# 2003～2004 学年第一学期《高等数学》期末考试试题 A 卷（216 学时）

**专业班级____________________学号________________ 姓名__________**

一、填空题：（5×4 分）

1、$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x}, & x<0\\ 3x^2-2x+k, & \mathrm{x}\ge 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 连续，则常数 $k=$____

2、$\lim\limits_{x\to+\infty} x[\ln(1+x)-\ln x]=$______

3、$f(x)$ 的一个原函数为 $x\ln x$, 则 $f'(x)=$_____

4、$\int_{-2}^{2}(1+x)\sqrt{4-x^2}dx=$______.

5、使级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(1+x^2)^n}{1+(1+x^2)^{2n}}$ 收敛的实数 $x$ 的取值范围是___________

二、选择题：（5×4 分）

1、$f(x)=\dfrac{(x^2+x)(\ln x)(\sin\frac{1}{x})}{x^2-1}$ 的可去间断点的个数是______.

A、 0； B、1； C、2； D、3.

2、已知 $f'(1)=2$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-x)-f(1+x)}{x}=$______.

A、 2； B、－2； C、4； D、－4.

3、设 $I_1=\int_0^{\pi/4}\dfrac{\tan x}{x}dx,\quad I_2=\int_0^{\pi/4}\dfrac{x}{\tan x}dx,$ 则______.

A、 $I_1>I_2>1$； B、$1>I_1>I_2$； C、$I_2>I_1>1$； D、$1>I_2>I_1$.

4、级数 $\sum\limits_{n=k}^{+\infty}(1-\cos\dfrac{1}{n})$ （$k$ 为正整数）的敛散性是___________.

A、 绝对收敛； B、条件收敛； C、发散； D、与 $k$ 有关.

5、已知 $f(x)$ 二阶导数连续，且 $f(0)=0$ 以及 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=1$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的曲率 $k$ 为_____.

A、 0； B、1； C、2； D、 不存在.

三、计算下列各题：（6×5 分）

1、求极限：$\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin x}{x})^{\frac{1}{1-\cos x}}$ ；

2、 $y=\sin^2 x$ ，求 $y^{(2004)}$ ；

3、求不定积分：$\int \dfrac{\cos x}{\sin x+2\cos x}dx$ ；

4、判别积分 $\int_1^{+\infty}[\ln(1+\dfrac{1}{x})-\dfrac{1}{1+x}]\mathrm{d}x$ 的收敛性。

5、设 $\begin{cases} x=\int\limits_1^{t^2} u\ln u du \\ y=\int\limits_{t^2}^{1} u^2\ln u du \end{cases}$ $(t>1)$，求：$\dfrac{d^2y}{dx^2}$

6、如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数，$f(a)=f(b)=0$，并且 $\int_a^b f^2(x)dt=2$，求积分 $\int_a^b xf(x)f'(x)dx$ 的值。

四、(8 分)曲线 $y=f(x)$ 由方程 $9x^2+16y^2=25$ 给出，

1)、求所给曲线上点 $P(a,b)$ 处的切线方程；

2)、在所给曲线位于第一象限的那部分上求一点，使其切线与坐标轴所围成的面积最小。

五、(7 分)平面图形 $D$ 由曲线 $xy=1, x=y$ 以及 $x=2$ 所围，求 $D$ 绕 $x$ 轴旋转所成的立体体积 $V$ 。

六、(8 分)设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(x)>0$，又 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_b^x \dfrac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$，证明：

（1）$F'(x)\ge 2$；　　（2）$F(x)=0$ 在 $[a,b]$ 中有且仅有一个实根。

七、（7 分）设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，且在 $(0,2)$ 内可导，如果有 $\int_{\frac{3}{2}}^{2} f(x)dx=\dfrac{f(c)}{2}$，其中 $c\in[0,1]$，证明：存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $f'(\xi)=0$。