# 第 1 章　行列式

Linear Algebra

黄 正 华

Email: huangzh@whu.edu.cn

武汉大学　数学与统计学院

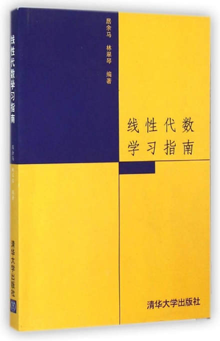
October 18, 2016

# Outline

# 使用教材

[1] 居余马 等 编著, 线性代数 (第 2 版). 清华大学出版社, 2002

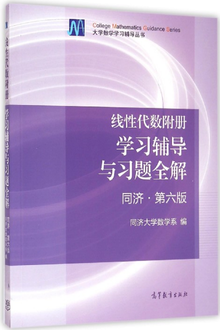
[2] 居余马 林翠琴 编著, 线性代数学习指南. 清华大学出版社, 2003

# 书籍推荐

[3] 同济大学数学系 编, 线性代数 (第六版). 高等教育出版社, 2014

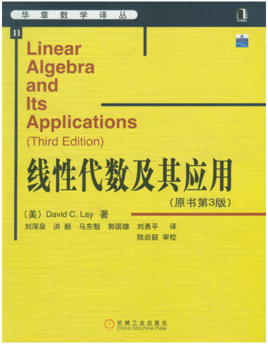
[4] 同济大学数学系 编, 线性代数附册学习辅导与习题全解. 高等教育出版社, 2014

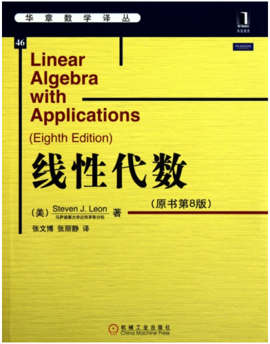



# 书籍推荐


[5] David C. Lay 著, 刘深泉 等 译, 线性代数及其应用. 机械工业出版社, 2005

[6] Steven J. Leon 著, 张文博 张丽静 译, 线性代数. 机械工业出版社, 2010

# 书籍推荐

[7] 陈志杰 主编, 高等代数与解析几何 (第二版), 上下册. 高等教育出版社, 2008


## 时间要到位? 2:1?

- 上课用时
  54 学时

# 时间要到位？2:1？

- 上课用时
  54 学时 $= 40.5$ 小时

# 时间要到位? 2:1?

- 上课用时

  54 学时 = 40.5 小时 = 1.6875 天.

# 时间要到位? 2:1?

- 上课用时
  54 学时 = 40.5 小时= 1.6875 天.
- 做到 $1:1$

# 时间要到位? 2:1?

- 上课用时

  54 学时 $= 40.5$ 小时$= 1.6875$ 天.

- 做到 $1:1$

  54 学时 $\times 2 = 3.375$ 天.

# 时间要到位? 2:1?

- 上课用时

  54 学时 $= 40.5$ 小时$= 1.6875$ 天.

- 做到 $1:1$

  54 学时 $\times 2 = 3.375$ 天.

- 做到 $2:1$

# 时间要到位? 2:1?

- 上课用时

  54 学时 $= 40.5$ 小时$= 1.6875$ 天.

- 做到 $1:1$

  54 学时 $\times 2 = 3.375$ 天.

- 做到 $2:1$

  54 学时 $\times 3 = 5.0625$ 天.

# 什么是线性 (Linear)

形如 $ax + by = c$ 的方程 ($a$, $b$, $c$ 为常数), 其全部解在平面上构成一条直线, 此时 $x$, $y$ 之间呈现为线性关系.

# 什么是线性 (Linear)

形如 $a\textcolor{red}{x} + b\textcolor{red}{y} = c$ 的方程 ($a$, $b$, $c$ 为常数), 其全部解在平面上构成一条直线, 此时 $x$, $y$ 之间呈现为线性关系. 方程 $a\textcolor{red}{x} + b\textcolor{red}{y} = c$ 称为线性方程.

# 什么是线性 (Linear)

形如 $a{\color{red}x}+b{\color{red}y}=c$ 的方程 ($a$, $b$, $c$ 为常数), 其全部解在平面上构成一条直线, 此时 $x$, $y$ 之间呈现为线性关系. 方程 $a{\color{red}x}+b{\color{red}y}=c$ 称为线性方程.

推而广之, 含有 $n$ 个变量的一次方程

$$k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n=b$$

称为线性方程,

# 什么是线性 (Linear)

形如 $ax+by=c$ 的方程 ($a$, $b$, $c$ 为常数), 其全部解在平面上构成一条直线, 此时 $x$, $y$ 之间呈现为线性关系. 方程 $ax+by=c$ 称为线性方程.

推而广之, 含有 $n$ 个变量的一次方程

$$k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n=b$$

称为线性方程, 这里 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是变量,

# 什么是线性 (Linear)

形如 $ax+by=c$ 的方程 ($a$, $b$, $c$ 为常数), 其全部解在平面上构成一条直线, 此时 $x$, $y$ 之间呈现为线性关系. 方程 $ax+by=c$ 称为线性方程.

推而广之, 含有 $n$ 个变量的一次方程

$$k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n=b$$

称为线性方程, 这里 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是变量, $k_1, k_2, \cdots, k_n, b$ 是常数.

# 什么是线性 (Linear)

形如 $ax+by=c$ 的方程 ($a$, $b$, $c$ 为常数), 其全部解在平面上构成一条直线, 此时 $x$, $y$ 之间呈现为线性关系. 方程 $ax+by=c$ 称为线性方程.

推而广之, 含有 $n$ 个变量的一次方程

$$k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n=b$$

称为线性方程, 这里 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是变量, $k_1, k_2, \cdots, k_n, b$ 是常数. 此时变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 之间呈现为线性关系.

# 什么是线性 (Linear)

形如 $ax+by=c$ 的方程 ($a$, $b$, $c$ 为常数), 其全部解在平面上构成一条直线, 此时 $x$, $y$ 之间呈现为线性关系. 方程 $ax+by=c$ 称为线性方程.

推而广之, 含有 $n$ 个变量的一次方程

$$k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n=b$$

称为线性方程, 这里 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是变量, $k_1, k_2, \cdots, k_n, b$ 是常数. 此时变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 之间呈现为线性关系.

非线性关系的例子:

$$y=2x^2+3, \quad y=2\sqrt{x}+3, \quad y=2\sin x+3, \quad xy=1,$$

上述 $x$, $y$ 之间为非线性关系.

# 什么是线性代数

线性代数 (Linear Algebra) 是代数学的一个分支, 主要处理线性关系问题.

# 什么是线性代数

线性代数 (Linear Algebra) 是代数学的一个分支, 主要处理线性关系问题. 它的核心内容是研究 (1) 有限维线性空间的结构, (2) 线性空间的线性变换.

# 什么是线性代数

线性代数 (Linear Algebra) 是代数学的一个分支, 主要处理线性关系问题. 它的核心内容是研究 (1) 有限维线性空间的结构, (2) 线性空间的线性变换.

本课程介绍线性代数的基础知识, 核心话题是: 线性方程组的求解.

# 高斯消元法

一般地, 将含有 $n$ 个未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的线性方程组记为:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

该方程组中含有 $m$ 个方程.

# 高斯消元法

一般地, 将含有 $n$ 个未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的线性方程组记为:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

该方程组中含有 $m$ 个方程. 其中 $a_{ij}$ 是系数, $b_i$ 是常数项, $i = 1, 2, \cdots, m$, $j = 1, 2, \cdots, n$.

# 高斯消元法

一般地, 将含有 $n$ 个未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的线性方程组记为:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

该方程组中含有 $m$ 个方程. 其中 $a_{ij}$ 是系数, $b_i$ 是常数项, $i = 1, 2, \cdots, m$, $j = 1, 2, \cdots, n$. 系数 $a_{ij}$ 有两个下标, 下标 $i, j$ 分别表示 $a_{ij}$ 在第 $i$ 行、第 $j$ 列.

# 高斯消元法

一般地, 将含有 $n$ 个未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的线性方程组记为:

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{array}\right. \tag{1}$$

该方程组中含有 $m$ 个方程. 其中 $a_{ij}$ 是系数, $b_i$ 是常数项, $i = 1, 2, \cdots, m$, $j = 1, 2, \cdots, n$. 系数 $a_{ij}$ 有两个下标, 下标 $i, j$ 分别表示 $a_{ij}$ 在第 $i$ 行、第 $j$ 列.

**高斯消元法**是求解线性方程组的经典方法, 简单实用, 永不过时.

### 例 0.1

求曲线 $y = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2$ 过点 $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 0)$.

## 例 0.1

求曲线 $y = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2$ 过点 $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,0)$.

**解:** 代入三点, 得到一个关于 $\lambda_0$, $\lambda_1$, $\lambda_2$ 的线性方程组:

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \\ \lambda_0 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 2, \\ \lambda_0 + 3\lambda_1 + 9\lambda_2 = 0. \end{cases}$$

## 例 0.1

求曲线 $y = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2$ 过点 $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,0)$.

**解:** 代入三点, 得到一个关于 $\lambda_0$, $\lambda_1$, $\lambda_2$ 的线性方程组:

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \\ \lambda_0 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 2, \\ \lambda_0 + 3\lambda_1 + 9\lambda_2 = 0. \end{cases}$$

使用高斯消元法. 先化为阶梯形:

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \\ \lambda_0 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 2, \\ \lambda_0 + 3\lambda_1 + 9\lambda_2 = 0. \end{cases} \xrightarrow[r_2 - r_1]{r_3 - r_2} \begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 = 1, \\ \lambda_1 + 5\lambda_2 = -2. \end{cases}$$

## 例 0.1

求曲线 $y = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2$ 过点 $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,0)$.

**解:** 代入三点, 得到一个关于 $\lambda_0$, $\lambda_1$, $\lambda_2$ 的线性方程组:

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \\ \lambda_0 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 2, \\ \lambda_0 + 3\lambda_1 + 9\lambda_2 = 0. \end{cases}$$

使用高斯消元法. 先化为阶梯形:

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \\ \lambda_0 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 2, \\ \lambda_0 + 3\lambda_1 + 9\lambda_2 = 0. \end{cases} \xrightarrow[r_2 - r_1]{r_3 - r_2} \begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 = 1, \\ \lambda_1 + 5\lambda_2 = -2. \end{cases}$$

$$\xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 = 1, \\ 2\lambda_2 = -3. \end{cases}$$

## 例 0.1

求曲线 $y=\lambda_0+\lambda_1 x+\lambda_2 x^2$ 过点 $(1,1), (2,2), (3,0)$.

**解:** 代入三点, 得到一个关于 $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ 的线性方程组:

$$\begin{cases}\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2=1,\\ \lambda_0+2\lambda_1+4\lambda_2=2,\\ \lambda_0+3\lambda_1+9\lambda_2=0.\end{cases}$$

使用高斯消元法. 先化为阶梯形:

$$\begin{cases}\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2=1,\\ \lambda_0+2\lambda_1+4\lambda_2=2,\\ \lambda_0+3\lambda_1+9\lambda_2=0.\end{cases} \xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-r_2} \begin{cases}\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2=1,\\ \lambda_1+3\lambda_2=1,\\ \lambda_1+5\lambda_2=-2.\end{cases}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2} \begin{cases}\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2=1,\\ \lambda_1+3\lambda_2=1,\\ 2\lambda_2=-3.\end{cases} \xrightarrow{r_3\div 2} \begin{cases}\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2=1,\\ \lambda_1+3\lambda_2=1,\\ \lambda_2=-\frac{3}{2}.\end{cases}$$

再回代:

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \ \ \lambda_2 = \ \ 1, \\ \qquad \lambda_1 + 3\lambda_2 = \ \ 1, \\ \qquad\qquad \lambda_2 = -\frac{3}{2}. \end{cases} \xrightarrow[r_1 - r_3]{r_2 - 3r_3} \begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 \qquad = \ \frac{5}{2}, \\ \qquad \lambda_1 \qquad = \frac{11}{2}, \\ \qquad\qquad \lambda_2 = -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

再回代:

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \ \ \lambda_2 = \ \ \ 1, \\ \qquad \lambda_1 + 3\lambda_2 = \ \ \ 1, \\ \qquad\qquad \lambda_2 = -\frac{3}{2}. \end{cases} \xrightarrow[r_1 - r_3]{r_2 - 3r_3} \begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 \qquad = \ \frac{5}{2}, \\ \qquad \lambda_1 \qquad = \frac{11}{2}, \\ \qquad\qquad \lambda_2 = -\frac{3}{2}. \end{cases} \xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{cases} \lambda_0 \qquad\qquad = -3, \\ \qquad \lambda_1 \qquad = \frac{11}{2}, \\ \qquad\qquad \lambda_2 = -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

再回代:

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 = 1, \\ \lambda_2 = -\frac{3}{2}. \end{cases} \xrightarrow[r_1 - r_3]{r_2 - 3r_3} \begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 = \frac{5}{2}, \\ \lambda_1 = \frac{11}{2}, \\ \lambda_2 = -\frac{3}{2}. \end{cases} \xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{cases} \lambda_0 = -3, \\ \lambda_1 = \frac{11}{2}, \\ \lambda_2 = -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

即所求曲线方程为 $y = -3 + \frac{11}{2}x - \frac{3}{2}x^2$. $\square$

再回代:

$$\begin{cases}\lambda_0+\lambda_1+\ \ \lambda_2= & 1,\\ \qquad\ \lambda_1+3\lambda_2= & 1,\\ \qquad\qquad\quad \lambda_2= & -\frac{3}{2}.\end{cases}\xrightarrow[r_1-r_3]{r_2-3r_3}\begin{cases}\lambda_0+\lambda_1 & = & \frac{5}{2},\\ \qquad\ \lambda_1 & = & \frac{11}{2},\\ \qquad\qquad \lambda_2 & = & -\frac{3}{2}.\end{cases}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{cases}\lambda_0 & = & -3,\\ \quad \lambda_1 & = & \frac{11}{2},\\ \qquad \lambda_2 & = & -\frac{3}{2}.\end{cases}$$

即所求曲线方程为 $y=-3+\frac{11}{2}x-\frac{3}{2}x^2$. □

以上就是**高斯消元法**, 主要是两个步骤: 化为阶梯形, 回代.

围绕线性方程组这个主题, 课程还将讨论以下三个概念: 行列式, 矩阵, 向量.

围绕线性方程组这个主题, 课程还将讨论以下三个概念: 行列式, 矩阵, 向量.

这是求解线性方程组的三个有效工具.

围绕线性方程组这个主题, 课程还将讨论以下三个概念: 行列式, 矩阵, 向量.

这是求解线性方程组的三个有效工具. 下面我们简单说明这三个工具出现的原因.

# 高斯消元法 $\longrightarrow$ 矩阵的初等行变换.

前述解法中, 未知量并没有参与运算.

# 高斯消元法 $\longrightarrow$ 矩阵的初等行变换.

前述解法中, 未知量并没有参与运算. 实际参与运算的只有系数和常数,

# 高斯消元法 ⟶ 矩阵的初等行变换.

前述解法中, 未知量并没有参与运算. 实际参与运算的只有系数和常数, 把方程组的主要信息记录在一个矩形阵列(简称**矩阵**) 里:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \tag{2}$$

# 高斯消元法 ⟶ 矩阵的初等行变换.

前述解法中, 未知量并没有参与运算. 实际参与运算的只有系数和常数, 把方程组的主要信息记录在一个矩形阵列(简称**矩阵**) 里:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \tag{2}$$

方程的运算与变换, 体现为矩阵中, 各行元素的相应运算.

# 高斯消元法 $\longrightarrow$ 矩阵的初等行变换.

前述解法中, 未知量并没有参与运算. 实际参与运算的只有系数和常数, 把方程组的主要信息记录在一个矩形阵列(简称**矩阵**) 里:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \tag{2}$$

方程的运算与变换, 体现为矩阵中, 各行元素的相应运算.

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \end{array}\right)$$

# 高斯消元法 $\longrightarrow$ 矩阵的初等行变换.

前述解法中, 未知量并没有参与运算. 实际参与运算的只有系数和常数, 把方程组的主要信息记录在一个矩形阵列(简称**矩阵**) 里:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \tag{2}$$

方程的运算与变换, 体现为矩阵中, 各行元素的相应运算.

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3-r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

# 高斯消元法 $\longrightarrow$ 矩阵的初等行变换.

前述解法中, 未知量并没有参与运算. 实际参与运算的只有系数和常数, 把方程组的主要信息记录在一个矩形阵列(简称**矩阵**) 里:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \tag{2}$$

方程的运算与变换, 体现为矩阵中, 各行元素的相应运算.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3-r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3\div 2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{array}\right)$$

前述解法中, 未知量并没有参与运算. 实际参与运算的只有系数和常数, 把方程组的主要信息记录在一个矩形阵列(简称**矩阵**) 里:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \tag{2}$$

方程的运算与变换, 体现为矩阵中, 各行元素的相应运算.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3-r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3\div 2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[r_1-r_3]{r_2-3r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{array}\right)$$

# 高斯消元法 $\longrightarrow$ 矩阵的初等行变换.

前述解法中, 未知量并没有参与运算. 实际参与运算的只有系数和常数, 把方程组的主要信息记录在一个矩形阵列(简称**矩阵**) 里:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \tag{2}$$

方程的运算与变换, 体现为矩阵中, 各行元素的相应运算.

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3-r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3\div 2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[r_1-r_3]{r_2-3r_3} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{r_1-r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{array}\right).$$

# 线性方程组等同于矩阵方程

记

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix},$$

# 线性方程组等同于矩阵方程

记

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

# 线性方程组等同于矩阵方程

记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}.$$

# 线性方程组等同于矩阵方程

记

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

这里 $\boldsymbol{A}$ 记录的是系数, $\boldsymbol{b}$ 记录的是常数.

# 线性方程组等同于矩阵方程

记

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

这里 $\boldsymbol{A}$ 记录的是系数, $\boldsymbol{b}$ 记录的是常数. 引入矩阵乘法: $\boldsymbol{Ax}$ 定义为 $\boldsymbol{A}$ 各行的向量与 $\boldsymbol{x}$ 做内积.

# 线性方程组等同于矩阵方程

记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}.$$

这里 $\boldsymbol{A}$ 记录的是系数, $\boldsymbol{b}$ 记录的是常数. 引入矩阵乘法: $\boldsymbol{Ax}$ 定义为 $\boldsymbol{A}$ 各行的向量与 $\boldsymbol{x}$ 做内积. 例如 $\boldsymbol{A}$ 的第二行与 $\boldsymbol{x}$ 做内积, 有

$$(1,2,4)\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_1+2x_2+4x_3.$$

# 线性方程组等同于矩阵方程

记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}.$$

这里 $\boldsymbol{A}$ 记录的是系数, $\boldsymbol{b}$ 记录的是常数. 引入矩阵乘法: $\boldsymbol{Ax}$ 定义为 $\boldsymbol{A}$ 各行的向量与 $\boldsymbol{x}$ 做内积. 例如 $\boldsymbol{A}$ 的第二行与 $\boldsymbol{x}$ 做内积, 有

$$(1,2,4)\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_1+2x_2+4x_3.$$

则

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\triangleq\begin{pmatrix}x_1+x_2+x_3\\x_1+2x_2+4x_3\\x_1+3x_2+9x_3\end{pmatrix}.$$

从而线性方程组可表达为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

从而线性方程组可表达为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

而这本质上是一个矩阵方程.

从而线性方程组可表达为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

而这本质上是一个矩阵方程.

如果我们能一般地解决矩阵方程的求解, 事实上就完成了线性方程组的求解.

# 线性方程组求解等同于向量组的线性表示问题

把前述线性方程组记为

$$\lambda_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

# 线性方程组求解等同于向量组的线性表示问题

把前述线性方程组记为

$$\lambda_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

则 “线性方程组” 等同于 “向量的线性表示” 问题.

# 线性方程组求解等同于向量组的线性表示问题

把前述线性方程组记为

$$\lambda_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

则 “线性方程组” 等同于 “向量的线性表示” 问题. 更重要的是, 用向量的观点, 可以几何地解释线性方程组解的结构问题.

# 线性方程组与几何联系

从几何角度考虑线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

# 线性方程组与几何联系

从几何角度考虑线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

每一个方程均对应于平面上的一条直线.

# 线性方程组与几何联系

从几何角度考虑线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

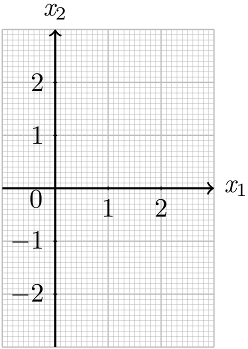
每一个方程均对应于平面上的一条直线. 求解方程组, 相当于求两条直线的交点.

考虑以下三个不同的线性方程组:

$$\text{(i)}\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 - x_2 = 2. \end{cases} \qquad \text{(ii)}\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases} \qquad \text{(iii)}\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ -x_1 - x_2 = -2. \end{cases}$$

考虑以下三个不同的线性方程组:

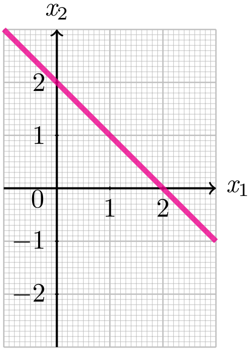
$$\text{(i)}\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 - x_2 = 2. \end{cases} \qquad \text{(ii)}\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases} \qquad \text{(iii)}\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ -x_1 - x_2 = -2. \end{cases}$$




(a) 相交: 唯一解

考虑以下三个不同的线性方程组:

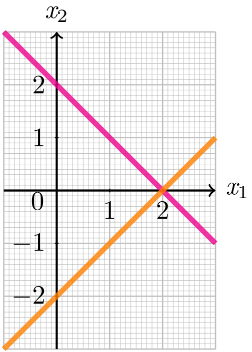
$$\text{(i)}\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 - x_2 = 2. \end{cases} \qquad \text{(ii)}\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases} \qquad \text{(iii)}\begin{cases} x_1 + x_2 = \ \ 2, \\ -x_1 - x_2 = -2. \end{cases}$$




(a) 相交: 唯一解

考虑以下三个不同的线性方程组:

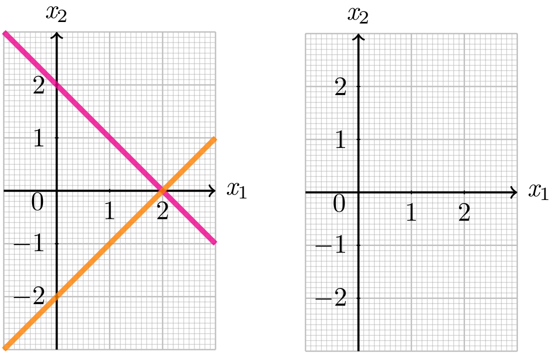
$$\text{(i)}\ \begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 - x_2 = 2. \end{cases} \qquad \text{(ii)}\ \begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases} \qquad \text{(iii)}\ \begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ -x_1 - x_2 = -2. \end{cases}$$




(a) 相交: 唯一解

考虑以下三个不同的线性方程组:

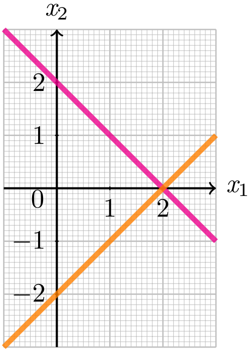
$$\text{(i)}\begin{cases} x_1+x_2=2,\\ x_1-x_2=2.\end{cases}\qquad \text{(ii)}\begin{cases} x_1+x_2=2,\\ x_1+x_2=1.\end{cases}\qquad \text{(iii)}\begin{cases} x_1+x_2=2,\\ -x_1-x_2=-2.\end{cases}$$



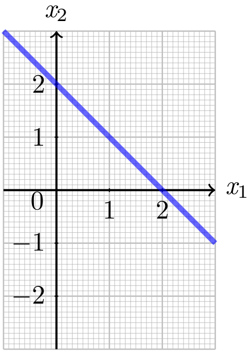

(a) 相交: 唯一解 (b) 平行: 无解

考虑以下三个不同的线性方程组:

$$\text{(i)}\ \begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 - x_2 = 2. \end{cases} \qquad \text{(ii)}\ \begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases} \qquad \text{(iii)}\ \begin{cases} \phantom{-}x_1 + x_2 = \phantom{-}2, \\ -x_1 - x_2 = -2. \end{cases}$$



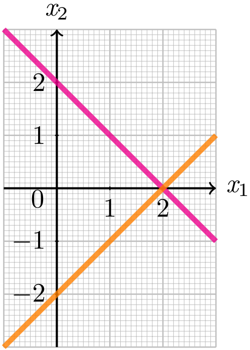

(a) 相交: 唯一解



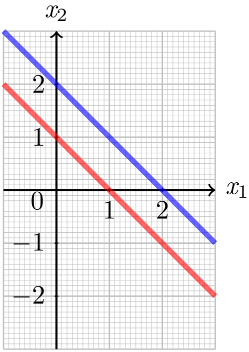

(b) 平行: 无解

考虑以下三个不同的线性方程组:

$$\text{(i)} \begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 - x_2 = 2. \end{cases} \qquad \text{(ii)} \begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases} \qquad \text{(iii)} \begin{cases} x_1 + x_2 = \phantom{-}2, \\ -x_1 - x_2 = -2. \end{cases}$$



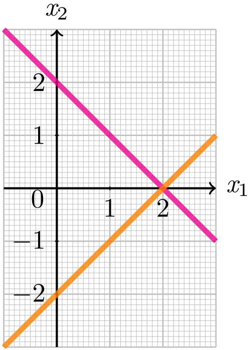

(a) 相交: 唯一解



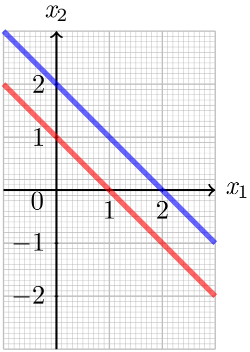

(b) 平行: 无解

考虑以下三个不同的线性方程组:

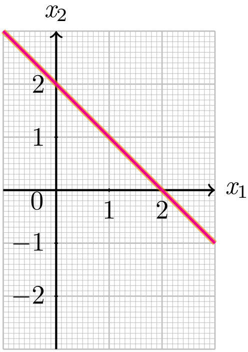
$$\text{(i)} \begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 - x_2 = 2. \end{cases} \qquad \text{(ii)} \begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases} \qquad \text{(iii)} \begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ -x_1 - x_2 = -2. \end{cases}$$




(a) 相交: 唯一解




(b) 平行: 无解




(c) 重合: 无穷多解

两条直线之间的关系有三种情况: 相交、平行、重合.

两条直线之间的关系有三种情况: 相交、平行、重合. 相应地:

一个线性方程组的解, 有下列三种情况:

(1) 有唯一解;

(2) 无解;

(3) 有无穷多解.

两条直线之间的关系有三种情况: 相交、平行、重合. 相应地:

一个线性方程组的解, 有下列三种情况:

(1) 有唯一解;

(2) 无解;

(3) 有无穷多解.

这个结论将在第 3 章进行一般讨论.

# 对“无穷多解”感到陌生?

无穷多解的情形我们一直都在面对, 比如

$$2x + 3y = 1,$$

# 对“无穷多解”感到陌生?

无穷多解的情形我们一直都在面对, 比如

$$2x + 3y = 1,$$

在几何中, 它是二维平面内的直线方程;

# 对 "无穷多解" 感到陌生?

无穷多解的情形我们一直都在面对, 比如

$$2x + 3y = 1,$$

在几何中, 它是二维平面内的直线方程; 在线性代数中, 它是一个线性方程组 (虽然只有一个方程).

# 对“无穷多解”感到陌生?

无穷多解的情形我们一直都在面对, 比如

$$2x + 3y = 1,$$

在几何中, 它是二维平面内的直线方程; 在线性代数中, 它是一个线性方程组 (虽然只有一个方程). 该线性方程组显然有无穷多组解, 全部解所构成的集合, 呈现为二维平面中的一条直线.

# 线性方程组解的几何诠释

比如线性方程组 (虽然只有一个方程):

$$x - 2y - 3z = 0. \tag{3}$$

# 线性方程组解的几何诠释

比如线性方程组 (虽然只有一个方程):

$$x - 2y - 3z = 0. \tag{3}$$

由 $x - 2y - 3z = 0 \iff x = 2y + 3z$

# 线性方程组解的几何诠释

比如线性方程组 (虽然只有一个方程):

$$x - 2y - 3z = 0. \tag{3}$$

由 $x - 2y - 3z = 0 \iff x = 2y + 3z \iff \begin{cases} x = 2y + 3z, \\ y = \quad y \qquad , \\ z = \qquad\quad z. \end{cases}$

# 线性方程组解的几何诠释

比如线性方程组 (虽然只有一个方程):

$$x - 2y - 3z = 0. \tag{3}$$

由 $x - 2y - 3z = 0 \iff x = 2y + 3z \iff \begin{cases} x = 2y + 3z, \\ y = \quad y \quad\quad , \\ z = \quad\quad\quad z. \end{cases}$

$$\iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

# 线性方程组解的几何诠释

比如线性方程组 (虽然只有一个方程):

$$x - 2y - 3z = 0. \tag{3}$$

由 $x-2y-3z=0 \iff x = 2y+3z \iff \begin{cases} x = 2y + 3z, \\ y = \quad y \qquad , \\ z = \qquad\quad z. \end{cases}$

$$\iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = y\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

故线性方程组 (3) 有无穷多解, 其全部解都可以用向量 $\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\eta}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 线性表示.

故线性方程组 (3) 有无穷多解, 其全部解都可以用向量 $\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\eta}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 线性表示. 或者说, 其全部解的集合, 体现为三维空间内由向量 $\boldsymbol{\eta}_1$, $\boldsymbol{\eta}_2$ 所张成的一个二维子空间.

故线性方程组 (3) 有无穷多解, 其全部解都可以用向量 $\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\eta}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 线性表示. 或者说, 其全部解的集合, 体现为三维空间内由向量 $\boldsymbol{\eta}_1$, $\boldsymbol{\eta}_2$ 所张成的一个二维子空间. (在几何中, $x - 2y - 3z = 0$ 表示三维空间中的一个平面. )

故线性方程组 (3) 有无穷多解, 其全部解都可以用向量 $\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\eta}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 线性表示. 或者说, 其全部解的集合, 体现为三维空间内由向量 $\boldsymbol{\eta}_1$, $\boldsymbol{\eta}_2$ 所张成的一个二维子空间. (在几何中, $x - 2y - 3z = 0$ 表示三维空间中的一个平面. )

另外, $x - 2y - 3z = 0$, 意味着向量 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ 与向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ 垂直,

故线性方程组 (3) 有无穷多解, 其全部解都可以用向量 $\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\eta}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 线性表示. 或者说, 其全部解的集合, 体现为三维空间内由向量 $\boldsymbol{\eta}_1$, $\boldsymbol{\eta}_2$ 所张成的一个二维子空间. (在几何中, $x-2y-3z=0$ 表示三维空间中的一个平面. )

另外, $x-2y-3z=0$, 意味着向量 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ 与向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ 垂直, 求解方程组即相当于求所有与向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ 垂直的向量.

故线性方程组 (3) 有无穷多解, 其全部解都可以用向量 $\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\eta}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 线性表示. 或者说, 其全部解的集合, 体现为三维空间内由向量 $\boldsymbol{\eta}_1$, $\boldsymbol{\eta}_2$ 所张成的一个二维子空间. (在几何中, $x-2y-3z=0$ 表示三维空间中的一个平面. )

另外, $x-2y-3z=0$, 意味着向量 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ 与向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ 垂直, 求解方程组即相当于求所有与向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ 垂直的向量. 显然, 所有满足条件的向量, 构成一个平面. 即其解集构成一个二维子空间.

# 为什么要讨论行列式

不妨先看看克拉默法则:

# 为什么要讨论行列式

不妨先看看克拉默法则: 给定线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{4}$$

# 为什么要讨论行列式

不妨先看看克拉默法则: 给定线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{4}$$

如果系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{5}$$

# 为什么要讨论行列式

不妨先看看克拉默法则: 给定线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{4}$$

如果系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{5}$$

那么线性方程组 (4) 有解,

# 为什么要讨论行列式

不妨先看看克拉默法则: 给定线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{4}$$

如果系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{5}$$

那么线性方程组 (4) 有解, 并且解是惟一的:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{D_n}{D}, \tag{6}$$

其中 $D_j$ 是把行列式 $D$ 中第 $j$ 列换成方程组的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 所成的行列式, 即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{7}$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{D_n}{D}, \tag{6}$$

其中 $D_j$ 是把行列式 $D$ 中第 $j$ 列换成方程组的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 所成的行列式, 即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{7}$$

行列式的出现原因可以这样理解: 完美地表达了一部分线性方程组的解的规律.

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{D_n}{D}, \tag{6}$$

其中 $D_j$ 是把行列式 $D$ 中第 $j$ 列换成方程组的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 所成的行列式, 即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{7}$$

行列式的出现原因可以这样理解: 完美地表达了一部分线性方程组的解的规律. 从这个角度讲, 行列式是人为创造的一个符号, 它形式简洁地、浓缩地记载了一些规律性的内容.

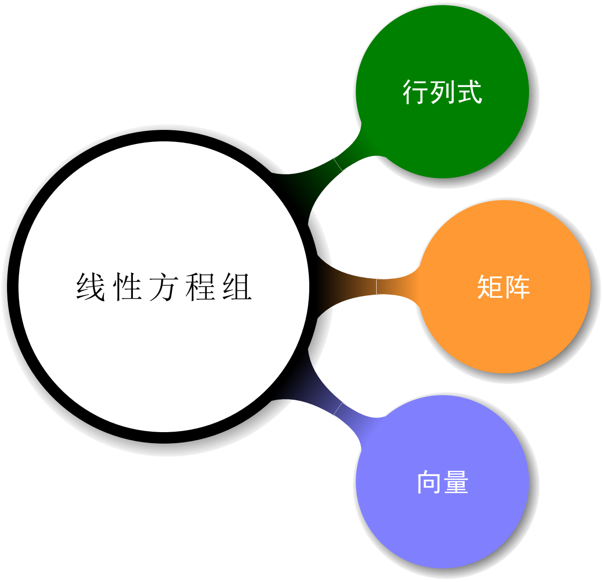
$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{D_n}{D}, \tag{6}$$

其中 $D_j$ 是把行列式 $D$ 中第 $j$ 列换成方程组的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 所成的行列式, 即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{7}$$

行列式的出现原因可以这样理解: 完美地表达了一部分线性方程组的解的规律. 从这个角度讲, 行列式是人为创造的一个符号, 它形式简洁地、浓缩地记载了一些规律性的内容.

☞ 什么是行列式? 如何计算? 将是课程第 1 章的内容.


线性方程组
行列式
矩阵
向量

# 本章内容

这一章关注: 行列式的性质与计算. 学习中要注意以下问题:

(1) 为什么要讨论行列式?

# 本章内容

这一章关注: 行列式的性质与计算. 学习中要注意以下问题:

(1) 为什么要讨论行列式?

(2) 行列式有哪些性质?

# 本章内容

这一章关注: 行列式的性质与计算. 学习中要注意以下问题:

(1) 为什么要讨论行列式?

(2) 行列式有哪些性质?

(3) $n$ 阶行列式的计算, 有哪些常见方法?

# Outline

# 为什么要讨论行列式?

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

# 为什么要讨论行列式?

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

用消元法容易求得其解: 当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时, 方程组有惟一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{12}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

# 为什么要讨论行列式?

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

用消元法容易求得其解: 当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时, 方程组有惟一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{12}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

我们引入一种记号

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \triangleq ad - bc, \tag{8}$$

# 为什么要讨论行列式?

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

用消元法容易求得其解: 当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时, 方程组有惟一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{12}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

我们引入一种记号

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \triangleq ad - bc, \tag{8}$$

称这种记号为二阶**行列式**.

# 为什么要讨论行列式?

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

用消元法容易求得其解: 当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时, 方程组有惟一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{12}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

我们引入一种记号

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \triangleq ad - bc, \tag{8}$$

称这种记号为二阶**行列式**. 则

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

从而方程组的解可以叙述为:

当二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

时, 方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$ 有唯一解:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

设有三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, & (9) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, & (10) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. & (11) \end{cases}$$

用消元法我们可以求得方程组的解.

设有三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, & (9) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, & (10) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. & (11) \end{cases}$$

用消元法我们可以求得方程组的解. 引入行列式, 可以方便地表达解的规律.

分别用 $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$ 乘 (9),
$-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}$ 乘 (10), $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}$ 乘 (11), 再把得到的 3 个式子相加, 就消去了 $x_2$, $x_3$, 得到

$$
\begin{aligned}
&(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31})x_1 \\
= \ & b_1a_{22}a_{33} + b_2a_{23}a_{31} + b_3a_{21}a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - b_2a_{21}a_{33} - b_3a_{22}a_{31}
\end{aligned}
$$

分别用 $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$ 乘 (9),

$-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}$ 乘 (10), $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}$ 乘 (11), 再把得到的 3 个式子相加, 就消去了 $x_2$, $x_3$, 得到

$$
\begin{aligned}
&(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31})x_1 \\
= {} & b_1a_{22}a_{33} + b_2a_{23}a_{31} + b_3a_{21}a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - b_2a_{21}a_{33} - b_3a_{22}a_{31}
\end{aligned}
$$

故当

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \neq 0$$

时, 就可以解出 $x_1$. 类似地可解出 $x_2$, $x_3$.

引入三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\triangleq a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{12}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \tag{13}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{14}$$

$$= (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{15}$$

当三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时, 上述三元线性方程组有惟一解:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D},$$

其中

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

(14) 式中

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

是在三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中分别去掉 $a_{11}, a_{12}, a_{13}$ 所在的行、列而得到的, 分别称为 $a_{11}, a_{12}, a_{13}$ 所对应的**余子式**.

(14) 式中

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

是在三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中分别去掉 $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{13}$ 所在的行、列而得到的, 分别称为 $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{13}$ 所对应的**余子式**. 分别记为 $M_{11}$, $M_{12}$, $M_{13}$.

(14) 式中

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

是在三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中分别去掉 $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{13}$ 所在的行、列而得到的, 分别称为 $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{13}$ 所对应的**余子式**. 分别记为 $M_{11}$, $M_{12}$, $M_{13}$. 即

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

(14) 式中

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

是在三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中分别去掉 $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{13}$ 所在的行、列而得到的, 分别称为 $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{13}$ 所对应的**余子式**. 分别记为 $M_{11}$, $M_{12}$, $M_{13}$. 即

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

则有

$$D = (-1)^{1+1}a_{11}M_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}M_{12} + (-1)^{1+3}a_{13}M_{13}.$$

而 (15) 式中

$$(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

分别称为 $a_{11}, a_{12}, a_{13}$ 所对应的**代数余子式**. 分别记为 $A_{11}, A_{12}, A_{13}$.

而 (15) 式中

$$(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

分别称为 $a_{11}, a_{12}, a_{13}$ 所对应的**代数余子式**. 分别记为 $A_{11}, A_{12}, A_{13}$.

即

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}M_{11}.$$

而 (15) 式中

$$(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

分别称为 $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{13}$ 所对应的**代数余子式**. 分别记为 $A_{11}$, $A_{12}$, $A_{13}$.

即

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}M_{11}.$$

其余类似. 从而

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

☞ 三阶行列式等于第一行元素与其对应代数余子式的乘积之和.

# Outline

按照这个规律, 我们可以类似地定义 4 阶行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

注意, 上式体现出的规则有两条:

注意, 上式体现出的规则有两条:

1. 与元素 $a_{1j}$ 相乘的行列式, 是将原行列式中的 $a_{1j}$ 所在的行、列去掉而成的行列式, 即 $a_{1j}$ 对应的余子式 $M_{1j}$.

注意, 上式体现出的规则有两条:

1. 与元素 $a_{1j}$ 相乘的行列式, 是将原行列式中的 $a_{1j}$ 所在的行、列去掉而成的行列式, 即 $a_{1j}$ 对应的余子式 $M_{1j}$.
2. 展开式中, 元素 $a_{1j}$ 所在项的符号为 $(-1)^{1+j}$.

注意, 上式体现出的规则有两条:

1. 与元素 $a_{1j}$ 相乘的行列式, 是将原行列式中的 $a_{1j}$ 所在的行、列去掉而成的行列式, 即 $a_{1j}$ 对应的余子式 $M_{1j}$.
2. 展开式中, 元素 $a_{1j}$ 所在项的符号为 $(-1)^{1+j}$.

继续下去, 按照这个规则, 我们可以递归定义出 5 阶、6 阶等更高阶的行列式.

注意, 上式体现出的规则有两条:

1. 与元素 $a_{1j}$ 相乘的行列式, 是将原行列式中的 $a_{1j}$ 所在的行、列去掉而成的行列式, 即 $a_{1j}$ 对应的余子式 $M_{1j}$.
2. 展开式中, 元素 $a_{1j}$ 所在项的符号为 $(-1)^{1+j}$.

继续下去, 按照这个规则, 我们可以递归定义出 5 阶、6 阶等更高阶的行列式.

由此, 我们得到一个递归形式的行列式定义.

## $n$ 阶行列式的定义

由 $n \times n$ 个数排成的 $n$ 阶**行列式** (determinant)

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示这样一个数:

# $n$ 阶行列式的定义

由 $n \times n$ 个数排成的 $n$ 阶**行列式** (determinant)

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示这样一个数:

1. $n = 1$ 时, $D = \begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix} = a_{11}$;

# $n$ 阶行列式的定义

由 $n \times n$ 个数排成的 $n$ 阶**行列式** (determinant)

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示这样一个数:

1. $n = 1$ 时, $D = \begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix} = a_{11}$;
2. $n \geqslant 2$ 时,

$$D = (-1)^{1+1} a_{11} M_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} M_{12} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} M_{1n} \tag{16}$$

# $n$ 阶行列式的定义

由 $n \times n$ 个数排成的 $n$ 阶**行列式** (determinant)

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示这样一个数:

1. $n = 1$ 时, $D = \left| a_{11} \right| = a_{11}$;
2. $n \geqslant 2$ 时,

$$D = (-1)^{1+1} a_{11} M_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} M_{12} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} M_{1n} \tag{16}$$

其中 $M_{1j}\,(j = 1, 2, \cdots, n)$ 是从 $D$ 中划掉第 1 行、第 $j$ 列后余下的 $(n-1)^2$ 个数 (其相对顺序不变) 所组成的 $n-1$ 阶行列式,

# $n$ 阶行列式的定义

由 $n \times n$ 个数排成的 $n$ 阶**行列式** (determinant)

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示这样一个数:

1. $n = 1$ 时, $D = \left| a_{11} \right| = a_{11}$;
2. $n \geqslant 2$ 时,

$$D = (-1)^{1+1} a_{11} M_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} M_{12} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} M_{1n} \qquad (16)$$

其中 $M_{1j}\,(j = 1, 2, \cdots, n)$ 是从 $D$ 中划掉第 1 行、第 $j$ 列后余下的 $(n-1)^2$ 个数 (其相对顺序不变) 所组成的 $n-1$ 阶行列式, 称为元素 $a_{1j}$ 的**余子式**.

将

$$A_{1j} = (-1)^{1+j} M_{1j}$$

称为元素 $a_{1j}$ 的**代数余子式**,

将

$$A_{1j} = (-1)^{1+j} M_{1j}$$

称为元素 $a_{1j}$ 的**代数余子式**, 则有

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}. \tag{17}$$

## 定义 1.1

在行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中划去元素 $a_{ij}$ 所在的第 $i$ 行与第 $j$ 列,

## 定义 1.1

在行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中划去元素 $a_{ij}$ 所在的第 $i$ 行与第 $j$ 列, 剩下的 $(n-1)^2$ 个元素按原来的排法构成一个 $n-1$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{18}$$

## 定义 1.1

在行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中划去元素 $a_{ij}$ 所在的第 $i$ 行与第 $j$ 列, 剩下的 $(n-1)^2$ 个元素按原来的排法构成一个 $n-1$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{18}$$

称为元素 $a_{ij}$ 的**余子式** (minor determinant, minor), 记为 $M_{ij}$.

记

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

称 $A_{ij}$ 为元素 $a_{ij}$ 的**代数余子式** (adjunct, 或 cofactor).

## 例 1.2

在 4 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 9 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

中, 去掉第 3 行、第 2 列得到一个 3 阶行列式,

## 例 1.2

在 4 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 9 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

中, 去掉第 3 行、第 2 列得到一个 3 阶行列式,

## 例 1.2

在 4 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 9 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

中, 去掉第 3 行、第 2 列得到一个 3 阶行列式,

## 例 1.2

在 4 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 9 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

中, 去掉第 3 行、第 2 列得到一个 3 阶行列式, 即为 $a_{32} = 5$ 的余子式

## 例 1.2

在 4 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 9 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

中, 去掉第 3 行、第 2 列得到一个 3 阶行列式, 即为 $a_{32} = 5$ 的余子式

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

## 例 1.2

在 4 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 9 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

中, 去掉第 3 行、第 2 列得到一个 3 阶行列式, 即为 $a_{32}=5$ 的余子式

$$M_{32}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

☞ 仅改变 $a_{ij}$ 的取值, 不会影响 $M_{ij}$ 和 $A_{ij}$.

行列式中, $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 所在的对角线称为行列式的**主对角线**, 并把元素 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 称为**主对角元**; 另一条对角线称为行列式的**副对角线**.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(图中的实线、虚线, 分别表示行列式的主对角线、副对角线.)

行列式的定义反映以下特点:

1. 行列式展开式中, 每一项乘积都是由行列式中位于不同行且不同列的 $n$ 个元素构成的, 并且展开式恰恰就是由所有这种可能的乘积组成;

行列式的定义反映以下特点:

1. 行列式展开式中, 每一项乘积都是由行列式中位于不同行且不同列的 $n$ 个元素构成的, 并且展开式恰恰就是由所有这种可能的乘积组成;
2. $n$ 阶行列式的展开式中共有 $n!$ 项.

行列式的定义反映以下特点:

1. 行列式展开式中, 每一项乘积都是由行列式中位于不同行且不同列的 $n$ 个元素构成的, 并且展开式恰恰就是由所有这种可能的乘积组成;
2. $n$ 阶行列式的展开式中共有 $n!$ 项.

☞ 这个特点很重要: 任一元素都不能与其同一行或同一列的元素相乘.

为什么? 比如, $a_{11}$ 只能与 $M_{11}$ 相乘, 但是 $M_{11}$ 中是不会出现与 $a_{11}$ 在同一行或同一列的元素的.

为什么？比如，$a_{11}$ 只能与 $M_{11}$ 相乘，但是 $M_{11}$ 中是不会出现与 $a_{11}$ 在同一行或同一列的元素的.

由此我们也就容易明白，展开式恰恰就是由所有"位于不同行和不同列的 $n$ 个元素"的乘积组成.

为什么? 比如, $a_{11}$ 只能与 $M_{11}$ 相乘, 但是 $M_{11}$ 中是不会出现与 $a_{11}$ 在同一行或同一列的元素的.

由此我们也就容易明白, 展开式恰恰就是由所有 “位于不同行和不同列的 $n$ 个元素” 的乘积组成. 而由排列组合的知识, 这种所有可能的组合共有 $n!$ 项, 所以 $n$ 阶行列式的展开式中共有 $n!$ 项.

为什么? 比如, $a_{11}$ 只能与 $M_{11}$ 相乘, 但是 $M_{11}$ 中是不会出现与 $a_{11}$ 在同一行或同一列的元素的.

由此我们也就容易明白, 展开式恰恰就是由所有 "位于不同行和不同列的 $n$ 个元素" 的乘积组成. 而由排列组合的知识, 这种所有可能的组合共有 $n!$ 项, 所以 $n$ 阶行列式的展开式中共有 $n!$ 项.

当 $n$ 较大时, 其项数十分庞大. 比如 $n = 10$, 那么就会得到 $10! = 3628800$ 个项做加减法.

为什么? 比如, $a_{11}$ 只能与 $M_{11}$ 相乘, 但是 $M_{11}$ 中是不会出现与 $a_{11}$ 在同一行或同一列的元素的.

由此我们也就容易明白, 展开式恰恰就是由所有 “位于不同行和不同列的 $n$ 个元素” 的乘积组成. 而由排列组合的知识, 这种所有可能的组合共有 $n!$ 项, 所以 $n$ 阶行列式的展开式中共有 $n!$ 项.

当 $n$ 较大时, 其项数十分庞大. 比如 $n = 10$, 那么就会得到 $10! = 3628800$ 个项做加减法.

行列式如何计算? 行列式的定义给出了一个算法, 使用这个算法已经可以计算任何一个行列式, 但这显然不是一个好的算法.

三阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\triangleq a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

三阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\triangleq a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

其计算可以使用**沙路法**:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

实线上的三个元作乘积, 取正号; 虚线上的元所作的乘积取负号.

二阶行列式的计算最简单, 三阶行列式的展开可以用沙路法. 更高阶的行列式就不能使用沙路法了.

二阶行列式的计算最简单, 三阶行列式的展开可以用沙路法. 更高阶的行列式就不能使用沙路法了.

## 例 1.3

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 - (-1) \cdot 3 = 13.$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2.$$

二阶行列式的计算最简单, 三阶行列式的展开可以用沙路法. 更高阶的行列式就不能使用沙路法了.

## 例 1.3

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 - (-1) \cdot 3 = 13.$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2.$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix} &= 2 \cdot 3 \cdot 6 + (-5) \cdot (-3) \cdot 4 + 0 \cdot 1 \cdot (-1) \\ &\quad - 0 \cdot 3 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) \cdot (-1) - (-5) \cdot 1 \cdot 6 \\ &= 36 + 60 + 0 - 0 - 6 - (-30) = 120. \end{aligned}$$

## 例 1.4

计算行列式:

$$D=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

## 例 1.4

计算行列式:

$$D=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

**解:**

$$D=(-1)^{1+1}\cdot 0\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{1+3}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}+(-1)^{1+4}\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=0+2+10-8=4.$$

## 例 1.5

证明**下三角形行列式** (主对角线以上元素全为 0)

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \tag{19}$$

## 例 1.5

证明**下三角形行列式** (主对角线以上元素全为 0)

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \tag{19}$$

**证:** 展开第一行得

$$D_n = (-1)^{1+1}a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

## 例 1.5

证明**下三角形行列式** (主对角线以上元素全为 0)

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \tag{19}$$

**证:** 展开第一行得

$$D_n = (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

## 例 1.5

证明**下三角形行列式** (主对角线以上元素全为 0)

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \tag{19}$$

**证:** 展开第一行得

$$D_n = (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

依次继续, 易得

$$D_n = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地有

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n. \tag{20}$$

(21)

特别地有

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n. \tag{20}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1. \tag{21}$$

## 例 1.6

计算 $n$ 阶行列式 (副对角线以上元素全为 0)

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & * \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2 & \cdots & * & * \\ a_1 & * & \cdots & * & * \end{vmatrix},$$

其中 “$*$” 表示任意数.

## 例 1.6

计算 $n$ 阶行列式 (副对角线以上元素全为 0)

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & * \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2 & \cdots & * & * \\ a_1 & * & \cdots & * & * \end{vmatrix},$$

其中 “$*$” 表示任意数.

**解:** 展开第一行得

$$D_n = (-1)^{n+1} a_n \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ 0 & a_2 & \cdots & * \\ a_1 & * & \cdots & * \end{vmatrix}$$

## 例 1.6

计算 $n$ 阶行列式 (副对角线以上元素全为 0)

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & * \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2 & \cdots & * & * \\ a_1 & * & \cdots & * & * \end{vmatrix},$$

其中 “$*$” 表示任意数.

**解:** 展开第一行得

$$D_n = (-1)^{n+1} a_n \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ 0 & a_2 & \cdots & * \\ a_1 & * & \cdots & * \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} a_n D_{n-1},$$

递推可得

$$D_n = (-1)^{n-1} a_n D_{n-1}$$

递推可得

$$
\begin{aligned}
D_n &= (-1)^{n-1} a_n D_{n-1} \\
&= (-1)^{n-1} a_n (-1)^{n-2} a_{n-1} D_{n-2}
\end{aligned}
$$

递推可得

$$
\begin{aligned}
D_n &= (-1)^{n-1} a_n D_{n-1} \\
&= (-1)^{n-1} a_n (-1)^{n-2} a_{n-1} D_{n-2} \\
&= \cdots\cdots
\end{aligned}
$$

递推可得

$$\begin{aligned} D_n &= (-1)^{n-1} a_n D_{n-1} \\ &= (-1)^{n-1} a_n (-1)^{n-2} a_{n-1} D_{n-2} \\ &= \cdots\cdots \\ &= (-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1} a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 \end{aligned}$$

递推可得

$$
\begin{aligned}
D_n &= (-1)^{n-1} a_n D_{n-1} \\
&= (-1)^{n-1} a_n (-1)^{n-2} a_{n-1} D_{n-2} \\
&= \cdots\cdots \\
&= (-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1} a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 \\
&= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 .
\end{aligned}
$$

# Outline

记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

行列式 $D^{\mathrm{T}}$ 称为行列式 $D$ 的**转置行列式**.

记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

行列式 $D^{\mathrm{T}}$ 称为行列式 $D$ 的**转置行列式**.

☞ 将行列式 $D$ 沿主对角线翻转, 得到其转置行列式 $D^{\mathrm{T}}$.

## 命题 1.7

行列式与它的转置行列式相等. 即

$$D^{\mathrm{T}} = D. \tag{22}$$

(证明略.)

## 命题 1.7

行列式与它的转置行列式相等. 即

$$D^{\mathrm{T}} = D. \tag{22}$$

(证明略.)

这表明, 在行列式中行与列的地位是等同的. 因此, 行列式凡是有关行的性质, 对列也同样成立.

## 例 1.8

试证: 对于**上三角行列式** (当 $i > j$ 时, $a_{ij} = 0$) 有

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \tag{23}$$

## 例 1.8

试证: 对于**上三角行列式** (当 $i > j$ 时, $a_{ij} = 0$) 有

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \tag{23}$$

**证:**

$$D = D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

☞ 行列式计算的一般方法: 将行列式转化为上三角形行列式.

## 例 1.8

试证: 对于**上三角行列式** (当 $i > j$ 时, $a_{ij} = 0$) 有

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \tag{23}$$

**证:**

$$D = D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

☞ 行列式计算的一般方法: 将行列式转化为上三角形行列式. 这其中需要使用行列式的一些基本性质.

## 命题 1.9

行列式按任一行展开, 其值相等.

## 命题 1.9

行列式按任一行展开, 其值相等. 例如按第 $i$ 行展开, 将第 $i$ 行元素乘以对应的代数余子式, 再作和. 即

$$D = (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} M_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} M_{in} \tag{24}$$

## 命题 1.9

行列式按任一行展开, 其值相等. 例如按第 $i$ 行展开, 将第 $i$ 行元素乘以对应的代数余子式, 再作和. 即

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} M_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} M_{in} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}. \end{aligned} \tag{24}$$

## 命题 1.9

行列式按任一行展开, 其值相等. 例如按第 $i$ 行展开, 将第 $i$ 行元素乘以对应的代数余子式, 再作和. 即

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} M_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} M_{in} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}. \end{aligned} \tag{24}$$

或记为

$$D = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \cdots + a_{in} A_{in} \tag{25}$$

## 命题 1.9

行列式按任一行展开, 其值相等. 例如按第 $i$ 行展开, 将第 $i$ 行元素乘以对应的代数余子式, 再作和. 即

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} M_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} M_{in} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}. \end{aligned} \tag{24}$$

或记为

$$\begin{aligned} D &= a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \cdots + a_{in} A_{in} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}. \end{aligned} \tag{25}$$

亦可按列展开, 比如按第 $j$ 列展开:

亦可按列展开, 比如按第 $j$ 列展开:

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \tag{26}$$

亦可按列展开, 比如按第 $j$ 列展开:

$$\begin{aligned} D &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}. \end{aligned} \tag{26}$$

亦可按列展开, 比如按第 $j$ 列展开:

$$\begin{aligned} D &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}. \end{aligned} \tag{26}$$

其中 $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

## 命题 1.10 (线性性质)

有以下两条:

**(i)**
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \color{red}{k}a_{i1} & \color{red}{k}a_{i2} & \cdots & \color{red}{k}a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

## 命题 1.10 (线性性质)

有以下两条:

**(i)**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{27}$$

## 命题 1.10 (线性性质)

有以下两条:

**(i)**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{27}$$

- 一行的公因子可以提出去.

## 命题 1.10 (线性性质)

有以下两条:

**(i)**
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{27}$$

- 一行的公因子可以提出去.
- 以一数乘行列式, 相当于用这个数乘此行列式的某一行.

事实上, 由性质 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

事实上, 由性质 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = ka_{i1}A_{i1} + ka_{i2}A_{i2} + \cdots + ka_{in}A_{in}$$

事实上, 由性质 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = ka_{i1}A_{i1} + ka_{i2}A_{i2} + \cdots + ka_{in}A_{in}$$

$$= k(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in})$$

事实上, 由性质 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = ka_{i1}A_{i1} + ka_{i2}A_{i2} + \cdots + ka_{in}A_{in}$$

$$= k(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in})$$

$$= k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

事实上, 由性质 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = ka_{i1}A_{i1} + ka_{i2}A_{i2} + \cdots + ka_{in}A_{in}$$

$$= k(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in})$$

$$= k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

令 $k=0$, 就有: 如果行列式中某一行元素全为零, 那么行列式为零.

**(ii)**

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & \cdots & b_n + c_n \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}. \tag{28}
$$

事实上, 设这一行是第 $i$ 行, 按第 $i$ 行展开得

事实上, 设这一行是第 $i$ 行, 按第 $i$ 行展开得

$$D = (b_1 + c_1)A_{i1} + (b_2 + c_2)A_{i2} + \cdots + (b_n + c_n)A_{in}$$

事实上, 设这一行是第 $i$ 行, 按第 $i$ 行展开得

$$
\begin{aligned}
D &= (b_1 + c_1)A_{i1} + (b_2 + c_2)A_{i2} + \cdots + (b_n + c_n)A_{in} \\
&= (b_1 A_{i1} + b_2 A_{i2} + \cdots + b_n A_{in}) + (c_1 A_{i1} + c_2 A_{i2} + \cdots + c_n A_{in})
\end{aligned}
$$

事实上, 设这一行是第 $i$ 行, 按第 $i$ 行展开得

$$
\begin{aligned}
D &= (b_1 + c_1)A_{i1} + (b_2 + c_2)A_{i2} + \cdots + (b_n + c_n)A_{in} \\
&= (b_1 A_{i1} + b_2 A_{i2} + \cdots + b_n A_{in}) + (c_1 A_{i1} + c_2 A_{i2} + \cdots + c_n A_{in}) \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

1. 强调: 行列式不能作这种形式上的加法:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{vmatrix}.$$

这是对上述性质的错误理解.

1. 强调: 行列式不能作这种形式上的加法:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{vmatrix}.$$

   这是对上述性质的错误理解.
2. 用途: 将行列式裂开为两个行列式. 这是计算行列式的一个常用方法.

1. 强调: 行列式不能作这种形式上的加法:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{vmatrix}.$$

这是对上述性质的错误理解.

2. 用途: 将行列式裂开为两个行列式. 这是计算行列式的一个常用方法. 例如

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ b & x & a & a \\ b & b & x & a \\ b & b & b & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ b & x & a & a \\ b & b & x & a \\ b & b & b & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-a & a & a & a \\ 0 & x & a & a \\ 0 & b & x & a \\ 0 & b & b & x \end{vmatrix}.$$

## 推论 1.11

如果行列式中某一行元素全为零, 那么行列式为零.

## 推论 1.11

如果行列式中某一行元素全为零, 那么行列式为零.

## 命题 1.12

如果行列式中有两行相同, 那么行列式为零.

## 推论 1.11

如果行列式中某一行元素全为零, 那么行列式为零.

## 命题 1.12

如果行列式中有两行相同, 那么行列式为零.

(用数学归纳法可以证明, 具体过程略去.)

## 推论 1.13

如果行列式中两行成比例, 那么行列式为零.

## 推论 1.13

如果行列式中两行成比例，那么行列式为零.

证:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

## 推论 1.13

如果行列式中两行成比例, 那么行列式为零.

证:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

## 命题 1.14

把一行的倍数加到另一行, 行列式不变.

## 命题 1.14

把一行的倍数加到另一行, 行列式不变.

证:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+c{\color{red}a_{k1}} & a_{i2}+c{\color{red}a_{k2}} & \cdots & a_{in}+c{\color{red}a_{kn}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

## 命题 1.14

把一行的倍数加到另一行, 行列式不变.

证:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ca_{k1} & a_{i2}+ca_{k2} & \cdots & a_{in}+ca_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{k1} & ca_{k2} & \cdots & ca_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

## 命题 1.14

把一行的倍数加到另一行, 行列式不变.

**证:**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ca_{k1} & a_{i2}+ca_{k2} & \cdots & a_{in}+ca_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{k1} & ca_{k2} & \cdots & ca_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

## 命题 1.14

把一行的倍数加到另一行, 行列式不变.

**证:**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ca_{k1} & a_{i2}+ca_{k2} & \cdots & a_{in}+ca_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{k1} & ca_{k2} & \cdots & ca_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

这里, 第一步是根据性质 3, 第二步是根据性质 5.

## 命题 1.15

对换行列式中两行的位置, 行列式反号.

## 命题 1.15

对换行列式中两行的位置, 行列式反号.

**证:**

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

## 命题 1.15

对换行列式中两行的位置, 行列式反号.

证:
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a_{k1} & a_{i2}+a_{k2} & \cdots & a_{in}+a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

## 命题 1.15

对换行列式中两行的位置, 行列式反号.

**证:**

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a_{k1} & a_{i2}+a_{k2} & \cdots & a_{in}+a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a_{k1} & a_{i2}+a_{k2} & \cdots & a_{in}+a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

## 命题 1.15

对换行列式中两行的位置, 行列式反号.

**证:**

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a_{k1} & a_{i2}+a_{k2} & \cdots & a_{in}+a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a_{k1} & a_{i2}+a_{k2} & \cdots & a_{in}+a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

## 命题 1.15

对换行列式中两行的位置, 行列式反号.

**证:**

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a_{k1} & a_{i2}+a_{k2} & \cdots & a_{in}+a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a_{k1} & a_{i2}+a_{k2} & \cdots & a_{in}+a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= -D.$$

即得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

## 命题 1.16 (✧)

在行列式中, 一行的元素与另一行相应元素的代数余子式的乘积之和, 等于零. 即

$$a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in} = 0, \qquad (k \neq i). \tag{29}$$

## 命题 1.16 (✧)

在行列式中, 一行的元素与另一行相应元素的代数余子式的乘积之和, 等于零. 即

$$a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in} = 0, \qquad (k \neq i). \tag{29}$$

例如

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} + a_{14}A_{24} = 0. \tag{30}$$

## 命题 1.16 (✧)

在行列式中，一行的元素与另一行相应元素的代数余子式的乘积之和，等于零. 即

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=0,\qquad (k\neq i). \tag{29}$$

例如

$$a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}+a_{14}A_{24}=0. \tag{30}$$

事实上，下述行列式按第 2 行展开，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}+a_{14}A_{24}.$$

## 命题 1.16 (✧)

在行列式中, 一行的元素与另一行相应元素的代数余子式的乘积之和, 等于零. 即

$$a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in} = 0, \qquad (k \neq i). \tag{29}$$

例如

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} + a_{14}A_{24} = 0. \tag{30}$$

事实上, 下述行列式按第 2 行展开, 有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} + a_{14}A_{24}.$$

而该行列式有两行相同, 其值为零, 故 (30) 式成立.

设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$A_{ij}$ 表示元素 $a_{ij}$ 的代数余子式,

设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$A_{ij}$ 表示元素 $a_{ij}$ 的代数余子式, 则下列公式成立:

$$a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in} = \begin{cases} D, & k = i, \\ 0, & k \neq i. \end{cases} \tag{31}$$

设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$A_{ij}$ 表示元素 $a_{ij}$ 的代数余子式, 则下列公式成立:

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=\begin{cases} D, & k=i, \\ 0, & k\neq i. \end{cases} \tag{31}$$

用连加号简写为

$$\sum_{s=1}^{n} a_{ks}A_{is}=\begin{cases} D, & k=i, \\ 0, & k\neq i; \end{cases} \tag{32}$$

使用克罗内克记号 (Kronecker Delta)

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{当 } i=j,\\ 0, & \text{当 } i\neq j.\end{cases} \tag{33}$$

使用克罗内克记号 (Kronecker Delta)

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j, \\ 0, & \text{当 } i \neq j. \end{cases} \tag{33}$$

可以将 (32) 记为

$$\sum_{s=1}^{n} a_{ks} A_{is} = \delta_{ki} D, \tag{34}$$

在计算数字行列式时, 直接应用展开式

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=\begin{cases} D, & k=i, \\ 0, & k\neq i. \end{cases} \tag{35}$$

$$a_{1l}A_{1j}+a_{2l}A_{2j}+\cdots+a_{nl}A_{nj}=\begin{cases} D, & l=j, \\ 0, & l\neq j. \end{cases} \tag{36}$$

不一定能简化计算,

在计算数字行列式时, 直接应用展开式

$$a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in} = \begin{cases} D, & k = i, \\ 0, & k \neq i. \end{cases} \tag{35}$$

$$a_{1l}A_{1j} + a_{2l}A_{2j} + \cdots + a_{nl}A_{nj} = \begin{cases} D, & l = j, \\ 0, & l \neq j. \end{cases} \tag{36}$$

不一定能简化计算, 因为把一个 $n$ 阶行列式的计算换成 $n$ 个 $(n-1)$ 阶行列式的计算并不减少计算量,

在计算数字行列式时, 直接应用展开式

$$a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in} = \begin{cases} D, & k = i, \\ 0, & k \neq i. \end{cases} \tag{35}$$

$$a_{1l}A_{1j} + a_{2l}A_{2j} + \cdots + a_{nl}A_{nj} = \begin{cases} D, & l = j, \\ 0, & l \neq j. \end{cases} \tag{36}$$

不一定能简化计算, 因为把一个 $n$ 阶行列式的计算换成 $n$ 个 $(n-1)$ 阶行列式的计算并不减少计算量, 只是在行列式中某一行或某一列含有较多的 0 时, 应用上述公式才有意义.

在计算数字行列式时, 直接应用展开式

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=\begin{cases} D, & k=i, \\ 0, & k\neq i. \end{cases} \tag{35}$$

$$a_{1l}A_{1j}+a_{2l}A_{2j}+\cdots+a_{nl}A_{nj}=\begin{cases} D, & l=j, \\ 0, & l\neq j. \end{cases} \tag{36}$$

不一定能简化计算, 因为把一个 $n$ 阶行列式的计算换成 $n$ 个 $(n-1)$ 阶行列式的计算并不减少计算量, 只是在行列式中某一行或某一列含有较多的 0 时, 应用上述公式才有意义.

但这个公式在理论上是重要的.

## 例 1.17

行列式

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

# 例 1.17

行列式

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+5} \cdot 2 \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

## 例 1.17

行列式

$$
\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+5} \cdot 2 \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}
$$

$$
= -2 \cdot 5 \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -4 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}
$$

## 例 1.17

行列式

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+5} \cdot 2 \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \cdot 5 \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -4 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -10 \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \end{vmatrix}$$

## 例 1.17

行列式

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+5} \cdot 2 \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \cdot 5 \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -4 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -10 \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \end{vmatrix} = (-10)(-2) \begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 6 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 20(-42 - 12) = -1080.$$

## 例 1.17

行列式

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+5}\cdot 2\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -2\cdot 5\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -4 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -10\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \end{vmatrix} = (-10)(-2)\begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 6 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 20(-42-12) = -1080.$$

这里第一步是按第 5 列展开, 然后再按第 1 列展开, 这样就归结到一个三阶行列式的计算.

前面学习了 7 个性质、2 个推论, 共 10 个结论 (其中性质 3 有 2 个结论).

前面学习了 7 个性质、2 个推论, 共 10 个结论 (其中性质 3 有 2 个结论). 下面做三点归纳.

前面学习了 7 个性质、2 个推论, 共 10 个结论 (其中性质 3 有 2 个结论). 下面做三点归纳.

**(一) 行列式的三种变换.**

前面学习了 7 个性质、2 个推论, 共 10 个结论 (其中性质 3 有 2 个结论). 下面做三点归纳.

**(一) 行列式的三种变换.**

性质 3 之 (i)、性质 5、性质 6 是三个重要的结论, 它们涉及了行列式的三种重要变换:

前面学习了 7 个性质、2 个推论, 共 10 个结论 (其中性质 3 有 2 个结论). 下面做三点归纳.

**(一) 行列式的三种变换.**

性质 3 之 (i)、性质 5、性质 6 是三个重要的结论, 它们涉及了行列式的三种重要变换:

1. 提出某一行的公因子, 记作: $r_i \div k$ (列的情形为 $c_i \div k$ ).

前面学习了 7 个性质、2 个推论, 共 10 个结论 (其中性质 3 有 2 个结论). 下面做三点归纳.

**(一) 行列式的三种变换.**

性质 3 之 (i)、性质 5、性质 6 是三个重要的结论, 它们涉及了行列式的三种重要变换:

1. 提出某一行的公因子, 记作: $r_i \div k$ (列的情形为 $c_i \div k$ ).
2. 把某一行的 $k$ 倍加到另一行, 记作: $r_i + kr_j$ (列的情形为 $c_i + kc_j$).

前面学习了 7 个性质、2 个推论, 共 10 个结论 (其中性质 3 有 2 个结论). 下面做三点归纳.

**(一) 行列式的三种变换.**

性质 3 之 (i)、性质 5、性质 6 是三个重要的结论, 它们涉及了行列式的三种重要变换:

1. 提出某一行的公因子, 记作: $r_i \div k$ (列的情形为 $c_i \div k$ ).
2. 把某一行的 $k$ 倍加到另一行, 记作: $r_i + kr_j$ (列的情形为 $c_i + kc_j$).
3. 互换某两行, 记作: $r_i \leftrightarrow r_j$ (列的情形为 $c_i \leftrightarrow c_j$).

前面学习了 7 个性质、2 个推论, 共 10 个结论 (其中性质 3 有 2 个结论). 下面做三点归纳.

**(一) 行列式的三种变换.**

性质 3 之 (i)、性质 5、性质 6 是三个重要的结论, 它们涉及了行列式的三种重要变换:

1. 提出某一行的公因子, 记作: $r_i \div k$ (列的情形为 $c_i \div k$ ).
2. 把某一行的 $k$ 倍加到另一行, 记作: $r_i + kr_j$ (列的情形为 $c_i + kc_j$).
3. 互换某两行, 记作: $r_i \leftrightarrow r_j$ (列的情形为 $c_i \leftrightarrow c_j$).

上面的写法中, 我们约定: 把要改变的行 (列), 写在表达式的开头.

前面学习了 7 个性质、2 个推论, 共 10 个结论 (其中性质 3 有 2 个结论). 下面做三点归纳.

**(一) 行列式的三种变换.**

性质 3 之 (i)、性质 5、性质 6 是三个重要的结论, 它们涉及了行列式的三种重要变换:

1. 提出某一行的公因子, 记作: $r_i \div k$ (列的情形为 $c_i \div k$ ).
2. 把某一行的 $k$ 倍加到另一行, 记作: $r_i + kr_j$ (列的情形为 $c_i + kc_j$).
3. 互换某两行, 记作: $r_i \leftrightarrow r_j$ (列的情形为 $c_i \leftrightarrow c_j$).

上面的写法中, 我们约定: 把要改变的行 (列), 写在表达式的开头.

比如, $r_1 + r_2$ 和 $r_2 + r_1$ 的含义是不同的:

前面学习了 7 个性质、2 个推论, 共 10 个结论 (其中性质 3 有 2 个结论). 下面做三点归纳.

**(一) 行列式的三种变换.**

性质 3 之 (i)、性质 5、性质 6 是三个重要的结论, 它们涉及了行列式的三种重要变换:

1. 提出某一行的公因子, 记作: $r_i \div k$ (列的情形为 $c_i \div k$ ).
2. 把某一行的 $k$ 倍加到另一行, 记作: $r_i + kr_j$ (列的情形为 $c_i + kc_j$).
3. 互换某两行, 记作: $r_i \leftrightarrow r_j$ (列的情形为 $c_i \leftrightarrow c_j$).

上面的写法中, 我们约定: 把要改变的行 (列), 写在表达式的开头.

比如, $r_1 + r_2$ 和 $r_2 + r_1$ 的含义是不同的:

- $r_1 + r_2$: 把 $r_2$ 加到 $r_1$, 被改变的将是 $r_1$.

前面学习了 7 个性质、2 个推论, 共 10 个结论 (其中性质 3 有 2 个结论). 下面做三点归纳.

**(一) 行列式的三种变换.**

性质 3 之 (i)、性质 5、性质 6 是三个重要的结论, 它们涉及了行列式的三种重要变换:

1. 提出某一行的公因子, 记作: $r_i \div k$ (列的情形为 $c_i \div k$ ).
2. 把某一行的 $k$ 倍加到另一行, 记作: $r_i + kr_j$ (列的情形为 $c_i + kc_j$).
3. 互换某两行, 记作: $r_i \leftrightarrow r_j$ (列的情形为 $c_i \leftrightarrow c_j$).

上面的写法中, 我们约定: 把要改变的行 (列), 写在表达式的开头.

比如, $r_1 + r_2$ 和 $r_2 + r_1$ 的含义是不同的:

- $r_1 + r_2$: 把 $r_2$ 加到 $r_1$, 被改变的将是 $r_1$.
- $r_2 + r_1$: 把 $r_1$ 加到 $r_2$, 被改变的将是 $r_2$.

前面学习了 7 个性质、2 个推论, 共 10 个结论 (其中性质 3 有 2 个结论). 下面做三点归纳.

**(一) 行列式的三种变换.**

性质 3 之 (i)、性质 5、性质 6 是三个重要的结论, 它们涉及了行列式的三种重要变换:

1. 提出某一行的公因子, 记作: $r_i \div k$ (列的情形为 $c_i \div k$ ).
2. 把某一行的 $k$ 倍加到另一行, 记作: $r_i + kr_j$ (列的情形为 $c_i + kc_j$).
3. 互换某两行, 记作: $r_i \leftrightarrow r_j$ (列的情形为 $c_i \leftrightarrow c_j$).

上面的写法中, 我们约定: 把要改变的行 (列), 写在表达式的开头.

比如, $r_1 + r_2$ 和 $r_2 + r_1$ 的含义是不同的:

- $r_1 + r_2$: 把 $r_2$ 加到 $r_1$, 被改变的将是 $r_1$.
- $r_2 + r_1$: 把 $r_1$ 加到 $r_2$, 被改变的将是 $r_2$.

☞ 计算行列式最常用的一种方法就是利用变换 $r_i + kr_j$ 和 $r_i \leftrightarrow r_j$,

前面学习了 7 个性质、2 个推论, 共 10 个结论 (其中性质 3 有 2 个结论). 下面做三点归纳.

**(一) 行列式的三种变换.**

性质 3 之 (i)、性质 5、性质 6 是三个重要的结论, 它们涉及了行列式的三种重要变换:

1. 提出某一行的公因子, 记作: $r_i \div k$ (列的情形为 $c_i \div k$ ).
2. 把某一行的 $k$ 倍加到另一行, 记作: $r_i + kr_j$ (列的情形为 $c_i + kc_j$).
3. 互换某两行, 记作: $r_i \leftrightarrow r_j$ (列的情形为 $c_i \leftrightarrow c_j$).

上面的写法中, 我们约定: 把要改变的行 (列), 写在表达式的开头.

比如, $r_1 + r_2$ 和 $r_2 + r_1$ 的含义是不同的:

- $r_1 + r_2$: 把 $r_2$ 加到 $r_1$, 被改变的将是 $r_1$.
- $r_2 + r_1$: 把 $r_1$ 加到 $r_2$, 被改变的将是 $r_2$.

☞ 计算行列式最常用的一种方法就是利用变换 $r_i + kr_j$ 和 $r_i \leftrightarrow r_j$, 把行列式化为上三角形行列式, 从而算得行列式的值.

前面学习了 7 个性质、2 个推论, 共 10 个结论 (其中性质 3 有 2 个结论). 下面做三点归纳.

**(一) 行列式的三种变换.**

性质 3 之 (i)、性质 5、性质 6 是三个重要的结论, 它们涉及了行列式的三种重要变换:

1. 提出某一行的公因子, 记作: $r_i \div k$ (列的情形为 $c_i \div k$ ).
2. 把某一行的 $k$ 倍加到另一行, 记作: $r_i + kr_j$ (列的情形为 $c_i + kc_j$).
3. 互换某两行, 记作: $r_i \leftrightarrow r_j$ (列的情形为 $c_i \leftrightarrow c_j$).

上面的写法中, 我们约定: 把要改变的行 (列), 写在表达式的开头.

比如, $r_1 + r_2$ 和 $r_2 + r_1$ 的含义是不同的:

- $r_1 + r_2$: 把 $r_2$ 加到 $r_1$, 被改变的将是 $r_1$.
- $r_2 + r_1$: 把 $r_1$ 加到 $r_2$, 被改变的将是 $r_2$.

☞ 计算行列式最常用的一种方法就是利用变换 $r_i + kr_j$ 和 $r_i \leftrightarrow r_j$, 把行列式化为上三角形行列式, 从而算得行列式的值. 具体的例子见下一节.

(二) 行列式为零的三种情形:

**(二) 行列式为零的三种情形:**

- 某行元素全为零 (推论 1);

**(二) 行列式为零的三种情形:**

- 某行元素全为零 (推论 1);
- 两行 (列) 相同 (性质 4);

**(二) 行列式为零的三种情形:**

- 某行元素全为零 (推论 1);
- 两行 (列) 相同 (性质 4);
- 两行 (列) 成比例 (推论 2).

(三) 行列式按某行展开的三种情形:

(三) 行列式按某行展开的三种情形:

- 按第一行展开 (最简单的情形, 即课本中行列式的定义);

(三) 行列式按某行展开的三种情形:

- 按第一行展开 (最简单的情形, 即课本中行列式的定义);
- 按任一行展开 (性质 2, 上述情形的推广)

**(三) 行列式按某行展开的三种情形:**

- 按第一行展开 (最简单的情形, 即课本中行列式的定义);
- 按任一行展开 (性质 2, 上述情形的推广)
- 一行元素乘以另一行对应元素的代数余子式, 其和为零 (性质 7).

**(三) 行列式按某行展开的三种情形:**

- 按第一行展开 (最简单的情形, 即课本中行列式的定义);
- 按任一行展开 (性质 2, 上述情形的推广)
- 一行元素乘以另一行对应元素的代数余子式, 其和为零 (性质 7).

上述三种情形, 综合起来就是一个表达式:

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=\sum_{s=1}^{n}a_{ks}A_{is}=\begin{cases}D, & k=i,\\ 0, & k\neq i;\end{cases} \tag{37}$$

剩下还有两个结论, 比较简单:

剩下还有两个结论, 比较简单:

- $D^{\mathrm{T}} = D$ (性质 1).

剩下还有两个结论, 比较简单:

- $D^{\mathrm{T}} = D$ (性质 1).
- 行列式的裂开 (性质 3 之 (ii)).

剩下还有两个结论, 比较简单:

- $D^{\mathrm{T}} = D$ (性质 1).
- 行列式的裂开 (性质 3 之 (ii)).

行列式的重点是计算, 应当在理解行列式的概念、熟练掌握行列式性质的基础上, 正确地计算低阶行列式, 会用恒等变形化行列式为上 (下) 三角形行列式, 从而直接求其值.

# Outline

计算行列式最常用的一种方法: 利用行列式变换, 把行列式化为上三角形行列式, 再使用结论

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}, \tag{38}$$

算得行列式的值.

## 例 2.1

计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}.$$

## 例 2.1

计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}.$$

**解:**

$$D \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

## 例 2.1

计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}.$$

**解:**

$$D \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-10r_1]{r_2-4r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 2 & -4 \\ 0 & -15 & 2 & -20 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

## 例 2.1

计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}.$$

**解:**

$$D \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3 - 10r_1]{r_2 - 4r_1} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 2 & -4 \\ 0 & -15 & 2 & -20 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -15 & 2 & -20 \\ 0 & -7 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

## 例 2.1

计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}.$$

**解:**

$$D \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3 - 10r_1]{r_2 - 4r_1} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 2 & -4 \\ 0 & -15 & 2 & -20 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -15 & 2 & -20 \\ 0 & -7 & 2 & -4 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 + 7r_2]{r_3 + 15r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 17 & 85 \\ 0 & 0 & 9 & 45 \end{vmatrix}$$

## 例 2.1

计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}.$$

解:

$$D \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-10r_1]{r_2-4r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 2 & -4 \\ 0 & -15 & 2 & -20 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -15 & 2 & -20 \\ 0 & -7 & 2 & -4 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+7r_2]{r_3+15r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 17 & 85 \\ 0 & 0 & 9 & 45 \end{vmatrix} = 0.$$

注意, 如果 $a_{11} \neq 1$, 一般通过互换行 (列) 使 $a_{11}$ 为 1, 再进行计算.

注意, 如果 $a_{11} \neq 1$, 一般通过互换行 (列) 使 $a_{11}$ 为 1, 再进行计算.

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}.$$

注意, 如果 $a_{11} \neq 1$, 一般通过互换行 (列) 使 $a_{11}$ 为 1, 再进行计算.

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}.$$

从这个例子可以看到, 计算一般的数字行列式可以非常地机械:

注意, 如果 $a_{11} \neq 1$, 一般通过互换行 (列) 使 $a_{11}$ 为 1, 再进行计算.

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}.$$

从这个例子可以看到, 计算一般的数字行列式可以非常地机械:

Step 1 把 $a_{11}$ 调整为 1, 用 $r_i + kr_1$ 把 $a_{11}$ 下方的数字变为 0.

注意, 如果 $a_{11} \neq 1$, 一般通过互换行 (列) 使 $a_{11}$ 为 1, 再进行计算.

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}.$$

从这个例子可以看到, 计算一般的数字行列式可以非常地机械:

Step 1 把 $a_{11}$ 调整为 1, 用 $r_i + kr_1$ 把 $a_{11}$ 下方的数字变为 0.

Step 2 把 $a_{22}$ 调整为 1, 用 $r_i + kr_2$ 把 $a_{22}$ 下方的数字变为 0.

注意, 如果 $a_{11} \neq 1$, 一般通过互换行 (列) 使 $a_{11}$ 为 1, 再进行计算.

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}.$$

从这个例子可以看到, 计算一般的数字行列式可以非常地机械:

Step 1 把 $a_{11}$ 调整为 1, 用 $r_i + kr_1$ 把 $a_{11}$ 下方的数字变为 0.

Step 2 把 $a_{22}$ 调整为 1, 用 $r_i + kr_2$ 把 $a_{22}$ 下方的数字变为 0.

Step 3 如此反复, 总可以把行列式变为上三角行列式, 得到计算结果.

注意, 如果 $a_{11} \neq 1$, 一般通过互换行 (列) 使 $a_{11}$ 为 1, 再进行计算.

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}.$$

从这个例子可以看到, 计算一般的数字行列式可以非常地机械:

Step 1 把 $a_{11}$ 调整为 1, 用 $r_i + kr_1$ 把 $a_{11}$ 下方的数字变为 0.

Step 2 把 $a_{22}$ 调整为 1, 用 $r_i + kr_2$ 把 $a_{22}$ 下方的数字变为 0.

Step 3 如此反复, 总可以把行列式变为上三角行列式, 得到计算结果.

当然, 也可把 $a_{11}$ 调整为第一列元素的公因子.

注意, 如果 $a_{11} \neq 1$, 一般通过互换行 (列) 使 $a_{11}$ 为 1, 再进行计算.

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}.$$

从这个例子可以看到, 计算一般的数字行列式可以非常地机械:

Step 1 把 $a_{11}$ 调整为 1, 用 $r_i + kr_1$ 把 $a_{11}$ 下方的数字变为 0.

Step 2 把 $a_{22}$ 调整为 1, 用 $r_i + kr_2$ 把 $a_{22}$ 下方的数字变为 0.

Step 3 如此反复, 总可以把行列式变为上三角行列式, 得到计算结果.

当然, 也可把 $a_{11}$ 调整为第一列元素的公因子. 更多的时候, 需要我们观察各行 (列) 数字间的关系或规律, 灵活运用行列式变换, 使计算简便.

## 例 2.2

计算 4 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

## 例 2.2

计算 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

**解:** 方法一. 行列变换, 化为上三角形行列式.

## 例 2.2

计算 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

**解:** 方法一. 行列变换, 化为上三角形行列式.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

## 例 2.2

计算 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

**解:** 方法一. 行列变换, 化为上三角形行列式.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \overset{r_2+r_1,\, r_3-2r_1}{\underset{r_4-r_1}{=\!=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

## 例 2.2

计算 4 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

**解:** 方法一. 行列变换, 化为上三角形行列式.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_1]{r_2+r_1,\, r_3-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_4} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-2r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3 \leftrightarrow c_4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3 \leftrightarrow c_4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4 + r_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -19 \end{vmatrix}$$

$$
\xlongequal{c_3 \leftrightarrow c_4}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \end{vmatrix}
\xlongequal{r_4 + r_3}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -19 \end{vmatrix}
$$

$$
= 1 \cdot 1 \cdot (-3) \cdot (-19) = 57.
$$

$$\xlongequal{c_3 \leftrightarrow c_4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4 + r_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -19 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot (-3) \cdot (-19) = 57.$$

方法二. 逐步降阶:

$$\xlongequal{c_3\leftrightarrow c_4}\begin{vmatrix}1&1&2&-1\\0&1&0&5\\0&0&-3&-14\\0&0&3&-5\end{vmatrix}\xlongequal{r_4+r_3}\begin{vmatrix}1&1&2&-1\\0&1&0&5\\0&0&-3&-14\\0&0&0&-19\end{vmatrix}$$

$$=1\cdot 1\cdot(-3)\cdot(-19)=57.$$

方法二. 逐步降阶:

$$\begin{vmatrix}1&1&-1&2\\-1&-1&-4&1\\2&4&-6&1\\1&2&4&2\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-r_1]{r_2+r_1,\ r_3-2r_1}\begin{vmatrix}1&1&-1&2\\0&0&-5&3\\0&2&-4&-3\\0&1&5&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{展开}c_1}\begin{vmatrix}0&-5&3\\2&-4&-3\\1&5&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3 \leftrightarrow c_4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4 + r_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -19 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot (-3) \cdot (-19) = 57.$$

方法二. 逐步降阶:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - r_1]{r_2 + r_1,\, r_3 - 2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{展开}c_1} \begin{vmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 - 2r_3} \begin{vmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 0 & -14 & -3 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3\leftrightarrow c_4}\begin{vmatrix}1&1&2&-1\\0&1&0&5\\0&0&-3&-14\\0&0&3&-5\end{vmatrix}\xlongequal{r_4+r_3}\begin{vmatrix}1&1&2&-1\\0&1&0&5\\0&0&-3&-14\\0&0&0&-19\end{vmatrix}$$

$$=1\cdot 1\cdot(-3)\cdot(-19)=57.$$

方法二. 逐步降阶:

$$\begin{vmatrix}1&1&-1&2\\-1&-1&-4&1\\2&4&-6&1\\1&2&4&2\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-r_1]{r_2+r_1,\,r_3-2r_1}\begin{vmatrix}1&1&-1&2\\0&0&-5&3\\0&2&-4&-3\\0&1&5&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{展开}c_1}\begin{vmatrix}0&-5&3\\2&-4&-3\\1&5&0\end{vmatrix}\xlongequal{r_2-2r_3}\begin{vmatrix}0&-5&3\\0&-14&-3\\1&5&0\end{vmatrix}\xlongequal{\text{展开}c_1}\begin{vmatrix}-5&3\\-14&-3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3\leftrightarrow c_4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4+r_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -19 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot 1\cdot(-3)\cdot(-19) = 57.$$

方法二. 逐步降阶:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_1]{r_2+r_1,\, r_3-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{展开}c_1}\begin{vmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-2r_3} \begin{vmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 0 & -14 & -3 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{展开}c_1} \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -14 & -3 \end{vmatrix} = 57.$$

方法三. 观察行列关系, 灵活处理:

方法三. 观察行列关系, 灵活处理:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

方法三. 观察行列关系, 灵活处理:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-2r_4]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -14 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

方法三. 观察行列关系, 灵活处理:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-2r_4]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -14 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -14 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

方法三. 观察行列关系, 灵活处理:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-2r_4]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -14 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -14 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{展开}c_1} \begin{vmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 0 & -14 & -3 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

方法三. 观察行列关系, 灵活处理:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-2r_4]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -14 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -14 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{展开}c_1} \begin{vmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 0 & -14 & -3 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{展开}c_1} \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -14 & -3 \end{vmatrix}$$

方法三. 观察行列关系, 灵活处理:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-2r_4]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -14 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -14 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{展开}c_1} \begin{vmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 0 & -14 & -3 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{展开}c_1} \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -14 & -3 \end{vmatrix} = 57.$$

## 例 2.3

计算 4 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 11 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \end{vmatrix}$.

## 例 2.3

计算 4 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 11 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \end{vmatrix}$.

解:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 11 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \end{vmatrix}$$

## 例 2.3

计算 4 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 11 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \end{vmatrix}$.

**解:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 11 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3+c_4} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 11 & 2 \end{vmatrix}$$

## 例 2.3

计算 4 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 11 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \end{vmatrix}$.

**解:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 11 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3+c_4} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 11 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{展开 } r_3} (-1)^{3+4} \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 11 \end{vmatrix}$$

## 例 2.3

计算 4 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 11 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \end{vmatrix}$.

**解:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 11 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3+c_4} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 11 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{展开 } r_3} (-1)^{3+4} \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 11 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1-4r_2} -5 \begin{vmatrix} -7 & 0 & -25 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 11 \end{vmatrix}$$

## 例 2.3

计算 4 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 11 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \end{vmatrix}$.

**解:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 11 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3+c_4} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 11 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{展开 } r_3} (-1)^{3+4} \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 11 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1-4r_2} -5 \begin{vmatrix} -7 & 0 & -25 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 11 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{展开 } c_2} -5 \begin{vmatrix} -7 & -25 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 10.$$

## 例 2.4

判断: 计算

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \xlongequal[r_1+r_2]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} a+c & b+d \\ c-a & d-b \end{vmatrix}$$

是否正确?

## 例 2.4

判断: 计算

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \xlongequal[r_1+r_2]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} a+c & b+d \\ c-a & d-b \end{vmatrix}$$

是否正确?

**解:** 计算错误.

## 例 2.4

判断: 计算

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \xlongequal[r_1+r_2]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} a+c & b+d \\ c-a & d-b \end{vmatrix}$$

是否正确?

**解:** 计算错误.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-r_1} \begin{vmatrix} a & b \\ c-a & d-b \end{vmatrix}$$

## 例 2.4

判断：计算

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \xlongequal[r_1+r_2]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} a+c & b+d \\ c-a & d-b \end{vmatrix}$$

是否正确？

**解:** 计算错误.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-r_1} \begin{vmatrix} a & b \\ c-a & d-b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_1+r_2]{} \begin{vmatrix} c & d \\ c-a & d-b \end{vmatrix}$$

## 例 2.4

判断: 计算

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \xlongequal[r_1+r_2]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} a+c & b+d \\ c-a & d-b \end{vmatrix}$$

是否正确?

**解:** 计算错误.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-r_1} \begin{vmatrix} a & b \\ c-a & d-b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_1+r_2]{} \begin{vmatrix} c & d \\ c-a & d-b \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} a+c & b+d \\ c-a & d-b \end{vmatrix}.$$

## 例 2.5 (经典例题 ★)

计算 $n$ 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

## 例 2.5 (经典例题 ★)

计算 $n$ 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

解: **解法一**. 将第一行乘以 $(-1)$ 依次加到其余各行,

## 例 2.5 (经典例题 ★)

计算 $n$ 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

解: **解法一**. 将第一行乘以 $(-1)$ 依次加到其余各行, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a-x & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ a-x & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a-x & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix},$$

再将各列都加到第一列上, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

再将各列都加到第一列上, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix} = \big[x+(n-1)a\big](x-a)^{n-1}.$$

**解法二**. 将各列都加到第一列,

**解法二**. 将各列都加到第一列, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(n-1)a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

**解法二**. 将各列都加到第一列, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(n-1)a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = [x+(n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 1 & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

**解法二**. 将各列都加到第一列, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(n-1)a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = \left[x+(n-1)a\right] \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 1 & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

再将第一行乘以 $(-1)$ 依次加到其余各行,

**解法二**. 将各列都加到第一列, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(n-1)a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = \left[x+(n-1)a\right] \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 1 & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

再将第一行乘以 $(-1)$ 依次加到其余各行, 得

$$D_n = \left[x+(n-1)a\right] \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

**解法二**. 将各列都加到第一列, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(n-1)a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = \left[x+(n-1)a\right] \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 1 & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

再将第一行乘以 $(-1)$ 依次加到其余各行, 得

$$D_n = \left[x+(n-1)a\right] \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix} = \left[x+(n-1)a\right](x-a)^{n-1}.$$

**解法三**. 升阶法.

**解法三**. 升阶法.

$$D_n = \left|\begin{array}{c:cccc} 1 & a & a & \cdots & a \\ \hdashline 0 & x & a & \cdots & a \\ 0 & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a & a & \cdots & x \end{array}\right|_{(n+1)}$$

**解法三**. 升阶法.

$$D_n = \left|\begin{array}{c:ccccc} 1 & a & a & \cdots & a \\ \hdashline 0 & x & a & \cdots & a \\ 0 & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a & a & \cdots & x \end{array}\right|_{(n+1)} \xlongequal[i=2,3,\cdots]{r_i - r_1} \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ -1 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}_{(n+1)}$$

**解法三**. 升阶法.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x & a & \cdots & a \\ 0 & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}_{(n+1)} \xlongequal[i=2,3,\cdots]{r_i - r_1} \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ -1 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}_{(n+1)}$$

若 $x = a$, 则 $D_n = 0$.

**解法三**. 升阶法.

$$D_n = \left|\begin{array}{c:cccc} 1 & a & a & \cdots & a \\ \hdashline 0 & x & a & \cdots & a \\ 0 & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a & a & \cdots & x \end{array}\right|_{(n+1)} \xlongequal[i=2,3,\cdots]{r_i - r_1} \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ -1 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}_{(n+1)}$$

若 $x = a$, 则 $D_n = 0$.

若 $x \neq a$, 则将 $\frac{1}{x-a} c_j$ 加到 $c_1$, $j = 2, 3, \cdots, n+1$:

**解法三**. 升阶法.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x & a & \cdots & a \\ 0 & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}_{(n+1)} \xlongequal[i=2,3,\cdots]{r_i - r_1} \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ -1 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}_{(n+1)}$$

若 $x = a$, 则 $D_n = 0$.

若 $x \neq a$, 则将 $\frac{1}{x-a} c_j$ 加到 $c_1$, $j = 2, 3, \cdots, n+1$:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 + \frac{a}{x-a} n & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}_{(n+1)}$$

$$= \left(1 + \frac{na}{x-a}\right)(x-a)^n = \big[x + (n-1)a\big](x-a)^{n-1}.$$

**解法四**. 将 $D_n$ 的第 1 列拆开,

**解法四.** 将 $D_n$ 的第 1 列拆开, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} x-a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x & a & \cdots & a \\ 0 & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a & a & \cdots & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

**解法四**. 将 $D_n$ 的第 1 列拆开, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} x-a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x & a & \cdots & a \\ 0 & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a & a & \cdots & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = (x-a)D_{n-1} + a(x-a)^{n-1}.$$

**解法四**. 将 $D_n$ 的第 1 列拆开, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} x-a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x & a & \cdots & a \\ 0 & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a & a & \cdots & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = (x-a)D_{n-1}+a(x-a)^{n-1}.$$

所以

$$\begin{cases} D_n = (x-a)D_{n-1} + a(x-a)^{n-1}, \\ (x-a)D_{n-1} = (x-a)^2 D_{n-2} + a(x-a)^{n-1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (x-a)^{n-2}D_2 = (x-a)^{n-1}D_1 + a(x-a)^{n-1}. \end{cases}$$

**解法四**. 将 $D_n$ 的第 1 列拆开, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} x-a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x & a & \cdots & a \\ 0 & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a & a & \cdots & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = (x-a)D_{n-1}+a(x-a)^{n-1}.$$

所以

$$\begin{cases} D_n = (x-a)D_{n-1} + a(x-a)^{n-1}, \\ (x-a)D_{n-1} = (x-a)^2 D_{n-2} + a(x-a)^{n-1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (x-a)^{n-2} D_2 = (x-a)^{n-1} D_1 + a(x-a)^{n-1}. \end{cases}$$

将上述等式累和, 并注意到 $D_1 = x$,

**解法四**. 将 $D_n$ 的第 1 列拆开, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} x-a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x & a & \cdots & a \\ 0 & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a & a & \cdots & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = (x-a)D_{n-1} + a(x-a)^{n-1}.$$

所以

$$\begin{cases} D_n = (x-a)D_{n-1} + a(x-a)^{n-1}, \\ (x-a)D_{n-1} = (x-a)^2 D_{n-2} + a(x-a)^{n-1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (x-a)^{n-2}D_2 = (x-a)^{n-1}D_1 + a(x-a)^{n-1}. \end{cases}$$

将上述等式累和, 并注意到 $D_1 = x$, 则

$$D_n = (x-a)^{n-1}x + (n-1)a(x-a)^{n-1} = \big(x+(n-1)a\big)(x-a)^{n-1}.$$

这个行列式经常以不同的样子出现,

这个行列式经常以不同的样子出现, 比如

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (n-1)(-1)^{n-1},$$

这个行列式经常以不同的样子出现, 比如

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (n-1)(-1)^{n-1},$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix} = [1+(n-1)a](1-a)^{n-1},$$

这个行列式经常以不同的样子出现, 比如

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (n-1)(-1)^{n-1},$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix} = [1+(n-1)a](1-a)^{n-1},$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+n)\lambda^{n-1}.$$

**注意**, 这是一个重要的例题. 解法一最简单.

**注意**, 这是一个重要的例题. 解法一最简单.

解法二的特点是: 所有的列 (行) 加到某一列 (行), 其值相等, 可以提出公因子.

**注意**, 这是一个重要的例题. 解法一最简单.

解法二的特点是: 所有的列 (行) 加到某一列 (行), 其值相等, 可以提出公因子. 这是一个常用的方法.

**注意**, 这是一个重要的例题. 解法一最简单.

解法二的特点是: 所有的列 (行) 加到某一列 (行), 其值相等, 可以提出公因子. 这是一个常用的方法.

解法三称为 “升阶法” 或 “加边法”, 在这个题中看似笨拙, 实则是一类重要的方法.

**注意**, 这是一个重要的例题. 解法一最简单.

解法二的特点是: 所有的列 (行) 加到某一列 (行), 其值相等, 可以提出公因子. 这是一个常用的方法.

解法三称为 "升阶法" 或 "加边法", 在这个题中看似笨拙, 实则是一类重要的方法. 比如这个题目可以改一下:

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}. \tag{39}$$

**注意**, 这是一个重要的例题. 解法一最简单.

解法二的特点是: 所有的列 (行) 加到某一列 (行), 其值相等, 可以提出公因子. 这是一个常用的方法.

解法三称为 "升阶法" 或 "加边法", 在这个题中看似笨拙, 实则是一类重要的方法. 比如这个题目可以改一下:

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}. \tag{39}$$

此时解法二是不适用的.

**注意**, 这是一个重要的例题. 解法一最简单.

解法二的特点是: 所有的列 (行) 加到某一列 (行), 其值相等, 可以提出公因子. 这是一个常用的方法.

解法三称为 “升阶法” 或 “加边法”, 在这个题中看似笨拙, 实则是一类重要的方法. 比如这个题目可以改一下:

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}. \tag{39}$$

此时解法二是不适用的. 这个题还可以进一步改为:

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x_n \end{vmatrix}. \tag{40}$$

**注意**, 这是一个重要的例题. 解法一最简单.

解法二的特点是: 所有的列 (行) 加到某一列 (行), 其值相等, 可以提出公因子. 这是一个常用的方法.

解法三称为 "升阶法" 或 "加边法", 在这个题中看似笨拙, 实则是一类重要的方法. 比如这个题目可以改一下:

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}. \tag{39}$$

此时解法二是不适用的. 这个题还可以进一步改为:

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x_n \end{vmatrix}. \tag{40}$$

行列式 (39) 和 (40) 用升阶法很方便.

行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}$ 的结果:

行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}$ 的结果:

假定 $x_i \neq a$, 得

$$D_n = \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a}{x_i - a}\right) \prod_{i=1}^{n} (x_i - a).$$

行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}$ 的结果:

假定 $x_i \neq a$, 得

$$D_n = \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a}{x_i - a}\right) \prod_{i=1}^{n} (x_i - a)\,.$$

行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$ 的结果:

行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}$ 的结果:

假定 $x_i \neq a$, 得

$$D_n = \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a}{x_i - a}\right) \prod_{i=1}^{n} (x_i - a).$$

行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$ 的结果:

假定 $x_i \neq a_i$, 得

$$D_n = \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{x_i - a_i}\right) \prod_{i=1}^{n} (x_i - a_i).$$

行列式 (39) 和 (40) 有很多不同的出现形式, 常见于各类教材和习题 (比如教材中习题 20, 28, 36, 42), 也是极常见的试题.

行列式 (39) 和 (40) 有很多不同的出现形式, 常见于各类教材和习题 (比如教材中习题 20, 28, 36, 42), 也是极常见的试题. 比如

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 3 & 3+a & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n+a \end{vmatrix} = \left(a + \frac{n(n+1)}{2}\right) a^{n-1}.$$

行列式 (39) 和 (40) 有很多不同的出现形式, 常见于各类教材和习题 (比如教材中习题 20, 28, 36, 42), 也是极常见的试题. 比如

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 3 & 3+a & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n+a \end{vmatrix} = \left(a + \frac{n(n+1)}{2}\right) a^{n-1}.$$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix} = b^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i + b\right).$$

(2003 年考研数学三)

# “爪形” 行列式

在解法三中出现了下面形式的行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

# “爪形” 行列式

在解法三中出现了下面形式的行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

可以谓之 “爪形” 行列式. 它的解法是固定的.

## 例 2.6

计算行列式 (假定 $a_i \neq 0$):

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

## 例 2.6

计算行列式 (假定 $a_i \neq 0$):

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

**解:** 分别将第 $i$ $(i = 2, \cdots, n+1)$ 列乘以 $-\frac{1}{a_{i-1}}$ 加到第 1 列,

## 例 2.6

计算行列式 (假定 $a_i \neq 0$):

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

**解:** 分别将第 $i$ $(i = 2, \cdots, n+1)$ 列乘以 $-\frac{1}{a_{i-1}}$ 加到第 1 列, 得

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

## 例 2.6

计算行列式 (假定 $a_i \neq 0$):

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

**解:** 分别将第 $i$ $(i = 2, \cdots, n+1)$ 列乘以 $-\frac{1}{a_{i-1}}$ 加到第 1 列, 得

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 - \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n \left( a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \right).$$

## 例 2.7

计算 $n$ 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}$.

## 例 2.7

计算 $n$ 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}$.

**解:** 将第 1 列裂开,

$$D_n = \begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x & a & \cdots & a \\ 0 & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix} \tag{41}$$

## 例 2.7

计算 $n$ 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}$.

**解:** 将第 1 列裂开,

$$D_n = \begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x & a & \cdots & a \\ 0 & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= a(x+a)^{n-1} + (x-a)D_{n-1}. \tag{41}$$

对称地可知

$$D_n^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} x & -a & -a & \cdots & -a \\ a & x & -a & \cdots & -a \\ a & a & x & \cdots & -a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = -a(x-a)^{n-1} + (x+a)D_{n-1}^{\mathrm{T}}.$$

对称地可知

$$D_n^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} x & -a & -a & \cdots & -a \\ a & x & -a & \cdots & -a \\ a & a & x & \cdots & -a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = -a(x-a)^{n-1} + (x+a)D_{n-1}^{\mathrm{T}}.$$

即 $D_n^{\mathrm{T}} = -a(x-a)^{n-1} + (x+a)D_{n-1}^{\mathrm{T}}$.

对称地可知

$$D_n^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} x & -a & -a & \cdots & -a \\ a & x & -a & \cdots & -a \\ a & a & x & \cdots & -a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = -a(x-a)^{n-1} + (x+a)D_{n-1}^{\mathrm{T}}.$$

即 $D_n^{\mathrm{T}} = -a(x-a)^{n-1} + (x+a)D_{n-1}^{\mathrm{T}}$. 而 $D^{\mathrm{T}} = D$, 故

$$D_n = -a(x-a)^{n-1} + (x+a)D_{n-1}. \tag{42}$$

对称地可知

$$D_n^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} x & -a & -a & \cdots & -a \\ a & x & -a & \cdots & -a \\ a & a & x & \cdots & -a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = -a(x-a)^{n-1} + (x+a)D_{n-1}^{\mathrm{T}}.$$

即 $D_n^{\mathrm{T}} = -a(x-a)^{n-1} + (x+a)D_{n-1}^{\mathrm{T}}$. 而 $D^{\mathrm{T}} = D$, 故

$$D_n = -a(x-a)^{n-1} + (x+a)D_{n-1}. \tag{42}$$

于是, 联立 (41) 和 (42), 消去 $D_{n-1}$, 当 $a \neq 0$ 时, 有

$$D_n = \frac{(x+a)^n + (x-a)^n}{2}.$$

易见当 $a = 0$ 时, 结论也成立.

## 例 2.8

计算 $n$ 阶行列式 $(a \neq b)$:

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ b & x & a & \cdots & a & a \\ b & b & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & x & a \\ b & b & b & \cdots & b & x \end{vmatrix}.$$

解: 从 $r_1$ 开始, 各行减去下一行:

$$D_n \xlongequal[i=1,\cdots,n-1]{r_i-r_{i+1}} \begin{vmatrix} x-b & a-x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x-b & a-x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-b & a-x \\ b & b & b & \cdots & b & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{展开}c_1} (x-b)D_{n-1} + (-1)^{n+1} \cdot b \cdot (a-x)^{n-1}$$

$$= (x-b)D_{n-1} + b(x-a)^{n-1}. \tag{43}$$

**解:** 从 $r_1$ 开始, 各行减去下一行:

$$D_n \xlongequal[i=1,\cdots,n-1]{r_i-r_{i+1}} \begin{vmatrix} x-b & a-x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x-b & a-x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-b & a-x \\ b & b & b & \cdots & b & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{展开}c_1} (x-b)D_{n-1} + (-1)^{n+1} \cdot b \cdot (a-x)^{n-1}$$

$$= (x-b)D_{n-1} + b(x-a)^{n-1}. \tag{43}$$

由 $D_n$ 表达式中 $a$, $b$ 的对称性, 还可得

$$D_n = (x-a)D_{n-1} + a(x-b)^{n-1}. \tag{44}$$

**解:** 从 $r_1$ 开始, 各行减去下一行:

$$D_n \xlongequal[i=1,\cdots,n-1]{r_i-r_{i+1}} \begin{vmatrix} x-b & a-x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x-b & a-x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-b & a-x \\ b & b & b & \cdots & b & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{展开}c_1} (x-b)D_{n-1} + (-1)^{n+1} \cdot b \cdot (a-x)^{n-1}$$

$$= (x-b)D_{n-1} + b(x-a)^{n-1}. \tag{43}$$

由 $D_n$ 表达式中 $a$, $b$ 的对称性, 还可得

$$D_n = (x-a)D_{n-1} + a(x-b)^{n-1}. \tag{44}$$

(或由 $D_n = (x-b)D_{n-1} + b(x-a)^{n-1}$, 知

$$D^{\mathrm{T}} = (x-a)D_{n-1}^{\mathrm{T}} + a(x-b)^{n-1},$$

解: 从 $r_1$ 开始, 各行减去下一行:

$$D_n \xlongequal[i=1,\cdots,n-1]{r_i - r_{i+1}} \begin{vmatrix} x-b & a-x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x-b & a-x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-b & a-x \\ b & b & b & \cdots & b & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{展开}c_1} (x-b)D_{n-1} + (-1)^{n+1} \cdot b \cdot (a-x)^{n-1}$$

$$= (x-b)D_{n-1} + b(x-a)^{n-1}. \tag{43}$$

由 $D_n$ 表达式中 $a$, $b$ 的对称性, 还可得

$$D_n = (x-a)D_{n-1} + a(x-b)^{n-1}. \tag{44}$$

(或由 $D_n = (x-b)D_{n-1} + b(x-a)^{n-1}$, 知

$$D^{\mathrm{T}} = (x-a)D_{n-1}^{\mathrm{T}} + a(x-b)^{n-1},$$

而 $D = D^{\mathrm{T}}$, 得 (44) 式.)

联立 (43) 和 (44) 式, 消去 $D_{n-1}$,

联立 (43) 和 (44) 式, 消去 $D_{n-1}$, 得

$$D_n = \frac{a(x-b)^n - b(x-a)^n}{a-b}.$$

或者裂项得到 $D_n$ 与 $D_{n-1}$ 的递推关系.

或者裂项得到 $D_n$ 与 $D_{n-1}$ 的递推关系.

$$D_4 = \begin{vmatrix} x & a & a & a \\ b & x & a & a \\ b & b & x & a \\ b & b & b & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ b & x & a & a \\ b & b & x & a \\ b & b & b & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-a & a & a & a \\ 0 & x & a & a \\ 0 & b & x & a \\ 0 & b & b & x \end{vmatrix}$$

或者裂项得到 $D_n$ 与 $D_{n-1}$ 的递推关系.

$$D_4=\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ b & x & a & a \\ b & b & x & a \\ b & b & b & x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ b & x & a & a \\ b & b & x & a \\ b & b & b & x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x-a & a & a & a \\ 0 & x & a & a \\ 0 & b & x & a \\ 0 & b & b & x \end{vmatrix}$$

$$=\frac{a}{b}\begin{vmatrix} b & b & b & b \\ b & x & a & a \\ b & b & x & a \\ b & b & b & x \end{vmatrix}+(x-a)D_3$$

或者裂项得到 $D_n$ 与 $D_{n-1}$ 的递推关系.

$$D_4=\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ b & x & a & a \\ b & b & x & a \\ b & b & b & x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ b & x & a & a \\ b & b & x & a \\ b & b & b & x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x-a & a & a & a \\ 0 & x & a & a \\ 0 & b & x & a \\ 0 & b & b & x \end{vmatrix}$$

$$=\frac{a}{b}\begin{vmatrix} b & b & b & b \\ b & x & a & a \\ b & b & x & a \\ b & b & b & x \end{vmatrix}+(x-a)D_3$$

$$=\frac{a}{b}\begin{vmatrix} b & b & b & b \\ 0 & x-b & a-b & a-b \\ 0 & 0 & x-b & a-b \\ 0 & 0 & 0 & x-b \end{vmatrix}+(x-a)D_3$$

或者裂项得到 $D_n$ 与 $D_{n-1}$ 的递推关系.

$$D_4=\begin{vmatrix} x & a & a & a\\ b & x & a & a\\ b & b & x & a\\ b & b & b & x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & a & a & a\\ b & x & a & a\\ b & b & x & a\\ b & b & b & x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x-a & a & a & a\\ 0 & x & a & a\\ 0 & b & x & a\\ 0 & b & b & x\end{vmatrix}$$

$$=\frac{a}{b}\begin{vmatrix} b & b & b & b\\ b & x & a & a\\ b & b & x & a\\ b & b & b & x\end{vmatrix}+(x-a)D_3$$

$$=\frac{a}{b}\begin{vmatrix} b & b & b & b\\ 0 & x-b & a-b & a-b\\ 0 & 0 & x-b & a-b\\ 0 & 0 & 0 & x-b\end{vmatrix}+(x-a)D_3$$

$$=a(x-b)^3+(x-a)D_3.$$

## 例 2.9

行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \tag{45}$$

称为 $n$ 级**范德蒙** (Vandermonde) 行列式.

## 例 2.9

行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \tag{45}$$

称为 $n$ 级**范德蒙** (Vandermonde) 行列式.

试证明: 对任意的 $n \geqslant 2$, $n$ 级范德蒙行列式等于 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 这 $n$ 个数的所有可能之差 $a_i - a_j$ 的乘积, 其中 $1 \leqslant j < i \leqslant n$.

## 例 2.9

行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \tag{45}$$

称为 $n$ 级**范德蒙** (Vandermonde) 行列式.

试证明: 对任意的 $n \geqslant 2$, $n$ 级范德蒙行列式等于 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 这 $n$ 个数的所有可能之差 $a_i - a_j$ 的乘积, 其中 $1 \leqslant j < i \leqslant n$. 即

$$V_n = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j).$$

**证:** 下面用一个 4 阶的范德蒙行列式说明其证明方法.

**证:** 下面用一个 4 阶的范德蒙行列式说明其证明方法.

$$V_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \end{vmatrix}$$

**证:** 下面用一个 4 阶的范德蒙行列式说明其证明方法.

$$V_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4 - a_1 r_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ 0 & a_2^2(a_2 - a_1) & a_3^2(a_3 - a_1) & a_4^2(a_4 - a_1) \end{vmatrix}$$

证: 下面用一个 4 阶的范德蒙行列式说明其证明方法.

$$V_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{r_4 - a_1 r_3}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ 0 & a_2^2(a_2 - a_1) & a_3^2(a_3 - a_1) & a_4^2(a_4 - a_1) \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{r_3 - a_1 r_2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) & a_4(a_4 - a_1) \\ 0 & a_2^2(a_2 - a_1) & a_3^2(a_3 - a_1) & a_4^2(a_4 - a_1) \end{vmatrix}$$

证: 下面用一个 4 阶的范德蒙行列式说明其证明方法.

$$V_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4 - a_1 r_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ 0 & a_2^2(a_2 - a_1) & a_3^2(a_3 - a_1) & a_4^2(a_4 - a_1) \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_2 - a_1 r_1]{r_3 - a_1 r_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & a_4 - a_1 \\ 0 & a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) & a_4(a_4 - a_1) \\ 0 & a_2^2(a_2 - a_1) & a_3^2(a_3 - a_1) & a_4^2(a_4 - a_1) \end{vmatrix}$$

$$V_4 \xlongequal{\text{展开 } c_1} \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & a_4 - a_1 \\ a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) & a_4(a_4 - a_1) \\ a_2^2(a_2 - a_1) & a_3^2(a_3 - a_1) & a_4^2(a_4 - a_1) \end{vmatrix}$$

$$V_4 \xlongequal{\text{展开 } c_1} \begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_3-a_1 & a_4-a_1 \\ a_2(a_2-a_1) & a_3(a_3-a_1) & a_4(a_4-a_1) \\ a_2^2(a_2-a_1) & a_3^2(a_3-a_1) & a_4^2(a_4-a_1) \end{vmatrix}$$

$$=(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \end{vmatrix}$$

$$V_4 \xlongequal{\text{展开 } c_1} \begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_3-a_1 & a_4-a_1 \\ a_2(a_2-a_1) & a_3(a_3-a_1) & a_4(a_4-a_1) \\ a_2^2(a_2-a_1) & a_3^2(a_3-a_1) & a_4^2(a_4-a_1) \end{vmatrix}$$

$$=(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \end{vmatrix}$$

$$=(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)(a_3-a_2)(a_4-a_2)(a_4-a_3).$$

$$V_4 \xlongequal{\text{展开 } c_1} \begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_3-a_1 & a_4-a_1 \\ a_2(a_2-a_1) & a_3(a_3-a_1) & a_4(a_4-a_1) \\ a_2^2(a_2-a_1) & a_3^2(a_3-a_1) & a_4^2(a_4-a_1) \end{vmatrix}$$

$$= (a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)(a_3-a_2)(a_4-a_2)(a_4-a_3).$$

一般地,

$$V_4 \xlongequal{\text{展开 } c_1} \begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_3-a_1 & a_4-a_1 \\ a_2(a_2-a_1) & a_3(a_3-a_1) & a_4(a_4-a_1) \\ a_2^2(a_2-a_1) & a_3^2(a_3-a_1) & a_4^2(a_4-a_1) \end{vmatrix}$$

$$= (a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)(a_3-a_2)(a_4-a_2)(a_4-a_3).$$

一般地， $V_n = (a_n - a_1)(a_{n-1} - a_1)\cdots(a_3 - a_1)(a_2 - a_1)$

$$V_4 \xlongequal{\text{展开 } c_1} \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & a_4 - a_1 \\ a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) & a_4(a_4 - a_1) \\ a_2^2(a_2 - a_1) & a_3^2(a_3 - a_1) & a_4^2(a_4 - a_1) \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1)(a_3 - a_2)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3).$$

一般地，
$$V_n = (a_n - a_1)(a_{n-1} - a_1)\cdots(a_3 - a_1)(a_2 - a_1)$$
$$\cdot(a_n - a_2)(a_{n-1} - a_2)\cdots(a_3 - a_2)$$

$$V_4 \xlongequal{\text{展开 } c_1} \begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_3-a_1 & a_4-a_1 \\ a_2(a_2-a_1) & a_3(a_3-a_1) & a_4(a_4-a_1) \\ a_2^2(a_2-a_1) & a_3^2(a_3-a_1) & a_4^2(a_4-a_1) \end{vmatrix}$$

$$=(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \end{vmatrix}$$

$$=(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)(a_3-a_2)(a_4-a_2)(a_4-a_3).$$

一般地，

$$V_n=(a_n-a_1)(a_{n-1}-a_1)\cdots(a_3-a_1)(a_2-a_1)$$

$$\cdot(a_n-a_2)(a_{n-1}-a_2)\cdots(a_3-a_2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$V_4 \xlongequal{\text{展开 } c_1} \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & a_4 - a_1 \\ a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) & a_4(a_4 - a_1) \\ a_2^2(a_2 - a_1) & a_3^2(a_3 - a_1) & a_4^2(a_4 - a_1) \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1)(a_3 - a_2)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3).$$

一般地，
$$V_n = (a_n - a_1)(a_{n-1} - a_1)\cdots(a_3 - a_1)(a_2 - a_1)$$
$$\cdot(a_n - a_2)(a_{n-1} - a_2)\cdots(a_3 - a_2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdot(a_n - a_{n-1})$$

$$V_4 \xlongequal{\text{展开 } c_1} \begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_3-a_1 & a_4-a_1 \\ a_2(a_2-a_1) & a_3(a_3-a_1) & a_4(a_4-a_1) \\ a_2^2(a_2-a_1) & a_3^2(a_3-a_1) & a_4^2(a_4-a_1) \end{vmatrix}$$

$$= (a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)(a_3-a_2)(a_4-a_2)(a_4-a_3).$$

一般地，
$$V_n = (a_n-a_1)(a_{n-1}-a_1)\cdots(a_3-a_1)(a_2-a_1)$$
$$\cdot(a_n-a_2)(a_{n-1}-a_2)\cdots(a_3-a_2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdot(a_n-a_{n-1})$$

或记为，
$$V_n = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j).$$

## 例 2.10

证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rk} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}. \tag{46}$$

## 例 2.10

证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rk} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}. \tag{46}$$

**证:** 对 $k$ 用数学归纳法. 当 $k=1$ 时, (46) 的左端为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}.$$

按第一行展开, 就得到所要的结论.

假设 (46) 对 $k=m-1$ 成立, 现在来看 $k=m$ 的情形.

假设 (46) 对 $k=m-1$ 成立, 现在来看 $k=m$ 的情形. 记

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}, \qquad |\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}.$$

假设 (46) 对 $k=m-1$ 成立, 现在来看 $k=m$ 的情形. 记

$$\left|\boldsymbol{A}\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}, \qquad \left|\boldsymbol{B}\right| = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}.$$

用 $M_{1j}^{\boldsymbol{A}}$ 表示: 在 $\boldsymbol{A}$ 中去掉 $a_{1j}$ 所在的行、列之后, 余下的那一部分数字块.

假设 (46) 对 $k=m-1$ 成立, 现在来看 $k=m$ 的情形. 记

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}, \qquad |\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}.$$

用 $M_{1j}^{\boldsymbol{A}}$ 表示: 在 $\boldsymbol{A}$ 中去掉 $a_{1j}$ 所在的行、列之后, 余下的那一部分数字块. $M_{1j}$ 表示: $a_{1j}$ 在行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 中对应的余子式.

假设 (46) 对 $k=m-1$ 成立, 现在来看 $k=m$ 的情形. 记

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}, \qquad |\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}.$$

用 $M_{1j}^{\boldsymbol{A}}$ 表示: 在 $\boldsymbol{A}$ 中去掉 $a_{1j}$ 所在的行、列之后, 余下的那一部分数字块. $M_{1j}$ 表示: $a_{1j}$ 在行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 中对应的余子式. 则行列式按第 1 行展开得

$$D = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}$$

假设 (46) 对 $k = m - 1$ 成立, 现在来看 $k = m$ 的情形. 记

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}, \qquad |\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}.$$

用 $M_{1j}^{\boldsymbol{A}}$ 表示: 在 $\boldsymbol{A}$ 中去掉 $a_{1j}$ 所在的行、列之后, 余下的那一部分数字块. $M_{1j}$ 表示: $a_{1j}$ 在行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 中对应的余子式. 则行列式按第 1 行展开得

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} M_{11}^{\boldsymbol{A}} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} M_{12}^{\boldsymbol{A}} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{1+m} a_{1m} \begin{vmatrix} M_{1m}^{\boldsymbol{A}} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

假设 (46) 对 $k=m-1$ 成立, 现在来看 $k=m$ 的情形. 记

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}, \qquad |\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}.$$

用 $M_{1j}^{\boldsymbol{A}}$ 表示: 在 $\boldsymbol{A}$ 中去掉 $a_{1j}$ 所在的行、列之后, 余下的那一部分数字块. $M_{1j}$ 表示: $a_{1j}$ 在行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 中对应的余子式. 则行列式按第 1 行展开得

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} M_{11}^{\boldsymbol{A}} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} M_{12}^{\boldsymbol{A}} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{1+m}a_{1m}\begin{vmatrix} M_{1m}^{\boldsymbol{A}} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1}a_{11}M_{11}|\boldsymbol{B}| + (-1)^{1+2}a_{12}M_{12}|\boldsymbol{B}| + \cdots + (-1)^{1+m}a_{1m}M_{1m}|\boldsymbol{B}| \end{aligned}$$

假设 (46) 对 $k=m-1$ 成立, 现在来看 $k=m$ 的情形. 记

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}, \qquad |\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}.$$

用 $M_{1j}^{\boldsymbol{A}}$ 表示: 在 $\boldsymbol{A}$ 中去掉 $a_{1j}$ 所在的行、列之后, 余下的那一部分数字块. $M_{1j}$ 表示: $a_{1j}$ 在行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 中对应的余子式. 则行列式按第 1 行展开得

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} M_{11}^{\boldsymbol{A}} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} M_{12}^{\boldsymbol{A}} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{1+m} a_{1m} \begin{vmatrix} M_{1m}^{\boldsymbol{A}} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1} a_{11} M_{11} |\boldsymbol{B}| + (-1)^{1+2} a_{12} M_{12} |\boldsymbol{B}| + \cdots + (-1)^{1+m} a_{1m} M_{1m} |\boldsymbol{B}| \\ &= \left[ (-1)^{1+1} a_{11} M_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} M_{12} + \cdots + (-1)^{1+m} a_{1m} M_{1m} \right] |\boldsymbol{B}| \end{aligned}$$

假设 (46) 对 $k=m-1$ 成立, 现在来看 $k=m$ 的情形. 记

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}, \qquad |\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}.$$

用 $M_{1j}^{\boldsymbol{A}}$ 表示: 在 $\boldsymbol{A}$ 中去掉 $a_{1j}$ 所在的行、列之后, 余下的那一部分数字块. $M_{1j}$ 表示: $a_{1j}$ 在行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 中对应的余子式. 则行列式按第 1 行展开得

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} M_{11}^{\boldsymbol{A}} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} M_{12}^{\boldsymbol{A}} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{1+m}a_{1m}\begin{vmatrix} M_{1m}^{\boldsymbol{A}} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1}a_{11}M_{11}|\boldsymbol{B}| + (-1)^{1+2}a_{12}M_{12}|\boldsymbol{B}| + \cdots + (-1)^{1+m}a_{1m}M_{1m}|\boldsymbol{B}| \\ &= \left[(-1)^{1+1}a_{11}M_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}M_{12} + \cdots + (-1)^{1+m}a_{1m}M_{1m}\right]|\boldsymbol{B}| \\ &= |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|. \end{aligned}$$

小结: (46) 式可简记为

$$D = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|. \tag{47}$$

小结: (46) 式可简记为

$$D = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|. \tag{47}$$

同样也有

$$D = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & * \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|. \tag{48}$$

小结: (46) 式可简记为

$$D=\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|. \tag{47}$$

同样也有

$$D=\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & * \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|. \tag{48}$$

结论 (47) 容易推广为:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A_1} & & & \\ * & \boldsymbol{A_2} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ * & * & \cdots & \boldsymbol{A_k} \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A_1}||\boldsymbol{A_2}|\cdots|\boldsymbol{A_k}|. \tag{49}$$

这在形式上与下三角行列式的结果是一致的. 对上三角行列式的情形有类似结论.

### 例 2.11

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & -1 & 2 & 7 \\ 6 & -7 & 4 & 0 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

## 例 2.11

$$\left|\begin{array}{cc:c:ccc}
1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
5 & -3 & -4 & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
0 & 2 & 7 & -1 & 2 & 7 \\
6 & -7 & 4 & 0 & -2 & 5 \\
3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3
\end{array}\right|$$

## 例 2.11

$$\left|\begin{array}{cc:c:ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 5 & -3 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 2 & 7 & -1 & 2 & 7 \\ 6 & -7 & 4 & 0 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

例 2.11

$$\left|\begin{array}{cc:c:ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 5 & -3 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 2 & 7 & -1 & 2 & 7 \\ 6 & -7 & 4 & 0 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -24.$$

注意,

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{nn} \\ \boldsymbol{B}_{mm} & \boldsymbol{C}_{mn} \end{vmatrix} \neq -\left|\boldsymbol{A}_{nn}\right| \cdot \left|\boldsymbol{B}_{mm}\right|.$$

注意,

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{nn} \\ \boldsymbol{B}_{mm} & \boldsymbol{C}_{mn} \end{vmatrix} \neq -\left|\boldsymbol{A}_{nn}\right| \cdot \left|\boldsymbol{B}_{mm}\right|.$$

事实上,

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{nn} \\ \boldsymbol{B}_{mm} & \boldsymbol{C}_{mn} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}\left|\boldsymbol{A}_{nn}\right| \cdot \left|\boldsymbol{B}_{mm}\right|, \tag{50}$$

$$\tag{51}$$

注意,

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{nn} \\ \boldsymbol{B}_{mm} & \boldsymbol{C}_{mn} \end{vmatrix} \neq -\left|\boldsymbol{A}_{nn}\right| \cdot \left|\boldsymbol{B}_{mm}\right|.$$

事实上,

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{nn} \\ \boldsymbol{B}_{mm} & \boldsymbol{C}_{mn} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}\left|\boldsymbol{A}_{nn}\right| \cdot \left|\boldsymbol{B}_{mm}\right|, \tag{50}$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{C}_{nm} & \boldsymbol{A}_{nn} \\ \boldsymbol{B}_{mm} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}\left|\boldsymbol{A}_{nn}\right| \cdot \left|\boldsymbol{B}_{mm}\right|. \tag{51}$$

注意,

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{nn} \\ \boldsymbol{B}_{mm} & \boldsymbol{C}_{mn} \end{vmatrix} \neq -\left|\boldsymbol{A}_{nn}\right| \cdot \left|\boldsymbol{B}_{mm}\right|.$$

事实上,

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{nn} \\ \boldsymbol{B}_{mm} & \boldsymbol{C}_{mn} \end{vmatrix} = (-1)^{mn} \left|\boldsymbol{A}_{nn}\right| \cdot \left|\boldsymbol{B}_{mm}\right|, \tag{50}$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{C}_{nm} & \boldsymbol{A}_{nn} \\ \boldsymbol{B}_{mm} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = (-1)^{mn} \left|\boldsymbol{A}_{nn}\right| \cdot \left|\boldsymbol{B}_{mm}\right|. \tag{51}$$

因为, 将 $\boldsymbol{A}_{nn}$ 所在的每一列依次与其前面的 $m$ 列逐列对换, 共进行 $n \times m$ 次相邻互换, 得

注意，

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{nn} \\ \boldsymbol{B}_{mm} & \boldsymbol{C}_{mn} \end{vmatrix} \neq -\left|\boldsymbol{A}_{nn}\right| \cdot \left|\boldsymbol{B}_{mm}\right|.$$

事实上,

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{nn} \\ \boldsymbol{B}_{mm} & \boldsymbol{C}_{mn} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}\left|\boldsymbol{A}_{nn}\right| \cdot \left|\boldsymbol{B}_{mm}\right|, \tag{50}$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{C}_{nm} & \boldsymbol{A}_{nn} \\ \boldsymbol{B}_{mm} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}\left|\boldsymbol{A}_{nn}\right| \cdot \left|\boldsymbol{B}_{mm}\right|. \tag{51}$$

因为, 将 $\boldsymbol{A}_{nn}$ 所在的每一列依次与其前面的 $m$ 列逐列对换, 共进行 $n \times m$ 次相邻互换, 得

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{nn} \\ \boldsymbol{B}_{mm} & \boldsymbol{C}_{mn} \end{vmatrix} = (-1)^{n\times m}\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_{nn} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C}_{mn} & \boldsymbol{B}_{mm} \end{vmatrix}$$

注意,

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{nn} \\ \boldsymbol{B}_{mm} & \boldsymbol{C}_{mn} \end{vmatrix} \neq -|\boldsymbol{A}_{nn}| \cdot |\boldsymbol{B}_{mm}|.$$

事实上,

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{nn} \\ \boldsymbol{B}_{mm} & \boldsymbol{C}_{mn} \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |\boldsymbol{A}_{nn}| \cdot |\boldsymbol{B}_{mm}|, \tag{50}$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{C}_{nm} & \boldsymbol{A}_{nn} \\ \boldsymbol{B}_{mm} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |\boldsymbol{A}_{nn}| \cdot |\boldsymbol{B}_{mm}|. \tag{51}$$

因为, 将 $\boldsymbol{A}_{nn}$ 所在的每一列依次与其前面的 $m$ 列逐列对换, 共进行 $n \times m$ 次相邻互换, 得

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{nn} \\ \boldsymbol{B}_{mm} & \boldsymbol{C}_{mn} \end{vmatrix} = (-1)^{n \times m} \begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_{nn} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C}_{mn} & \boldsymbol{B}_{mm} \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |\boldsymbol{A}_{nn}| \cdot |\boldsymbol{B}_{mm}|.$$

## 练习 2.12 (P.33 习题 17)

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 8 \end{vmatrix}.$$

## 练习 2.12 (P.33 习题 17)

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 8 \end{vmatrix}.$$

**解:**

$$D = (-1)^{2\times 3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

## 练习 2.12 (P.33 习题 17)

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 8 \end{vmatrix}.$$

**解:**

$$D = (-1)^{2\times 3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 - r_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-5)$$

## 练习 2.12 (P.33 习题 17)

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 8 \end{vmatrix}.$$

解:

$$D = (-1)^{2\times 3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 - r_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-5) = -60.$$

# Outline

# 克拉默法则

## 定理 3.1 (克拉默法则, Cramer's Rule, 1750)

如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{52}$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{53}$$

那么线性方程组 *(52)* 有解, 并且解是惟一的, 解可以通过系数表为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{D_n}{D}, \tag{54}$$

其中 $D_j$ 是把行列式 $D$ 中第 $j$ 列换成方程组的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 所成的行列式, 即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{55}$$

## 注: 克拉默法则的局限

- 克拉默法则面对的线性方程组要满足两个条件: (1) 未知量个数和方程组个数相同, (2) 系数行列式 $D \neq 0$.

## 注: 克拉默法则的局限

- 克拉默法则面对的线性方程组要满足两个条件: (1) 未知量个数和方程组个数相同, (2) 系数行列式 $D \neq 0$.
- 克拉默法则从理论上完美地解决了一少部分线性方程组的求解问题,

## 注: 克拉默法则的局限

- 克拉默法则面对的线性方程组要满足两个条件: (1) 未知量个数和方程组个数相同, (2) 系数行列式 $D \neq 0$.
- 克拉默法则从理论上完美地解决了一少部分线性方程组的求解问题, 但因其中行列式计算量太大, 实际求解并不用此方法.

## 注：克拉默法则的局限

- 克拉默法则面对的线性方程组要满足两个条件：(1) 未知量个数和方程组个数相同，(2) 系数行列式 $D \neq 0$.
- 克拉默法则从理论上完美地解决了一少部分线性方程组的求解问题，但因其中行列式计算量太大，实际求解并不用此方法. 高斯消元法仍然是行之有效的简单解法.

常数项全为零的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

称为**齐次线性方程组**.

# 齐次线性方程组

常数项全为零的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

称为**齐次线性方程组**. 显然, 齐次线性方程组总是有解的,

# 齐次线性方程组

常数项全为零的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

称为**齐次线性方程组**. 显然, 齐次线性方程组总是有解的, 因为 $(0, 0, \ldots, 0)$ 就是一个解, 它称为**零解**.

# 齐次线性方程组

常数项全为零的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

称为**齐次线性方程组**. 显然, 齐次线性方程组总是有解的, 因为 $(0, 0, \ldots, 0)$ 就是一个解, 它称为**零解**.

对于齐次线性方程组, 我们关心的问题是: 它除去零解以外还有没有其它解, 或者说, 它有没有非零解.

## 推论 3.2

如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases} \tag{56}$$

的系数行列式 $D \neq 0$, 那么它只有零解.

## 推论 3.2

如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases} \tag{56}$$

的系数行列式 $D \neq 0$, 那么它只有零解. 换句话说, 如果方程组 *(56)* 有非零解, 那么必有 $D = 0$.

## 推论 3.2

如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases} \tag{56}$$

的系数行列式 $D \neq 0$, 那么它只有零解. 换句话说, 如果方程组 *(56)* 有非零解, 那么必有 $D = 0$.

**证:** 由克拉默法则, 因 $D \neq 0$, 故有唯一解.

## 推论 3.2

如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases} \tag{56}$$

的系数行列式 $D \neq 0$, 那么它只有零解. 换句话说, 如果方程组 *(56)* 有非零解, 那么必有 $D = 0$.

**证:** 由克拉默法则, 因 $D \neq 0$, 故有唯一解.而 $(0, 0, \cdots, 0)$ 已经是它的解, 故它只有零解. $\square$

## 推论 3.2

如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases} \tag{56}$$

的系数行列式 $D \neq 0$, 那么它只有零解. 换句话说, 如果方程组 *(56)* 有非零解, 那么必有 $D = 0$.

**证:** 由克拉默法则, 因 $D \neq 0$, 故有唯一解.而 $(0, 0, \cdots, 0)$ 已经是它的解, 故它只有零解. □

☞ 在第 3 章, 我们将会证明: $D = 0$ 是齐次方程组有非零解的充要条件.

# 流传于微信朋友圈的一个问题

## 例 3.3

$1 = 4,\ 2 = 8,\ 3 = 24,\ 4 =?$

# 流传于微信朋友圈的一个问题

**例 3.3**

$1 = 4,\ 2 = 8,\ 3 = 24,\ 4 =?$

分析: 有人说 $4 = 1$,

# 流传于微信朋友圈的一个问题

**例 3.3**

$1 = 4,\ 2 = 8,\ 3 = 24,\ 4 = ?$

**分析:** 有人说 $4 = 1$, 因为 $1 = 4$.

# 流传于微信朋友圈的一个问题

**例 3.3**

$1 = 4,\ 2 = 8,\ 3 = 24,\ 4 = ?$

**分析:** 有人说 $4 = 1$, 因为 $1 = 4$. 有人说 $4 = 96$,

# 流传于微信朋友圈的一个问题

**例 3.3**

$1 = 4,\ 2 = 8,\ 3 = 24,\ 4 = ?$

**分析:** 有人说 $4 = 1$, 因为 $1 = 4$. 有人说 $4 = 96$, 因为 $4 \times 2 = 8$, $8 \times 3 = 24$.

# 流传于微信朋友圈的一个问题

**例 3.3**

$1 = 4,\ 2 = 8,\ 3 = 24,\ 4 =?$

**分析:** 有人说 $4 = 1$, 因为 $1 = 4$. 有人说 $4 = 96$, 因为 $4 \times 2 = 8,\ 8 \times 3 = 24$.

**解:** 设曲线 $y = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2$ 过点 $(1,4)$, $(2,8)$, $(3,24)$.

# 流传于微信朋友圈的一个问题

**例 3.3**

$1 = 4,\ 2 = 8,\ 3 = 24,\ 4 = ?$

**分析:** 有人说 $4 = 1$, 因为 $1 = 4$. 有人说 $4 = 96$, 因为 $4 \times 2 = 8$, $8 \times 3 = 24$.

**解:** 设曲线 $y = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2$ 过点 $(1,4)$, $(2,8)$, $(3,24)$. 代入三点坐标, 得到一个关于 $\lambda_0$, $\lambda_1$, $\lambda_2$ 的线性方程组:

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 4, \\ \lambda_0 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 8, \\ \lambda_0 + 3\lambda_1 + 9\lambda_2 = 24. \end{cases}$$

由高斯消元法得

$$\lambda_0 = 12, \quad \lambda_1 = -14, \quad \lambda_2 = 8.$$

# 流传于微信朋友圈的一个问题

**例 3.3**

$1=4,\ 2=8,\ 3=24,\ 4=?$

分析: 有人说 $4=1$, 因为 $1=4$. 有人说 $4=96$, 因为 $4\times 2=8$, $8\times 3=24$.

解: 设曲线 $y=\lambda_0+\lambda_1 x+\lambda_2 x^2$ 过点 $(1,4)$, $(2,8)$, $(3,24)$. 代入三点坐标, 得到一个关于 $\lambda_0$, $\lambda_1$, $\lambda_2$ 的线性方程组:

$$\begin{cases} \lambda_0+\lambda_1+\lambda_2=4, \\ \lambda_0+2\lambda_1+4\lambda_2=8, \\ \lambda_0+3\lambda_1+9\lambda_2=24. \end{cases}$$

由高斯消元法得

$$\lambda_0=12, \quad \lambda_1=-14, \quad \lambda_2=8.$$

故 $y=12-14x+8x^2$,

# 流传于微信朋友圈的一个问题

**例 3.3**

$1=4,\ 2=8,\ 3=24,\ 4=?$

分析: 有人说 $4=1$, 因为 $1=4$. 有人说 $4=96$, 因为 $4\times 2=8,\ 8\times 3=24$.

解: 设曲线 $y=\lambda_0+\lambda_1 x+\lambda_2 x^2$ 过点 $(1,4),(2,8),(3,24)$. 代入三点坐标, 得到一个关于 $\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2$ 的线性方程组:

$$\begin{cases}\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2=4,\\ \lambda_0+2\lambda_1+4\lambda_2=8,\\ \lambda_0+3\lambda_1+9\lambda_2=24.\end{cases}$$

由高斯消元法得

$$\lambda_0=12,\quad \lambda_1=-14,\quad \lambda_2=8.$$

故 $y=12-14x+8x^2$, 得 $y(4)=94$.

思考: 数列前 3 项依次为 4, 8, 24, 第 4 项能否取别的值? 甚至是任意数值?!

思考: 数列前 3 项依次为 4, 8, 24, 第 4 项能否取别的值? 甚至是任意数值?!

事实上, 令第 4 项的值为任意常数 $c$,

思考: 数列前 3 项依次为 4, 8, 24, 第 4 项能否取别的值? 甚至是任意数值?!

事实上, 令第 4 项的值为任意常数 $c$, 设曲线

$$y = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3$$

经过点 $(1, 4)$, $(2, 8)$, $(3, 24)$, $(4, c)$.

思考: 数列前 3 项依次为 4, 8, 24, 第 4 项能否取别的值? 甚至是任意数值?!

事实上, 令第 4 项的值为任意常数 $c$, 设曲线

$$y = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3$$

经过点 $(1,4)$, $(2,8)$, $(3,24)$, $(4,c)$. 代入四点坐标, 得到一个关于 $\lambda_0$, $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ 的线性方程组:

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 4, \\ \lambda_0 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 8\lambda_3 = 8, \\ \lambda_0 + 3\lambda_1 + 9\lambda_2 + 27\lambda_3 = 24, \\ \lambda_0 + 4\lambda_1 + 16\lambda_2 + 64\lambda_3 = c. \end{cases}$$

思考: 数列前 3 项依次为 4, 8, 24, 第 4 项能否取别的值? 甚至是任意数值?!

事实上, 令第 4 项的值为任意常数 $c$, 设曲线

$$y = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3$$

经过点 $(1,4)$, $(2,8)$, $(3,24)$, $(4,c)$. 代入四点坐标, 得到一个关于 $\lambda_0$, $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ 的线性方程组:

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 4, \\ \lambda_0 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 8\lambda_3 = 8, \\ \lambda_0 + 3\lambda_1 + 9\lambda_2 + 27\lambda_3 = 24, \\ \lambda_0 + 4\lambda_1 + 16\lambda_2 + 64\lambda_3 = c. \end{cases}$$

它的系数行列式 $D$ 是范德蒙行列式,

**思考:** 数列前 3 项依次为 4, 8, 24, 第 4 项能否取别的值? 甚至是任意数值?!

事实上, 令第 4 项的值为任意常数 $c$, 设曲线

$$y = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3$$

经过点 $(1,4)$, $(2,8)$, $(3,24)$, $(4,c)$. 代入四点坐标, 得到一个关于 $\lambda_0$, $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ 的线性方程组:

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 4, \\ \lambda_0 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 8\lambda_3 = 8, \\ \lambda_0 + 3\lambda_1 + 9\lambda_2 + 27\lambda_3 = 24, \\ \lambda_0 + 4\lambda_1 + 16\lambda_2 + 64\lambda_3 = c. \end{cases}$$

它的系数行列式 $D$ 是范德蒙行列式, 且每个 $a_i$ 都不相同,

思考: 数列前 3 项依次为 4, 8, 24, 第 4 项能否取别的值? 甚至是任意数值?!

事实上, 令第 4 项的值为任意常数 $c$, 设曲线

$$y = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3$$

经过点 $(1,4)$, $(2,8)$, $(3,24)$, $(4,c)$. 代入四点坐标, 得到一个关于 $\lambda_0$, $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ 的线性方程组:

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 4, \\ \lambda_0 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 8\lambda_3 = 8, \\ \lambda_0 + 3\lambda_1 + 9\lambda_2 + 27\lambda_3 = 24, \\ \lambda_0 + 4\lambda_1 + 16\lambda_2 + 64\lambda_3 = c. \end{cases}$$

它的系数行列式 $D$ 是范德蒙行列式, 且每个 $a_i$ 都不相同, 故 $D \neq 0$.

思考: 数列前 3 项依次为 4, 8, 24, 第 4 项能否取别的值? 甚至是任意数值?!

事实上, 令第 4 项的值为任意常数 $c$, 设曲线

$$y = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3$$

经过点 $(1,4)$, $(2,8)$, $(3,24)$, $(4,c)$. 代入四点坐标, 得到一个关于 $\lambda_0$, $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ 的线性方程组:

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 4, \\ \lambda_0 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 8\lambda_3 = 8, \\ \lambda_0 + 3\lambda_1 + 9\lambda_2 + 27\lambda_3 = 24, \\ \lambda_0 + 4\lambda_1 + 16\lambda_2 + 64\lambda_3 = c. \end{cases}$$

它的系数行列式 $D$ 是范德蒙行列式, 且每个 $a_i$ 都不相同, 故 $D \neq 0$. 由克拉默法则, 方程组必有唯一解. □

**思考:** 数列前 3 项依次为 4, 8, 24, 第 4 项能否取别的值? 甚至是任意数值?!

事实上, 令第 4 项的值为任意常数 $c$, 设曲线

$$y = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3$$

经过点 $(1,4)$, $(2,8)$, $(3,24)$, $(4,c)$. 代入四点坐标, 得到一个关于 $\lambda_0$, $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ 的线性方程组:

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 4, \\ \lambda_0 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 8\lambda_3 = 8, \\ \lambda_0 + 3\lambda_1 + 9\lambda_2 + 27\lambda_3 = 24, \\ \lambda_0 + 4\lambda_1 + 16\lambda_2 + 64\lambda_3 = c. \end{cases}$$

它的系数行列式 $D$ 是范德蒙行列式, 且每个 $a_i$ 都不相同, 故 $D \neq 0$. 由克拉默法则, 方程组必有唯一解. □

这也表明通过前三点的多项式曲线有无穷多条.

思考: 数列前 3 项依次为 4, 8, 24, 第 4 项能否取别的值? 甚至是任意数值?!

事实上, 令第 4 项的值为任意常数 $c$, 设曲线

$$y = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3$$

经过点 $(1,4)$, $(2,8)$, $(3,24)$, $(4,c)$. 代入四点坐标, 得到一个关于 $\lambda_0$, $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ 的线性方程组:

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 4, \\ \lambda_0 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 8\lambda_3 = 8, \\ \lambda_0 + 3\lambda_1 + 9\lambda_2 + 27\lambda_3 = 24, \\ \lambda_0 + 4\lambda_1 + 16\lambda_2 + 64\lambda_3 = c. \end{cases}$$

它的系数行列式 $D$ 是范德蒙行列式, 且每个 $a_i$ 都不相同, 故 $D \neq 0$. 由克拉默法则, 方程组必有唯一解. $\square$

这也表明通过前三点的多项式曲线有无穷多条. 从而说明: 给出数列的前 $n$ 项, 满足这 $n$ 项取值的通项公式有无穷多个!

☞ 一般地, 过 $n+1$ 个 $x$ 坐标不同的点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_{n+1}, y_{n+1})$, 可以唯一地确定一个 $n$ 次曲线方程

$$y = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n.$$

☞ 一般地, 过 $n+1$ 个 $x$ 坐标不同的点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_{n+1}, y_{n+1})$, 可以唯一地确定一个 $n$ 次曲线方程

$$y = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n.$$

但是, 满足这 $n+1$ 个已知点的多项式有无穷多个.

## 例 3.4

求 $\lambda$ 在什么条件下, 方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 = 0. \end{cases}$$

有非零解.

## 例 3.4

求 $\lambda$ 在什么条件下, 方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 = 0. \end{cases}$$

有非零解.

**解:** 根据推论, 如果方程组有非零解, 那么系数行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0,$$

## 例 3.4

求 $\lambda$ 在什么条件下, 方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 = 0. \end{cases}$$

有非零解.

**解:** 根据推论, 如果方程组有非零解, 那么系数行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0,$$

所以 $\lambda = \pm 1$. □

## 例 3.4

求 $\lambda$ 在什么条件下, 方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 = 0. \end{cases}$$

有非零解.

**解:** 根据推论, 如果方程组有非零解, 那么系数行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0,$$

所以 $\lambda = \pm 1$. □

当 $\lambda = 1$ 时, 方程组有非零解, 且有无数多组解: $(x_1, x_2) = (k, -k)$, $k$ 为任意常数.

## 例 3.4

求 $\lambda$ 在什么条件下, 方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 = 0. \end{cases}$$

有非零解.

**解:** 根据推论, 如果方程组有非零解, 那么系数行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0,$$

所以 $\lambda = \pm 1$. □

当 $\lambda = 1$ 时, 方程组有非零解, 且有无数多组解: $(x_1, x_2) = (k, -k)$, $k$ 为任意常数.

当 $\lambda = -1$ 时, 方程组也有无数多组解: $(x_1, x_2) = (c, c)$, $c$ 为任意常数.

## 例 3.5 (典型例题, P36 习题 37)

试证

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

证: **解法一**. 设法把主对角线上的 $x$ 变为 0, 再按第一列展开.

证: **解法一**. 设法把主对角线上的 $x$ 变为 0, 再按第一列展开.

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_3 & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

证: **解法一**. 设法把主对角线上的 $x$ 变为 0, 再按第一列展开.

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_3 & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_{n-1}+xc_n} \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_3 & x^2+a_1x+a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_{n-2}+xc_{n-1}} \begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & x^3+a_1x^2+a_2x+a_3 & x^2+a_1x+a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_{n-2}+xc_{n-1}} \begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & x^3+a_1x^2+a_2x+a_3 & x^2+a_1x+a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[j=n-3,\cdots,2,1]{c_j+xc_{j-1}} \begin{vmatrix} 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ P_n & P_{n-1} & \cdots & x^2+a_1x+a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

其中 $P_n = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$,

$P_{n-1} = x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \cdots + a_{n-2}x + a_{n-1}$.

$$\xlongequal{\text{展开}c_1}(-1)^{n+1}(x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)\begin{vmatrix} -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}_{(n-1)\text{阶}}$$

$$\xlongequal{\text{展开}\,c_1}(-1)^{n+1}(x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)\begin{vmatrix} -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}_{(n-1)\text{阶}}$$

$$=(-1)^{n+1}(x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)(-1)^{n-1}$$

$$\xlongequal{\text{展开}c_1}(-1)^{n+1}(x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)\begin{vmatrix} -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}_{(n-1)\text{阶}}$$

$$=(-1)^{n+1}(x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)(-1)^{n-1}$$

$$=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

**解法二**. 设法把 $-1$ 全部变为 0, 得到一个下三角矩阵.

**解法二**. 设法把 $-1$ 全部变为 0, 得到一个下三角矩阵.

若 $x = 0$, 则 $D_n = a_n$. 等式成立.

**解法二**. 设法把 $-1$ 全部变为 0, 得到一个下三角矩阵.

若 $x=0$, 则 $D_n = a_n$. 等式成立.

若 $x \neq 0$,

**解法二**. 设法把 $-1$ 全部变为 0, 得到一个下三角矩阵.

若 $x=0$, 则 $D_n=a_n$. 等式成立.

若 $x\neq 0$, 则

$$D_n \xlongequal{c_2+\frac{1}{x}c_1} \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1}+\frac{a_n}{x} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

**解法二**. 设法把 $-1$ 全部变为 0, 得到一个下三角矩阵.

若 $x=0$, 则 $D_n=a_n$. 等式成立.

若 $x\neq 0$, 则

$$D_n \xlongequal{c_2+\frac{1}{x}c_1} \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1}+\frac{a_n}{x} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3+\frac{1}{x}c_2} \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1}+\frac{a_n}{x} & a_{n-2}+\frac{a_{n-1}}{x}+\frac{a_n}{x^2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[j=4,5,\cdots,n]{c_j+\frac{1}{x}c_{j-1}} \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ a_n & a_{n-1}+\frac{a_n}{x} & a_{n-2}+\frac{a_{n-1}}{x}+\frac{a_n}{x^2} & \cdots & P_2 & P_1 \end{vmatrix}$$

这里,

$$P_2 = a_2 + \frac{a_3}{x} + \frac{a_4}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^{n-2}},$$
$$P_1 = x + a_1 + \frac{a_2}{x} + \frac{a_3}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^{n-1}}.$$

$$\xlongequal[j=4,5,\cdots,n]{c_j+\frac{1}{x}c_{j-1}} \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ a_n & a_{n-1}+\frac{a_n}{x} & a_{n-2}+\frac{a_{n-1}}{x}+\frac{a_n}{x^2} & \cdots & P_2 & P_1 \end{vmatrix}$$

这里,

$$P_2 = a_2 + \frac{a_3}{x} + \frac{a_4}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^{n-2}},$$
$$P_1 = x + a_1 + \frac{a_2}{x} + \frac{a_3}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^{n-1}}.$$

得到下三角阵, 所以

$$D_n = x^{n-1} \cdot P_1 = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

**解法三**. 用递归法证明.

**解法三**. 用递归法证明. 展开 $c_1$ 得

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

**解法三**. 用递归法证明. 展开 $c_1$ 得

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$= x \begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} a_n \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

**解法三**. 用递归法证明. 展开 $c_1$ 得

$$D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$=x\begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}+(-1)^{n+1}a_n\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$=xD_{n-1}+(-1)^{n+1}a_n(-1)^{n-1}$$

$$=xD_{n-1}+a_n.$$

**解法三**. 用递归法证明. 展开 $c_1$ 得

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$= x\begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} + (-1)^{n+1}a_n \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$= xD_{n-1} + (-1)^{n+1}a_n(-1)^{n-1}$$

$$= xD_{n-1} + a_n.$$

所以, $D_n = xD_{n-1} + a_n$.

**解法三**. 用递归法证明. 展开 $c_1$ 得

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$= x\begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} + (-1)^{n+1}a_n \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$= xD_{n-1} + (-1)^{n+1}a_n(-1)^{n-1}$$

$$= xD_{n-1} + a_n.$$

所以, $D_n = xD_{n-1} + a_n$. 由此递归式得

$$D_n = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

**解法四**. 按最后一行展开.

**解法四**. 按最后一行展开. 先看 $a_{n-i}$ 的代数余子式.

**解法四**. 按最后一行展开. 先看 $a_{n-i}$ 的代数余子式. 因为

$$D_n = \left|\begin{array}{ccccc|c|cccc}
x & -1 & & & & & & & & \\
 & x & -1 & & & & & & & \\
 & & x & \ddots & & & & & & \\
 & & & \ddots & -1 & & & & & \\
 & & & & x & -1 & & & & \\
\hline
 & & & & & x & -1 & & & \\
 & & & & & & x & \ddots & & \\
 & & & & & & & \ddots & -1 & \\
 & & & & & & & & x & -1 \\
\hline
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_{n-(i-1)} & \color{red}{a_{n-i}} & a_{n-(i+1)} & & a_2 & x+a_1
\end{array}\right|$$

划掉 $a_{n-i}$ 所在的行、所在的列, 则余下的 $n-1$ 阶行列式中: 左上角是 $i \times i$ 的方块, 右下角是 $(n-i-1) \times (n-i-1)$ 的方块, 余下全为 0.

**解法四**. 按最后一行展开. 先看 $a_{n-i}$ 的代数余子式. 因为

$$D_n = \left|\begin{array}{ccccc:c:cccc}
x & -1 & & & & & & & & \\
 & x & -1 & & & & & & & \\
 & & x & \ddots & & & & & & \\
 & & & \ddots & -1 & & & & & \\
 & & & & x & -1 & & & & \\
\hdashline
 & & & & & x & -1 & & & \\
 & & & & & & x & \ddots & & \\
 & & & & & & & \ddots & -1 & \\
 & & & & & & & & x & -1 \\
\hdashline
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_{n-(i-1)} & \color{red}{a_{n-i}} & a_{n-(i+1)} & & a_2 & x+a_1
\end{array}\right|$$

划掉 $a_{n-i}$ 所在的行、所在的列, 则余下的 $n-1$ 阶行列式中: 左上角是 $i\times i$ 的方块, 右下角是 $(n-i-1)\times(n-i-1)$ 的方块, 余下全为 0.

则 $a_{n-i}$ 的代数余子式为 (注意到 $a_{n-i}$ 处在第 $n$ 行、第 $i+1$ 列)

$$(-1)^{n+i+1}\begin{vmatrix} x & -1 & & & \\ & x & -1 & & \\ & & x & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 \\ & & & & x \end{vmatrix}_{i\text{阶}} \cdot \begin{vmatrix} -1 & & & \\ x & \ddots & & \\ & \ddots & -1 & \\ & & x & -1 \end{vmatrix}_{(n-i-1)\text{阶}} = x^i$$

$$(-1)^{n+i+1}\begin{vmatrix} x & -1 & & & \\ & x & -1 & & \\ & & x & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 \\ & & & & x \end{vmatrix}_{i阶} \cdot \begin{vmatrix} -1 & & & \\ x & \ddots & & \\ & \ddots & -1 & \\ & & x & -1 \end{vmatrix}_{(n-i-1)阶} = x^i$$

所以, $D_n$ 按最后一行展开, 得到

$$\begin{aligned} D_n &= a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + \cdots + a_{n-i}x^i + \cdots + a_2x^{n-2} + (x+a_1)x^{n-1} \\ &= x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n. \end{aligned}$$

**解法五**. 针对 $c_1$ 作变换.

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+xc_2} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x^2 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n + a_{n-1}x & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+x^2c_3}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ x^3 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n+a_{n-1}x+a_{n-2}x^2 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+x^2 c_3}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ x^3 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n+a_{n-1}x+a_{n-2}x^2 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[j=4,5,\cdots,n]{c_1+x^{j-1} c_j}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ P & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix},$$

这里, $P=a_n+a_{n-1}x+a_{n-2}x^2+\cdots+a_1x^{n-1}+x^n$.

$$\xlongequal{c_1+x^2c_3}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ x^3 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n+a_{n-1}x+a_{n-2}x^2 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[j=4,5,\cdots,n]{c_1+x^{j-1}c_j}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ P & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix},$$

这里, $P = a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + \cdots + a_1x^{n-1} + x^n$. 再按第一列展开, 得

$$D_n = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

# Outline

# 行列式计算的常见方法

- 宏观思路: 三角化、降阶法、递推法等;

# 行列式计算的常见方法

- 宏观思路: 三角化、降阶法、递推法等;
- 微观手法: 行累加、主行消法、逐行消法、逐行相邻互换等;

# 行列式计算的常见方法

- 宏观思路: 三角化、降阶法、递推法等;
- 微观手法: 行累加、主行消法、逐行消法、逐行相邻互换等;
- 非主流方法: 升阶、裂开等.

# Outline

# 三角化

化行列式为三角形是计算行列式的最基本思路. 通过观察行列式的特点, 利用行列式的性质将其作变形, 再将其化为三角形行列式.

## 例 4.1

计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} n & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ n & n-1 & \cdots & 3 & 3 & 1 \\ n & n-1 & \cdots & 5 & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & 2n-3 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ 2n-1 & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

## 例 4.1

计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} n & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ n & n-1 & \cdots & 3 & 3 & 1 \\ n & n-1 & \cdots & 5 & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & 2n-3 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ 2n-1 & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

**解:** 各行只有副对角线元素不同.

## 例 4.1

计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} n & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ n & n-1 & \cdots & 3 & 3 & 1 \\ n & n-1 & \cdots & 5 & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & 2n-3 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ 2n-1 & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

**解:** 各行只有副对角线元素不同. 将第 1 行乘以 $(-1)$ 加到第 $2, 3, \ldots, n$ 行,

## 例 4.1

计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} n & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ n & n-1 & \cdots & 3 & 3 & 1 \\ n & n-1 & \cdots & 5 & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & 2n-3 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ 2n-1 & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

**解:** 各行只有副对角线元素不同. 将第 1 行乘以 $(-1)$ 加到第 $2, 3, \ldots, n$ 行, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} n & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & n-2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

## 例 4.1

计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} n & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ n & n-1 & \cdots & 3 & 3 & 1 \\ n & n-1 & \cdots & 5 & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & 2n-3 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ 2n-1 & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

解: 各行只有副对角线元素不同. 将第 1 行乘以 $(-1)$ 加到第 $2, 3, \ldots, n$ 行, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} n & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & n-2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!.$$

## 例 4.2

计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$.

## 例 4.2

计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$.

**解:** 注意到从第 1 列开始, 每一列与它后一列中有 $n-1$ 个数相差 1.

## 例 4.2

计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$.

解: 注意到从第 1 列开始, 每一列与它后一列中有 $n-1$ 个数相差 1. 依次进行列运算: $c_n - c_{n-1}$, $c_{n-1} - c_{n-2}$, $\cdots$, $c_2 - c_1$,

## 例 4.2

计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$.

**解:** 注意到从第 1 列开始, 每一列与它后一列中有 $n-1$ 个数相差 1. 依次进行列运算: $c_n - c_{n-1}, c_{n-1} - c_{n-2}, \cdots, c_2 - c_1$, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 3 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i-r_1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ 2 & 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & -n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i-r_1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ 2 & 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & -n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_1+\frac{1}{n}r_i}\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{n}(1+\cdots+(n-1)) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ 2 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-1 & -n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{展开 } r_1} \frac{(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & -n & \cdots & 0 & 0 \\ -n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$
\xlongequal{\text{展开 } r_1} \frac{(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & -n & \cdots & 0 & 0 \\ -n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}
$$

$$
= \frac{(n+1)}{2} \cdot (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \cdot (-n)^{n-1}
$$

$$
\xlongequal{\text{展开 } r_1} \frac{(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & -n & \cdots & 0 & 0 \\ -n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}
$$

$$
= \frac{(n+1)}{2} \cdot (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \cdot (-n)^{n-1}
$$

$$
= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{(n+1)}{2} \cdot n^{n-1}.
$$

# 降阶法

按一行 (列) 展开, 或使用 Laplace 定理展开 (见本文附录), 使行列式降阶, 此方法统称为**降阶法**.

# 降阶法

按一行 (列) 展开, 或使用 Laplace 定理展开 (见本文附录), 使行列式降阶, 此方法统称为**降阶法**.

**例 4.3**

计算 $n$ 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}.$$

# 降阶法

按一行 (列) 展开, 或使用 Laplace 定理展开 (见本文附录), 使行列式降阶, 此方法统称为**降阶法**.

**例 4.3**

计算 $n$ 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}.$$

**解:** 按第一列展开,

# 降阶法

按一行 (列) 展开, 或使用 Laplace 定理展开 (见本文附录), 使行列式降阶, 此方法统称为**降阶法**.

## 例 4.3

计算 $n$ 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}.$$

**解:** 按第一列展开,

$$D_n = a^n + (-1)^{n+1} b^n.$$

一般地, 递推方法是通过降阶等途径, 建立 $n$ 阶行列式 $D_n$ 和较它阶低的结构相同的行列式之间的关系, 并求得 $D_n$.

## 例 4.4

计算三对角行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & & & \\ 1 & a+b & ab & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & a+b & ab \\ & & & 1 & a+b \end{vmatrix}.$

## 例 4.4

计算三对角行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & & & \\ 1 & a+b & ab & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & a+b & ab \\ & & & 1 & a+b \end{vmatrix}$.

**解:** 按第 1 列展开,

## 例 4.4

计算三对角行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & & & \\ 1 & a+b & ab & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & a+b & ab \\ & & & 1 & a+b \end{vmatrix}$.

**解:** 按第 1 列展开, 得

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - \begin{vmatrix} ab & 0 & 0 & & & \\ 1 & a+b & ab & & & \\ & 1 & a+b & ab & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & a+b & ab \\ & & & & 1 & a+b \end{vmatrix} \tag{57}$$

## 例 4.4

计算三对角行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & & & \\ 1 & a+b & ab & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & a+b & ab \\ & & & 1 & a+b \end{vmatrix}$.

**解:** 按第 1 列展开, 得

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - \begin{vmatrix} ab & 0 & 0 & & & \\ 1 & a+b & ab & & & \\ & 1 & a+b & ab & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & a+b & ab \\ & & & & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}. \tag{57}$$

由 (57) 得到

$$D_n - bD_{n-1} = a(D_{n-1} - bD_{n-2})$$

由 (57) 得到

$$D_n - bD_{n-1} = a(D_{n-1} - bD_{n-2}) = a^2(D_{n-2} - bD_{n-3})$$

由 (57) 得到

$$D_n - bD_{n-1} = a(D_{n-1} - bD_{n-2}) = a^2(D_{n-2} - bD_{n-3}) = \cdots = a^{n-2}(D_2 - bD_1).$$

由 (57) 得到

$$D_n - bD_{n-1} = a(D_{n-1} - bD_{n-2}) = a^2(D_{n-2} - bD_{n-3}) = \cdots = a^{n-2}(D_2 - bD_1).$$

又 $D_1 = a + b$, $D_2 = a^2 + b^2 + ab$,

由 (57) 得到

$$D_n - bD_{n-1} = a(D_{n-1} - bD_{n-2}) = a^2(D_{n-2} - bD_{n-3}) = \cdots = a^{n-2}(D_2 - bD_1).$$

又 $D_1 = a + b$, $D_2 = a^2 + b^2 + ab$, 得

$$D_n - bD_{n-1} = a^n. \tag{58}$$

由 (57) 得到

$$D_n - bD_{n-1} = a(D_{n-1} - bD_{n-2}) = a^2(D_{n-2} - bD_{n-3}) = \cdots = a^{n-2}(D_2 - bD_1).$$

又 $D_1 = a + b$, $D_2 = a^2 + b^2 + ab$, 得

$$D_n - bD_{n-1} = a^n. \tag{58}$$

同理 (或由 $a$, $b$ 的对称性) 得

$$D_n - aD_{n-1} = b^n. \tag{59}$$

由 (57) 得到

$$D_n - bD_{n-1} = a(D_{n-1} - bD_{n-2}) = a^2(D_{n-2} - bD_{n-3}) = \cdots = a^{n-2}(D_2 - bD_1).$$

又 $D_1 = a + b$, $D_2 = a^2 + b^2 + ab$, 得

$$D_n - bD_{n-1} = a^n. \tag{58}$$

同理 (或由 $a$, $b$ 的对称性) 得

$$D_n - aD_{n-1} = b^n. \tag{59}$$

若 $a \neq b$, 联立 (58) 和 (59) 消去 $D_{n-1}$, 得

$$D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}.$$

由 (57) 得到

$$D_n - bD_{n-1} = a(D_{n-1} - bD_{n-2}) = a^2(D_{n-2} - bD_{n-3}) = \cdots = a^{n-2}(D_2 - bD_1).$$

又 $D_1 = a + b$, $D_2 = a^2 + b^2 + ab$, 得

$$D_n - bD_{n-1} = a^n. \tag{58}$$

同理 (或由 $a$, $b$ 的对称性) 得

$$D_n - aD_{n-1} = b^n. \tag{59}$$

若 $a \neq b$, 联立 (58) 和 (59) 消去 $D_{n-1}$, 得

$$D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}.$$

若 $a = b$, 则 $D_n = aD_{n-1} + a^n$. 依此递推, 得 $D_n = (n+1)a^n$.

## 注 1

与递推过程相反的方法是归纳.

## 注 1

与递推过程相反的方法是归纳. 如要计算 $n$ 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & & & \\ 1 & 3 & 2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 3 & 2 \\ & & & 1 & 3 \end{vmatrix},$$

## 注 1

与递推过程相反的方法是归纳. 如要计算 $n$ 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & & & \\ 1 & 3 & 2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 3 & 2 \\ & & & 1 & 3 \end{vmatrix},$$

因为 $D_1 = 3 = 2^2 - 1,\ D_2 = 7 = 2^3 - 1,\ D_3 = 15 = 2^4 - 1.$

## 注 1

与递推过程相反的方法是归纳. 如要计算 $n$ 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & & & \\ 1 & 3 & 2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 3 & 2 \\ & & & 1 & 3 \end{vmatrix},$$

因为 $D_1 = 3 = 2^2 - 1$, $D_2 = 7 = 2^3 - 1$, $D_3 = 15 = 2^4 - 1$. 因此, 猜想

$$D_n = 2^{n+1} - 1,$$

并利用数学归纳法易证此结论成立.

# Outline

# 常用化简手法

总结上面例子有以下常用手法:

- 行累加, 即把行列式的某 $n-1$ 个行, 加到余下的一行. 当行列式的各行的和相同时常使用此技巧.

# 常用化简手法

总结上面例子有以下常用手法:

- 行累加, 即把行列式的某 $n-1$ 个行, 加到余下的一行. 当行列式的各行的和相同时常使用此技巧.
- 主行消法, 即某行的适当倍数, 加到其余的各行.

# 常用化简手法

总结上面例子有以下常用手法:

- 行累加, 即把行列式的某 $n-1$ 个行, 加到余下的一行. 当行列式的各行的和相同时常使用此技巧.
- 主行消法, 即某行的适当倍数, 加到其余的各行.
- 逐行消法, 即第 $i$ 行乘以 $k$ 加到第 $i+1$ 行, $i=n-1,n-2,\cdots,1$; 或第 $i+1$ 行乘以 $k$ 加到第 $i$ 行, $i=1,2,\cdots,n-1$.

# 常用化简手法

总结上面例子有以下常用手法:

- 行累加, 即把行列式的某 $n-1$ 个行, 加到余下的一行. 当行列式的各行的和相同时常使用此技巧.
- 主行消法, 即某行的适当倍数, 加到其余的各行.
- 逐行消法, 即第 $i$ 行乘以 $k$ 加到第 $i+1$ 行, $i=n-1,n-2,\cdots,1$; 或第 $i+1$ 行乘以 $k$ 加到第 $i$ 行, $i=1,2,\cdots,n-1$.
- 逐行相邻互换.

# 常用化简手法

总结上面例子有以下常用手法:

- 行累加, 即把行列式的某 $n-1$ 个行, 加到余下的一行. 当行列式的各行的和相同时常使用此技巧.
- 主行消法, 即某行的适当倍数, 加到其余的各行.
- 逐行消法, 即第 $i$ 行乘以 $k$ 加到第 $i+1$ 行, $i=n-1,n-2,\cdots,1$; 或第 $i+1$ 行乘以 $k$ 加到第 $i$ 行, $i=1,2,\cdots,n-1$.
- 逐行相邻互换.

☞ 这些方法都是行列式三种基本变换的 “高级形式”.

## 例 4.5

计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}.$$

## 例 4.5

计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}.$$

**解:** 各列加到第一列, 再展开第一列, 得

$$D_n = (-1)^{n-1}\frac{(n+1)!}{2}.$$

# Outline

# 升阶

将 $n$ 阶行列式添上一行、一列, 变为 $n+1$ 阶行列式再化简计算, 称为**升阶法**, 也称**加边法**.

# 升阶

将 $n$ 阶行列式添上一行、一列, 变为 $n+1$ 阶行列式再化简计算, 称为**升阶法**, 也称**加边法**.

☞ 其关键: 每行或每列是否有相同的元素.

## 例 4.6

计算 $n$ 阶行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1^2+1 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2+1 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n^2+1 \end{vmatrix}.$$

## 例 4.6

计算 $n$ 阶行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1^2+1 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2+1 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n^2+1 \end{vmatrix}.$$

**分析:** 暂时不看主对角线上的 1, 则第 $i$ 行是 $x_i$ 与 $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ 相乘.

## 例 4.6

计算 $n$ 阶行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1^2+1 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2+1 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n^2+1 \end{vmatrix}.$$

分析: 暂时不看主对角线上的 1, 则第 $i$ 行是 $x_i$ 与 $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ 相乘. 该行列式每行有相同的元素 $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$, 从而考虑加边法.

## 例 4.6

计算 $n$ 阶行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1^2+1 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2+1 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n^2+1 \end{vmatrix}.$$

**分析:** 暂时不看主对角线上的 1, 则第 $i$ 行是 $x_i$ 与 $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ 相乘. 该行列式每行有相同的元素 $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$, 从而考虑加边法.

**解:**

$$D_n = \left|\begin{array}{c:cccc} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \hdashline 0 & x_1^2+1 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ 0 & x_2x_1 & x_2^2+1 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n^2+1 \end{array}\right|_{(n+1)\text{阶}}$$

$$\xlongequal[i=1,\cdots,n]{r_{i+1}-x_ir_1}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -x_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -x_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -x_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$\xlongequal[i=1,\cdots,n]{r_{i+1}-x_i r_1} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -x_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -x_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -x_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$\xlongequal[i=1,\cdots,n]{c_1+x_i c_{i+1}} \begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$\xlongequal[i=1,\cdots,n]{r_{i+1}-x_ir_1} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -x_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -x_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -x_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$\xlongequal[i=1,\cdots,n]{c_1+x_ic_{i+1}} \begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{n+1} = 1+\sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

$$\xlongequal[i=1,\cdots,n]{r_{i+1}-x_ir_1}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -x_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -x_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -x_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$\xlongequal[i=1,\cdots,n]{c_1+x_ic_{i+1}}\begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{n+1} = 1+\sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

☞ 升阶法最大的特点就是要找出每行或每列相同的元素, 把 1 及这些相同的元素作为新行列式的第一行, 那么升阶之后, 就可利用行列式的性质把绝大部分元素化为零, 从而简化计算.

# 裂开

将一个行列式裂开成 2 个 (或 2 个以上) 行列式来化简计算.

# 裂开

将一个行列式裂开成 2 个 (或 2 个以上) 行列式来化简计算.

## 例 4.7

试证

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

# 裂开

将一个行列式裂开成 2 个 (或 2 个以上) 行列式来化简计算.

## 例 4.7

试证

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

**解:** 记左端行列式为 $D$, 利用行列式的性质, 将 $D$ 的第 1 列拆开得到两个行列式

$$D = \begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ q & r+p & p+q \\ y & z+x & x+y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ r & r+p & p+q \\ z & z+x & x+y \end{vmatrix}.$$

# 裂开

将一个行列式裂开成 2 个 (或 2 个以上) 行列式来化简计算.

## 例 4.7

试证

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

**解:** 记左端行列式为 $D$, 利用行列式的性质, 将 $D$ 的第 1 列拆开得到两个行列式

$$D = \begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ q & r+p & p+q \\ y & z+x & x+y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ r & r+p & p+q \\ z & z+x & x+y \end{vmatrix}.$$

将第一个行列式中将第 3 列减去第 1 列, 在第 2 个行列式中将第 2 列减去第 1 列:

$$D = \begin{vmatrix} b & c+a & a \\ q & r+p & p \\ y & z+x & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & a+b \\ r & p & p+q \\ z & x & x+y \end{vmatrix}$$

$$D=\begin{vmatrix} b & c+a & a \\ q & r+p & p \\ y & z+x & x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c & a & a+b \\ r & p & p+q \\ z & x & x+y \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} b & c & a \\ q & r & p \\ y & z & x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c & a & b \\ r & p & q \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

$$D=\begin{vmatrix} b & c+a & a \\ q & r+p & p \\ y & z+x & x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c & a & a+b \\ r & p & p+q \\ z & x & x+y \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} b & c & a \\ q & r & p \\ y & z & x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c & a & b \\ r & p & q \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

# Outline

## 例 4.8

计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1+1 & a_2+1 & \cdots & a_n+1 \\ a_1^2+a_1 & a_2^2+a_2 & \cdots & a_n^2+a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1}+a_1^{n-2} & a_2^{n-1}+a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1}+a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

## 例 4.8

计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1+1 & a_2+1 & \cdots & a_n+1 \\ a_1^2+a_1 & a_2^2+a_2 & \cdots & a_n^2+a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1}+a_1^{n-2} & a_2^{n-1}+a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1}+a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

解: 从第二行起, 各行减去上一行, 得范德蒙行列式,

## 例 4.8

计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1+1 & a_2+1 & \cdots & a_n+1 \\ a_1^2+a_1 & a_2^2+a_2 & \cdots & a_n^2+a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1}+a_1^{n-2} & a_2^{n-1}+a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1}+a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

解: 从第二行起, 各行减去上一行, 得范德蒙行列式, 故

$$D_n = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n} (a_i - a_j).$$

## 例 4.9

计算行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix}.$$

## 例 4.9

计算行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix}.$$

**解:** 将第 $i$ 行提公因子 $i$,

## 例 4.9

计算行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix}.$$

**解:** 将第 $i$ 行提公因子 $i$, 得

$$D_n = n! \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix}$$

## 例 4.9

计算行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix}.$$

**解:** 将第 $i$ 行提公因子 $i$, 得

$$D_n = n! \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix} = n! \prod_{n \geqslant i > j \geqslant 1} (i-j)$$

$$
\begin{aligned}
= n!\,(2-1)(3-1)(4-1)\cdots(n-1) \\
\cdot (3-2)(4-2)\cdots(n-2) \\
\cdots\cdots \\
\cdot \big(n-(n-1)\big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= n!\,(2-1)(3-1)(4-1)\cdots(n-1) \\
&\qquad\qquad\qquad \cdot(3-2)(4-2)\cdots(n-2) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot\big(n-(n-1)\big) \\
&= n!\,(n-1)!\,(n-2)!\,\cdots 2!\,1!.
\end{aligned}
$$

## 练习 4.10 (P35 习题 30)

计算
$$\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \cdots & a_1 b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \cdots & a_2 b_2^{n-1} & b_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \cdots & a_{n+1} b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}.$$

解:

$$\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \cdots & a_1 b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \cdots & a_2 b_2^{n-1} & b_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \cdots & a_{n+1} b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

解:

$$\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \cdots & a_1 b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \cdots & a_2 b_2^{n-1} & b_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \cdots & a_{n+1} b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_i \div a_i^n} a_1^n a_2^n \cdots a_{n+1}^n \begin{vmatrix} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2 & \cdots & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^n \\ 1 & \frac{b_2}{a_2} & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^2 & \cdots & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^2 & \cdots & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^n \end{vmatrix}$$

解:

$$\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1} b_1 & a_1^{n-2} b_1^2 & \cdots & a_1 b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1} b_2 & a_2^{n-2} b_2^2 & \cdots & a_2 b_2^{n-1} & b_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1} b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2} b_{n+1}^2 & \cdots & a_{n+1} b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_i \div a_i^n}{=\!=\!=\!=} a_1^n a_2^n \cdots a_{n+1}^n \begin{vmatrix} 1 & \frac{b_1}{a_1} & (\frac{b_1}{a_1})^2 & \cdots & (\frac{b_1}{a_1})^n \\ 1 & \frac{b_2}{a_2} & (\frac{b_2}{a_2})^2 & \cdots & (\frac{b_2}{a_2})^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} & (\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}})^2 & \cdots & (\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}})^n \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{Vandermonde 行列式}}{\overset{n+1\text{ 阶}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}} a_1^n a_2^n \cdots a_{n+1}^n \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} \left( \frac{b_j}{a_j} - \frac{b_i}{a_i} \right)$$

解:

$$\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \cdots & a_1 b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \cdots & a_2 b_2^{n-1} & b_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \cdots & a_{n+1} b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_i \div a_i^n} a_1^n a_2^n \cdots a_{n+1}^n \begin{vmatrix} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2 & \cdots & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^n \\ 1 & \frac{b_2}{a_2} & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^2 & \cdots & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^2 & \cdots & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{Vandermonde 行列式}]{n+1\text{ 阶}} a_1^n a_2^n \cdots a_{n+1}^n \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1} \left(\frac{b_j}{a_j} - \frac{b_i}{a_i}\right)$$

$$= \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1} (a_i b_j - a_j b_i).$$

## 练习 4.11 (P37 习题 44)

证明 $$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n} (x_i - x_j).$$

## 练习 4.11 (P37 习题 44)

证明 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n} (x_i - x_j).$

**证:** 考虑 $n+1$ 阶 Vandermonde 行列式

$$V_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & y^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & y^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_n^n & y^n \end{vmatrix}$$

## 练习 4.11 (P37 习题 44)

证明 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n} (x_i - x_j).$

**证:** 考虑 $n+1$ 阶 Vandermonde 行列式

$$V_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & y^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & y^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_n^n & y^n \end{vmatrix}$$

## 练习 4.11 (P37 习题 44)

证明 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n} (x_i - x_j)$.

**证:** 考虑 $n+1$ 阶 Vandermonde 行列式

$$V_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & y^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & y^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_n^n & y^n \end{vmatrix}$$

这里 $y^{n-1}$ 的余子式 $M_{n,n+1}$ 即所求的 $D_n$.

这里 $y^{n-1}$ 的余子式 $M_{n,n+1}$ 即所求的 $D_n$.

一方面, 由 Vandermonde 行列式的结果可知:

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= (y-x_1)(y-x_2)\cdots(y-x_n)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j) \\ &= \left[y^n-(x_1+x_2+\cdots+x_n)y^{n-1}+\cdots+(-1)^n x_1x_2\cdots x_n\right]\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j). \end{aligned} \tag{60}$$

这里 $y^{n-1}$ 的余子式 $M_{n,n+1}$ 即所求的 $D_n$.

一方面, 由 Vandermonde 行列式的结果可知:

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= (y-x_1)(y-x_2)\cdots(y-x_n)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j) \\ &= \left[y^n-(x_1+x_2+\cdots+x_n)y^{n-1}+\cdots+(-1)^n x_1x_2\cdots x_n\right]\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j). \end{aligned} \tag{60}$$

另一方面, 将 $V_{n+1}$ 按第 $n+1$ 列展开得:

$$V_{n+1} = 1\cdot A_{1,n+1}+y\cdot A_{2,n+1}+\cdots+y^{n-1}\cdot A_{n,n+1}+y^n\cdot A_{n+1,n+1}. \tag{61}$$

这里 $y^{n-1}$ 的余子式 $M_{n,n+1}$ 即所求的 $D_n$.

一方面, 由 Vandermonde 行列式的结果可知:

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= (y-x_1)(y-x_2)\cdots(y-x_n)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j) \\ &= \left[y^n-(x_1+x_2+\cdots+x_n)y^{n-1}+\cdots+(-1)^n x_1x_2\cdots x_n\right]\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j). \end{aligned} \tag{60}$$

另一方面, 将 $V_{n+1}$ 按第 $n+1$ 列展开得:

$$V_{n+1}=1\cdot A_{1,n+1}+y\cdot A_{2,n+1}+\cdots+y^{n-1}\cdot A_{n,n+1}+y^n\cdot A_{n+1,n+1}. \tag{61}$$

因 (60) 和 (61) 对应项的系数相等, 从而有:

$$A_{n,n+1}=-(x_1+x_2+\cdots+x_n)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

这里 $y^{n-1}$ 的余子式 $M_{n,n+1}$ 即所求的 $D_n$.

一方面, 由 Vandermonde 行列式的结果可知:

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= (y-x_1)(y-x_2)\cdots(y-x_n)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j) \\ &= \left[y^n-(x_1+x_2+\cdots+x_n)y^{n-1}+\cdots+(-1)^n x_1x_2\cdots x_n\right]\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j). \end{aligned} \tag{60}$$

另一方面, 将 $V_{n+1}$ 按第 $n+1$ 列展开得:

$$V_{n+1}=1\cdot A_{1,n+1}+y\cdot A_{2,n+1}+\cdots+y^{n-1}\cdot A_{n,n+1}+y^n\cdot A_{n+1,n+1}. \tag{61}$$

因 (60) 和 (61) 对应项的系数相等, 从而有:

$$A_{n,n+1}=-(x_1+x_2+\cdots+x_n)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

注意到 $A_{n,n+1}=(-1)^{2n+1}M_{n,n+1}$

这里 $y^{n-1}$ 的余子式 $M_{n,n+1}$ 即所求的 $D_n$.

一方面, 由 Vandermonde 行列式的结果可知:

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= (y-x_1)(y-x_2)\cdots(y-x_n)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j) \\ &= \left[y^n-(x_1+x_2+\cdots+x_n){\color{red}y^{n-1}}+\cdots+(-1)^n x_1x_2\cdots x_n\right]\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j). \end{aligned} \tag{60}$$

另一方面, 将 $V_{n+1}$ 按第 $n+1$ 列展开得:

$$V_{n+1} = 1\cdot A_{1,n+1} + y\cdot A_{2,n+1} + \cdots + {\color{red}y^{n-1}}\cdot A_{n,n+1} + y^n\cdot A_{n+1,n+1}. \tag{61}$$

因 (60) 和 (61) 对应项的系数相等, 从而有:

$$A_{n,n+1} = -(x_1+x_2+\cdots+x_n)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

注意到 $A_{n,n+1}=(-1)^{2n+1}M_{n,n+1}=-M_{n,n+1}$

这里 $y^{n-1}$ 的余子式 $M_{n,n+1}$ 即所求的 $D_n$.

一方面, 由 Vandermonde 行列式的结果可知:

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= (y-x_1)(y-x_2)\cdots(y-x_n)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j) \\ &= \left[y^n-(x_1+x_2+\cdots+x_n)y^{n-1}+\cdots+(-1)^n x_1x_2\cdots x_n\right]\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j). \end{aligned} \tag{60}$$

另一方面, 将 $V_{n+1}$ 按第 $n+1$ 列展开得:

$$V_{n+1} = 1\cdot A_{1,n+1}+y\cdot A_{2,n+1}+\cdots+y^{n-1}\cdot A_{n,n+1}+y^n\cdot A_{n+1,n+1}. \tag{61}$$

因 (60) 和 (61) 对应项的系数相等, 从而有:

$$A_{n,n+1} = -(x_1+x_2+\cdots+x_n)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

注意到 $A_{n,n+1}=(-1)^{2n+1}M_{n,n+1}=-M_{n,n+1}=-D_n$,

这里 $y^{n-1}$ 的余子式 $M_{n,n+1}$ 即所求的 $D_n$.

一方面, 由 Vandermonde 行列式的结果可知:

$$\begin{aligned}V_{n+1} &= (y-x_1)(y-x_2)\cdots(y-x_n)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)\\ &= \left[y^n-(x_1+x_2+\cdots+x_n)y^{n-1}+\cdots+(-1)^n x_1x_2\cdots x_n\right]\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).\end{aligned} \tag{60}$$

另一方面, 将 $V_{n+1}$ 按第 $n+1$ 列展开得:

$$V_{n+1}=1\cdot A_{1,n+1}+y\cdot A_{2,n+1}+\cdots+y^{n-1}\cdot A_{n,n+1}+y^n\cdot A_{n+1,n+1}. \tag{61}$$

因 (60) 和 (61) 对应项的系数相等, 从而有:

$$A_{n,n+1}=-(x_1+x_2+\cdots+x_n)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

注意到 $A_{n,n+1}=(-1)^{2n+1}M_{n,n+1}=-M_{n,n+1}=-D_n$, 所以:

$$D_n=\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

# Outline

## 练习 5.1 (P38 习题 50)

已知 $a^2 \neq b^2$, 证明方程组

$$\begin{cases} ax_1 + bx_{2n} = 1, \\ ax_2 + bx_{2n-1} = 1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ ax_n + bx_{n+1} = 1, \\ bx_n + ax_{n+1} = 1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ bx_2 + ax_{2n-1} = 1, \\ bx_1 + ax_{2n} = 1, \end{cases}$$

有唯一解, 并求解.

## 练习 5.1 (P38 习题 50)

已知 $a^2 \neq b^2$, 证明方程组

$$\begin{cases} ax_1 & & + & & bx_{2n} & = 1, \\ & ax_2 & + & bx_{2n-1} & & = 1, \\ & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\ & & ax_n + bx_{n+1} & & & = 1, \\ & & bx_n + ax_{n+1} & & & = 1, \\ & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\ & bx_2 & + & ax_{2n-1} & & = 1, \\ bx_1 & & + & & ax_{2n} & = 1, \end{cases}$$

有唯一解, 并求解.

**证:** 由 $a^2 \neq b^2$ 可知, $a, b$ 不同时为 0.

## 练习 5.1 (P38 习题 50)

已知 $a^2 \neq b^2$, 证明方程组

$$\begin{cases} ax_1 & + & & & bx_{2n} & = 1, \\ & ax_2 & + & bx_{2n-1} & & = 1, \\ & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\ & & ax_n + bx_{n+1} & & & = 1, \\ & & bx_n + ax_{n+1} & & & = 1, \\ & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\ & bx_2 & + & ax_{2n-1} & & = 1, \\ bx_1 & + & & & ax_{2n} & = 1, \end{cases}$$

有唯一解, 并求解.

证: 由 $a^2 \neq b^2$ 可知, $a, b$ 不同时为 0.若 $a \neq 0$, $b = 0$, 方程组有唯一解 $x_i = \dfrac{1}{a}$.

## 练习 5.1 (P38 习题 50)

已知 $a^2 \neq b^2$, 证明方程组

$$\begin{cases} ax_1 & + & & bx_{2n} = 1, \\ & ax_2 & + & bx_{2n-1} & = 1, \\ & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ & & ax_n + bx_{n+1} & & = 1, \\ & & bx_n + ax_{n+1} & & = 1, \\ & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ & bx_2 & + & ax_{2n-1} & = 1, \\ bx_1 & + & & ax_{2n} = 1, \end{cases}$$

有唯一解, 并求解.

**证:** 由 $a^2 \neq b^2$ 可知, $a, b$ 不同时为 0.若 $a \neq 0$, $b = 0$, 方程组有唯一解 $x_i = \dfrac{1}{a}$.若 $a = 0$, $b \neq 0$, 方程组也有唯一解 $x_i = \dfrac{1}{b}$.

## 练习 5.1 (P38 习题 50)

已知 $a^2 \neq b^2$, 证明方程组

$$\begin{cases} ax_1 \qquad + \qquad bx_{2n} = 1, \\ \quad ax_2 \quad + \quad bx_{2n-1} \quad = 1, \\ \quad\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad\quad ax_n + bx_{n+1} \quad\quad = 1, \\ \quad\quad bx_n + ax_{n+1} \quad\quad = 1, \\ \quad\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad bx_2 \quad + \quad ax_{2n-1} \quad = 1, \\ bx_1 \qquad + \qquad ax_{2n} = 1, \end{cases}$$

有唯一解, 并求解.

**证:** 由 $a^2 \neq b^2$ 可知, $a, b$ 不同时为 0.若 $a \neq 0$, $b = 0$, 方程组有唯一解 $x_i = \dfrac{1}{a}$.若 $a = 0$, $b \neq 0$, 方程组也有唯一解 $x_i = \dfrac{1}{b}$. 下面讨论 $a$, $b$ 均不为 0 的情形.

因为方程组的系数行列式

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & & & b \\ & a & & & & & b & \\ & & \ddots & & & \iddots & & \\ & & & a & b & & & \\ & & & b & a & & & \\ & & \iddots & & & \ddots & & \\ & b & & & & & a & \\ b & & & & & & & a \end{vmatrix}$$

因为方程组的系数行列式

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & & & & & b \\ & a & & & & & b & \\ & & \ddots & & & \iddots & & \\ & & & a & b & & & \\ & & & b & a & & & \\ & & \iddots & & & \ddots & & \\ & b & & & & & a & \\ b & & & & & & & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=0,1,\cdots,n-1]{r_{2n-i}-\frac{b}{a}r_{1+i}} \begin{vmatrix} a & & & & & & & b \\ & a & & & & & b & \\ & & \ddots & & & \iddots & & \\ & & & a & b & & & \\ & & & 0 & \frac{a^2-b^2}{a} & & & \\ & & \iddots & & & \ddots & & \\ & 0 & & & & & \frac{a^2-b^2}{a} & \\ 0 & & & & & & & \frac{a^2-b^2}{a} \end{vmatrix}$$

因为方程组的系数行列式

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a &&&&&& b \\ & a &&&& b & \\ && \ddots && \iddots && \\ &&& a \quad b &&& \\ &&& b \quad a &&& \\ && \iddots && \ddots && \\ & b &&&& a & \\ b &&&&&& a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=0,1,\cdots,n-1]{r_{2n-i}-\frac{b}{a}r_{1+i}}\begin{vmatrix} a &&&&&& b \\ & a &&&& b & \\ && \ddots && \iddots && \\ &&& a \quad b &&& \\ &&& 0 \quad \frac{a^2-b^2}{a} &&& \\ && \iddots && \ddots && \\ & 0 &&&& \frac{a^2-b^2}{a} & \\ 0 &&&&&& \frac{a^2-b^2}{a} \end{vmatrix}$$

$$=(a^2-b^2)^n\neq 0.$$

所以方程组有唯一解.

所以方程组有唯一解.

由第 1 个方程和第 $2n$ 个方程

$$\begin{cases} ax_1 + bx_{2n} = 1, \\ bx_1 + ax_{2n} = 1, \end{cases}$$

所以方程组有唯一解.

由第 1 个方程和第 $2n$ 个方程

$$\begin{cases} ax_1 + bx_{2n} = 1, \\ bx_1 + ax_{2n} = 1, \end{cases}$$

可得:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}} = \frac{a-b}{a^2-b^2} = \frac{1}{a+b}, \qquad x_{2n} = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}} = \frac{a-b}{a^2-b^2} = \frac{1}{a+b}.$$

所以方程组有唯一解.

由第 1 个方程和第 $2n$ 个方程

$$\begin{cases} ax_1 + bx_{2n} = 1, \\ bx_1 + ax_{2n} = 1, \end{cases}$$

可得:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}} = \frac{a-b}{a^2-b^2} = \frac{1}{a+b}, \qquad x_{2n} = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}} = \frac{a-b}{a^2-b^2} = \frac{1}{a+b}.$$

同理, 由第 2 个方程和第 $2n-1$ 个方程得 $x_2 = x_{2n-1} = \dfrac{1}{a+b}, \cdots,$ 由第 $n$ 个方程和第 $n+1$ 个方程可以求出 $x_n = x_{n+1} = \dfrac{1}{a+b}$.

所以方程组有唯一解.

由第 1 个方程和第 $2n$ 个方程

$$\begin{cases} ax_1 + bx_{2n} = 1, \\ bx_1 + ax_{2n} = 1, \end{cases}$$

可得:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}} = \frac{a-b}{a^2-b^2} = \frac{1}{a+b}, \qquad x_{2n} = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}} = \frac{a-b}{a^2-b^2} = \frac{1}{a+b}.$$

同理, 由第 2 个方程和第 $2n-1$ 个方程得 $x_2 = x_{2n-1} = \dfrac{1}{a+b}, \cdots$, 由第 $n$ 个方程和第 $n+1$ 个方程可以求出 $x_n = x_{n+1} = \dfrac{1}{a+b}$.

所以方程组的解为

$$x_i = \frac{1}{a+b}, \quad i = 1, 2, \cdots, 2n.$$

## 例 5.2

计算 $D_{2n} = \begin{vmatrix} a_n & & & 0 & & & b_n \\ & \ddots & & & & \iddots & \\ 0 & & a_1 & & b_1 & & 0 \\ & & c_1 & & d_1 & & \\ & \iddots & & & & \ddots & \\ c_n & & & 0 & & & d_n \end{vmatrix}$.

**解:** 方法一. 将 $c_{2n}$ 作 $2n-2$ 次列的相邻对换, 移到第二列; 再将 $r_{2n}$ 作 $2n-2$ 次行的相邻对换, 移到第二行,

**解:** 方法一. 将 $c_{2n}$ 作 $2n-2$ 次列的相邻对换, 移到第二列; 再将 $r_{2n}$ 作 $2n-2$ 次行的相邻对换, 移到第二行, 得

$$D_{2n} = (-1)^{2n-2}(-1)^{2n-2}\left|\begin{array}{cc|cccccc} a_n & b_n & & & & & & \\ c_n & d_n & & & & & & \\ \hline & & a_{n-1} & & & & & b_{n-1} \\ & & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & & a_1 & b_1 & & \\ & & & & c_1 & d_1 & & \\ & & & \iddots & & & \ddots & \\ & & c_{n-1} & & & & & d_{n-1} \end{array}\right|$$

解: 方法一. 将 $c_{2n}$ 作 $2n-2$ 次列的相邻对换, 移到第二列; 再将 $r_{2n}$ 作 $2n-2$ 次行的相邻对换, 移到第二行, 得

$$D_{2n} = (-1)^{2n-2}(-1)^{2n-2}\left|\begin{array}{cc:cccccc} a_n & b_n & & & & & & \\ c_n & d_n & & & & & & \\ \hdashline & & a_{n-1} & & & & & b_{n-1} \\ & & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & & a_1 & b_1 & & \\ & & & & c_1 & d_1 & & \\ & & & \iddots & & & \ddots & \\ & & c_{n-1} & & & & & d_{n-1} \end{array}\right|$$

$$= (a_n d_n - b_n c_n) D_{2(n-1)},$$

解: 方法一. 将 $c_{2n}$ 作 $2n-2$ 次列的相邻对换, 移到第二列; 再将 $r_{2n}$ 作 $2n-2$ 次行的相邻对换, 移到第二行, 得

$$D_{2n} = (-1)^{2n-2}(-1)^{2n-2}\left|\begin{array}{cc|ccccc} a_n & b_n & & & & & \\ c_n & d_n & & & & & \\ \hline & & a_{n-1} & & & & b_{n-1} \\ & & & \ddots & & \iddots & \\ & & & & a_1 \quad b_1 & & \\ & & & & c_1 \quad d_1 & & \\ & & & \iddots & & \ddots & \\ & & c_{n-1} & & & & d_{n-1} \end{array}\right|$$

$$= (a_n d_n - b_n c_n) D_{2(n-1)},$$

又 $n=1$ 时 $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} = a_1 d_1 - b_1 c_1,$

**解:** 方法一. 将 $c_{2n}$ 作 $2n-2$ 次列的相邻对换, 移到第二列; 再将 $r_{2n}$ 作 $2n-2$ 次行的相邻对换, 移到第二行, 得

$$D_{2n} = (-1)^{2n-2}(-1)^{2n-2}\left|\begin{array}{cc:cccccc}
a_n & b_n & & & & & & \\
c_n & d_n & & & & & & \\
\hdashline
 & & a_{n-1} & & & & & b_{n-1} \\
 & & & \ddots & & & \iddots & \\
 & & & & a_1 & b_1 & & \\
 & & & & c_1 & d_1 & & \\
 & & & \iddots & & & \ddots & \\
 & & c_{n-1} & & & & & d_{n-1}
\end{array}\right|$$

$$= (a_n d_n - b_n c_n) D_{2(n-1)},$$

又 $n=1$ 时 $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} = a_1 d_1 - b_1 c_1$, 所以

$$D_{2n} = (a_n d_n - b_n c_n) \cdots (a_1 d_1 - b_1 c_1) = \prod_{i=1}^{n} (a_i d_i - b_i c_i).$$

方法二.

$$
D_{2n} \xlongequal{\text{展开 } r_1} a_n \begin{vmatrix}
a_{n-1} & & & 0 & & b_{n-1} & 0 \\
 & \ddots & & & \iddots & & \\
0 & & a_1 & b_1 & & 0 & \vdots \\
 & & c_1 & d_1 & & & \\
 & \iddots & & & \ddots & & \\
c_{n-1} & & & 0 & & d_{n-1} & 0 \\
0 & & & \cdots & & 0 & d_n
\end{vmatrix}
$$

$$
+ (-1)^{2n+1} b_n \begin{vmatrix}
0 & a_{n-1} & & 0 & & b_{n-1} \\
 & & \ddots & & \iddots & \\
0 & \vdots & a_1 & b_1 & & 0 \\
 & & c_1 & d_1 & & \\
 & & \iddots & & \ddots & \\
0 & c_{n-1} & & & & d_{n-1} \\
c_n & 0 & & 0 & & 0
\end{vmatrix}
$$

方法二.

$$D_{2n} \xlongequal{\text{展开 } r_1} a_n \begin{vmatrix} a_{n-1} & & 0 & & b_{n-1} & 0 \\ & \ddots & & \iddots & & \\ 0 & & \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{matrix} & & 0 & \vdots \\ & \iddots & & \ddots & & \\ c_{n-1} & & 0 & & d_{n-1} & 0 \\ 0 & & \cdots & & 0 & d_n \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{2n+1} b_n \begin{vmatrix} 0 & a_{n-1} & & 0 & & b_{n-1} \\ & & \ddots & & \iddots & \\ 0 & \vdots & & \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{matrix} & & 0 \\ & & \iddots & & \ddots & \\ 0 & c_{n-1} & & & & d_{n-1} \\ c_n & 0 & & 0 & & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{展开 } r_{2n-1}} a_n d_n D_{2n-2} - b_n c_n D_{2n-2}.$$

由此得递推公式:

$$D_{2n} = (a_n d_n - b_n c_n) D_{2n-2},$$

由此得递推公式:

$$D_{2n} = (a_n d_n - b_n c_n) D_{2n-2},$$

即

$$D_{2n} = \prod_{i=2}^{n} (a_i d_i - b_i c_i) D_2.$$

由此得递推公式:

$$D_{2n} = (a_n d_n - b_n c_n) D_{2n-2},$$

即

$$D_{2n} = \prod_{i=2}^{n} (a_i d_i - b_i c_i) D_2.$$

而 $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} = a_1 d_1 - b_1 c_1$, 得

$$D_{2n} = \prod_{i=1}^{n} (a_i d_i - b_i c_i).$$

方法三. 用 Laplace 定理 (定理叙述见本文附录). 选取第 1 行、第 $2n$ 行展开, 注意到由这两行构成的 2 阶子式只有 $\begin{vmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{vmatrix}$ 有可能不为 0, 得

$$D_{2n} = (-1)^{(1+2n)+(1+2n)} \begin{vmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{n-1} & & & 0 & & & b_{n-1} \\ & \ddots & & & & \iddots & \\ & & a_1 & & b_1 & & \\ 0 & & & & & & 0 \\ & & c_1 & & d_1 & & \\ & \iddots & & & & \ddots & \\ c_{n-1} & & & 0 & & & d_{n-1} \end{vmatrix}$$

方法三. 用 Laplace 定理 (定理叙述见本文附录). 选取第 1 行、第 $2n$ 行展开, 注意到由这两行构成的 2 阶子式只有 $\begin{vmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{vmatrix}$ 有可能不为 0, 得

$$D_{2n} = (-1)^{(1+2n)+(1+2n)} \begin{vmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{n-1} & & & 0 & & & b_{n-1} \\ & \ddots & & & & \iddots & \\ & & a_1 & & b_1 & & \\ 0 & & & & & & 0 \\ & & c_1 & & d_1 & & \\ & \iddots & & & & \ddots & \\ c_{n-1} & & & 0 & & & d_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (a_n d_n - b_n c_n) D_{2(n-1)}$$

方法三. 用 Laplace 定理 (定理叙述见本文附录). 选取第 1 行、第 $2n$ 行展开, 注意到由这两行构成的 2 阶子式只有 $\begin{vmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{vmatrix}$ 有可能不为 0, 得

$$\begin{aligned}
D_{2n} &= (-1)^{(1+2n)+(1+2n)} \begin{vmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{n-1} & & & & & b_{n-1} \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ 0 & & c_1 & d_1 & & 0 \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_{n-1} & & & & & d_{n-1} \end{vmatrix} \\
&= (a_n d_n - b_n c_n) D_{2(n-1)} \\
&= \prod_{i=1}^{n} (a_i d_i - b_i c_i).
\end{aligned}$$

## 练习 5.3 (27)

计算 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$.

## 练习 5.3 (27)

计算 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$.

**解:**

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2 \leftrightarrow c_4} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

## 练习 5.3 (27)

计算 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$.

**解:**

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2 \leftrightarrow c_4} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

## 练习 5.3 (27)

计算 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$.

**解:**

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2 \leftrightarrow c_4} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = (a_1 a_4 - b_1 b_4)(a_2 a_3 - b_2 b_3).$$

## 例 5.4

设

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix},$$

$D$ 的 $(i,j)$ 元的代数余子式记作 $A_{ij}$, 求

$$A_{31}+3A_{32}-2A_{33}+2A_{34}.$$

## 例 5.4

设

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix},$$

$D$ 的 $(i,j)$ 元的代数余子式记作 $A_{ij}$, 求

$$A_{31} + 3A_{32} - 2A_{33} + 2A_{34}.$$

**解:** 在任何行列式中, 仅改变 $a_{ij}$ 的取值, 不会改变其对应的代数余子式 $A_{ij}$.

## 例 5.4

设

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix},$$

$D$ 的 $(i,j)$ 元的代数余子式记作 $A_{ij}$, 求

$$A_{31} + 3A_{32} - 2A_{33} + 2A_{34}.$$

**解:** 在任何行列式中, 仅改变 $a_{ij}$ 的取值, 不会改变其对应的代数余子式 $A_{ij}$. 形如

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ * & * & * & * \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

的行列式, 其第 3 行元素的代数余子式, 都是相同的.

所以

$$A_{31}+3A_{32}-2A_{33}+2A_{34}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}=24.$$

所以

$$A_{31}+3A_{32}-2A_{33}+2A_{34}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}=24.$$

☞ 代数余子式 $A_{ij}$, 与 $a_{ij}$ 的取值无关.

## 例 5.5

计算 $D_n = \det(a_{ij})$, 其中 $a_{ij} = |i - j|$.

## 例 5.5

计算 $D_n = \det(a_{ij})$, 其中 $a_{ij} = |i-j|$.

**解:** 由 $a_{ij} = |i-j|$ 得

$$D_n = \det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & n-5 & \cdots & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

## 例 5.5

计算 $D_n = \det(a_{ij})$, 其中 $a_{ij} = |i-j|$.

**解:** 由 $a_{ij} = |i-j|$ 得

$$D_n = \det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & n-5 & \cdots & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=1,2,\cdots]{r_i - r_{i+1}} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[j=2,3,\cdots]{c_j+c_1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -2 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -2 & -2 & -2 & \cdots & 0 \\ n-1 & 2n-3 & 2n-4 & 2n-5 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$$

$$
\xlongequal[j=2,3,\cdots]{c_j+c_1}
\begin{vmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
-1 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
-1 & -2 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
-1 & -2 & -2 & -2 & \cdots & 0 \\
n-1 & 2n-3 & 2n-4 & 2n-5 & \cdots & n-1
\end{vmatrix}
$$

$$
=(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}.
$$

## 例 5.6

设 $n$ 阶行列式 $D = \det(a_{ij})$, 把 $D$ 上下翻转、或逆时针旋转 $90°$、或依副对角线翻转, 依次得

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix},$$

证明 $D_1 = D_2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D$, $D_3 = D$.

证:

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix} \xlongequal[\text{使 } r_n \text{ 换到第一行}]{n-1\text{ 次行的相邻互换}} (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \end{vmatrix}$$

证:

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix} \xlongequal[\text{使 } r_n \text{ 换到第一行}]{n-1\text{ 次行的相邻互换}} (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{使 } r_n \text{ 换到第二行}]{n-2\text{ 次行的相邻互换}} (-1)^{n-1}(-1)^{n-2} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{31} & \cdots & a_{3n} \end{vmatrix} = \cdots$$

证:

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix} \xlongequal[\text{使 } r_n \text{ 换到第一行}]{n-1\text{ 次行的相邻互换}} (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{使 } r_n \text{ 换到第二行}]{n-2\text{ 次行的相邻互换}} (-1)^{n-1}(-1)^{n-2} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{31} & \cdots & a_{3n} \end{vmatrix} = \cdots$$

$$= (-1)^{n-1}(-1)^{n-2}\cdots(-1) \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证:

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix} \xlongequal[\text{使 } r_n \text{ 换到第一行}]{n-1\text{ 次行的相邻互换}} (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{使 } r_n \text{ 换到第二行}]{n-2\text{ 次行的相邻互换}} (-1)^{n-1}(-1)^{n-2} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{31} & \cdots & a_{3n} \end{vmatrix} = \cdots$$

$$= (-1)^{n-1}(-1)^{n-2}\cdots(-1) \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)} D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D.$$

同理可证

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{上下翻转}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

同理可证

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{上下翻转}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D^{\mathrm{T}}$$

同理可证

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{上下翻转}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D^{\mathrm{T}}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D.$$

同理可证

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{上下翻转}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D^{\mathrm{T}}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D.$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{左右翻转}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D_2$$

同理可证

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{上下翻转}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D^{\mathrm{T}}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D.$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{左右翻转}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D_2$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D$$

同理可证

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{上下翻转}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D^{\mathrm{T}}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D.$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{左右翻转}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D_2$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D$$

$$= (-1)^{n(n-1)} D = D.$$

## 例 5.7

计算

$$D_n = \begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & a \end{vmatrix},$$

其中对角线上元素都是 $a$, 未写出的元素都是 0.

## 例 5.7

计算

$$D_n = \begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & a \end{vmatrix},$$

其中对角线上元素都是 $a$, 未写出的元素都是 0.

**解:** 方法一. 将 $r_n$ 作 $n-2$ 次行的相邻对换, 移到第 2 行:

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

## 例 5.7

计算

$$D_n = \begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & a \end{vmatrix},$$

其中对角线上元素都是 $a$, 未写出的元素都是 0.

**解:** 方法一. 将 $r_n$ 作 $n-2$ 次行的相邻对换, 移到第 2 行:

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = (-1)^{n-2} \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \end{vmatrix}$$

将 $c_n$ 作 $n-2$ 次列的相邻对换, 移到第二列:

$$D_n = (-1)^{n-2}(-1)^{n-2}\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

将 $c_n$ 作 $n-2$ 次列的相邻对换, 移到第二列:

$$D_n=(-1)^{n-2}(-1)^{n-2}\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a \end{vmatrix}_{(n-2)}$$

将 $c_n$ 作 $n-2$ 次列的相邻对换, 移到第二列:

$$D_n = (-1)^{n-2}(-1)^{n-2}\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a \end{vmatrix}_{(n-2)}$$

$$= (a^2-1)a^{n-2}.$$

方法二.

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

方法二.

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{展开 } c_1} a \begin{vmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{vmatrix}_{(n-1)} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \boxed{1} \\ a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a & 0 \end{vmatrix}_{(n-1)}$$

方法二.

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{展开 } c_1} a \begin{vmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{vmatrix}_{(n-1)} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \boxed{1} \\ a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a & 0 \end{vmatrix}_{(n-1)}$$

$$\xlongequal{\text{展开 } r_1} a^n + (-1)^{n+1}(-1)^{(n-1)+1} \begin{vmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{vmatrix}_{(n-2)}$$

方法二.

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{展开 } c_1} a \begin{vmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{vmatrix}_{(n-1)} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \boxed{1} \\ a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a & 0 \end{vmatrix}_{(n-1)}$$

$$\xlongequal{\text{展开 } r_1} a^n + (-1)^{n+1}(-1)^{(n-1)+1} \begin{vmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{vmatrix}_{(n-2)}$$

$$= a^n - a^{n-2}.$$

## 例 5.8

计算 $D_{n+1} = \begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$. (提示: 利用范德蒙德行列式的结果. )

**解:** 把行列式上下翻转:

**解:** 把行列式上下翻转: 从第 $n+1$ 行开始, 第 $n+1$ 行经过 $n$ 次相邻对换, 换到第 1 行;

**解:** 把行列式上下翻转: 从第 $n+1$ 行开始, 第 $n+1$ 行经过 $n$ 次相邻对换, 换到第 1 行; 新的第 $n+1$ 行 (原式中的第 $n$ 行) 经 $(n-1)$ 次对换换到第 2 行.

**解:** 把行列式上下翻转: 从第 $n+1$ 行开始, 第 $n+1$ 行经过 $n$ 次相邻对换, 换到第 1 行; 新的第 $n+1$ 行 (原式中的第 $n$ 行) 经 $(n-1)$ 次对换换到第 2 行. 反复此过程, 经 $n+(n-1)+\cdots+1=\frac{n(n+1)}{2}$ 次行交换,

解: 把行列式上下翻转: 从第 $n+1$ 行开始, 第 $n+1$ 行经过 $n$ 次相邻对换, 换到第 1 行; 新的第 $n+1$ 行 (原式中的第 $n$ 行) 经 $(n-1)$ 次对换换到第 2 行. 反复此过程, 经 $n+(n-1)+\cdots+1=\frac{n(n+1)}{2}$ 次行交换, 得

$$D_{n+1}=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix},$$

解: 把行列式上下翻转: 从第 $n+1$ 行开始, 第 $n+1$ 行经过 $n$ 次相邻对换, 换到第 1 行; 新的第 $n+1$ 行 (原式中的第 $n$ 行) 经 $(n-1)$ 次对换换到第 2 行. 反复此过程, 经 $n+(n-1)+\cdots+1=\frac{n(n+1)}{2}$ 次行交换, 得

$$D_{n+1}=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix},$$

此为 $n+1$ 阶范德蒙德行列式.

解: 把行列式上下翻转: 从第 $n+1$ 行开始, 第 $n+1$ 行经过 $n$ 次相邻对换, 换到第 1 行; 新的第 $n+1$ 行 (原式中的第 $n$ 行) 经 $(n-1)$ 次对换换到第 2 行. 反复此过程, 经 $n+(n-1)+\cdots+1=\frac{n(n+1)}{2}$ 次行交换, 得

$$D_{n+1}=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix},$$

此为 $n+1$ 阶范德蒙德行列式.

对照范德蒙德行列式的写法, 记 $a=x_1$, $a-1=x_2$, $\cdots$, $a-(n-1)=x_n$, $a-n=x_{n+1}$.

解: 把行列式上下翻转: 从第 $n+1$ 行开始, 第 $n+1$ 行经过 $n$ 次相邻对换, 换到第 1 行; 新的第 $n+1$ 行 (原式中的第 $n$ 行) 经 $(n-1)$ 次对换换到第 2 行. 反复此过程, 经 $n+(n-1)+\cdots+1=\frac{n(n+1)}{2}$ 次行交换, 得

$$D_{n+1}=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix},$$

此为 $n+1$ 阶范德蒙德行列式.

对照范德蒙德行列式的写法, 记 $a=x_1$, $a-1=x_2$, $\cdots$, $a-(n-1)=x_n$, $a-n=x_{n+1}$. 即

$$x_i=a-(i-1),\ x_j=a-(j-1).$$

所以

$$D_{n+1} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{n+1 \geqslant i > j \geqslant 1} (x_i - x_j)$$

所以

$$
\begin{aligned}
D_{n+1} &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{n+1 \geqslant i > j \geqslant 1} (x_i - x_j) \\
&= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{n+1 \geqslant i > j \geqslant 1} \big[(a - i + 1) - (a - j + 1)\big]
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
D_{n+1} &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{n+1\geqslant i>j\geqslant 1} \left(x_i - x_j\right) \\
&= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{n+1\geqslant i>j\geqslant 1} \left[(a-i+1)-(a-j+1)\right] \\
&= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{n+1\geqslant i>j\geqslant 1} \left[-(i-j)\right]
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
D_{n+1} &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{n+1\geqslant i>j\geqslant 1} (x_i - x_j) \\
&= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{n+1\geqslant i>j\geqslant 1} \left[(a-i+1)-(a-j+1)\right] \\
&= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{n+1\geqslant i>j\geqslant 1} \left[-(i-j)\right] \\
&= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \times (-1)^{n+(n-1)+\cdots+1} \times \prod_{n+1\geqslant i>j\geqslant 1} (i-j)
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
D_{n+1} &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{n+1\geqslant i>j\geqslant 1} (x_i - x_j) \\
&= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{n+1\geqslant i>j\geqslant 1} \left[(a-i+1)-(a-j+1)\right] \\
&= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{n+1\geqslant i>j\geqslant 1} \left[-(i-j)\right] \\
&= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \times (-1)^{n+(n-1)+\cdots+1} \times \prod_{n+1\geqslant i>j\geqslant 1} (i-j) \\
&= \prod_{n+1\geqslant i>j\geqslant 1} (i-j).
\end{aligned}
$$

# Outline

## 定义 6.1 ($k$ 阶子式, $k$ 阶余子式)

在一个 $n$ 阶行列式 $D$ 中任意选定 $k$ 行 $k$ 列 $(k \leqslant n)$.

- 位于这些行与列的交点上的 $k^2$ 个元素按原来的次序组成的一个 $k$ 阶行列式 $M$, 称为行列式 $D$ 的一个 $k$ **阶子式**.

## 定义 6.1 ($k$ 阶子式, $k$ 阶余子式)

在一个 $n$ 阶行列式 $D$ 中任意选定 $k$ 行 $k$ 列 ($k \leqslant n$).

- 位于这些行与列的交点上的 $k^2$ 个元素按原来的次序组成的一个 $k$ 阶行列式 $M$, 称为行列式 $D$ 的一个 $k$ **阶子式**.
- 在 $D$ 中划去这 $k$ 行 $k$ 列后, 余下的元素按原来的次序组成的 $n-k$ 阶行列式 $M'$, 称为 $k$ 级子式 $M$ 的**余子式**.

**定义 6.1 ($k$ 阶子式, $k$ 阶余子式)**

在一个 $n$ 阶行列式 $D$ 中任意选定 $k$ 行 $k$ 列 $(k \leqslant n)$.

- 位于这些行与列的交点上的 $k^2$ 个元素按原来的次序组成的一个 $k$ 阶行列式 $M$, 称为行列式 $D$ 的一个 $k$ **阶子式**.
- 在 $D$ 中划去这 $k$ 行 $k$ 列后, 余下的元素按原来的次序组成的 $n-k$ 阶行列式 $M'$, 称为 $k$ 级子式 $M$ 的**余子式**.

从定义知, $M$ 也是 $M'$ 的余子式, 所以 $M$ 和 $M'$ 可以称为 $D$ 的一对互余的子式.

# 例 6.2

在 4 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

中选定第 1、3 行, 第 2、4 列得到一个 2 阶子式

## 例 6.2

在 4 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

中选定第 1、3 行, 第 2、4 列得到一个 2 阶子式

## 例 6.2

在 4 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

中选定第 1、3 行, 第 2、4 列得到一个 2 阶子式

## 例 6.2

在 4 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

中选定第 1、3 行, 第 2、4 列得到一个 2 阶子式

$$M = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

## 例 6.2

在 4 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

中选定第 1、3 行, 第 2、4 列得到一个 2 阶子式

$$M = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$M$ 的余子式为

$$M' = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

## 例 6.3

在 5 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

## 例 6.3

在 5 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

中

$$M = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{42} & a_{43} & a_{45} \end{vmatrix} \quad 与 \quad M' = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{51} & a_{54} \end{vmatrix}$$

是一对互余的余子式.

## 定义 6.4

设 $D$ 的 $k$ 级子式 $M$ 在 $D$ 中所在的行、列指标分别是 $i_1, i_2, \cdots, i_k; j_1, j_2, \cdots, j_k$.

## 定义 6.4

设 $D$ 的 $k$ 级子式 $M$ 在 $D$ 中所在的行、列指标分别是 $i_1, i_2, \cdots, i_k; j_1, j_2, \cdots, j_k$. 则 $M$ 的余子式 $M'$ 前面加上符号 $(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}$ 后称为 $M$ 的**代数余子式**.

## 定义 6.4

设 $D$ 的 $k$ 级子式 $M$ 在 $D$ 中所在的行、列指标分别是 $i_1, i_2, \cdots, i_k$; $j_1, j_2, \cdots, j_k$. 则 $M$ 的余子式 $M'$ 前面加上符号 $(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}$ 后称为 $M$ 的**代数余子式**. 记为

$$A \triangleq (-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)} M'.$$

## 定义 6.4

设 $D$ 的 $k$ 级子式 $M$ 在 $D$ 中所在的行、列指标分别是 $i_1, i_2, \cdots, i_k; j_1, j_2, \cdots, j_k$. 则 $M$ 的余子式 $M'$ 前面加上符号 $(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}$ 后称为 $M$ 的**代数余子式**. 记为

$$A \triangleq (-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)} M'.$$

## 定理 6.5 (Laplace 定理)

*行列式 $D$ 中任意取定 $k$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ 个行. 由这 $k$ 行元素所组成的一切 $k$ 级子式与它们的代数余子式的乘积的和, 等于行列式 $D$.*

## 定义 6.4

设 $D$ 的 $k$ 级子式 $M$ 在 $D$ 中所在的行、列指标分别是 $i_1, i_2, \cdots, i_k; j_1, j_2, \cdots, j_k$. 则 $M$ 的余子式 $M'$ 前面加上符号 $(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}$ 后称为 $M$ 的**代数余子式**. 记为

$$A \triangleq (-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)} M'.$$

## 定理 6.5 (Laplace 定理)

*行列式 $D$ 中任意取定 $k$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ 个行. 由这 $k$ 行元素所组成的一切 $k$ 级子式与它们的代数余子式的乘积的和, 等于行列式 $D$.*

设 $D$ 中取定 $k$ 行后得到的子式为 $M_1, M_2, \cdots, M_t$, 它们的代数余子式分别为 $A_1, A_2, \cdots, A_t$,

## 定义 6.4

设 $D$ 的 $k$ 级子式 $M$ 在 $D$ 中所在的行、列指标分别是 $i_1, i_2, \cdots, i_k; j_1, j_2, \cdots, j_k$. 则 $M$ 的余子式 $M'$ 前面加上符号 $(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}$ 后称为 $M$ 的**代数余子式**. 记为

$$A \triangleq (-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)} M'.$$

## 定理 6.5 (Laplace 定理)

*行列式 $D$ 中任意取定 $k$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ 个行. 由这 $k$ 行元素所组成的一切 $k$ 级子式与它们的代数余子式的乘积的和, 等于行列式 $D$.*

设 $D$ 中取定 $k$ 行后得到的子式为 $M_1, M_2, \cdots, M_t$, 它们的代数余子式分别为 $A_1, A_2, \cdots, A_t$, 则

$$D = M_1A_1 + M_2A_2 + \cdots + M_tA_t.$$

## 定义 6.4

设 $D$ 的 $k$ 级子式 $M$ 在 $D$ 中所在的行、列指标分别是 $i_1, i_2, \cdots, i_k; j_1, j_2, \cdots, j_k$. 则 $M$ 的余子式 $M'$ 前面加上符号 $(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}$ 后称为 $M$ 的**代数余子式**. 记为

$$A \triangleq (-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)} M'.$$

## 定理 6.5 (Laplace 定理)

*行列式 $D$ 中任意取定 $k$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ 个行. 由这 $k$ 行元素所组成的一切 $k$ 级子式与它们的代数余子式的乘积的和, 等于行列式 $D$.*

设 $D$ 中取定 $k$ 行后得到的子式为 $M_1, M_2, \cdots, M_t$, 它们的代数余子式分别为 $A_1, A_2, \cdots, A_t$, 则

$$D = M_1A_1 + M_2A_2 + \cdots + M_tA_t.$$

例如, 在行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

中取定第一、二行, 得到六个 2 阶子式:

$$M_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix},\qquad M_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix},\qquad M_3=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$M_4=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix},\qquad M_5=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix},\qquad M_6=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

它们对应的代数余子式为

$$\begin{aligned} A_1 &= (-1)^{(1+2)+(1+2)}M_1' = M_1', & A_2 &= (-1)^{(1+2)+(1+3)}M_2' = -M_2', \\ A_3 &= (-1)^{(1+2)+(1+4)}M_3' = M_3', & A_4 &= (-1)^{(1+2)+(2+3)}M_4' = M_4', \\ A_5 &= (-1)^{(1+2)+(2+4)}M_5' = -M_5', & A_6 &= (-1)^{(1+2)+(3+4)}M_6' = M_6'. \end{aligned}$$

根据拉普拉斯定理

$$
\begin{aligned}
D &= M_1A_1 + M_2A_2 + \cdots + M_6A_6 \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&\quad + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&\quad - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (-1) \times (-8) - 2 \times (-3) + 1 \times (-1) + 5 \times 1 - 6 \times 3 + (-7) \times 1 \\
&= 8 + 6 - 1 + 5 - 18 - 7 = -7.
\end{aligned}
$$