第 4 章 矩阵的广义逆

Matrix Theory

黄 正 华

Email: huangzh@whu.edu.cn

武汉大学 数学与统计学院

December 15, 2014

源起

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n \times n$ 可逆方阵, $\boldsymbol{b}$ 是任意一个 n 维向量, 则方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

总有解, 且解 $\boldsymbol{x}$ 可表为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}.$$

源起

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 可逆方阵, $\boldsymbol{b}$ 是任意一个 n 维向量, 则方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$$

总有解, 且解 $\boldsymbol{x}$ 可表为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}.$$

现设 $\boldsymbol{A}$ 是任意 $m\times n$ 阵, $\boldsymbol{b}$ 是一个 m 维向量, 是否存在 $n\times m$ 矩阵 $\boldsymbol{G}$, 使得只要方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解, 则

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}$$

就是解?

源起

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n \times n$ 可逆方阵, $\boldsymbol{b}$ 是任意一个 n 维向量, 则方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

总有解, 且解 $\boldsymbol{x}$ 可表为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}.$$

现设 $\boldsymbol{A}$ 是任意 $m \times n$ 阵, $\boldsymbol{b}$ 是一个 m 维向量, 是否存在 $n \times m$ 矩阵 $\boldsymbol{G}$, 使得只要方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有解, 则

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{b}$$

就是解?

这样的矩阵 $\boldsymbol{G}$ 就涉及到广义逆的概念.

广义逆 (generalized inverse), 也称伪逆(pseudoinverse), 一般是指 Moore–Penrose **广义逆矩阵** (Moore–Penrose pseudoinverse).

1

广义逆 (generalized inverse), 也称伪逆(pseudoinverse), 一般是指 Moore–Penrose **广义逆矩阵** (Moore–Penrose pseudoinverse).

F. H. Moore[1] 于 1920 年给出了矩阵的广义逆的概念.

[1] Eliakim Hastings Moore (1862-1932), 美国数学家, 是二十世纪初美国数学的奠基人, 曾任美国数学会主席.

广义逆 (generalized inverse), 也称伪逆(pseudoinverse), 一般是指 Moore–Penrose **广义逆矩阵** (Moore–Penrose pseudoinverse).

F. H. Moore[1] 于 1920 年给出了矩阵的广义逆的概念.

Definition 1.1 (Moore 广义逆矩阵)

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 如果 $\boldsymbol{G} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ 满足

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} = P_{R(\boldsymbol{A}),N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})}, \qquad \boldsymbol{G}\boldsymbol{A} = P_{R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}),N(\boldsymbol{A})}, \tag{1}$$

其中 $P_{R(\boldsymbol{A}),N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})}$ 表示沿子空间 $N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$ 向子空间 $R(\boldsymbol{A})$ 上的正交投影算子, $P_{R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}),N(\boldsymbol{A})}$ 表示沿子空间 $N(\boldsymbol{A})$ 向子空间 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$ 上的正交投影算子, 则称 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 Moore 广义逆矩阵.

[1]Eliakim Hastings Moore (1862-1932), 美国数学家, 是二十世纪初美国数学的奠基人, 曾任美国数学会主席.

广义逆 (generalized inverse), 也称伪逆(pseudoinverse), 一般是指 Moore–Penrose **广义逆矩阵** (Moore–Penrose pseudoinverse).

F. H. Moore[1] 于 1920 年给出了矩阵的广义逆的概念.

Definition 1.1 (Moore 广义逆矩阵)

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 如果 $\boldsymbol{G} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ 满足

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} = P_{R(\boldsymbol{A}),N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})}, \qquad \boldsymbol{G}\boldsymbol{A} = P_{R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}),N(\boldsymbol{A})}, \tag{1}$$

其中 $P_{R(\boldsymbol{A}),N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})}$ 表示沿子空间 $N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$ 向子空间 $R(\boldsymbol{A})$ 上的正交投影算子, $P_{R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}),N(\boldsymbol{A})}$ 表示沿子空间 $N(\boldsymbol{A})$ 向子空间 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$ 上的正交投影算子, 则称 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 Moore 广义逆矩阵.

公式 (1) 含义不容易理解和应用, 因此 Moore 给出的广义逆矩阵一直未被重视.

[1]Eliakim Hastings Moore (1862-1932), 美国数学家, 是二十世纪初美国数学的奠基人, 曾任美国数学会主席.

广义逆 (generalized inverse), 也称伪逆(pseudoinverse), 一般是指 Moore–Penrose **广义逆矩阵** (Moore–Penrose pseudoinverse).

F. H. Moore[1] 于 1920 年给出了矩阵的广义逆的概念.

Definition 1.1 (Moore 广义逆矩阵)

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 如果 $\boldsymbol{G} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ 满足

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} = P_{R(\boldsymbol{A}), N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})}, \qquad \boldsymbol{G}\boldsymbol{A} = P_{R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}), N(\boldsymbol{A})}, \tag{1}$$

其中 $P_{R(\boldsymbol{A}), N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})}$ 表示沿子空间 $N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$ 向子空间 $R(\boldsymbol{A})$ 上的正交投影算子, $P_{R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}), N(\boldsymbol{A})}$ 表示沿子空间 $N(\boldsymbol{A})$ 向子空间 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$ 上的正交投影算子, 则称 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 Moore 广义逆矩阵.

公式 (1) 含义不容易理解和应用, 因此 Moore 给出的广义逆矩阵一直未被重视. 直到 1955 年剑桥大学的博士研究生 Roger Penrose 给出了广义逆矩阵的另一个等价定义, 才使得广义逆矩阵的研究获得迅速发展.

[1] Eliakim Hastings Moore (1862-1932), 美国数学家, 是二十世纪初美国数学的奠基人, 曾任美国数学会主席.

广义逆矩阵的基本概念

Definition 1.2 (Penrose 广义逆矩阵)

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 如果 $\boldsymbol{G} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ 满足

$$\begin{aligned}
&(1) \quad \boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{A},\\
&(2) \quad \boldsymbol{GAG} = \boldsymbol{G},\\
&(3) \quad (\boldsymbol{AG})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{AG},\\
&(4) \quad (\boldsymbol{GA})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{GA},
\end{aligned}$$

则称 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 Penrose 广义逆矩阵, 简称为 Penrose 广义逆, 记为 $\boldsymbol{A}^{+}$, 或 $\boldsymbol{A}^{\dagger}$.

Definition 1.2 (Penrose 广义逆矩阵)

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 如果 $\boldsymbol{G} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ 满足

$$\begin{aligned} &(1) \quad \boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{A}, \\ &(2) \quad \boldsymbol{GAG} = \boldsymbol{G}, \\ &(3) \quad (\boldsymbol{AG})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{AG}, \\ &(4) \quad (\boldsymbol{GA})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{GA}, \end{aligned}$$

则称 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 Penrose 广义逆矩阵, 简称为 Penrose 广义逆, 记为 $\boldsymbol{A}^{+}$, 或 $\boldsymbol{A}^{\dagger}$. 矩阵的 Moore 广义逆与 Penrose 广义逆是等价的, 并且是唯一的, 故也称为 M-P 广义逆.

Definition 1.2 (Penrose 广义逆矩阵)

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 如果 $\boldsymbol{G} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ 满足

$$\begin{aligned} &(1) \quad \boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{A}, \\ &(2) \quad \boldsymbol{GAG} = \boldsymbol{G}, \\ &(3) \quad (\boldsymbol{AG})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{AG}, \\ &(4) \quad (\boldsymbol{GA})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{GA}, \end{aligned}$$

则称 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 Penrose 广义逆矩阵, 简称为 Penrose 广义逆, 记为 $\boldsymbol{A}^{+}$, 或 $\boldsymbol{A}^{\dagger}$. 矩阵的 Moore 广义逆与 Penrose 广义逆是等价的, 并且是唯一的, 故也称为 M-P 广义逆.

若矩阵 $\boldsymbol{G}$ 满足条件 (1), (2), (3), (4) 中的部分或全部, 则称 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的广义逆矩阵, 简称为广义逆.

若 $\boldsymbol{G}$ 只满足条件 (1), 则 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1\}$-逆,

若 $\boldsymbol{G}$ 只满足条件 (1), 则 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1\}$-逆, 记为 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1\}$.

若 $\boldsymbol{G}$ 只满足条件 (1), 则 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1\}$-逆, 记为 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1\}$.

若 $\boldsymbol{G}$ 只满足条件 (1), (2), 则 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1, 2\}$-逆,

若 $\boldsymbol{G}$ 只满足条件 (1), 则 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1\}$-逆, 记为 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1\}$.

若 $\boldsymbol{G}$ 只满足条件 (1), (2), 则 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1,2\}$-逆, 记为 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1,2\}$.

若 $\boldsymbol{G}$ 只满足条件 (1), 则 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1\}$-逆, 记为 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1\}$.
若 $\boldsymbol{G}$ 只满足条件 (1), (2), 则 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1,2\}$-逆, 记为 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1,2\}$.
满足条件 (1), (2), (3), (4) 的部分或全部的广义逆矩阵共有 15 类,

若 $\boldsymbol{G}$ 只满足条件 (1), 则 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1\}$-逆, 记为 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1\}$.
若 $\boldsymbol{G}$ 只满足条件 (1), (2), 则 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1,2\}$-逆, 记为 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1,2\}$.
满足条件 (1), (2), (3), (4) 的部分或全部的广义逆矩阵共有 15 类, 即

$$\mathrm{C}_4^1 + \mathrm{C}_4^2 + \mathrm{C}_4^3 + \mathrm{C}_4^4 = 15.$$

若 $\boldsymbol{G}$ 只满足条件 (1), 则 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1\}$-逆, 记为 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1\}$.
若 $\boldsymbol{G}$ 只满足条件 (1), (2), 则 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1,2\}$-逆, 记为 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1,2\}$.
满足条件 (1), (2), (3), (4) 的部分或全部的广义逆矩阵共有 15 类, 即

$$\mathrm{C}_4^1 + \mathrm{C}_4^2 + \mathrm{C}_4^3 + \mathrm{C}_4^4 = 15.$$

常用的广义逆是以下 5 类:

$$\boldsymbol{A}\{1\}, \quad \boldsymbol{A}\{1,2\}, \quad \boldsymbol{A}\{1,3\}, \quad \boldsymbol{A}\{1,4\}, \quad \boldsymbol{A}^{+}.$$

☞ 只有 $\boldsymbol{A}^{+}$ 是唯一的, 而其他各种广义逆矩阵都不是唯一的.

若 $\boldsymbol{G}$ 只满足条件 (1), 则 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1\}$-逆, 记为 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1\}$.

若 $\boldsymbol{G}$ 只满足条件 (1), (2), 则 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1,2\}$-逆, 记为 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1,2\}$.

满足条件 (1), (2), (3), (4) 的部分或全部的广义逆矩阵共有 15 类, 即

$$\mathrm{C}_4^1 + \mathrm{C}_4^2 + \mathrm{C}_4^3 + \mathrm{C}_4^4 = 15.$$

常用的广义逆是以下 5 类:

$$\boldsymbol{A}\{1\}, \quad \boldsymbol{A}\{1,2\}, \quad \boldsymbol{A}\{1,3\}, \quad \boldsymbol{A}\{1,4\}, \quad \boldsymbol{A}^{+}.$$

☞ 只有 $\boldsymbol{A}^{+}$ 是唯一的, 而其他各种广义逆矩阵都不是唯一的.
当 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵时, 它的所有广义逆矩阵都等于 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

若 $\boldsymbol{G}$ 只满足条件 (1), 则 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1\}$-逆, 记为 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1\}$.
若 $\boldsymbol{G}$ 只满足条件 (1), (2), 则 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1,2\}$-逆, 记为 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1,2\}$.
满足条件 (1), (2), (3), (4) 的部分或全部的广义逆矩阵共有 15 类, 即

$$\mathrm{C}_4^1 + \mathrm{C}_4^2 + \mathrm{C}_4^3 + \mathrm{C}_4^4 = 15.$$

常用的广义逆是以下 5 类:

$$\boldsymbol{A}\{1\}, \quad \boldsymbol{A}\{1,2\}, \quad \boldsymbol{A}\{1,3\}, \quad \boldsymbol{A}\{1,4\}, \quad \boldsymbol{A}^+.$$

☞ 只有 $\boldsymbol{A}^+$ 是唯一的, 而其他各种广义逆矩阵都不是唯一的.
当 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵时, 它的所有广义逆矩阵都等于 $\boldsymbol{A}^{-1}$.
以下将重点讨论这 5 类广义逆.

Example 1.3

设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \forall a \in \mathbb{C},$$

是 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1\}$-逆.

Example 1.3

设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \forall a \in \mathbb{C},$$

是 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1\}$-逆. 可见 $\{1\}$-逆不是唯一确定的.

Example 1.3

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, 则

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}1 & a\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \qquad \forall a\in\mathbb{C},$$

是 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1\}$-逆. 可见 $\{1\}$-逆不是唯一确定的.

但 $\boldsymbol{A}^{+}$ 是唯一的, 这里

$$\boldsymbol{A}^{+}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}.$$

Sir Roger Penrose (born 8 August 1931), is an English mathematical physicist, recreational mathematician and philosopher. He is the Emeritus Rouse Ball Professor of Mathematics at the Mathematical Institute of the University of Oxford, as well as an Emeritus Fellow of Wadham College.

Penrose is internationally renowned for his scientific work in mathematical physics, in particular for his contributions to general relativity and cosmology. He has received a number of prizes and awards, including the 1988 Wolf Prize for physics, which he shared with **Stephen Hawking** for their contribution to our understanding of the universe.

Outline

Definition 2.1

对于 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 如果 $\boldsymbol{G} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ 满足

$$\boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{A},$$

则 $\boldsymbol{G}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的 {1}-逆, 也称为 $\boldsymbol{A}$ 的减号逆 (或称为 $\boldsymbol{A}$ 的 g 逆).

Definition 2.1

对于 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 如果 $\boldsymbol{G} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ 满足

$$\boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{A},$$

则 $\boldsymbol{G}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的 {1}-逆, 也称为 $\boldsymbol{A}$ 的减号逆 (或称为 $\boldsymbol{A}$ 的 g 逆). 记为 $\boldsymbol{A}^{(1)}$, 或 $\boldsymbol{A}^{-}$.

Definition 2.1

对于 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 如果 $\boldsymbol{G} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ 满足

$$\boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{A},$$

则 $\boldsymbol{G}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的 {1}-逆, 也称为 $\boldsymbol{A}$ 的减号逆 (或称为 $\boldsymbol{A}$ 的 g 逆). 记为 $\boldsymbol{A}^{(1)}$, 或 $\boldsymbol{A}^{-}$.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 所有 {1}-逆的全体记为 $\boldsymbol{A}\{1\}$,

Definition 2.1

对于 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 如果 $\boldsymbol{G} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ 满足

$$\boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{A},$$

则 $\boldsymbol{G}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1\}$-逆, 也称为 $\boldsymbol{A}$ 的减号逆 (或称为 $\boldsymbol{A}$ 的 g 逆). 记为 $\boldsymbol{A}^{(1)}$, 或 $\boldsymbol{A}^{-}$.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 所有 $\{1\}$-逆的全体记为 $\boldsymbol{A}\{1\}$, 即

$$\boldsymbol{A}\{1\} = \left\{\boldsymbol{G} \mid \boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{A}\right\}.$$

Definition 2.1

对于 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 如果 $\boldsymbol{G} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ 满足

$$\boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{A},$$

则 $\boldsymbol{G}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的 {1}-逆, 也称为 $\boldsymbol{A}$ 的减号逆 (或称为 $\boldsymbol{A}$ 的 g 逆). 记为 $\boldsymbol{A}^{(1)}$, 或 $\boldsymbol{A}^{-}$.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 所有 {1}-逆的全体记为 $\boldsymbol{A}\{1\}$, 即

$$\boldsymbol{A}\{1\} = \left\{\boldsymbol{G} \mid \boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{A}\right\}.$$

☞ 注意表达式:

$$\boldsymbol{AA}^{(1)}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}.$$

Lemma 2.2

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 且 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ 分别为 m 阶和 n 阶非奇异方阵, 满足 $\boldsymbol{PAQ} = \boldsymbol{B}$,

Lemma 2.2

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 且 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ 分别为 m 阶和 n 阶非奇异方阵, 满足 $\boldsymbol{PAQ} = \boldsymbol{B}$, 则

$$\boldsymbol{A}\{1\} = \left\{ \boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}^{(1)}\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{B}^{(1)} \in \boldsymbol{B}\{1\} \right\}.$$

Lemma 2.2

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 且 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ 分别为 m 阶和 n 阶非奇异方阵, 满足 $\boldsymbol{PAQ} = \boldsymbol{B}$, 则

$$\boldsymbol{A}\{1\} = \left\{\boldsymbol{QB}^{(1)}\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{B}^{(1)} \in \boldsymbol{B}\{1\}\right\}.$$

证: 任取 $\boldsymbol{B}^{(1)} \in \boldsymbol{B}\{1\}$,

Lemma 2.2

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 且 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ 分别为 m 阶和 n 阶非奇异方阵, 满足 $\boldsymbol{PAQ} = \boldsymbol{B}$, 则

$$\boldsymbol{A}\{1\} = \left\{\boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}^{(1)}\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{B}^{(1)} \in \boldsymbol{B}\{1\}\right\}.$$

证: 任取 $\boldsymbol{B}^{(1)} \in \boldsymbol{B}\{1\}$,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}^{(1)}\boldsymbol{P}\right)\boldsymbol{A} &= \left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{-1}\right)\left(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}^{(1)}\boldsymbol{P}\right)\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{-1}\right) && \left(\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{-1}\right)\\
&= \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{(1)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{-1}\\
&= \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{-1} && \left(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{(1)}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\right)\\
&= \boldsymbol{A}.
\end{aligned}$$

Lemma 2.2

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 且 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ 分别为 m 阶和 n 阶非奇异方阵, 满足 $\boldsymbol{PAQ} = \boldsymbol{B}$, 则

$$\boldsymbol{A}\{1\} = \left\{\boldsymbol{QB}^{(1)}\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{B}^{(1)} \in \boldsymbol{B}\{1\}\right\}.$$

证: 任取 $\boldsymbol{B}^{(1)} \in \boldsymbol{B}\{1\}$,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{QB}^{(1)}\boldsymbol{P}\right)\boldsymbol{A} &= \left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BQ}^{-1}\right)\left(\boldsymbol{QB}^{(1)}\boldsymbol{P}\right)\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BQ}^{-1}\right) && \left(\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BQ}^{-1}\right)\\
&= \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BB}^{(1)}\boldsymbol{BQ}^{-1}\\
&= \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BQ}^{-1} && \left(\boldsymbol{BB}^{(1)}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\right)\\
&= \boldsymbol{A}.
\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{QB}^{(1)}\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{A}\{1\}$.

反之, 任取 $\boldsymbol{A}^{(1)} \in \boldsymbol{A}\{1\}$, 则有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$.

反之, 任取 $\boldsymbol{A}^{(1)} \in \boldsymbol{A}\{1\}$, 则有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$. 代入 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{-1}$, 即

$$\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{-1}\right)\boldsymbol{A}^{(1)}\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{-1}\right) = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{-1}.$$

反之, 任取 $\boldsymbol{A}^{(1)} \in \boldsymbol{A}\{1\}$, 则有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$. 代入 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{-1}$, 即

$$\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{-1}\right)\boldsymbol{A}^{(1)}\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{-1}\right) = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{-1}.$$

两端左乘 $\boldsymbol{P}$, 右乘 $\boldsymbol{Q}$, 得

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B},$$

反之, 任取 $\boldsymbol{A}^{(1)} \in \boldsymbol{A}\{1\}$, 则有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$. 代入 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{-1}$, 即

$$\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{-1}\right)\boldsymbol{A}^{(1)}\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{-1}\right) = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{-1}.$$

两端左乘 $\boldsymbol{P}$, 右乘 $\boldsymbol{Q}$, 得

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B},$$

则

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{P}^{-1} \in \boldsymbol{B}\{1\}.$$

反之, 任取 $\boldsymbol{A}^{(1)} \in \boldsymbol{A}\{1\}$, 则有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$. 代入 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{-1}$, 即

$$\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{-1}\right)\boldsymbol{A}^{(1)}\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{-1}\right) = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{-1}.$$

两端左乘 $\boldsymbol{P}$, 右乘 $\boldsymbol{Q}$, 得

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B},$$

则

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{P}^{-1} \in \boldsymbol{B}\{1\}.$$

因而存在 $\boldsymbol{B}^{(1)} \in \boldsymbol{B}\{1\}$, 使得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{B}^{(1)}.$$

反之, 任取 $\boldsymbol{A}^{(1)} \in \boldsymbol{A}\{1\}$, 则有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$. 代入 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{-1}$, 即

$$\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{-1}\right)\boldsymbol{A}^{(1)}\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{-1}\right) = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{-1}.$$

两端左乘 $\boldsymbol{P}$, 右乘 $\boldsymbol{Q}$, 得

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B},$$

则

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{P}^{-1} \in \boldsymbol{B}\{1\}.$$

因而存在 $\boldsymbol{B}^{(1)} \in \boldsymbol{B}\{1\}$, 使得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{B}^{(1)}.$$

故 $\boldsymbol{A}^{(1)}$ 可表示为

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}^{(1)}\boldsymbol{P}.$$

反之, 任取 $\boldsymbol{A}^{(1)} \in \boldsymbol{A}\{1\}$, 则有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$. 代入 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{-1}$, 即

$$\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{-1}\right)\boldsymbol{A}^{(1)}\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{-1}\right) = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{-1}.$$

两端左乘 $\boldsymbol{P}$, 右乘 $\boldsymbol{Q}$, 得

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B},$$

则

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{P}^{-1} \in \boldsymbol{B}\{1\}.$$

因而存在 $\boldsymbol{B}^{(1)} \in \boldsymbol{B}\{1\}$, 使得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{B}^{(1)}.$$

故 $\boldsymbol{A}^{(1)}$ 可表示为

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}^{(1)}\boldsymbol{P}.$$

证毕. $\square$

Theorem 2.3

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}_r^{m \times n}$, 且 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ 分别为 m 阶和 n 阶非奇异方阵, 满足 $\boldsymbol{PAQ} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$, 则有

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \boldsymbol{Q} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{G}_{12} \\ \boldsymbol{G}_{21} & \boldsymbol{G}_{22} \end{bmatrix} \boldsymbol{P}, \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{G}_{12}$, $\boldsymbol{G}_{21}$, $\boldsymbol{G}_{22}$ 分别是 $r \times (m-r)$, $(n-r) \times r$, $(n-r) \times (m-r)$ 阶的任意矩阵.

Theorem 2.3

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$, 且 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ 分别为 m 阶和 n 阶非奇异方阵, 满足
$\boldsymbol{PAQ} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$, 则有

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \boldsymbol{Q} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{G}_{12} \\ \boldsymbol{G}_{21} & \boldsymbol{G}_{22} \end{bmatrix} \boldsymbol{P}, \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{G}_{12}$, $\boldsymbol{G}_{21}$, $\boldsymbol{G}_{22}$ 分别是 $r \times (m-r)$, $(n-r) \times r$, $(n-r) \times (m-r)$ 阶的任意矩阵.

☞ 注意 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的标准形,

Theorem 2.3

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$, 且 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ 分别为 m 阶和 n 阶非奇异方阵, 满足
$\boldsymbol{PAQ} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$, 则有

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \boldsymbol{Q} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{G}_{12} \\ \boldsymbol{G}_{21} & \boldsymbol{G}_{22} \end{bmatrix} \boldsymbol{P}, \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{G}_{12}$, $\boldsymbol{G}_{21}$, $\boldsymbol{G}_{22}$ 分别是 $r\times(m-r)$, $(n-r)\times r$, $(n-r)\times(m-r)$ 阶的任意矩阵.

☞ 注意 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的标准形, 此定理表明, 只要找到将 $\boldsymbol{A}$ 化为标准形的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, 依公式 (2) 即可得到广义逆 $\boldsymbol{A}^{(1)}$.

Theorem 2.3

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$, 且 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ 分别为 m 阶和 n 阶非奇异方阵, 满足
$\boldsymbol{PAQ} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$, 则有

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \boldsymbol{Q} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{G}_{12} \\ \boldsymbol{G}_{21} & \boldsymbol{G}_{22} \end{bmatrix} \boldsymbol{P}, \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{G}_{12}$, $\boldsymbol{G}_{21}$, $\boldsymbol{G}_{22}$ 分别是 $r\times(m-r)$, $(n-r)\times r$, $(n-r)\times(m-r)$ 阶的任意矩阵.

☞ 注意 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的标准形, 此定理表明, 只要找到将 $\boldsymbol{A}$ 化为标准形的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, 依公式 (2) 即可得到广义逆 $\boldsymbol{A}^{(1)}$.

特别地, 当 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}_n^{n\times n}$ 时,

Theorem 2.3

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$, 且 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ 分别为 m 阶和 n 阶非奇异方阵, 满足 $\boldsymbol{PAQ} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$, 则有

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \boldsymbol{Q} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{G}_{12} \\ \boldsymbol{G}_{21} & \boldsymbol{G}_{22} \end{bmatrix} \boldsymbol{P}, \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{G}_{12}$, $\boldsymbol{G}_{21}$, $\boldsymbol{G}_{22}$ 分别是 $r\times(m-r)$, $(n-r)\times r$, $(n-r)\times(m-r)$ 阶的任意矩阵.

☞ 注意 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的标准形, 此定理表明, 只要找到将 $\boldsymbol{A}$ 化为标准形的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, 依公式 (2) 即可得到广义逆 $\boldsymbol{A}^{(1)}$.

特别地, 当 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}_n^{n\times n}$ 时, 存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, 使 $\boldsymbol{PAQ} = \boldsymbol{I}_n$,

Theorem 2.3

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$, 且 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ 分别为 m 阶和 n 阶非奇异方阵, 满足
$\boldsymbol{PAQ} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$, 则有

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \boldsymbol{Q} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{G}_{12} \\ \boldsymbol{G}_{21} & \boldsymbol{G}_{22} \end{bmatrix} \boldsymbol{P}, \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{G}_{12}$, $\boldsymbol{G}_{21}$, $\boldsymbol{G}_{22}$ 分别是 $r\times(m-r)$, $(n-r)\times r$, $(n-r)\times(m-r)$ 阶的任意矩阵.

☞ 注意 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的标准形, 此定理表明, 只要找到将 $\boldsymbol{A}$ 化为标准形的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, 依公式 (2) 即可得到广义逆 $\boldsymbol{A}^{(1)}$.

特别地, 当 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}_n^{n\times n}$ 时, 存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, 使 $\boldsymbol{PAQ} = \boldsymbol{I}_n$, 从而有

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \boldsymbol{QI}_n\boldsymbol{P}$$

Theorem 2.3

设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}_r^{m\times n}$, 且 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ 分别为 m 阶和 n 阶非奇异方阵, 满足 $\boldsymbol{PAQ}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$, 则有

$$\boldsymbol{A}^{(1)}=\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{G}_{12}\\ \boldsymbol{G}_{21} & \boldsymbol{G}_{22}\end{bmatrix}\boldsymbol{P}, \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{G}_{12}$, $\boldsymbol{G}_{21}$, $\boldsymbol{G}_{22}$ 分别是 $r\times(m-r)$, $(n-r)\times r$, $(n-r)\times(m-r)$ 阶的任意矩阵.

☞ 注意 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的标准形, 此定理表明, 只要找到将 $\boldsymbol{A}$ 化为标准形的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, 依公式 (2) 即可得到广义逆 $\boldsymbol{A}^{(1)}$.

特别地, 当 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}_n^{n\times n}$ 时, 存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, 使 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{I}_n$, 从而有

$$\boldsymbol{A}^{(1)}=\boldsymbol{QI}_n\boldsymbol{P}=\boldsymbol{QP}=\boldsymbol{A}^{-1}.$$

Theorem 2.3

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$, 且 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ 分别为 m 阶和 n 阶非奇异方阵, 满足
$\boldsymbol{PAQ} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$, 则有

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \boldsymbol{Q} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{G}_{12} \\ \boldsymbol{G}_{21} & \boldsymbol{G}_{22} \end{bmatrix} \boldsymbol{P}, \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{G}_{12}$, $\boldsymbol{G}_{21}$, $\boldsymbol{G}_{22}$ 分别是 $r\times(m-r)$, $(n-r)\times r$, $(n-r)\times(m-r)$ 阶的任意矩阵.

☞ 注意 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的标准形, 此定理表明, 只要找到将 $\boldsymbol{A}$ 化为标准形的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, 依公式 (2) 即可得到广义逆 $\boldsymbol{A}^{(1)}$.

特别地, 当 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}_n^{n\times n}$ 时, 存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, 使 $\boldsymbol{PAQ} = \boldsymbol{I}_n$, 从而有

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \boldsymbol{QI}_n\boldsymbol{P} = \boldsymbol{QP} = \boldsymbol{A}^{-1}.$$

可见满秩矩阵的 $\{1\}$-逆是唯一的, 且等于 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

证: 记 $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$,

证: 记 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$, 对照引理 2.2, 只需证明 $\boldsymbol{B}$ 的 $\{1\}$-逆有且仅有形式 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{G}_{12}\\ \boldsymbol{G}_{21} & \boldsymbol{G}_{22}\end{bmatrix}$ 即可.

证: 记 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$, 对照引理 2.2, 只需证明 $\boldsymbol{B}$ 的 $\{1\}$-逆有且仅有形式 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{G}_{12}\\ \boldsymbol{G}_{21} & \boldsymbol{G}_{22}\end{bmatrix}$ 即可. 设

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{G}_{11} & \boldsymbol{G}_{12}\\ \boldsymbol{G}_{21} & \boldsymbol{G}_{22}\end{bmatrix},$$

证: 记 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$, 对照引理 2.2, 只需证明 $\boldsymbol{B}$ 的 $\{1\}$-逆有且仅有形式 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{G}_{12}\\ \boldsymbol{G}_{21} & \boldsymbol{G}_{22}\end{bmatrix}$ 即可. 设

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{G}_{11} & \boldsymbol{G}_{12}\\ \boldsymbol{G}_{21} & \boldsymbol{G}_{22}\end{bmatrix},$$

代入 $\boldsymbol{BGB}=\boldsymbol{B}$, 得

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{G}_{11} & \boldsymbol{G}_{12}\\ \boldsymbol{G}_{21} & \boldsymbol{G}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}.$$

证: 记 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$, 对照引理 2.2, 只需证明 $\boldsymbol{B}$ 的 $\{1\}$-逆有且仅有形式 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{G}_{12}\\ \boldsymbol{G}_{21} & \boldsymbol{G}_{22}\end{bmatrix}$ 即可. 设

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{G}_{11} & \boldsymbol{G}_{12}\\ \boldsymbol{G}_{21} & \boldsymbol{G}_{22}\end{bmatrix},$$

代入 $\boldsymbol{BGB}=\boldsymbol{B}$, 得

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{G}_{11} & \boldsymbol{G}_{12}\\ \boldsymbol{G}_{21} & \boldsymbol{G}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}.$$

从而, 当且仅当 $\boldsymbol{G}_{11}=\boldsymbol{I}_r$, 而 $\boldsymbol{G}_{12}$, $\boldsymbol{G}_{21}$, $\boldsymbol{G}_{22}$ 为任意矩阵时, $\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{B}\{1\}$. $\square$

Example 2.4

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}\{1\}$.

Example 2.4

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}\{1\}$.

解: 将 $\boldsymbol{A}$ 化为标准形, 在 $\boldsymbol{A}$ 的右边放上单位矩阵 $\boldsymbol{I}_2$, 在 $\boldsymbol{A}$ 的下方放上单位矩阵 $\boldsymbol{I}_3$, 当 $\boldsymbol{A}$ 变成标准形时, 则 $\boldsymbol{I}_2$ 就变成 $\boldsymbol{P}$, 而 $\boldsymbol{I}_3$ 就变成 $\boldsymbol{Q}$.

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{I}_2\\ \boldsymbol{I}_3 & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc:cc}1 & -1 & 2 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1\\ \hdashline 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{array}\right]\xrightarrow[c_3-2c_1]{c_2+c_1}\left[\begin{array}{ccc:cc}1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1\\ \hdashline 1 & 1 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[c_2+4c_3]{c_1+2c_3}\left[\begin{array}{ccc:cc}1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1\\ \hdashline -3 & -7 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0\end{array}\right]\xrightarrow[c_2\leftrightarrow c_3]{r_2\times(-1)}\left[\begin{array}{ccc:cc}1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1\\ \hdashline -3 & -2 & -7 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0\end{array}\right].$$

令

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} -3 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

则有

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{I}_2,\boldsymbol{O}],$$

于是

$$\boldsymbol{A}\{1\}=\left\{\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix}\boldsymbol{P} \,\middle|\, \forall x_1,x_2\in\mathbb{C}\right\}. \quad \square$$

令

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}-3 & -2 & -7\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 4\end{bmatrix}.$$

则有

$$\boldsymbol{PAQ}=[\boldsymbol{I}_2,\boldsymbol{O}],$$

于是

$$\boldsymbol{A}\{1\}=\left\{\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ x_1 & x_2\end{bmatrix}\boldsymbol{P}\;\middle|\;\forall x_1,x_2\in\mathbb{C}\right\}. \quad \square$$

若 $x_1=x_2=0$, 则

$$\boldsymbol{A}^{(1)}=\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 0 & 0\\ 2 & -1\end{bmatrix}.$$

这只不过是其中的一个 $\{1\}$-逆.

如果求得了某个 $\boldsymbol{A}^{(1)}$, 则由下述定理可以得到 $\boldsymbol{A}\{1\}$ 的通式.

Theorem 2.5

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{A}^{(1)} \in \boldsymbol{A}\{1\}$, 则

1. $\boldsymbol{A}\{1\} = \left\{\boldsymbol{A}^{(1)} + \boldsymbol{U} - \boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)} \mid \boldsymbol{U} \in \mathbb{C}^{n\times m} \text{ 为任意矩阵}\right\}$;

如果求得了某个 $\boldsymbol{A}^{(1)}$, 则由下述定理可以得到 $\boldsymbol{A}\{1\}$ 的通式.

Theorem 2.5

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{A}^{(1)} \in \boldsymbol{A}\{1\}$, 则

1. $\boldsymbol{A}\{1\} = \left\{\boldsymbol{A}^{(1)} + \boldsymbol{U} - \boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)} \mid \boldsymbol{U} \in \mathbb{C}^{n\times m} \text{ 为任意矩阵}\right\}$;
2. $\boldsymbol{A}\{1\} = \left\{\boldsymbol{A}^{(1)} + \boldsymbol{V}(\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}) + (\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{U} \mid \boldsymbol{U}, \boldsymbol{V} \in \mathbb{C}^{n\times m} \text{ 为任意矩阵}\right\}$.

如果求得了某个 $\boldsymbol{A}^{(1)}$, 则由下述定理可以得到 $\boldsymbol{A}\{1\}$ 的通式.

Theorem 2.5

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{A}^{(1)} \in \boldsymbol{A}\{1\}$, 则

1. $\boldsymbol{A}\{1\} = \left\{\boldsymbol{A}^{(1)} + \boldsymbol{U} - \boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)} \mid \boldsymbol{U} \in \mathbb{C}^{n\times m}\ \text{为任意矩阵}\right\}$;
2. $\boldsymbol{A}\{1\} = \left\{\boldsymbol{A}^{(1)} + \boldsymbol{V}(\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}) + (\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{U} \mid \boldsymbol{U},\ \boldsymbol{V} \in \mathbb{C}^{n\times m}\ \text{为任意矩阵}\right\}$.

证: 记 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}^{(1)} + \boldsymbol{U} - \boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}$,

如果求得了某个 $\boldsymbol{A}^{(1)}$, 则由下述定理可以得到 $\boldsymbol{A}\{1\}$ 的通式.

Theorem 2.5

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{A}^{(1)} \in \boldsymbol{A}\{1\}$, 则

1. $\boldsymbol{A}\{1\} = \left\{\boldsymbol{A}^{(1)} + \boldsymbol{U} - \boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)} \mid \boldsymbol{U} \in \mathbb{C}^{n\times m} \text{ 为任意矩阵}\right\}$;
2. $\boldsymbol{A}\{1\} = \left\{\boldsymbol{A}^{(1)} + \boldsymbol{V}(\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}) + (\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{U} \mid \boldsymbol{U},\ \boldsymbol{V} \in \mathbb{C}^{n\times m} \text{ 为任意矩阵}\right\}$.

证: 记 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}^{(1)} + \boldsymbol{U} - \boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}$, 因

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}^{(1)} + \boldsymbol{U} - \boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\right)\boldsymbol{A} \\
&= \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} \\
&= \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\boldsymbol{A} \\
&= \boldsymbol{A},
\end{aligned}
$$

如果求得了某个 $\boldsymbol{A}^{(1)}$, 则由下述定理可以得到 $\boldsymbol{A}\{1\}$ 的通式.

Theorem 2.5

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{A}^{(1)} \in \boldsymbol{A}\{1\}$, 则

1. $\boldsymbol{A}\{1\} = \left\{\boldsymbol{A}^{(1)} + \boldsymbol{U} - \boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)} \mid \boldsymbol{U} \in \mathbb{C}^{n\times m}\text{ 为任意矩阵}\right\}$;
2. $\boldsymbol{A}\{1\} = \left\{\boldsymbol{A}^{(1)} + \boldsymbol{V}(\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}) + (\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{U} \mid \boldsymbol{U},\ \boldsymbol{V} \in \mathbb{C}^{n\times m}\text{ 为任意矩阵}\right\}$.

证: 记 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}^{(1)} + \boldsymbol{U} - \boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}$, 因

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}^{(1)} + \boldsymbol{U} - \boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\right)\boldsymbol{A}\\
&= \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\\
&= \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}\\
&= \boldsymbol{A},
\end{aligned}
$$

故 $\boldsymbol{Y} \in \boldsymbol{A}\{1\}$.

记 $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{A}^{(1)} + \boldsymbol{V}(\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}) + (\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{U}$,

记 $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{A}^{(1)}+\boldsymbol{V}(\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)})+(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{U}$, 因

$$(\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}, \tag{4}$$

记 $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{A}^{(1)} + \boldsymbol{V}(\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}) + (\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{U}$, 因

$$(\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}, \tag{4}$$

故 $\boldsymbol{AZA} = \boldsymbol{A}$, 即 $\boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{A}\{1\}$.

反之, 任取 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{1\}$, 取

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{X} - \boldsymbol{A}^{(1)}, \tag{5}$$

记 $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{A}^{(1)}+\boldsymbol{V}(\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)})+(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{U}$, 因

$$(\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}, \tag{4}$$

故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$, 即 $\boldsymbol{Z}\in\boldsymbol{A}\{1\}$.

反之, 任取 $\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{A}\{1\}$, 取

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{X}-\boldsymbol{A}^{(1)}, \tag{5}$$

则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{(1)}+\boldsymbol{U}-\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}$.

记 $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{A}^{(1)} + \boldsymbol{V}(\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}) + (\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{U}$, 因

$$(\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}, \tag{4}$$

故 $\boldsymbol{AZA} = \boldsymbol{A}$, 即 $\boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{A}\{1\}$.

反之, 任取 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{1\}$, 取

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{X} - \boldsymbol{A}^{(1)}, \tag{5}$$

则 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{(1)} + \boldsymbol{U} - \boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}$.

取

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} - \boldsymbol{A}^{(1)}, \qquad \boldsymbol{U} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}, \tag{6}$$

则 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{(1)} + \boldsymbol{V}(\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}) + (\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{U}$.

记 $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{A}^{(1)}+\boldsymbol{V}(\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)})+(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{U}$, 因

$$(\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}, \tag{4}$$

故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$, 即 $\boldsymbol{Z}\in\boldsymbol{A}\{1\}$.

反之, 任取 $\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{A}\{1\}$, 取

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{X}-\boldsymbol{A}^{(1)}, \tag{5}$$

则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{(1)}+\boldsymbol{U}-\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}$.

取

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{X}-\boldsymbol{A}^{(1)}, \qquad \boldsymbol{U}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}, \tag{6}$$

则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{(1)}+\boldsymbol{V}(\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)})+(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{U}$.

故 $\boldsymbol{A}\{1\}$ 的任何元素都可以用表达式 $\boldsymbol{A}^{(1)}+\boldsymbol{U}-\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}$, $\boldsymbol{A}^{(1)}+\boldsymbol{V}(\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)})+(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{U}$ 给出. 得证. $\square$

Outline

Theorem 2.6

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, 则有

1. $\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\right)^{\mathrm{H}} \in \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\{1\}$.
2. $\lambda^{+}\boldsymbol{A}^{(1)} \in (\lambda\boldsymbol{A})\{1\}$, 其中 $\lambda^{+} = \begin{cases} \lambda^{-1}, & \lambda \neq 0, \\ 0, & \lambda = 0. \end{cases}$
3. $\operatorname{rank} \boldsymbol{A}^{(1)} \geqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{A}$.
4. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}$ 与 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}$ 都是幂等阵, 且满足
   $\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\right) = \operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right) = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}$.

Theorem 2.6

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, 则有

1. $\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\right)^{\mathrm{H}} \in \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\{1\}$.
2. $\lambda^{+}\boldsymbol{A}^{(1)} \in (\lambda\boldsymbol{A})\{1\}$, 其中 $\lambda^{+} = \begin{cases} \lambda^{-1}, & \lambda \neq 0, \\ 0, & \lambda = 0. \end{cases}$
3. $\operatorname{rank} \boldsymbol{A}^{(1)} \geqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{A}$.
4. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}$ 与 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}$ 都是幂等阵, 且满足
   $\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\right) = \operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right) = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}$.

证: (1) 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$, 有

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\right)^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}},$$

Theorem 2.6

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, 则有

1. $\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\right)^{\mathrm{H}} \in \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\{1\}$.
2. $\lambda^{+}\boldsymbol{A}^{(1)} \in (\lambda\boldsymbol{A})\{1\}$, 其中 $\lambda^{+} = \begin{cases} \lambda^{-1}, & \lambda \neq 0, \\ 0, & \lambda = 0. \end{cases}$
3. $\operatorname{rank} \boldsymbol{A}^{(1)} \geqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{A}$.
4. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}$ 与 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}$ 都是幂等阵, 且满足 $\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\right) = \operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right) = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}$.

证: (1) 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$, 有

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\right)^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}},$$

故 $\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\right)^{\mathrm{H}} \in \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\{1\}$.

Theorem 2.6

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, 则有

1. $\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\right)^{\mathrm{H}} \in \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\{1\}$.
2. $\lambda^{+}\boldsymbol{A}^{(1)} \in (\lambda\boldsymbol{A})\{1\}$, 其中 $\lambda^{+} = \begin{cases} \lambda^{-1}, & \lambda \neq 0, \\ 0, & \lambda = 0. \end{cases}$
3. $\operatorname{rank} \boldsymbol{A}^{(1)} \geqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{A}$.
4. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}$ 与 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}$ 都是幂等阵, 且满足 $\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\right) = \operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right) = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}$.

证: (1) 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$, 有

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\right)^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}},$$

故 $\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\right)^{\mathrm{H}} \in \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\{1\}$.

☞ 对照: $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{H}}$.

(2) 当 $\lambda \neq 0$ 时, 因

$$(\lambda \boldsymbol{A})(\lambda^{-1}\boldsymbol{A}^{(1)})(\lambda \boldsymbol{A}) = \lambda \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}$$

(2) 当 $\lambda \neq 0$ 时, 因

$$(\lambda \boldsymbol{A})(\lambda^{-1}\boldsymbol{A}^{(1)})(\lambda \boldsymbol{A}) = \lambda \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} = \lambda \boldsymbol{A},$$

(2) 当 $\lambda \neq 0$ 时, 因

$$(\lambda \boldsymbol{A})(\lambda^{-1}\boldsymbol{A}^{(1)})(\lambda \boldsymbol{A}) = \lambda \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} = \lambda \boldsymbol{A},$$

所以 $\lambda^{-1}\boldsymbol{A}^{(1)} \in (\lambda \boldsymbol{A})\{1\}$.

(2) 当 $\lambda \neq 0$ 时, 因

$$(\lambda \boldsymbol{A})(\lambda^{-1} \boldsymbol{A}^{(1)})(\lambda \boldsymbol{A}) = \lambda \boldsymbol{A} \boldsymbol{A}^{(1)} \boldsymbol{A} = \lambda \boldsymbol{A},$$

所以 $\lambda^{-1} \boldsymbol{A}^{(1)} \in (\lambda \boldsymbol{A})\{1\}$.

当 $\lambda = 0$ 时, 因 $(0\boldsymbol{A})(0\boldsymbol{A}^{(1)})(0\boldsymbol{A}) = 0\boldsymbol{A}$, 故 $0\boldsymbol{A}^{(1)} \in (0\boldsymbol{A})\{1\}$.

(2) 当 $\lambda \neq 0$ 时, 因

$$(\lambda \boldsymbol{A})(\lambda^{-1}\boldsymbol{A}^{(1)})(\lambda \boldsymbol{A}) = \lambda \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} = \lambda \boldsymbol{A},$$

所以 $\lambda^{-1}\boldsymbol{A}^{(1)} \in (\lambda \boldsymbol{A})\{1\}$.

当 $\lambda = 0$ 时, 因 $(0\boldsymbol{A})(0\boldsymbol{A}^{(1)})(0\boldsymbol{A}) = 0\boldsymbol{A}$, 故 $0\boldsymbol{A}^{(1)} \in (0\boldsymbol{A})\{1\}$.

综合得 $\lambda^{+}\boldsymbol{A}^{(1)} \in (\lambda \boldsymbol{A})\{1\}$.

(2) 当 $\lambda \neq 0$ 时, 因

$$(\lambda \boldsymbol{A})(\lambda^{-1}\boldsymbol{A}^{(1)})(\lambda \boldsymbol{A}) = \lambda \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} = \lambda \boldsymbol{A},$$

所以 $\lambda^{-1}\boldsymbol{A}^{(1)} \in (\lambda \boldsymbol{A})\{1\}$.

当 $\lambda = 0$ 时, 因 $(0\boldsymbol{A})(0\boldsymbol{A}^{(1)})(0\boldsymbol{A}) = 0\boldsymbol{A}$, 故 $0\boldsymbol{A}^{(1)} \in (0\boldsymbol{A})\{1\}$.

综合得 $\lambda^{+}\boldsymbol{A}^{(1)} \in (\lambda \boldsymbol{A})\{1\}$.

☞ 对照: $(\lambda \boldsymbol{A})^{-1} = \lambda^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$, $\lambda \neq 0$.

(2) 当 $\lambda \neq 0$ 时, 因

$$(\lambda \boldsymbol{A})(\lambda^{-1}\boldsymbol{A}^{(1)})(\lambda \boldsymbol{A}) = \lambda \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} = \lambda \boldsymbol{A},$$

所以 $\lambda^{-1}\boldsymbol{A}^{(1)} \in (\lambda \boldsymbol{A})\{1\}$.

当 $\lambda = 0$ 时, 因 $(0\boldsymbol{A})(0\boldsymbol{A}^{(1)})(0\boldsymbol{A}) = 0\boldsymbol{A}$, 故 $0\boldsymbol{A}^{(1)} \in (0\boldsymbol{A})\{1\}$.

综合得 $\lambda^{+}\boldsymbol{A}^{(1)} \in (\lambda \boldsymbol{A})\{1\}$.

☞ 对照: $(\lambda \boldsymbol{A})^{-1} = \lambda^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$, $\lambda \neq 0$.

(3) 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$, 得

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})$$

(2) 当 $\lambda \neq 0$ 时, 因

$$(\lambda \boldsymbol{A})(\lambda^{-1}\boldsymbol{A}^{(1)})(\lambda \boldsymbol{A}) = \lambda \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} = \lambda \boldsymbol{A},$$

所以 $\lambda^{-1}\boldsymbol{A}^{(1)} \in (\lambda \boldsymbol{A})\{1\}$.

当 $\lambda = 0$ 时, 因 $(0\boldsymbol{A})(0\boldsymbol{A}^{(1)})(0\boldsymbol{A}) = 0\boldsymbol{A}$, 故 $0\boldsymbol{A}^{(1)} \in (0\boldsymbol{A})\{1\}$.

综合得 $\lambda^{+}\boldsymbol{A}^{(1)} \in (\lambda \boldsymbol{A})\{1\}$.

☞ 对照: $(\lambda \boldsymbol{A})^{-1} = \lambda^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$, $\lambda \neq 0$.

(3) 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$, 得

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}) \leqslant \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})$$

(2) 当 $\lambda \neq 0$ 时, 因

$$(\lambda \boldsymbol{A})(\lambda^{-1}\boldsymbol{A}^{(1)})(\lambda \boldsymbol{A}) = \lambda \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} = \lambda \boldsymbol{A},$$

所以 $\lambda^{-1}\boldsymbol{A}^{(1)} \in (\lambda \boldsymbol{A})\{1\}$.

当 $\lambda = 0$ 时, 因 $(0\boldsymbol{A})(0\boldsymbol{A}^{(1)})(0\boldsymbol{A}) = 0\boldsymbol{A}$, 故 $0\boldsymbol{A}^{(1)} \in (0\boldsymbol{A})\{1\}$.

综合得 $\lambda^{+}\boldsymbol{A}^{(1)} \in (\lambda \boldsymbol{A})\{1\}$.

☞ 对照: $(\lambda \boldsymbol{A})^{-1} = \lambda^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$, $\lambda \neq 0$.

(3) 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$, 得

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}) \leqslant \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}) \leqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{A}^{(1)}.$$

(2) 当 $\lambda \neq 0$ 时, 因

$$(\lambda \boldsymbol{A})(\lambda^{-1}\boldsymbol{A}^{(1)})(\lambda \boldsymbol{A}) = \lambda \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} = \lambda \boldsymbol{A},$$

所以 $\lambda^{-1}\boldsymbol{A}^{(1)} \in (\lambda \boldsymbol{A})\{1\}$.

当 $\lambda = 0$ 时, 因 $(0\boldsymbol{A})(0\boldsymbol{A}^{(1)})(0\boldsymbol{A}) = 0\boldsymbol{A}$, 故 $0\boldsymbol{A}^{(1)} \in (0\boldsymbol{A})\{1\}$.

综合得 $\lambda^{+}\boldsymbol{A}^{(1)} \in (\lambda \boldsymbol{A})\{1\}$.

☞ 对照: $(\lambda \boldsymbol{A})^{-1} = \lambda^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$, $\lambda \neq 0$.

(3) 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$, 得

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}) \leqslant \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}) \leqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{A}^{(1)}.$$

即证 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A}^{(1)} \geqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{A}$.

(4) 因

$$\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\right)^2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}$$

(4) 因

$$\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\right)^2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)},$$

(4) 因

$$\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\right)^2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)},$$

从而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}$ 是幂等阵,

(4) 因

$$\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\right)^2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)},$$

从而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}$ 是幂等阵, 同理得 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}$ 是幂等阵.

(4) 因

$$\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\right)^2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)},$$

从而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}$ 是幂等阵, 同理得 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}$ 是幂等阵.

由

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{A} = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}) \leqslant \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})$$

(4) 因

$$\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\right)^2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)},$$

从而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}$ 是幂等阵, 同理得 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}$ 是幂等阵.

由

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{A} = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}) \leqslant \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}) \leqslant \operatorname{rank}\boldsymbol{A},$$

(4) 因
$$\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\right)^2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)},$$
从而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}$ 是幂等阵, 同理得 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}$ 是幂等阵.

由
$$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\leqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\leqslant\operatorname{rank}\boldsymbol{A},$$
得 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})$.

(4) 因

$$\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\right)^2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)},$$

从而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}$ 是幂等阵, 同理得 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}$ 是幂等阵.

由

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{A} = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}) \leqslant \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}) \leqslant \operatorname{rank}\boldsymbol{A},$$

得 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A} = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})$. 同理得 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A} = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)})$.

(4) 因

$$\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\right)^2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)},$$

从而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}$ 是幂等阵, 同理得 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}$ 是幂等阵.

由

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{A} = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}) \leqslant \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}) \leqslant \operatorname{rank}\boldsymbol{A},$$

得 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A} = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})$. 同理得 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A} = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)})$. 即证
$\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\right) = \operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right) = \operatorname{rank}\boldsymbol{A}$. □

Theorem 2.7

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$, 则

1. $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n$ 当且仅当 $r = n$;

Theorem 2.7

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$, 则

1. $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n$ 当且仅当 $r = n$;
2. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)} = \boldsymbol{I}_m$ 当且仅当 $r = m$.

Theorem 2.7

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$, 则

1. $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n$ 当且仅当 $r = n$;
2. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)} = \boldsymbol{I}_m$ 当且仅当 $r = m$.

或者表达为

1. $\boldsymbol{A}^{(1)}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的左逆 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 列满秩;
2. $\boldsymbol{A}^{(1)}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的右逆 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 行满秩.

证: (1) 若 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n$,

证: (1) 若 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_n$, 则 $\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right)=\operatorname{rank}\boldsymbol{I}_n=n$.

证: (1) 若 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n$, 则 $\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right) = \operatorname{rank}\boldsymbol{I}_n = n$. 则

$$r = \operatorname{rank}\boldsymbol{A}$$

证: (1) 若 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n$, 则 $\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right) = \operatorname{rank}\boldsymbol{I}_n = n$. 则

$$r = \operatorname{rank}\boldsymbol{A} = \operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right)$$

证: (1) 若 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n$, 则 $\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right) = \operatorname{rank}\boldsymbol{I}_n = n$. 则

$$r = \operatorname{rank}\boldsymbol{A} = \operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right) = n,$$

即 $r = n$.

证: (1) 若 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n$, 则 $\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right) = \operatorname{rank}\boldsymbol{I}_n = n$. 则

$$r = \operatorname{rank}\boldsymbol{A} = \operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right) = n,$$

即 $r = n$.

反之, 若 $r = n$,

证: (1) 若 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n$, 则 $\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right) = \operatorname{rank}\boldsymbol{I}_n = n$. 则

$$r = \operatorname{rank}\boldsymbol{A} = \operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right) = n,$$

即 $r = n$.

反之, 若 $r = n$, 则

$$\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right) = \operatorname{rank}\boldsymbol{A} = n,$$

证: (1) 若 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_n$, 则 $\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right)=\operatorname{rank}\boldsymbol{I}_n=n$. 则

$$r=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right)=n,$$

即 $r=n$.

反之, 若 $r=n$, 则

$$\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right)=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=n,$$

而 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,

证: (1) 若 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n$, 则 $\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right) = \operatorname{rank}\boldsymbol{I}_n = n$. 则

$$r = \operatorname{rank}\boldsymbol{A} = \operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right) = n,$$

即 $r = n$.

反之, 若 $r = n$, 则

$$\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right) = \operatorname{rank}\boldsymbol{A} = n,$$

而 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 故 $\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right)^{-1}$ 存在.

证: (1) 若 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n$, 则 $\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right) = \operatorname{rank}\boldsymbol{I}_n = n$. 则

$$r = \operatorname{rank}\boldsymbol{A} = \operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right) = n,$$

即 $r = n$.

反之, 若 $r = n$, 则

$$\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right) = \operatorname{rank}\boldsymbol{A} = n,$$

而 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 故 $\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right)^{-1}$ 存在. 所以

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} &= \left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right)\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right) \\ &= \left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right) && (\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} \text{ 为幂等阵}) \\ &= \boldsymbol{I}_n. \end{aligned}$$

证: (1) 若 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n$, 则 $\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right) = \operatorname{rank} \boldsymbol{I}_n = n$. 则

$$r = \operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right) = n,$$

即 $r = n$.

反之, 若 $r = n$, 则

$$\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right) = \operatorname{rank} \boldsymbol{A} = n,$$

而 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 故 $\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right)^{-1}$ 存在. 所以

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} &= \left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right)\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right) \\
&= \left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right) && (\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} \text{ 为幂等阵}) \\
&= \boldsymbol{I}_n.
\end{aligned}$$

同理可证 (2) 成立. □

Theorem 2.8

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则

1. $R\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\big) = R(\boldsymbol{A})$;
2. $N\big(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\big) = N(\boldsymbol{A})$;
3. $R\big((\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}\big) = R\big(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\big)$.

Theorem 2.8

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则

1. $R\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\big) = R(\boldsymbol{A})$;
2. $N\big(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\big) = N(\boldsymbol{A})$;
3. $R\big((\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}\big) = R\big(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\big)$.

证: (1) 设 $\boldsymbol{u} \in R\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\big)$, 则存在 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^m$, 使得

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{x}.$$

Theorem 2.8

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则

1. $R\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\big) = R(\boldsymbol{A})$;
2. $N\big(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\big) = N(\boldsymbol{A})$;
3. $R\big((\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}\big) = R\big(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\big)$.

证: (1) 设 $\boldsymbol{u} \in R\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\big)$, 则存在 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^m$, 使得

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{x}.$$

记 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{x}$, 则 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}$, 因此 $\boldsymbol{u} \in R(\boldsymbol{A})$,

Theorem 2.8

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则

1. $R\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\big) = R(\boldsymbol{A})$;
2. $N\big(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\big) = N(\boldsymbol{A})$;
3. $R\big((\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}\big) = R\big(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\big)$.

证: (1) 设 $\boldsymbol{u} \in R\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\big)$, 则存在 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^m$, 使得

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{x}.$$

记 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{x}$, 则 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}$, 因此 $\boldsymbol{u} \in R(\boldsymbol{A})$, 从而

$$R\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\big) \subseteq R(\boldsymbol{A}).$$

Theorem 2.8

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则

1. $R\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\big) = R(\boldsymbol{A})$;
2. $N\big(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\big) = N(\boldsymbol{A})$;
3. $R\big((\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}\big) = R\big(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\big)$.

证: (1) 设 $\boldsymbol{u} \in R\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\big)$, 则存在 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^m$, 使得

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{x}.$$

记 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{x}$, 则 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}$, 因此 $\boldsymbol{u} \in R(\boldsymbol{A})$, 从而

$$R\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\big) \subseteq R(\boldsymbol{A}).$$

又 $\operatorname{rank}\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\big) = \operatorname{rank}\boldsymbol{A}$,

Theorem 2.8

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则

1. $R\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\big) = R(\boldsymbol{A})$;
2. $N\big(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\big) = N(\boldsymbol{A})$;
3. $R\big((\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}\big) = R\big(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\big)$.

证: (1) 设 $\boldsymbol{u} \in R\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\big)$, 则存在 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^m$, 使得

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{x}.$$

记 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{x}$, 则 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}$, 因此 $\boldsymbol{u} \in R(\boldsymbol{A})$, 从而

$$R\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\big) \subseteq R(\boldsymbol{A}).$$

又 $\operatorname{rank}\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\big) = \operatorname{rank}\boldsymbol{A}$, 故

$$\dim R\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\big) = \dim R(\boldsymbol{A}),$$

Theorem 2.8

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则

1. $R\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\big) = R(\boldsymbol{A})$;
2. $N\big(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\big) = N(\boldsymbol{A})$;
3. $R\big((\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}\big) = R\big(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\big)$.

证: (1) 设 $\boldsymbol{u} \in R\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\big)$, 则存在 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^m$, 使得

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{x}.$$

记 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{x}$, 则 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}$, 因此 $\boldsymbol{u} \in R(\boldsymbol{A})$, 从而

$$R\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\big) \subseteq R(\boldsymbol{A}).$$

又 $\operatorname{rank}\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\big) = \operatorname{rank}\boldsymbol{A}$, 故

$$\dim R\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\big) = \dim R(\boldsymbol{A}),$$

因此 $R\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\big) = R(\boldsymbol{A})$.

(2) 设 $\boldsymbol{y} \in N(\boldsymbol{A})$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$,

(2) 设 $\boldsymbol{y} \in N(\boldsymbol{A})$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$, 故 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$,

(2) 设 $\boldsymbol{y} \in N(\boldsymbol{A})$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$, 故 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$, 从而 $\boldsymbol{y} \in N(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)})$,

(2) 设 $\boldsymbol{y} \in N(\boldsymbol{A})$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$, 故 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$, 从而 $\boldsymbol{y} \in N(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)})$, 因此

$$N(\boldsymbol{A}) \subseteq N\big(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\big).$$

(2) 设 $\boldsymbol{y} \in N(\boldsymbol{A})$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$, 故 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$, 从而 $\boldsymbol{y} \in N(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)})$, 因此

$$N(\boldsymbol{A}) \subseteq N\big(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\big).$$

任取 $\boldsymbol{x} \in N\big(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\big)$, 则 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$,

(2) 设 $\boldsymbol{y} \in N(\boldsymbol{A})$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$, 故 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$, 从而 $\boldsymbol{y} \in N(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)})$, 因此

$$N(\boldsymbol{A}) \subseteq N\big(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\big).$$

任取 $\boldsymbol{x} \in N\big(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\big)$, 则 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 从而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$,

(2) 设 $\boldsymbol{y} \in N(\boldsymbol{A})$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$, 故 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$, 从而 $\boldsymbol{y} \in N(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)})$, 因此

$$N(\boldsymbol{A}) \subseteq N\big(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\big).$$

任取 $\boldsymbol{x} \in N\big(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\big)$, 则 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 从而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 因此

$$N\big(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\big) \subseteq N(\boldsymbol{A}).$$

(2) 设 $\boldsymbol{y} \in N(\boldsymbol{A})$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$, 故 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$, 从而 $\boldsymbol{y} \in N(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)})$, 因此

$$N(\boldsymbol{A}) \subseteq N\big(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\big).$$

任取 $\boldsymbol{x} \in N\big(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\big)$, 则 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, 从而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, 因此

$$N\big(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\big) \subseteq N(\boldsymbol{A}).$$

综上得 $N\big(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\big) = N(\boldsymbol{A})$.

(2) 设 $\boldsymbol{y} \in N(\boldsymbol{A})$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$, 故 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$, 从而 $\boldsymbol{y} \in N(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)})$, 因此

$$N(\boldsymbol{A}) \subseteq N\big(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\big).$$

任取 $\boldsymbol{x} \in N\big(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\big)$, 则 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, 从而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, 因此

$$N\big(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\big) \subseteq N(\boldsymbol{A}).$$

综上得 $N\big(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\big) = N(\boldsymbol{A})$.

☞ 事实上, 易知以下的一般形式成立:

$$R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) \subseteq R(\boldsymbol{A}), \tag{7}$$

$$N(\boldsymbol{A}) \subseteq R(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}). \tag{8}$$

(3) 用 $R(\boldsymbol{AB}) \subseteq R(\boldsymbol{A})$ 说明结论成立.

(3) 用 $R(\boldsymbol{AB}) \subseteq R(\boldsymbol{A})$ 说明结论成立.

由 $\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right)^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$, 即

$$\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right)^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}.$$

(3) 用 $R(\boldsymbol{AB}) \subseteq R(\boldsymbol{A})$ 说明结论成立.
由 $\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right)^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$, 即

$$\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right)^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}.$$

故

$$\begin{aligned} R\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\right) = R\left((\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\right) &\subseteq R\left((\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}\right) \\ &= R\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}^{(1)})^{\mathrm{H}}\right) \subseteq R\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\right). \end{aligned}$$

(3) 用 $R(\boldsymbol{AB}) \subseteq R(\boldsymbol{A})$ 说明结论成立.
由 $\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right)^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$, 即

$$\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right)^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}.$$

故

$$\begin{aligned} R\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\right) = R\left((\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\right) &\subseteq R\left((\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}\right) \\ &= R\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}^{(1)})^{\mathrm{H}}\right) \subseteq R\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\right). \end{aligned}$$

得证 $R\left((\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}\right) = R\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\right)$. □

Outline

在线性代数里, 若线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有解, 则称此方程组为相容方程组;

在线性代数里, 若线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有解, 则称此方程组为相容方程组; 若无解, 则称之为不相容方程组或者矛盾方程组.

在线性代数里, 若线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解, 则称此方程组为相容方程组; 若无解, 则称之为不相容方程组或者矛盾方程组.

矩阵 $\boldsymbol{G}$ 是否为 $\boldsymbol{A}^{(1)}$, 与 $\boldsymbol{Gb}$ 是否为相容性方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解密切相关, 这就是下面的定理.

在线性代数里, 若线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解, 则称此方程组为相容方程组; 若无解, 则称之为不相容方程组或者矛盾方程组.

矩阵 $\boldsymbol{G}$ 是否为 $\boldsymbol{A}^{(1)}$, 与 $\boldsymbol{Gb}$ 是否为相容性方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解密切相关, 这就是下面的定理.

Theorem 2.9

设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 则对任何 $\boldsymbol{b}\in R(\boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Gb}$ 都是相容性方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解的充分必要条件是 $\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{A}\{1\}$.

在线性代数里, 若线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解, 则称此方程组为相容方程组; 若无解, 则称之为不相容方程组或者矛盾方程组.

矩阵 $\boldsymbol{G}$ 是否为 $\boldsymbol{A}^{(1)}$, 与 $\boldsymbol{Gb}$ 是否为相容性方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解密切相关, 这就是下面的定理.

Theorem 2.9

设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 则对任何 $\boldsymbol{b}\in R(\boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Gb}$ 都是相容性方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解的充分必要条件是 $\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{A}\{1\}$.

证: 充分性. 设 $\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{A}\{1\}$,

在线性代数里, 若线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解, 则称此方程组为相容方程组; 若无解, 则称之为不相容方程组或者矛盾方程组.

矩阵 $\boldsymbol{G}$ 是否为 $\boldsymbol{A}^{(1)}$, 与 $\boldsymbol{Gb}$ 是否为相容性方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解密切相关, 这就是下面的定理.

Theorem 2.9

设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 则对任何 $\boldsymbol{b}\in R(\boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Gb}$ 都是相容性方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解的充分必要条件是 $\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{A}\{1\}$.

证: 充分性. 设 $\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{A}\{1\}$, 则 $\boldsymbol{AGA}=\boldsymbol{A}$.

在线性代数里, 若线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解, 则称此方程组为相容方程组; 若无解, 则称之为不相容方程组或者矛盾方程组.

矩阵 $\boldsymbol{G}$ 是否为 $\boldsymbol{A}^{(1)}$, 与 $\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}$ 是否为相容性方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解密切相关, 这就是下面的定理.

Theorem 2.9

设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 则对任何 $\boldsymbol{b}\in R(\boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}$ 都是相容性方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解的充分必要条件是 $\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{A}\{1\}$.

证: 充分性. 设 $\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{A}\{1\}$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$. 对任何 $\boldsymbol{b}\in R(\boldsymbol{A})$, 必存在 $\boldsymbol{y}\in\mathbb{C}^n$, 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}.$$

在线性代数里，若线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解，则称此方程组为相容方程组；若无解，则称之为不相容方程组或者矛盾方程组.

矩阵 $\boldsymbol{G}$ 是否为 $\boldsymbol{A}^{(1)}$，与 $\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}$ 是否为相容性方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解密切相关，这就是下面的定理.

Theorem 2.9

设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$，则对任何 $\boldsymbol{b}\in R(\boldsymbol{A})$，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}$ 都是相容性方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解的充分必要条件是 $\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{A}\{1\}$.

证: 充分性. 设 $\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{A}\{1\}$，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$. 对任何 $\boldsymbol{b}\in R(\boldsymbol{A})$，必存在 $\boldsymbol{y}\in\mathbb{C}^{n}$，使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}.$$

则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$$

在线性代数里, 若线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解, 则称此方程组为相容方程组; 若无解, 则称之为不相容方程组或者矛盾方程组.

矩阵 $\boldsymbol{G}$ 是否为 $\boldsymbol{A}^{(1)}$, 与 $\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}$ 是否为相容性方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解密切相关, 这就是下面的定理.

Theorem 2.9

设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 则对任何 $\boldsymbol{b}\in R(\boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}$ 都是相容性方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解的充分必要条件是 $\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{A}\{1\}$.

证: 充分性. 设 $\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{A}\{1\}$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$. 对任何 $\boldsymbol{b}\in R(\boldsymbol{A})$, 必存在 $\boldsymbol{y}\in\mathbb{C}^n$, 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}.$$

则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$$

在线性代数里, 若线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有解, 则称此方程组为相容方程组; 若无解, 则称之为不相容方程组或者矛盾方程组.

矩阵 $\boldsymbol{G}$ 是否为 $\boldsymbol{A}^{(1)}$, 与 $\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}$ 是否为相容性方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的解密切相关, 这就是下面的定理.

Theorem 2.9

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则对任何 $\boldsymbol{b} \in R(\boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{b}$ 都是相容性方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的解的充分必要条件是 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1\}$.

证: 充分性. 设 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1\}$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$. 对任何 $\boldsymbol{b} \in R(\boldsymbol{A})$, 必存在 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$, 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}.$$

则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b},$$

在线性代数里, 若线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解, 则称此方程组为相容方程组; 若无解, 则称之为不相容方程组或者矛盾方程组.

矩阵 $\boldsymbol{G}$ 是否为 $\boldsymbol{A}^{(1)}$, 与 $\boldsymbol{Gb}$ 是否为相容性方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解密切相关, 这就是下面的定理.

Theorem 2.9

设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 则对任何 $\boldsymbol{b}\in R(\boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Gb}$ 都是相容性方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解的充分必要条件是 $\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{A}\{1\}$.

证: 充分性. 设 $\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{A}\{1\}$, 则 $\boldsymbol{AGA}=\boldsymbol{A}$. 对任何 $\boldsymbol{b}\in R(\boldsymbol{A})$, 必存在 $\boldsymbol{y}\in\mathbb{C}^n$, 使得

$$\boldsymbol{Ay}=\boldsymbol{b}.$$

则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{Gb}=\boldsymbol{AG}\boldsymbol{Ay}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b},$$

故 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Gb}$ 是方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解.

必要性. 记 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n]$, 则 $\boldsymbol{a}_i\in R(\boldsymbol{A})$, $i=1,2,\cdots,n$.

必要性. 记 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n]$, 则 $\boldsymbol{a}_i\in R(\boldsymbol{A})$, $i=1,2,\cdots,n$.
已知对任何 $\boldsymbol{b}\in R(\boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}$ 都是相容性方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解,

必要性. 记 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n]$, 则 $\boldsymbol{a}_i\in R(\boldsymbol{A})$, $i=1,2,\cdots,n$.

已知对任何 $\boldsymbol{b}\in R(\boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}$ 都是相容性方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解, 故对 $\boldsymbol{a}_i\in R(\boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{G}\boldsymbol{a}_i$ 也是方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_i$ 的解,

必要性. 记 $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n]$, 则 $\boldsymbol{a}_i \in R(\boldsymbol{A})$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

已知对任何 $\boldsymbol{b} \in R(\boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{b}$ 都是相容性方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的解, 故对 $\boldsymbol{a}_i \in R(\boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{a}_i$ 也是方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}_i$ 的解, 即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, n.$$

必要性. 记 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n]$, 则 $\boldsymbol{a}_i\in R(\boldsymbol{A})$, $i=1,2,\cdots,n$.

已知对任何 $\boldsymbol{b}\in R(\boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}$ 都是相容性方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解, 故对 $\boldsymbol{a}_i\in R(\boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{G}\boldsymbol{a}_i$ 也是方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_i$ 的解, 即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{a}_i,\qquad i=1,2,\cdots,n.$$

从而

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n]=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n].$$

必要性. 记 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n]$, 则 $\boldsymbol{a}_i\in R(\boldsymbol{A})$, $i=1,2,\cdots,n$.

已知对任何 $\boldsymbol{b}\in R(\boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}$ 都是相容性方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解, 故对 $\boldsymbol{a}_i\in R(\boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{G}\boldsymbol{a}_i$ 也是方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_i$ 的解, 即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{a}_i,\qquad i=1,2,\cdots,n.$$

从而

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n]=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n].$$

即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$, 所以 $\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{A}\{1\}$. □

Theorem 2.10 (非齐次线性方程组的相容性定理)

非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有解的充分必要条件是

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}.$$

Theorem 2.10 (非齐次线性方程组的相容性定理)

非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有解的充分必要条件是

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}.$$

证: 设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有解, 则存在 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$, 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$.

Theorem 2.10 (非齐次线性方程组的相容性定理)

非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解的充分必要条件是

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}.$$

证: 设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解, 则存在 $\boldsymbol{y}\in\mathbb{C}^n$, 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}$. 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$$

Theorem 2.10 (非齐次线性方程组的相容性定理)

非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有解的充分必要条件是

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}.$$

证: 设 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有解, 则存在 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$, 使得 $\boldsymbol{Ay} = \boldsymbol{b}$. 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$$

Theorem 2.10 (非齐次线性方程组的相容性定理)

非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解的充分必要条件是

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}.$$

证: 设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解, 则存在 $\boldsymbol{y}\in\mathbb{C}^n$, 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}$. 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}.$$

Theorem 2.10 (非齐次线性方程组的相容性定理)

非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有解的充分必要条件是

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}.$$

证: 设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有解, 则存在 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$, 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$. 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}.$$

反之, 设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$,

Theorem 2.10 (非齐次线性方程组的相容性定理)

非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解的充分必要条件是

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}.$$

证: 设 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解, 则存在 $\boldsymbol{y}\in\mathbb{C}^n$, 使得 $\boldsymbol{Ay}=\boldsymbol{b}$. 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}.$$

反之, 设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$, 则 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{b}$ 为方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解. $\square$

Theorem 2.10 (非齐次线性方程组的相容性定理)

非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解的充分必要条件是

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}.$$

证: 设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解, 则存在 $\boldsymbol{y}\in\mathbb{C}^n$, 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}$. 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}.$$

反之, 设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$, 则 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{b}$ 为方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解. □

☞ 直观的解释是: 注意到 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}$ 为投影算子, 故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b} &\Leftrightarrow \boldsymbol{b}\in R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)})\\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{b}\in R(\boldsymbol{A}) \qquad\qquad (\text{因 } R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)})=R(\boldsymbol{A}))\\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \text{ 有解.}\end{aligned}$$

Theorem 2.11 (齐次线性方程组的解的结构定理)

n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}, \tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{y}$ 为 $\mathbb{C}^n$ 中的任意向量, $\boldsymbol{A}^{(1)}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的任意给定的一个 $\{1\}$- 逆.

Theorem 2.11 (齐次线性方程组的解的结构定理)

n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}, \tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{y}$ 为 $\mathbb{C}^n$ 中的任意向量, $\boldsymbol{A}^{(1)}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的任意给定的一个 $\{1\}$- 逆.

证: 将 (9) 式代入方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$,

Theorem 2.11 (齐次线性方程组的解的结构定理)

n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}, \tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{y}$ 为 $\mathbb{C}^n$ 中的任意向量, $\boldsymbol{A}^{(1)}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的任意给定的一个 $\{1\}$- 逆.

证: 将 (9) 式代入方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$, 得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}$$

Theorem 2.11 (齐次线性方程组的解的结构定理)

n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}, \tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{y}$ 为 $\mathbb{C}^n$ 中的任意向量, $\boldsymbol{A}^{(1)}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的任意给定的一个 $\{1\}$- 逆.

证: 将 (9) 式代入方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$, 得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}$$

Theorem 2.11 (齐次线性方程组的解的结构定理)

n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}, \tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{y}$ 为 $\mathbb{C}^n$ 中的任意向量, $\boldsymbol{A}^{(1)}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的任意给定的一个 $\{1\}$- 逆.

证: 将 (9) 式代入方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0},$$

故 (9) 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解.

Theorem 2.11 (齐次线性方程组的解的结构定理)

n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}, \tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{y}$ 为 $\mathbb{C}^n$ 中的任意向量, $\boldsymbol{A}^{(1)}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的任意给定的一个 $\{1\}$- 逆.

证: 将 (9) 式代入方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$, 得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0},$$

故 (9) 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解.

反之, 设 $\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个解,

Theorem 2.11 (齐次线性方程组的解的结构定理)

n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}, \tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{y}$ 为 $\mathbb{C}^n$ 中的任意向量, $\boldsymbol{A}^{(1)}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的任意给定的一个 $\{1\}$- 逆.

证: 将 (9) 式代入方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}=\mathbf{0},$$

故 (9) 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解.

反之, 设 $\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个解, 则

$$(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta},$$

Theorem 2.11 (齐次线性方程组的解的结构定理)

n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}, \tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{y}$ 为 $\mathbb{C}^n$ 中的任意向量, $\boldsymbol{A}^{(1)}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的任意给定的一个 $\{1\}$- 逆.

证: 将 (9) 式代入方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0},$$

故 (9) 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解.

反之, 设 $\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个解, 则

$$(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta},$$

故 (9) 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解. □

☞ 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的通解 $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}$ 的直观解释:

☞ 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的通解 $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}$ 的直观解释:
因 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}$ 是幂等矩阵, 故

$$N(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}).$$

☞ 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解 $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}$ 的直观解释:
因 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}$ 是幂等矩阵, 故

$$N(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}).$$

又 $N(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})=N(\boldsymbol{A})$, 得

$$N(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}).$$

☞ 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的通解 $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}$ 的直观解释:
因 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}$ 是幂等矩阵, 故

$$N(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}).$$

又 $N(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})=N(\boldsymbol{A})$, 得

$$N(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}).$$

而 $N(\boldsymbol{A})=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}\}$, 故方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的全部解为

$$\left\{(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}\mid\boldsymbol{y}\in\mathbb{C}^n\right\}.$$

Theorem 2.12 (非齐次线性方程组的解的结构定理)

若 n 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解, 则其通解为

$$\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y},$$

其中 $\boldsymbol{y}$ 为 $\mathbb{C}^n$ 中的任意向量, $\boldsymbol{A}^{(1)}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的任意给定的一个 $\{1\}$- 逆.

Theorem 2.12 (非齐次线性方程组的解的结构定理)

若 n 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解, 则其通解为

$$\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y},$$

其中 $\boldsymbol{y}$ 为 $\mathbb{C}^n$ 中的任意向量, $\boldsymbol{A}^{(1)}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的任意给定的一个 $\{1\}$- 逆.

证: 对非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, 因 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{b}$ 是其一个特解,

Theorem 2.12 (非齐次线性方程组的解的结构定理)

若 n 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解, 则其通解为

$$\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y},$$

其中 $\boldsymbol{y}$ 为 $\mathbb{C}^n$ 中的任意向量, $\boldsymbol{A}^{(1)}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的任意给定的一个 $\{1\}$- 逆.

证: 对非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, 因 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{b}$ 是其一个特解, 而 $(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}$ 是其对应齐次方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解,

Theorem 2.12 (非齐次线性方程组的解的结构定理)

若 n 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解, 则其通解为

$$\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y},$$

其中 $\boldsymbol{y}$ 为 $\mathbb{C}^n$ 中的任意向量, $\boldsymbol{A}^{(1)}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的任意给定的一个 $\{1\}$- 逆.

证: 对非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, 因 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{b}$ 是其一个特解, 而 $(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}$ 是其对应齐次方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解, 故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 通解为

$$\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y},$$

其中 $\boldsymbol{y}$ 为 $\mathbb{C}^n$ 中的任意向量. □

Outline

Definition 3.1

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 若 $\boldsymbol{G} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ 满足

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad \boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{A},\\
&(2) \quad \boldsymbol{GAG} = \boldsymbol{G},
\end{aligned}
$$

则称 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1,2\}$-逆, 记为 $\boldsymbol{A}^{(1,2)}$.

Definition 3.1

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 若 $\boldsymbol{G} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ 满足

$$(1) \quad \boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{A},$$

$$(2) \quad \boldsymbol{GAG} = \boldsymbol{G},$$

则称 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1,2\}$-逆, 记为 $\boldsymbol{A}^{(1,2)}$.

记 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1,2\}$-逆的全体为 $\boldsymbol{A}\{1,2\}$, 即

$$\boldsymbol{A}\{1,2\} = \{\boldsymbol{G} \mid \boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{A}, \boldsymbol{GAG} = \boldsymbol{G}\}.$$

Definition 3.1

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 若 $\boldsymbol{G} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ 满足

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad \boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{A}, \\
&(2) \quad \boldsymbol{GAG} = \boldsymbol{G},
\end{aligned}
$$

则称 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1,2\}$-逆, 记为 $\boldsymbol{A}^{(1,2)}$.

记 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1,2\}$-逆的全体为 $\boldsymbol{A}\{1,2\}$, 即

$$\boldsymbol{A}\{1,2\} = \{\boldsymbol{G} \mid \boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{A}, \boldsymbol{GAG} = \boldsymbol{G}\}.$$

类似地, 若 $\boldsymbol{G} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ 只满足

$$\boldsymbol{GAG} = \boldsymbol{G},$$

则称 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{2\}$-逆, 记为 $\boldsymbol{A}^{(2)}$,

Definition 3.1

设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 若 $\boldsymbol{G}\in\mathbb{C}^{n\times m}$ 满足

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad \boldsymbol{AGA}=\boldsymbol{A},\\
&(2) \quad \boldsymbol{GAG}=\boldsymbol{G},
\end{aligned}
$$

则称 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1,2\}$-逆, 记为 $\boldsymbol{A}^{(1,2)}$.

记 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1,2\}$-逆的全体为 $\boldsymbol{A}\{1,2\}$, 即

$$\boldsymbol{A}\{1,2\}=\{\boldsymbol{G}\mid \boldsymbol{AGA}=\boldsymbol{A},\boldsymbol{GAG}=\boldsymbol{G}\}.$$

类似地, 若 $\boldsymbol{G}\in\mathbb{C}^{n\times m}$ 只满足

$$\boldsymbol{GAG}=\boldsymbol{G},$$

则称 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{2\}$-逆, 记为 $\boldsymbol{A}^{(2)}$, 且记

$$\boldsymbol{A}\{2\}=\{\boldsymbol{G}\mid \boldsymbol{GAG}=\boldsymbol{G}\}.$$

对于逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 有 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$, 但这对 $\boldsymbol{A}^{(1)}$ 一般不成立.

对于逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 有 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$, 但这对 $\boldsymbol{A}^{(1)}$ 一般不成立. 如

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

但

$$\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \boldsymbol{A}^{(1)}.$$

对于逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 有 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$, 但这对 $\boldsymbol{A}^{(1)}$ 一般不成立. 如

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}^{(1)}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},$$

但

$$\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\neq \boldsymbol{A}^{(1)}.$$

即 $\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\right)^{(1)}\neq \boldsymbol{A}$.

对于逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 有 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$, 但这对 $\boldsymbol{A}^{(1)}$ 一般不成立. 如

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\\1&0\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{A}^{(1)}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},$$

但

$$\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}\neq\boldsymbol{A}^{(1)}.$$

即 $\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\right)^{(1)}\neq\boldsymbol{A}$.

在 $\{1,2\}$-逆的定义 (1), (2) 两式中, $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{G}$ 的地位是对称的, 故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{G}$ 互为 $\{1,2\}$-逆.

对于逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 有 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$, 但这对 $\boldsymbol{A}^{(1)}$ 一般不成立. 如

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\\1&0\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{A}^{(1)}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},$$

但

$$\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}\neq\boldsymbol{A}^{(1)}.$$

即 $\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\right)^{(1)}\neq\boldsymbol{A}$.

在 $\{1,2\}$-逆的定义 (1), (2) 两式中, $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{G}$ 的地位是对称的, 故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{G}$ 互为 $\{1,2\}$-逆. 所以又把 $\{1,2\}$-逆叫做自反广义逆.

对于逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 有 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$, 但这对 $\boldsymbol{A}^{(1)}$ 一般不成立. 如

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\\1&0\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{A}^{(1)}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},$$

但

$$\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}\neq\boldsymbol{A}^{(1)}.$$

即 $\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\right)^{(1)}\neq\boldsymbol{A}$.

在 $\{1,2\}$-逆的定义 (1), (2) 两式中, $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{G}$ 的地位是对称的, 故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{G}$ 互为 $\{1,2\}$-逆. 所以又把 $\{1,2\}$-逆叫做自反广义逆.

即若 $\boldsymbol{G}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个 $\{1,2\}$-逆, 则 $\boldsymbol{A}$ 也是 $\boldsymbol{G}$ 的一个 $\{1,2\}$-逆, 或者说形式上有

$$\text{“}\left(\boldsymbol{A}^{(1,2)}\right)^{(1,2)}=\boldsymbol{A}.\text{”}$$

对于逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 有 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$, 但这对 $\boldsymbol{A}^{(1)}$ 一般不成立. 如

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\\1&0\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{A}^{(1)}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},$$

但

$$\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}\neq\boldsymbol{A}^{(1)}.$$

即 $\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\right)^{(1)}\neq\boldsymbol{A}$.

在 $\{1,2\}$-逆的定义 (1), (2) 两式中, $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{G}$ 的地位是对称的, 故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{G}$ 互为 $\{1,2\}$-逆. 所以又把 $\{1,2\}$-逆叫做自反广义逆.

即若 $\boldsymbol{G}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个 $\{1,2\}$-逆, 则 $\boldsymbol{A}$ 也是 $\boldsymbol{G}$ 的一个 $\{1,2\}$-逆, 或者说形式上有

$$\text{“}\left(\boldsymbol{A}^{(1,2)}\right)^{(1,2)}=\boldsymbol{A}.\text{”}$$

当然, 严格的写法应该是:

$$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{A}^{(1,2)}\{1,2\}.$$

Theorem 3.2

设 $\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{A}\{1\}$, 且令 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{YAZ}$, 则 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{1,2\}$.

Theorem 3.2

设 $\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{A}\{1\}$, 且令 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{YAZ}$, 则 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{1,2\}$.

证: 由 $\boldsymbol{AYA} = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{AZA} = \boldsymbol{A}$,

Theorem 3.2

设 $\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{A}\{1\}$, 且令 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{YAZ}$, 则 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{1,2\}$.

证: 由 $\boldsymbol{AYA} = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{AZA} = \boldsymbol{A}$, 得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{AXA} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{YAZ}\boldsymbol{A} && (\boldsymbol{X} = \boldsymbol{YAZ}) \\
&= \boldsymbol{AZA} && (\boldsymbol{AYA} = \boldsymbol{A}) \\
&= \boldsymbol{A}, \\
\boldsymbol{XAX} &= \boldsymbol{YAZ}\boldsymbol{A}\boldsymbol{YAZ} && (\boldsymbol{X} = \boldsymbol{YAZ}) \\
&= \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{AZA})\boldsymbol{YAZ} = \boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}\boldsymbol{YAZ} && (\boldsymbol{AZA} = \boldsymbol{A}) \\
&= \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{AYA})\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z} && (\boldsymbol{AYA} = \boldsymbol{A}) \\
&= \boldsymbol{X},
\end{aligned}
$$

Theorem 3.2

设 $\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{A}\{1\}$, 且令 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{YAZ}$, 则 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{1,2\}$.

证: 由 $\boldsymbol{AYA} = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{AZA} = \boldsymbol{A}$, 得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{AXA} &= \boldsymbol{AYAZA} && (\boldsymbol{X} = \boldsymbol{YAZ}) \\
&= \boldsymbol{AZA} && (\boldsymbol{AYA} = \boldsymbol{A}) \\
&= \boldsymbol{A}, \\
\boldsymbol{XAX} &= \boldsymbol{YAZAYAZ} && (\boldsymbol{X} = \boldsymbol{YAZ}) \\
&= \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{AZA})\boldsymbol{YAZ} = \boldsymbol{YAYAZ} && (\boldsymbol{AZA} = \boldsymbol{A}) \\
&= \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{AYA})\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{YAZ} && (\boldsymbol{AYA} = \boldsymbol{A}) \\
&= \boldsymbol{X},
\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{1,2\}$. □

Theorem 3.2

设 $\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{A}\{1\}$, 且令 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{YAZ}$, 则 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{1,2\}$.

证: 由 $\boldsymbol{AYA} = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{AZA} = \boldsymbol{A}$, 得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{AXA} &= \boldsymbol{AYAZA} && (\boldsymbol{X} = \boldsymbol{YAZ}) \\
&= \boldsymbol{AZA} && (\boldsymbol{AYA} = \boldsymbol{A}) \\
&= \boldsymbol{A}, \\
\boldsymbol{XAX} &= \boldsymbol{YAZAYAZ} && (\boldsymbol{X} = \boldsymbol{YAZ}) \\
&= \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{AZA})\boldsymbol{YAZ} = \boldsymbol{YAYAZ} && (\boldsymbol{AZA} = \boldsymbol{A}) \\
&= \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{AYA})\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{YAZ} && (\boldsymbol{AYA} = \boldsymbol{A}) \\
&= \boldsymbol{X},
\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{1,2\}$. □

☞ 由 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1\}$-逆存在, 可以推得 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1,2\}$-逆也存在.

Outline

Theorem 3.3

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 已知 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{1\}$, 则

$$\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{1,2\} \Leftrightarrow \operatorname{rank} \boldsymbol{X} = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}.$$

Theorem 3.3

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 已知 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{1\}$, 则

$$\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{1,2\} \Leftrightarrow \operatorname{rank} \boldsymbol{X} = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}.$$

证: 必要性. 若 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{1,2\}$, 则 $\boldsymbol{AXA} = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{XAX} = \boldsymbol{X}$,

Theorem 3.3

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 已知 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{1\}$, 则

$$\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{1,2\} \Leftrightarrow \operatorname{rank} \boldsymbol{X} = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}.$$

证: 必要性. 若 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{1,2\}$, 则 $\boldsymbol{AXA} = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{XAX} = \boldsymbol{X}$, 因为

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank}(\boldsymbol{AXA}) \leqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{X},$$

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{X} = \operatorname{rank}(\boldsymbol{XAX}) \leqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{A},$$

Theorem 3.3

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 已知 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{1\}$, 则

$$\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{1,2\} \Leftrightarrow \operatorname{rank} \boldsymbol{X} = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}.$$

证: 必要性. 若 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{1,2\}$, 则 $\boldsymbol{AXA} = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{XAX} = \boldsymbol{X}$, 因为

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank}(\boldsymbol{AXA}) \leqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{X},$$
$$\operatorname{rank} \boldsymbol{X} = \operatorname{rank}(\boldsymbol{XAX}) \leqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{A},$$

所以 $\operatorname{rank} \boldsymbol{X} = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}$.

Theorem 3.3

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 已知 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{1\}$, 则

$$\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{1,2\} \Leftrightarrow \operatorname{rank} \boldsymbol{X} = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}.$$

证: 必要性. 若 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{1,2\}$, 则 $\boldsymbol{AXA} = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{XAX} = \boldsymbol{X}$, 因为

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank}(\boldsymbol{AXA}) \leqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{X},$$

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{X} = \operatorname{rank}(\boldsymbol{XAX}) \leqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{A},$$

所以 $\operatorname{rank} \boldsymbol{X} = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}$.

充分性. 已知 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{1\}$, 要证明 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{1,2\}$, 只需要证明 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{2\}$.

Theorem 3.3

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 已知 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{1\}$, 则

$$\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{1,2\} \Leftrightarrow \operatorname{rank} \boldsymbol{X} = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}.$$

证: 必要性. 若 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{1,2\}$, 则 $\boldsymbol{AXA} = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{XAX} = \boldsymbol{X}$, 因为

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank}(\boldsymbol{AXA}) \leqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{X},$$

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{X} = \operatorname{rank}(\boldsymbol{XAX}) \leqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{A},$$

所以 $\operatorname{rank} \boldsymbol{X} = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}$.

充分性. 已知 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{1\}$, 要证明 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{1,2\}$, 只需要证明 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{2\}$.

由 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{1\}$, 则

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{XA}) = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}.$$

Theorem 3.3

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 已知 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{1\}$, 则

$$\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{1,2\} \Leftrightarrow \operatorname{rank} \boldsymbol{X} = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}.$$

证: 必要性. 若 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{1,2\}$, 则 $\boldsymbol{AXA} = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{XAX} = \boldsymbol{X}$, 因为

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank}(\boldsymbol{AXA}) \leqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{X},$$
$$\operatorname{rank} \boldsymbol{X} = \operatorname{rank}(\boldsymbol{XAX}) \leqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{A},$$

所以 $\operatorname{rank} \boldsymbol{X} = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}$.

充分性. 已知 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{1\}$, 要证明 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{1,2\}$, 只需要证明 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{2\}$.
由 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{1\}$, 则

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{XA}) = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}.$$

又已知 $\operatorname{rank} \boldsymbol{X} = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}$, 故

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{XA}) = \operatorname{rank} \boldsymbol{X}.$$

即

$$\dim R(\boldsymbol{XA}) = \dim R(\boldsymbol{X}).$$

即

$$\dim R(\boldsymbol{XA}) = \dim R(\boldsymbol{X}).$$

显然又有 $R(\boldsymbol{XA}) \subseteq R(\boldsymbol{X})$, 从而有

$$R(\boldsymbol{XA}) = R(\boldsymbol{X}).$$

即

$$\dim R(\boldsymbol{XA}) = \dim R(\boldsymbol{X}).$$

显然又有 $R(\boldsymbol{XA}) \subseteq R(\boldsymbol{X})$, 从而有

$$R(\boldsymbol{XA}) = R(\boldsymbol{X}).$$

从而 $\boldsymbol{X}$ 的列向量可以由 $\boldsymbol{XA}$ 的列向量线性表示,

即

$$\dim R(\boldsymbol{XA}) = \dim R(\boldsymbol{X}).$$

显然又有 $R(\boldsymbol{XA}) \subseteq R(\boldsymbol{X})$, 从而有

$$R(\boldsymbol{XA}) = R(\boldsymbol{X}).$$

从而 $\boldsymbol{X}$ 的列向量可以由 $\boldsymbol{XA}$ 的列向量线性表示, 即存在矩阵 $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{C}^{n\times m}$, 使

$$\boldsymbol{XAY} = \boldsymbol{X}.$$

即

$$\dim R(\boldsymbol{XA}) = \dim R(\boldsymbol{X}).$$

显然又有 $R(\boldsymbol{XA}) \subseteq R(\boldsymbol{X})$, 从而有

$$R(\boldsymbol{XA}) = R(\boldsymbol{X}).$$

从而 $\boldsymbol{X}$ 的列向量可以由 $\boldsymbol{XA}$ 的列向量线性表示, 即存在矩阵 $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{C}^{n\times m}$, 使

$$\boldsymbol{XAY} = \boldsymbol{X}.$$

所以

$$\boldsymbol{XAX} = \boldsymbol{XA}(\boldsymbol{XAY})$$

即

$$\dim R(\boldsymbol{XA}) = \dim R(\boldsymbol{X}).$$

显然又有 $R(\boldsymbol{XA}) \subseteq R(\boldsymbol{X})$, 从而有

$$R(\boldsymbol{XA}) = R(\boldsymbol{X}).$$

从而 $\boldsymbol{X}$ 的列向量可以由 $\boldsymbol{XA}$ 的列向量线性表示, 即存在矩阵 $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{C}^{n\times m}$, 使

$$\boldsymbol{XAY} = \boldsymbol{X}.$$

所以

$$\boldsymbol{XAX} = \boldsymbol{XA}(\boldsymbol{XAY}) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{AXA})\boldsymbol{Y}$$

即

$$\dim R(\boldsymbol{XA}) = \dim R(\boldsymbol{X}).$$

显然又有 $R(\boldsymbol{XA}) \subseteq R(\boldsymbol{X})$, 从而有

$$R(\boldsymbol{XA}) = R(\boldsymbol{X}).$$

从而 $\boldsymbol{X}$ 的列向量可以由 $\boldsymbol{XA}$ 的列向量线性表示, 即存在矩阵 $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{C}^{n\times m}$, 使

$$\boldsymbol{XAY} = \boldsymbol{X}.$$

所以

$$\boldsymbol{XAX} = \boldsymbol{XA}(\boldsymbol{XAY}) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{AXA})\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{XAY} = \boldsymbol{X}.$$

即

$$\dim R(\boldsymbol{XA}) = \dim R(\boldsymbol{X}).$$

显然又有 $R(\boldsymbol{XA}) \subseteq R(\boldsymbol{X})$, 从而有

$$R(\boldsymbol{XA}) = R(\boldsymbol{X}).$$

从而 $\boldsymbol{X}$ 的列向量可以由 $\boldsymbol{XA}$ 的列向量线性表示, 即存在矩阵 $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{C}^{n\times m}$, 使

$$\boldsymbol{XAY} = \boldsymbol{X}.$$

所以

$$\boldsymbol{XAX} = \boldsymbol{XA}(\boldsymbol{XAY}) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{AXA})\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{XAY} = \boldsymbol{X}.$$

故 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{2\}$, 从而 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{1,2\}$. $\square$

即

$$\dim R(\boldsymbol{XA}) = \dim R(\boldsymbol{X}).$$

显然又有 $R(\boldsymbol{XA}) \subseteq R(\boldsymbol{X})$, 从而有

$$R(\boldsymbol{XA}) = R(\boldsymbol{X}).$$

从而 $\boldsymbol{X}$ 的列向量可以由 $\boldsymbol{XA}$ 的列向量线性表示, 即存在矩阵 $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{C}^{n\times m}$, 使

$$\boldsymbol{XAY} = \boldsymbol{X}.$$

所以

$$\boldsymbol{XAX} = \boldsymbol{XA}(\boldsymbol{XAY}) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{AXA})\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{XAY} = \boldsymbol{X}.$$

故 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{2\}$, 从而 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{1,2\}$. □

从上述定理可知, 下列三个表述中的任何两个都蕴含着第三个成立:

(1) $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{1\}$; (2) $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{2\}$; (3) $\operatorname{rank} \boldsymbol{X} = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}$.

即

$$\dim R(\boldsymbol{XA}) = \dim R(\boldsymbol{X}).$$

显然又有 $R(\boldsymbol{XA}) \subseteq R(\boldsymbol{X})$, 从而有

$$R(\boldsymbol{XA}) = R(\boldsymbol{X}).$$

从而 $\boldsymbol{X}$ 的列向量可以由 $\boldsymbol{XA}$ 的列向量线性表示, 即存在矩阵 $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{C}^{n\times m}$, 使

$$\boldsymbol{XAY} = \boldsymbol{X}.$$

所以

$$\boldsymbol{XAX} = \boldsymbol{XA}(\boldsymbol{XAY}) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{AXA})\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{XAY} = \boldsymbol{X}.$$

故 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{2\}$, 从而 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{1,2\}$. □

从上述定理可知, 下列三个表述中的任何两个都蕴含着第三个成立:

(1) $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{1\}$; (2) $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{2\}$; (3) $\operatorname{rank} \boldsymbol{X} = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}$.

☞ 此定理给出了一个判断 $\boldsymbol{A}^{(1)}$ 是否是 $\boldsymbol{A}^{(1,2)}$ 的一个简单方法: 只需检查 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{(1)}$ 的秩是否相等.

☞ 此定理给出了一个判断 $\boldsymbol{A}^{(1)}$ 是否是 $\boldsymbol{A}^{(1,2)}$ 的一个简单方法: 只需检查 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{(1)}$ 的秩是否相等.

比如, 由 $\boldsymbol{A}^{(1)}$ 的通式

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \boldsymbol{Q}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{G}_{12} \\ \boldsymbol{G}_{21} & \boldsymbol{G}_{22} \end{bmatrix}\boldsymbol{P}, \tag{10}$$

取

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \boldsymbol{Q}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}\boldsymbol{P},$$

即为 $\boldsymbol{A}$ 的一个 $\{1,2\}$-逆.

☞ 此定理给出了一个判断 $\boldsymbol{A}^{(1)}$ 是否是 $\boldsymbol{A}^{(1,2)}$ 的一个简单方法: 只需检查 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{(1)}$ 的秩是否相等.

比如, 由 $\boldsymbol{A}^{(1)}$ 的通式

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \boldsymbol{Q}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{G}_{12} \\ \boldsymbol{G}_{21} & \boldsymbol{G}_{22} \end{bmatrix}\boldsymbol{P}, \tag{10}$$

取

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \boldsymbol{Q}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}\boldsymbol{P},$$

即为 $\boldsymbol{A}$ 的一个 $\{1,2\}$-逆.

得到求某个 $\boldsymbol{A}^{(1,2)}$ 的一个方法:

(1) 将 $\boldsymbol{A}$ 化为标准形 $\boldsymbol{\Phi}$, 即有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{PAQ} = \boldsymbol{\Phi}$;

(2) 则 $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的一个 $\{1,2\}$-逆.

Theorem 3.4

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则

1. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,2)}$ 和 $\boldsymbol{A}^{(1,2)}\boldsymbol{A}$ 都是幂等阵, 且

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,2)}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{(1,2)}\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}.$$

2. $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}^{(1,2)}$.

Theorem 3.4

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则

1. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,2)}$ 和 $\boldsymbol{A}^{(1,2)}\boldsymbol{A}$ 都是幂等阵, 且

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,2)}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{(1,2)}\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}.$$

2. $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}^{(1,2)}$.

$\boldsymbol{A}^{(1,2)}$ 当然满足 $\boldsymbol{A}^{(1)}$ 的相关性质. 再比如:

1. $R\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,2)}\big) = R(\boldsymbol{A})$;
2. $N\big(\boldsymbol{A}^{(1,2)}\boldsymbol{A}\big) = N(\boldsymbol{A})$.

Theorem 3.5

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则

1. $R(\boldsymbol{A}) \oplus N(\boldsymbol{A}^{(1,2)}) = \mathbb{C}^m$.
2. $N(\boldsymbol{A}) \oplus R(\boldsymbol{A}^{(1,2)}) = \mathbb{C}^n$.

Theorem 3.5

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则

1. $R(\boldsymbol{A}) \oplus N(\boldsymbol{A}^{(1,2)}) = \mathbb{C}^m$.
2. $N(\boldsymbol{A}) \oplus R(\boldsymbol{A}^{(1,2)}) = \mathbb{C}^n$.

证: (1) 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,2)} \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 为幂等矩阵, 即为 $\mathbb{C}^m$ 中的投影算子, 所以

$$\mathbb{C}^m = R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,2)}) \oplus N(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,2)}).$$

Theorem 3.5

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则

1. $R(\boldsymbol{A}) \oplus N(\boldsymbol{A}^{(1,2)}) = \mathbb{C}^m$.
2. $N(\boldsymbol{A}) \oplus R(\boldsymbol{A}^{(1,2)}) = \mathbb{C}^n$.

证: (1) 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,2)} \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 为幂等矩阵, 即为 $\mathbb{C}^m$ 中的投影算子, 所以

$$\mathbb{C}^m = R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,2)}) \oplus N(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,2)}).$$

由 $R\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\big) = R(\boldsymbol{A})$, 知 $R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,2)}) = R(\boldsymbol{A})$.

Theorem 3.5

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则

1. $R(\boldsymbol{A}) \oplus N(\boldsymbol{A}^{(1,2)}) = \mathbb{C}^m$.
2. $N(\boldsymbol{A}) \oplus R(\boldsymbol{A}^{(1,2)}) = \mathbb{C}^n$.

证: (1) 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,2)} \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 为幂等矩阵, 即为 $\mathbb{C}^m$ 中的投影算子, 所以

$$\mathbb{C}^m = R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,2)}) \oplus N(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,2)}).$$

由 $R\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\big) = R(\boldsymbol{A})$, 知 $R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,2)}) = R(\boldsymbol{A})$. 下证 $N(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,2)}) = N(\boldsymbol{A}^{(1,2)})$.

Theorem 3.5

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则

1. $R(\boldsymbol{A}) \oplus N(\boldsymbol{A}^{(1,2)}) = \mathbb{C}^m$.
2. $N(\boldsymbol{A}) \oplus R(\boldsymbol{A}^{(1,2)}) = \mathbb{C}^n$.

证: (1) 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,2)} \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 为幂等矩阵, 即为 $\mathbb{C}^m$ 中的投影算子, 所以

$$\mathbb{C}^m = R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,2)}) \oplus N(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,2)}).$$

由 $R\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\big) = R(\boldsymbol{A})$, 知 $R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,2)}) = R(\boldsymbol{A})$. 下证 $N(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,2)}) = N(\boldsymbol{A}^{(1,2)})$.

由 $\{1\}$-逆的性质 $N\big(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\big) = N(\boldsymbol{A})$, 有

$$N\big(\boldsymbol{A}^{(1,2)}\boldsymbol{A}\big) = N(\boldsymbol{A}),$$

Theorem 3.5

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则

1. $R(\boldsymbol{A}) \oplus N(\boldsymbol{A}^{(1,2)}) = \mathbb{C}^m$.
2. $N(\boldsymbol{A}) \oplus R(\boldsymbol{A}^{(1,2)}) = \mathbb{C}^n$.

证: (1) 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,2)} \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 为幂等矩阵, 即为 $\mathbb{C}^m$ 中的投影算子, 所以

$$\mathbb{C}^m = R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,2)}) \oplus N(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,2)}).$$

由 $R\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\big) = R(\boldsymbol{A})$, 知 $R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,2)}) = R(\boldsymbol{A})$. 下证 $N(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,2)}) = N(\boldsymbol{A}^{(1,2)})$.

由 $\{1\}$-逆的性质 $N\big(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\big) = N(\boldsymbol{A})$, 有

$$N\big(\boldsymbol{A}^{(1,2)}\boldsymbol{A}\big) = N(\boldsymbol{A}),$$

因 $\boldsymbol{A}^{(1,2)}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 互为 $\{1,2\}$-逆, 故上式中 $\boldsymbol{A}^{(1,2)}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 可以互换,

Theorem 3.5

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则

1. $R(\boldsymbol{A}) \oplus N(\boldsymbol{A}^{(1,2)}) = \mathbb{C}^m$.
2. $N(\boldsymbol{A}) \oplus R(\boldsymbol{A}^{(1,2)}) = \mathbb{C}^n$.

证: (1) 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,2)} \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 为幂等矩阵, 即为 $\mathbb{C}^m$ 中的投影算子, 所以

$$\mathbb{C}^m = R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,2)}) \oplus N(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,2)}).$$

由 $R\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\big) = R(\boldsymbol{A})$, 知 $R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,2)}) = R(\boldsymbol{A})$. 下证 $N(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,2)}) = N(\boldsymbol{A}^{(1,2)})$.
由 $\{1\}$-逆的性质 $N\big(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\big) = N(\boldsymbol{A})$, 有

$$N\big(\boldsymbol{A}^{(1,2)}\boldsymbol{A}\big) = N(\boldsymbol{A}),$$

因 $\boldsymbol{A}^{(1,2)}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 互为 $\{1,2\}$-逆, 故上式中 $\boldsymbol{A}^{(1,2)}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 可以互换, 即

$$N(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,2)}) = N(\boldsymbol{A}^{(1,2)}).$$

☞ 即言对 $\{1,2\}$-逆, 不仅有与 $\{1\}$-逆相同的结果

$$N\big(\boldsymbol{A}^{(1,2)}\boldsymbol{A}\big) = N(\boldsymbol{A}),$$

☞ 即言对 $\{1,2\}$-逆, 不仅有与 $\{1\}$-逆相同的结果

$$N\big(\boldsymbol{A}^{(1,2)}\boldsymbol{A}\big) = N(\boldsymbol{A}),$$

而且有

$$N(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,2)}) = N(\boldsymbol{A}^{(1,2)}).$$

☞ 即言对 $\{1,2\}$-逆, 不仅有与 $\{1\}$-逆相同的结果

$$N\big(\boldsymbol{A}^{(1,2)}\boldsymbol{A}\big) = N(\boldsymbol{A}),$$

而且有

$$N(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,2)}) = N(\boldsymbol{A}^{(1,2)}).$$

根本原因在于 $\{1,2\}$-逆的自反性.

☞ 即言对 $\{1,2\}$-逆, 不仅有与 $\{1\}$-逆相同的结果

$$N\big(\boldsymbol{A}^{(1,2)}\boldsymbol{A}\big) = N(\boldsymbol{A}),$$

而且有

$$N(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,2)}) = N(\boldsymbol{A}^{(1,2)}).$$

根本原因在于 $\{1,2\}$-逆的自反性.

同理, 由 $R\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\big) = R(\boldsymbol{A})$, 知

$$R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,2)}) = R(\boldsymbol{A}).$$

☞ 即言对 $\{1,2\}$-逆, 不仅有与 $\{1\}$-逆相同的结果

$$N\big(\boldsymbol{A}^{(1,2)}\boldsymbol{A}\big) = N(\boldsymbol{A}),$$

而且有

$$N(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,2)}) = N(\boldsymbol{A}^{(1,2)}).$$

根本原因在于 $\{1,2\}$-逆的自反性.

同理, 由 $R\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\big) = R(\boldsymbol{A})$, 知

$$R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,2)}) = R(\boldsymbol{A}).$$

由 $\{1,2\}$-逆的自反性, 有

$$R(\boldsymbol{A}^{(1,2)}\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}^{(1,2)}).$$

☞ 即言对 $\{1,2\}$-逆, 不仅有与 $\{1\}$-逆相同的结果

$$N\big(\boldsymbol{A}^{(1,2)}\boldsymbol{A}\big) = N(\boldsymbol{A}),$$

而且有

$$N(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,2)}) = N(\boldsymbol{A}^{(1,2)}).$$

根本原因在于 $\{1,2\}$-逆的自反性.

同理, 由 $R\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\big) = R(\boldsymbol{A})$, 知

$$R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,2)}) = R(\boldsymbol{A}).$$

由 $\{1,2\}$-逆的自反性, 有

$$R(\boldsymbol{A}^{(1,2)}\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}^{(1,2)}).$$

(2) 由 $\boldsymbol{A}^{(1,2)}\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 为幂等矩阵, 即为 $\mathbb{C}^n$ 中的投影算子, 所以

$$\mathbb{C}^n = R(\boldsymbol{A}^{(1,2)}\boldsymbol{A}) \oplus N(\boldsymbol{A}^{(1,2)}\boldsymbol{A})$$

☞ 即言对 $\{1,2\}$-逆, 不仅有与 $\{1\}$-逆相同的结果

$$N\big(\boldsymbol{A}^{(1,2)}\boldsymbol{A}\big) = N(\boldsymbol{A}),$$

而且有

$$N(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,2)}) = N(\boldsymbol{A}^{(1,2)}).$$

根本原因在于 $\{1,2\}$-逆的自反性.

同理, 由 $R\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\big) = R(\boldsymbol{A})$, 知

$$R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,2)}) = R(\boldsymbol{A}).$$

由 $\{1,2\}$-逆的自反性, 有

$$R(\boldsymbol{A}^{(1,2)}\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}^{(1,2)}).$$

(2) 由 $\boldsymbol{A}^{(1,2)}\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 为幂等矩阵, 即为 $\mathbb{C}^n$ 中的投影算子, 所以

$$\mathbb{C}^n = R(\boldsymbol{A}^{(1,2)}\boldsymbol{A}) \oplus N(\boldsymbol{A}^{(1,2)}\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}^{(1,2)}) \oplus N(\boldsymbol{A}).$$

☞ 即言对 $\{1,2\}$-逆, 不仅有与 $\{1\}$-逆相同的结果

$$N\big(\boldsymbol{A}^{(1,2)}\boldsymbol{A}\big) = N(\boldsymbol{A}),$$

而且有

$$N(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,2)}) = N(\boldsymbol{A}^{(1,2)}).$$

根本原因在于 $\{1,2\}$-逆的自反性.

同理, 由 $R\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\big) = R(\boldsymbol{A})$, 知

$$R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,2)}) = R(\boldsymbol{A}).$$

由 $\{1,2\}$-逆的自反性, 有

$$R(\boldsymbol{A}^{(1,2)}\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}^{(1,2)}).$$

(2) 由 $\boldsymbol{A}^{(1,2)}\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 为幂等矩阵, 即为 $\mathbb{C}^n$ 中的投影算子, 所以

$$\mathbb{C}^n = R(\boldsymbol{A}^{(1,2)}\boldsymbol{A}) \oplus N(\boldsymbol{A}^{(1,2)}\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}^{(1,2)}) \oplus N(\boldsymbol{A}).$$

得证 $\mathbb{C}^n = N(\boldsymbol{A}) \oplus R(\boldsymbol{A}^{(1,2)})$. □

Outline

前述提到, 若 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A}^{(1)} = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{A}^{(1)}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个 $\{1,2\}$-逆.

前述提到, 若 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A}^{(1)} = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{A}^{(1)}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个 $\{1,2\}$-逆.
从而, 若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ 的 $\{1\}$-逆为

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \boldsymbol{Q} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{G}_{12} \\ \boldsymbol{G}_{21} & \boldsymbol{G}_{22} \end{bmatrix} \boldsymbol{P}, \tag{11}$$

前述提到, 若 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A}^{(1)} = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{A}^{(1)}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个 $\{1,2\}$-逆.
从而, 若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ 的 $\{1\}$-逆为

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \boldsymbol{Q}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{G}_{12} \\ \boldsymbol{G}_{21} & \boldsymbol{G}_{22} \end{bmatrix}\boldsymbol{P}, \tag{11}$$

令

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{Q}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}\boldsymbol{P},$$

则 $\operatorname{rank} \boldsymbol{G} = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}$,

前述提到, 若 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A}^{(1)} = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{A}^{(1)}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个 $\{1,2\}$-逆.
从而, 若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ 的 $\{1\}$-逆为

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \boldsymbol{Q}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{G}_{12} \\ \boldsymbol{G}_{21} & \boldsymbol{G}_{22} \end{bmatrix}\boldsymbol{P}, \tag{11}$$

令

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{Q}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}\boldsymbol{P},$$

则 $\operatorname{rank} \boldsymbol{G} = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}$, 故 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1,2\}$.

Theorem 3.6

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$, 及 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ 分别为 m 阶和 n 阶非奇异方阵, 且 $\boldsymbol{PAQ} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$, 则有

$$\boldsymbol{A}^{(1,2)} = \boldsymbol{Q} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{G}_{12} \\ \boldsymbol{G}_{21} & \boldsymbol{G}_{21}\boldsymbol{G}_{12} \end{bmatrix} \boldsymbol{P}, \tag{12}$$

其中 $\boldsymbol{G}_{12}$, $\boldsymbol{G}_{21}$, 分别是 $r\times(m-r)$, $(n-r)\times r$ 阶的任意矩阵.

Theorem 3.6

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$, 及 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ 分别为 m 阶和 n 阶非奇异方阵, 且 $\boldsymbol{PAQ} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$, 则有

$$\boldsymbol{A}^{(1,2)} = \boldsymbol{Q} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{G}_{12} \\ \boldsymbol{G}_{21} & \boldsymbol{G}_{21}\boldsymbol{G}_{12} \end{bmatrix} \boldsymbol{P}, \tag{12}$$

其中 $\boldsymbol{G}_{12}$, $\boldsymbol{G}_{21}$, 分别是 $r\times(m-r)$, $(n-r)\times r$ 阶的任意矩阵.

☞ 事实上

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{G}_{12} \\ \boldsymbol{G}_{21} & \boldsymbol{G}_{21}\boldsymbol{G}_{12} \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 - \boldsymbol{G}_{21} r_1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{G}_{12} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix} \xrightarrow{c_2 - c_1 \boldsymbol{G}_{12}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}.$$

Theorem 3.6

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$, 及 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ 分别为 m 阶和 n 阶非奇异方阵, 且 $\boldsymbol{PAQ} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$, 则有

$$\boldsymbol{A}^{(1,2)} = \boldsymbol{Q} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{G}_{12} \\ \boldsymbol{G}_{21} & \boldsymbol{G}_{21}\boldsymbol{G}_{12} \end{bmatrix} \boldsymbol{P}, \tag{12}$$

其中 $\boldsymbol{G}_{12}$, $\boldsymbol{G}_{21}$, 分别是 $r\times(m-r)$, $(n-r)\times r$ 阶的任意矩阵.

☞ 事实上

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{G}_{12} \\ \boldsymbol{G}_{21} & \boldsymbol{G}_{21}\boldsymbol{G}_{12} \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 - \boldsymbol{G}_{21} r_1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{G}_{12} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix} \xrightarrow{c_2 - c_1 \boldsymbol{G}_{12}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}.$$

故 $\boldsymbol{Q} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{G}_{12} \\ \boldsymbol{G}_{21} & \boldsymbol{G}_{21}\boldsymbol{G}_{12} \end{bmatrix} \boldsymbol{P}$ 的秩为 r,

Theorem 3.6

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$, 及 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ 分别为 m 阶和 n 阶非奇异方阵, 且 $\boldsymbol{PAQ} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$, 则有

$$\boldsymbol{A}^{(1,2)} = \boldsymbol{Q} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{G}_{12} \\ \boldsymbol{G}_{21} & \boldsymbol{G}_{21}\boldsymbol{G}_{12} \end{bmatrix} \boldsymbol{P}, \tag{12}$$

其中 $\boldsymbol{G}_{12}$, $\boldsymbol{G}_{21}$, 分别是 $r\times(m-r)$, $(n-r)\times r$ 阶的任意矩阵.

☞ 事实上

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{G}_{12} \\ \boldsymbol{G}_{21} & \boldsymbol{G}_{21}\boldsymbol{G}_{12} \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 - \boldsymbol{G}_{21} r_1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{G}_{12} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix} \xrightarrow{c_2 - c_1 \boldsymbol{G}_{12}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}.$$

故 $\boldsymbol{Q} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{G}_{12} \\ \boldsymbol{G}_{21} & \boldsymbol{G}_{21}\boldsymbol{G}_{12} \end{bmatrix} \boldsymbol{P}$ 的秩为 r, 又该式为 $\boldsymbol{A}$ 的一个 $\{1\}$-逆, 从而为 $\boldsymbol{A}$ 的一个 $\{1,2\}$-逆.

Theorem 3.7

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ 的满秩分解式为

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}, \qquad \boldsymbol{B} \in \mathbb{C}_r^{m\times r},\ \boldsymbol{C} \in \mathbb{C}_r^{r\times n}.$$

则 $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{R}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{-1}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个 $\{1,2\}$-逆, 即可取

$$\boldsymbol{A}^{(1,2)} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{R}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{-1}.$$

Theorem 3.7

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ 的满秩分解式为

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}, \qquad \boldsymbol{B} \in \mathbb{C}_r^{m\times r}, \ \boldsymbol{C} \in \mathbb{C}_r^{r\times n}.$$

则 $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{R}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{-1}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个 $\{1,2\}$-逆, 即可取

$$\boldsymbol{A}^{(1,2)} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{R}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{-1}.$$

证: 注意到 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}_{\mathrm{R}}^{-1} = \boldsymbol{I}$,

Theorem 3.7

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ 的满秩分解式为

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}, \qquad \boldsymbol{B} \in \mathbb{C}_r^{m\times r}, \ \boldsymbol{C} \in \mathbb{C}_r^{r\times n}.$$

则 $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{R}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{-1}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个 $\{1,2\}$-逆, 即可取

$$\boldsymbol{A}^{(1,2)} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{R}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{-1}.$$

证: 注意到 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}_{\mathrm{R}}^{-1} = \boldsymbol{I}$, 取 $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{R}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{-1}$, 则

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}_{\mathrm{R}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}, \\
\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} &= \boldsymbol{C}_{\mathrm{R}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}_{\mathrm{R}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{-1} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{R}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{-1} = \boldsymbol{G},
\end{aligned}$$

Theorem 3.7

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ 的满秩分解式为

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}, \qquad \boldsymbol{B} \in \mathbb{C}_r^{m\times r},\ \boldsymbol{C} \in \mathbb{C}_r^{r\times n}.$$

则 $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{R}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{-1}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个 $\{1,2\}$-逆, 即可取

$$\boldsymbol{A}^{(1,2)} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{R}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{-1}.$$

证: 注意到 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}_{\mathrm{R}}^{-1} = \boldsymbol{I}$, 取 $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{R}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{-1}$, 则

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}_{\mathrm{R}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A},\\
\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} &= \boldsymbol{C}_{\mathrm{R}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}_{\mathrm{R}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{-1} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{R}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{-1} = \boldsymbol{G},
\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}^{(1,2)}$. □

Theorem 3.7

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ 的满秩分解式为

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}, \qquad \boldsymbol{B} \in \mathbb{C}_r^{m\times r},\ \boldsymbol{C} \in \mathbb{C}_r^{r\times n}.$$

则 $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{R}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{-1}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个 $\{1,2\}$-逆, 即可取

$$\boldsymbol{A}^{(1,2)} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{R}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{-1}.$$

证: 注意到 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}_{\mathrm{R}}^{-1} = \boldsymbol{I}$, 取 $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{R}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{-1}$, 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}_{\mathrm{R}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A},$$

$$\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{R}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}_{\mathrm{R}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{-1} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{R}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{-1} = \boldsymbol{G},$$

故 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}^{(1,2)}$. □

☞ (1) 若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ 是行满秩的, 则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_m\boldsymbol{A}$, 从而 $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{R}}^{-1}\boldsymbol{I}_{\mathrm{L}}^{-1} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{R}}^{-1}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个 $\{1,2\}$-逆.

Theorem 3.7

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ 的满秩分解式为

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}, \qquad \boldsymbol{B} \in \mathbb{C}_r^{m\times r},\ \boldsymbol{C} \in \mathbb{C}_r^{r\times n}.$$

则 $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{R}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{-1}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个 $\{1,2\}$-逆，即可取

$$\boldsymbol{A}^{(1,2)} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{R}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{-1}.$$

证: 注意到 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}_{\mathrm{R}}^{-1} = \boldsymbol{I}$, 取 $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{R}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{-1}$, 则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}_{\mathrm{R}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A},\\ \boldsymbol{G}\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} &= \boldsymbol{C}_{\mathrm{R}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}_{\mathrm{R}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{-1} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{R}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{-1} = \boldsymbol{G},\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}^{(1,2)}$. □

☞ (1) 若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ 是行满秩的, 则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_m\boldsymbol{A}$, 从而 $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{R}}^{-1}\boldsymbol{I}_{\mathrm{L}}^{-1} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{R}}^{-1}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个 $\{1,2\}$-逆.

(2) 若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ 是列满秩的, 则 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{L}}^{-1}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个 $\{1,2\}$-逆.

Example 3.8

设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, 试求 $\boldsymbol{A}$ 的一个 $\{1,2\}$-逆.

Example 3.8

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\\1&1\end{bmatrix}$, 试求 $\boldsymbol{A}$ 的一个 $\{1,2\}$-逆.

解: 因 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}_2^{3\times 2}$, 故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{(1,2)}&=\boldsymbol{A}_{\mathrm{L}}^{-1}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\&=\left(\begin{bmatrix}1&2&1\\2&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\2&1\\1&1\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}1&2&1\\2&1&1\end{bmatrix}\\&=\frac{1}{11}\begin{bmatrix}-4&7&1\\7&-4&1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Example 3.9

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 2 & 4 & 0\end{bmatrix}$, 试求 $\boldsymbol{A}$ 的一个 $\{1,2\}$-逆.

Example 3.9

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&2\\2&4&0\end{bmatrix}$, 试求 $\boldsymbol{A}$ 的一个 $\{1,2\}$-逆.

解: 因为 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=2<3$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 既非行满秩矩阵也非列满秩矩阵, 先求 $\boldsymbol{A}$ 的满秩分解. 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换, 得到其行最简形矩阵.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&2\\2&4&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2\times\frac{1}{2}]{r_3-2r_1}\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

Example 3.9

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&2\\2&4&0\end{bmatrix}$, 试求 $\boldsymbol{A}$ 的一个 $\{1,2\}$-逆.

解: 因为 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=2<3$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 既非行满秩矩阵也非列满秩矩阵, 先求 $\boldsymbol{A}$ 的满秩分解. 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换, 得到其行最简形矩阵.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&2\\2&4&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2\times\frac{1}{2}]{r_3-2r_1}\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

取此矩阵的前两行构成矩阵 $\boldsymbol{C}$, 取 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列和第 3 列构成矩阵 $\boldsymbol{B}$, 即

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\\2&0\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

则 $\boldsymbol{A}$ 的满秩分解为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$.

于是

$$C_R^{-1} = C^T(CC^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix},$$

$$
\boldsymbol{B}_{\mathrm{R}}^{-1} = (\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
= \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix},
$$

因此

$$
\boldsymbol{A}^{(1,2)} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{R}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{-1} = \frac{1}{50} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 8 \\ 0 & 25 & 0 \end{bmatrix}. \quad \square
$$

$$
\boldsymbol{B}_{\mathrm{R}}^{-1} = (\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
= \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix},
$$

因此

$$
\boldsymbol{A}^{(1,2)} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{R}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}}^{-1} = \frac{1}{50} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 8 \\ 0 & 25 & 0 \end{bmatrix}. \quad \square
$$

☞ 因为 $\boldsymbol{A}$ 的满秩分解不是唯一的, 所以由上述方法得到的 $\boldsymbol{A}^{(1,2)}$ 不唯一.

或者取

$$\boldsymbol{A}^{(1,2)} = \boldsymbol{Q}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}\boldsymbol{P}.$$

或者取

$$\boldsymbol{A}^{(1,2)} = \boldsymbol{Q}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}\boldsymbol{P}.$$

即，由

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

或者取

$$A^{(1,2)} = Q\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} P.$$

即, 由

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ \hdashline 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

得

$$A^{(1,2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Outline

Definition 4.1

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 若 $\boldsymbol{G} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ 满足

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad \boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{A}, \\
&(3) \quad (\boldsymbol{AG})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{AG},
\end{aligned}
$$

则称 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1,3\}$-逆, 记为 $\boldsymbol{A}^{(1,3)}$.

Definition 4.1

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 若 $\boldsymbol{G} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ 满足

$$\begin{aligned} &(1) \quad \boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{A}, \\ &(3) \quad (\boldsymbol{AG})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{AG}, \end{aligned}$$

则称 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1,3\}$-逆, 记为 $\boldsymbol{A}^{(1,3)}$.

记 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1,3\}$-逆的全体为 $\boldsymbol{A}\{1,3\}$, 即

$$\boldsymbol{A}\{1,3\} = \{\boldsymbol{G} \mid \boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{A}, (\boldsymbol{AG})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{AG}\}.$$

Definition 4.1

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 若 $\boldsymbol{G} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ 满足

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad \boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{A},\\
&(3) \quad (\boldsymbol{AG})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{AG},
\end{aligned}
$$

则称 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 {1,3}-逆, 记为 $\boldsymbol{A}^{(1,3)}$.

记 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1,3\}$-逆的全体为 $\boldsymbol{A}\{1,3\}$, 即

$$\boldsymbol{A}\{1,3\} = \{\boldsymbol{G} \mid \boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{A}, (\boldsymbol{AG})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{AG}\}.$$

☞ 此时 $\boldsymbol{AG}$ 是正交投影算子.

Definition 4.1

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 若 $\boldsymbol{G} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ 满足

$$(1) \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A},$$
$$(3) \quad (\boldsymbol{A}\boldsymbol{G})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{G},$$

则称 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 {1,3}-逆, 记为 $\boldsymbol{A}^{(1,3)}$.

记 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1,3\}$-逆的全体为 $\boldsymbol{A}\{1,3\}$, 即

$$\boldsymbol{A}\{1,3\} = \{\boldsymbol{G} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}, (\boldsymbol{A}\boldsymbol{G})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\}.$$

☞ 此时 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}$ 是正交投影算子.
因 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}$ 是幂等阵, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}$ 是幂等矩阵;

Definition 4.1

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 若 $\boldsymbol{G} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ 满足

$$(1) \quad \boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{A},$$

$$(3) \quad (\boldsymbol{AG})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{AG},$$

则称 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1,3\}$-逆, 记为 $\boldsymbol{A}^{(1,3)}$.

记 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1,3\}$-逆的全体为 $\boldsymbol{A}\{1,3\}$, 即

$$\boldsymbol{A}\{1,3\} = \{\boldsymbol{G} \mid \boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{A}, (\boldsymbol{AG})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{AG}\}.$$

☞ 此时 $\boldsymbol{AG}$ 是正交投影算子.

因 $\boldsymbol{AA}^{(1)}$ 是幂等阵, 则 $\boldsymbol{AG}$ 是幂等矩阵; 又 $\boldsymbol{AG}$ 是 Hermite 矩阵, 故 $\boldsymbol{AG}$ 是正交投影算子.

Definition 4.2

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 若 $\boldsymbol{G} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ 满足

$$\begin{aligned} &(1) \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}, \\ &(2) \quad \boldsymbol{G}\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}, \\ &(3) \quad (\boldsymbol{A}\boldsymbol{G})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}, \end{aligned}$$

则称 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1,2,3\}$-逆, 记为 $\boldsymbol{A}^{(1,2,3)}$.

Definition 4.2

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 若 $\boldsymbol{G} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ 满足

$$\begin{aligned} &(1) \quad \boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{A}, \\ &(2) \quad \boldsymbol{GAG} = \boldsymbol{G}, \\ &(3) \quad (\boldsymbol{AG})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{AG}, \end{aligned}$$

则称 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1,2,3\}$-逆, 记为 $\boldsymbol{A}^{(1,2,3)}$.

记 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1,2,3\}$-逆的全体为 $\boldsymbol{A}\{1,2,3\}$, 即

$$\boldsymbol{A}\{1,2,3\} = \{\boldsymbol{G} \mid \boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{A}, \boldsymbol{GAG} = \boldsymbol{G}, (\boldsymbol{AG})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{AG}\}.$$

Definition 4.2

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 若 $\boldsymbol{G} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ 满足

$$\begin{aligned} &(1) \quad \boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{A}, \\ &(2) \quad \boldsymbol{GAG} = \boldsymbol{G}, \\ &(3) \quad (\boldsymbol{AG})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{AG}, \end{aligned}$$

则称 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1,2,3\}$-逆, 记为 $\boldsymbol{A}^{(1,2,3)}$.

记 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1,2,3\}$-逆的全体为 $\boldsymbol{A}\{1,2,3\}$, 即

$$\boldsymbol{A}\{1,2,3\} = \{\boldsymbol{G} \mid \boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{A}, \boldsymbol{GAG} = \boldsymbol{G}, (\boldsymbol{AG})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{AG}\}.$$

下面先证明 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1,2,3\}$-逆存在, 从而也就证明了 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1,3\}$-逆存在.

Theorem 4.3 (Urguhart)

对任一矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 都有

$$\boldsymbol{Y} = \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\right)^{(1)}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} \in \boldsymbol{A}\{1,2,3\}.$$

Theorem 4.3 (Urguhart)

对任一矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 都有

$$\boldsymbol{Y} = \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\right)^{(1)}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} \in \boldsymbol{A}\{1,2,3\}.$$

证: 依次证明 $\boldsymbol{Y}$ 满足定义的 3 个条件.

Theorem 4.3 (Urguhart)

对任一矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 都有

$$\boldsymbol{Y} = \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\right)^{(1)}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} \in \boldsymbol{A}\{1,2,3\}.$$

证: 依次证明 $\boldsymbol{Y}$ 满足定义的 3 个条件.

(1) 由教材 P.116 定理 3.1.8 知, $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$, 故

$$\dim R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}) = \dim R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}).$$

又 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}) \subseteq R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$, 所以

$$R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}).$$

Theorem 4.3 (Urguhart)

对任一矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 都有

$$\boldsymbol{Y} = \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\right)^{(1)}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} \in \boldsymbol{A}\{1,2,3\}.$$

证: 依次证明 $\boldsymbol{Y}$ 满足定义的 3 个条件.

(1) 由教材 P.116 定理 3.1.8 知, $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$, 故

$$\dim R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}) = \dim R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}).$$

又 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}) \subseteq R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$, 所以

$$R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}).$$

故 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ 的列向量是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ 的列向量的线性组合, 则存在矩阵 $\boldsymbol{U} \in \mathbb{C}^{n\times m}$, 使得

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}.$$

Theorem 4.3 (Urguhart)

对任一矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 都有

$$\boldsymbol{Y} = \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\right)^{(1)}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} \in \boldsymbol{A}\{1,2,3\}.$$

证: 依次证明 $\boldsymbol{Y}$ 满足定义的 3 个条件.

(1) 由教材 P.116 定理 3.1.8 知, $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$, 故

$$\dim R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}) = \dim R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}).$$

又 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}) \subseteq R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$, 所以

$$R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}).$$

故 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ 的列向量是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ 的列向量的线性组合, 则存在矩阵 $\boldsymbol{U} \in \mathbb{C}^{n\times m}$, 使得

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}.$$

两边取共轭转置有

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}.$$

从而

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\right)^{(1)}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A} && \left(\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{Y}=\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\right)^{(1)}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\right)\\
&= \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A} && \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\right)\\
&= \boldsymbol{A}. && \left(\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\right)
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\right)^{(1)}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A} && \left(\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{Y}=\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\right)^{(1)}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\right) \\ &= \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A} && \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\right) \\ &= \boldsymbol{A}. && \left(\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\right) \end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{Y}\in\boldsymbol{A}\{1\}$.

从而

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\right)^{(1)}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A} && \left(\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{Y}=\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\right)^{(1)}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\right)\\
&= \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A} && \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\right)\\
&= \boldsymbol{A}. && \left(\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\right)
\end{aligned}
$$

故 $\boldsymbol{Y}\in\boldsymbol{A}\{1\}$.

(2) 由 $\boldsymbol{A}^{(1)}$ 的性质知, $\operatorname{rank}\boldsymbol{Y}\geqslant\operatorname{rank}\boldsymbol{A}$.

从而

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})^{(1)}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A} && \left(\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})^{(1)}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\right)\\
&= \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A} && \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\right)\\
&= \boldsymbol{A}. && \left(\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\right)
\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{Y}\in\boldsymbol{A}\{1\}$.

(2) 由 $\boldsymbol{A}^{(1)}$ 的性质知, rank $\boldsymbol{Y}\geqslant$ rank $\boldsymbol{A}$. 又

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{Y}=\operatorname{rank}\left((\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})^{(1)}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\right)\leqslant\operatorname{rank}\boldsymbol{A}^{\mathbf{H}}=\operatorname{rank}\boldsymbol{A},$$

从而

$$
\begin{aligned}
AYA &= U^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}A(A^{\mathrm{H}}A)^{(1)}A^{\mathrm{H}}A && \left(A = U^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}A,\ Y = (A^{\mathrm{H}}A)^{(1)}A^{\mathrm{H}}\right) \\
&= U^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}A && \left(A^{\mathrm{H}}A(A^{\mathrm{H}}A)^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}A = A^{\mathrm{H}}A\right) \\
&= A. && \left(A = U^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}A\right)
\end{aligned}
$$

故 $Y \in A\{1\}$.

(2) 由 $A^{(1)}$ 的性质知, $\operatorname{rank} Y \geqslant \operatorname{rank} A$. 又

$$\operatorname{rank} Y = \operatorname{rank}\left((A^{\mathrm{H}}A)^{(1)}A^{\mathrm{H}}\right) \leqslant \operatorname{rank} A^{\mathbf{H}} = \operatorname{rank} A,$$

所以

$$\operatorname{rank} Y = \operatorname{rank} A.$$

从而

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\right)^{(1)}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A} && \left(\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{Y}=\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\right)^{(1)}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\right)\\
&= \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A} && \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\right)\\
&= \boldsymbol{A}. && \left(\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\right)
\end{aligned}
$$

故 $\boldsymbol{Y}\in\boldsymbol{A}\{1\}$.

(2) 由 $\boldsymbol{A}^{(1)}$ 的性质知, $\operatorname{rank}\boldsymbol{Y}\geqslant\operatorname{rank}\boldsymbol{A}$. 又

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{Y}=\operatorname{rank}\left(\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\right)^{(1)}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\right)\leqslant\operatorname{rank}\boldsymbol{A}^{\mathbf{H}}=\operatorname{rank}\boldsymbol{A},$$

所以

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{Y}=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}.$$

由定理 3.3 知 $\boldsymbol{Y}\in\boldsymbol{A}\{1,2\}$.

(3) 又因为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y} &= \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\right)^{(1)}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} && \left(\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{Y}=\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\right)^{(1)}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\right)\\
&= \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\right)^{(1)}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} && \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\right)\\
&= \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} && \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\right)\\
&= (\boldsymbol{A}\boldsymbol{U})^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}),
\end{aligned}
$$

(3) 又因为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y} &= \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\right)^{(1)}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} && \left(\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{Y} = \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\right)^{(1)}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\right) \\
&= \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\right)^{(1)}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} && \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\right) \\
&= \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} && \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\right) \\
&= (\boldsymbol{A}\boldsymbol{U})^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}),
\end{aligned}
$$

从而

$$
(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y})^{\mathrm{H}} = \left((\boldsymbol{A}\boldsymbol{U})^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{U})\right)^{\mathrm{H}} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{U})^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}.
$$

(3) 又因为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y} &= \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\right)^{(1)}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} && \left(\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{Y}=\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\right)^{(1)}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\right) \\
&= \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\right)^{(1)}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} && \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\right) \\
&= \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} && \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\right) \\
&= (\boldsymbol{A}\boldsymbol{U})^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}),
\end{aligned}
$$

从而

$$
(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y})^{\mathrm{H}} = \left((\boldsymbol{A}\boldsymbol{U})^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{U})\right)^{\mathrm{H}} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{U})^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}.
$$

所以 $\boldsymbol{Y}\in\boldsymbol{A}\{1,2,3\}$. □

☞ 由 $\boldsymbol{Y}\in\boldsymbol{A}\{1,2,3\}$ 有 $\boldsymbol{Y}\in\boldsymbol{A}\{1,3\}$, 即任一矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1,3\}$-逆是存在的.

Theorem 4.4

设 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1,3\}$, 则

$$\boldsymbol{A}\{1,3\} = \left\{ \boldsymbol{G} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{A})\boldsymbol{Y} \mid \boldsymbol{Y} \text{ 是任意的 } n \times m \text{ 阶矩阵} \right\}.$$

Theorem 4.4

设 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1,3\}$, 则

$$\boldsymbol{A}\{1,3\} = \left\{ \boldsymbol{G} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{A})\boldsymbol{Y} \mid \boldsymbol{Y} \text{ 是任意的 } n \times m \text{ 阶矩阵} \right\}.$$

证: 记 $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{G} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{A})\boldsymbol{Y}$.

Theorem 4.4

设 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1,3\}$, 则

$$\boldsymbol{A}\{1,3\} = \left\{\boldsymbol{G} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{A})\boldsymbol{Y} \mid \boldsymbol{Y} \text{ 是任意的 } n \times m \text{ 阶矩阵}\right\}.$$

证: 记 $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{G} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{A})\boldsymbol{Y}$. 任意 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1\}$, 有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O},$$

Theorem 4.4

设 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1,3\}$, 则

$$\boldsymbol{A}\{1,3\} = \left\{ \boldsymbol{G} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{A})\boldsymbol{Y} \mid \boldsymbol{Y} \text{ 是任意的 } n \times m \text{ 阶矩阵} \right\}.$$

证: 记 $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{G} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{A})\boldsymbol{Y}$. 任意 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1\}$, 有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O},$$

故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}$.

Theorem 4.4

设 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1,3\}$, 则

$$\boldsymbol{A}\{1,3\} = \left\{\boldsymbol{G} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{A})\boldsymbol{Y} \mid \boldsymbol{Y} \text{ 是任意的 } n \times m \text{ 阶矩阵}\right\}.$$

证: 记 $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{G} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{A})\boldsymbol{Y}$. 任意 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1\}$, 有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O},$$

故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}$. 从而

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A},$$

Theorem 4.4

设 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1,3\}$, 则

$$\boldsymbol{A}\{1,3\} = \left\{ \boldsymbol{G} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{A})\boldsymbol{Y} \mid \boldsymbol{Y} \text{ 是任意的 } n \times m \text{ 阶矩阵} \right\}.$$

证: 记 $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{G} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{A})\boldsymbol{Y}$. 任意 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1\}$, 有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O},$$

故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}$. 从而

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A},$$

所以 $\boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{A}\{1\}$.

Theorem 4.4

设 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1,3\}$, 则

$$\boldsymbol{A}\{1,3\} = \left\{ \boldsymbol{G} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{A})\boldsymbol{Y} \mid \boldsymbol{Y} \text{ 是任意的 } n \times m \text{ 阶矩阵} \right\}.$$

证: 记 $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{G} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{A})\boldsymbol{Y}$. 任意 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1\}$, 有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O},$$

故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}$. 从而

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A},$$

所以 $\boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{A}\{1\}$.

又因为

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z})^{\mathrm{H}} &= (\boldsymbol{A}\boldsymbol{G})^{\mathrm{H}} && (\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}) \\ &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{G} && ((\boldsymbol{A}\boldsymbol{G})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}) \\ &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}, && (\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}) \end{aligned}$$

Theorem 4.4

设 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1,3\}$, 则

$$\boldsymbol{A}\{1,3\} = \left\{\boldsymbol{G} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{A})\boldsymbol{Y} \mid \boldsymbol{Y} \text{ 是任意的 } n \times m \text{ 阶矩阵}\right\}.$$

证: 记 $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{G} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{A})\boldsymbol{Y}$. 任意 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1\}$, 有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O},$$

故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}$. 从而

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A},$$

所以 $\boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{A}\{1\}$.

又因为

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z})^{\mathrm{H}} &= (\boldsymbol{A}\boldsymbol{G})^{\mathrm{H}} && \left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\right) \\
&= \boldsymbol{A}\boldsymbol{G} && \left((\boldsymbol{A}\boldsymbol{G})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\right) \\
&= \boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}, && \left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\right)
\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{A}\{1,3\}$.

反过来, 任取 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{1,3\}$,

反过来, 任取 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{1,3\}$, 令 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X} - \boldsymbol{G}$, 则

$$
\begin{aligned}
& \boldsymbol{G} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{A})\boldsymbol{Y} \\
= {} & \boldsymbol{G} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{A})(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{G}) \\
= {} & \boldsymbol{G} + \boldsymbol{X} - \boldsymbol{G} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} \\
= {} & \boldsymbol{X} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} \\
= {} & \boldsymbol{X} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} && \big(\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}\big) \\
= {} & \boldsymbol{X} - \boldsymbol{G}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G})^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})^{\mathrm{H}} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} && \big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{G})^{\mathrm{H}},\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})^{\mathrm{H}}\big) \\
= {} & \boldsymbol{X} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{X}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} \\
= {} & \boldsymbol{X} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} && \big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\big) \\
= {} & \boldsymbol{X} - \boldsymbol{G}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G})^{\mathrm{H}} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} \\
= {} & \boldsymbol{X}, && \big((\boldsymbol{A}\boldsymbol{G})^{\mathrm{H}} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{G})\big)
\end{aligned}
$$

反过来, 任取 $\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{A}\{1,3\}$, 令 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}-\boldsymbol{G}$, 则

$$
\begin{aligned}
& \boldsymbol{G}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{A})\boldsymbol{Y} \\
={}& \boldsymbol{G}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{A})(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{G}) \\
={}& \boldsymbol{G}+\boldsymbol{X}-\boldsymbol{G}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} \\
={}& \boldsymbol{X}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} \\
={}& \boldsymbol{X}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} && (\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}) \\
={}& \boldsymbol{X}-\boldsymbol{G}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G})^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})^{\mathrm{H}}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} && \left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G})^{\mathrm{H}},\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})^{\mathrm{H}}\right) \\
={}& \boldsymbol{X}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{X}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} \\
={}& \boldsymbol{X}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} && (\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}) \\
={}& \boldsymbol{X}-\boldsymbol{G}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G})^{\mathrm{H}}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} \\
={}& \boldsymbol{X}, && \left((\boldsymbol{A}\boldsymbol{G})^{\mathrm{H}}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G})\right)
\end{aligned}
$$

故任意 $\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{A}\{1,3\}$, 都可以用 $\boldsymbol{G}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{A})\boldsymbol{Y}$ 表达. 得证. □

Outline

Example 4.5

已知某种材料在生产过程中的废品率 y 与某种化学成分 x 有关. 下列表中记载了某工厂生产中 y 与相应的 x 的几组数值:

$y(\%)$	1.00	0.9	0.9	0.81	0.60	0.56	0.35
$x(\%)$	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0	4.0	4.2

我们想找出 y 对 x 的一个近似公式.

解: 把表中数值画出图来看, 发现它的变换趋势近于一条直线. 因此我们选取 x 的一次式 $ax+b$ 来表达. 当然最好能选到适当的 a, b 使得下面的等式

$$
\begin{aligned}
3.6a + b - 1.00 &= 0, \\
3.7a + b - 0.9 &= 0, \\
3.8a + b - 0.9 &= 0, \\
3.9a + b - 0.81 &= 0, \\
4.0a + b - 0.60 &= 0, \\
4.1a + b - 0.56 &= 0, \\
4.2a + b - 0.35 &= 0
\end{aligned}
$$

都成立. 实际上是不可能的 ($\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = 2 \neq \operatorname{rank}[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}] = 3$), 任何 a, b 代入上面各式都有误差.

$$
\begin{aligned}
3.6a + b - 1.00 &= 0,\\
3.7a + b - 0.9 &= 0,\\
3.8a + b - 0.9 &= 0,\\
3.9a + b - 0.81 &= 0,\\
4.0a + b - 0.60 &= 0,\\
4.1a + b - 0.56 &= 0,\\
4.2a + b - 0.35 &= 0
\end{aligned}
$$

都成立. 实际上是不可能的 ($\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = 2 \neq \operatorname{rank}[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}] = 3$), 任何 a, b 代入上面各式都有误差. 于是想找到 a, b 使得上面各式的误差的平方和最小, 即找 a, b 使

$$
\begin{aligned}
&(3.6a + b - 1.00)^2 + (3.7a + b - 0.9)^2 + (3.8a + b - 0.9)^2 + (3.9a + b - 0.81)^2\\
&+ (4.0a + b - 0.60)^2 + (4.1a + b - 0.56)^2 + (4.2a + b - 0.35)^2
\end{aligned}
$$

最小.

$$
\begin{aligned}
3.6a + b - 1.00 &= 0, \\
3.7a + b - 0.9 &= 0, \\
3.8a + b - 0.9 &= 0, \\
3.9a + b - 0.81 &= 0, \\
4.0a + b - 0.60 &= 0, \\
4.1a + b - 0.56 &= 0, \\
4.2a + b - 0.35 &= 0
\end{aligned}
$$

都成立. 实际上是不可能的 ($\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = 2 \neq \operatorname{rank}[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}] = 3$), 任何 a, b 代入上面各式都有误差. 于是想找到 a, b 使得上面各式的误差的平方和最小, 即找 a, b 使

$$
\begin{aligned}
&(3.6a + b - 1.00)^2 + (3.7a + b - 0.9)^2 + (3.8a + b - 0.9)^2 + (3.9a + b - 0.81)^2 \\
&+ (4.0a + b - 0.60)^2 + (4.1a + b - 0.56)^2 + (4.2a + b - 0.35)^2
\end{aligned}
$$

最小. 这里讨论的是误差的平方即二乘方, 故称为最小二乘法.

矛盾方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 是没有解的, 但希望找到近似解 $\boldsymbol{x}_0$ 使误差 $\|\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b}\|$ 为最小.

矛盾方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 是没有解的, 但希望找到近似解 $\boldsymbol{x}_0$ 使误差 $\|\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b}\|$ 为最小. 若 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{C}^n$ 满足

$$\|\boldsymbol{Ax}_0-\boldsymbol{b}\|=\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n}\|\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b}\|,$$

即

$$\|\boldsymbol{Ax}_0-\boldsymbol{b}\|\leqslant\|\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b}\|,$$

则称近似解 $\boldsymbol{x}_0$ 为矛盾方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的最小二乘 (least squares) 解, 简称为 L-S 解.

矛盾方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 是没有解的, 但希望找到近似解 $\boldsymbol{x}_0$ 使误差 $\|\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b}\|$ 为最小. 若 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ 满足

$$\|\boldsymbol{Ax}_0-\boldsymbol{b}\| = \min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n} \|\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b}\|,$$

即

$$\|\boldsymbol{Ax}_0-\boldsymbol{b}\| \leqslant \|\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b}\|,$$

则称近似解 $\boldsymbol{x}_0$ 为矛盾方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的最小二乘 (least squares) 解, 简称为 L-S 解.

☞ 矛盾方程无解, 故最小二乘解并不是矛盾方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解, 只是其近似解.

Theorem 4.6

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^{m}$, 任取 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1,3\}$, 则 $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{G}\boldsymbol{b}$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的最小二乘解.

Theorem 4.6

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$, 任取 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1,3\}$, 则 $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{G}\boldsymbol{b}$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的最小二乘解.

证: 由 $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}\|^2 = \|(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{b} + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{b})\|^2$,

Theorem 4.6

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$, 任取 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1,3\}$, 则 $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{G}\boldsymbol{b}$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的最小二乘解.

证: 由 $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}\|^2 = \|(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{b} + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{b})\|^2$, 又因为

$$\begin{aligned}
\big(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{b}) \mid (\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{b}\big) &= \boldsymbol{b}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} - \boldsymbol{I})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{b}) \\
&= \boldsymbol{b}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{b}) = 0,
\end{aligned}$$

Theorem 4.6

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$, 任取 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1,3\}$, 则 $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{G}\boldsymbol{b}$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的最小二乘解.

证: 由 $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}\|^2 = \|(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{b} + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{b})\|^2$, 又因为

$$\begin{aligned}\big(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{b}) \mid (\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{b}\big) &= \boldsymbol{b}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} - \boldsymbol{I})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{b}) \\ &= \boldsymbol{b}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{b}) = 0,\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{b}) \perp (\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{b}$.

Theorem 4.6

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^{m}$, 任取 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1,3\}$, 则 $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{G}\boldsymbol{b}$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的最小二乘解.

证: 由 $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}\|^2 = \|(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{b}+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{b})\|^2$, 又因为

$$\begin{aligned}\big(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}) \mid (\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{b}\big) &= \boldsymbol{b}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{I})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}) \\ &= \boldsymbol{b}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}) = 0,\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}) \perp (\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{b}$. 所以

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\|^2 + \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}\|^2,$$

Theorem 4.6

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$, 任取 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1,3\}$, 则 $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{G}\boldsymbol{b}$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的最小二乘解.

证: 由 $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}\|^2 = \|(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{b}+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{b})\|^2$, 又因为

$$\begin{aligned}\big(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}) \mid (\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{b}\big) &= \boldsymbol{b}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{I})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}) \\ &= \boldsymbol{b}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}) = 0,\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}) \perp (\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{b}$. 所以

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\|^2 + \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}\|^2,$$

故对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ 都有

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\|^2 \leqslant \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|^2,$$

Theorem 4.6

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^{m}$, 任取 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1,3\}$, 则 $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{G}\boldsymbol{b}$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的最小二乘解.

证: 由 $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}\|^2 = \|(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{b}+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{b})\|^2$, 又因为

$$\begin{aligned}\big(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}) \mid (\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{b}\big) &= \boldsymbol{b}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{I})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}) \\ &= \boldsymbol{b}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}) = 0,\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}) \perp (\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{b}$. 所以

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\|^2 + \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}\|^2,$$

故对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ 都有

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\|^2 \leqslant \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|^2,$$

因此 $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{G}\boldsymbol{b}$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的最小二乘解. □

☞ (1) 对 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}) \perp (\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{b}$ 的说明.

☞ (1) 对 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}) \perp (\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{b}$ 的说明.

事实上, 对任意 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^m$, $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{C}^n$, 都有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} \perp (\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{\beta}.$$

其中 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1,3\}$.

☞ (1) 对 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}) \perp (\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{b}$ 的说明.

事实上, 对任意 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^m$, $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{C}^n$, 都有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} \perp (\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{\beta}.$$

其中 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1,3\}$.

证: 注意到 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}$ 是正交投影算子,

☞ (1) 对 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}) \perp (\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{b}$ 的说明.

事实上, 对任意 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^m$, $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{C}^n$, 都有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} \perp (\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{\beta}.$$

其中 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1,3\}$.

证: 注意到 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}$ 是正交投影算子, 从而

$$R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}) \perp N(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}).$$

☞ (1) 对 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}) \perp (\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{b}$ 的说明.

事实上, 对任意 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^m$, $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{C}^n$, 都有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} \perp (\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{\beta}.$$

其中 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1,3\}$.

证: 注意到 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}$ 是正交投影算子, 从而

$$R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}) \perp N(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}).$$

又 $R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}) = R(\boldsymbol{A})$, $N(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}) = R(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}) = R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{I})$,

☞ (1) 对 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}) \perp (\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{b}$ 的说明.

事实上, 对任意 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^m$, $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{C}^n$, 都有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} \perp (\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{\beta}.$$

其中 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1,3\}$.

证: 注意到 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}$ 是正交投影算子, 从而

$$R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}) \perp N(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}).$$

又 $R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}) = R(\boldsymbol{A})$, $N(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}) = R(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}) = R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{I})$, 故

$$R(\boldsymbol{A}) \perp R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{I}).$$

得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} \perp (\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{\beta}$.

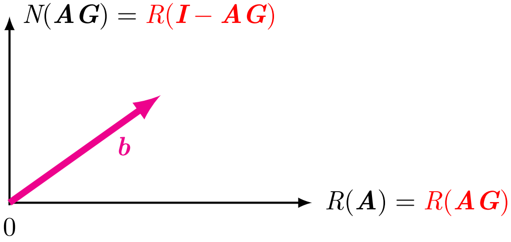
☞ (2) "对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ 都有 $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\|^2 \leqslant \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|^2$" 的几何意义.

☞ (2) "对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ 都有 $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\|^2 \leqslant \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|^2$" 的几何意义.

假定 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 是矛盾方程, 故 $\boldsymbol{b} \notin R(\boldsymbol{A})$.

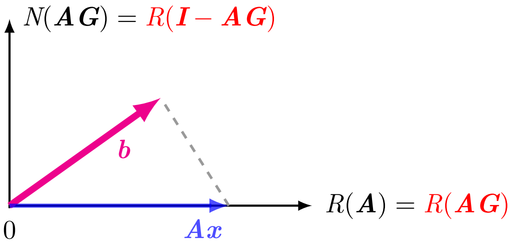
☞ (2) "对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ 都有 $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\|^2 \leqslant \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|^2$" 的几何意义.

假定 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 是矛盾方程, 故 $\boldsymbol{b} \notin R(\boldsymbol{A})$.



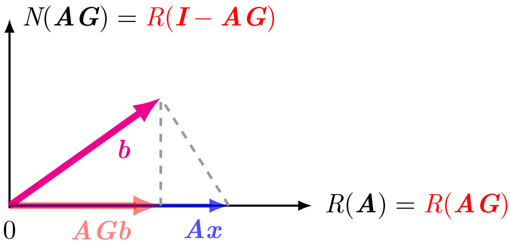
☞ (2) “对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ 都有 $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\|^2 \leqslant \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|^2$” 的几何意义.

假定 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 是矛盾方程, 故 $\boldsymbol{b} \notin R(\boldsymbol{A})$.

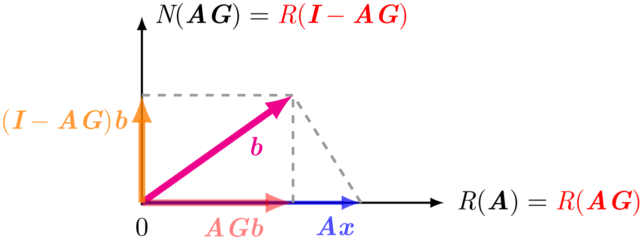


☞ (2) “对任意 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n$ 都有 $\|\boldsymbol{AGb}-\boldsymbol{b}\|^2\leqslant\|\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b}\|^2$” 的几何意义.

假定 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 是矛盾方程, 故 $\boldsymbol{b}\notin R(\boldsymbol{A})$.

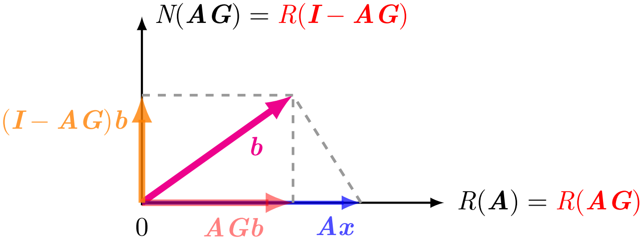


☞ (2) "对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ 都有 $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\|^2 \leqslant \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|^2$" 的几何意义.
假定 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 是矛盾方程, 故 $\boldsymbol{b} \notin R(\boldsymbol{A})$.



☞ (2) "对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ 都有 $\|\boldsymbol{AGb}-\boldsymbol{b}\|^2 \leqslant \|\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b}\|^2$" 的几何意义.

假定 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 是矛盾方程, 故 $\boldsymbol{b} \notin R(\boldsymbol{A})$.

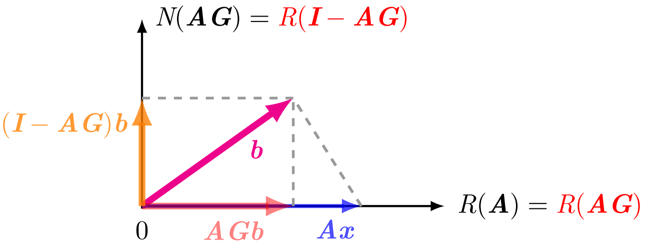


前述已证 $R(\boldsymbol{A}) \perp R(\boldsymbol{AG}-\boldsymbol{I})$, 故

$$(\boldsymbol{AG}-\boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{b} \perp R(\boldsymbol{A}).$$

☞ (2) “对任意 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n$ 都有 $\|\boldsymbol{AGb}-\boldsymbol{b}\|^2\leqslant\|\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b}\|^2$” 的几何意义.

假定 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 是矛盾方程, 故 $\boldsymbol{b}\notin R(\boldsymbol{A})$.



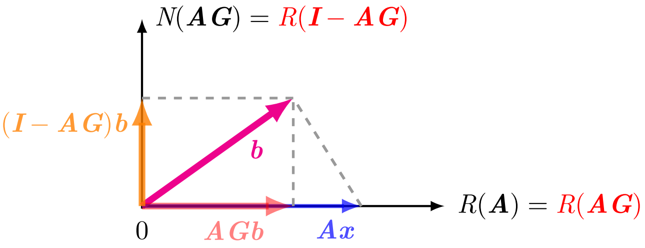
前述已证 $R(\boldsymbol{A})\perp R(\boldsymbol{AG}-\boldsymbol{I})$, 故

$$(\boldsymbol{AG}-\boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{b}\perp R(\boldsymbol{A}).$$

故对任意 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n$ 都有 $\|\boldsymbol{AGb}-\boldsymbol{b}\|^2\leqslant\|\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b}\|^2$.

☞ (2) "对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ 都有 $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\|^2 \leqslant \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|^2$" 的几何意义.

假定 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 是矛盾方程, 故 $\boldsymbol{b} \notin R(\boldsymbol{A})$.



前述已证 $R(\boldsymbol{A}) \perp R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{I})$, 故

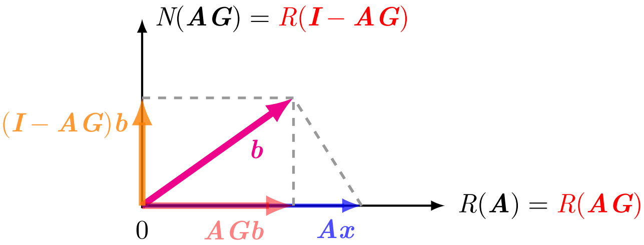
$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{b} \perp R(\boldsymbol{A}).$$

故对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ 都有 $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\|^2 \leqslant \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|^2$.

又 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}$ 是 $\boldsymbol{b}$ 沿 $N(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G})$ 方向在 $R(\boldsymbol{A})$ 的正交投影, 故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}$ 时, $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|^2$ 最小.

☞ (2) "对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ 都有 $\|\boldsymbol{AGb}-\boldsymbol{b}\|^2 \leqslant \|\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b}\|^2$" 的几何意义.

假定 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 是矛盾方程, 故 $\boldsymbol{b} \notin R(\boldsymbol{A})$.



前述已证 $R(\boldsymbol{A}) \perp R(\boldsymbol{AG}-\boldsymbol{I})$, 故

$$(\boldsymbol{AG}-\boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{b} \perp R(\boldsymbol{A}).$$

故对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ 都有 $\|\boldsymbol{AGb}-\boldsymbol{b}\|^2 \leqslant \|\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b}\|^2$.

又 $\boldsymbol{AGb}$ 是 $\boldsymbol{b}$ 沿 $N(\boldsymbol{AG})$ 方向在 $R(\boldsymbol{A})$ 的正交投影, 故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{AGb}$ 时, $\|\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b}\|^2$ 最小. (注意 $N(\boldsymbol{A})$ 不一定垂直于 $R(\boldsymbol{A})$.)

Corollary 4.7

设 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1,3\}$, 则 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的最小二乘解的充分必要条件为: $\boldsymbol{x}_0$ 是方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}$$

的解.

Corollary 4.7

设 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1,3\}$, 则 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的最小二乘解的充分必要条件为: $\boldsymbol{x}_0$ 是方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}$$

的解.

证: 若 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1,3\}$, 则对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ 都有

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\|^2 + \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}\|^2.$$

如果 $\boldsymbol{x}_0$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的最小二乘解, 则应有

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\|^2.$$

Corollary 4.7

设 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1,3\}$, 则 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的最小二乘解的充分必要条件为: $\boldsymbol{x}_0$ 是方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}$$

的解.

证: 若 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1,3\}$, 则对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ 都有

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\|^2 + \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}\|^2.$$

如果 $\boldsymbol{x}_0$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的最小二乘解, 则应有

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\|^2.$$

所以

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}\|^2 = 0$$

则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b} = 0,$$

即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}$.

反之, 若 $\boldsymbol{x}_0$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}$,

反之, 若 $\boldsymbol{x}_0$ 满足 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{AGb}$, 则必有

$$\|\boldsymbol{Ax}_0 - \boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{AGb} - \boldsymbol{b}\|^2.$$

即 $\boldsymbol{x}_0$ 也是方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的最小二乘解. □

Corollary 4.8

方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的最小二乘解的通式为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Gb}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{GA})\boldsymbol{y},$$

其中 $\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{A}\{1,3\}$, $\boldsymbol{y}$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的任意向量.

Corollary 4.8

方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的最小二乘解的通式为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y},$$

其中 $\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{A}\{1,3\}$, $\boldsymbol{y}$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的任意向量.

证: 由推理 4.7 知, $\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的最小二乘解的充分必要条件为: $\boldsymbol{x}$ 是方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}$$

的解,

Corollary 4.8

方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的最小二乘解的通式为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Gb} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{GA})\boldsymbol{y},$$

其中 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1,3\}$, $\boldsymbol{y}$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的任意向量.

证: 由推理 4.7 知, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的最小二乘解的充分必要条件为: $\boldsymbol{x}$ 是方程组

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{AGb}$$

的解, 也就是方程组

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{Gb}) = \boldsymbol{0} \tag{13}$$

的解.

Corollary 4.8

方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的最小二乘解的通式为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Gb}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{GA})\boldsymbol{y},$$

其中 $\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{A}\{1,3\}$, $\boldsymbol{y}$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的任意向量.

证: 由推理 4.7 知, $\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的最小二乘解的充分必要条件为: $\boldsymbol{x}$ 是方程组

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{AGb}$$

的解, 也就是方程组

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{Gb})=\mathbf{0} \tag{13}$$

的解. 注意到齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的通解为 $(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}$ (由定理 2.12 知),

Corollary 4.8

方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的最小二乘解的通式为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y},$$

其中 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1,3\}$, $\boldsymbol{y}$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的任意向量.

证: 由推理 4.7 知, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的最小二乘解的充分必要条件为: $\boldsymbol{x}$ 是方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}$$

的解, 也就是方程组

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0} \tag{13}$$

的解. 注意到齐次方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的通解为 $(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}$ (由定理 2.12 知), 故 (13) 式的通解为

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y},$$

Corollary 4.8

方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的最小二乘解的通式为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y},$$

其中 $\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{A}\{1,3\}$, $\boldsymbol{y}$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的任意向量.

证: 由推理 4.7 知, $\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的最小二乘解的充分必要条件为: $\boldsymbol{x}$ 是方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}$$

的解, 也就是方程组

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0} \tag{13}$$

的解. 注意到齐次方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}$ (由定理 2.12 知), 故 (13) 式的通解为

$$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y},$$

即 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}$, 其中 $\boldsymbol{y}$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的任意向量.

显然上述通解也可以写成

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1,3\},$$

其中 $\boldsymbol{y}$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的任意向量. $\square$

☞ 从通式可以看出, 只有 $\boldsymbol{A}$ 是列满秩时, 最小二乘解才是唯一的, 且为 $\boldsymbol{x}_0 = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{b}$. 否则, 便有无穷多个最小二乘解.

Example 4.9

求矛盾方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ 2x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$ 的最小二乘解.

Example 4.9

求矛盾方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ 2x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$ 的最小二乘解.

解: 系数矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 为列满秩矩阵,

Example 4.9

求矛盾方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ 2x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$ 的最小二乘解.

解: 系数矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 为列满秩矩阵, 故

$$\boldsymbol{A}^{(1,3)} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -4 & 7 & 1 \\ 7 & -4 & 1 \end{bmatrix},$$

Example 4.9

求矛盾方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ 2x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$ 的最小二乘解.

解: 系数矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 为列满秩矩阵, 故

$$\boldsymbol{A}^{(1,3)} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -4 & 7 & 1 \\ 7 & -4 & 1 \end{bmatrix},$$

最小二乘解为

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A}^{(1,3)}\boldsymbol{b} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix}. \quad \square$$

Outline

Definition 5.1

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 若 $\boldsymbol{G} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ 满足

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad \boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{A}, \\
&(4) \quad (\boldsymbol{GA})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{GA},
\end{aligned}
$$

则称 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1,4\}$-逆, 记为 $\boldsymbol{A}^{(1,4)}$.

Definition 5.1

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 若 $\boldsymbol{G} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ 满足

$$\begin{aligned} &(1) \quad \boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{A}, \\ &(4) \quad (\boldsymbol{GA})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{GA}, \end{aligned}$$

则称 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1,4\}$-逆, 记为 $\boldsymbol{A}^{(1,4)}$.

记 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1,4\}$-逆的全体为 $\boldsymbol{A}\{1,4\}$, 即

$$\boldsymbol{A}\{1,4\} = \{\boldsymbol{G} \mid \boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{A}, (\boldsymbol{GA})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{GA}\}.$$

Definition 5.1

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 若 $\boldsymbol{G} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ 满足

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad \boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{A},\\
&(4) \quad (\boldsymbol{GA})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{GA},
\end{aligned}
$$

则称 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1,4\}$-逆, 记为 $\boldsymbol{A}^{(1,4)}$.

记 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1,4\}$-逆的全体为 $\boldsymbol{A}\{1,4\}$, 即

$$\boldsymbol{A}\{1,4\} = \{\boldsymbol{G} \mid \boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{A}, (\boldsymbol{GA})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{GA}\}.$$

☞ 此时 $\boldsymbol{GA}$ 是正交投影算子.

Definition 5.2

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 若 $\boldsymbol{G} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ 满足

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad \boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{A},\\
&(2) \quad \boldsymbol{GAG} = \boldsymbol{G},\\
&(4) \quad (\boldsymbol{GA})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{GA},
\end{aligned}
$$

则称 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1,2,4\}$-逆, 记为 $\boldsymbol{A}^{(1,2,4)}$.

Definition 5.2

设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 若 $\boldsymbol{G}\in\mathbb{C}^{n\times m}$ 满足

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad \boldsymbol{AGA}=\boldsymbol{A},\\
&(2)\quad \boldsymbol{GAG}=\boldsymbol{G},\\
&(4)\quad (\boldsymbol{GA})^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{GA},
\end{aligned}
$$

则称 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1,2,4\}$-逆, 记为 $\boldsymbol{A}^{(1,2,4)}$.

记 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1,2,4\}$-逆的全体为 $\boldsymbol{A}\{1,2,4\}$, 即

$$\boldsymbol{A}\{1,2,4\}=\{\boldsymbol{G}\mid \boldsymbol{AGA}=\boldsymbol{A},\boldsymbol{GAG}=\boldsymbol{G},(\boldsymbol{GA})^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{GA}\}.$$

Definition 5.2

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 若 $\boldsymbol{G} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ 满足

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A},\\
&(2) \quad \boldsymbol{G}\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G},\\
&(4) \quad (\boldsymbol{G}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{A},
\end{aligned}
$$

则称 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1,2,4\}$-逆, 记为 $\boldsymbol{A}^{(1,2,4)}$.

记 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1,2,4\}$-逆的全体为 $\boldsymbol{A}\{1,2,4\}$, 即

$$\boldsymbol{A}\{1,2,4\} = \{\boldsymbol{G} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}, \boldsymbol{G}\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}, (\boldsymbol{G}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{A}\}.$$

下面先证明 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1,2,4\}$-逆存在, 从而也就证明了 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1,4\}$-逆存在.

Theorem 5.3

对任一矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 都有

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\right)^{(1)} \in \boldsymbol{A}\{1,2,4\}.$$

Theorem 5.3

对任一矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 都有

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\right)^{(1)} \in \boldsymbol{A}\{1,2,4\}.$$

Theorem 5.4

设 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{A}\{1,4\}$, 则

$$\boldsymbol{A}\{1,4\} = \left\{\boldsymbol{G} + \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}) \mid \boldsymbol{Z} \text{ 是任意的 } n\times m \text{ 阶矩阵}\right\}.$$

Outline

问题: 若方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 相容, 其解可能有无穷多个, 怎样求具有最小范数的解, 即求满足

$$\min_{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}} \|\boldsymbol{x}\|_2$$

的解 $\boldsymbol{x}$, 其中 $\|\cdot\|_2$ 是欧氏范数.

问题: 若方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 相容, 其解可能有无穷多个, 怎样求具有最小范数的解, 即求满足

$$\min_{\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}} \|\boldsymbol{x}\|_2$$

的解 $\boldsymbol{x}$, 其中 $\|\cdot\|_2$ 是欧氏范数. 可以证明, 满足该条件的解是唯一的, 称之为最小范数 (least-norm) 解, 简称 L-N 解.

Lemma 5.5

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则有

$$\left(R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})\right)^{\perp} = N(\boldsymbol{A}).$$

Lemma 5.5

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则有

$$\left(R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})\right)^{\perp} = N(\boldsymbol{A}).$$

证: 因 $\boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 且为幂等的 Hermite 矩阵, 故其可看成 $\mathbb{C}^n$ 上的正交投影算子.

Lemma 5.5

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则有

$$\left(R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})\right)^{\perp} = N(\boldsymbol{A}).$$

证: 因 $\boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 且为幂等的 Hermite 矩阵, 故其可看成 $\mathbb{C}^n$ 上的正交投影算子. 从而有

$$\left(R\left(\boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{A}\right)\right)^{\perp} = N(\boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{A}).$$

Lemma 5.5

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则有

$$\left(R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})\right)^{\perp} = N(\boldsymbol{A}).$$

证: 因 $\boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 且为幂等的 Hermite 矩阵, 故其可看成 $\mathbb{C}^n$ 上的正交投影算子. 从而有

$$\left(R\big(\boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{A}\big)\right)^{\perp} = N(\boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{A}).$$

又由定理 2.8 的结论 $R\big((\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}\big) = R\big(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\big)$, $N\big(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\big) = N(\boldsymbol{A})$,

Lemma 5.5

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则有

$$\big(R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})\big)^{\perp} = N(\boldsymbol{A}).$$

证: 因 $\boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 且为幂等的 Hermite 矩阵, 故其可看成 $\mathbb{C}^n$ 上的正交投影算子. 从而有

$$\Big(R\big(\boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{A}\big)\Big)^{\perp} = N(\boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{A}).$$

又由定理 2.8 的结论 $R\big((\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}\big) = R\big(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\big)$, $N\big(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\big) = N(\boldsymbol{A})$, 可知

$$R\big(\boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{A}\big) = R\big((\boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}\big) = R\big(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\big),$$
$$N\big(\boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{A}\big) = N(\boldsymbol{A}).$$

Lemma 5.5

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则有

$$\big(R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})\big)^{\perp} = N(\boldsymbol{A}).$$

证: 因 $\boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 且为幂等的 Hermite 矩阵, 故其可看成 $\mathbb{C}^n$ 上的正交投影算子. 从而有

$$\Big(R\big(\boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{A}\big)\Big)^{\perp} = N(\boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{A}).$$

又由定理 2.8 的结论 $R((\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}) = R\big(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\big)$, $N\big(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\big) = N(\boldsymbol{A})$, 可知

$$\begin{aligned} R\big(\boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{A}\big) &= R((\boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}) = R\big(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\big), \\ N\big(\boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{A}\big) &= N(\boldsymbol{A}). \end{aligned}$$

所以

$$\big(R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})\big)^{\perp} = N(\boldsymbol{A}). \quad \square$$

Lemma 5.6

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in R(\boldsymbol{A})$, 则相容性方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 在且仅在 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$ 上有唯一的最小范数解 $\boldsymbol{x}_0$.

Lemma 5.6

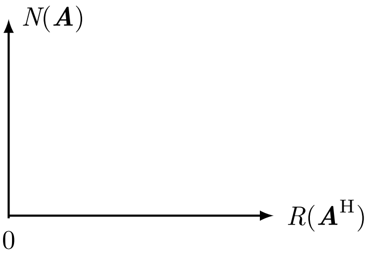
设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in R(\boldsymbol{A})$, 则相容性方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 在且仅在 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$ 上有唯一的最小范数解 $\boldsymbol{x}_0$.

☞ 几何解释:

Lemma 5.6

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in R(\boldsymbol{A})$, 则相容性方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 在且仅在 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$ 上有唯一的最小范数解 $\boldsymbol{x}_0$.

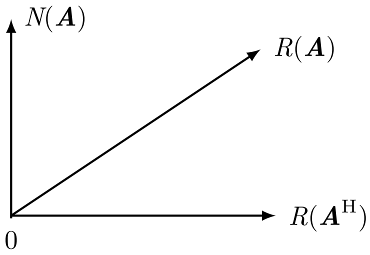
☞ 几何解释: $\left(R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})\right)^{\perp} = N(\boldsymbol{A})$,



Lemma 5.6

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in R(\boldsymbol{A})$, 则相容性方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 在且仅在 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$ 上有唯一的最小范数解 $\boldsymbol{x}_0$.

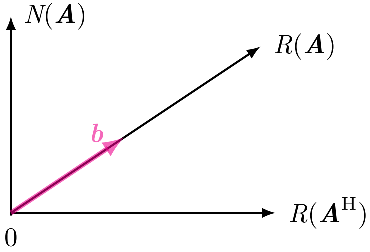
☞ 几何解释: $\left(R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})\right)^{\perp} = N(\boldsymbol{A})$, 但 $R(\boldsymbol{A})$ 不一定与 $N(\boldsymbol{A})$ 正交.



Lemma 5.6

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in R(\boldsymbol{A})$, 则相容性方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 在且仅在 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$ 上有唯一的最小范数解 $\boldsymbol{x}_0$.

☞ 几何解释: $\left(R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})\right)^{\perp} = N(\boldsymbol{A})$, 但 $R(\boldsymbol{A})$ 不一定与 $N(\boldsymbol{A})$ 正交. 方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有解, 故 $\boldsymbol{b} \in R(\boldsymbol{A})$.

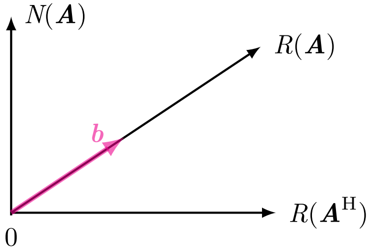


Lemma 5.6

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in R(\boldsymbol{A})$, 则相容性方程 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 在且仅在 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$ 上有唯一的最小范数解 $\boldsymbol{x}_0$.

☞ 几何解释: $\left(R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})\right)^{\perp} = N(\boldsymbol{A})$, 但 $R(\boldsymbol{A})$ 不一定与 $N(\boldsymbol{A})$ 正交. 方程 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有解, 故 $\boldsymbol{b} \in R(\boldsymbol{A})$.

$\boldsymbol{A}$ 是平行于 $N(\boldsymbol{A})$ 向 $R(\boldsymbol{A})$ 的投影,

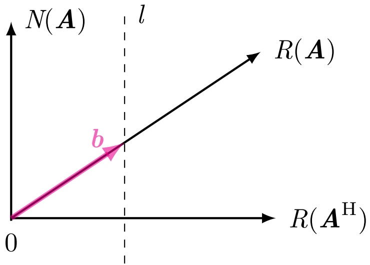


Lemma 5.6

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in R(\boldsymbol{A})$, 则相容性方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 在且仅在 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$ 上有唯一的最小范数解 $\boldsymbol{x}_0$.

☞ 几何解释: $\left(R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})\right)^{\perp} = N(\boldsymbol{A})$, 但 $R(\boldsymbol{A})$ 不一定与 $N(\boldsymbol{A})$ 正交. 方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有解, 故 $\boldsymbol{b} \in R(\boldsymbol{A})$.

$\boldsymbol{A}$ 是平行于 $N(\boldsymbol{A})$ 向 $R(\boldsymbol{A})$ 的投影, l 过点 $\boldsymbol{b}$ 且平行于 $N(\boldsymbol{A})$,

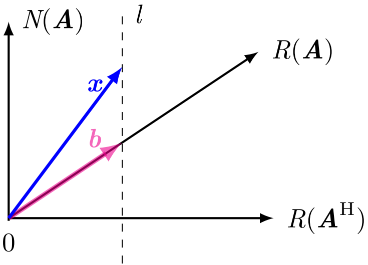


Lemma 5.6

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in R(\boldsymbol{A})$, 则相容性方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 在且仅在 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$ 上有唯一的最小范数解 $\boldsymbol{x}_0$.

☞ 几何解释: $\left(R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})\right)^{\perp} = N(\boldsymbol{A})$, 但 $R(\boldsymbol{A})$ 不一定与 $N(\boldsymbol{A})$ 正交. 方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有解, 故 $\boldsymbol{b} \in R(\boldsymbol{A})$.

$\boldsymbol{A}$ 是平行于 $N(\boldsymbol{A})$ 向 $R(\boldsymbol{A})$ 的投影, l 过点 $\boldsymbol{b}$ 且平行于 $N(\boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{x}$ 连接零点和 l 上任意一点, 则 $\boldsymbol{x}$ 的投影一定是 $\boldsymbol{b}$.

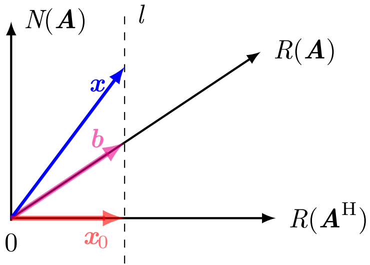


Lemma 5.6

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in R(\boldsymbol{A})$, 则相容性方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 在且仅在 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$ 上有唯一的最小范数解 $\boldsymbol{x}_0$.

☞ 几何解释: $\left(R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})\right)^{\perp} = N(\boldsymbol{A})$, 但 $R(\boldsymbol{A})$ 不一定与 $N(\boldsymbol{A})$ 正交. 方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有解, 故 $\boldsymbol{b} \in R(\boldsymbol{A})$.

$\boldsymbol{A}$ 是平行于 $N(\boldsymbol{A})$ 向 $R(\boldsymbol{A})$ 的投影, l 过点 $\boldsymbol{b}$ 且平行于 $N(\boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{x}$ 连接零点和 l 上任意一点, 则 $\boldsymbol{x}$ 的投影一定是 $\boldsymbol{b}$.



$\boldsymbol{x}_0$ 是 l 与 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$ 的交点, 显然 $\boldsymbol{x}_0$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, 且具有最小范数.

Theorem 5.7

设方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解, 则 $\boldsymbol{x}_0$ 是其最小范数解的充分必要条件是 $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{b}$.

Outline

Theorem 6.1

对任意 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\boldsymbol{A}^{+}$ 存在且唯一.

Theorem 6.1

对任意 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{A}^{+}$ 存在且唯一.

证: 设 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$, 则可取 $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{O}$.

Theorem 6.1

对任意 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{A}^{+}$ 存在且唯一.

证: 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$, 则可取 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{O}$. 现设 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 有奇异值分解:

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\begin{bmatrix}\boldsymbol{S} & \\ & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}},$$

其中 $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$ 分别为 n 阶和 m 阶酉矩阵, $\boldsymbol{S}=\mathrm{diag}(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_r)$, $\delta_1\geqslant\delta_2\geqslant\cdots\geqslant\delta_r>0$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的正奇异值, r 为 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

令

$$
\boldsymbol{G} = \boldsymbol{V} \begin{bmatrix} \boldsymbol{S}^{-1} & \\ & \boldsymbol{O} \end{bmatrix} \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}},
$$

令

$$G = \boldsymbol{V} \begin{bmatrix} \boldsymbol{S}^{-1} & \\ & \boldsymbol{O} \end{bmatrix} \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}},$$

因为

$$\boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{U} \begin{bmatrix} \boldsymbol{S} & \\ & \boldsymbol{O} \end{bmatrix} \boldsymbol{V}^{\mathrm{H}} \boldsymbol{V} \begin{bmatrix} \boldsymbol{S}^{-1} & \\ & \boldsymbol{O} \end{bmatrix} \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}} \boldsymbol{U} \begin{bmatrix} \boldsymbol{S} & \\ & \boldsymbol{O} \end{bmatrix} \boldsymbol{V}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A},$$

$$\boldsymbol{GAG} = \boldsymbol{V} \begin{bmatrix} \boldsymbol{S}^{-1} & \\ & \boldsymbol{O} \end{bmatrix} \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}} \boldsymbol{U} \begin{bmatrix} \boldsymbol{S} & \\ & \boldsymbol{O} \end{bmatrix} \boldsymbol{V}^{\mathrm{H}} \boldsymbol{V} \begin{bmatrix} \boldsymbol{S}^{-1} & \\ & \boldsymbol{O} \end{bmatrix} \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{G},$$

又

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} = \boldsymbol{U}\begin{bmatrix} \boldsymbol{S} & \\ & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{V}\begin{bmatrix} \boldsymbol{S}^{-1} & \\ & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{U}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \\ & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}},$$

$$\boldsymbol{G}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{V}\begin{bmatrix} \boldsymbol{S}^{-1} & \\ & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}\begin{bmatrix} \boldsymbol{S} & \\ & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{V}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \\ & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}},$$

易知 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}$, $(\boldsymbol{G}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{A}$,

又

$$
\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} = \boldsymbol{U}\begin{bmatrix} \boldsymbol{S} & \\ & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{V}\begin{bmatrix} \boldsymbol{S}^{-1} & \\ & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{U}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \\ & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}},
$$

$$
\boldsymbol{G}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{V}\begin{bmatrix} \boldsymbol{S}^{-1} & \\ & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}\begin{bmatrix} \boldsymbol{S} & \\ & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{V}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \\ & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}},
$$

易知 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}$, $(\boldsymbol{G}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{G}$ 满足 Penrose 方程, 所以 $\boldsymbol{A}^{+}$ 总是存在的.

设 $\boldsymbol{G}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 均是 $\boldsymbol{A}$ 的 M-P 广义逆, 则

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{G} &= \boldsymbol{GAG} \\
&= \boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} && (\boldsymbol{AG} = (\boldsymbol{AG})^{\mathrm{H}}) \\
&= \boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} && (\boldsymbol{A} = \boldsymbol{AYA}) \\
&= \boldsymbol{GAGAY} && (\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{AG},\ \boldsymbol{Y}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{AY}) \\
&= \boldsymbol{GAY} && (\boldsymbol{GAG} = \boldsymbol{G}) \\
&= \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{YAY} && (\boldsymbol{GA} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}},\ \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{YAY}) \\
&= \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Y} \\
&= \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Y} && (\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}) \\
&= \boldsymbol{YAY} && (\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{YA}) \\
&= \boldsymbol{Y},
\end{aligned}
$$

设 $\boldsymbol{G}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 均是 $\boldsymbol{A}$ 的 M-P 广义逆, 则

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{G} &= \boldsymbol{GAG} \\
&= \boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} && \left(\boldsymbol{AG} = (\boldsymbol{AG})^{\mathrm{H}}\right) \\
&= \boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} && \left(\boldsymbol{A} = \boldsymbol{AYA}\right) \\
&= \boldsymbol{GAGAY} && \left(\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{AG},\ \boldsymbol{Y}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{AY}\right) \\
&= \boldsymbol{GAY} && \left(\boldsymbol{GAG} = \boldsymbol{G}\right) \\
&= \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{YAY} && \left(\boldsymbol{GA} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}},\ \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{YAY}\right) \\
&= \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Y} \\
&= \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Y} && \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\right) \\
&= \boldsymbol{YAY} && \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{YA}\right) \\
&= \boldsymbol{Y},
\end{aligned}
$$

因此, $\boldsymbol{A}^{+}$ 是唯一的. □

Theorem 6.2

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则

(1) $(\boldsymbol{A}^{+})^{+} = \boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^{+} = (\boldsymbol{A}^{+})^{\mathrm{H}}$, $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{+} = (\boldsymbol{A}^{+})^{\mathrm{T}}$;

(3) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})^{+} = \boldsymbol{A}^{+}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^{+}$, $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^{+} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^{+}\boldsymbol{A}^{+}$;

(4) $\boldsymbol{A}^{+} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})^{+}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^{+}$;

(5) $\operatorname{rank} \boldsymbol{A}^{+} = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}$;

Example 6.3

任意非零向量 $\boldsymbol{x}$ 的 M-P 广义逆为 $\dfrac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}}$. 特别地, 单位向量 $\boldsymbol{x}$ 的 M-P 广义逆为 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}$.

Example 6.3

任意非零向量 $\boldsymbol{x}$ 的 M-P 广义逆为 $\dfrac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}}$. 特别地, 单位向量 $\boldsymbol{x}$ 的 M-P 广义逆为 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}$.

Example 6.4

矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的 M-P 广义逆为自身.

Example 6.3

任意非零向量 $\boldsymbol{x}$ 的 M-P 广义逆为 $\dfrac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}}$. 特别地, 单位向量 $\boldsymbol{x}$ 的 M-P 广义逆为 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}$.

Example 6.4

矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的 M-P 广义逆为自身. 矩阵 $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的 M-P 广义逆为 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$.

☞ 由于普通逆矩阵只是 M-P 广义逆矩阵的一种特例, 故 M-P 广义逆矩阵可能不具备普通逆矩阵的一些性质.

☞ 由于普通逆矩阵只是 M-P 广义逆矩阵的一种特例, 故 M-P 广义逆矩阵可能不具备普通逆矩阵的一些性质. 如下例.

Example 6.5

设 $\boldsymbol{A}=[1,0]$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, 则 $(\boldsymbol{AB})^+=1$ 而 $\boldsymbol{B}^+\boldsymbol{A}^+=\frac{1}{2}$, 因此

$$(\boldsymbol{AB})^+\neq\boldsymbol{B}^+\boldsymbol{A}^+.$$

Theorem 6.6

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则

(1) $R(\boldsymbol{A}^{+}) = R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$;

(2) $N(\boldsymbol{A}^{+}) = N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$.

Theorem 6.6

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则

(1) $R(\boldsymbol{A}^{+}) = R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$;

(2) $N(\boldsymbol{A}^{+}) = N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$.

证: (1) 由 $\{1\}$-逆的性质 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}) = R\big((\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}\big)$, 有

$$\begin{aligned} R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}) &= R\big((\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}\big) \\ &= R\big((\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}\big) && \big(\boldsymbol{A}^{+} \in \boldsymbol{A}\{1\}\big) \\ &= R(\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A}) && \big((\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A}\big) \\ &\subseteq R(\boldsymbol{A}^{+}). && \big(R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) \subseteq R(\boldsymbol{A})\big) \end{aligned}$$

Theorem 6.6

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则

(1) $R(\boldsymbol{A}^+) = R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$;

(2) $N(\boldsymbol{A}^+) = N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$.

证: (1) 由 $\{1\}$-逆的性质 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}) = R\big((\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}\big)$, 有

$$\begin{aligned} R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}) &= R\big((\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}\big) \\ &= R\big((\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}\big) && \big(\boldsymbol{A}^+ \in \boldsymbol{A}\{1\}\big) \\ &= R(\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A}) && \big((\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A}\big) \\ &\subseteq R(\boldsymbol{A}^+). && \big(R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) \subseteq R(\boldsymbol{A})\big) \end{aligned}$$

又 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A}^+ = \operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$, 从而有 $\dim R(\boldsymbol{A}^+) = \dim R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$.

Theorem 6.6

设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 则

(1) $R(\boldsymbol{A}^+)=R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$;

(2) $N(\boldsymbol{A}^+)=N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$.

证: (1) 由 {1}-逆的性质 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})=R\big((\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}\big)$, 有

$$\begin{aligned} R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}) &= R\big((\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}\big) \\ &= R\big((\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}\big) && \big(\boldsymbol{A}^+\in\boldsymbol{A}\{1\}\big) \\ &= R(\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A}) && \big((\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A}\big) \\ &\subseteq R(\boldsymbol{A}^{+}). && \big(R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\subseteq R(\boldsymbol{A})\big) \end{aligned}$$

又 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}^+=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$, 从而有 $\dim R(\boldsymbol{A}^+)=\dim R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$. 故 $R(\boldsymbol{A}^+)=R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$.

(2) 注意到一般地有 $N(\boldsymbol{A}) \subseteq N(\boldsymbol{BA})$,

(2) 注意到一般地有 $N(\boldsymbol{A}) \subseteq N(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})$, 又 $\boldsymbol{A}^{+} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})^{+}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$,

(2) 注意到一般地有 $N(\boldsymbol{A}) \subseteq N(\boldsymbol{BA})$, 又 $\boldsymbol{A}^{+} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})^{+}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$, 故

$$N(\boldsymbol{A}^{+}) = N\big((\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})^{+}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\big)$$

(2) 注意到一般地有 $N(\boldsymbol{A}) \subseteq N(\boldsymbol{BA})$, 又 $\boldsymbol{A}^{+} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})^{+}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$, 故

$$N(\boldsymbol{A}^{+}) = N\big((\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})^{+}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\big) \subseteq N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}),$$

(2) 注意到一般地有 $N(\boldsymbol{A}) \subseteq N(\boldsymbol{BA})$, 又 $\boldsymbol{A}^{+} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})^{+}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$, 故

$$N(\boldsymbol{A}^{+}) = N\big((\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})^{+}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\big) \subseteq N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}),$$

又 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}^{+} = \operatorname{rank}\boldsymbol{A} = \operatorname{rank}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$, 从而 $N(\boldsymbol{A}^{+}) = N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$. □

Outline

Theorem 6.7 ($\boldsymbol{A}^+$ 的满秩算法)

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为列满秩矩阵, 则 $\boldsymbol{A}^+ = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$;
2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为行满秩矩阵, 则 $\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^{-1}$;
3. 设 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{R} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 其中 L 为列满秩矩阵, R 为行满秩矩阵. 则

$$\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{R}^+\boldsymbol{L}^+ = \boldsymbol{R}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{H}})^{-1}(\boldsymbol{L}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{L}^{\mathrm{H}}.$$

Example 6.8

已知 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 用满秩分解求 $\boldsymbol{A}^{+}$.

Example 6.8

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&1&3\\0&1&1\end{bmatrix}$, 用满秩分解求 $\boldsymbol{A}^{+}$.

解: 将 $\boldsymbol{A}$ 化为行最简形,

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&1&3\\0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

Example 6.8

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&1&3\\0&1&1\end{bmatrix}$, 用满秩分解求 $\boldsymbol{A}^+$.

解: 将 $\boldsymbol{A}$ 化为行最简形,

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&1&3\\0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的满秩分解为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}.$$

则

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$(\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{H}})^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{R}^{+} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{H}})^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{L}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$(\boldsymbol{L}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{L})^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{L}^{+} = (\boldsymbol{L}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{L}^{\mathrm{H}} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{L}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$(\boldsymbol{L}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{L})^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{L}^{+} = (\boldsymbol{L}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{L}^{\mathrm{H}} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

所以

$$\boldsymbol{A}^{+} = \boldsymbol{R}^{+}\boldsymbol{L}^{+} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad \square$$

Theorem 6.9

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$, $r>0$, 且 $\boldsymbol{A}$ 有如下的奇异值分解

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\begin{bmatrix} \boldsymbol{S}_r & \\ & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}},$$

其中 $\boldsymbol{U} \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $\boldsymbol{V} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 为酉矩阵, 且 $\boldsymbol{S}_r = \mathrm{diag}(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_r)$, $\delta_1 \geqslant \delta_2 \geqslant \cdots \geqslant \delta_r > 0$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的正奇异值. 则有

$$\boldsymbol{A}^{+} = \boldsymbol{V}\begin{bmatrix} \boldsymbol{S}_r^{-1} & \\ & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}$$

Theorem 6.9

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$, $r > 0$, 且 $\boldsymbol{A}$ 有如下的奇异值分解

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\begin{bmatrix} \boldsymbol{S}_r & \\ & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}},$$

其中 $\boldsymbol{U} \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $\boldsymbol{V} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 为酉矩阵, 且 $\boldsymbol{S}_r = \mathrm{diag}(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_r)$, $\delta_1 \geqslant \delta_2 \geqslant \cdots \geqslant \delta_r > 0$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的正奇异值. 则有

$$\boldsymbol{A}^{+} = \boldsymbol{V}\begin{bmatrix} \boldsymbol{S}_r^{-1} & \\ & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}$$

☞ 注意一个细节: $\begin{bmatrix} \boldsymbol{S}_r & \\ & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$ 的阶数是 $m \times n$, 而 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{S}_r^{-1} & \\ & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$ 的阶数是 $n \times m$.

Example 6.10

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, 用奇异值分解求 $\boldsymbol{A}^{+}$.

Example 6.10

设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 用奇异值分解求 $\boldsymbol{A}^{+}$.

解: 由

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Example 6.10

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, 用奇异值分解求 $\boldsymbol{A}^{+}$.

解: 由

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

故 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\ \lambda_2=1$.

Example 6.10

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{bmatrix}$, 用奇异值分解求 $\boldsymbol{A}^+$.

解: 由

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix},$$

故 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\ \lambda_2=1$. 对应的单位特征向量为

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}.$$

Example 6.10

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{bmatrix}$, 用奇异值分解求 $\boldsymbol{A}^{+}$.

解: 由

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix},$$

故 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\ \lambda_2=1$. 对应的单位特征向量为

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}.$$

则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ 的 3 个特征值为 $\lambda_1=2,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=0$.

由 $\boldsymbol{S} = \operatorname{diag}(\delta_1, \delta_2) = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}) = \operatorname{diag}(\sqrt{2}, 1)$,

由 $\boldsymbol{S}=\mathrm{diag}(\delta_1,\delta_2)=\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2})=\mathrm{diag}(\sqrt{2},1)$, 得

$$\boldsymbol{U}_1=\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{V}_1\,\boldsymbol{S}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 1\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{bmatrix},$$

由 $\boldsymbol{S} = \mathrm{diag}(\delta_1, \delta_2) = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}) = \mathrm{diag}(\sqrt{2}, 1)$, 得

$$\boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{V}_1\,\boldsymbol{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix},$$

故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ 的 2 个非零特征值 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ 对应的特征向量分别为

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

由 $\boldsymbol{S}=\mathrm{diag}(\delta_1,\delta_2)=\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2})=\mathrm{diag}(\sqrt{2},1)$, 得

$$\boldsymbol{U}_1=\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{S}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&1\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0\end{bmatrix},$$

故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ 的 2 个非零特征值 $\lambda_1=2$, $\lambda_2=1$ 对应的特征向量分别为

$$\boldsymbol{u}_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{u}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}.$$

因 $\lambda_3=0$ 对应的特征向量与 $\boldsymbol{u}_1$ 正交, 故可设其为 $(1,y,-1)^{\mathrm{T}}$.

由 $\boldsymbol{S}=\mathrm{diag}(\delta_1,\delta_2)=\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2})=\mathrm{diag}(\sqrt{2},1)$, 得

$$\boldsymbol{U}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{S}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&1\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0\end{bmatrix},$$

故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ 的 2 个非零特征值 $\lambda_1=2$, $\lambda_2=1$ 对应的特征向量分别为

$$\boldsymbol{u}_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{u}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}.$$

因 $\lambda_3=0$ 对应的特征向量与 $\boldsymbol{u}_1$ 正交, 故可设其为 $(1,y,-1)^{\mathrm{T}}$. 又需要和 $\boldsymbol{u}_2$ 正交, 故 $y=0$.

由 $\boldsymbol{S}=\mathrm{diag}(\delta_1,\delta_2)=\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2})=\mathrm{diag}(\sqrt{2},1)$, 得

$$\boldsymbol{U}_1=\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{S}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&1\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0\end{bmatrix},$$

故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ 的 2 个非零特征值 $\lambda_1=2$, $\lambda_2=1$ 对应的特征向量分别为

$$\boldsymbol{u}_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{u}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}.$$

因 $\lambda_3=0$ 对应的特征向量与 $\boldsymbol{u}_1$ 正交, 故可设其为 $(1,y,-1)^{\mathrm{T}}$. 又需要和 $\boldsymbol{u}_2$ 正交, 故 $y=0$. 从而 $\lambda_3=0$ 对应的单位特征向量为

$$\boldsymbol{u}_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}.$$

记

$$
\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{S}=\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{V}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},
$$

记

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\begin{bmatrix}\boldsymbol{S}\\ \boldsymbol{O}\end{bmatrix}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}},$$

记

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\begin{bmatrix}\boldsymbol{S}\\ \boldsymbol{O}\end{bmatrix}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}},$$

所以

$$\boldsymbol{A}^{+}=\boldsymbol{V}[\boldsymbol{S}^{-1},\boldsymbol{O}]\,\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}.\quad\square$$

Outline

一般来说, 矛盾方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

的最小二乘解是不唯一的, 但在最小二乘解的集合中, 具有最小范数的解, 即

$$\min_{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|} \|\boldsymbol{x}\|_2$$

的解 $\boldsymbol{x}$ 是唯一的, 称之为最小范数二乘解, 并简记为 L-S-N 解.

Lemma 6.11 (Urguhart)

对任一 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 都有

$$\boldsymbol{A}^{+} = \boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,3)}.$$

Lemma 6.11 (Urguhart)

对任一 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 都有

$$\boldsymbol{A}^{+} = \boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,3)}.$$

证: 令 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}^{(1,4)}$, $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{A}^{(1,3)}$, $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}$.

Lemma 6.11 (Urguhart)

对任一 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 都有

$$\boldsymbol{A}^{+} = \boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,3)}.$$

证: 令 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}^{(1,4)}$, $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{A}^{(1,3)}$, $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{YAZ}$.

从而 $\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{A}\{1\}$, 故 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{1,2\}$.

Lemma 6.11 (Urguhart)

对任一 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 都有

$$\boldsymbol{A}^{+} = \boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,3)}.$$

证: 令 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}^{(1,4)}$, $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{A}^{(1,3)}$, $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}$.
从而 $\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{A}\{1\}$, 故 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{1,2\}$. 又

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Z},$$

Lemma 6.11 (Urguhart)

对任一 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 都有

$$\boldsymbol{A}^{+} = \boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,3)}.$$

证: 令 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}^{(1,4)}$, $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{A}^{(1,3)}$, $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}$.

从而 $\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{A}\{1\}$, 故 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{1,2\}$. 又

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}, \qquad (\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})^{\mathrm{H}} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X},$$

Lemma 6.11 (Urguhart)

对任一 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 都有

$$\boldsymbol{A}^{+} = \boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,3)}.$$

证: 令 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}^{(1,4)}$, $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{A}^{(1,3)}$, $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}$.

从而 $\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{A}\{1\}$, 故 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{1,2\}$. 又

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}, \qquad (\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})^{\mathrm{H}} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X},$$

故

$$\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{3\}.$$

Lemma 6.11 (Urguhart)

对任一 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 都有

$$\boldsymbol{A}^{+} = \boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,3)}.$$

证: 令 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}^{(1,4)}$, $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{A}^{(1,3)}$, $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}$.

从而 $\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{A}\{1\}$, 故 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{1,2\}$. 又

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}, \qquad (\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})^{\mathrm{H}} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X},$$

故

$$\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{3\}.$$

又 $\boldsymbol{X}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}$, 从而 $(\boldsymbol{X}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}$, 故

$$\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{A}\{4\}.$$

Lemma 6.11 (Urguhart)

对任一 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 都有

$$\boldsymbol{A}^{+}=\boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,3)}.$$

证: 令 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}^{(1,4)}$, $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{A}^{(1,3)}$, $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}$.

从而 $\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}\in\boldsymbol{A}\{1\}$, 故 $\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{A}\{1,2\}$. 又

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z},\qquad(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})^{\mathrm{H}}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z})^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X},$$

故

$$\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{A}\{3\}.$$

又 $\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}$, 从而 $(\boldsymbol{X}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}$, 故

$$\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{A}\{4\}.$$

综上有 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{+}$. □

Theorem 6.12

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^{m}$, 则 $\boldsymbol{x}_0$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的 *L-S-N* 解的充分必要条件是:

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{b}.$$

Theorem 6.12

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$, 则 $\boldsymbol{x}_0$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的 *L-S-N* 解的充分必要条件是:

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{b}.$$

证: 必要性. 由推论 4.7 可知, 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的 L-S 解即为方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,3)}\boldsymbol{b}$ 的解,

Theorem 6.12

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$, 则 $\boldsymbol{x}_0$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的 *L-S-N* 解的充分必要条件是:

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}.$$

证: 必要性. 由推论 4.7 可知, 方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的 L-S 解即为方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,3)}\boldsymbol{b}$ 的解, 因此, 方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的 L-S-N 解即是方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,3)}\boldsymbol{b}$ 的 L-N 解.

Theorem 6.12

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$, 则 $\boldsymbol{x}_0$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的 *L-S-N* 解的充分必要条件是:

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}.$$

证: 必要性. 由推论 4.7 可知, 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的 L-S 解即为方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,3)}\boldsymbol{b}$ 的解, 因此, 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的 L-S-N 解即是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,3)}\boldsymbol{b}$ 的 L-N 解. 由定理 5.7 得, 这个解为

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,3)}\boldsymbol{b},$$

Theorem 6.12

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$, 则 $\boldsymbol{x}_0$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的 *L-S-N* 解的充分必要条件是:

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}.$$

证: 必要性. 由推论 4.7 可知, 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的 L-S 解即为方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,3)}\boldsymbol{b}$ 的解, 因此, 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的 L-S-N 解即是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,3)}\boldsymbol{b}$ 的 L-N 解. 由定理 5.7 得, 这个解为

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,3)}\boldsymbol{b},$$

又 $\boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,3)} = \boldsymbol{A}^+$,

Theorem 6.12

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$, 则 $\boldsymbol{x}_0$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的 *L-S-N* 解的充分必要条件是:

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}.$$

证: 必要性. 由推论 4.7 可知, 方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的 L-S 解即为方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{AA}^{(1,3)}\boldsymbol{b}$ 的解, 因此, 方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的 L-S-N 解即是方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{AA}^{(1,3)}\boldsymbol{b}$ 的 L-N 解. 由定理 5.7 得, 这个解为

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{AA}^{(1,3)}\boldsymbol{b},$$

又 $\boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{AA}^{(1,3)} = \boldsymbol{A}^+$, 故方程组的 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的 L-S-N 解为 $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}$.

Theorem 6.12

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$, 则 $\boldsymbol{x}_0$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的 *L-S-N* 解的充分必要条件是:

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}.$$

证: 必要性. 由推论 4.7 可知, 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的 L-S 解即为方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,3)}\boldsymbol{b}$ 的解, 因此, 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的 L-S-N 解即是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,3)}\boldsymbol{b}$ 的 L-N 解. 由定理 5.7 得, 这个解为

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,3)}\boldsymbol{b},$$

又 $\boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,3)} = \boldsymbol{A}^+$, 故方程组的 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的 L-S-N 解为 $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}$.

充分性. 设 $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}$,

Theorem 6.12

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$, 则 $\boldsymbol{x}_0$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的 *L-S-N* 解的充分必要条件是:

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}.$$

证: 必要性. 由推论 4.7 可知, 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的 L-S 解即为方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,3)}\boldsymbol{b}$ 的解, 因此, 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的 L-S-N 解即是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,3)}\boldsymbol{b}$ 的 L-N 解. 由定理 5.7 得, 这个解为

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,3)}\boldsymbol{b},$$

又 $\boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,3)} = \boldsymbol{A}^+$, 故方程组的 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的 L-S-N 解为 $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}$.

充分性. 设 $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}$, 而 $\boldsymbol{A}^+ \in \boldsymbol{A}\{1,3\}$, 故由推论 4.7 可知 $\boldsymbol{x}_0$ 为方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的 L-S 解.

Theorem 6.12

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$, 则 $\boldsymbol{x}_0$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的 L-S-N 解的充分必要条件是:

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}.$$

证: 必要性. 由推论 4.7 可知, 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的 L-S 解即为方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,3)}\boldsymbol{b}$ 的解, 因此, 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的 L-S-N 解即是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,3)}\boldsymbol{b}$ 的 L-N 解. 由定理 5.7 得, 这个解为

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,3)}\boldsymbol{b},$$

又 $\boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,3)} = \boldsymbol{A}^+$, 故方程组的 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的 L-S-N 解为 $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}$.

充分性. 设 $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}$, 而 $\boldsymbol{A}^+ \in \boldsymbol{A}\{1,3\}$, 故由推论 4.7 可知 $\boldsymbol{x}_0$ 为方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的 L-S 解. 又因为 $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}$, 故 $\boldsymbol{x}_0 \in R(\boldsymbol{A}^+)$

Theorem 6.12

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$, 则 $\boldsymbol{x}_0$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的 *L-S-N* 解的充分必要条件是:

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}.$$

证: 必要性. 由推论 4.7 可知, 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的 L-S 解即为方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,3)}\boldsymbol{b}$ 的解, 因此, 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的 L-S-N 解即是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,3)}\boldsymbol{b}$ 的 L-N 解. 由定理 5.7 得, 这个解为

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,3)}\boldsymbol{b},$$

又 $\boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,3)} = \boldsymbol{A}^+$, 故方程组的 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的 L-S-N 解为 $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}$.

充分性. 设 $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}$, 而 $\boldsymbol{A}^+ \in \boldsymbol{A}\{1,3\}$, 故由推论 4.7 可知 $\boldsymbol{x}_0$ 为方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的 L-S 解. 又因为 $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}$, 故 $\boldsymbol{x}_0 \in R(\boldsymbol{A}^+) = R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$, 从而 $\boldsymbol{x}_0$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的 L-S-N 解. $\square$

Example 6.13

已知方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$, 其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&0&1\\1&2&1&1\\2&4&1&2\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

问方程组是否有解? 若有解, 求最小范数解; 若无解, 求最小范数二乘解.

Example 6.13

已知方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$, 其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&0&1\\1&2&1&1\\2&4&1&2\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

问方程组是否有解? 若有解, 求最小范数解; 若无解, 求最小范数二乘解.

解: 因为

$$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}]=\left[\begin{array}{cccc:c}1&2&0&1&1\\1&2&1&1&1\\2&4&1&2&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-r_1-r_2}\left[\begin{array}{cccc:c}1&2&0&1&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&-1\end{array}\right],$$

Example 6.13

已知方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$, 其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&0&1\\1&2&1&1\\2&4&1&2\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

问方程组是否有解? 若有解, 求最小范数解; 若无解, 求最小范数二乘解.

解: 因为

$$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}]=\left[\begin{array}{cccc:c}1&2&0&1&1\\1&2&1&1&1\\2&4&1&2&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-r_1-r_2}\left[\begin{array}{cccc:c}1&2&0&1&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&-1\end{array}\right],$$

即 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=2$, $\operatorname{rank}[\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}]=3$, 所以方程组无解.

由

$$\boldsymbol{A} \xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-r_1-r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

得满秩分解 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{R}$, 其中

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

则

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{H}})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{R}^{+} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{H}})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{L}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$(\boldsymbol{L}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{L})^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{L}^{+} = (\boldsymbol{L}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{L}^{\mathrm{H}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{L}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$(\boldsymbol{L}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{L})^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{L}^{+} = (\boldsymbol{L}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{L}^{\mathrm{H}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

从而

$$\boldsymbol{A}^{+} = \boldsymbol{R}^{+}\boldsymbol{L}^{+} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -18 & 18 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$L^{\mathrm{H}}L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$(L^{\mathrm{H}}L)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix},$$

$$L^{+} = (L^{\mathrm{H}}L)^{-1}L^{\mathrm{H}} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

从而

$$A^{+} = R^{+}L^{+} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -18 & 18 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

所以方程组的最小范数二乘解是 $x_0 = A^{+}b = \frac{1}{9}[1, 2, 0, 1]^{\mathrm{T}}$. □

为什么 Moore 广义逆与 Penrose 广义逆等价?

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 如果 $\boldsymbol{G} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ 满足

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} = P_{R(\boldsymbol{A}),N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})}, \qquad \boldsymbol{G}\boldsymbol{A} = P_{R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}),N(\boldsymbol{A})}, \tag{14}$$

其中 $P_{R(\boldsymbol{A}),N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})}$ 表示沿子空间 $N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$ 向子空间 $R(\boldsymbol{A})$ 上的正交投影算子, $P_{R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}),N(\boldsymbol{A})}$ 表示沿子空间 $N(\boldsymbol{A})$ 向子空间 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$ 上的正交投影算子, 则称 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 Moore 广义逆矩阵.

为什么 Moore 广义逆与 Penrose 广义逆等价?

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 如果 $\boldsymbol{G} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ 满足

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} = P_{R(\boldsymbol{A}),N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})}, \qquad \boldsymbol{G}\boldsymbol{A} = P_{R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}),N(\boldsymbol{A})}, \tag{14}$$

其中 $P_{R(\boldsymbol{A}),N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})}$ 表示沿子空间 $N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$ 向子空间 $R(\boldsymbol{A})$ 上的正交投影算子, $P_{R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}),N(\boldsymbol{A})}$ 表示沿子空间 $N(\boldsymbol{A})$ 向子空间 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$ 上的正交投影算子, 则称 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 Moore 广义逆矩阵.

一方面, 若 $\boldsymbol{G}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 Moore 广义逆, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}$ 都是正交投影算子, 从而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}$ 是 Hermite 矩阵, 即满足 Penrose 广义逆定义的 (3) 与 (4).

为什么 Moore 广义逆与 Penrose 广义逆等价?

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 如果 $\boldsymbol{G} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ 满足

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} = P_{R(\boldsymbol{A}),N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})}, \qquad \boldsymbol{G}\boldsymbol{A} = P_{R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}),N(\boldsymbol{A})}, \tag{14}$$

其中 $P_{R(\boldsymbol{A}),N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})}$ 表示沿子空间 $N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$ 向子空间 $R(\boldsymbol{A})$ 上的正交投影算子, $P_{R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}),N(\boldsymbol{A})}$ 表示沿子空间 $N(\boldsymbol{A})$ 向子空间 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$ 上的正交投影算子, 则称 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 Moore 广义逆矩阵.

一方面, 若 $\boldsymbol{G}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 Moore 广义逆, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}$ 都是正交投影算子, 从而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}$ 是 Hermite 矩阵, 即满足 Penrose 广义逆定义的 (3) 与 (4).

对任意的 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} \in R(\boldsymbol{A})$, 而投影算子 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} = P_{R(\boldsymbol{A}),N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})}$ 在 $R(\boldsymbol{A})$ 上为恒等变换, 故

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}.$$

为什么 Moore 广义逆与 Penrose 广义逆等价?

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 如果 $\boldsymbol{G} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ 满足

$$\boldsymbol{AG} = P_{R(\boldsymbol{A}),N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})}, \qquad \boldsymbol{GA} = P_{R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}),N(\boldsymbol{A})}, \tag{14}$$

其中 $P_{R(\boldsymbol{A}),N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})}$ 表示沿子空间 $N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$ 向子空间 $R(\boldsymbol{A})$ 上的正交投影算子, $P_{R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}),N(\boldsymbol{A})}$ 表示沿子空间 $N(\boldsymbol{A})$ 向子空间 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$ 上的正交投影算子, 则称 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 Moore 广义逆矩阵.

一方面, 若 $\boldsymbol{G}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 Moore 广义逆, 则 $\boldsymbol{AG}$, $\boldsymbol{GA}$ 都是正交投影算子, 从而 $\boldsymbol{AG}$, $\boldsymbol{GA}$ 是 Hermite 矩阵, 即满足 Penrose 广义逆定义的 (3) 与 (4).

对任意的 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{A\alpha} \in R(\boldsymbol{A})$, 而投影算子 $\boldsymbol{AG} = P_{R(\boldsymbol{A}),N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})}$ 在 $R(\boldsymbol{A})$ 上为恒等变换, 故

$$\boldsymbol{AG}(\boldsymbol{A\alpha}) = \boldsymbol{A\alpha}.$$

即 $(\boldsymbol{AGA})(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{A\alpha}$, 由 $\boldsymbol{\alpha}$ 的任意性, 知 $\boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{A}$.

为什么 Moore 广义逆与 Penrose 广义逆等价?

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 如果 $\boldsymbol{G} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ 满足

$$\boldsymbol{AG} = P_{R(\boldsymbol{A}),N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})}, \qquad \boldsymbol{GA} = P_{R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}),N(\boldsymbol{A})}, \tag{14}$$

其中 $P_{R(\boldsymbol{A}),N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})}$ 表示沿子空间 $N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$ 向子空间 $R(\boldsymbol{A})$ 上的正交投影算子, $P_{R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}),N(\boldsymbol{A})}$ 表示沿子空间 $N(\boldsymbol{A})$ 向子空间 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$ 上的正交投影算子, 则称 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 Moore 广义逆矩阵.

一方面, 若 $\boldsymbol{G}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 Moore 广义逆, 则 $\boldsymbol{AG}$, $\boldsymbol{GA}$ 都是正交投影算子, 从而 $\boldsymbol{AG}$, $\boldsymbol{GA}$ 是 Hermite 矩阵, 即满足 Penrose 广义逆定义的 (3) 与 (4).

对任意的 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{A\alpha} \in R(\boldsymbol{A})$, 而投影算子 $\boldsymbol{AG} = P_{R(\boldsymbol{A}),N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})}$ 在 $R(\boldsymbol{A})$ 上为恒等变换, 故

$$\boldsymbol{AG}(\boldsymbol{A\alpha}) = \boldsymbol{A\alpha}.$$

即 $(\boldsymbol{AGA})(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{A\alpha}$, 由 $\boldsymbol{\alpha}$ 的任意性, 知 $\boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{A}$. 同理 $\boldsymbol{GAG} = \boldsymbol{G}$.

另一方面, 若 $\boldsymbol{G}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 Penrose 广义逆, 则 $\boldsymbol{AG}$, $\boldsymbol{GA}$ 都是正交投影算子, 且

$$\boldsymbol{AG} = P_{R(\boldsymbol{AG}),N(\boldsymbol{AG})}, \qquad \boldsymbol{GA} = P_{R(\boldsymbol{GA}),N(\boldsymbol{GA})}.$$

由性质 $R\big(\boldsymbol{AA}^{(1)}\big) = R(\boldsymbol{A})$, 得

$$R(\boldsymbol{AG}) = R(\boldsymbol{A}). \tag{15}$$

另一方面, 若 $\boldsymbol{G}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 Penrose 广义逆, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}$ 都是正交投影算子, 且

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} = P_{R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}),N(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G})}, \qquad \boldsymbol{G}\boldsymbol{A} = P_{R(\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}),N(\boldsymbol{G}\boldsymbol{A})}.$$

由性质 $R\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\big) = R(\boldsymbol{A})$, 得

$$R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}) = R(\boldsymbol{A}). \tag{15}$$

又

$$\begin{aligned} N(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}) &= N(\boldsymbol{G}) && \Big(N\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,2)}\big) = N\big(\boldsymbol{A}^{(1,2)}\big)\Big) \\ &= N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}). && \big(N(\boldsymbol{A}^{+}) = N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})\big) \end{aligned}$$

另一方面, 若 $\boldsymbol{G}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 Penrose 广义逆, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}$ 都是正交投影算子, 且

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} = P_{R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}),N(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G})}, \qquad \boldsymbol{G}\boldsymbol{A} = P_{R(\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}),N(\boldsymbol{G}\boldsymbol{A})}.$$

由性质 $R\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\big) = R(\boldsymbol{A})$, 得

$$R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}) = R(\boldsymbol{A}). \tag{15}$$

又

$$\begin{aligned} N(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}) &= N(\boldsymbol{G}) && \Big(N\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,2)}\big) = N\big(\boldsymbol{A}^{(1,2)}\big)\Big) \\ &= N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}). && \big(N(\boldsymbol{A}^{+}) = N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})\big) \end{aligned}$$

故

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} = P_{R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}),N(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G})} = P_{R(\boldsymbol{A}),N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})}.$$

另一方面, 若 $\boldsymbol{G}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 Penrose 广义逆, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}$ 都是正交投影算子, 且

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} = P_{R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}),N(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G})}, \qquad \boldsymbol{G}\boldsymbol{A} = P_{R(\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}),N(\boldsymbol{G}\boldsymbol{A})}.$$

由性质 $R\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\big) = R(\boldsymbol{A})$, 得

$$R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}) = R(\boldsymbol{A}). \tag{15}$$

又

$$\begin{aligned} N(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}) &= N(\boldsymbol{G}) && \Big(N\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1,2)}\big) = N(\boldsymbol{A}^{(1,2)})\Big) \\ &= N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}). && \big(N(\boldsymbol{A}^{+}) = N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})\big) \end{aligned}$$

故

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} = P_{R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}),N(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G})} = P_{R(\boldsymbol{A}),N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})}.$$

同理可证 $\boldsymbol{G}\boldsymbol{A} = P_{R(\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}),N(\boldsymbol{G}\boldsymbol{A})} = P_{R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}),N(\boldsymbol{A})}$. □