

概率论与数理统计

第一章 随机事件与概率

黄正华

Email: huangzh@whu.edu.cn

武汉大学 数学与统计学院

2012 年 9 月 3 日



目录

- 1 排列组合基本知识
- 2 随机试验
- 3 样本空间、随机事件
- 4 频率与概率
- 5 等可能概型
- 6 条件概率
- 7 独立性

概率论的产生

- 概率论产生于十七世纪, 是由帕斯卡、费马共同建立的.
- 1654 年, 赌徒梅累向帕斯卡提出问题: “两个赌徒相约赌若干局, 谁先赢 m 局就算赢, 全部赌本就归谁. 但是当其中一个人赢了 $a (a < m)$ 局, 另一个人赢了 $b (b < m)$ 局的时候, 赌博中止. 问: 赌本应该如何分法才合理?”.
- 1657 年, 惠更斯尝试自己解决这一问题, 写成了最早的概率论著作《论机会游戏的计算》.

概率论的产生

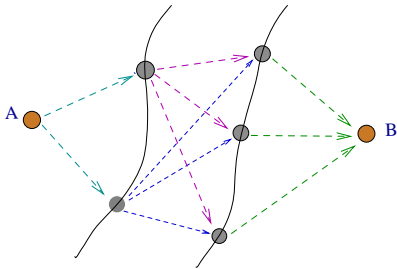
- 帕斯卡、费马(Fermat)和惠更斯之后, 第一个对概率论给予真正注意的是雅各布第一·伯努利. 他的《猜度术》一书, 包含了大数定律的叙述;
- 首先将概率论建立在坚固的数学基础上的是拉普拉斯: 1812年,《概率的解析理论》.
- 概率论大量应用到国民经济、工农业生产及各学科领域. 许多兴起的应用数学, 如信息论、对策论、排队论、控制论等, 都是以概率论作为基础的.

► Fermat

两条计数原理

乘法原理： 完成一项工作有 m 个步骤;
完成第 i 个步骤有 n_i 种不同的方法.
则完成这项工作的方法数总共为

$$n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_m.$$



两条计数原理

加法原理： 完成一项工作有 m 种方式;
第 i 种方式有 n_i 种方法.
则完成这项工作的方法数总共为

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_m.$$

排列

Example 1

“从 10 个人中任意抽取 7 个人排成一列”.

完成这项工作可分为 7 个步骤:

10	9	8	7	6	5	4
----	---	---	---	---	---	---

由乘法原理, 完成这件事有

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4$$

种不同的方法. 这是一个排列问题.

排列

Example 1

“从 10 个人中任意抽取 7 个人排成一列”.

完成这项工作可分为 7 个步骤:

10	9	8	7	6	5	4
----	---	---	---	---	---	---

由乘法原理, 完成这件事有

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4$$

种不同的方法. 这是一个排列问题. 通常将结果记为:

$$A_{10}^7 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4.$$

Definition 2 (Permutations, Arrangements)

从 n 个不同的元素中, 任取 r 个元素按次序排列, 得到的排列数为

$$\begin{aligned} & A_n^r \text{ 或者 } P_n^r \\ &= n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \cdots \times (n-r+1) \\ &= \frac{n!}{(n-r)!}. \end{aligned} \tag{1}$$

Example 3

“从 10 个人中任意抽取 7 个人去参加劳动”.

这是一个组合问题. 设结果为 X . 如何计算呢?

Example 3

“从 10 个人中任意抽取 7 个人去参加劳动”.

这是一个组合问题. 设结果为 X . 如何计算呢?

完成前一个问题“从 10 个人中任意抽取 7 个人排成一列”, 可以分为两个步骤:

Example 3

“从 10 个人中任意抽取 7 个人去参加劳动”.

这是一个组合问题. 设结果为 X . 如何计算呢?

完成前一个问题“从 10 个人中任意抽取 7 个人排成一列”, 可以分为两个步骤:

- (i) 从 10 个人中任取 7 个人: 有 X 种取法;
- (ii) 再将这 7 个人排成一列: 有 $7!$ 种方法.

Example 3

“从 10 个人中任意抽取 7 个人去参加劳动”.

这是一个组合问题. 设结果为 X . 如何计算呢?

完成前一个问题“从 10 个人中任意抽取 7 个人排成一列”, 可以分为两个步骤:

(i) 从 10 个人中任取 7 个人: 有 X 种取法;

(ii) 再将这 7 个人排成一列: 有 $7!$ 种方法.

所以,

$$A_{10}^7 = X \times 7!, \quad (2)$$

$$X = \frac{A_{10}^7}{7!} = \frac{10!}{3! 7!} \triangleq C_{10}^7. \quad (3)$$

Definition 4 (Combinations)

从 n 个不同的元素中, 不放回地取 r 个元素, 组成的组合总数为

$$\begin{aligned} C_n^r \text{ 或者 } \binom{n}{r} \\ &= \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \cdots \times (n-r+1)}{r!} \\ &= \frac{n!}{(n-r)! r!}. \end{aligned} \quad (4)$$

易知,

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \quad (5)$$

Example 5

“填写体育彩票号码”.

10	10	10	10	10	10	10
----	----	----	----	----	----	----

有 7 个步骤, 每一步有 10 种写法. 由乘法原理, 总共有 10^7 种不同的写法.

随机试验

下面给出一些“专有名词”的介绍, 谨作了解.

随机试验(Random experiment)的特点:

- (i) 可重复性;
- (ii) 先验性;
- (iii) 不确定性.

比如, 掷骰子: 

(以下均以掷骰子为例.)

样本空间、随机事件

I-1 **样本空间**(Sampling space): 随机试验的所有可能结果组成的集合.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

样本空间、随机事件

I-1 样本空间(Sampling space): 随机试验的所有可能结果组成的集合.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

I-2 样本点(Sampling point): 随机试验的每个结果. 1, 2, 3, 4, 5, 6 是六个样本点.

样本空间、随机事件

I-1 样本空间(Sampling space): 随机试验的所有可能结果组成的集合.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

I-2 样本点(Sampling point): 随机试验的每个结果. 1, 2, 3, 4, 5, 6 是六个样本点.

I-3 随机事件(Random event): 符合某个“判断”的试验结果.

样本空间、随机事件

I-1 样本空间(Sampling space): 随机试验的所有可能结果组成的集合.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

I-2 样本点(Sampling point): 随机试验的每个结果. 1, 2, 3, 4, 5, 6 是六个样本点.

I-3 随机事件(Random event): 符合某个“判断”的试验结果.

EX a. $A = \{\text{出现点数 } 5\} = \{5\}$.

样本空间、随机事件

I-1 样本空间(Sampling space): 随机试验的所有可能结果组成的集合.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

I-2 样本点(Sampling point): 随机试验的每个结果. 1, 2, 3, 4, 5, 6 是六个样本点.

I-3 随机事件(Random event): 符合某个“判断”的试验结果.

EX a. $A = \{\text{出现点数 } 5\} = \{5\}$.

EX b. $B = \{\text{出现奇数}\} = \{1, 3, 5\}$.

样本空间、随机事件

I-1 样本空间(Sampling space): 随机试验的所有可能结果组成的集合.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

I-2 样本点(Sampling point): 随机试验的每个结果. 1, 2, 3, 4, 5, 6 是六个样本点.

I-3 随机事件(Random event): 符合某个“判断”的试验结果.

EX a. $A = \{\text{出现点数 } 5\} = \{5\}.$

EX b. $B = \{\text{出现奇数}\} = \{1, 3, 5\}.$

EX c. $C = \{\text{出现偶数}\} = \{2, 4, 6\}.$

样本空间、随机事件

I-1 样本空间(Sampling space): 随机试验的所有可能结果组成的集合.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

I-2 样本点(Sampling point): 随机试验的每个结果. 1, 2, 3, 4, 5, 6 是六个样本点.

I-3 随机事件(Random event): 符合某个“判断”的试验结果.

EX a. $A = \{\text{出现点数 } 5\} = \{5\}.$

EX b. $B = \{\text{出现奇数}\} = \{1, 3, 5\}.$

EX c. $C = \{\text{出现偶数}\} = \{2, 4, 6\}.$

EX d. $D = \{\text{大于 } 3 \text{ 点}\} = \{4, 5, 6\}.$

样本空间、随机事件

I-4 基本事件 与 复杂事件:

样本空间、随机事件

I-4 基本事件 与 复杂事件:

- i 基本事件, 如 $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$ 是六个基本事件;

样本空间、随机事件

I-4 基本事件 与 复杂事件:

- i 基本事件, 如 $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$ 是六个基本事件;
- ii 复杂事件, 如 $B = \{\text{出现奇数}\} = \{1\} \cup \{3\} \cup \{5\}$ 由三个基本事件组成.

样本空间、随机事件

I-4 基本事件 与 复杂事件:

- i 基本事件, 如 $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$ 是六个基本事件;
- ii 复杂事件, 如 $B = \{\text{出现奇数}\} = \{1\} \cup \{3\} \cup \{5\}$ 由三个基本事件组成.

I-5 必然事件 与 不可能事件:

样本空间、随机事件

I-4 基本事件 与 复杂事件:

- i 基本事件, 如 $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$ 是六个基本事件;
- ii 复杂事件, 如 $B = \{\text{出现奇数}\} = \{1\} \cup \{3\} \cup \{5\}$ 由三个基本事件组成.

I-5 必然事件 与 不可能事件:

- i 必然事件(Certain event) Ω , 如 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

样本空间、随机事件

I-4 基本事件 与 复杂事件:

- i 基本事件, 如 $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$ 是六个基本事件;
- ii 复杂事件, 如 $B = \{\text{出现奇数}\} = \{1\} \cup \{3\} \cup \{5\}$ 由三个基本事件组成.

I-5 必然事件 与 不可能事件:

- i 必然事件(Certain event) Ω , 如 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
- ii 不可能事件(Impossible event) \emptyset , 如 $\{7\}$.

事件的关系与运算 —— 借助集合的观念

(1) 包含

$A = \{5\}$, $B = \{1, 3, 5\}$. 记为 $A \subset B$,
称事件 A 包含于事件 B , 或 B 包含 A .
含义: “ A 发生则必导致 B 发生”.

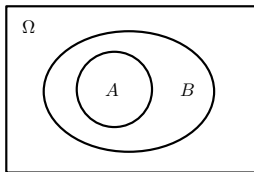


图: $A \subset B$

事件的关系与运算 —— 借助集合的观念

(1) 包含

$A = \{5\}$, $B = \{1, 3, 5\}$. 记为 $A \subset B$,
称事件 A 包含于事件 B , 或 B 包含 A .
含义: “ A 发生则必导致 B 发生”.

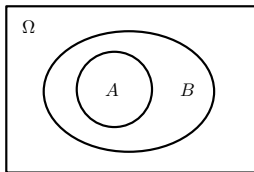


图: $A \subset B$

(2) 相等

“ $A = B$ ” \Leftrightarrow “ $A \subset B$ 且 $B \subset A$ ”.

事件的关系与运算

(3) 和事件

$A \cup B$: A 或 B 发生, 即“至少有一个发生”.

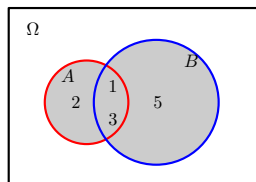


图: $A \cup B$

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5\}$. 则 $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$.

事件的关系与运算

进一步有

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \triangleq \bigcup_{i=1}^n A_i; \quad (6)$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots \triangleq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i. \quad (7)$$

事件的关系与运算

(4) 积事件

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\} \triangleq AB.$$

$A \cap B$ 意为: “ A 发生并且 B 发生”, “ A, B 同时发生”.

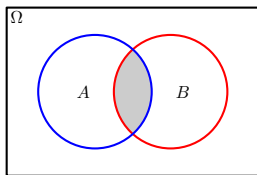


图: $A \cap B$

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5\}$. 则 $A \cap B = \{1, 3\}$.

类似地有, $\bigcap_{i=1}^n A_i$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

事件的关系与运算

(5) 差事件(Difference of events)

$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$: A 发生且 B 不发生.

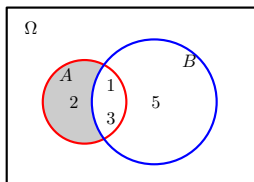


图: $A - B$

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5\}$. 则 $A - B = \{2\}$.

事件的关系与运算

- (6) **互不相容事件**(互斥事件, Incompatible events) $A \cap B = \emptyset$.
意为: 不可能同时发生.

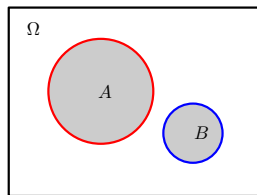


图: $A \cap B = \emptyset$

如: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{5, 6\}$.

事件的关系与运算

Definition 6 (两两互不相容)

对事件 A_1, A_2, \dots, A_n , 若

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j$$

则称 A_1, A_2, \dots, A_n 两两互不相容.

事件的关系与运算

(7) 对立事件(逆事件, Opposite events)

$A \cup B = \Omega$, 且 $A \cap B = \emptyset$. 记为 $B = \bar{A}$.

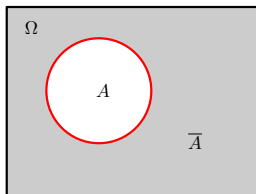


图: $\bar{A} = \Omega - A$

如: $A = \{1, 2, 3\}$, 则 $\bar{A} = \{4, 5, 6\}$.

事件的关系与运算

(7) 对立事件(逆事件, Opposite events)

$A \cup B = \Omega$, 且 $A \cap B = \emptyset$. 记为 $B = \bar{A}$.

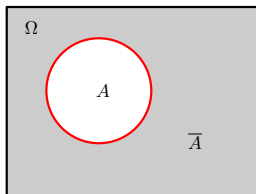


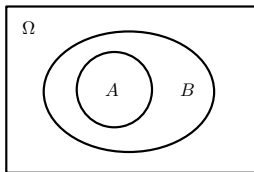
图: $\bar{A} = \Omega - A$

如: $A = \{1, 2, 3\}$, 则 $\bar{A} = \{4, 5, 6\}$. 形式上有:

$$\bar{A} = \Omega - A, \quad \Omega = \bar{A} \cup A, \quad \bar{A} \cap A = \emptyset.$$

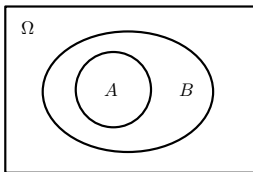
注意事项

(1) $A \subset B$, 则 $A \cup B = B$; $A \cap B = A$ (或 $AB = A$).



注意事项

(1) $A \subset B$, 则 $A \cup B = B$; $A \cap B = A$ (或 $AB = A$).

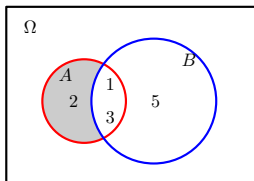


(2) $A \cup A = A$, $A \cup A \cup A = A, \dots$

$A \cap A = A$, $A \cap A \cap A = A, \dots$

事件的关系与运算

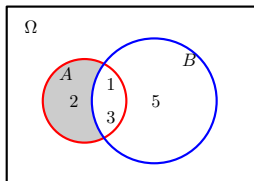
(3) $A - B = A \cap \overline{B} = A\overline{B}$



事件的关系与运算

(4) 一个常用的转化式:

$$\begin{aligned} A \cup B &= (A - B) \cup B \\ &= (A - AB) \cup B \end{aligned} \tag{8}$$



或者记为

$$A \cup B = A\overline{B} \cup B$$

事件的关系与运算

(5) 区分“逆事件(对立事件)”和“互斥事件(互不相容事件)”:

- A 的逆事件事实上是 A 的否事件, 如同“余集”的概念.
- “逆事件”是“互斥事件”的一个特例.

运算律

交换律: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$.

结合律: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$$

分配律: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

De Morgan 律: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

De Morgan 律, 又称“对偶律”(Dual law). 对偶律是广泛存在的.

Example 7

设 $A_i = \{\text{第 } i \text{ 枪击中目标}\}$, $i = 1, 2, 3$. 用集合表示下列事件:

- 1) 仅有第一枪击中;
- 2) 第一枪击中;
- 3) 仅有一枪击中;
- 4) 三枪均未击中;
- 5) 至少有一枪击中.

Example 7

设 $A_i = \{\text{第 } i \text{ 枪击中目标}\}$, $i = 1, 2, 3$. 用集合表示下列事件:

- 1) 仅有第一枪击中;
- 2) 第一枪击中;
- 3) 仅有一枪击中;
- 4) 三枪均未击中;
- 5) 至少有一枪击中.

解: (1) $A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$.

或者 $A_1 \overline{A_2} \overline{A_3}$.

Example 7

设 $A_i = \{\text{第 } i \text{ 枪击中目标}\}$, $i = 1, 2, 3$. 用集合表示下列事件:

- 1) 仅有第一枪击中; $A_1 \overline{A_2} \overline{A_3}$.
- 2) 第一枪击中;
- 3) 仅有一枪击中;
- 4) 三枪均未击中;
- 5) 至少有一枪击中.

解: (2) A_1 .

Example 7

设 $A_i = \{\text{第 } i \text{ 枪击中目标}\}$, $i = 1, 2, 3$. 用集合表示下列事件:

- 1) 仅有第一枪击中; $A_1 \overline{A_2} \overline{A_3}$.
- 2) 第一枪击中; A_1 .
- 3) 仅有一枪击中;
- 4) 三枪均未击中;
- 5) 至少有一枪击中.

解: (3) $A_1 \overline{A_2} \overline{A_3} \cup \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} \cup \overline{A_1} \overline{A_2} A_3$.

Example 7

设 $A_i = \{\text{第 } i \text{ 枪击中目标}\}$, $i = 1, 2, 3$. 用集合表示下列事件:

- 1) 仅有第一枪击中; $A_1 \overline{A_2} \overline{A_3}$.
- 2) 第一枪击中; A_1 .
- 3) 仅有一枪击中; $A_1 \overline{A_2} \overline{A_3} \cup \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} \cup \overline{A_1} \overline{A_2} A_3$.
- 4) 三枪均未击中;
- 5) 至少有一枪击中.

解: (4) $\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3}$.

Example 7

设 $A_i = \{\text{第 } i \text{ 枪击中目标}\}$, $i = 1, 2, 3$. 用集合表示下列事件:

- 1) 仅有第一枪击中; $A_1 \overline{A_2} \overline{A_3}$.
- 2) 第一枪击中; A_1 .
- 3) 仅有一枪击中; $A_1 \overline{A_2} \overline{A_3} \cup \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} \cup \overline{A_1} \overline{A_2} A_3$.
- 4) 三枪均未击中; $\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3}$.
- 5) 至少有一枪击中.

解: (5) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

Example 8

化简下列表达式:

(1) $(A \cup B)(B \cup C)$

(2) $(A \cup B)(A \cup \overline{B})$

(3) $(A \cup B)(A \cup \overline{B})(\overline{A} \cup B)$

(4) $(A \cup B)(A \cup \overline{B})(\overline{A} \cup B)(\overline{A} \cup \overline{B})$

Example 8

化简下列表达式:

(1) $(A \cup B)(B \cup C)$

(2) $(A \cup B)(A \cup \overline{B})$

(3) $(A \cup B)(A \cup \overline{B})(\overline{A} \cup B)$

(4) $(A \cup B)(A \cup \overline{B})(\overline{A} \cup B)(\overline{A} \cup \overline{B})$

解:

$$\begin{aligned}(1) \quad (A \cup B)(B \cup C) &= (B \cup A)(B \cup C) \quad (\text{交换律}) \\ &= B \cup (A \cap C) \quad (\text{分配律}) \\ &= B \cup AC.\end{aligned}$$

Example 8

化简下列表达式:

$$(1) (A \cup B)(B \cup C) \qquad \qquad \qquad = B \cup AC.$$

$$(2) (A \cup B)(A \cup \overline{B})$$

$$(3) (A \cup B)(A \cup \overline{B})(\overline{A} \cup B)$$

$$(4) (A \cup B)(A \cup \overline{B})(\overline{A} \cup B)(\overline{A} \cup \overline{B})$$

解:

$$(2) \quad (A \cup B)(A \cup \overline{B}) = A \cup (B \cap \overline{B}) \quad (\text{分配律})$$

$$= A \cup \emptyset$$

$$= A.$$

Example 8

化简下列表达式:

$$(1) (A \cup B)(B \cup C) \qquad \qquad \qquad = B \cup AC.$$

$$(2) (A \cup B)(A \cup \overline{B}) \qquad \qquad \qquad = A.$$

$$(3) (A \cup B)(A \cup \overline{B})(\overline{A} \cup B)$$

$$(4) (A \cup B)(A \cup \overline{B})(\overline{A} \cup B)(\overline{A} \cup \overline{B})$$

解:

$$\begin{aligned}(3) \quad (A \cup B)(A \cup \overline{B})(\overline{A} \cup B) &= A(\overline{A} \cup B) \\ &= A\overline{A} \cup AB \quad (\text{分配律}) \\ &= \emptyset \cup AB \\ &= AB.\end{aligned}$$

Example 8

化简下列表达式:

$$(1) (A \cup B)(B \cup C) \qquad \qquad \qquad = B \cup AC.$$

$$(2) (A \cup B)(A \cup \overline{B}) \qquad \qquad \qquad = A.$$

$$(3) (A \cup B)(A \cup \overline{B})(\overline{A} \cup B) \qquad \qquad \qquad = AB.$$

$$(4) (A \cup B)(A \cup \overline{B})(\overline{A} \cup B)(\overline{A} \cup \overline{B})$$

解:

$$\begin{aligned} (4) \quad & (A \cup B)(A \cup \overline{B})(\overline{A} \cup B)(\overline{A} \cup \overline{B}) \\ & = AB(\overline{A} \cup \overline{B}) \\ & = AB\overline{A} \cup AB\overline{B} \quad (\text{分配律}) \\ & = BA\overline{A} \cup A(B\overline{B}) \quad (\text{交换律, 结合律}) \\ & = \emptyset. \end{aligned}$$

频率(frequency)

$$f_n(A) = \frac{\text{事件 } A \text{ 发生的次数}}{\text{试验的总次数}} = \frac{n_A}{n} .$$

基本性质:

- 1) $0 \leq f_n(A) \leq 1$;
- 2) $f_n(\Omega) = 1$;
- 3) 若 A_1, A_2, \dots, A_k 两两互不相容, 则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \dots + f_n(A_k).$$

概率(probability)

随机事件 A 发生的可能性的的大小, 记为 $P(A)$.

概率的公理化定义:

- 1) 非负性: $P(A) \geq 0$;
- 2) 规范性: $P(\Omega) = 1$;
- 3) 可列可加性: 若 A_1, A_2, \dots 两两互不相容, 则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots.$$

可列 —— countable, 无穷的一种.

“不可列”, 比如区间 $[0, 1]$ 内的有理数.

概率是频率的理论值

Example 9

考虑“抛硬币”试验. 记硬币正面为 H , 反面为 T .

试验者	n	n_H	$f_n(H)$
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
K·皮尔逊	12000	6019	0.5016
K·皮尔逊	24000	12012	0.5005

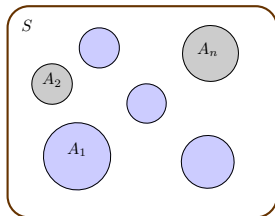
概率的重要性质

性质 i $P(\emptyset) = 0$.

性质 ii (有限可加性) 若 A_1, A_2, \dots, A_k 两两互不相容, 则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k). \quad (9)$$

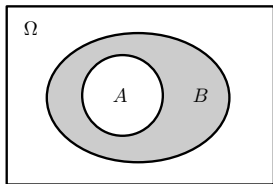
特别地, A, B 互不相容, 则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.



性质 iii 若 $A \subset B$, 则

$$P(B - A) = P(B) - P(A); \quad (10)$$

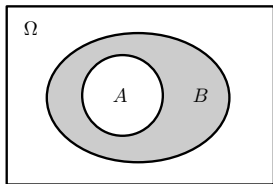
$$P(B) \geqslant P(A). \quad (11)$$



性质 iii 若 $A \subset B$, 则

$$P(B - A) = P(B) - P(A); \quad (10)$$

$$P(B) \geq P(A). \quad (11)$$



Proof.

$$(1) \because A \subset B, \therefore B = A \cup (B - A).$$

又 $A \cap (B - A) = \emptyset$, 由“有限可加性”,

$$P(B) = P(A \cup (B - A)) = P(A) + P(B - A).$$

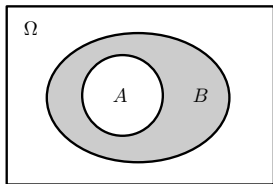
$$\therefore P(B - A) = P(B) - P(A).$$



性质 iii 若 $A \subset B$, 则

$$P(B - A) = P(B) - P(A); \quad (10)$$

$$P(B) \geq P(A). \quad (11)$$



Proof.

(2) 由概率的非负性, $P(B - A) \geq 0$, 即 $P(B) - P(A) \geq 0$.

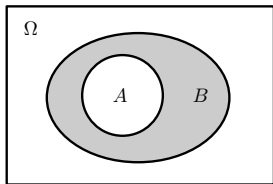
$\therefore P(B) \geq P(A)$.



性质 iii 若 $A \subset B$, 则

$$P(B - A) = P(B) - P(A); \quad (10)$$

$$P(B) \geqslant P(A). \quad (11)$$



Proof.

问: $P(A - B) = ?$



概率的重要性质

性质 iv $P(A) \leq 1$.

概率的重要性质

性质 iv $P(A) \leq 1$.

Proof.

$$\because A \subset \Omega, P(\Omega) = 1.$$

$$\therefore P(A) \leq P(\Omega) = 1.$$



概率的重要性质

性质 iv $P(A) \leq 1$.

Proof.

$$\because A \subset \Omega, P(\Omega) = 1.$$

$$\therefore P(A) \leq P(\Omega) = 1.$$



性质 iiv (逆事件的概率) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

概率的重要性质

性质 iv $P(A) \leq 1$.

Proof.

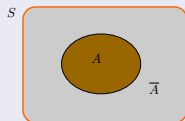
$$\because A \subset \Omega, P(\Omega) = 1.$$

$$\therefore P(A) \leq P(\Omega) = 1.$$



性质 iiv (逆事件的概率) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Proof.



$$\because 1 = P(\Omega) = P(\bar{A} \cup A) = P(\bar{A}) + P(A).$$

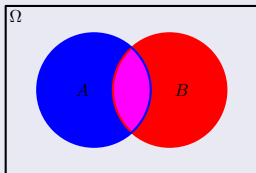
$$\therefore P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$



性质 vi (加法公式)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (12)$$

Proof.



$$\because A \cup B = (A - B) \cup B = (A - AB) \cup B,$$

又 $(A - AB) \cap B = \emptyset$, 且 $AB \subset A$, 得

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P((A - AB) \cup B) \\ &= P(A - AB) + P(B) \\ &= P(A) - P(AB) + P(B). \end{aligned} \quad (13)$$



加法公式的推广:

$$\begin{aligned}P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = & P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\& - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) \\& + P(A_1A_2A_3).\end{aligned}\quad (14)$$

$$\begin{aligned}P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = & \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_iA_j) \\& + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_iA_jA_k) \\& + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2 \cdots A_n).\end{aligned}\quad (15)$$

注 “有限可加性” 是“加法公式”的特例.

Example 10

设 $A \subset B$, $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.3$, 求

- (1) $P(\overline{A})$, $P(\overline{B})$;
- (2) $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$;
- (3) $P(B - A)$, $P(A - B)$.

Example 10

设 $A \subset B$, $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.3$, 求

(1) $P(\overline{A})$, $P(\overline{B})$;

(2) $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$;

(3) $P(B - A)$, $P(A - B)$.

解: (1) $P(\overline{A}) = 0.8$, $P(\overline{B}) = 0.7$;

Example 10

设 $A \subset B$, $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.3$, 求

(1) $P(\overline{A})$, $P(\overline{B})$;

(2) $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$;

(3) $P(B - A)$, $P(A - B)$.

解: (2) 由 $A \subset B$, 得

$$P(A \cup B) = P(B) = 0.3,$$

$$P(A \cap B) = P(A) = 0.2;$$

Example 10

设 $A \subset B$, $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.3$, 求

(1) $P(\overline{A})$, $P(\overline{B})$;

(2) $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$;

(3) $P(B - A)$, $P(A - B)$.

解: (3) 由 $A \subset B$, 得

$$P(B - A) = P(B) - P(A) = 0.1,$$

$$\begin{aligned} P(A - B) &= P(A \cap \overline{B}) = P(A \cap \overline{A \cup (B - A)}) \\ &= P(A \cap \overline{A} \cap \overline{B - A}) = P(\emptyset) = 0. \end{aligned}$$

或者, 由 $A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$, 假设 $A - B \neq \emptyset$, 则 $\exists x_0 \in A$ 且 $x_0 \notin B$, 这与 $A \subset B$ 矛盾. 得 $A - B = \emptyset$.

Example 11

设 $A \cap B = \emptyset$, $P(A) = a$, $P(B) = b$. 求

(1) $P(A \cup B)$;

(2) $P(\overline{A} \cup B)$;

(3) $P(\overline{A}B)$;

(4) $P(\overline{A} \overline{B})$.

Example 11

设 $A \cap B = \emptyset$, $P(A) = a$, $P(B) = b$. 求

(1) $P(A \cup B)$;

(2) $P(\overline{A} \cup B)$;

(3) $P(\overline{A}B)$;

(4) $P(\overline{A} \overline{B})$.

解: (1) 由 $A \cap B = \emptyset$, 得

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = a + b;$$

Example 11

设 $A \cap B = \emptyset$, $P(A) = a$, $P(B) = b$. 求

(1) $P(A \cup B)$;

(2) $P(\overline{A} \cup B)$;

(3) $P(\overline{A}B)$;

(4) $P(\overline{A} \overline{B})$.

解: (2) 由 $A \cap B = \emptyset$, 知 $B \subset \overline{A}$.

$$P(\overline{A} \cup B) = P(\overline{A}) = 1 - a;$$

事实上, $A \cap B = \emptyset$, 则 $\forall x \in B$, 有 $x \notin A$.

即 $x \in \overline{A}$. 所以 $B \subset \overline{A}$.

Example 11

设 $A \cap B = \emptyset$, $P(A) = a$, $P(B) = b$. 求

(1) $P(A \cup B)$;

(2) $P(\overline{A} \cup B)$;

(3) $P(\overline{A}B)$;

(4) $P(\overline{A} \overline{B})$.

解: (3) 由 $A \cap B = \emptyset$, 知 $B \subset \overline{A}$.

$$P(\overline{A}B) = P(B) = b;$$

Example 11

设 $A \cap B = \emptyset$, $P(A) = a$, $P(B) = b$. 求

(1) $P(A \cup B)$;

(2) $P(\overline{A} \cup B)$;

(3) $P(\overline{A}B)$;

(4) $P(\overline{A} \overline{B})$.

解: (4) $P(\overline{A} \overline{B}) = P(\overline{A \cup B})$ (摩根律)

$$= 1 - P(A \cup B) = 1 - a - b.$$

等可能概型(古典概型, Classical probability)

- 如果随机试验 E 只有有限个事件 e_1, e_2, \dots, e_n 可能发生, 且事件 e_1, e_2, \dots, e_n 满足下面三条:
 - e_1, e_2, \dots, e_n 发生的可能性相等(等可能性);
 - 在任意一次试验中 e_1, e_2, \dots, e_n 至少有一个发生(完备性);
 - 在任意一次试验中 e_1, e_2, \dots, e_n 至多有一个发生(互不相容性).

具有上述特性的概型称为**古典概型**(Classical probability)或**等可能概型**.

e_1, e_2, \dots, e_n 称为**基本事件**(Basic events).

设在古典概型中, 试验 E 共有 n 个基本事件, 事件 A 包含了 k 个基本事件, 则事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{A \text{ 包含的基本事件数}}{\Omega \text{ 中基本事件总数}}.$$

设在古典概型中, 试验 E 共有 n 个基本事件, 事件 A 包含了 k 个基本事件, 则事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{A \text{ 包含的基本事件数}}{\Omega \text{ 中基本事件总数}}.$$

证: 设样本空间 $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, 事件 $A = \{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}\}$.

设在古典概型中, 试验 E 共有 n 个基本事件, 事件 A 包含了 k 个基本事件, 则事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{A \text{ 包含的基本事件数}}{\Omega \text{ 中基本事件总数}}.$$

证: 设样本空间 $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, 事件 $A = \{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}\}$.

$$\begin{aligned} 1 &= P(\Omega) = P(\{e_1\} \cup \{e_2\} \cup \dots \cup \{e_n\}) \\ &= P(\{e_1\}) + P(\{e_2\}) + \dots + P(\{e_n\}) && \text{(互不相容性)} \\ &= nP(\{e_i\}). && \text{(等可能性)} \end{aligned}$$

设在古典概型中, 试验 E 共有 n 个基本事件, 事件 A 包含了 k 个基本事件, 则事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{A \text{ 包含的基本事件数}}{\Omega \text{ 中基本事件总数}}.$$

证: 设样本空间 $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, 事件 $A = \{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}\}$.

$$\begin{aligned} 1 &= P(\Omega) = P(\{e_1\} \cup \{e_2\} \cup \dots \cup \{e_n\}) \\ &= P(\{e_1\}) + P(\{e_2\}) + \dots + P(\{e_n\}) \quad (\text{互不相容性}) \\ &= nP(\{e_i\}). \quad (\text{等可能性}) \end{aligned}$$

所以, $P(\{e_1\}) = P(\{e_2\}) = \dots = P(\{e_n\}) = \frac{1}{n}$.

算法

设在古典概型中, 试验 E 共有 n 个基本事件, 事件 A 包含了 k 个基本事件, 则事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{A \text{ 包含的基本事件数}}{\Omega \text{ 中基本事件总数}}.$$

证: 设样本空间 $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, 事件 $A = \{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}\}$.

$$\begin{aligned} 1 &= P(\Omega) = P(\{e_1\} \cup \{e_2\} \cup \dots \cup \{e_n\}) \\ &= P(\{e_1\}) + P(\{e_2\}) + \dots + P(\{e_n\}) \quad (\text{互不相容性}) \\ &= nP(\{e_i\}). \quad (\text{等可能性}) \end{aligned}$$

所以, $P(\{e_1\}) = P(\{e_2\}) = \dots = P(\{e_n\}) = \frac{1}{n}$.
得 $P(A) = P(\{e_{i_1}\} \cup \{e_{i_2}\} \cup \dots \cup \{e_{i_k}\}) = k \times \frac{1}{n}$.

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

Example 12

掷骰子试验, 设 $A = \{\text{偶数点}\} = \{2, 4, 6\}$. 则

$$P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

古典概型的基本模型：摸球模型 —— 不放回抽样

Example 13

袋中有 4 个黄色球, 2 个红色球. 不放回地抽取两个球, 求事件的概率:

① 两次为黄色; ② 同色; ③ 至少有一只黄色.

解: ① $P(A) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{2}{5}$

② $P(B) = \frac{\binom{4}{2} + \binom{2}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{7}{15}$

③ $P(\overline{C}) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{1}{15}$, 得 $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = \frac{14}{15}$

古典概型的基本模型：摸球模型 —— 放回抽样

Example 14

袋中有 4 个黄色球, 2 个红色球. 有放回地抽取两个球, 求事件的概率:

① 两次为黄色; ② 同色; ③ 至少有一只黄色.

解: ①
$$P(A) = \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{\binom{6}{1}\binom{6}{1}} = \frac{4}{9}$$

②
$$P(B) = \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{1} + \binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{6}{1}\binom{6}{1}} = \frac{5}{9}$$

③
$$P(C) = \frac{\binom{4}{1}\binom{2}{1} + \binom{4}{1}\binom{4}{1}}{\binom{6}{1}\binom{6}{1}} = \frac{8}{9}$$

Example 15

在箱中装有 100 个产品, 其中有 3 个次品. 从这箱产品中任意抽 5 个, 求抽得 5 个产品中恰有一个次品的概率.

解: 从 100 个产品中任意抽取 5 个产品, 共有 C_{100}^5 种抽取方法, 事件 $A=\{\text{有 1 个次品, 4 个正品}\}$ 的取法共有 $C_3^1 C_{97}^4$ 种取法. 得

$$P(A) = \frac{C_3^1 C_{97}^4}{C_{100}^5} \approx 0.138$$

Example 16

将 N 个球随机地放入 m 个盒子中 ($m > N$), 求: 每个盒子最多有一个球的概率.

解:

- 先求 N 个球随机地放入 m 个盒子的方法总数.

因为每个球都可以落入 m 个盒子中的任何一个, 有 m 种不同的放法, 所以 N 个球放入 m 个盒子共有 $\underbrace{m \times m \times \cdots \times m}_N = m^N$ 种不同的放法.

Example 16

将 N 个球随机地放入 m 个盒子中 ($m > N$), 求: 每个盒子最多有一个球的概率.

解:

- 先求 N 个球随机地放入 m 个盒子的方法总数.
因为每个球都可以落入 m 个盒子中的任何一个, 有 m 种不同的放法,
所以 N 个球放入 m 个盒子共有 $\underbrace{m \times m \times \cdots \times m}_N = m^N$ 种不同的放法.
- 事件 $A = \{\text{每个盒子最多有一个球}\}$ 的放法.
第一个球可以放进 m 个盒子之一, 有 m 种放法;

Example 16

将 N 个球随机地放入 m 个盒子中 ($m > N$), 求: 每个盒子最多有一个球的概率.

解:

- 先求 N 个球随机地放入 m 个盒子的方法总数.
因为每个球都可以落入 m 个盒子中的任何一个, 有 m 种不同的放法,
所以 N 个球放入 m 个盒子共有 $\underbrace{m \times m \times \cdots \times m}_N = m^N$ 种不同的放法.
- 事件 $A = \{\text{每个盒子最多有一个球}\}$ 的放法.
第一个球可以放进 m 个盒子之一, 有 m 种放法;

Example 16

将 N 个球随机地放入 m 个盒子中 ($m > N$), 求: 每个盒子最多有一个球的概率.

解:

- 先求 N 个球随机地放入 m 个盒子的方法总数.

因为每个球都可以落入 m 个盒子中的任何一个, 有 m 种不同的放法, 所以 N 个球放入 m 个盒子共有 $\underbrace{m \times m \times \cdots \times m}_N = m^N$ 种不同的放法.

- 事件 $A = \{\text{每个盒子最多有一个球}\}$ 的放法.

第一个球可以放进 m 个盒子之一, 有 m 种放法; 第二个球只能放进余下的 $m - 1$ 个盒子之一, 有 $m - 1$ 种放法; \cdots , 第 N 个球只能放进余下的 $m - (N - 1)$ 个盒子之一, 即有 $m - N + 1$ 种放法;

Example 16

将 N 个球随机地放入 m 个盒子中 ($m > N$), 求: 每个盒子最多有一个球的概率.

解:

- 先求 N 个球随机地放入 m 个盒子的方法总数.

因为每个球都可以落入 m 个盒子中的任何一个, 有 m 种不同的放法, 所以 N 个球放入 m 个盒子共有 $\underbrace{m \times m \times \cdots \times m}_N = m^N$ 种不同的放法.

- 事件 $A = \{\text{每个盒子最多有一个球}\}$ 的放法.

第一个球可以放进 m 个盒子之一, 有 m 种放法; 第二个球只能放进余下的 $m - 1$ 个盒子之一, 有 $m - 1$ 种放法; \cdots , 第 N 个球只能放进余下的 $m - (N - 1)$ 个盒子之一, 即有 $m - N + 1$ 种放法; 所以共有 $m(m - 1) \cdots (m - N + 1)$ 种不同的放法.

Example 16

将 N 个球随机地放入 m 个盒子中 ($m > N$), 求: 每个盒子最多有一个球的概率.

解:

- 先求 N 个球随机地放入 m 个盒子的方法总数.

因为每个球都可以落入 m 个盒子中的任何一个, 有 m 种不同的放法, 所以 N 个球放入 m 个盒子共有 $\underbrace{m \times m \times \cdots \times m}_N = m^N$ 种不同的放法.

- 事件 $A = \{\text{每个盒子最多有一个球}\}$ 的放法.

第一个球可以放进 m 个盒子之一, 有 m 种放法; 第二个球只能放进余下的 $m - 1$ 个盒子之一, 有 $m - 1$ 种放法; \cdots , 第 N 个球只能放进余下的 $m - (N - 1)$ 个盒子之一, 即有 $m - N + 1$ 种放法; 所以共有 $m(m - 1) \cdots (m - N + 1)$ 种不同的放法. 得事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{m(m - 1) \cdots (m - N + 1)}{m^N}$$

生日相同概率

考虑“任意 $n (\leq 365)$ 个人中至少有两人生日相同”问题.(假定一年为 365 天.)

- 这相当于把 $n (\leq 365)$ 个球放入 365 个盒子.
- 先看这 n 个人的生日各不相同的概率, 即“每个盒子最多有一个球的概率”.
- 原问题所求的概率为

$$p = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}$$

生日相同概率

考虑“任意 $n (\leq 365)$ 个人中至少有两人生日相同”问题.(假定一年为 365 天.)

- 这相当于把 $n (\leq 365)$ 个球放入 365 个盒子.
- 先看这 n 个人的生日各不相同的概率, 即“每个盒子最多有一个球的概率”.
- 原问题所求的概率为

$$p = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}$$

生日相同概率

考虑“任意 $n (\leq 365)$ 个人中至少有两人生日相同”问题.(假定一年为 365 天.)

- 这相当于把 $n (\leq 365)$ 个球放入 365 个盒子.
- 先看这 n 个人的生日各不相同的概率, 即“每个盒子最多有一个球的概率”.
- 原问题所求的概率为

$$p = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}$$

生日相同概率

考虑“任意 $n (\leq 365)$ 个人中至少有两人生日相同”问题.(假定一年为 365 天.)

- 这相当于把 $n (\leq 365)$ 个球放入 365 个盒子.
- 先看这 n 个人的生日各不相同的概率, 即“每个盒子最多有一个球的概率”.
- 原问题所求的概率为

$$p = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \cdots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}$$

生日相同概率

考虑“任意 $n (\leq 365)$ 个人中至少有两人生日相同”问题.(假定一年为 365 天.)

- 这相当于把 $n (\leq 365)$ 个球放入 365 个盒子.
- 先看这 n 个人的生日各不相同的概率, 即“每个盒子最多有一个球的概率”.
- 原问题所求的概率为

$$p = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}$$

n	20	23	30	40	50	64	100
p	0.41	0.507	0.706	0.891	0.970	0.997	0.999 999 7

鞋子配对问题

Example 17

从 6 双不同的鞋子中任取 4 只, 求下列事件的概率:

- ① $A = \{\text{其中恰有一双配对}\};$
- ② $B = \{\text{至少有两只鞋子配成一双}\}.$

解:

- ① 分析: 先从 6 双中取出一双, 两只全取; 再从剩下的 5 双中任取两双, 每双中取一只. 则 A 中所含样本点数为 $C_6^1 C_2^2 C_5^2 C_2^1 C_2^1$. 所以

$$P(A) = \frac{C_6^1 C_2^2 C_5^2 C_2^1 C_2^1}{C_{12}^4} = \frac{16}{33}$$

鞋子配对问题

- ② “从 6 双不同的鞋子中任取 4 只, 至少有两只鞋子配成一双”.

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{C_6^4 C_2^1 C_2^1 C_2^1 C_2^1}{C_{12}^4} = \frac{17}{33}.$$

或

$$P(B) = \frac{C_6^1 C_5^2 C_2^1 C_2^1 + C_6^2}{C_{12}^4} = \frac{17}{33}.$$

鞋子配对问题

“从 6 双不同的鞋子中任取 4 只, 至少有两只鞋子配成一双”

$$\text{能否 } P(B) = \frac{C_6^1 C_2^2 C_{10}^2}{C_{12}^4} = \frac{6}{11} \quad ???$$

鞋子配对问题

“从 6 双不同的鞋子中任取 4 只, 至少有两只鞋子配成一双”

$$\text{能否 } P(B) = \frac{C_6^1 C_2^2 C_{10}^2}{C_{12}^4} = \frac{6}{11} \quad ???$$

不能把有利事件数取为 $C_6^1 C_2^2 C_{10}^2$:

- 设鞋子标有号码 $1, 2, \dots, 6$,
- C_6^1 可能取中第 i 双鞋, 此时 C_{10}^2 可能取中 j 双鞋,
- C_6^1 可能取中第 j 双鞋, 此时 C_{10}^2 可能取中 i 双鞋,

这样第 i 双鞋和第 j 双鞋被重复计数, 多出了 C_6^2 个事件.

抽签公平性问题

Example 18

袋中有 a 只黑球, b 只白球, k 个人依次在袋中取一只球,

- ① 作放回抽样;
- ② 作不放回抽样,

求 $A = \{\text{第 } k \text{ 个人摸出的一只球为黑球}\}$ 的概率 ($1 \leq k \leq a + b$).

抽签公平性问题

Example 18

袋中有 a 只黑球, b 只白球, k 个人依次在袋中取一只球,

- ① 作放回抽样;
- ② 作不放回抽样,

求 $A = \{\text{第 } k \text{ 个人摸出的一只球为黑球}\}$ 的概率 ($1 \leq k \leq a + b$).

解: ① 放回抽样:

$$P(A) = \frac{\binom{a}{1}}{\binom{a+b}{1}} = \frac{a}{a+b}.$$

抽签公平性问题

解: ② (解法一) 将 a 只黑球看作没有区别, b 只白球也看作没有区别.

- 把 $a + b$ 只球一一摸出排在 $a + b$ 个位置上, 事件总数即 $a + b$ 个位置中取出 a 个位置来放黑球(其余为摸白球) 的取法.

$$\text{样本点总数 } n = \binom{a+b}{a}.$$

- 完成事件 A 可以分两步: 第 K 个位置固定为黑球, 有一种完成方法; 其余 $a + b - 1$ 个位置中取出 $a - 1$ 个来放黑球, 即为 $\binom{a+b-1}{a-1}$.

于是

$$P(A) = \frac{\binom{a+b-1}{a-1}}{\binom{a+b}{a}} = \frac{a}{a+b}$$

抽签公平性问题

解: ② (解法二) 视每个球是有区别的:

- 将 a 只黑球及 b 只白球编号后一一取出排成一行, 则所有可能的排法为 $n = (a + b)!$.
- 完成事件 A 可以分两步: 第 K 个位置放一个黑球, 有 a 种放法; 把剩下的 $a - 1$ 只黑球和 b 只白球排列到其余 $a + b - 1$ 个位置, 有 $(a + b - 1)!$ 种放法.

故

$$P(A) = \frac{a \times (a + b - 1)!}{(a + b)!} = \frac{a}{a + b}.$$

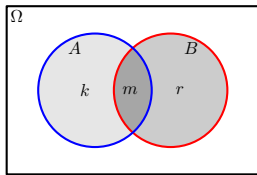
条件概率(Conditional probability)

- **条件概率**是讨论“事件 A 发生的条件下, 事件 B 发生的概率”. 记为 $P(B|A)$.
- 计算公式为

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \text{ 其中 } P(A) > 0.$$

一个不严格的解释

借助频率进行非严格的说明: 在 n 次试验中, A 发生 k 次, B 发生 r 次. 其中 AB 同时发生有 m 次.



则在 A 发生的条件下, B 发生的可能性为 $\frac{m}{k} = P(B|A)$.

而 $P(AB) = \frac{m}{n}$, $P(A) = \frac{k}{n}$, 所以

$$P(B|A) = \frac{m}{k} = \frac{m/n}{k/n} = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

条件概率的定义

Definition 19 (Conditional probability)

设 A, B 是两个事件, 且 $P(A) > 0$, 称

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率.

条件概率

- 条件概率 $P(B|A)$ 也满足概率的相关性质与公式. 比如

$$P(B|A) = 1 - P(\overline{B}|A). \quad (16)$$

$$P(B_1 \cup B_2|A) = P(B_1|A) + P(B_2|A) - P(B_1 B_2|A). \quad (17)$$

其中, 若 B_1, B_2 互不相容, 有

$$P(B_1 \cup B_2|A) = P(B_1|A) + P(B_2|A). \quad (18)$$

Example 20

盒子里有 6 个红球, 4 个黑球, 不放回地取两次. 记 $A = \{\text{第一次取得红球}\}$, $B = \{\text{第二次取得红球}\}$. 求 $P(B|A)$.

Example 20

盒子里有 6 个红球, 4 个黑球, 不放回地取两次. 记 $A = \{\text{第一次取得红球}\}$, $B = \{\text{第二次取得红球}\}$. 求 $P(B|A)$.

解: 因为 $P(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, $P(AB) = \frac{\binom{6}{1}\binom{5}{1}}{\binom{10}{1}\binom{9}{1}} = \frac{6 \times 5}{10 \times 9} = \frac{1}{3}$.

所以,

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1/3}{3/5} = \frac{5}{9}.$$

Example 20

盒子里有 6 个红球, 4 个黑球, 不放回地取两次. 记 $A = \{\text{第一次取得红球}\}$, $B = \{\text{第二次取得红球}\}$. 求 $P(B|A)$.

解: 因为 $P(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, $P(AB) = \frac{\binom{6}{1}\binom{5}{1}}{\binom{10}{1}\binom{9}{1}} = \frac{6 \times 5}{10 \times 9} = \frac{1}{3}$.

所以,

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1/3}{3/5} = \frac{5}{9}.$$

or 由题意, A 发生后, 9 个球 = 5 红 + 4 黑.

所以

$$P(B|A) = \frac{\binom{5}{1}}{\binom{9}{1}} = \frac{5}{9}.$$

Example 20

盒子里有 6 个红球, 4 个黑球, 不放回地取两次. 记 $A = \{\text{第一次取得红球}\}$, $B = \{\text{第二次取得红球}\}$. 求 $P(B|A)$.

解: 因为 $P(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, $P(AB) = \frac{\binom{6}{1}\binom{5}{1}}{\binom{10}{1}\binom{9}{1}} = \frac{6 \times 5}{10 \times 9} = \frac{1}{3}$.

所以,

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1/3}{3/5} = \frac{5}{9}.$$

or 由题意, A 发生后, 9 个球 = 5 红 + 4 黑.

所以

$$P(B|A) = \frac{\binom{5}{1}}{\binom{9}{1}} = \frac{5}{9}.$$

条件概率的两种求法 ① 用公式; ② 直接“缩小样本”求解.

乘法公式

- 由条件概率容易推得乘法公式:

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

- 利用这个公式可以计算积事件.
- 推广到 n 个事件的情形: 若 $P(A_1A_2\cdots A_n) > 0$, 则

$$\begin{aligned} P(A_1A_2\cdots A_n) = & P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots \\ & \times P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}). \end{aligned}$$

Example 21

在一批由 90 件正品, 3 件次品组成的产品中, 不放回接连抽取两件产品, 问“第一件取正品且第二件取次品”的概率.

Example 21

在一批由 90 件正品, 3 件次品组成的产品中, 不放回接连抽取两件产品, 问“第一件取正品且第二件取次品”的概率.

解: 设事件 $A = \{\text{第一件取正品}\}$; 事件 $B = \{\text{第二件取次品}\}$.
按题意,

$$P(A) = \frac{90}{93}, \quad P(B|A) = \frac{3}{92}.$$

由乘法公式

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{90}{93} \times \frac{3}{92} = 0.0315$$

Example 21

在一批由 90 件正品, 3 件次品组成的产品中, 不放回接连抽取两件产品, 问“第一件取正品且第二件取次品”的概率.

解: 设事件 $A = \{\text{第一件取正品}\}$; 事件 $B = \{\text{第二件取次品}\}$.
按题意,

$$P(A) = \frac{90}{93}, \quad P(B|A) = \frac{3}{92}.$$

由乘法公式

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{90}{93} \times \frac{3}{92} = 0.0315$$

这个例子直接求解更简单:

$$P = \frac{\binom{90}{1}\binom{3}{1}}{\binom{93}{1}\binom{92}{1}}$$

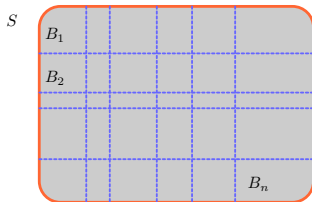
全概率公式

Definition 22 (样本空间的划分)

B_1, B_2, \dots, B_n 为样本空间 Ω 的一组事件, 且满足:

- B_1, B_2, \dots, B_n 互不相容;
- $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega$.

则称 B_1, B_2, \dots, B_n 为样本空间 Ω 的一个划分.

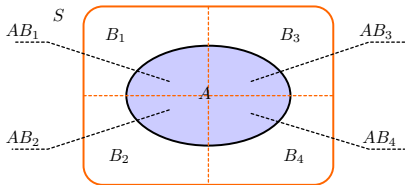


这与集合里的划分概念是一样的.

全概率公式

如图, $\Omega = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$. 由图可见

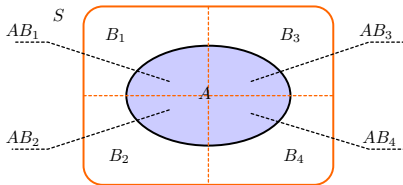
$$P(A) = P(AB_1) + P(AB_2) + P(AB_3) + P(AB_4)$$



全概率公式

如图, $\Omega = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$. 由图可见

$$P(A) = P(AB_1) + P(AB_2) + P(AB_3) + P(AB_4)$$



由乘法公式, $P(AB_i) = P(B_i)P(A|B_i)$. 所以

$$\begin{aligned} P(A) &= P(AB_1) + P(AB_2) + P(AB_3) + P(AB_4) \\ &= P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) \\ &\quad + P(B_3)P(A|B_3) + P(B_4)P(A|B_4). \end{aligned}$$

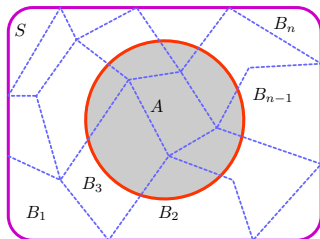
全概率公式 (Complete probability formula)

Theorem 23 (全概率公式)

设 B_1, B_2, \dots, B_n 为样本空间 Ω 的一个划分, 且 $P(B_i) > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). 则

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \dots + P(B_n)P(A|B_n).$$

上式称为**全概率公式**.



Example 24

从装有 a 只黑球, b 只白球的袋中无放回地摸球两次, 记 A = “第一次摸到黑球”, B = “第二次摸到黑球”. 用全概率公式求 $P(B)$.

Example 24

从装有 a 只黑球, b 只白球的袋中无放回地摸球两次, 记 A = “第一次摸到黑球”, B = “第二次摸到黑球”. 用全概率公式求 $P(B)$.

解:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) \\ &= \frac{a}{a+b} \times \frac{a-1}{a+b-1} + \frac{b}{a+b} \times \frac{a}{a+b-1} \\ &= \frac{a}{a+b} \end{aligned}$$

一类题目的解法

Example 25 (1993 年考研题, 3分)

一批产品有 10 个正品和 2 个次品, 任意抽取两次, 每次抽一个, 抽出后不放回, 则第二次抽出的是次品的概率为_____.

Example 26 (1997 数学一 3分)

袋中有 50 个乒乓球, 其中 20 个是黄球, 30 个是白球. 今有两人依次随机地从袋中各取一球, 取后不放回, 则第 2 个人取得黄球的概率是_____.

Example 27

某工厂有四条流水线生产同一种产品, 该四条流水线的产量分别占总产量的 15%, 20%, 30%, 35%, 又这四条流水线的次品率依次为 0.05, 0.04, 0.03, 0.02, 现从出厂产品属任取一件, 问恰好取到次品的概率为多少?

解: 令 $A = \{\text{任取一件出厂产品为次品}\}$, $B_i = \{\text{所抽产品中第 } i \text{ 条流水线生产}\} (i = 1, 2, 3, 4)$. 则

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^4 P(B_i) P(A|B_i) \\ &= 0.15 \times 0.05 + 0.20 \times 0.04 + 0.30 \times 0.03 + 0.35 \times 0.02 \\ &= 0.0315 = 3.15\% \end{aligned} \tag{19}$$

现从出厂产品中抽到一件次品, 但该次品是哪一条流水线生产的标志已经脱落, 问厂方应如何处理这件次品的经济责任才合理. 不难理解, 可按 $P(B_4|A)$ 的大小来追究第 4 条流水线的责任.

$$\begin{aligned} P(B_4|A) &= \frac{P(B_4A)}{P(A)} \\ &= \frac{P(B_4) \cdot P(A|B_4)}{\sum_{i=1}^4 P(B_i)P(A|B_i)} \\ &= \frac{0.007}{0.0315} = 0.222 \end{aligned} \tag{20}$$

Bayes 公式

任一事件 A , 若 B_1, B_2, \dots, B_n 样本空间 Ω 的一个划分, 且 $P(A) > 0, P(B_i) > 0 (i = 1, 2, \dots, n.)$. 则

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i) P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(B_j) P(A|B_j)}, i = 1, 2, \dots, n. \quad (21)$$

(??) 式称为贝叶斯公式(Bayes).

全概率公式和 Bayes 公式

全概率公式和 Bayes 公式是概率论中的两个重要公式, 有着广泛的应用. 若把事件 B_i 理解为“原因”, 而把 A 理解为“结果”,

- 全概率公式表达了“综合考虑引起结果 A 的各种原因 B_i , 计算导致结果 A 出现的可能性的的大小”;
- Bayes 公式则反映了“当结果 A 出现时, 它是由原因 B_i 引起的可能性的的大小”.

全概率公式和 Bayes 公式

全概率公式和 Bayes 公式是概率论中的两个重要公式, 有着广泛的应用. 若把事件 B_i 理解为“原因”, 而把 A 理解为“结果”,

- 全概率公式表达了“综合考虑引起结果 A 的各种原因 B_i , 计算导致结果 A 出现的可能性的的大小”;
- Bayes 公式则反映了“当结果 A 出现时, 它是由原因 B_i 引起的可能性的的大小”.

全概率公式和 Bayes 公式

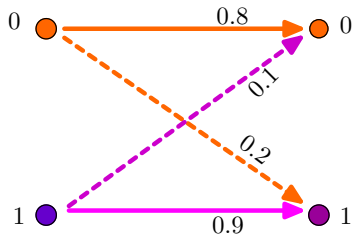
通俗地说,

- 如果一个事件的发生有多个“诱因”, 就要用到全概率公式. 所谓“全”, 就是要全面考虑各种诱因.
- Bayes 公式常用来追究责任, 或者“执果索因”. 也就是计算各个“诱因”对事件发生的“贡献”.

一个典型例题

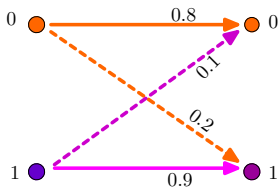
Example 28

发报台分别以概率 0.6 和 0.4 发出信号 0 和 1. 由于通讯系统受到干扰, 当发出信号 0 时, 收报台未必收到信号 0, 而是分别以 0.8 和 0.2 的概率收到 0 和 1; 同样, 发出 1 时分别以 0.9 和 0.1 的概率收到 1 和 0. 如果收报台收到 0, 问它没收错的概率?



解: 设 $A=\{\text{发报台发出信号 } 0\}$, $\bar{A}=\{\text{发报台发出信号 } 1\}$;
 $B=\{\text{收报台收到 } 0\}$, $\bar{B}=\{\text{收报台收到 } 1\}$.

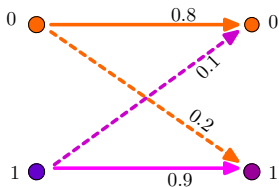
解: 设 $A=\{\text{发报台发出信号 } 0\}$, $\bar{A}=\{\text{发报台发出信号 } 1\}$;
 $B=\{\text{收报台收到 } 0\}$, $\bar{B}=\{\text{收报台收到 } 1\}$.



于是, $P(A) = 0.6$, $P(\bar{A}) = 0.4$, $P(B|A) = 0.8$, $P(\bar{B}|A) = 0.2$,
 $P(\bar{B}|\bar{A}) = 0.9$, $P(B|\bar{A}) = 0.1$.

问题即求 $P(A|B)$.

解: 设 $A=\{\text{发报台发出信号 } 0\}$, $\bar{A}=\{\text{发报台发出信号 } 1\}$;
 $B=\{\text{收报台收到 } 0\}$, $\bar{B}=\{\text{收报台收到 } 1\}$.



于是, $P(A) = 0.6$, $P(\bar{A}) = 0.4$, $P(B|A) = 0.8$, $P(\bar{B}|A) = 0.2$,
 $P(\bar{B}|\bar{A}) = 0.9$, $P(B|\bar{A}) = 0.1$.

问题即求 $P(A|B)$.

按贝叶斯公式, 有

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})} \\ &= \frac{0.6 \times 0.8}{0.6 \times 0.8 + 0.4 \times 0.1} = \frac{12}{13} \end{aligned}$$

解题的一般步骤

这是古典概型里面一个比较典型的例题, 从这里我们可以看到解题的一般方法:

- ① 把题目中出现的事件(或者说“动作”)赋予记号;
- ② 把题设的条件用这些符号来翻译; 求解的问题也翻译成记号;
- ③ 再来选择要使用的公式求解.

总的来说, 解这类题还是比较机械的:

把题目翻译成数学语言, 则求解的方法自然“水到渠成”!

Example 29

某机器由 a, b, c 三类元件构成, 其所占比例分别为 $0.1, 0.4, 0.5$, 且其发生故障的概率分别为 $0.7, 0.1, 0.2$. 现机器发生了故障, 问应先从哪个元件开始检查?

Example 29

某机器由 a, b, c 三类元件构成, 其所占比例分别为 0.1, 0.4, 0.5, 且其发生故障的概率分别为 0.7, 0.1, 0.2. 现机器发生了故障, 问应先从哪个元件开始检查?

解: 设 $D=\{\text{发生故障}\}$; $A=\{\text{元件是 a 类}\}$; $B=\{\text{元件是 b 类}\}$; $C=\{\text{元件是 c 类}\}$. 由

$$\begin{aligned}P(D) &= P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B) + P(C)P(D|C) \\&= 0.1 \times 0.7 + 0.4 \times 0.1 + 0.5 \times 0.2 = 0.21\end{aligned}$$

又

$$P(A|D) = \frac{P(AD)}{P(D)} = 7/21 \quad (22)$$

$$P(B|D) = 4/21 \quad (23)$$

$$P(C|D) = 10/21 \quad (24)$$

所以应从 c 元件开始检查.

事件的独立性

Definition 30

对任意两个事件 A, B , 若有

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

则称事件 A 与 B **相互独立**, 简称 A, B **独立**.

独立的性质

- 若 $P(A) > 0$, 则 A 与 B 相互独立 $\Leftrightarrow P(B) = P(B|A)$.
- A 与 B 独立, 则下列各对事件也相互独立: A 与 \overline{B} , \overline{A} 与 B , \overline{A} 与 \overline{B} .

独立 v.s. 互不相容

事件的独立与事件的互不相容是两个不同的概念:

- 独立是说, 事件的发生相互没有影响, 没有关联. 独立事件可以同时发生;
- 互不相容, 则两个事件不能同时发生. 这两个事件之间是有关联的!

Example 31

投掷两枚均匀的骰子一次, 求出现两个 6 点的概率.

独立性

Example 31

投掷两枚均匀的骰子一次, 求出现两个 6 点的概率.

解: 设 $A=\{\text{第一枚骰子出现 } 6\}$; $B=\{\text{第二枚骰子出现 } 6\}$.
则

$$P(AB) = P(A)P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

独立性

Example 31

投掷两枚均匀的骰子一次, 求出现两个 6 点的概率.

解: 设 $A=\{\text{第一枚骰子出现 } 6\}$; $B=\{\text{第二枚骰子出现 } 6\}$.
则

$$P(AB) = P(A)P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

在实际应用中, 常常利用直观来判断事件的相互独立性, 而不需要用定义公式来验证.

例题

Example 32

甲乙二人同时向同一目标射击一次, 甲击中率为 0.8, 乙击中率为 0.6. 求在一次射击中, 目标被击中的概率.

例题

Example 32

甲乙二人同时向同一目标射击一次, 甲击中率为 0.8, 乙击中率为 0.6. 求在一次射击中, 目标被击中的概率.

解: 设 $A=\{\text{甲击中目标}\}$, $B=\{\text{乙击中目标}\}$, $C=\{\text{目标被击中}\}$, 则
 $C = A \cup B$

例题

Example 32

甲乙二人同时向同一目标射击一次, 甲击中率为 0.8, 乙击中率为 0.6. 求在一次射击中, 目标被击中的概率.

解: 设 $A=\{\text{甲击中目标}\}$, $B=\{\text{乙击中目标}\}$, $C=\{\text{目标被击中}\}$, 则
 $C = A \cup B$

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A \cup B) \\ &= P(A) + P(B) - P(AB) \\ &= P(A) + P(B) - P(A)P(B) \\ &= 0.8 + 0.6 - 0.8 \times 0.6 = 0.92 \end{aligned} \tag{25}$$

例题

Example 32

甲乙二人同时向同一目标射击一次, 甲击中率为 0.8, 乙击中率为 0.6. 求在一次射击中, 目标被击中的概率.

解: 设 $A=\{\text{甲击中目标}\}$, $B=\{\text{乙击中目标}\}$, $C=\{\text{目标被击中}\}$, 则 $C = A \cup B$ 或者

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= 1 - P(\overline{A \cup B}) \\ &= 1 - P(\overline{A} \overline{B}) \\ &= 1 - P(\overline{A})P(\overline{B}) \\ &= 1 - (1 - 0.8)(1 - 0.6) = 0.92 \end{aligned} \tag{25}$$

思考

若 $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, 且 $P(A|B) + P(\overline{A}|\overline{B}) = 1$. 则 A, B 相互独立.

多个事件的独立

Definition 33

对于三个事件 A, B, C , 若下列四个等式同时成立

$$P(AB) = P(A)P(B), \quad (26)$$

$$P(AC) = P(A)P(C), \quad (27)$$

$$P(BC) = P(B)P(C), \quad (28)$$

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C). \quad (29)$$

则称 A, B, C 相互独立.

多个事件的独立

Definition 33

对于三个事件 A, B, C , 若下列四个等式同时成立

$$P(AB) = P(A)P(B), \quad (26)$$

$$P(AC) = P(A)P(C), \quad (27)$$

$$P(BC) = P(B)P(C), \quad (28)$$

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C). \quad (29)$$

则称 A, B, C 相互独立.

“事件 A, B, C 两两独立”不能推出“事件 A, B, C 相互独立”.

多个事件的独立性

Definition 34

对任意 n 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n , 若:

$$P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j), \quad 1 \leq i < j \leq n \quad (30)$$

$$P(A_i A_j A_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k), \quad 1 \leq i < j < k \leq n \quad (31)$$

$$\dots\dots\dots \quad (32)$$

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2) \cdots P(A_n) \quad (33)$$

均成立, 则称 A_1, A_2, \dots, A_n **相互独立**.

Example 35

用步枪射击飞机, 设每支步枪命中率均为 0.004, 求:

- ① 用 250 支步枪同时射击一次, 飞机被击中的概率;
- ② 若想以 0.99 的概率击中飞机, 至少需要多少支步枪同时射击?

Example 35

用步枪射击飞机, 设每支步枪命中率均为 0.004, 求:

- ① 用 250 支步枪同时射击一次, 飞机被击中的概率;
- ② 若想以 0.99 的概率击中飞机, 至少需要多少支步枪同时射击?

解: ① 设 $A_i = \{\text{第 } i \text{ 支步枪击中飞机}\}$, 问题即求 $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$.

Example 35

用步枪射击飞机, 设每支步枪命中率均为 0.004, 求:

- ① 用 250 支步枪同时射击一次, 飞机被击中的概率;
- ② 若想以 0.99 的概率击中飞机, 至少需要多少支步枪同时射击?

解: ① 设 $A_i = \{\text{第 } i \text{ 支步枪击中飞机}\}$, 问题即求 $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$.

$$\begin{aligned} & P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \\ &= 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n}) \\ &= 1 - P(\overline{A_1} \overline{A_2} \cdots \overline{A_n}) \\ &= 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) \cdots P(\overline{A_n}) \\ &= 1 - 0.996^{250} \\ &\approx 0.63 \end{aligned} \tag{34}$$

Example 35

用步枪射击飞机, 设每支步枪命中率均为 0.004, 求:

- ① 用 250 支步枪同时射击一次, 飞机被击中的概率;
- ② 若想以 0.99 的概率击中飞机, 至少需要多少支步枪同时射击?

解: ② 即满足条件 $1 - 0.996^n \geq 0.99$, 得

$$n \approx 1150.$$

和事件的概率的求法

总结 $P(A \cup B)$ 在不同场合下的求法.

- 一般公式: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.
- 若 A, B 互不相容: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- 若 A, B 相互独立:

$$\begin{aligned}P(A \cup B) &= 1 - P(\overline{A \cup B}) \\&= 1 - P(\overline{A} \overline{B}) \\&= 1 - P(\overline{A})P(\overline{B})\end{aligned}$$

积事件的概率的求法

- 一般公式:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

- 若 A, B 相互独立:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

伯努利概型

- ① Bernoulli 试验 —— 有且仅有两个结果 A, \bar{A} 的试验.
一般记 $P(A) = p, P(\bar{A}) = q = 1 - p$.
- ② Bernoulli 概型 —— n 次重复独立 Bernoulli 试验.

n 次 Bernoulli 试验中 A 发生 k 次的概率: $P_n(k)$

① 前 k 次发生:

$$P(\underbrace{A \cdots A}_k \underbrace{\bar{A} \cdots \bar{A}}_{n-k}) = p^k (1-p)^{n-k}$$

② 有 $\binom{n}{k}$ 种不同的方式, 每一方式互不相容:

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n 次 Bernoulli 试验中 A 发生 k 次的概率: $P_n(k)$

① 前 k 次发生:

$$P(\underbrace{A \cdots A}_k \underbrace{\bar{A} \cdots \bar{A}}_{n-k}) = p^k (1-p)^{n-k}$$

② 有 $\binom{n}{k}$ 种不同的方式, 每一方式互不相容:

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

特点: $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ 是 $[p + (1-p)]^n$ 的牛顿二项式展开的一般项.

$$[p + (1-p)]^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1$$

Example 36

设某士兵打靶的击中率为 0.7, 现独立重复地射击 3 次, 求

- ① $A = \{\text{恰好击中一次}\}$ 的概率.
- ② $B = \{\text{至少击中一次}\}$ 的概率.

Example 36

设某士兵打靶的击中率为 0.7, 现独立重复地射击 3 次, 求

- ① $A = \{\text{恰好击中一次}\}$ 的概率.
- ② $B = \{\text{至少击中一次}\}$ 的概率.

解: ① $P(A) = \binom{3}{1} 0.7 \times 0.3^2 = 3 \times 0.7 \times 0.09 = 0.189.$

Example 36

设某士兵打靶的击中率为 0.7, 现独立重复地射击 3 次, 求

① $A = \{\text{恰好击中一次}\}$ 的概率.

② $B = \{\text{至少击中一次}\}$ 的概率.

解: ① $P(A) = \binom{3}{1} 0.7 \times 0.3^2 = 3 \times 0.7 \times 0.09 = 0.189.$

② $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0.3^3 = 0.973.$

Example 37

现有 5 台供水设备. 在任一时刻, 每台设备被使用的概率为 0.1, 求在某一时刻下列事件的概率:

- ① 恰有 2 个被使用;
- ② 至少有 3 个被使用;
- ③ 至多有 3 个被使用;
- ④ 至少有 1 个被使用.

Example 37

现有 5 台供水设备. 在任一时刻, 每台设备被使用的概率为 0.1, 求在某一时刻下列事件的概率:

- ① 恰有 2 个被使用;
- ② 至少有 3 个被使用;
- ③ 至多有 3 个被使用;
- ④ 至少有 1 个被使用.

$$\textcircled{1} \quad P(A_1) = \binom{5}{2} 0.1^2 \times 0.9^3 = 0.0729.$$

$$\textcircled{2} \quad P(A_2) = \binom{5}{3} 0.1^3 \times 0.9^2 + \binom{5}{4} 0.1^4 \times 0.9^1 + 0.1^5 = 0.00856.$$

$$\textcircled{3} \quad P(A_3) = 0.9^5 + \binom{5}{1} 0.1 \times 0.9^4 + \binom{5}{2} 0.1^2 \times 0.9^3 + \binom{5}{3} 0.1^3 \times 0.9^2 \\ = 0.99954.$$

$$\textcircled{4} \quad P(A_4) = 1 - P(\overline{A_4}) = 1 - 0.9^5 = 0.40951.$$

Example 37

现有 5 台供水设备. 在任一时刻, 每台设备被使用的概率为 0.1, 求在某一时刻下列事件的概率:

- ① 恰有 2 个被使用;
- ② 至少有 3 个被使用;
- ③ 至多有 3 个被使用;
- ④ 至少有 1 个被使用.

$$\textcircled{1} P(A_1) = \binom{5}{2} 0.1^2 \times 0.9^3 = 0.0729.$$

$$\textcircled{2} P(A_2) = \binom{5}{3} 0.1^3 \times 0.9^2 + \binom{5}{4} 0.1^4 \times 0.9^1 + 0.1^5 = 0.00856.$$

$$\textcircled{3} P(A_3) = 0.9^5 + \binom{5}{1} 0.1 \times 0.9^4 + \binom{5}{2} 0.1^2 \times 0.9^3 + \binom{5}{3} 0.1^3 \times 0.9^2 \\ = 0.99954.$$

$$\textcircled{4} P(A_4) = 1 - P(\overline{A_4}) = 1 - 0.9^5 = 0.40951.$$

Example 37

现有 5 台供水设备. 在任一时刻, 每台设备被使用的概率为 0.1, 求在某一时刻下列事件的概率:

- ① 恰有 2 个被使用;
- ② 至少有 3 个被使用;
- ③ 至多有 3 个被使用;
- ④ 至少有 1 个被使用.

$$\textcircled{1} P(A_1) = \binom{5}{2} 0.1^2 \times 0.9^3 = 0.0729.$$

$$\textcircled{2} P(A_2) = \binom{5}{3} 0.1^3 \times 0.9^2 + \binom{5}{4} 0.1^4 \times 0.9^1 + 0.1^5 = 0.00856.$$

$$\textcircled{3} P(A_3) = 0.9^5 + \binom{5}{1} 0.1 \times 0.9^4 + \binom{5}{2} 0.1^2 \times 0.9^3 + \binom{5}{3} 0.1^3 \times 0.9^2 \\ = 0.99954.$$

$$\textcircled{4} P(A_4) = 1 - P(\overline{A_4}) = 1 - 0.9^5 = 0.40951.$$

Example 37

现有 5 台供水设备. 在任一时刻, 每台设备被使用的概率为 0.1, 求在某一时刻下列事件的概率:

- ① 恰有 2 个被使用;
- ② 至少有 3 个被使用;
- ③ 至多有 3 个被使用;
- ④ 至少有 1 个被使用.

$$\textcircled{1} P(A_1) = \binom{5}{2} 0.1^2 \times 0.9^3 = 0.0729.$$

$$\textcircled{2} P(A_2) = \binom{5}{3} 0.1^3 \times 0.9^2 + \binom{5}{4} 0.1^4 \times 0.9^1 + 0.1^5 = 0.00856.$$

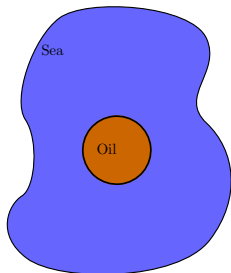
$$\textcircled{3} P(A_3) = 0.9^5 + \binom{5}{1} 0.1 \times 0.9^4 + \binom{5}{2} 0.1^2 \times 0.9^3 + \binom{5}{3} 0.1^3 \times 0.9^2 \\ = 0.99954.$$

$$\textcircled{4} P(A_4) = 1 - P(\overline{A_4}) = 1 - 0.9^5 = 0.40951.$$

几何概率

Example 38 (一个简单的例子)

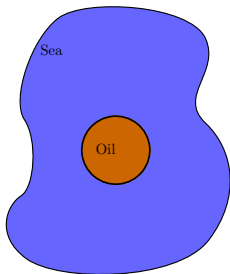
假设在一个 5 万平方公里的海域里有表面积达 40 平方公里的大陆架贮藏着石油. 如果在此海域里随意选取一点钻探, 问钻到石油的概率是多少?



几何概率

Example 38 (一个简单的例子)

假设在一个 5 万平方公里的海域里有表面积达 40 平方公里的大陆架贮藏着石油. 如果在此海域里随意选取一点钻探, 问钻到石油的概率是多少?



解: 在该题中由于选点的随机性, 可以认为该海域中各点被选中的可能性是一样的, 因而所求概率自然认为贮油海域的面积与整个海域面积之比, 即

$$p = \frac{40}{50000}.$$

几何概率

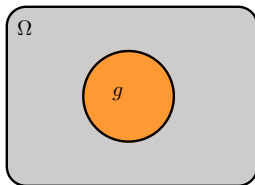
Definition 39

若以 A 记“在区域 Ω 中随机地取一点, 而该点落在区域 g 中”这一事件, 则其概率定义为:

$$P(A) = \frac{\mu(g)}{\mu(\Omega)}$$

这里 $\mu(\cdot)$ 表示测度, 即是长度、面积、体积等.

这类概率通常称作**几何概率**.



会面问题

Example 40

两人相约 7 点到 8 点在某地会面, 先到者等候另一人 20 分钟, 这时就可离去, 试求这两人能会面的概率.

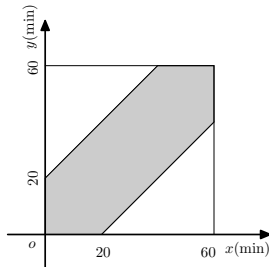
会面问题

Example 40

两人相约 7 点到 8 点在某地会面, 先到者等候另一人 20 分钟, 这时就可离去, 试求这两人能会面的概率.

解: 以 x, y 分别表示两人到达时刻(7 点设为零时刻, 以分钟计), 则 $0 \leq x, y \leq 60$, 且会面的充要条件为

$$|x - y| \leq 20.$$



会面问题

Example 40

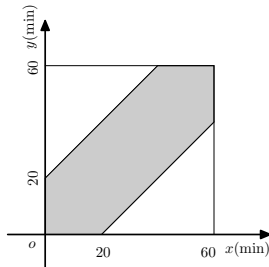
两人相约 7 点到 8 点在某地会面, 先到者等候另一人 20 分钟, 这时就可离去, 试求这两人能会面的概率.

解: 以 x, y 分别表示两人到达时刻(7 点设为零时刻, 以分钟计), 则 $0 \leq x, y \leq 60$, 且会面的充要条件为

$$|x - y| \leq 20.$$

这是一几何概率问题, 可能的结果全体是边长为 60 的正方形里的点, 能会面的点为图中阴影部分, 所求概率为

$$P = \frac{60^2 - 40^2}{60^2} = \frac{5}{9}$$



Pierre de Fermat



Pierre de Fermat¹ (August 17, 1601 - January 12, 1665) was a French mathematician who is generally given minor credit for the development of **modern calculus**. His work was such that he is sometimes regarded as the “father” of, both, **differential calculus** and **number theory**. He also made notable contributions to **analytic geometry** and **probability**.

Together with **René Descartes**, Fermat was one of the two leading mathematicians of the first half of the 17th century. Independently of Descartes, he discovered the fundamental principle of **analytic geometry**. Through his correspondence with **Blaise Pascal**, he was a co-founder of the theory of **probability**.

¹Available at www.edinformatics.com/great-thinkers/fermat.htm.

Fermat's Last Theorem



Fermat worked on **number theory** while preparing an edition of **Diophantus**, and the notes and comments thereon contained the numerous theorems of considerable elegance necessary to develop the theory of numbers. Fermat is famous for his “Enigma” that was an extension of **Pythagorean Theorem**, also known as **Fermat's Last Theorem**.

Andrew John Wiles (born April 11, 1953)

Andrew Wiles, Professor of Mathematics, received a special tribute from the International Mathematical Union on August 18. Because he was just past 40 when he completed his final proof of **Fermat's Last Theorem**, Wiles was not eligible for the **Fields Medal**, the highest honor in mathematics, which is awarded once every four years to mathematicians 40 and younger. So the **IMU** awarded him its first-ever silver plaque at this year's congress in Berlin.

(News from PRINCETON UNIVERSITY, 1998)

*Andrew Wiles
receives
special
tribute*

