武汉大学 2014-2015 学年第一学期期末考试线性代数 B（A 卷）解答

一、(8 分)计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$

解　依第一列展开

原式 $=\begin{vmatrix} x & y & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} x+\left(-1\right)^{n+1} y \begin{vmatrix} y & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix}$　　8 分

$=x\cdot x^{n-1}+\left(-1\right)^{n+1} y\cdot y^{n-1}=x^n+\left(-1\right)^{n+1} y^n \left(n\ge 2\right)$

二、(8 分)设 $A^2+2A-B=0$，其中 B 是 n 阶矩阵 $|B|\ne 0,$ 证明矩阵方程 $2AX=BX+C$ 对任意 n 阶矩阵 C 都有唯一的解矩阵 X.

解　由 $A^2+2A=B$ 知 $|A|\ne 0$ 从而 $2A-B=-A^2$ 知 $|2A-B|\ne 0.$　　4 分

故 $(2A-B)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ 有唯一解, 从而 $(2A-B)X=c$ 有唯一解，

$X=(2A-B)^{-1}C.$　　4 分

三、(8 分)设 $\alpha_1=\left(2,-1,3\right)^T$, $\alpha_2=\left(4,-2,5\right)^T$, $\alpha_3=\left(2,-1,2\right)^T$，试求一组不全为 0 的常数 k_1, k_2, k_3，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$。

解　$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ & 0 & \\ 0 & 1 & \end{pmatrix}$

所以有　$\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3=0$，即　$k_1=1, k_2=-1, k_3=1$　　8 分

四、（10 分）问 λ 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_3=\lambda \\ 4x_1+x_2+2x_3=\lambda+2 \\ 6x_1+x_2+4x_3=3+2\lambda \end{cases}$ 有解，并求出解的一般形式。

解　$\overline{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \lambda \\ 4 & 1 & 2 & \lambda+2 \\ 6 & 1 & 4 & 2\lambda+3 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -2 & -3\lambda+2 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda+1 \end{bmatrix}$，当 $\lambda=1$ 时，方程组有解，此时

$A\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$　　$\therefore X=k\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$　　10 分

五、（10 分）用初等变换求矩阵$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$的秩，并写出行向量组的一个最大线性无关组。

解 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0- & 1 \\ 1 & 0- & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3- & -1 \\ 0 & 0 & 8- & -5 \end{pmatrix}$ 秩$(A)=4$ 6 分

$\alpha_1=(3,0,5,-3,0),\alpha_2=(1,0,-1,1,1),\alpha_3=(2,1,1,1,0),\alpha_4=(3,-1,2,-1,2)$
是其行向量组的一个最大线性无关组。 4 分

六、（8 分）设三阶方阵 A 有一特征值是 2, 其相应的特征向量有$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$; 另一特征值为$-1$, 其相应的特征向量有$\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, 求 $A\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}$.

解 由已知 $A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$， 而 $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$A\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}=-A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}-2A\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$ 8 分

七、（10 分）设 A 、B 是两个三阶矩阵，满足关系：$A^2-AB-2B^2=A-2BA-B+I$，且 $A-B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$I$ 为三阶单位矩阵，求 A.

解 由所给关系得 $\left(A+2B\right)\left(A-B\right)-\left(A-B\right)=I$，即 $\left(A+2B-E\right)\left(A-B\right)=I$

由 $\left|A-B\right|\neq 0$ 知: $A=\dfrac{1}{3}[(A-B)^{-1}+I-2(A-B)]$ 6 分

而 $(A-B)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$， $I-2(A-B)=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

故 $A=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ 4 分

八、（10 分）用正交变换化二次型 $f=3x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_3$ 为标准形，写出所用正交变换及 f 的标准形，并判断二次型的正定性。

解 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=4,\ e_1=\left(0,1,0\right)^T$，$e_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$，$e_3=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$ 6 分

经正交变换 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\1&0&0\\0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$ f 化成标准形：$2y_1^2+2y_2^2+4y_3^2$ 正定 4 分

九、（8 分）证明:线性方程组 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{1n}x_n=b_1\\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots\\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$ 对任何 $b_1,b_2,\cdots,b_{\mathrm{n}}$ 都有解的充分必要条件是系数行列式不为 0, 即 $\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1\mathrm{n}}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{\mathrm{n}1}&\cdots&a_{\mathrm{nn}}\end{vmatrix}\neq 0$

证明必要性：（反证法）设 $\begin{vmatrix}\alpha_{11}&\cdots&\alpha_{1\mathrm{n}}\\ \vdots&&\vdots\\ \alpha_{\mathrm{n}1}&\cdots&\alpha_{\mathrm{nn}}\end{vmatrix}=0$, 则其行向量组

$\alpha_{\mathrm{i}}=(\alpha_{\mathrm{i}1},\cdots,\alpha_{\mathrm{in}})(i=1,2,\cdots,n)$ 必线性相关，不妨设 α_{n} 可以由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{\mathrm{n-1}}$ 线性表出，即 $\alpha_{\mathrm{n}}=k_1\alpha_1+\cdots+k_{\mathrm{n-1}}\alpha_{\mathrm{n-1}}$, 此时若取 $b_{\mathrm{n}}=-k_1b_1-k_2b_2-\cdots-k_{\mathrm{n-1}}b_{\mathrm{n-1}}+1$ 则增广阵可化为：

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}\alpha_1&b_1\\ \vdots&\vdots\\ \alpha_{\mathrm{n}}&b_{\mathrm{n}}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}\alpha_1&b_1\\ \vdots&\vdots\\ \alpha_{\mathrm{n-1}}&b_{\mathrm{n-1}}\\ 0&1\end{bmatrix}$$

即得到秩 $(\overline{A})\neq$ 秩 (A), 故方程组无解，这与已知矛盾，假设不成立.

充分性：由克莱姆法则即可得到. 8 分

十、（10 分）已知线性空间 R^3 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵为 P，且

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix};\quad P=\begin{pmatrix}2&2&1\\3&2&-2\\4&3&0\end{pmatrix}$$

试求：(1) 基 β_1,β_2,β_3；(2) 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 β_1,β_2,β_3 下有相同坐标的全体向量。

解（1）设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, 则 $B=AP$，故

$$\beta_1=\begin{pmatrix}6\\11\\10\end{pmatrix},\quad \beta_2=\begin{pmatrix}5\\8\\8\end{pmatrix},\quad \beta_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix};$$ 5 分

（2）设所求向量的坐标为 x ，则 $Ax=APx$，即 $A(P-E)x=0$，

因为 A 为可逆矩阵，得 $(P-E)x=0$ ，由

$$(P-E)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -2\\ 4 & 3 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$ 得 $x=k(1,-1,1)^T$，

故 $\alpha=k(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)=k(2,1,3)^T$ 5 分

十一、（10 分）设 A 为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A^2-A=12E}$

(1) 证明秩 $\boldsymbol{r(A+3E)+r(A-4E)=n}$；

(2) 证明 A 可相似于对角阵； (3) 求行列式 $|A+4E|$。

证明 (1) 因为 $\boldsymbol{(A+3E)(A-4E)=0}$

$\boldsymbol{r(A+3E)+r(A-4E)\le n}$,且 $\boldsymbol{r(A+3E)+r(A-4E)\ge r(E)=n}$

所以 $\boldsymbol{r(A+3E)+r(A-4E)=n}$。 5 分

(2) 因为 $\boldsymbol{(A+3E)(A-4E)=0}$，特征值 λ 的取值为 $\boldsymbol{-3,4}$，

$\boldsymbol{\lambda=-3}$ 线性无关特征向量有 $\boldsymbol{n-r(A+3E)}$ 个

$\boldsymbol{\lambda=4}$ 线性无关特征向量有 $\boldsymbol{n-r(A-4E)}$ 个

所以 A 有 n 个线性无关的特征向量，能相似于对角阵。

(3) $A+4E$ 的特征值为-3＋4＝1 和 4＋4＝8，所以

$\boldsymbol{|A+4E|=|P(\Lambda+4E)P^{-1}|=1^r8^{n-r}=8^{n-r}}$，其中 r 为特征值 $\boldsymbol{\lambda=-3}$ 的重数。5 分