.$$

由

$$\boldsymbol{A}_2^2=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^2 & 4\cdot 2\cdot 2 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 16 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_2^3=\begin{pmatrix} 2^2 & 4\cdot 2\cdot 2 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^3 & 4\cdot 3\cdot 2^2 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix}.$$

一般地,

$$\boldsymbol{A}_2^k=\begin{pmatrix} 2^k & 4\cdot k\cdot 2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$

从而

$$
\boldsymbol{A}^k = \begin{cases} \begin{pmatrix} 5^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k & 4k2^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}, & k \text{ 为偶数}, \\ \begin{pmatrix} 3(5^{k-1}) & 4(5^{k-1}) & 0 & 0 \\ 4(5^{k-1}) & -3(5^{k-1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k & 4k2^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}, & k \text{ 为奇数}. \end{cases}
$$

练习 4.20 (习题 23)

对 5.2 节例 1 (教材 P.237) 的矩阵 $\boldsymbol{A}$, 求正交矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使得 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为对角阵.

练习 4.20 (习题 23)

对 5.2 节例 1 (教材 P.237) 的矩阵 $\boldsymbol{A}$, 求正交矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使得 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为对角阵.

解: 使用已知的结果: $\lambda_1 = -2$ (单根), 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}_1 = (1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

练习 4.20 (习题 23)

对 5.2 节例 1 (教材 P.237) 的矩阵 $\boldsymbol{A}$, 求正交矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使得 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为对角阵.

解: 使用已知的结果: $\lambda_1 = -2$ (单根), 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}_1 = (1, 1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$. 对 $\lambda_2 = 2$ (三重根), 由 $(\lambda_2 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 即

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0. \tag{21}$$

练习 4.20 (习题 23)

对 5.2 节例 1 (教材 P.237) 的矩阵 $\boldsymbol{A}$, 求正交矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使得 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为对角阵.

解: 使用已知的结果: $\lambda_1 = -2$ (单根), 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}_1 = (1, 1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$. 对 $\lambda_2 = 2$ (三重根), 由 $(\lambda_2 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 即

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0. \tag{21}$$

下面直接构造一组正交的基础解系.

练习 4.20 (习题 23)

对 5.2 节例 1 (教材 P.237) 的矩阵 $\boldsymbol{A}$, 求正交矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使得 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为对角阵.

解: 使用已知的结果: $\lambda_1 = -2$ (单根), 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}_1 = (1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$. 对 $\lambda_2 = 2$ (三重根), 由 $(\lambda_2 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 即

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0. \tag{21}$$

下面直接构造一组正交的基础解系. 设 $\boldsymbol{x}_2 = (1,-1,0,0)^{\mathrm{T}}$,

练习 4.20 (习题 23)

对 5.2 节例 1 (教材 P.237) 的矩阵 $\boldsymbol{A}$, 求正交矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使得 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为对角阵.

解: 使用已知的结果: $\lambda_1 = -2$ (单根), 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}_1 = (1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$. 对 $\lambda_2 = 2$ (三重根), 由 $(\lambda_2 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 即

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0. \tag{21}$$

下面直接构造一组正交的基础解系. 设 $\boldsymbol{x}_2 = (1,-1,0,0)^{\mathrm{T}}$, 要保证正交, 不妨设余下的两个解为

$$(1, {\color{red}1}, \square, \square)^{\mathrm{T}},$$

练习 4.20 (习题 23)

对 5.2 节例 1 (教材 P.237) 的矩阵 $\boldsymbol{A}$, 求正交矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使得 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为对角阵.

解: 使用已知的结果: $\lambda_1 = -2$ (单根), 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}_1 = (1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$. 对 $\lambda_2 = 2$ (三重根), 由 $(\lambda_2 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 即

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0. \tag{21}$$

下面直接构造一组正交的基础解系. 设 $\boldsymbol{x}_2 = (1,-1,0,0)^{\mathrm{T}}$, 要保证正交, 不妨设余下的两个解为

$$(1, 1, \square, \square)^{\mathrm{T}},$$

又要是方程的解, 故可取

$$\boldsymbol{x}_3 = (1,1,-2,0)^{\mathrm{T}}.$$

练习 4.20 (习题 23)

对 5.2 节例 1 (教材 P.237) 的矩阵 $\boldsymbol{A}$, 求正交矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使得 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为对角阵.

解: 使用已知的结果: $\lambda_1=-2$ (单根), 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}_1=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$. 对 $\lambda_2=2$ (三重根), 由 $(\lambda_2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 即

$$x_1+x_2+x_3+x_4=0. \tag{21}$$

下面直接构造一组正交的基础解系. 设 $\boldsymbol{x}_2=(1,-1,0,0)^{\mathrm{T}}$, 要保证正交, 不妨设余下的两个解为

$$(1,1,\square,\square)^{\mathrm{T}},$$

又要是方程的解, 故可取

$$\boldsymbol{x}_3=(1,1,-2,0)^{\mathrm{T}}.$$

要使 $\boldsymbol{x}_4$ 与 $\boldsymbol{x}_3$ 正交, 可取其形如 $(1,1,1,\square)^{\mathrm{T}}$,

练习 4.20 (习题 23)

对 5.2 节例 1 (教材 P.237) 的矩阵 $\boldsymbol{A}$, 求正交矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使得 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为对角阵.

解: 使用已知的结果: $\lambda_1 = -2$ (单根), 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}_1 = (1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$. 对 $\lambda_2 = 2$ (三重根), 由 $(\lambda_2 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 即

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0. \tag{21}$$

下面直接构造一组正交的基础解系. 设 $\boldsymbol{x}_2 = (1,-1,0,0)^{\mathrm{T}}$, 要保证正交, 不妨设余下的两个解为

$$(1, 1, \square, \square)^{\mathrm{T}},$$

又要是方程的解, 故可取

$$\boldsymbol{x}_3 = (1,1,-2,0)^{\mathrm{T}}.$$

要使 $\boldsymbol{x}_4$ 与 $\boldsymbol{x}_3$ 正交, 可取其形如 $(1,1,1,\square)^{\mathrm{T}}$, 又要是方程 (21) 的解, 故

$$\boldsymbol{x}_4 = (1,1,1,-3)^{\mathrm{T}}.$$

练习 4.20 (习题 23)

对 5.2 节例 1 (教材 P.237) 的矩阵 $\boldsymbol{A}$, 求正交矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使得 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为对角阵.

解: 使用已知的结果: $\lambda_1=-2$ (单根), 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}_1=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$. 对 $\lambda_2=2$ (三重根), 由 $(\lambda_2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 即

$$x_1+x_2+x_3+x_4=0. \tag{21}$$

下面直接构造一组正交的基础解系. 设 $\boldsymbol{x}_2=(1,-1,0,0)^{\mathrm{T}}$, 要保证正交, 不妨设余下的两个解为

$$(1,1,\square,\square)^{\mathrm{T}},$$

又要是方程的解, 故可取

$$\boldsymbol{x}_3=(1,1,-2,0)^{\mathrm{T}}.$$

要使 $\boldsymbol{x}_4$ 与 $\boldsymbol{x}_3$ 正交, 可取其形如 $(1,1,1,\square)^{\mathrm{T}}$, 又要是方程 (21) 的解, 故

$$\boldsymbol{x}_4=(1,1,1,-3)^{\mathrm{T}}.$$

从而得到方程组 (21) 的一组正交的基础解系 $\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$.

把向量 $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$, $\boldsymbol{x}_4$ 单位化, 得到一组正交的单位向量:

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \frac{\boldsymbol{x}_1}{\|\boldsymbol{x}_1\|} = \frac{1}{2}(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{\eta}_2 = \frac{\boldsymbol{x}_2}{\|\boldsymbol{x}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\eta}_3 = \frac{\boldsymbol{x}_3}{\|\boldsymbol{x}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2,0)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{\eta}_4 = \frac{\boldsymbol{x}_4}{\|\boldsymbol{x}_4\|} = \frac{\sqrt{3}}{6}(1,1,1,-3)^{\mathrm{T}}.$$

把向量 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$ 单位化, 得到一组正交的单位向量:

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{\boldsymbol{x}_1}{\|\boldsymbol{x}_1\|}=\frac{1}{2}(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{\eta}_2=\frac{\boldsymbol{x}_2}{\|\boldsymbol{x}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\eta}_3=\frac{\boldsymbol{x}_3}{\|\boldsymbol{x}_3\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2,0)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{\eta}_4=\frac{\boldsymbol{x}_4}{\|\boldsymbol{x}_4\|}=\frac{\sqrt{3}}{6}(1,1,1,-3)^{\mathrm{T}}.$$

故所求正交矩阵可以取为

$$\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4)=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix},$$

把向量 $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$, $\boldsymbol{x}_4$ 单位化, 得到一组正交的单位向量:

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \frac{\boldsymbol{x}_1}{\|\boldsymbol{x}_1\|} = \frac{1}{2}(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{\eta}_2 = \frac{\boldsymbol{x}_2}{\|\boldsymbol{x}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\eta}_3 = \frac{\boldsymbol{x}_3}{\|\boldsymbol{x}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2,0)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{\eta}_4 = \frac{\boldsymbol{x}_4}{\|\boldsymbol{x}_4\|} = \frac{\sqrt{3}}{6}(1,1,1,-3)^{\mathrm{T}}.$$

故所求正交矩阵可以取为

$$\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3, \boldsymbol{\eta}_4) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix},$$

使得

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} -2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}.$$

注意答案不唯一.

注意答案不唯一. 例如可取方程

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

的一组正交的基础解系为

$$\boldsymbol{x}_2 = (1, -1, 0, 0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{x}_3 = (0, 0, 1, -1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{x}_4 = (1, 1, -1, -1)^{\mathrm{T}}.$$

注意答案不唯一. 例如可取方程

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

的一组正交的基础解系为

$$\boldsymbol{x}_2 = (1, -1, 0, 0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{x}_3 = (0, 0, 1, -1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{x}_4 = (1, 1, -1, -1)^{\mathrm{T}}.$$

单位化得

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \frac{\boldsymbol{x}_1}{\|\boldsymbol{x}_1\|} = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{\eta}_2 = \frac{\boldsymbol{x}_2}{\|\boldsymbol{x}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\eta}_3 = \frac{\boldsymbol{x}_3}{\|\boldsymbol{x}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, -1)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{\eta}_4 = \frac{\boldsymbol{x}_4}{\|\boldsymbol{x}_4\|} = \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1)^{\mathrm{T}},$$

注意答案不唯一. 例如可取方程

$$x_1+x_2+x_3+x_4=0$$

的一组正交的基础解系为

$$\boldsymbol{x}_2=(1,-1,0,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{x}_3=(0,0,1,-1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{x}_4=(1,1,-1,-1)^{\mathrm{T}}.$$

单位化得

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{\boldsymbol{x}_1}{\|\boldsymbol{x}_1\|}=\frac{1}{2}(1,1,1,1)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\eta}_2=\frac{\boldsymbol{x}_2}{\|\boldsymbol{x}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\eta}_3=\frac{\boldsymbol{x}_3}{\|\boldsymbol{x}_3\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,-1)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\eta}_4=\frac{\boldsymbol{x}_4}{\|\boldsymbol{x}_4\|}=\frac{1}{2}(1,1,-1,-1)^{\mathrm{T}},$$

则所求的正交矩阵可取为

$$\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

练习 4.21 (习题 24)

对下列实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$, 求正交矩阵 $\boldsymbol{T}$ 和对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$, 使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{\Lambda}$.

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; (3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; (5) $\begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

解: (1)

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -2 & -4\\ -2 & \lambda & -2\\ -4 & -2 & \lambda-3\end{vmatrix}\xlongequal{c_3-c_1}\begin{vmatrix}\lambda-3 & -2 & -1-\lambda\\ -2 & \lambda & 0\\ -4 & -2 & \lambda+1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1+r_3}\begin{vmatrix}\lambda-7 & -4 & 0\\ -2 & \lambda & 0\\ -4 & -2 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda^2-7\lambda-8)=(\lambda+1)^2(\lambda-8).$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为: $\lambda_1=\lambda_2=-1,\ \lambda_3=8.$

当 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 时, 解方程组 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$, 即 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}4&2&4\\2&1&2\\4&2&4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}2&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

得同解方程

$$2x_1+x_2+2x_3=0.$$

当 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 时, 解方程组 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$, 即 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}4&2&4\\2&1&2\\4&2&4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}2&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

得同解方程

$$2x_1+x_2+2x_3=0.$$

下面直接构造一组正交的基础解系.

当 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 时, 解方程组 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$, 即 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}4&2&4\\2&1&2\\4&2&4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}2&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

得同解方程

$$2x_1+x_2+2x_3=0.$$

下面直接构造一组正交的基础解系. 注意到这里 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 是二重特征根, 则其对应的线性无关的特征向量必有 2 个.

当 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 时, 解方程组 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$, 即 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

得同解方程

$$2x_1+x_2+2x_3=0.$$

下面直接构造一组正交的基础解系. 注意到这里 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 是二重特征根, 则其对应的线性无关的特征向量必有 2 个. 取其一个解为 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,-2,0)^{\mathrm{T}}$,

当 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 时, 解方程组 $(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\mathbf{0}$, 即 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

得同解方程

$$2x_1+x_2+2x_3=0.$$

下面直接构造一组正交的基础解系. 注意到这里 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 是二重特征根, 则其对应的线性无关的特征向量必有 2 个. 取其一个解为 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,-2,0)^{\mathrm{T}}$, 要保持正交, 另一个解可取为

$$(2,1,t)^{\mathrm{T}}.$$

又要满足方程, 故 $t=-\frac{5}{2}$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 时, 解方程组 $(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\mathbf{0}$, 即 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

得同解方程

$$2x_1+x_2+2x_3=0.$$

下面直接构造一组正交的基础解系. 注意到这里 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 是二重特征根, 则其对应的线性无关的特征向量必有 2 个. 取其一个解为 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,-2,0)^{\mathrm{T}}$, 要保持正交, 另一个解可取为

$$(2,1,t)^{\mathrm{T}}.$$

又要满足方程, 故 $t=-\frac{5}{2}$.

则可取 $\boldsymbol{\xi}_2=(2,1,-\frac{5}{2})^{\mathrm{T}}$ 或者 $\boldsymbol{\xi}_2=(4,2,-5)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 时, 解方程组 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$, 即 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}4&2&4\\2&1&2\\4&2&4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}2&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

得同解方程

$$2x_1+x_2+2x_3=0.$$

下面直接构造一组正交的基础解系. 注意到这里 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 是二重特征根, 则其对应的线性无关的特征向量必有 2 个. 取其一个解为 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,-2,0)^{\mathrm{T}}$, 要保持正交, 另一个解可取为

$$(2,1,t)^{\mathrm{T}}.$$

又要满足方程, 故 $t=-\frac{5}{2}$.

则可取 $\boldsymbol{\xi}_2=(2,1,-\frac{5}{2})^{\mathrm{T}}$ 或者 $\boldsymbol{\xi}_2=(4,2,-5)^{\mathrm{T}}$.

故得矩阵对应于特征值 -1 的两两正交的特征向量为:

$$\boldsymbol{\xi}_1=(1,-2,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\xi}_2=(4,2,-5)^{\mathrm{T}}.$$

答案不唯一. 例如可取 $\boldsymbol{\xi}_1 = (1, 0, -1)^{\mathrm{T}}$, 则另一解应形如

$$(1, \square, 1)^{\mathrm{T}}.$$

要满足方程, 故 $\boldsymbol{\xi}_2 = (1, -4, 1)^{\mathrm{T}}$.

答案不唯一. 例如可取 $\boldsymbol{\xi}_1 = (1, 0, -1)^{\mathrm{T}}$, 则另一解应形如

$$(1, \square, 1)^{\mathrm{T}}.$$

要满足方程, 故 $\boldsymbol{\xi}_2 = (1, -4, 1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_3 = 8$ 时, 解方程组 $(8\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$8\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 + 4r_1} \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 18 & 0 & -18 \\ -9 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - 5r_2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

解得矩阵对应于特征值 $\lambda_3 = 8$ 特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_3 = (2, 1, 2)^{\mathrm{T}}$.

将 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3$ 单位化, 得

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \frac{\boldsymbol{\xi}_1}{\|\boldsymbol{\xi}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2, 0)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\eta}_2 = \frac{\boldsymbol{\xi}_2}{\|\boldsymbol{\xi}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{45}}(4, 2, -5)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\eta}_3 = \frac{\boldsymbol{\xi}_3}{\|\boldsymbol{\xi}_3\|} = \frac{1}{3}(2, 1, 2)^{\mathrm{T}}.$$

将 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3$ 单位化, 得

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \frac{\boldsymbol{\xi}_1}{\|\boldsymbol{\xi}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2, 0)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\eta}_2 = \frac{\boldsymbol{\xi}_2}{\|\boldsymbol{\xi}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{45}}(4, 2, -5)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\eta}_3 = \frac{\boldsymbol{\xi}_3}{\|\boldsymbol{\xi}_3\|} = \frac{1}{3}(2, 1, 2)^{\mathrm{T}}.$$

作矩阵

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{45}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{-5}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 8 \end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{T}$ 为正交矩阵, 且 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\Lambda}$. □

(2)

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -3 & 0 \\ -3 & \lambda-4 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{展开 } r_1} (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-4 & 1 \\ 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda+3) - 9(\lambda-1)$$

$$= (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-6).$$

(2)

$$
\begin{aligned}
|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}| &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & -3 & 0 \\ -3 & \lambda-4 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
&\xlongequal{\text{展开 } r_1} (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-4 & 1 \\ 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda+3)-9(\lambda-1) \\
&= (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-6).
\end{aligned}
$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_3=6$.

(2)

$$
\begin{aligned}
|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}| &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & -3 & 0 \\ -3 & \lambda-4 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
&\xlongequal{\text{展开 } r_1} (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-4 & 1 \\ 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda+3)-9(\lambda-1) \\
&= (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-6).
\end{aligned}
$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为: $\lambda_1=1,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=6.$

当 $\lambda_1=1$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$
\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

解得矩阵对应于特征值 1 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,0,3)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_2=-1$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}2&3&0\\3&5&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1}\begin{pmatrix}2&3&0\\1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&3&0\\0&-1&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-1&2\\0&-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\times(-1)]{r_1+2r_2,r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

解得矩阵对应于特征值 $\lambda_2=-1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_2=(-3,2,1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_3 = 6$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A} - 6\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A} - 6\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+2r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2-3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+r_2]{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解得矩阵对应于特征值 $\lambda_3 = 6$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_3 = (3, 5, -1)^{\mathrm{T}}$.

取

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \frac{\boldsymbol{\xi}_1}{\|\boldsymbol{\xi}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 0, 3)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\eta}_2 = \frac{\boldsymbol{\xi}_2}{\|\boldsymbol{\xi}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(-3, 2, 1)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\eta}_3 = \frac{\boldsymbol{\xi}_3}{\|\boldsymbol{\xi}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{35}}(3, 5, -1)^{\mathrm{T}},$$

作矩阵

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-3}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{35}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{5}{\sqrt{35}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{-1}{\sqrt{35}} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 6 \end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{T}$ 为正交矩阵, 且 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\Lambda}$.

(3)

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{展开 } r_1} (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & \lambda-1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda+3).$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -3.$

当 $\lambda_1 = 1$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解得矩阵对应于特征值 1 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1 = (1, -1, 0)^{\mathrm{T}}.$

当 $\lambda_2 = 3$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, 由

$$\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_1 + r_2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \div 2]{r_1 \div 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解得矩阵对应于特征值 3 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_2 = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_2 = 3$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_1 + r_2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \div 2]{r_1 \div 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解得矩阵对应于特征值 3 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_2 = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_3 = -3$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A} + 3\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A} + 3\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \div 2]{r_1 \div 2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解得矩阵对应于特征值 -3 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_3 = (1, 1, -2)^{\mathrm{T}}$.

取

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\eta}_1 &= \frac{\boldsymbol{\xi}_1}{\|\boldsymbol{\xi}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^{\mathrm{T}},\\
\boldsymbol{\eta}_2 &= \frac{\boldsymbol{\xi}_2}{\|\boldsymbol{\xi}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^{\mathrm{T}},\\
\boldsymbol{\eta}_3 &= \frac{\boldsymbol{\xi}_3}{\|\boldsymbol{\xi}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)^{\mathrm{T}},
\end{aligned}$$

作矩阵

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & -3 \end{pmatrix}.$$

则 $\boldsymbol{T}$ 为正交矩阵, 且 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\Lambda}$.

(4)

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & -4 & -1\\ 0 & \lambda & -1 & -4\\ -4 & -1 & \lambda & 0\\ -1 & -4 & 0 & \lambda\end{vmatrix} \xlongequal[r_3-4r_4]{r_1+\lambda r_4} \begin{vmatrix}0 & -4\lambda & -4 & \lambda^2-1\\ 0 & \lambda & -1 & -4\\ 0 & 15 & \lambda & -4\lambda\\ -1 & -4 & 0 & \lambda\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-4\lambda & -4 & \lambda^2-1\\ \lambda & -1 & -4\\ 15 & \lambda & -4\lambda\end{vmatrix} \xlongequal[r_3-\lambda r_2]{r_1-4r_2} \begin{vmatrix}-8\lambda & 0 & \lambda^2+15\\ \lambda & -1 & -4\\ 15+\lambda^2 & 0 & -8\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(8\lambda)^2-(\lambda^2+15)^2=(\lambda-3)(\lambda+3)(\lambda-5)(\lambda+5).$$

(4)

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -4 & -1 \\ 0 & \lambda & -1 & -4 \\ -4 & -1 & \lambda & 0 \\ -1 & -4 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-4r_4]{r_1+\lambda r_4} \begin{vmatrix} 0 & -4\lambda & -4 & \lambda^2-1 \\ 0 & \lambda & -1 & -4 \\ 0 & 15 & \lambda & -4\lambda \\ -1 & -4 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -4\lambda & -4 & \lambda^2-1 \\ \lambda & -1 & -4 \\ 15 & \lambda & -4\lambda \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-\lambda r_2]{r_1-4r_2} \begin{vmatrix} -8\lambda & 0 & \lambda^2+15 \\ \lambda & -1 & -4 \\ 15+\lambda^2 & 0 & -8\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (8\lambda)^2 - (\lambda^2+15)^2 = (\lambda-3)(\lambda+3)(\lambda-5)(\lambda+5).$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为: $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = 5, \lambda_4 = -5.$

当 $\lambda_1 = 3$ 时, 解方程组 $(3\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$3\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -4 \\ -4 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_4]{r_4 \times (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & -4 \\ -4 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 - 3r_1]{r_3 + 4r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 15 & 3 & -12 \\ 0 & -12 & -4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 + 4r_2]{r_3 - 5r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & -8 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解得矩阵对应于特征值 3 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1 = (-1, 1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_2=-3$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}3&0&4&1\\0&3&1&4\\4&1&3&0\\1&4&0&3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&4&0&3\\0&3&1&4\\4&1&3&0\\3&0&4&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-3r_1]{r_3-4r_1}\begin{pmatrix}1&4&0&3\\0&3&1&4\\0&-15&3&-12\\0&-12&4&-8\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+4r_2]{r_3+5r_2}\begin{pmatrix}1&4&0&3\\0&3&1&4\\0&0&8&8\\0&0&8&8\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

解得矩阵对应于特征值 -3 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_2=(1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_3 = 5$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} -5 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -5 \\ 0 & -5 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & -5 & 0 \\ -5 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+5r_1]{r_3-4r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -5 \\ 0 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & -15 & -5 & 20 \\ 0 & 20 & 4 & -24 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4+4r_1]{r_3-3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -5 \\ 0 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 8 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解得矩阵对应于特征值 5 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_3 = (1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_4=-5$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}5&0&4&1\\0&5&1&4\\4&1&5&0\\1&4&0&5\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&4&0&5\\0&5&1&4\\4&1&5&0\\5&0&4&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-5r_1]{r_3-4r_1}\begin{pmatrix}1&4&0&5\\0&5&1&4\\0&-15&5&-20\\0&-20&4&-24\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+4r_1]{r_3+3r_1}\begin{pmatrix}1&4&0&5\\0&5&1&4\\0&0&8&-8\\0&0&8&-8\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

解得矩阵对应于特征值 5 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_4=(-1,-1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

取

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{\boldsymbol{\xi}_1}{\|\boldsymbol{\xi}_1\|}=\frac{1}{2}(-1,1,-1,1)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\eta}_2=\frac{\boldsymbol{\xi}_2}{\|\boldsymbol{\xi}_2\|}=\frac{1}{2}(1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\eta}_3=\frac{\boldsymbol{\xi}_3}{\|\boldsymbol{\xi}_3\|}=\frac{1}{2}(1,1,1,1)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\eta}_4=\frac{\boldsymbol{\xi}_4}{\|\boldsymbol{\xi}_4\|}=\frac{1}{2}(-1,-1,1,1)^{\mathrm{T}}.$$

作矩阵

$$\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}3 & & & \\ & -3 & & \\ & & 5 & \\ & & & -5\end{pmatrix}.$$

则 $\boldsymbol{T}$ 为正交矩阵, 且 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{\Lambda}$. $\square$

(5)

$$
\begin{aligned}
&|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| \\
= &\begin{vmatrix} \lambda+1 & 3 & -3 & 3 \\ 3 & \lambda+1 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & \lambda+1 & 3 \\ 3 & -3 & 3 & \lambda+1 \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,4]{c_1+c_i} \begin{vmatrix} \lambda+4 & 3 & -3 & 3 \\ \lambda+4 & \lambda+1 & 3 & -3 \\ \lambda+4 & 3 & \lambda+1 & 3 \\ \lambda+4 & -3 & 3 & \lambda+1 \end{vmatrix} \\
\xlongequal[i=2,3,4]{r_i-r_1} &\begin{vmatrix} \lambda+4 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & \lambda-2 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & \lambda+4 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda+4)\begin{vmatrix} \lambda-2 & 6 & -6 \\ 0 & \lambda+4 & 0 \\ -6 & 6 & \lambda-2 \end{vmatrix} \\
= &(\lambda+4)^2[(\lambda-2)^2-6^2] = (\lambda+4)^3(\lambda-8).
\end{aligned}
$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-4$, $\lambda_4=8$.

当 $\lambda_1=-4$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解得矩阵对应于特征值 -4 的两两正交的特征向量为

$$\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\xi}_2=(0,0,1,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\xi}_3=(1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}.$$

当 $\lambda_1=-4$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解得矩阵对应于特征值 -4 的两两正交的特征向量为

$$\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\xi}_2=(0,0,1,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\xi}_3=(1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}.$$

或者取 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$,

当 $\lambda_1 = -4$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解得矩阵对应于特征值 -4 的两两正交的特征向量为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = (1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\xi}_2 = (0,0,1,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\xi}_3 = (1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}.$$

或者取 $\boldsymbol{\xi}_1 = (1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$, 要正交, 则余下两个向量可取为形如

$$(1,-1,\square,\square)^{\mathrm{T}}.$$

要满足方程, 故可取 $\boldsymbol{\xi}_2 = (1,-1,-2,0)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_1=-4$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解得矩阵对应于特征值 -4 的两两正交的特征向量为

$$\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\xi}_2=(0,0,1,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\xi}_3=(1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}.$$

或者取 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$, 要正交, 则余下两个向量可取为形如

$$(1,-1,\square,\square)^{\mathrm{T}}.$$

要满足方程, 故可取 $\boldsymbol{\xi}_2=(1,-1,-2,0)^{\mathrm{T}}$. 要 $\boldsymbol{\xi}_3$ 与 $\boldsymbol{\xi}_2$ 正交, 则可取其形如

$$(1,-1,1,\square)^{\mathrm{T}}.$$

当 $\lambda_1 = -4$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解得矩阵对应于特征值 -4 的两两正交的特征向量为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = (1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\xi}_2 = (0,0,1,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\xi}_3 = (1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}.$$

或者取 $\boldsymbol{\xi}_1 = (1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$, 要正交, 则余下两个向量可取为形如

$$(1,-1,\square,\square)^{\mathrm{T}}.$$

要满足方程, 故可取 $\boldsymbol{\xi}_2 = (1,-1,-2,0)^{\mathrm{T}}$. 要 $\boldsymbol{\xi}_3$ 与 $\boldsymbol{\xi}_2$ 正交, 则可取其形如

$$(1,-1,1,\square)^{\mathrm{T}}.$$

要满足方程, 故取 $\boldsymbol{\xi}_3 = (1,-1,1,3)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_4=8$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A}-8\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}-8\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} -9 & -3 & 3 & -3 \\ -3 & -9 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & -9 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 4 & -4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解得矩阵对应于特征值 8 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_4=(-1,1,-1,1)^{\mathrm{T}}$.

取

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{\boldsymbol{\xi}_1}{\|\boldsymbol{\xi}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\eta}_2=\frac{\boldsymbol{\xi}_2}{\|\boldsymbol{\xi}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,1)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\eta}_3=\frac{\boldsymbol{\xi}_3}{\|\boldsymbol{\xi}_3\|}=\frac{1}{2}(1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\eta}_4=\frac{\boldsymbol{\xi}_4}{\|\boldsymbol{\xi}_4\|}=\frac{1}{2}(-1,1,-1,1)^{\mathrm{T}}.$$

作矩阵

$$\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-4 & & & \\ & -4 & & \\ & & -4 & \\ & & & 8\end{pmatrix}.$$

则 $\boldsymbol{T}$ 为正交矩阵, 且 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{\Lambda}$.

或者由 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_2=(1,-1,-2,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_3=(1,-1,1,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_4=(-1,1,-1,1)^{\mathrm{T}}$, 得

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

练习 4.22 (习题 30)

设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{4\times 4}$, 已知 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值, 1 是 $\boldsymbol{A}$ 的 (一重) 特征值, 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 特征多项式 $\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$.

练习 4.22 (习题 30)

设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{4\times4}$, 已知 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值, 1 是 $\boldsymbol{A}$ 的 (一重) 特征值, 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 特征多项式 $\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$.

解: 由特征值的性质可知 $\boldsymbol{A}$ 的 4 个特征值分别为

$$0,\ 0,\ 1,\ \sum_{i=1}^{4} a_{ii} - 1.$$

练习 4.22 (习题 30)

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{4\times 4}$, 已知 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值, 1 是 $\boldsymbol{A}$ 的 (一重) 特征值, 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 特征多项式 $\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$.

解: 由特征值的性质可知 $\boldsymbol{A}$ 的 4 个特征值分别为

$$0,\ 0,\ 1,\ \sum_{i=1}^{4} a_{ii}-1.$$

若 a 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $\lambda-a$ 是 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的特征值.

练习 4.22 (习题 30)

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{4\times4}$, 已知 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值, 1 是 $\boldsymbol{A}$ 的 (一重) 特征值, 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 特征多项式 $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$.

解: 由特征值的性质可知 $\boldsymbol{A}$ 的 4 个特征值分别为

$$0,\ 0,\ 1,\ \sum_{i=1}^{4} a_{ii}-1.$$

若 a 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $\lambda-a$ 是 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的特征值. 故 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的 4 个特征值为

$$\lambda,\ \lambda,\ \lambda-1,\ \lambda-(\sum_{i=1}^{4} a_{ii}-1).$$

练习 4.22 (习题 30)

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{4\times4}$, 已知 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值, 1 是 $\boldsymbol{A}$ 的 (一重) 特征值, 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 特征多项式 $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$.

解: 由特征值的性质可知 $\boldsymbol{A}$ 的 4 个特征值分别为

$$0,\ 0,\ 1,\ \sum_{i=1}^{4}a_{ii}-1.$$

若 a 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $\lambda-a$ 是 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的特征值. 故 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的 4 个特征值为

$$\lambda,\ \lambda,\ \lambda-1,\ \lambda-(\sum_{i=1}^{4}a_{ii}-1).$$

于是

$$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\lambda^2(\lambda-1)(\lambda-\sum_{i=1}^{4}a_{ii}+1).$$

练习 4.23 (习题 31)

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和皆为 1, 问: 能否至少求得 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值?

练习 4.23 (习题 31)

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和皆为 1, 问: 能否至少求得 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值?

解: 由题设可知 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}|$ 的每行元素之和皆为 $\lambda - 1$, 所以至少可以求得 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值为 1.

练习 4.23 (习题 31)

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和皆为 1, 问: 能否至少求得 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值?

解: 由题设可知 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}|$ 的每行元素之和皆为 $\lambda - 1$, 所以至少可以求得 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值为 1.

另解: 事实上还可以求得一个特征向量.

练习 4.23 (习题 31)

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和皆为 1, 问: 能否至少求得 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值?

解: 由题设可知 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}|$ 的每行元素之和皆为 $\lambda - 1$, 所以至少可以求得 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值为 1.

另解: 事实上还可以求得一个特征向量. 由题设, 知

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

练习 4.23 (习题 31)

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和皆为 1, 问: 能否至少求得 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值?

解: 由题设可知 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|$ 的每行元素之和皆为 $\lambda-1$, 所以至少可以求得 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值为 1.

另解: 事实上还可以求得一个特征向量. 由题设, 知

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix},$$

故得到 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值为 1, 其对应的特征向量为 $(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$. □

练习 4.24 (习题 32)

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 的 n 个特征值, 证明:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{ji}.$$

练习 4.24 (习题 32)

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 的 n 个特征值, 证明:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{ji}.$$

证: 因为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 的 n 个特征值, 所以

$$\lambda_1^2,\ \lambda_2^2,\ \cdots,\ \lambda_n^2$$

是矩阵 $\boldsymbol{A}^2$ 的 n 个特征值.

练习 4.24 (习题 32)

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 的 n 个特征值, 证明:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{ji}.$$

证: 因为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 的 n 个特征值, 所以

$$\lambda_1^2,\ \lambda_2^2,\ \cdots,\ \lambda_n^2$$

是矩阵 $\boldsymbol{A}^2$ 的 n 个特征值.

又因为 $\boldsymbol{A}^2$ 主对角元

$$c_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{ji} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

练习 4.24 (习题 32)

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 的 n 个特征值, 证明:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{ji}.$$

证: 因为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 的 n 个特征值, 所以

$$\lambda_1^2,\ \lambda_2^2,\ \cdots,\ \lambda_n^2$$

是矩阵 $\boldsymbol{A}^2$ 的 n 个特征值.

又因为 $\boldsymbol{A}^2$ 主对角元

$$c_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{ji} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{ji}.$$

练习 4.25 (习题 33)

设 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ_0 的特征向量, 证明:

$$\boldsymbol{Bx} \in V_{\lambda_0} \qquad (\boldsymbol{A}\text{ 的特征子空间}).$$

练习 4.25 (习题 33)

设 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ_0 的特征向量, 证明:

$$\boldsymbol{Bx} \in V_{\lambda_0} \qquad (\boldsymbol{A} \text{ 的特征子空间}).$$

证: 在 $\boldsymbol{Ax} = \lambda_0 \boldsymbol{x}$ 两边左乘以 $\boldsymbol{B}$, 得

$$\boldsymbol{BAx} = \boldsymbol{B}\lambda_0\boldsymbol{x} = \lambda_0(\boldsymbol{Bx}).$$

练习 4.25 (习题 33)

设 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ_0 的特征向量, 证明:

$$\boldsymbol{Bx} \in V_{\lambda_0} \qquad (\boldsymbol{A} \text{ 的特征子空间}).$$

证: 在 $\boldsymbol{Ax} = \lambda_0 \boldsymbol{x}$ 两边左乘以 $\boldsymbol{B}$, 得

$$\boldsymbol{BAx} = \boldsymbol{B}\lambda_0 \boldsymbol{x} = \lambda_0(\boldsymbol{Bx}).$$

代入 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, 得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Bx}) = \lambda_0(\boldsymbol{Bx}).$$

练习 4.25 (习题 33)

设 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ_0 的特征向量, 证明:

$$\boldsymbol{Bx}\in V_{\lambda_0}\qquad(\boldsymbol{A}\text{ 的特征子空间}).$$

证: 在 $\boldsymbol{Ax}=\lambda_0\boldsymbol{x}$ 两边左乘以 $\boldsymbol{B}$, 得

$$\boldsymbol{BAx}=\boldsymbol{B}\lambda_0\boldsymbol{x}=\lambda_0(\boldsymbol{Bx}).$$

代入 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Bx})=\lambda_0(\boldsymbol{Bx}).$$

得证 $\boldsymbol{Bx}\in V_{\lambda_0}$. □

练习 4.26 (习题 34)

证明: 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同的特征值, 则 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量也是 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量.

练习 4.26 (习题 34)

证明: 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同的特征值, 则 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量也是 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量.

证: (充分性). 由题设知 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关特征向量.

练习 4.26 (习题 34)

证明: 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同的特征值, 则 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量也是 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量.

证: (充分性). 由题设知 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关特征向量. 设 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ 同时是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的 n 个线性无关特征向量, 且

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_i = \lambda_i \boldsymbol{p}_i, \qquad \boldsymbol{B}\boldsymbol{p}_i = \mu_i \boldsymbol{p}_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

练习 4.26 (习题 34)

证明: 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同的特征值, 则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量也是 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量.

证: (充分性). 由题设知 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关特征向量. 设 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ 同时是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的 n 个线性无关特征向量, 且

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_i=\lambda_i\boldsymbol{p}_i, \qquad \boldsymbol{B}\boldsymbol{p}_i=\mu_i\boldsymbol{p}_i \qquad (i=1,2,\cdots,n).$$

作矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n)$, 则 $\boldsymbol{P}$ 可逆. 再记

$$\boldsymbol{\Lambda}_1=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n), \qquad \boldsymbol{\Lambda}_2=\operatorname{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n),$$

练习 4.26 (习题 34)

证明: 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同的特征值, 则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量也是 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量.

证: (充分性). 由题设知 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关特征向量. 设 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ 同时是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的 n 个线性无关特征向量, 且

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_i=\lambda_i\boldsymbol{p}_i, \qquad \boldsymbol{B}\boldsymbol{p}_i=\mu_i\boldsymbol{p}_i \qquad (i=1,2,\cdots,n).$$

作矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n)$, 则 $\boldsymbol{P}$ 可逆. 再记

$$\boldsymbol{\Lambda}_1=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n), \qquad \boldsymbol{\Lambda}_2=\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n),$$

则有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}_1, \qquad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}_2.$$

练习 4.26 (习题 34)

证明: 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同的特征值, 则 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量也是 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量.

证: (充分性). 由题设知 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关特征向量. 设 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ 同时是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的 n 个线性无关特征向量, 且

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_i = \lambda_i \boldsymbol{p}_i, \qquad \boldsymbol{B}\boldsymbol{p}_i = \mu_i \boldsymbol{p}_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

作矩阵 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n)$, 则 $\boldsymbol{P}$ 可逆. 再记

$$\boldsymbol{\Lambda}_1 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n), \qquad \boldsymbol{\Lambda}_2 = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n),$$

则有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}_1, \qquad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}_2.$$

注意到对角矩阵可交换, 于是有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{AB} &= (\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{P}^{-1})(\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}_2\boldsymbol{P}^{-1}) \\ &= \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{\Lambda}_2\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}_2\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{P}^{-1} \\ &= (\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}_2\boldsymbol{P}^{-1})(\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{P}^{-1}) = \boldsymbol{BA}. \end{aligned}$$

(必要性). 设 $\boldsymbol{x}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ_0 的特征向量.

(必要性). 设 $\boldsymbol{x}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ_0 的特征向量. 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$,

(必要性). 设 $\boldsymbol{x}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ_0 的特征向量. 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 由上一题结论, $\boldsymbol{Bx}\in V_{\lambda_0}$, 其中 V_{λ_0} 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 关于 λ_0 的特征子空间.

(必要性). 设 $\boldsymbol{x}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ_0 的特征向量. 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 由上一题结论, $\boldsymbol{Bx}\in V_{\lambda_0}$, 其中 V_{λ_0} 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 关于 λ_0 的特征子空间.

因为 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同的特征值, 即 λ_0 的代数重数为 1,

(必要性). 设 $\boldsymbol{x}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ_0 的特征向量. 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, 由上一题结论, $\boldsymbol{Bx} \in V_{\lambda_0}$, 其中 V_{λ_0} 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 关于 λ_0 的特征子空间.

因为 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同的特征值, 即 λ_0 的代数重数为 1, 所以 λ_0 的几何重数也是 1, 即 V_{λ_0} 是一维子空间.

(必要性). 设 $\boldsymbol{x}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ_0 的特征向量. 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, 由上一题结论, $\boldsymbol{Bx} \in V_{\lambda_0}$, 其中 V_{λ_0} 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 关于 λ_0 的特征子空间.

因为 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同的特征值, 即 λ_0 的代数重数为 1, 所以 λ_0 的几何重数也是 1, 即 V_{λ_0} 是一维子空间. 从而存在常数 μ, 使得

$$\boldsymbol{Bx} = \mu \boldsymbol{x},$$

这说明 $\boldsymbol{x}$ 也是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量.

(必要性). 设 $\boldsymbol{x}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ_0 的特征向量. 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 由上一题结论, $\boldsymbol{Bx}\in V_{\lambda_0}$, 其中 V_{λ_0} 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 关于 λ_0 的特征子空间.

因为 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同的特征值, 即 λ_0 的代数重数为 1, 所以 λ_0 的几何重数也是 1, 即 V_{λ_0} 是一维子空间. 从而存在常数 μ, 使得

$$\boldsymbol{Bx}=\mu\boldsymbol{x},$$

这说明 $\boldsymbol{x}$ 也是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量. 得证 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量也是 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量. □

练习 4.27 (习题 35)

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 皆为 n 阶矩阵, $\varphi(\lambda) = |\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}|$. 证明: $\varphi(\boldsymbol{A})$ 可逆的充要条件是 $\boldsymbol{B}$ 的任一特征值都不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

练习 4.27 (习题 35)

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 皆为 n 阶矩阵, $\varphi(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}|$. 证明: $\varphi(\boldsymbol{A})$ 可逆的充要条件是 $\boldsymbol{B}$ 的任一特征值都不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

证: 设 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 那么

$$\varphi(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n).$$

练习 4.27 (习题 35)

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 皆为 n 阶矩阵, $\varphi(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}|$. 证明: $\varphi(\boldsymbol{A})$ 可逆的充要条件是 $\boldsymbol{B}$ 的任一特征值都不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

证: 设 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 那么

$$\varphi(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n).$$

从而 $\varphi(\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{I})\cdots(\boldsymbol{A}-\lambda_n\boldsymbol{I})$. 进一步有

$$|\varphi(\boldsymbol{A})|=|\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I}||\boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{I}|\cdots|\boldsymbol{A}-\lambda_n\boldsymbol{I}|.$$

练习 4.27 (习题 35)

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 皆为 n 阶矩阵, $\varphi(\lambda) = |\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}|$. 证明: $\varphi(\boldsymbol{A})$ 可逆的充要条件是 $\boldsymbol{B}$ 的任一特征值都不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

证: 设 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 那么

$$\varphi(\lambda) = |\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n).$$

从而 $\varphi(\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{I})(\boldsymbol{A} - \lambda_2 \boldsymbol{I})\cdots(\boldsymbol{A} - \lambda_n \boldsymbol{I})$. 进一步有

$$|\varphi(\boldsymbol{A})| = |\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{I}||\boldsymbol{A} - \lambda_2 \boldsymbol{I}|\cdots|\boldsymbol{A} - \lambda_n \boldsymbol{I}|.$$

故

$$\varphi(\boldsymbol{A}) \text{ 可逆 } \Longleftrightarrow |\varphi(\boldsymbol{A})| \neq 0 \Longleftrightarrow |\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I}| \neq 0,$$

即 λ_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. □

练习 4.28 (习题 36)

证明反对称实矩阵的特征值是 0 或纯虚数.

练习 4.28 (习题 36)

证明反对称实矩阵的特征值是 0 或纯虚数.

证: 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的任一个特征值, 由 $\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$,

练习 4.28 (习题 36)

证明反对称实矩阵的特征值是 0 或纯虚数.

证: 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的任一个特征值, 由 $\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, 有

$$
\begin{aligned}
& \overline{(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}} = \overline{(\lambda\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}} \\
\Longrightarrow \quad & \overline{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}} = \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}} \\
\Longrightarrow \quad & \overline{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{x} = \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{x} \\
\Longrightarrow \quad & -\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = -\lambda\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},
\end{aligned}
$$

练习 4.28 (习题 36)

证明反对称实矩阵的特征值是 0 或纯虚数.

证: 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的任一个特征值, 由 $\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, 有

$$
\begin{aligned}
& \overline{(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}} = \overline{(\lambda\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}} \\
\Longrightarrow\quad & \overline{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}} = \overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}} \\
\Longrightarrow\quad & \overline{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{x} = \overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{x} \\
\Longrightarrow\quad & -\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = -\lambda\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},
\end{aligned}
$$

又因为 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, $\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} > 0$, 所以

$$-\lambda = \overline{\lambda},$$

即 λ 只能是 0 或纯虚数. □

练习 4.29 (习题 37)

已知 $\mathbb{R}^n$ 中两个非零的正交向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $\boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$, 证明: 矩阵 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 的特征值全为 0, 且 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化.

练习 4.29 (习题 37)

已知 $\mathbb{R}^n$ 中两个非零的正交向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $\boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$, 证明: 矩阵 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 的特征值全为 0, 且 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化.

证: 因为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交, 所以 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = 0$.

练习 4.29 (习题 37)

已知 $\mathbb{R}^n$ 中两个非零的正交向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$, 证明: 矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 的特征值全为 0, 且 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化.

证: 因为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交, 所以 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=0$. 从而

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta}=0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}.$$

练习 4.29 (习题 37)

已知 $\mathbb{R}^n$ 中两个非零的正交向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $\boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$, 证明: 矩阵 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 的特征值全为 0, 且 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化.

证: 因为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交, 所以 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = 0$. 从而

$$\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta} = 0\boldsymbol{A} = \mathbf{0}.$$

设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 任一特征值, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$, 即有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, 于是

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} = \lambda^2\boldsymbol{x}, \quad 即 \quad \lambda^2\boldsymbol{x} = \mathbf{0},$$

练习 4.29 (习题 37)

已知 $\mathbb{R}^n$ 中两个非零的正交向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $\boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$, 证明: 矩阵 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 的特征值全为 0, 且 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化.

证: 因为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交, 所以 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = 0$. 从而

$$\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta} = 0\boldsymbol{A} = \mathbf{0}.$$

设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 任一特征值, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$, 即有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, 于是

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} = \lambda^2\boldsymbol{x}, \quad 即 \quad \lambda^2\boldsymbol{x} = \mathbf{0},$$

因为 $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, 所以 $\lambda^2 = 0$, 即 $\lambda = 0$, 故 0 为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 重特征值.

练习 4.29 (习题 37)

已知 $\mathbb{R}^n$ 中两个非零的正交向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$, 证明: 矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 的特征值全为 0, 且 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化.

证: 因为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交, 所以 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=0$. 从而

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta}=0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}.$$

设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 任一特征值, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$, 即有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$, 于是

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\lambda^2\boldsymbol{x}, \quad \text{即} \quad \lambda^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},$$

因为 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 所以 $\lambda^2=0$, 即 $\lambda=0$, 故 0 为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 重特征值.

对 $\lambda=0$, 求解 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}.$$

练习 4.29 (习题 37)

已知 $\mathbb{R}^n$ 中两个非零的正交向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$, 证明: 矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 的特征值全为 0, 且 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化.

证: 因为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交, 所以 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=0$. 从而

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta}=0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}.$$

设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 任一特征值, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$, 即有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$, 于是

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\lambda^2\boldsymbol{x},\quad \text{即}\quad \lambda^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},$$

因为 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 所以 $\lambda^2=0$, 即 $\lambda=0$, 故 0 为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 重特征值.

对 $\lambda=0$, 求解 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}.$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 均为非零向量, 所以 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 中至少有一个非零元, 又 $\boldsymbol{A}$ 的各行成比例, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$,

练习 4.29 (习题 37)

已知 $\mathbb{R}^n$ 中两个非零的正交向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$, 证明: 矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 的特征值全为 0, 且 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化.

证: 因为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交, 所以 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=0$. 从而

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta}=0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}.$$

设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 任一特征值, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$, 即有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$, 于是

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\lambda^2\boldsymbol{x},\quad 即 \quad \lambda^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},$$

因为 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 所以 $\lambda^2=0$, 即 $\lambda=0$, 故 0 为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 重特征值.

对 $\lambda=0$, 求解 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}.$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 均为非零向量, 所以 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 中至少有一个非零元, 又 $\boldsymbol{A}$ 的各行成比例, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$, 从而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系包含的向量个数
$n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-1$.

练习 4.29 (习题 37)

已知 $\mathbb{R}^n$ 中两个非零的正交向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $\boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$, 证明: 矩阵 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 的特征值全为 0, 且 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化.

证: 因为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交, 所以 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = 0$. 从而

$$\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta} = 0\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}.$$

设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 任一特征值, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$, 即有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, 于是

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} = \lambda^2\boldsymbol{x}, \quad \text{即} \quad \lambda^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},$$

因为 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, 所以 $\lambda^2 = 0$, 即 $\lambda = 0$, 故 0 为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 重特征值.

对 $\lambda = 0$, 求解 $(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 均为非零向量, 所以 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 中至少有一个非零元, 又 $\boldsymbol{A}$ 的各行成比例, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 1$, 从而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系包含的向量个数
$n - \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n - 1$. 即 $\boldsymbol{A}$ 对应于 n 重特征值 0 的线性无关的特征向量少于 n 个, 所以 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化. □

练习 4.30 (习题 38)

设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n$, 且 $a_i\neq 0\ (i=1,2,\cdots,n)$. 试求矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 的特征值, 并求可逆阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 成对角形.

练习 4.30 (习题 38)

设 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, 且 $a_i \neq 0\ (i = 1, 2, \cdots, n)$. 试求矩阵 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 的特征值, 并求可逆阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 成对角形.

解:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (a_1, a_2, \cdots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & \cdots & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & a_2^2 & \cdots & a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n a_1 & a_n a_2 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}.$$

$$
|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}
\lambda-a_1^2 & -a_1 a_2 & \cdots & -a_1 a_n \\
-a_2 a_1 & \lambda-a_2^2 & \cdots & -a_2 a_n \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-a_n a_1 & -a_n a_2 & \cdots & \lambda-a_n^2
\end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-\frac{a_i}{a_1} r_1}\begin{vmatrix}
\lambda-a_1^2 & -a_1 a_2 & \cdots & -a_1 a_n \\
-\frac{a_2}{a_1}\lambda & \lambda & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-\frac{a_n}{a_1}\lambda & 0 & \cdots & \lambda
\end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal[i=2,\cdots,n]{c_1+\frac{a_n}{a_1} c_i}\begin{vmatrix}
\lambda-a_1^2-a_2^2-\cdots-a_n^2 & -a_1 a_2 & \cdots & -a_1 a_n \\
0 & \lambda & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \lambda
\end{vmatrix}
$$

$$
=\lambda^{n-1}\left(\lambda-a_1^2-a_2^2-\cdots-a_n^2\right).
$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0,\ \lambda_n = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2.$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0,\ \lambda_n=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2.$$

当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0$ 时, $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的同解方程组为

$$a_1x_1=-a_2x_2-a_3x_3-\cdots-a_nx_n.$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0,\ \lambda_n = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2.$$

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$ 时, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的同解方程组为

$$a_1x_1 = -a_2x_2 - a_3x_3 - \cdots - a_nx_n.$$

于是对应的线性无关的特征向量为:

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} a_3 \\ 0 \\ -a_1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-1} = \begin{pmatrix} a_n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -a_1 \end{pmatrix}.$$

当 $\lambda_n = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$ 时, 注意到 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = \lambda_n$,

当 $\lambda_n = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$ 时, 注意到 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = \lambda_n$, 由

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}) = (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = \lambda_n\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}.$$

当 $\lambda_n = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$ 时, 注意到 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = \lambda_n$, 由

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}) = (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = \lambda_n\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}.$$

即对应 $\lambda_n = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_n = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_n = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$ 时, 注意到 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = \lambda_n$, 由

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}) = (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = \lambda_n\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}.$$

即对应 $\lambda_n = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_n = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$.

令

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n) = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 & \cdots & a_n & a_1 \\ -a_1 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ 0 & -a_1 & \cdots & 0 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -a_1 & a_n \end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}(0, \cdots, 0, \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2)$. □

另解: 注意到 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$,

另解: 注意到 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$, 由

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}) = (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}.$$

另解: 注意到 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$, 由

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}) = (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}.$$

故 $\lambda_n = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_n = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$.

另解: 注意到 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$, 由

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}) = (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}.$$

故 $\lambda_n = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_n = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$.

另一方面, $\boldsymbol{A}$ 为对称阵, 必可对角化.

另解: 注意到 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$, 由

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}) = (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}.$$

故 $\lambda_n = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_n = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$.

另一方面, $\boldsymbol{A}$ 为对称阵, 必可对角化. 故存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda} \triangleq \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n).$$

另解: 注意到 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$, 由

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}) = (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}.$$

故 $\lambda_n = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_n = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$.

另一方面, $\boldsymbol{A}$ 为对称阵, 必可对角化. 故存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda} \triangleq \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n).$$

因 $\boldsymbol{A}$ 各行成比例, 且 $\boldsymbol{A} \neq \mathbf{0}$, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 1$.

另解: 注意到 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$, 由

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}) = (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}.$$

故 $\lambda_n = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_n = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$.

另一方面, $\boldsymbol{A}$ 为对称阵, 必可对角化. 故存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda} \triangleq \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n).$$

因 $\boldsymbol{A}$ 各行成比例, 且 $\boldsymbol{A} \neq \mathbf{0}$, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 1$. 从而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\Lambda}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 1$.

另解: 注意到 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$, 由

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}) = (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}.$$

故 $\lambda_n = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_n = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$.

另一方面, $\boldsymbol{A}$ 为对称阵, 必可对角化. 故存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda} \triangleq \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n).$$

因 $\boldsymbol{A}$ 各行成比例, 且 $\boldsymbol{A} \neq \mathbf{0}$, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 1$. 从而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\Lambda}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 1$. 又 $\lambda_n = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \neq 0$, 故必有 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$.

特征值 0 对应的特征向量的求法, 见前一解法. □

练习 4.31 (习题 39)

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$ 的一个特征向量 $\boldsymbol{\xi}=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$.

(1) 确定 a, b 及 $\boldsymbol{\xi}$ 对应的特征值;

(2) $\boldsymbol{A}$ 能否相似于对角阵? 说明理由.

练习 4.31 (习题 39)

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$ 的一个特征向量 $\boldsymbol{\xi}=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$.

(1) 确定 a,b 及 $\boldsymbol{\xi}$ 对应的特征值;

(2) $\boldsymbol{A}$ 能否相似于对角阵? 说明理由.

解: (1) 设 $\boldsymbol{\xi}$ 对应的特征值为 λ, 则有 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0}$,

练习 4.31 (习题 39)

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$ 的一个特征向量 $\boldsymbol{\xi}=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$.

(1) 确定 a, b 及 $\boldsymbol{\xi}$ 对应的特征值;

(2) $\boldsymbol{A}$ 能否相似于对角阵? 说明理由.

解: (1) 设 $\boldsymbol{\xi}$ 对应的特征值为 λ, 则有 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0}$, 即

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & a-\lambda & 3 \\ -1 & b & -2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\lambda-1 \\ 2+a-\lambda \\ 1+b+\lambda \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

练习 4.31 (习题 39)

已知 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$ 的一个特征向量 $\boldsymbol{\xi} = (1, 1, -1)^{\mathrm{T}}$.

(1) 确定 a, b 及 $\boldsymbol{\xi}$ 对应的特征值;

(2) $\boldsymbol{A}$ 能否相似于对角阵? 说明理由.

解: (1) 设 $\boldsymbol{\xi}$ 对应的特征值为 λ, 则有 $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{0}$, 即

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & a-\lambda & 3 \\ -1 & b & -2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda - 1 \\ 2 + a - \lambda \\ 1 + b + \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

故 $\lambda = -1,\ a = -3,\ b = 0$.

(2)

$$
|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal{c_3-(2+\lambda)c_1} \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & \lambda^2-2 \\ 5 & -3-\lambda & -7-5\lambda \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
= -(\lambda+1)^3,
$$

即 $\lambda=-1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的三重特征值,

(2)

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1 & 2\\ 5 & -3-\lambda & 3\\ -1 & 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3-(2+\lambda)c_1}\begin{vmatrix}2-\lambda & -1 & \lambda^2-2\\ 5 & -3-\lambda & -7-5\lambda\\ -1 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$=-(\lambda+1)^3,$$

即 $\lambda=-1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的三重特征值, 而

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 5 & -2 & 3\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{c_1+c_2-c_3}\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 3\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix},$$

即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})=2$,

(2)

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}| &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\
&\xlongequal{c_3-(2+\lambda)c_1} \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & \lambda^2-2 \\ 5 & -3-\lambda & -7-5\lambda \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= -(\lambda+1)^3,
\end{aligned}
$$

即 $\lambda=-1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的三重特征值, 而

$$
\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1+c_2-c_3} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},
$$

即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})=2$, 故 $\boldsymbol{A}$ 的对应于三重特征值 -1 的线性无关的特征向量只有一个, 所以 $\boldsymbol{A}$ 不能对角化. □

练习 4.32 (习题 40)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}$, 已知 $|\boldsymbol{A}|=1$, 且 $\boldsymbol{A}^*$ 有一个特征值 λ_0, 其特征向量 $\boldsymbol{x}=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$, 试求 a,b,c 及 λ_0.

练习 4.32 (习题 40)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}$, 已知 $|\boldsymbol{A}|=1$, 且 $\boldsymbol{A}^*$ 有一个特征值 λ_0, 其特征向量 $\boldsymbol{x}=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$, 试求 a,b,c 及 λ_0.

解: 在 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\lambda_0\boldsymbol{x}$ 两端左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$, 得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\lambda_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \quad \text{即} \quad |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{x}=\lambda_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

练习 4.32 (习题 40)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}$, 已知 $|\boldsymbol{A}|=1$, 且 $\boldsymbol{A}^*$ 有一个特征值 λ_0, 其特征向量 $\boldsymbol{x}=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$, 试求 a, b, c 及 λ_0.

解: 在 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\lambda_0\boldsymbol{x}$ 两端左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$, 得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\lambda_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \quad \text{即} \quad |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{x}=\lambda_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

由 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 知 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆, 故 $\lambda_0\neq 0$. 从而得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_0}\boldsymbol{x}=\frac{1}{\lambda_0}\boldsymbol{x}$,

练习 4.32 (习题 40)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}$, 已知 $|\boldsymbol{A}|=1$, 且 $\boldsymbol{A}^*$ 有一个特征值 λ_0, 其特征向量 $\boldsymbol{x}=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$, 试求 a, b, c 及 λ_0.

解: 在 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\lambda_0\boldsymbol{x}$ 两端左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$, 得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\lambda_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \quad \text{即} \quad |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{x}=\lambda_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

由 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 知 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆, 故 $\lambda_0\neq 0$. 从而得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_0}\boldsymbol{x}=\frac{1}{\lambda_0}\boldsymbol{x}$, 即

$$\begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a+c+1 \\ -b-2 \\ -a+c-1 \end{pmatrix}=\frac{1}{\lambda_0}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{22}$$

得

$$\frac{-a+c+1}{-1}=\frac{-b-2}{-1}=\frac{-a+c-1}{1},$$

所以 $a=c$, 且 $b=-3$. 代入 (22), 得 $\lambda_0=-1$.

得
$$\frac{-a+c+1}{-1}=\frac{-b-2}{-1}=\frac{-a+c-1}{1},$$
所以 $a=c$, 且 $b=-3$. 代入 (22), 得 $\lambda_0=-1$. 代入 $|\boldsymbol{A}|=1$, 得
$$\begin{vmatrix} a & -1 & a \\ 5 & -3 & 3 \\ 1-a & 0 & -a \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+r_3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 3 \\ 1-a & 0 & -a \end{vmatrix}$$
$$\xlongequal{c_2+c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1-a & 1-a & -a \end{vmatrix} = a-3=1,$$

得
$$\frac{-a+c+1}{-1}=\frac{-b-2}{-1}=\frac{-a+c-1}{1},$$
所以 $a=c$, 且 $b=-3$. 代入 (22), 得 $\lambda_0=-1$. 代入 $|\boldsymbol{A}|=1$, 得
$$\begin{vmatrix} a & -1 & a \\ 5 & -3 & 3 \\ 1-a & 0 & -a \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+r_3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 3 \\ 1-a & 0 & -a \end{vmatrix}$$
$$\xlongequal{c_2+c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1-a & 1-a & -a \end{vmatrix} = a-3=1,$$
所以 $a=c=4$. 因此 $a=4$, $b=-3$, $c=4$, $\lambda_0=-1$. □

练习 4.33 (习题 41)

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 4 & y \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, 已知 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个线性无关的特征向量, 且 $\lambda_1 = 2$ 是其二重特征值, 求 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$ (对角矩阵).

练习 4.33 (习题 41)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 4 & y \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, 已知 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个线性无关的特征向量, 且 $\lambda_1=2$ 是其二重特征值, 求 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$ (对角矩阵).

解: 由 $\lambda_1=2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值, 知方程组 $(\lambda_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系由 2 个线性无关的向量构成, 故 $n-r=2$, 即

$$\mathrm{r}(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=1.$$

练习 4.33 (习题 41)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 4 & y \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, 已知 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个线性无关的特征向量, 且 $\lambda_1=2$ 是其二重特征值, 求 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$ (对角矩阵).

解: 由 $\lambda_1=2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值, 知方程组 $(\lambda_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系由 2 个线性无关的向量构成, 故 $n-r=2$, 即

$$\mathrm{r}(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=1.$$

又

$$2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -x & -2 & -y \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix},$$

知其 3 列 (或行) 成比例, 故 $x=2$, $y=-2$.

由 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a_{11}+a_{22}+a_{33}=10$, 得 $\boldsymbol{A}$ 的第 3 个特征值 $\lambda_3=6$.

由 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a_{11}+a_{22}+a_{33}=10$, 得 $\boldsymbol{A}$ 的第 3 个特征值 $\lambda_3=6$. 对 $\lambda_1=\lambda_2=2$, 解方程组 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 由

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

得对应于二重特征值 2 的线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{p}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{p}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

对 $\lambda_3=6$, 解方程组 $(\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}-5&-1&1\\2&-2&-2\\-3&-3&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2+2r_1}\begin{pmatrix}-5&-1&1\\-8&-4&0\\-8&-4&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\div(-4)]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}-5&-1&1\\2&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{pmatrix}-3&0&1\\2&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

得对应于特征值 6 的特征向量为 $\boldsymbol{p}_3=(1,-2,3)^{\mathrm{T}}$.

对 $\lambda_3=6$, 解方程组 $(\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}-5&-1&1\\2&-2&-2\\-3&-3&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2+2r_1}\begin{pmatrix}-5&-1&1\\-8&-4&0\\-8&-4&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\div(-4)]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}-5&-1&1\\2&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{pmatrix}-3&0&1\\2&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

得对应于特征值 6 的特征向量为 $\boldsymbol{p}_3=(1,-2,3)^{\mathrm{T}}$.

作矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&-2\\0&1&3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&6\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}$ 可逆, 且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$. □

练习 4.34 (习题 42)

设 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$ 均为非零向量, 已知 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 0$, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$. 试求: (1) $\boldsymbol{A}^2$; (2) $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量.

练习 4.34 (习题 42)

设 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$ 均为非零向量, 已知 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 0$, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$. 试求: (1) $\boldsymbol{A}^2$; (2) $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量.

解: (1) $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta} = 0\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$.

练习 4.34 (习题 42)

设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 均为非零向量, 已知 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$. 试求: (1) $\boldsymbol{A}^2$; (2) $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量.

解: (1) $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta}=0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

(2) 设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$, 即有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$, 于是 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\lambda^2\boldsymbol{x}$, 即 $\lambda^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 因为 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 所以 $\lambda^2=0$, 即 $\lambda=0$, 故 0 为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 重特征值.

练习 4.34 (习题 42)

设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 均为非零向量, 已知 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$. 试求: (1) $\boldsymbol{A}^2$; (2) $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量.

解: (1) $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta}=0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

(2) 设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$, 即有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$, 于是 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\lambda^2\boldsymbol{x}$, 即 $\lambda^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 因为 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 所以 $\lambda^2=0$, 即 $\lambda=0$, 故 0 为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 重特征值.

对 $\lambda=0$, 求解 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

练习 4.34 (习题 42)

设 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$ 均为非零向量, 已知 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 0$, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$. 试求: (1) $\boldsymbol{A}^2$; (2) $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量.

解: (1) $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta} = 0\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$.

(2) 设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$, 即有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, 于是 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} = \lambda^2\boldsymbol{x}$, 即 $\lambda^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 因为 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, 所以 $\lambda^2 = 0$, 即 $\lambda = 0$, 故 0 为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 重特征值.

对 $\lambda = 0$, 求解 $(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 因为 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 均为非零向量, 不妨设 $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$.

练习 4.34 (习题 42)

设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 均为非零向量, 已知 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$. 试求: (1) $\boldsymbol{A}^2$; (2) $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量.

解: (1) $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta}=0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

(2) 设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$, 即有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$, 于是 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\lambda^2\boldsymbol{x}$, 即 $\lambda^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 因为 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 所以 $\lambda^2=0$, 即 $\lambda=0$, 故 0 为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 重特征值.

对 $\lambda=0$, 求解 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 因为 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 均为非零向量, 不妨设 $a_1\neq0$, $b_1\neq0$. 从而

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

则方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的同解方程组为 $b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0$.

则方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的同解方程组为 $b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0$. 于是所求特征向量为:

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix} b_2\\ -b_1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix} b_3\\ 0\\ -b_1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-1}=\begin{pmatrix} b_n\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ -b_1\end{pmatrix}.$$

则方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的同解方程组为 $b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0$. 于是所求特征向量为:

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix} b_2 \\ -b_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix} b_3 \\ 0 \\ -b_1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-1}=\begin{pmatrix} b_n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -b_1 \end{pmatrix}.$$

前面已经假设 $b_1\neq 0$, 故上述 $n-1$ 个向量必线性无关.

则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的同解方程组为 $b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0$. 于是所求特征向量为:

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix} b_2 \\ -b_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix} b_3 \\ 0 \\ -b_1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-1}=\begin{pmatrix} b_n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -b_1 \end{pmatrix}.$$

前面已经假设 $b_1\neq 0$, 故上述 $n-1$ 个向量必线性无关. 而且注意到 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$, 故 $\lambda=0$ 的几何重数为 $n-1$, 即它对应的线性无关特征向量的个数只能是 $n-1$. □

Outline

Outline

(一) 怎么理解特征值、特征向量.

- 矩阵乘以向量, 在功能上相当于把一个向量变换为另一个向量.

(一) 怎么理解特征值、特征向量.

- 矩阵乘以向量, 在功能上相当于把一个向量变换为另一个向量.
- 一个矩阵的特征向量是这样一种特定的向量: 它经过这种变换后方向不变 (或正好反向), 只发生长度上的伸缩.

(一) 怎么理解特征值、特征向量.

- 矩阵乘以向量, 在功能上相当于把一个向量变换为另一个向量.
- 一个矩阵的特征向量是这样一种特定的向量: 它经过这种变换后方向不变 (或正好反向), 只发生长度上的伸缩.
- 特征值则反映了特征向量的伸缩倍数 (及方向).

(一) 怎么理解特征值、特征向量.

- 矩阵乘以向量, 在功能上相当于把一个向量变换为另一个向量.
- 一个矩阵的特征向量是这样一种特定的向量: 它经过这种变换后方向不变 (或正好反向), 只发生长度上的伸缩.
- 特征值则反映了特征向量的伸缩倍数 (及方向).

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘向量 $\boldsymbol{x}$, 其结果是一个同维数的向量.

(一) 怎么理解特征值、特征向量.

- 矩阵乘以向量, 在功能上相当于把一个向量变换为另一个向量.
- 一个矩阵的特征向量是这样一种特定的向量: 它经过这种变换后方向不变 (或正好反向), 只发生长度上的伸缩.
- 特征值则反映了特征向量的伸缩倍数 (及方向).

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘向量 $\boldsymbol{x}$, 其结果是一个同维数的向量.

比如 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -4 & 1 & 3\end{pmatrix}$, 取 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, 有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -4 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix},$$

可见矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘向量 $\boldsymbol{x}$, 相当于把向量 $\boldsymbol{x}$ 作了一个变换, 把 $\boldsymbol{x}$ 转到了一个新的位置, 而且长度也发生了变化.

可见矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘向量 $\boldsymbol{x}$, 相当于把向量 $\boldsymbol{x}$ 作了一个变换, 把 $\boldsymbol{x}$ 转到了一个新的位置, 而且长度也发生了变化. 这里 $(1,2,3)^{\mathrm{T}}$ 与变换之后的结果 $(3,4,7)^{\mathrm{T}}$ 看不出有什么关联.

可见矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘向量 $\boldsymbol{x}$, 相当于把向量 $\boldsymbol{x}$ 作了一个变换, 把 $\boldsymbol{x}$ 转到了一个新的位置, 而且长度也发生了变化. 这里 $(1,2,3)^{\mathrm{T}}$ 与变换之后的结果 $(3,4,7)^{\mathrm{T}}$ 看不出有什么关联.

但是, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘某些特定的向量 $\boldsymbol{x}$, 会出现特别的现象: 乘积的结果相当于把向量 $\boldsymbol{x}$ 在原方向伸缩或反方向伸缩, 即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x},$$

可见矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘向量 $\boldsymbol{x}$, 相当于把向量 $\boldsymbol{x}$ 作了一个变换, 把 $\boldsymbol{x}$ 转到了一个新的位置, 而且长度也发生了变化. 这里 $(1,2,3)^{\mathrm{T}}$ 与变换之后的结果 $(3,4,7)^{\mathrm{T}}$ 看不出有什么关联.

但是, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘某些特定的向量 $\boldsymbol{x}$, 会出现特别的现象: 乘积的结果相当于把向量 $\boldsymbol{x}$ 在原方向伸缩或反方向伸缩, 即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x},$$

具有这种特点的向量, 就称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量, 数 λ 反映了伸缩的倍数及方向, 称为与 $\boldsymbol{x}$ 对应的特征值.

可见矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘向量 $\boldsymbol{x}$, 相当于把向量 $\boldsymbol{x}$ 作了一个变换, 把 $\boldsymbol{x}$ 转到了一个新的位置, 而且长度也发生了变化. 这里 $(1,2,3)^{\mathrm{T}}$ 与变换之后的结果 $(3,4,7)^{\mathrm{T}}$ 看不出有什么关联.

但是, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘某些特定的向量 $\boldsymbol{x}$, 会出现特别的现象: 乘积的结果相当于把向量 $\boldsymbol{x}$ 在原方向伸缩或反方向伸缩, 即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x},$$

具有这种特点的向量, 就称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量, 数 λ 反映了伸缩的倍数及方向, 称为与 $\boldsymbol{x}$ 对应的特征值.

比如 $\boldsymbol{x}_1 = (1,0,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x}_2 = (0,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 就是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\boldsymbol{x}_1,$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{x}_2.$$

一个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 一旦产生, 那么 n 维空间 [1] 的某处就存在着一些向量, 它们与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有着一种天然的内在联系: $\boldsymbol{A}$ 乘以这些向量相当于只是把这些向量在原方向 (或反方向) 伸长或缩短.

[1]准确地讲, 应该是 n 维复向量空间. 因为方阵在实数域上不一定总有特征值. 比如 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\lambda^2+1$, 在实数域上无根, 故 $\boldsymbol{A}$ 在实数域上无特征值. 教材也讲明了: n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在复数范围内有 n 个特征值.

一个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 一旦产生, 那么 n 维空间 [1] 的某处就存在着一些向量, 它们与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有着一种天然的内在联系: $\boldsymbol{A}$ 乘以这些向量相当于只是把这些向量在原方向 (或反方向) 伸长或缩短.

特征值、特征向量的专业词汇分别是 eigenvalue, eigenvector. eigen 是德文词汇, 意思是自己的, 特有的. eigen 一词很恰当地反映了矩阵和其特征向量的天然联系和隶属性. 特征值在一些教材里称为 “本征值”, 这个翻译比较贴近 eigenvalue 的本意.

[1] 准确地讲, 应该是 n 维复向量空间. 因为方阵在实数域上不一定总有特征值. 比如 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\lambda^2+1$, 在实数域上无根, 故 $\boldsymbol{A}$ 在实数域上无特征值. 教材也讲明了: n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在复数范围内有 n 个特征值.

一个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 一旦产生, 那么 n 维空间 [1] 的某处就存在着一些向量, 它们与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有着一种天然的内在联系: $\boldsymbol{A}$ 乘以这些向量相当于只是把这些向量在原方向 (或反方向) 伸长或缩短.

特征值、特征向量的专业词汇分别是 eigenvalue, eigenvector. eigen 是德文词汇, 意思是自己的, 特有的. eigen 一词很恰当地反映了矩阵和其特征向量的天然联系和隶属性. 特征值在一些教材里称为 "本征值", 这个翻译比较贴近 eigenvalue 的本意.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘零向量总是等于零向量的, 所以, 讨论特征向量时, 是把零向量排除在外的. 请牢记: **零向量不是特征向量; 特征向量是非零向量.**

[1] 准确地讲, 应该是 n 维复向量空间. 因为方阵在实数域上不一定总有特征值. 比如 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = \lambda^2 + 1$, 在实数域上无根, 故 $\boldsymbol{A}$ 在实数域上无特征值. 教材也讲明了: n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在复数范围内有 n 个特征值.

一个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 一旦产生, 那么 n 维空间 [1] 的某处就存在着一些向量, 它们与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有着一种天然的内在联系: $\boldsymbol{A}$ 乘以这些向量相当于只是把这些向量在原方向 (或反方向) 伸长或缩短.

特征值、特征向量的专业词汇分别是 eigenvalue, eigenvector. eigen 是德文词汇, 意思是自己的, 特有的. eigen 一词很恰当地反映了矩阵和其特征向量的天然联系和隶属性. 特征值在一些教材里称为 "本征值", 这个翻译比较贴近 eigenvalue 的本意.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘零向量总是等于零向量的, 所以, 讨论特征向量时, 是把零向量排除在外的. 请牢记: **零向量不是特征向量; 特征向量是非零向量.**

注意: 特征值可以为零.

[1] 准确地讲, 应该是 n 维复向量空间. 因为方阵在实数域上不一定总有特征值. 比如 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\lambda^2+1$, 在实数域上无根, 故 $\boldsymbol{A}$ 在实数域上无特征值. 教材也讲明了: n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在复数范围内有 n 个特征值.

(二) 特征值、特征向量的性质.

(1) 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值, 则

1. $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$;
2. $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = \left|\boldsymbol{A}\right|$.

(二) 特征值、特征向量的性质.

(1) 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值, 则

1. $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$;
2. $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = \left|\boldsymbol{A}\right|$.

(2) 设 λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ_0 的特征向量, 则

1. 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\lambda_0 \neq 0$, 且 $\dfrac{1}{\lambda_0}$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值; $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_0}$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值.

(二) 特征值、特征向量的性质.

(1) 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值, 则

1. $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$;
2. $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = \left|\boldsymbol{A}\right|$.

(2) 设 λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ_0 的特征向量, 则

1. 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\lambda_0 \neq 0$, 且 $\dfrac{1}{\lambda_0}$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值; $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_0}$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值.
2. $k\lambda_0$ 为 $k\boldsymbol{A}$ 特征值; λ_0^m 是 $\boldsymbol{A}^m$ 特征值.

(二) 特征值、特征向量的性质.

(1) 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值, 则

1. $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$;
2. $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = \left|\boldsymbol{A}\right|$.

(2) 设 λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ_0 的特征向量, 则

1. 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\lambda_0 \neq 0$, 且 $\dfrac{1}{\lambda_0}$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值; $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_0}$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值.
2. $k\lambda_0$ 为 $k\boldsymbol{A}$ 特征值; λ_0^m 是 $\boldsymbol{A}^m$ 特征值.
3. $\varphi(\lambda_0)$ 是矩阵多项式 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的特征值, 其中

$$\varphi(\lambda_0) = a_m \lambda_0^m + \cdots + a_1 \lambda_0 + a_0,$$

$$\varphi(\boldsymbol{A}) = a_m \boldsymbol{A}^m + \cdots + a_1 \boldsymbol{A} + a_0 \boldsymbol{I}.$$

(二) 特征值、特征向量的性质.

(1) 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值, 则

1. $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$;
2. $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = \left|\boldsymbol{A}\right|$.

(2) 设 λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ_0 的特征向量, 则

1. 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\lambda_0 \neq 0$, 且 $\dfrac{1}{\lambda_0}$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值; $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_0}$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值.
2. $k\lambda_0$ 为 $k\boldsymbol{A}$ 特征值; λ_0^m 是 $\boldsymbol{A}^m$ 特征值.
3. $\varphi(\lambda_0)$ 是矩阵多项式 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的特征值, 其中

$$\varphi(\lambda_0) = a_m \lambda_0^m + \cdots + a_1 \lambda_0 + a_0,$$

$$\varphi(\boldsymbol{A}) = a_m \boldsymbol{A}^m + \cdots + a_1 \boldsymbol{A} + a_0 \boldsymbol{I}.$$

而且 $\boldsymbol{x}$ 仍然是矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$, $\boldsymbol{A}^*$, $k\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^m$, $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的分别对应于特征值 $\dfrac{1}{\lambda_0}$, $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_0}$, $k\lambda_0$, λ_0^m, $\varphi(\lambda_0)$ 的特征向量.

(3) 特征向量之间的关系:

1. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量是线性无关的.

(3) 特征向量之间的关系:

1. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量是线性无关的.
2. 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个互异特征值, 对应于 λ_i $(i = 1, 2, \cdots, m)$ 的线性无关的特征向量有 r_i 个, 则由所有这些特征向量 (共 $r_1 + r_2 + \cdots + r_m$ 个) 构成的向量组是线性无关的.

(3) 特征向量之间的关系:

1. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量是线性无关的.
2. 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个互异特征值, 对应于 $\lambda_i \ (i = 1, 2, \cdots, m)$ 的线性无关的特征向量有 r_i 个, 则由所有这些特征向量 (共 $r_1 + r_2 + \cdots + r_m$ 个) 构成的向量组是线性无关的.
3. 对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量是两两正交的.

(4) 特征值所对应的特征向量的个数:

1. 每个特征值都对应着至少一个特征向量.

(4) 特征值所对应的特征向量的个数:

1. 每个特征值都对应着至少一个特征向量.
2. k 重特征值对应的线性无关的特征向量的个数不超过 k.

(4) 特征值所对应的特征向量的个数:

1. 每个特征值都对应着至少一个特征向量.
2. k 重特征值对应的线性无关的特征向量的个数不超过 k.
3. 若 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值对应的线性无关特征向量的个数恰好等于该特征值的重数.

(4) 特征值所对应的特征向量的个数:

1. 每个特征值都对应着至少一个特征向量.
2. k 重特征值对应的线性无关的特征向量的个数不超过 k.
3. 若 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值对应的线性无关特征向量的个数恰好等于该特征值的重数.

这几个结论可用来初步排除计算中的错误, 比如单根却对应着多个线性无关的特征向量, 或者 $(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中向量的个数超过了 λ_0 的重数, 等等.

(4) 特征值所对应的特征向量的个数:

1. 每个特征值都对应着至少一个特征向量.
2. k 重特征值对应的线性无关的特征向量的个数不超过 k.
3. 若 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值对应的线性无关特征向量的个数恰好等于该特征值的重数.

这几个结论可用来初步排除计算中的错误, 比如单根却对应着多个线性无关的特征向量, 或者 $(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中向量的个数超过了 λ_0 的重数, 等等.

(5) 方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\Longleftrightarrow$ 0 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

(三) 正交矩阵的性质.

方阵 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵

$\iff \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} \iff \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}$

$\iff \boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

$\iff \boldsymbol{A}$ 的行 (列) 向量组两两正交, 且都是单位向量

$\iff \boldsymbol{A}$ 的行 (列) 向量组是一组规范正交基.

(三) 正交矩阵的性质.

$$
\begin{aligned}
& \text{方阵 } \boldsymbol{A} \text{ 为正交矩阵} \\
\iff & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} \iff \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I} \\
\iff & \boldsymbol{A} \text{ 可逆, 且 } \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \\
\iff & \boldsymbol{A} \text{ 的行 (列) 向量组两两正交, 且都是单位向量} \\
\iff & \boldsymbol{A} \text{ 的行 (列) 向量组是一组规范正交基.}
\end{aligned}
$$

若 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵, 则 $|\boldsymbol{A}| = \pm 1$; 其特征值 λ 满足 $|\lambda| = 1$.

(三) 正交矩阵的性质.

方阵 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵

$$\Longleftrightarrow \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I} \iff \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$$

$\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

$\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 的行 (列) 向量组两两正交, 且都是单位向量

$\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 的行 (列) 向量组是一组规范正交基.

若 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵, 则 $|\boldsymbol{A}|=\pm 1$; 其特征值 λ 满足 $|\lambda|=1$.
正交变换具有保持向量的内积、长度、夹角不变的特性.

(四) 矩阵对角化.

- 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似的充要条件: $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

(四) 矩阵对角化.

- 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似的充要条件: $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.
- 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似的充要条件: $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值对应的线性无关特征向量的个数等于该特征值的重数.

(四) 矩阵对角化.

- 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似的充要条件: $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.
- 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似的充要条件: $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值对应的线性无关特征向量的个数等于该特征值的重数.
- n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同的特征值, 则 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化. 此条件是充分的, 但不是必要的.

Outline

特征值与特征向量

例 5.1

判断正误:

(i) 设 λ_0 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 如果方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ_0 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$.

特征值与特征向量

例 5.1

判断正误:

(i) 设 λ_0 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 如果方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ_0 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$.

(ii) 矩阵的特征向量不是零向量, 同样地, 矩阵的特征值也不为零.

例 5.1

判断正误:

(i) 设 λ_0 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 如果方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ_0 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$.

(ii) 矩阵的特征向量不是零向量, 同样地, 矩阵的特征值也不为零.

(iii) 设 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个 k 重特征值, 对应于 λ 的线性无关的特征向量的个数一定也为 k.

特征值与特征向量

例 5.1

判断正误:

(i) 设 λ_0 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 如果方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ_0 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$.

(ii) 矩阵的特征向量不是零向量, 同样地, 矩阵的特征值也不为零.

(iii) 设 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个 k 重特征值, 对应于 λ 的线性无关的特征向量的个数一定也为 k.

(iv) 相似的矩阵有相同的特征值, 所以它们的特征向量也相同.

特征值与特征向量

例 5.1

判断正误:

(i) 设 λ_0 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 如果方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ_0 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$.

(ii) 矩阵的特征向量不是零向量, 同样地, 矩阵的特征值也不为零.

(iii) 设 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个 k 重特征值, 对应于 λ 的线性无关的特征向量的个数一定也为 k.

(iv) 相似的矩阵有相同的特征值, 所以它们的特征向量也相同.

(v) 方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的特征值相同, 从而, 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda_0\boldsymbol{x}$, 则必有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\lambda_0\boldsymbol{x}$.

例 5.1

判断正误:

(i) 设 λ_0 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 如果方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ_0 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$.

(ii) 矩阵的特征向量不是零向量, 同样地, 矩阵的特征值也不为零.

(iii) 设 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个 k 重特征值, 对应于 λ 的线性无关的特征向量的个数一定也为 k.

(iv) 相似的矩阵有相同的特征值, 所以它们的特征向量也相同.

(v) 方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的特征值相同, 从而, 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda_0\boldsymbol{x}$, 则必有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\lambda_0\boldsymbol{x}$.

(vi) 方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同的特征值.

解:

(i) 错. 必须指明 k_1, k_2 不全为零.

解:

(i) 错. 必须指明 k_1, k_2 不全为零. (很小的一个细节, 但是很多人解题时忘了加这句话, 以为只是在解方程组.)

解:

(i) 错. 必须指明 k_1, k_2 不全为零. (很小的一个细节, 但是很多人解题时忘了加这句话, 以为只是在解方程组.)

(ii) 错. 特征向量不是零向量, 但特征值有可能为零 (当矩阵不可逆时).

解:

(i) 错. 必须指明 k_1, k_2 不全为零. (很小的一个细节, 但是很多人解题时忘了加这句话, 以为只是在解方程组.)

(ii) 错. 特征向量不是零向量, 但特征值有可能为零 (当矩阵不可逆时).

(iii) 错. 每个特征值对应的线性无关特征向量的个数小于等于该特征值的重数.

解:

(i) 错. 必须指明 k_1, k_2 不全为零. (很小的一个细节, 但是很多人解题时忘了加这句话, 以为只是在解方程组.)

(ii) 错. 特征向量不是零向量, 但特征值有可能为零 (当矩阵不可逆时).

(iii) 错. 每个特征值对应的线性无关特征向量的个数小于等于该特征值的重数.

(iv) 错. 设 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 且 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ_0 的特征向量为 $\boldsymbol{x}$, 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda_0\boldsymbol{x}$, 则

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}^{-1}\lambda_0\boldsymbol{x} = \lambda_0(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}),$$

所以 $\boldsymbol{B}$ 的对应于特征值 λ_0 的特征向量为 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$. (注意这个结论.)

解:

(i) 错. 必须指明 k_1, k_2 不全为零. (很小的一个细节, 但是很多人解题时忘了加这句话, 以为只是在解方程组.)

(ii) 错. 特征向量不是零向量, 但特征值有可能为零 (当矩阵不可逆时).

(iii) 错. 每个特征值对应的线性无关特征向量的个数小于等于该特征值的重数.

(iv) 错. 设 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 且 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ_0 的特征向量为 $\boldsymbol{x}$, 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda_0\boldsymbol{x}$, 则

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x})=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}^{-1}\lambda_0\boldsymbol{x}=\lambda_0(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}),$$

所以 $\boldsymbol{B}$ 的对应于特征值 λ_0 的特征向量为 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$. (注意这个结论.)

(v) 错. 特征向量不一定相同.

解:

(i) 错. 必须指明 k_1, k_2 不全为零. (很小的一个细节, 但是很多人解题时忘了加这句话, 以为只是在解方程组.)

(ii) 错. 特征向量不是零向量, 但特征值有可能为零 (当矩阵不可逆时).

(iii) 错. 每个特征值对应的线性无关特征向量的个数小于等于该特征值的重数.

(iv) 错. 设 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 且 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ_0 的特征向量为 $\boldsymbol{x}$, 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda_0\boldsymbol{x}$, 则

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}^{-1}\lambda_0\boldsymbol{x} = \lambda_0(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}),$$

所以 $\boldsymbol{B}$ 的对应于特征值 λ_0 的特征向量为 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$. (注意这个结论.)

(v) 错. 特征向量不一定相同. 例如 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是其特征向量，但不是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的特征向量.

(vi) 错. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量. 若 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同的特征值, 则可对角化; 反之不成立.

例 5.2

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2, 3, λ. 若行列式 $|2\boldsymbol{A}| = -48$, 则 $\lambda =$____.

例 5.2

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2, 3, λ. 若行列式 $|2\boldsymbol{A}| = -48$, 则 $\lambda =$____.

解: $|2\boldsymbol{A}| = 2^3|\boldsymbol{A}| = 8 \times (2 \times 3 \times \lambda) = -48$, 所以 $\lambda = -1$. $\square$

例 5.2

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2, 3, λ. 若行列式 $|2\boldsymbol{A}| = -48$, 则 $\lambda =$____.

解: $|2\boldsymbol{A}| = 2^3|\boldsymbol{A}| = 8 \times (2 \times 3 \times \lambda) = -48$, 所以 $\lambda = -1$. □

例 5.3

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1, 2, 2, $\boldsymbol{I}$ 为 3 阶单位矩阵, 则 $\left|4\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{I}\right| =$____.

例 5.2

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2, 3, λ. 若行列式 $|2\boldsymbol{A}| = -48$, 则 $\lambda =$_____.

解: $|2\boldsymbol{A}| = 2^3|\boldsymbol{A}| = 8 \times (2 \times 3 \times \lambda) = -48$, 所以 $\lambda = -1$. □

例 5.3

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1, 2, 2, $\boldsymbol{I}$ 为 3 阶单位矩阵, 则 $\left|4\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{I}\right| =$_____.

解: 设 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $\frac{1}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值,

例 5.2

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2, 3, λ. 若行列式 $|2\boldsymbol{A}| = -48$, 则 $\lambda =$____.

解: $|2\boldsymbol{A}| = 2^3|\boldsymbol{A}| = 8 \times (2 \times 3 \times \lambda) = -48$, 所以 $\lambda = -1$. □

例 5.3

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1, 2, 2, $\boldsymbol{I}$ 为 3 阶单位矩阵, 则 $\left|4\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{I}\right| =$____.

解: 设 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $\frac{1}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值, $4\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{I}$ 的特征值为 $\frac{4}{\lambda} - 1$.

例 5.2

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2, 3, λ. 若行列式 $|2\boldsymbol{A}| = -48$, 则 $\lambda =$____.

解: $|2\boldsymbol{A}| = 2^3|\boldsymbol{A}| = 8 \times (2 \times 3 \times \lambda) = -48$, 所以 $\lambda = -1$. □

例 5.3

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1, 2, 2, $\boldsymbol{I}$ 为 3 阶单位矩阵, 则 $\left|4\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{I}\right| =$____.

解: 设 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $\frac{1}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值, $4\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{I}$ 的特征值为 $\frac{4}{\lambda} - 1$. 所以 $4\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{I}$ 的全部特征值为 3, 1, 1.

例 5.2

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2, 3, λ. 若行列式 $|2\boldsymbol{A}| = -48$, 则 $\lambda =$____.

解: $|2\boldsymbol{A}| = 2^3|\boldsymbol{A}| = 8 \times (2 \times 3 \times \lambda) = -48$, 所以 $\lambda = -1$. □

例 5.3

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1, 2, 2, $\boldsymbol{I}$ 为 3 阶单位矩阵, 则 $\left|4\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{I}\right| =$____.

解: 设 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $\frac{1}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值, $4\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{I}$ 的特征值为 $\frac{4}{\lambda} - 1$. 所以 $4\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{I}$ 的全部特征值为 3, 1, 1.
得 $\left|4\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{I}\right| = 3 \times 1 \times 1 = 3$. □

例 5.4

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值互不相同. 若行列式 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的秩为____.

例 5.4

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值互不相同. 若行列式 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的秩为____.

解: 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值互不相同, 则 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化, 即 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵 $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 相似, 从而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{\Lambda})$.

例 5.4

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值互不相同. 若行列式 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的秩为____.

解: 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值互不相同, 则 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化, 即 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵 $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 相似, 从而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{\Lambda})$.

行列式 $|\boldsymbol{A}| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0$, 则 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 至少有一个为零,

例 5.4

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值互不相同. 若行列式 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的秩为____.

解: 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值互不相同, 则 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化, 即 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵 $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 相似, 从而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{\Lambda})$.

行列式 $|\boldsymbol{A}| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0$, 则 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 至少有一个为零, 而这三者互不相同, 所以只有一个为零.

例 5.4

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值互不相同. 若行列式 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的秩为____.

解: 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值互不相同, 则 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化, 即 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵 $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 相似, 从而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{\Lambda})$.

行列式 $|\boldsymbol{A}| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0$, 则 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 至少有一个为零, 而这三者互不相同, 所以只有一个为零. 不妨设 $\lambda_3 = 0$, 则 $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, 得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\Lambda}) = 2$. 所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 2$. □

例 5.5 (研 2008)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值 -1, 1 的特征向量, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$.

(I) 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关;

(II) 令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$, 求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.

例 5.5 (研 2008)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值 -1, 1 的特征向量, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$.

(I) 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关;

(II) 令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$, 求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.

解: (I) 设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{0}. \tag{23}$$

例 5.5 (研 2008)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值 -1, 1 的特征向量, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

(I) 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关;

(II) 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, 求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.

解: (I) 设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}. \tag{23}$$

在上式两边左乘 $\boldsymbol{A}$, 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, 得
$-x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathbf{0}$,

例 5.5 (研 2008)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值 $-1, 1$ 的特征向量, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$.

(I) 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关;

(II) 令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$, 求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.

解: (I) 设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}. \tag{23}$$

在上式两边左乘 $\boldsymbol{A}$, 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 = -\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$, 得 $-x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3(\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3) = \mathbf{0}$, 即

$$-x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + (x_2 + x_3)\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}. \tag{24}$$

例 5.5 (研 2008)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值 -1, 1 的特征向量, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$.

(I) 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关;

(II) 令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$, 求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.

解: (I) 设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}. \tag{23}$$

在上式两边左乘 $\boldsymbol{A}$, 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 = -\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$, 得 $-x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3(\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3) = \mathbf{0}$, 即

$$-x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + (x_2 + x_3)\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}. \tag{24}$$

将 (24) 式减去 (23) 式, 得

$$-2x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_3\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}.$$

又 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值对应的特征向量, 故 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 得 $x_1 = x_3 = 0$.

例 5.5 (研 2008)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值 -1, 1 的特征向量, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$.

(I) 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关;

(II) 令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$, 求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.

解: (I) 设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}. \tag{23}$$

在上式两边左乘 $\boldsymbol{A}$, 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 = -\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$, 得 $-x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3(\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3) = \mathbf{0}$, 即

$$-x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + (x_2 + x_3)\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}. \tag{24}$$

将 (24) 式减去 (23) 式, 得

$$-2x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_3\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}.$$

又 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值对应的特征向量, 故 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 得 $x_1 = x_3 = 0$. 代入 (23) 式, 得 $x_2\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}$.

注意到特征向量是非零向量, $\boldsymbol{\alpha}_2 \neq \mathbf{0}$, 所以只能是 $x_2 = 0$.
得证 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

注意到特征向量是非零向量, $\boldsymbol{\alpha}_2 \neq \mathbf{0}$, 所以只能是 $x_2 = 0$.

得证 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

(II) 由

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AP} &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3) = (-\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3) \\ &= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

注意到特征向量是非零向量, $\boldsymbol{\alpha}_2 \neq \mathbf{0}$, 所以只能是 $x_2 = 0$.

得证 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

(II) 由

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) &= (\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3) = (-\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3) \\ &= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

又 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 知 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$ 可逆,

注意到特征向量是非零向量, $\boldsymbol{\alpha}_2 \neq \mathbf{0}$, 所以只能是 $x_2 = 0$.

得证 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

(II) 由

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AP} &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3) = (-\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3) \\ &= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

又 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 知 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$ 可逆, 所以

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

注意到特征向量是非零向量, $\boldsymbol{\alpha}_2 \neq \mathbf{0}$, 所以只能是 $x_2 = 0$.

得证 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

(II) 由

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3) = (-\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3) \\ &= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

又 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 知 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$ 可逆, 所以

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

☞ 注意题目没有说向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量, 否则会设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3 = \lambda\boldsymbol{\alpha}_3$ 导致错误的思路.

实对称矩阵的特征值和特征向量

例 5.6 (研 2007)

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$, 且 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_1 特征向量. 记 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^5 - 4\boldsymbol{A}^3 + \boldsymbol{I}$, 其中 $\boldsymbol{I}$ 为 3 阶单位矩阵.

(I) 验证 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量, 并求 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值与特征向量;

(II) 求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

实对称矩阵的特征值和特征向量

例 5.6 (研 2007)

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$, 且 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_1 特征向量. 记 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^5 - 4\boldsymbol{A}^3 + \boldsymbol{I}$, 其中 $\boldsymbol{I}$ 为 3 阶单位矩阵.

(I) 验证 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量, 并求 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值与特征向量;

(II) 求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解: (I) 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1$, 知

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}_1 = (\boldsymbol{A}^5 - 4\boldsymbol{A}^3 + \boldsymbol{I})\boldsymbol{\alpha}_1 = (\lambda_1^5 - 4\lambda_1^3 + 1)\boldsymbol{\alpha}_1 = -2\boldsymbol{\alpha}_1,$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的一个特征向量.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值为 $\lambda_i^5 - 4\lambda_i^3 + 1$ $(i = 1, 2, 3)$, 即 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值为 $-2, 1, 1$.

由 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}_1 = -2\boldsymbol{\alpha}_1$, 故矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的对应于特征值 -2 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1$, 其中 k_1 是不为零的任意常数.

由 $\boldsymbol{B\alpha}_1 = -2\boldsymbol{\alpha}_1$, 故矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的对应于特征值 -2 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1$, 其中 k_1 是不为零的任意常数.

因为 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 所以 $\boldsymbol{B}$ 也是实对称矩阵. 设 $(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的属于 1 的特征向量.

由 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}_1=-2\boldsymbol{\alpha}_1$, 故矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的对应于特征值 -2 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1$, 其中 k_1 是不为零的任意常数.

因为 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 所以 $\boldsymbol{B}$ 也是实对称矩阵. 设 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的属于 1 的特征向量. 因为实对称矩阵属于不同特征值的特征向量正交, 所以 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1=0$, 即

$$x_1-x_2+x_3=0.$$

由 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}_1=-2\boldsymbol{\alpha}_1$, 故矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的对应于特征值 -2 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1$, 其中 k_1 是不为零的任意常数.

因为 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 所以 $\boldsymbol{B}$ 也是实对称矩阵. 设 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的属于 1 的特征向量. 因为实对称矩阵属于不同特征值的特征向量正交, 所以 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1=0$, 即

$$x_1-x_2+x_3=0.$$

解得该方程组的基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,1)^{\mathrm{T}},$$

由 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}_1 = -2\boldsymbol{\alpha}_1$, 故矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的对应于特征值 -2 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1$, 其中 k_1 是不为零的任意常数.

因为 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 所以 $\boldsymbol{B}$ 也是实对称矩阵. 设 $(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的属于 1 的特征向量. 因为实对称矩阵属于不同特征值的特征向量正交, 所以 $(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 = 0$, 即

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0.$$

解得该方程组的基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_2 = (1, 1, 0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = (-1, 0, 1)^{\mathrm{T}},$$

故矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 1 的全部特征向量为 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3$, 其中 k_2, k_3 是不全为零的常数.

(II) 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 得

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

因为 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(-2,1,1)$, 所以

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

例 5.7

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{P}$, 求 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{I}$ 的特征值与特征向量.

例 5.7

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}$, 求 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{I}$ 的特征值与特征向量.

解: 若 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 为伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值.

例 5.7

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}$, 求 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{I}$ 的特征值与特征向量.

解: 若 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 为伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值. 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}^*$ 相似, 二者特征值相同. 进而, $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{I}$ 的特征值为 $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}+2$.

例 5.7

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}$, 求 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{I}$ 的特征值与特征向量.

解: 若 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 为伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值. 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}^*$ 相似, 二者特征值相同. 进而, $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{I}$ 的特征值为 $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}+2$. 由于

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}3-\lambda&2&2\\2&3-\lambda&2\\2&2&3-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{c_1+c_2+c_3}(7-\lambda)\begin{vmatrix}1&2&2\\1&3-\lambda&2\\1&2&3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_2-r_1]{r_3-r-1}(7-\lambda)\begin{vmatrix}1&2&2\\0&1-\lambda&0\\0&0&1-\lambda\end{vmatrix}=(7-\lambda)(1-\lambda)^2,$$

例 5.7

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}$, 求 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{I}$ 的特征值与特征向量.

解: 若 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 为伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值. 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}^*$ 相似, 二者特征值相同. 进而, $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{I}$ 的特征值为 $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}+2$. 由于

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}3-\lambda&2&2\\2&3-\lambda&2\\2&2&3-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{c_1+c_2+c_3}(7-\lambda)\begin{vmatrix}1&2&2\\1&3-\lambda&2\\1&2&3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_2-r_1]{r_3-r-1}(7-\lambda)\begin{vmatrix}1&2&2\\0&1-\lambda&0\\0&0&1-\lambda\end{vmatrix}=(7-\lambda)(1-\lambda)^2,$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=7$, $\lambda_2=\lambda_3=1$, 且 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=7$.

例 5.7

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}$, 求 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{I}$ 的特征值与特征向量.

解: 若 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 为伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值. 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}^*$ 相似, 二者特征值相同. 进而, $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{I}$ 的特征值为 $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}+2$. 由于

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}3-\lambda&2&2\\2&3-\lambda&2\\2&2&3-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{c_1+c_2+c_3}(7-\lambda)\begin{vmatrix}1&2&2\\1&3-\lambda&2\\1&2&3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_2-r_1]{r_3-r-1}(7-\lambda)\begin{vmatrix}1&2&2\\0&1-\lambda&0\\0&0&1-\lambda\end{vmatrix}=(7-\lambda)(1-\lambda)^2,$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=7$, $\lambda_2=\lambda_3=1$, 且 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=7$. 得 $\boldsymbol{B}$ 的特征值相应为: 1, 7, 7. $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{I}$ 的特征值相应为: 3, 9, 9.

设 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ_0 的特征向量为 $\boldsymbol{x}$, 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda_0\boldsymbol{x}$,

设 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ_0 的特征向量为 $\boldsymbol{x}$, 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda_0 \boldsymbol{x}$, 则

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x})$$

设 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ_0 的特征向量为 $\boldsymbol{x}$, 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda_0 \boldsymbol{x}$, 则

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}$$

设 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ_0 的特征向量为 $\boldsymbol{x}$, 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda_0\boldsymbol{x}$, 则

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_0}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}),$$

设 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ_0 的特征向量为 $\boldsymbol{x}$, 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda_0 \boldsymbol{x}$, 则

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_0}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}),$$

所以 $\boldsymbol{B}$ 的对应于特征值 $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_0}$ 的特征向量为 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$,

设 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ_0 的特征向量为 $\boldsymbol{x}$, 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda_0\boldsymbol{x}$, 则

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x})=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_0}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}),$$

所以 $\boldsymbol{B}$ 的对应于特征值 $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_0}$ 的特征向量为 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$, 进而, $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{I}$ 的对应于特征值 $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_0}+2$ 的特征向量为 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$.

当 $\lambda_1 = 7$ 时, 解方程 $(\boldsymbol{A} - 7\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A} - 7\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix},$$

显然 $(1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$ 是其解.

当 $\lambda_1 = 7$ 时, 解方程 $(\boldsymbol{A} - 7\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A} - 7\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix},$$

显然 $(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是其解. 而单重特征值只能对应一个线性无关的特征向量, 故得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_1 = 7$ 时, 解方程 $(\boldsymbol{A} - 7\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A} - 7\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix},$$

显然 $(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是其解. 而单重特征值只能对应一个线性无关的特征向量, 故得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 时, 解方程 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A} - 7\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_2 = (-1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_3 = (-1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

又

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

又

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

综上, $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{I}$ 的对应于 $\lambda=3$ 的全部特征向量为 $k_1(0,1,1)^{\mathrm{T}}$, k_1 为非零常数;

又

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

综上, $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{I}$ 的对应于 $\lambda=3$ 的全部特征向量为 $k_1(0,1,1)^{\mathrm{T}}$, k_1 为非零常数; $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{I}$ 的对应于 $\lambda=9$ (二重) 的全部特征向量为 $k_2(1,-1,0)^{\mathrm{T}}+k_3(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$, k_2, k_3 是不全为零的常数.

例 5.8 (研 2006)

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (-1, 2, -1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (0, -1, 1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的两个解.

(I) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量;

(II) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda}$.

例 5.8 (研 2006)

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (-1, 2, -1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (0, -1, 1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的两个解.

(I) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量;

(II) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda}$.

解: (I) 因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3, 即

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

例 5.8 (研 2006)

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (-1, 2, -1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (0, -1, 1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 的两个解.

(I) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量;

(II) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda}$.

解: (I) 因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3, 即

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

所以 3 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha} = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 3 的特征向量.

例 5.8 (研 2006)

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (-1, 2, -1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (0, -1, 1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的两个解.

(I) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量;

(II) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda}$.

解: (I) 因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3, 即

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

所以 3 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha} = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 3 的特征向量.

又 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 = \mathbf{0} = 0\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0} = 0\boldsymbol{\alpha}_2$, 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 0 的特征向量.

例 5.8 (研 2006)

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (-1, 2, -1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (0, -1, 1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的两个解.

(I) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量;

(II) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda}$.

解: (I) 因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3, 即

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

所以 3 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha} = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 3 的特征向量.

又 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{0} = 0\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{0} = 0\boldsymbol{\alpha}_2$, 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 0 的特征向量.

因此, $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 3, 0, 0.

例 5.8 (研 2006)

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (-1, 2, -1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (0, -1, 1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的两个解.

(I) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量;

(II) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda}$.

解: (I) 因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3, 即

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

所以 3 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha} = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 3 的特征向量.

又 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 = \mathbf{0} = 0\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0} = 0\boldsymbol{\alpha}_2$, 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 0 的特征向量.

因此, $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 3, 0, 0. $\lambda = 3$ 对应的特征向量为 $k(1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, k 为非零常数; $\lambda = 0$ 对应的特征向量为 $k_1(-1, 2, -1)^{\mathrm{T}} + k_2(0, -1, 1)^{\mathrm{T}}$, k_1, k_2 不全为零.

(II) 注意到 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 要得到一组正交向量, 只需要将 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 正交化.

(II) 注意到 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 要得到一组正交向量, 只需要将 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 正交化. 取

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 = (-1, 2, -1)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-3}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

(II) 注意到 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 要得到一组正交向量, 只需要将 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 正交化. 取

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 = (-1, 2, -1)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-3}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

单位化得

$$\boldsymbol{\gamma}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\gamma}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\gamma}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{Q}=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$,

得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$.