# Chapter 1

# 行列式

Linear Algebra

October 18, 2016

黄正华, 数学与统计学院, 武汉大学

1.1

## 目录



1.2

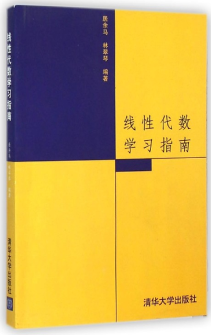
## 0 课程简介

### 使用教材

[1] 居余马 等 编著, 线性代数 (第 2 版). 清华大学出版社, 2002

[2] 居余马 林翠琴 编著, 线性代数学习指南. 清华大学出版社, 2003

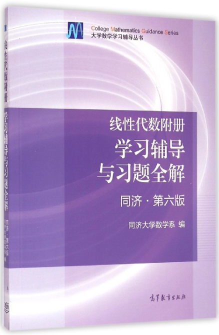
1.3




## 书籍推荐

[3] 同济大学数学系 编, 线性代数 (第六版). 高等教育出版社, 2014

[4] 同济大学数学系 编, 线性代数附册学习辅导与习题全解. 高等教育出版社, 2014

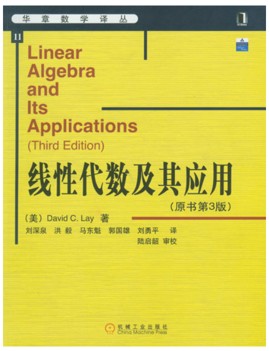


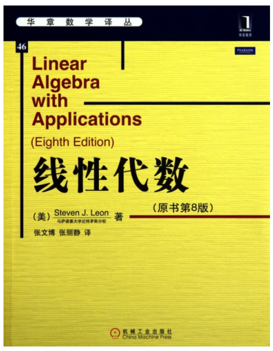

☞ 特点: 语言简洁、逻辑清晰、全国通用. 建议每个人都认真研读该教材. 1.4

## 书籍推荐

[5] David C. Lay 著, 刘深泉 等 译, 线性代数及其应用. 机械工业出版社, 2005

[6] Steven J. Leon 著, 张文博 张丽静 译, 线性代数. 机械工业出版社, 2010

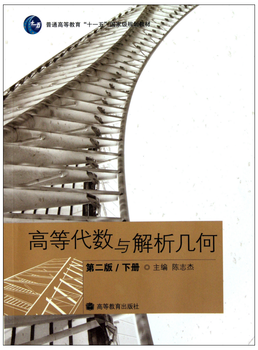





☞ 特点: 结合实践, 背景知识丰富, 理论在科技中的应用介绍较多. 1.5

[7] 陈志杰 主编, 高等代数与解析几何 (第二版), 上下册. 高等教育出版社, 2008

☞ 特点: 强调用几何方法诠释线性代数, 知识呈现的结构不同于常见的国内教材. 内容细致、深入.




本科非数学专业《线性代数》是线性代数的 Basic 版; 本科数学专业《线性代数》或《高等代数》是线性代数的 Standard 版.

(1) **教材的问题**. 大学没有统一指定教材. 不同学校、不同专业、不同教师, 都有自己选用的教材. 同一门课程的教材内容, 也不尽相同, 甚至符号和名词都没有统一. 教材要多看几本, 一个问题在不同的教材往往有不同角度的阐述.

建议: 找一本合自己眼缘的教材. 不同的难度、讲述方式、排版印刷, 都会有不同的体验. 习题集可以看看往年的考研复习资料. 考研真题都很有嚼头, 值得细细品味.

(2) **充分利用网络**. 网络获取资料有时比查书更便捷. 遇到疑难, 可以搜索网络, 有很多问题, 别人已经遇到过, 别人已经问过了. 网络资料丰富多样, 例如精品课程[1], Mooc 视频课程[2], 维基百科等.

(3) **时间要够**. 时间安排要满足 2:1. 每上一节课, 至少课外有两节课的时间在做预习或者复习. 很多概念在诞生之初, 比如极限的思想、线性空间的概念, 是突破了人类认知水平的. 同样地, 今天我们看到的一些观念, 超越了我们的思维能力, 正在逐步打开我们的 “脑洞”. 这些浓缩了人类智慧的观念, 需要我们花时间去慢慢领悟. 1.6

## 时间要到位? 2:1?

- 上课用时
  54 学时 $=40.5$ 小时$=1.6875$ 天.
- 做到 $1:1$
  54 学时 $\times 2=3.375$ 天.
- 做到 $2:1$
  54 学时 $\times 3=5.0625$ 天.

1.7

## 什么是线性 (Linear)

形如 $ax+by=c$ 的方程 ($a$, $b$, $c$ 为常数), 其全部解在平面上构成一条直线, 此时 $x$, $y$ 之间呈现为线性关系. 方程 $ax+by=c$ 称为线性方程.

推而广之, 含有 $n$ 个变量的一次方程

$$k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n=b$$

称为线性方程, 这里 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是变量, $k_1, k_2, \cdots, k_n$, $b$ 是常数. 此时变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 之间呈现为线性关系.

[1]例如, 同济大学《线性代数》精品课程: http://www.tongji.edu.cn/~math/xxds/.

[2]例如, 精品开放课程共享系统—爱课程: http://www.icourses.cn.

非线性关系的例子:

$$y=2x^2+3, \quad y=2\sqrt{x}+3, \quad y=2\sin x+3, \quad xy=1,$$

上述 $x, y$ 之间为非线性关系. 1.8

## 什么是线性代数

线性代数 (Linear Algebra) 是代数学的一个分支, 主要处理线性关系问题. 它的核心内容是研究 (1) 有限维线性空间的结构, (2) 线性空间的线性变换.

本课程介绍线性代数的基础知识, 核心话题是: 线性方程组的求解. 1.9

## 高斯消元法

一般地, 将含有 $n$ 个未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的线性方程组记为:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \tag{1}$$

该方程组中含有 $m$ 个方程. 其中 $a_{ij}$ 是系数, $b_i$ 是常数项, $i=1,2,\cdots,m$, $j=1,2,\cdots,n$. 系数 $a_{ij}$ 有两个下标, 下标 $i, j$ 分别表示 $a_{ij}$ 在第 $i$ 行、第 $j$ 列.

**高斯消元法**是求解线性方程组的经典方法, 简单实用, 永不过时. 1.10

为什么出现线性方程组? 比如这样一个问题: 给一个数列, 第 1 项是 1, 第 2 项是 2, 第 3 项有没有可能是 0 呢? 这其实就涉及到线性方程组求解问题. 先看下面的例子.

*Example* 1. 求曲线 $y=\lambda_0+\lambda_1x+\lambda_2x^2$ 过点 $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,0)$.

解: 代入三点, 得到一个关于 $\lambda_0$, $\lambda_1$, $\lambda_2$ 的线性方程组:

$$\begin{cases} \lambda_0+\lambda_1+\lambda_2=1, \\ \lambda_0+2\lambda_1+4\lambda_2=2, \\ \lambda_0+3\lambda_1+9\lambda_2=0. \end{cases}$$

使用高斯消元法. 先化为阶梯形:(以下用 $r_i$ 表示第 $i$ 个方程, 例如 $r_3-r_2$ 表示将第 3 个方程减去第 2 个方程)

$$\begin{cases} \lambda_0+\lambda_1+\lambda_2=1, \\ \lambda_0+2\lambda_1+4\lambda_2=2, \\ \lambda_0+3\lambda_1+9\lambda_2=0. \end{cases} \xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-r_2} \begin{cases} \lambda_0+\lambda_1+\lambda_2=1, \\ \lambda_1+3\lambda_2=1, \\ \lambda_1+5\lambda_2=-2. \end{cases}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2} \begin{cases} \lambda_0+\lambda_1+\lambda_2=1, \\ \lambda_1+3\lambda_2=1, \\ 2\lambda_2=-3. \end{cases} \xrightarrow{r_3\div 2} \begin{cases} \lambda_0+\lambda_1+\lambda_2=1, \\ \lambda_1+3\lambda_2=1, \\ \lambda_2=-\frac{3}{2}. \end{cases}$$

1.11

再回代:

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \ \ \lambda_2 = \ \ 1, \\ \qquad \lambda_1 + 3\lambda_2 = \ \ 1, \\ \qquad\qquad \lambda_2 = -\frac{3}{2}. \end{cases} \xrightarrow[r_1 - r_3]{r_2 - 3r_3} \begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 \qquad = \frac{5}{2}, \\ \qquad \lambda_1 \qquad = \frac{11}{2}, \\ \qquad\qquad \lambda_2 = -\frac{3}{2}. \end{cases} \xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{cases} \lambda_0 \qquad\qquad = -3, \\ \qquad \lambda_1 \qquad = \frac{11}{2}, \\ \qquad\qquad \lambda_2 = -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

即所求曲线方程为 $y = -3 + \frac{11}{2}x - \frac{3}{2}x^2$. □

可见如果数列的前 3 项分别是 1, 2, 0, 则通项可以是 $y = -3 + \frac{11}{2}n - \frac{3}{2}n^2$. 此通项是否唯一呢? 答案是否定的. 见后续例 33 的讨论.

以上就是**高斯消元法**, 主要是两个步骤: 化为阶梯形, 回代. 高斯消元法算法简单, 非常适合编程. 1.12

围绕线性方程组这个主题, 课程还将讨论以下三个概念: 行列式, 矩阵, 向量.

这是求解线性方程组的三个有效工具. 下面我们简单说明这三个工具出现的原因. 1.13

## 高斯消元法 $\longrightarrow$ 矩阵的初等行变换.

前述解法中, 未知量并没有参与运算. 实际参与运算的只有系数和常数, 把方程组的主要信息记录在一个矩形阵列(简称**矩阵**) 里:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \tag{2}$$

方程的运算与变换, 体现为矩阵中, 各行元素的相应运算.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2 - r_1]{r_3 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \div 2}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[r_1 - r_3]{r_2 - 3r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{array}\right).$$

将矩阵施以**行变换**, 其本质还是高斯消元法. 但形式简洁, 适合编程和存储. 1.14

## 线性方程组等同于矩阵方程

记

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

这里 $\boldsymbol{A}$ 记录的是系数, $\boldsymbol{b}$ 记录的是常数. 引入矩阵乘法: $\boldsymbol{Ax}$ 定义为 $\boldsymbol{A}$ 各行的向量与 $\boldsymbol{x}$ 做内积. 例如 $\boldsymbol{A}$ 的第二行与 $\boldsymbol{x}$ 做内积, 有

$$(1, 2, 4) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 + 2x_2 + 4x_3.$$

则

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 \end{pmatrix}.$$

1.15

从而线性方程组可表达为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

而这本质上是一个矩阵方程.

如果我们能一般地解决矩阵方程的求解, 事实上就完成了线性方程组的求解. 1.16

## 线性方程组求解等同于向量组的线性表示问题

把前述线性方程组记为

$$\lambda_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

则 “线性方程组” 等同于 “向量的线性表示” 问题. 更重要的是, 用向量的观点, 可以几何地解释线性方程组解的结构问题. 1.17

## 线性方程组与几何联系

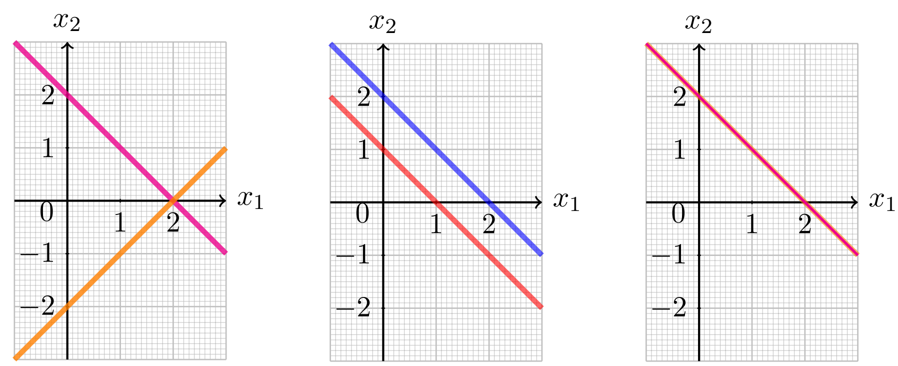
从几何角度考虑线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

每一个方程均对应于平面上的一条直线. 求解方程组, 相当于求两条直线的交点. 1.18

考虑以下三个不同的线性方程组:

$$\text{(i)} \begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 - x_2 = 2. \end{cases} \qquad \text{(ii)} \begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases} \qquad \text{(iii)} \begin{cases} x_1 + x_2 = \ \ 2, \\ -x_1 - x_2 = -2. \end{cases}$$




(a) 相交: 唯一解 (b) 平行: 无解 (c) 重合: 无穷多解

1.19

两条直线之间的关系有三种情况: 相交、平行、重合. 相应地:

一个线性方程组的解, 有下列三种情况:

(1) 有唯一解;

(2) 无解;

(3) 有无穷多解.

这个结论将在第 3 章进行一般讨论. 1.20

### 对 "无穷多解" 感到陌生?

无穷多解的情形我们一直都在面对, 比如

$$2x + 3y = 1,$$

在几何中, 它是二维平面内的直线方程; 在线性代数中, 它是一个线性方程组 (虽然只有一个方程). 该线性方程组显然有无穷多组解, 全部解所构成的集合, 呈现为二维平面中的一条直线. 1.21

### 线性方程组解的几何诠释

比如线性方程组 (虽然只有一个方程):

$$x - 2y - 3z = 0. \tag{3}$$

由 $x - 2y - 3z = 0 \iff x = 2y + 3z \iff \begin{cases} x = 2y + 3z, \\ y = \ \ y \qquad , \\ z = \qquad\quad z. \end{cases}$

$$\iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$ 1.22

故线性方程组 (3) 有无穷多解, 其全部解都可以用向量 $\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\eta}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 线性表示. 或者说, 其全部解的集合, 体现为三维空间内由向量 $\boldsymbol{\eta}_1$, $\boldsymbol{\eta}_2$ 所张成的一个二维子空间. (在几何中, $x - 2y - 3z = 0$ 表示三维空间中的一个平面.)

另外, $x - 2y - 3z = 0$, 意味着向量 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ 与向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ 垂直, 求解方程组即相当于求所有与向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ 垂直的向量. 显然, 所有满足条件的向量, 构成一个平面. 即其解集构成一个二维子空间. 1.23

### 为什么要讨论行列式

不妨先看看克拉默法则: 给定线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{4}$$

如果系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{5}$$

那么线性方程组 (4) 有解, 并且解是惟一的: 1.24

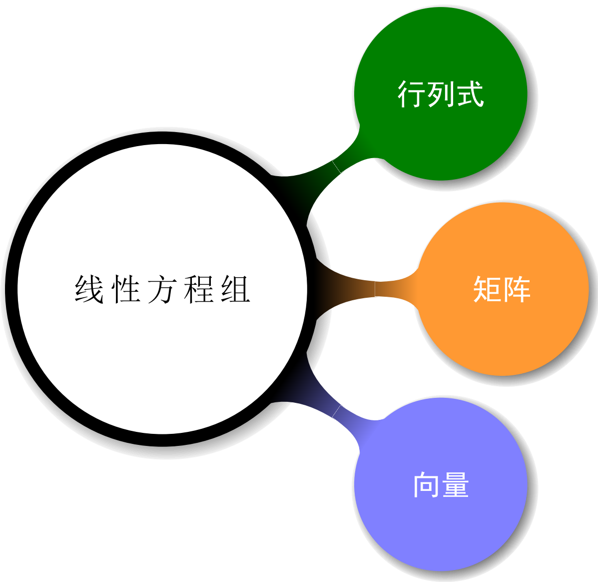
$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{D_n}{D}, \tag{6}$$

其中 $D_j$ 是把行列式 $D$ 中第 $j$ 列换成方程组的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 所成的行列式, 即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{7}$$

行列式的出现原因可以这样理解: 完美地表达了一部分线性方程组的解的规律. 从这个角度讲, 行列式是人为创造的一个符号, 它形式简洁地、浓缩地记载了一些规律性的内容.

☞ 什么是行列式? 如何计算? 将是课程第 1 章的内容. 1.25




宏观上讲, 线性代数的学习必须和几何相结合, 运用几何的视角去理解线性代数, 去表达线性代数.

微观上讲, 线性方程组的求解, 需要借助以下三个工具: 行列式、矩阵、向量. 同时在今后的学习中, 要特别注意这三个问题的相互转化. 例如矩阵的问题, 可能需要转化为向量的问题去解决, 或者反过来.

高斯消元法是求解线性方程组的最简单有效的方法. 那么是不是高斯消元法解决了线性方程组的全部问题呢? 显然不是. 为什么无解或有无穷多解, 还需要从理论上彻底解决. 无解是不是就丢弃不管了呢? 实际工程和科学计算中, 无解

的情形还需要考虑有没有近似解、最优解. 这个话题就是线性代数方程组的数值解法, 在计算方法、数值代数、矩阵分析等课程中会有讨论. 另外求解未知数很多的大型线性方程组, 还涉及到计算机的存储、能耗, 计算精度等等话题. 如何利用计算机更精确、更有效地求解大型线性代数方程组, 是计算数学研究中的基本性的重要课题之一. 1.26

### 本章内容

这一章关注: 行列式的性质与计算. 学习中要注意以下问题:

(1) 为什么要讨论行列式?

(2) 行列式有哪些性质?

(3) $n$ 阶行列式的计算, 有哪些常见方法? 1.27

## 1 $n$ 阶行列式的定义及性质

### 为什么要讨论行列式?

行列式的给出, 可以方便地表达线性方程组解的规律. 下面先从简单的情形说起.

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

用消元法容易求得其解: 当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时, 方程组有惟一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{12}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

我们引入一种记号

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \triangleq ad - bc, \tag{8}$$

称这种记号为二阶**行列式**. 则

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

从而方程组的解可以叙述为: 当二阶行列式 1.28

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

时, 该方程组有惟一解:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

这个表达方式的规律是:

(1) 各解的分母是方程组的系数构成的行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$;

(2) $x_j$ 的解的表达式中, 分子行列式是将分母行列式的第 $j$ 列元素用常数项 $b_1, b_2$ 代替后得到的. 1.29

有趣的是, $n$ 元线性方程组也有这样的规律.

设有三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, & (9) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, & (10) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. & (11) \end{cases}$$

用消元法我们可以求得方程组的解. 引入行列式, 可以方便地表达解的规律. 1.30

分别用 $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$ 乘 (9), $-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}$ 乘 (10), $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}$ 乘 (11), 再把得到的 3 个式子相加, 就消去了 $x_2, x_3$, 得到

$$\begin{aligned} &(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31})x_1 \\ = {} & b_1a_{22}a_{33} + b_2a_{23}a_{31} + b_3a_{21}a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - b_2a_{21}a_{33} - b_3a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

故当

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \neq 0$$

时, 就可以解出 $x_1$. 类似地可解出 $x_2, x_3$. 1.31

引入三阶行列式

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \triangleq {} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} && (12) \\ = {} & a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) && (13) \\ = {} & a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} && (14) \\ = {} & (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. && (15) \end{aligned}$$

1.32

当三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时, 上述三元线性方程组有惟一解:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D},$$

其中

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

这里借助行列式所表达出来的解的规律, 是显而易见的. 1.33

(14) 式中

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

是在三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中分别去掉 $a_{11}, a_{12}, a_{13}$ 所在的行、列而得到的, 分别称为 $a_{11}, a_{12}, a_{13}$ 所对应的**余子式**. 分别记为 $M_{11}, M_{12}, M_{13}$. 即

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

则有

$$D = (-1)^{1+1} a_{11} M_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} M_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} M_{13}.$$

1.34

而 (15) 式中

$$(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

分别称为 $a_{11}, a_{12}, a_{13}$ 所对应的**代数余子式**. 分别记为 $A_{11}, A_{12}, A_{13}$. (它们的正式定义在后续将会给出, 参见**定义** 2.)

即

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} M_{11}.$$

其余类似. 从而

$$D = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}.$$

☞ 三阶行列式等于第一行元素与其对应代数余子式的乘积之和. 更高阶的行列式也可以相仿定义. 1.35

按照这个规律, 我们可以类似地定义 4 阶行列式为

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\
={}& (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\
&+ (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

1.36

注意, 上式体现出的规则有两条:

1. 与元素 $a_{1j}$ 相乘的行列式, 是将原行列式中的 $a_{1j}$ 所在的行、列去掉而成的行列式, 即 $a_{1j}$ 对应的余子式 $M_{1j}$.
2. 展开式中, 元素 $a_{1j}$ 所在项的符号为 $(-1)^{1+j}$.

继续下去, 按照这个规则, 我们可以递归定义出 5 阶、6 阶等更高阶的行列式.

由此, 我们得到一个递归形式的行列式定义. 1.37

## $n$ 阶行列式的定义

由 $n \times n$ 个数排成的 $n$ 阶**行列式** (determinant)

$$
D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

表示这样一个数:

1. $n = 1$ 时,
   这个数就是行列式的元素本身. 即 $D = \left| a_{11} \right| = a_{11}$;
2. $n \geqslant 2$ 时,
   行列式 $D$ 表示这样一个数:

$$
\begin{aligned}
D &= (-1)^{1+1} a_{11} M_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} M_{12} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} M_{1n} \qquad (16) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j}.
\end{aligned}
$$

其中 $M_{1j}\,(j = 1, 2, \cdots, n)$ 是从 $D$ 中划掉第 1 行、第 $j$ 列后余下的 $(n-1)^2$ 个数 (其相对顺序不变) 所组成的 $n-1$ 阶行列式, 称为元素 $a_{1j}$ 的**余子式**.

(16) 式称为 $n$ 阶行列式 $D$ 按第 1 行的展开式. 1.38

将

$$A_{1j} = (-1)^{1+j} M_{1j}$$

称为元素 $a_{1j}$ 的**代数余子式**, 则有

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}. \tag{17}$$

下面给出余子式、代数余子式的一般定义. 1.39

**Definition 2.** 在行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中划去元素 $a_{ij}$ 所在的第 $i$ 行与第 $j$ 列, 剩下的 $(n-1)^2$ 个元素按原来的排法构成一个 $n-1$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{18}$$

称为元素 $a_{ij}$ 的**余子式** (minor determinant, minor), 记为 $M_{ij}$.

1.40

记

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

称 $A_{ij}$ 为元素 $a_{ij}$ 的**代数余子式** (adjunct, 或 cofactor). 1.41

*Example* 3. 在 4 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 9 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

中, 去掉第 3 行、第 2 列得到一个 3 阶行列式, 即为 $a_{32} = 5$ 的余子式

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

☞ 仅改变 $a_{ij}$ 的取值, 不会影响 $M_{ij}$ 和 $A_{ij}$. 1.42

行列式中, $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 所在的对角线称为行列式的**主对角线**, 并把元素 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 称为**主对角元**; 另一条对角线称为行列式的**副对角线**.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(图中的实线、虚线, 分别表示行列式的主对角线、副对角线.) 1.43

行列式的定义反映以下特点:

1. 行列式展开式中, 每一项乘积都是由行列式中位于不同行且不同列的 $n$ 个元素构成的, 并且展开式恰恰就是由所有这种可能的乘积组成;
2. $n$ 阶行列式的展开式中共有 $n!$ 项.

☞ 这个特点很重要: 任一元素都不能与其同一行或同一列的元素相乘. 1.44

为什么? 比如, $a_{11}$ 只能与 $M_{11}$ 相乘, 但是 $M_{11}$ 中是不会出现与 $a_{11}$ 在同一行或同一列的元素的.

由此我们也就容易明白, 展开式恰恰就是由所有 “位于不同行和不同列的 $n$ 个元素” 的乘积组成. 而由排列组合的知识, 这种所有可能的组合共有 $n!$ 项, 所以 $n$ 阶行列式的展开式中共有 $n!$ 项.

当 $n$ 较大时, 其项数十分庞大. 比如 $n = 10$, 那么就会得到 $10! = 3628800$ 个项做加减法.

行列式如何计算? 行列式的定义给出了一个算法, 使用这个算法已经可以计算任何一个行列式, 但这显然不是一个好的算法. 1.45

三阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$\triangleq a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

上述表达式是 6 个项的代数和,

其计算可以使用**沙路法**:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

实线上的三个元作乘积, 取正号; 虚线上的元所作的乘积取负号. 1.46

二阶行列式的计算最简单, 三阶行列式的展开可以用沙路法. 更高阶的行列式就不能使用沙路法了.

*Example* 4.

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 - (-1) \cdot 3 = 13.$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2.$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix} &= 2 \cdot 3 \cdot 6 + (-5) \cdot (-3) \cdot 4 + 0 \cdot 1 \cdot (-1) \\ &\qquad - 0 \cdot 3 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) \cdot (-1) - (-5) \cdot 1 \cdot 6 \\ &= 36 + 60 + 0 - 0 - 6 - (-30) = 120. \end{aligned}$$

1.47

*Example* 5. 计算行列式:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

解:

$$\begin{aligned} D = (-1)^{1+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ + (-1)^{1+3} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ = 0 + 2 + 10 - 8 = 4. \end{aligned}$$

1.48

*Example* 6. 证明**下三角形行列式** (主对角线以上元素全为 0)

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \tag{19}$$

证: 展开第一行得

$$D_n = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

依次继续, 易得

$$D_n = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

1.49

换句话说, 下三角形行列式就等于**主对角线**上元素的乘积. 作为 (19) 的特殊情形有

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n. \tag{20}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1. \tag{21}$$

1.50

*Example* 7. 计算 $n$ 阶行列式 (副对角线以上元素全为 0)

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & * \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2 & \cdots & * & * \\ a_1 & * & \cdots & * & * \end{vmatrix},$$

其中 “$*$” 表示任意数.

**解:** 展开第一行得

$$D_n = (-1)^{n+1} a_n \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ 0 & a_2 & \cdots & * \\ a_1 & * & \cdots & * \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} a_n D_{n-1},$$

1.51

递推可得

$$\begin{aligned} D_n &= (-1)^{n-1} a_n D_{n-1} \\ &= (-1)^{n-1} a_n (-1)^{n-2} a_{n-1} D_{n-2} \\ &= \cdots\cdots \\ &= (-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1} a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1. \end{aligned}$$

1.52

## 1.2 $n$ 阶行列式的性质

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

行列式 $D^{\mathrm{T}}$ 称为行列式 $D$ 的**转置行列式**.

☞ 将行列式 $D$ 沿主对角线翻转, 得到其转置行列式 $D^{\mathrm{T}}$. 1.53

**Proposition 8.** 行列式与它的转置行列式相等. 即

$$D^{\mathrm{T}}=D. \tag{22}$$

(证明略.)

这表明, 在行列式中行与列的地位是等同的. 因此, 行列式凡是有关行的性质, 对列也同样成立. 1.54

*Example* 9. 试证: 对于**上三角行列式** (当 $i>j$ 时, $a_{ij}=0$) 有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \tag{23}$$

证:

$$D=D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

☞ 行列式计算的一般方法: 将行列式转化为上三角形行列式. 这其中需要使用行列式的一些基本性质. 1.55

**Proposition 10.** 行列式按任一行展开, 其值相等. 例如按第 $i$ 行展开, 将第 $i$ 行元素乘以对应的代数余子式, 再作和. 即

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}+(-1)^{i+2}a_{i2}M_{i2}+\cdots+(-1)^{i+n}a_{in}M_{in} \\ &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}. \end{aligned} \tag{24}$$

或记为

$$\begin{aligned} D &= a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \\ &= \sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}. \end{aligned} \tag{25}$$

亦可按列展开, 比如按第 $j$ 列展开: 1.56

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}. \tag{26}$$

其中 $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$. 1.57

**Proposition 11** (线性性质)**.** 有以下两条: **(i)**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{27}$$

- 一行的公因子可以提出去.
- 以一数乘行列式, 相当于用这个数乘此行列式的某一行.

事实上, 由性质 2 1.58

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= ka_{i1}A_{i1} + ka_{i2}A_{i2} + \cdots + ka_{in}A_{in} \\ &= k(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}) \\ &= k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

令 $k = 0$, 就有: 如果行列式中某一行元素全为零, 那么行列式为零. 1.59

**(ii)**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & \cdots & b_n + c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{28}$$

这就是说, 如果某一行是两组数的和, 那么这个行列式就等于两个行列式的和, 而这两个行列式除这一行外, 其余行与原来行列式的对应的行一样. 1.60

事实上, 设这一行是第 $i$ 行, 于是

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= (b_1+c_1)A_{i1} + (b_2+c_2)A_{i2} + \cdots + (b_n+c_n)A_{in} \\
&= (b_1A_{i1} + b_2A_{i2} + \cdots + b_nA_{in}) + (c_1A_{i1} + c_2A_{i2} + \cdots + c_nA_{in}) \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

性质 3 之 **(ii)** 显然可以推广到某一行为多组数的和的情形. 1.61

1. 强调: 行列式不能作这种形式上的加法:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{vmatrix}.$$

   这是对上述性质的错误理解.
2. 用途: 将行列式裂开为两个行列式. 这是计算行列式的一个常用方法. 例如

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ b & x & a & a \\ b & b & x & a \\ b & b & b & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ b & x & a & a \\ b & b & x & a \\ b & b & b & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-a & a & a & a \\ 0 & x & a & a \\ 0 & b & x & a \\ 0 & b & b & x \end{vmatrix}.$$

1.62

**Corollary 12.** 如果行列式中某一行元素全为零, 那么行列式为零.

**Proposition 13.** 如果行列式中有两行相同, 那么行列式为零.

(用数学归纳法可以证明, 具体过程略去.) 1.63

**Corollary 14.** 如果行列式中两行成比例, 那么行列式为零.

证:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

这里第一步是根据性质 3 之 **(i)**, 第二步是根据性质 4. 1.64

**Proposition 15.** 把一行的倍数加到另一行, 行列式不变.

证:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ca_{k1} & a_{i2}+ca_{k2} & \cdots & a_{in}+ca_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{k1} & ca_{k2} & \cdots & ca_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

这里, 第一步是根据性质 3, 第二步是根据性质 5. 1.65

**Proposition 16.** 对换行列式中两行的位置, 行列式反号.

证:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a_{k1} & a_{i2}+a_{k2} & \cdots & a_{in}+a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a_{k1} & a_{i2}+a_{k2} & \cdots & a_{in}+a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= -D.$$

这里, 第一步是把第 $k$ 行加到第 $i$ 行, 第二步是把第 $i$ 行的 $(-1)$ 倍加到第 $k$ 行, 第三步是把第 $k$ 行加到第 $i$ 行, 最后再把第 $k$ 行的公因子 $(-1)$ 提出. 1.66

**Proposition 17** (✧)**.** 在行列式中, 一行的元素与另一行相应元素的代数余子式的乘积之和, 等于零. 即 1.67

$$a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in} = 0, \qquad (k \neq i). \tag{29}$$

例如

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} + a_{14}A_{24} = 0. \tag{30}$$

事实上, 下述行列式按第 2 行展开, 有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} + a_{14}A_{24}.$$

而该行列式有两行相同, 其值为零, 故 (30) 式成立. 1.68

设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$A_{ij}$ 表示元素 $a_{ij}$ 的代数余子式, 则下列公式成立:

$$a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in} = \begin{cases} D, & k = i, \\ 0, & k \neq i. \end{cases} \tag{31}$$

用连加号简写为

$$\sum_{s=1}^{n} a_{ks}A_{is} = \begin{cases} D, & k = i, \\ 0, & k \neq i; \end{cases} \tag{32}$$

1.69

使用克罗内克记号 (Kronecker Delta)[3]

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当} \ \ i = j, \\ 0, & \text{当} \ \ i \neq j. \end{cases} \tag{33}$$

可以将 (32) 记为

$$\sum_{s=1}^{n} a_{ks}A_{is} = \delta_{ki}D, \tag{34}$$

1.70

[3]克罗内克记号本质是二元函数, 自变量是两个正整数. 如果两者相等, 则其输出值为 1, 否则为 0. 克罗内克 (Leopold Kronecker, 1823 -1891), 德国数学家, 研究领域为数论、代数和逻辑. 他有一句名言: 上帝创造了整数, 其余都是人做的工作.

在计算数字行列式时, 直接应用展开式

$$a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in} = \begin{cases} D, & k = i, \\ 0, & k \neq i. \end{cases} \tag{35}$$

$$a_{1l}A_{1j} + a_{2l}A_{2j} + \cdots + a_{nl}A_{nj} = \begin{cases} D, & l = j, \\ 0, & l \neq j. \end{cases} \tag{36}$$

不一定能简化计算, 因为把一个 $n$ 阶行列式的计算换成 $n$ 个 $(n-1)$ 阶行列式的计算并不减少计算量, 只是在行列式中某一行或某一列含有较多的 0 时, 应用上述公式才有意义.

但这个公式在理论上是重要的. 1.71

*Example* 18. 行列式

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+5} \cdot 2 \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \cdot 5 \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -4 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -10 \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \end{vmatrix} = (-10)(-2) \begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 6 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 20(-42 - 12) = -1080.$$

这里第一步是按第 5 列展开, 然后再按第 1 列展开, 这样就归结到一个三阶行列式的计算. 1.72

## 小结

前面学习了 7 个性质、2 个推论, 共 10 个结论 (其中性质 3 有 2 个结论). 下面做三点归纳.

**(一) 行列式的三种变换.**

性质 3 之 (i)、性质 5、性质 6 是三个重要的结论, 它们涉及了行列式的三种重要变换:

1. 提出某一行的公因子, 记作: $r_i \div k$ (列的情形为 $c_i \div k$ ).
2. 把某一行的 $k$ 倍加到另一行, 记作: $r_i + kr_j$ (列的情形为 $c_i + kc_j$).
3. 互换某两行, 记作: $r_i \leftrightarrow r_j$ (列的情形为 $c_i \leftrightarrow c_j$).

上面的写法中, 我们约定: 把要改变的行 (列), 写在表达式的开头.

比如, $r_1 + r_2$ 和 $r_2 + r_1$ 的含义是不同的:

- $r_1 + r_2$: 把 $r_2$ 加到 $r_1$, 被改变的将是 $r_1$.
- $r_2 + r_1$: 把 $r_1$ 加到 $r_2$, 被改变的将是 $r_2$.

☞ 计算行列式最常用的一种方法就是利用变换 $r_i + kr_j$ 和 $r_i \leftrightarrow r_j$, 把行列式化为上三角形行列式, 从而算得行列式的值. 具体的例子见下一节. 1.73

**(二) 行列式为零的三种情形:**

- 某行元素全为零 (推论 1);
- 两行 (列) 相同 (性质 4);
- 两行 (列) 成比例 (推论 2). 1.74

(三) 行列式按某行展开的三种情形:

- 按第一行展开 (最简单的情形, 即课本中行列式的定义);
- 按任一行展开 (性质 2, 上述情形的推广)
- 一行元素乘以另一行对应元素的代数余子式, 其和为零 (性质 7).

上述三种情形, 综合起来就是一个表达式:

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=\sum_{s=1}^{n}a_{ks}A_{is}=\begin{cases}D, & k=i,\\ 0, & k\neq i;\end{cases} \tag{37}$$

1.75

剩下还有两个结论, 比较简单:

- $D^{\mathrm{T}}=D$ (性质 1).
- 行列式的裂开 (性质 3 之 (ii)).

行列式的重点是计算, 应当在理解行列式的概念、熟练掌握行列式性质的基础上, 正确地计算低阶行列式, 会用恒等变形化行列式为上 (下) 三角形行列式, 从而直接求其值. 1.76

## 2 $n$ 阶行列式的计算

计算行列式最常用的一种方法: 利用行列式变换, 把行列式化为上三角形行列式, 再使用结论

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}, \tag{38}$$

算得行列式的值. 1.77

*Example* 19. 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}.$$

**解:**

$$D\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2}-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}\xlongequal[r_3-10r_1]{r_2-4r_1}-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 2 & -4 \\ 0 & -15 & 2 & -20 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_4}\begin{vmatrix}1&2&0&2\\0&1&1&7\\0&-15&2&-20\\0&-7&2&-4\end{vmatrix}\xlongequal[r_4+7r_2]{r_3+15r_2}\begin{vmatrix}1&2&0&2\\0&1&1&7\\0&0&17&85\\0&0&9&45\end{vmatrix}=0.$$

1.78

注意, 如果 $a_{11}\neq 1$, 一般通过互换行 (列) 使 $a_{11}$ 为 1, 再进行计算.

$$\begin{vmatrix}4&1&2&4\\1&2&0&2\\10&5&2&0\\0&1&1&7\end{vmatrix}\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2}-\begin{vmatrix}1&2&0&2\\4&1&2&4\\10&5&2&0\\0&1&1&7\end{vmatrix}.$$

从这个例子可以看到, 计算一般的数字行列式可以非常地机械:

**Step 1** 把 $a_{11}$ 调整为 1, 用 $r_i+kr_1$ 把 $a_{11}$ 下方的数字变为 0.
**Step 2** 把 $a_{22}$ 调整为 1, 用 $r_i+kr_2$ 把 $a_{22}$ 下方的数字变为 0.
**Step 3** 如此反复, 总可以把行列式变为上三角行列式, 得到计算结果.

当然, 也可把 $a_{11}$ 调整为第一列元素的公因子. 更多的时候, 需要我们观察各行 (列) 数字间的关系或规律, 灵活运用行列式变换, 使计算简便. 1.79

*Example* 20. 计算 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&-1&2\\-1&-1&-4&1\\2&4&-6&1\\1&2&4&2\end{vmatrix}.$$

解: 方法一. 行列变换, 化为上三角形行列式.

$$\begin{vmatrix}1&1&-1&2\\-1&-1&-4&1\\2&4&-6&1\\1&2&4&2\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-r_1]{r_2+r_1,\,r_3-2r_1}\begin{vmatrix}1&1&-1&2\\0&0&-5&3\\0&2&-4&-3\\0&1&5&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_4}-\begin{vmatrix}1&1&-1&2\\0&1&5&0\\0&2&-4&-3\\0&0&-5&3\end{vmatrix}\xlongequal{r_3-2r_2}-\begin{vmatrix}1&1&-1&2\\0&1&5&0\\0&0&-14&-3\\0&0&-5&3\end{vmatrix}$$

1.80

$$\xlongequal{c_3\leftrightarrow c_4}\begin{vmatrix}1&1&2&-1\\0&1&0&5\\0&0&-3&-14\\0&0&3&-5\end{vmatrix}\xlongequal{r_4+r_3}\begin{vmatrix}1&1&2&-1\\0&1&0&5\\0&0&-3&-14\\0&0&0&-19\end{vmatrix}$$

$$=1\cdot 1\cdot(-3)\cdot(-19)=57.$$

方法二. 逐步降阶:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_1]{r_2+r_1,\, r_3-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{展开}c_1} \begin{vmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-2r_3} \begin{vmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 0 & -14 & -3 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{展开}c_1} \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -14 & -3 \end{vmatrix} = 57.$$

1.81

方法三. 观察行列关系, 灵活处理:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-2r_4]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -14 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -14 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{展开}c_1} \begin{vmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 0 & -14 & -3 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{展开}c_1} \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -14 & -3 \end{vmatrix} = 57.$$

1.82

*Example* 21. 计算 4 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 11 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \end{vmatrix}$.

解:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 11 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3+c_4} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 11 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{展开 } r_3} (-1)^{3+4} \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 11 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1-4r_2} -5 \begin{vmatrix} -7 & 0 & -25 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 11 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{展开 } c_2} -5 \begin{vmatrix} -7 & -25 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 10.$$

1.83

*Example* 22. 判断: 计算

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \xlongequal[r_1+r_2]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} a+c & b+d \\ c-a & d-b \end{vmatrix}$$

是否正确?

**解:** 计算错误.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} &\xlongequal{r_2-r_1} \begin{vmatrix} a & b \\ c-a & d-b \end{vmatrix} \\ &\xlongequal[r_1+r_2]{} \begin{vmatrix} c & d \\ c-a & d-b \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} a+c & b+d \\ c-a & d-b \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

1.84

*Example* 23 (经典例题 ★). 计算 $n$ 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

**解:** **解法一**. 将第一行乘以 $(-1)$ 依次加到其余各行, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a-x & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ a-x & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a-x & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix},$$

再将各列都加到第一列上, 得 1.85

$$D_n = \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix} = \big[x+(n-1)a\big](x-a)^{n-1}.$$

1.86

**解法二**. 将各列都加到第一列, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(n-1)a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = \big[x+(n-1)a\big] \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 1 & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

再将第一行乘以 $(-1)$ 依次加到其余各行, 得

$$D_n=\big[x+(n-1)a\big]\begin{vmatrix}1&a&a&\cdots&a\\0&x-a&0&\cdots&0\\0&0&x-a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&x-a\end{vmatrix}=\big[x+(n-1)a\big](x-a)^{n-1}.$$

1.87

**解法三**. 升阶法.

$$D_n=\left|\begin{array}{c:cccc}1&a&a&\cdots&a\\ \hdashline 0&x&a&\cdots&a\\0&a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&a&a&\cdots&x\end{array}\right|_{(n+1)}\xlongequal[i=2,3,\cdots]{r_i-r_1}\begin{vmatrix}1&a&a&\cdots&a\\-1&x-a&0&\cdots&0\\-1&0&x-a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-1&0&0&\cdots&x-a\end{vmatrix}_{(n+1)}$$

若 $x=a$, 则 $D_n=0$.
若 $x\neq a$, 则将 $\frac{1}{x-a}c_j$ 加到 $c_1$, $j=2,3,\cdots,n+1$:

$$\begin{aligned}D_n&=\begin{vmatrix}1+\frac{a}{x-a}n&a&a&\cdots&a\\0&x-a&0&\cdots&0\\0&0&x-a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&x-a\end{vmatrix}_{(n+1)}\\&=\Big(1+\frac{na}{x-a}\Big)(x-a)^n=\big[x+(n-1)a\big](x-a)^{n-1}.\end{aligned}$$

1.88

**解法四**. 将 $D_n$ 的第 1 列拆开, 得

$$D_n=\begin{vmatrix}x-a&a&a&\cdots&a\\0&x&a&\cdots&a\\0&a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&a&a&\cdots&x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a&a&a&\cdots&a\\a&x&a&\cdots&a\\a&a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&a&\cdots&x\end{vmatrix}=(x-a)D_{n-1}+a(x-a)^{n-1}.$$

所以

$$\begin{cases}D_n=(x-a)D_{n-1}+a(x-a)^{n-1},\\(x-a)D_{n-1}=(x-a)^2D_{n-2}+a(x-a)^{n-1},\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\(x-a)^{n-2}D_2=(x-a)^{n-1}D_1+a(x-a)^{n-1}.\end{cases}$$

将上述等式累和, 并注意到 $D_1=x$, 则

$$D_n=(x-a)^{n-1}x+(n-1)a(x-a)^{n-1}=\big(x+(n-1)a\big)(x-a)^{n-1}.$$

这个行列式经常以不同的样子出现, 比如 1.89

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=(n-1)\,(-1)^{n-1},$$

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix}=[1+(n-1)\,a]\,(1-a)^{n-1},$$

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+\lambda \end{vmatrix}=(\lambda+n)\,\lambda^{n-1}.$$

**注意**, 这是一个重要的例题. 解法一最简单. 1.90

解法二的特点是: 所有的列 (行) 加到某一列 (行), 其值相等, 可以提出公因子. 这是一个常用的方法.

解法三称为 “升阶法” 或 “加边法”, 在这个题中看似笨拙, 实则是一类重要的方法. 比如这个题目可以改一下:

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}. \tag{39}$$

此时解法二是不适用的. 这个题还可以进一步改为:

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x_n \end{vmatrix}. \tag{40}$$

行列式 (39) 和 (40) 用升阶法很方便. 1.91

行列式 (39) 的结果:

假定 $x_i \neq a$, 得

$$D_n=\Big(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a}{x_i-a}\Big)\prod_{i=1}^{n}(x_i-a)\,.$$

行列式 (40) 的结果:

假定 $x_i \neq a_i$, 得

$$D_n = \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{x_i - a_i}\right) \prod_{i=1}^{n} (x_i - a_i) .$$

1.92

行列式 (39) 和 (40) 有很多不同的出现形式, 常见于各类教材和习题 (比如教材中习题 20, 28, 36, 42), 也是极常见的试题. 比如

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 3 & 3+a & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n+a \end{vmatrix} = \left(a + \frac{n(n+1)}{2}\right) a^{n-1}.$$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix} = b^{n-1}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i + b\Big).$$

(2003 年考研数学三)

1.93

### “爪形” 行列式

在解法三中出现了下面形式的行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

可以谓之 “爪形” 行列式. 它的解法是固定的. 1.94

*Example* 24. 计算行列式 (假定 $a_i \neq 0$):

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

**解:** 分别将第 $i$ $(i=2,\cdots,n+1)$ 列乘以 $-\frac{1}{a_{i-1}}$ 加到第 1 列, 得

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n\Big(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\Big).$$

1.95

*Example* 25. 计算 $n$ 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}$.

**解:** 将第 1 列裂开,

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x-a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x & a & \cdots & a \\ 0 & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix} \\ &= a(x+a)^{n-1}+(x-a)D_{n-1}. \end{aligned} \tag{41}$$

对称地可知 1.96

$$D_n^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} x & -a & -a & \cdots & -a \\ a & x & -a & \cdots & -a \\ a & a & x & \cdots & -a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}=-a(x-a)^{n-1}+(x+a)D_{n-1}^{\mathrm{T}}.$$

即 $D_n^{\mathrm{T}}=-a(x-a)^{n-1}+(x+a)D_{n-1}^{\mathrm{T}}$. 而 $D^{\mathrm{T}}=D$, 故

$$D_n=-a(x-a)^{n-1}+(x+a)D_{n-1}. \tag{42}$$

于是, 联立 (41) 和 (42), 消去 $D_{n-1}$, 当 $a\neq 0$ 时, 有

$$D_n=\frac{(x+a)^n+(x-a)^n}{2}.$$

易见当 $a=0$ 时, 结论也成立. 1.97

*Example* 26. 计算 $n$ 阶行列式 $(a \neq b)$:

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ b & x & a & \cdots & a & a \\ b & b & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & x & a \\ b & b & b & \cdots & b & x \end{vmatrix}.$$

**解:** 从 $r_1$ 开始, 各行减去下一行: 1.98

$$\begin{aligned} D_n &\xlongequal[i=1,\cdots,n-1]{r_i - r_{i+1}} \begin{vmatrix} x-b & a-x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x-b & a-x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-b & a-x \\ b & b & b & \cdots & b & x \end{vmatrix} \\ &\xlongequal{\text{展开}c_1} (x-b)D_{n-1} + (-1)^{n+1} \cdot b \cdot (a-x)^{n-1} \\ &= (x-b)D_{n-1} + b(x-a)^{n-1}. \end{aligned} \tag{43}$$

由 $D_n$ 表达式中 $a, b$ 的对称性, 还可得

$$D_n = (x-a)D_{n-1} + a(x-b)^{n-1}. \tag{44}$$

(或由 $D_n = (x-b)D_{n-1} + b(x-a)^{n-1}$, 知

$$D^{\mathrm{T}} = (x-a)D_{n-1}^{\mathrm{T}} + a(x-b)^{n-1},$$

而 $D = D^{\mathrm{T}}$, 得 (44) 式.) 联立 (43) 和 (44) 式, 消去 $D_{n-1}$, 得 1.99

$$D_n = \frac{a(x-b)^n - b(x-a)^n}{a-b}.$$

或者裂项得到 $D_n$ 与 $D_{n-1}$ 的递推关系. 1.100

$$\begin{aligned} D_4 &= \begin{vmatrix} x & a & a & a \\ b & x & a & a \\ b & b & x & a \\ b & b & b & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ b & x & a & a \\ b & b & x & a \\ b & b & b & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-a & a & a & a \\ 0 & x & a & a \\ 0 & b & x & a \\ 0 & b & b & x \end{vmatrix} \\ &= \frac{a}{b} \begin{vmatrix} b & b & b & b \\ b & x & a & a \\ b & b & x & a \\ b & b & b & x \end{vmatrix} + (x-a)D_3 \\ &= \frac{a}{b} \begin{vmatrix} b & b & b & b \\ 0 & x-b & a-b & a-b \\ 0 & 0 & x-b & a-b \\ 0 & 0 & 0 & x-b \end{vmatrix} + (x-a)D_3 \end{aligned}$$

$$= a(x-b)^3 + (x-a)D_3.$$

1.101

*Example* 27. 行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \tag{45}$$

称为 $n$ 级**范德蒙** (Vandermonde) 行列式.[4]

试证明: 对任意的 $n \geqslant 2$, $n$ 级范德蒙行列式等于 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 这 $n$ 个数的所有可能之差 $a_i - a_j$ 的乘积, 其中 $1 \leqslant j < i \leqslant n$. 即

$$V_n = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j).$$

证: 对 $n$ 作归纳法. 当 $n = 2$ 时,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1,$$

结果成立. 设对于 $n-1$ 级的范德蒙行列式结论成立, 下面来看 $n$ 级的情形.

在 (45) 中, 第 $n$ 行减去第 $n-1$ 行的 $a_1$ 倍, 第 $n-1$ 行减去第 $n-2$ 行的 $a_1$ 倍, 由下而上, 依次地在每一行减去它上一行的 $a_1$ 倍, 有

$$\begin{aligned} V_n &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 a_1 a_3 & \cdots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \cdots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix} \\ &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\cdots(a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

[4]范德蒙 (Alexandre-Théophile Vandermonde, 1735 -1796), 法国音乐家、数学家、化学家. 他是一个小提琴家, 直到 1770 年才开始数学的研究. 范德蒙行列式也可以写为本文形式的转置.

后面这行列式是一个 $n-1$ 级的范德蒙行列式, 根据归纳法假设, 它等于所有可能差 $a_i - a_j$ $(2 \leqslant j < i \leqslant n)$ 的乘积, 而包含 $a_1$ 的差全在前面出现了, 因此, 结论对 $n$ 级范德蒙行列式也成立. 根据数学归纳法, 完成了证明.

用连乘号, 这个结果可以简写为

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j).$$

由这个结果立即得出, 范德蒙行列式为零的充分必要条件是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 这 $n$ 个数当中至少有两个相等. 1.102

*Example* 28. 证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rk} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}. \tag{46}$$

证: 对 $k$ 用数学归纳法. 当 $k=1$ 时, (46) 的左端为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}.$$

按第一行展开, 就得到所要的结论. 1.103

假设 (46) 对 $k = m-1$ 成立, 现在来看 $k = m$ 的情形. 记

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}, \qquad |\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}.$$

用 $M_{1j}^{\boldsymbol{A}}$ 表示: 在 $\boldsymbol{A}$ 中去掉 $a_{1j}$ 所在的行、列之后, 余下的那一部分数字块. $M_{1j}$ 表示: $a_{1j}$ 在行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 中对应的余子式. 则行列式按第 1 行展开得

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} M_{11}^{\boldsymbol{A}} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} M_{12}^{\boldsymbol{A}} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{1+m} a_{1m} \begin{vmatrix} M_{1m}^{\boldsymbol{A}} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1} a_{11} M_{11} |\boldsymbol{B}| + (-1)^{1+2} a_{12} M_{12} |\boldsymbol{B}| + \cdots + (-1)^{1+m} a_{1m} M_{1m} |\boldsymbol{B}| \end{aligned}$$

$$= \left[(-1)^{1+1}a_{11}M_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}M_{12} + \cdots + (-1)^{1+m}a_{1m}M_{1m}\right]|\boldsymbol{B}|$$
$$= |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|.$$

1.104

**小结**: (46) 式可简记为

$$D = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|. \tag{47}$$

同样也有

$$D = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & * \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|. \tag{48}$$

结论 (47) 容易推广为:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A_1} & & & \\ * & \boldsymbol{A_2} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ * & * & \cdots & \boldsymbol{A_k} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A_1}||\boldsymbol{A_2}|\cdots|\boldsymbol{A_k}|. \tag{49}$$

这在形式上与下三角行列式的结果是一致的. 对上三角行列式的情形有类似结论.

1.105

*Example* 29.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & -1 & 2 & 7 \\ 6 & -7 & 4 & 0 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & -1 & 2 & 7 \\ 6 & -7 & 4 & 0 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -24.$$

1.106

**注意**,

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{nn} \\ \boldsymbol{B}_{mm} & \boldsymbol{C}_{mn} \end{vmatrix} \neq -\left|\boldsymbol{A}_{nn}\right| \cdot \left|\boldsymbol{B}_{mm}\right|.$$

事实上,

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{nn} \\ \boldsymbol{B}_{mm} & \boldsymbol{C}_{mn} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}\left|\boldsymbol{A}_{nn}\right| \cdot \left|\boldsymbol{B}_{mm}\right|, \tag{50}$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{C}_{nm} & \boldsymbol{A}_{nn} \\ \boldsymbol{B}_{mm} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}\left|\boldsymbol{A}_{nn}\right| \cdot \left|\boldsymbol{B}_{mm}\right|. \tag{51}$$

因为, 将 $\boldsymbol{A}_{nn}$ 所在的每一列依次与其前面的 $m$ 列逐列对换, 共进行 $n \times m$ 次相邻互换, 得

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{nn} \\ \boldsymbol{B}_{mm} & \boldsymbol{C}_{mn} \end{vmatrix} = (-1)^{n\times m}\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_{nn} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C}_{mn} & \boldsymbol{B}_{mm} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}\left|\boldsymbol{A}_{nn}\right| \cdot \left|\boldsymbol{B}_{mm}\right|.$$

1.107

**Exercise 30** (P.33 习题 17). $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 8 \end{vmatrix}$.

解:

$$D = (-1)^{2\times 3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 - r_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-5) = -60.$$

1.108

## 3 克拉默 (Cramer) 法则

### 克拉默法则

克拉默[5]法则给出了一类线性方程组的公式解.

**Theorem 31** (克拉默法则, Cramer's Rule, 1750). *如果线性方程组*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{52}$$

*的系数行列式*

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{53}$$

*那么线性方程组 (52) 有解, 并且解是惟一的, 解可以通过系数表为*

1.109

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{D_n}{D}, \tag{54}$$

其中 $D_j$ 是把行列式 $D$ 中第 $j$ 列换成方程组的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 所成的行列式, 即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{55}$$

1.110

### 注：克拉默法则的局限

[5]克拉默 (Gabriel Cramer, 1704–1752), 瑞士数学家. 克莱姆早年就显示其数学天赋, 18 岁获博士学位, 20 岁成为日内瓦大学数学学科的 co-chair.

- 克拉默法则面对的线性方程组要满足两个条件: (1) 未知量个数和方程组个数相同, (2) 系数行列式 $D \neq 0$.
- 克拉默法则从理论上完美地解决了一少部分线性方程组的求解问题, 但因其中行列式计算量太大, 实际求解并不用此方法. 高斯消元法仍然是行之有效的简单解法. 有的习题会要求使用克拉默法则求解线性方程组, 这类题目请大家直接无视.

1.111

## 齐次线性方程组

常数项全为零的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

称为**齐次线性方程组**. 显然, 齐次线性方程组总是有解的, 因为 $(0, 0, \ldots, 0)$ 就是一个解, 它称为**零解**.

对于齐次线性方程组, 我们关心的问题是: 它除去零解以外还有没有其它解, 或者说, 它有没有非零解. 1.112

**Corollary 32.** *如果齐次线性方程组*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases} \tag{56}$$

*的系数行列式 $D \neq 0$, 那么它只有零解. 换句话说, 如果方程组 (56) 有非零解, 那么必有 $D = 0$.*

证: 由克拉默法则, 因 $D \neq 0$, 故有唯一解. 而 $(0, 0, \cdots, 0)$ 已经是它的解, 故它只有零解. □

☞ 在第 3 章, 我们将会证明: $D = 0$ 是齐次方程组有非零解的充要条件. 1.113

## 流传于微信朋友圈的一个问题

*Example* 33. $1 = 4$, $2 = 8$, $3 = 24$, $4 = ?$

分析: 有人说 $4 = 1$, 因为 $1 = 4$. 有人说 $4 = 96$, 因为 $4 \times 2 = 8$, $8 \times 3 = 24$.

解: 设曲线 $y = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2$ 过点 $(1, 4)$, $(2, 8)$, $(3, 24)$. 代入三点坐标, 得到一个关于 $\lambda_0$, $\lambda_1$, $\lambda_2$ 的线性方程组:

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 4, \\ \lambda_0 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 8, \\ \lambda_0 + 3\lambda_1 + 9\lambda_2 = 24. \end{cases}$$

由高斯消元法得

$$\lambda_0 = 12, \quad \lambda_1 = -14, \quad \lambda_2 = 8.$$

故 $y = 12 - 14x + 8x^2$, 得 $y(4) = 94$. 1.114

**思考:** 数列前 3 项依次为 4, 8, 24, 第 4 项能否取别的值? 甚至是任意数值?!

事实上, 令第 4 项的值为任意常数 $c$, 设曲线

$$y = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3$$

经过点 $(1,4)$, $(2,8)$, $(3,24)$, $(4,c)$. 代入四点坐标, 得到一个关于 $\lambda_0$, $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ 的线性方程组:

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 4, \\ \lambda_0 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 8\lambda_3 = 8, \\ \lambda_0 + 3\lambda_1 + 9\lambda_2 + 27\lambda_3 = 24, \\ \lambda_0 + 4\lambda_1 + 16\lambda_2 + 64\lambda_3 = c. \end{cases}$$

它的系数行列式 $D$ 是范德蒙行列式, 且每个 $a_i$ 都不相同, 故 $D \neq 0$. 由克拉默法则, 方程组必有唯一解. □

这也表明通过前三点的多项式曲线有无穷多条. 从而说明: 给出数列的前 $n$ 项, 满足这 $n$ 项取值的通项公式有无穷多个! 1.115

☞ 一般地, 过 $n+1$ 个 $x$ 坐标不同的点 $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, $\cdots$, $(x_{n+1}, y_{n+1})$, 可以唯一地确定一个 $n$ 次曲线方程

$$y = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n.$$

但是, 满足这 $n+1$ 个已知点的多项式有无穷多个.

上述结论, 是范德蒙行列式的一个重要应用. 它得到了一个理论上的重要结果: 要想知道两个变量之间的函数关系, 可以测量若干点的取值, 总存在多项式函数可以描述这个两个变量之间的关系, 并且函数严格通过每一个测量点. 但这个方法并不实用, 因其次数太高, 计算量大; 由于测量误差的存在, 也使得所求曲线没有必要严格通过每一个点 (例如原本可能是线性关系, 上述做法一般得到的是高次多项式函数). 这是数学、科研当中一个非常重要的问题: 函数的插值与逼近. 数值分析或计算方法课程会深入讨论这个问题. 1.116

*Example* 34. 求 $\lambda$ 在什么条件下, 方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 = 0. \end{cases}$$

有非零解.

**解:** 根据推论, 如果方程组有非零解, 那么系数行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0,$$

所以 $\lambda = \pm 1$. □

当 $\lambda = 1$ 时, 方程组有非零解, 且有无数多组解: $(x_1, x_2) = (k, -k)$, $k$ 为任意常数.

当 $\lambda = -1$ 时, 方程组也有无数多组解: $(x_1, x_2) = (c, c)$, $c$ 为任意常数. 1.117

*Example* 35 (典型例题, P36 习题 37). 试证

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

1.118

证: **解法一**. 设法把主对角线上的 $x$ 变为 0, 再按第一列展开.

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_3 & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_{n-1}+xc_n} \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_3 & x^2+a_1x+a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

1.119

$$\xlongequal{c_{n-2}+xc_{n-1}} \begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & x^3+a_1x^2+a_2x+a_3 & x^2+a_1x+a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[j=n-3,\cdots,2,1]{c_j+xc_{j-1}} \begin{vmatrix} 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ P_n & P_{n-1} & \cdots & x^2+a_1x+a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

其中 $P_n = x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$, $P_{n-1} = x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-2}x+a_{n-1}$.

1.120

$$
\xlongequal{\text{展开}c_1}(-1)^{n+1}(x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)\begin{vmatrix} -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}_{(n-1)\text{阶}}
$$

$$
\begin{aligned}
&=(-1)^{n+1}(x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)(-1)^{n-1}\\
&=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.
\end{aligned}
$$

1.121

**解法二**. 设法把 $-1$ 全部变为 0, 得到一个下三角矩阵.

若 $x=0$, 则 $D_n=a_n$. 等式成立.

若 $x\neq 0$, 则

$$
D_n\xlongequal{c_2+\frac{1}{x}c_1}\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1}+\frac{a_n}{x} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal{c_3+\frac{1}{x}c_2}\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1}+\frac{a_n}{x} & a_{n-2}+\frac{a_{n-1}}{x}+\frac{a_n}{x^2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}
$$

1.122

$$
\xlongequal[j=4,5,\cdots,n]{c_j+\frac{1}{x}c_{j-1}}\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ a_n & a_{n-1}+\frac{a_n}{x} & a_{n-2}+\frac{a_{n-1}}{x}+\frac{a_n}{x^2} & \cdots & P_2 & P_1 \end{vmatrix}
$$

这里,

$$
\begin{aligned}
P_2&=a_2+\frac{a_3}{x}+\frac{a_4}{x^2}+\cdots+\frac{a_n}{x^{n-2}},\\
P_1&=x+a_1+\frac{a_2}{x}+\frac{a_3}{x^2}+\cdots+\frac{a_n}{x^{n-1}}.
\end{aligned}
$$

得到下三角阵, 所以

$$
D_n=x^{n-1}\cdot P_1=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.
$$

1.123

**解法三**. 用递归法证明. 展开 $c_1$ 得

$$
\begin{aligned}
D_n &= \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} \\
&= x \begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} a_n \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix} \\
&= xD_{n-1} + (-1)^{n+1} a_n (-1)^{n-1} \\
&= xD_{n-1} + a_n.
\end{aligned}
$$

所以, $D_n = xD_{n-1} + a_n$. 由此递归式得

$$D_n = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n.$$

1.124

**解法四**. 按最后一行展开. 先看 $a_{n-i}$ 的代数余子式. 因为

$$
D_n = \left|\begin{array}{ccccc:c:cccc}
x & -1 & & & & & & & & \\
 & x & -1 & & & & & & & \\
 & & x & \ddots & & & & & & \\
 & & & \ddots & -1 & & & & & \\
 & & & & x & -1 & & & & \\ \hdashline
 & & & & & x & -1 & & & \\
 & & & & & & x & \ddots & & \\
 & & & & & & & \ddots & -1 & \\
 & & & & & & & & x & -1 \\ \hdashline
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_{n-(i-1)} & a_{n-i} & a_{n-(i+1)} & & a_2 & x+a_1
\end{array}\right|
$$

划掉 $a_{n-i}$ 所在的行、所在的列, 则余下的 $n-1$ 阶行列式中: 左上角是 $i \times i$ 的方块, 右下角是 $(n-i-1) \times (n-i-1)$ 的方块, 余下全为 0.

则 $a_{n-i}$ 的代数余子式为 (注意到 $a_{n-i}$ 处在第 $n$ 行、第 $i+1$ 列) 1.125

$$
(-1)^{n+i+1} \begin{vmatrix} x & -1 & & & \\ & x & -1 & & \\ & & x & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 \\ & & & & x \end{vmatrix}_{i\text{阶}} \cdot \begin{vmatrix} -1 & & & \\ x & \ddots & & \\ & \ddots & -1 & \\ & & x & -1 \end{vmatrix}_{(n-i-1)\text{阶}} = x^i
$$

所以, $D_n$ 按最后一行展开, 得到

$$\begin{aligned} D_n &= a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + \cdots + a_{n-i}x^i + \cdots + a_2x^{n-2} + (x+a_1)x^{n-1} \\ &= x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n. \end{aligned}$$

1.126

**解法五**. 针对 $c_1$ 作变换.

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+xc_2} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x^2 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n + a_{n-1}x & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

1.127

$$\xlongequal{c_1+x^2c_3} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ x^3 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[j=4,5,\cdots,n]{c_1+x^{j-1}c_j} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ P & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix},$$

这里, $P = a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + \cdots + a_1x^{n-1} + x^n$. 再按第一列展开, 得

$$D_n = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

1.128

## 4 行列式计算的常见方法

- 宏观思路: 三角化、降阶法、递推法等;

- 微观手法: 行累加、主行消法、逐行消法、逐行相邻互换等;
- 非主流方法: 升阶、裂开等. 1.129

## 4.1 基本计算思路

### 三角化

化行列式为三角形是计算行列式的最基本思路. 通过观察行列式的特点, 利用行列式的性质将其作变形, 再将其化为三角形行列式. 1.130

*Example* 36. 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} n & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ n & n-1 & \cdots & 3 & 3 & 1 \\ n & n-1 & \cdots & 5 & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & 2n-3 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ 2n-1 & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

解: 各行只有副对角线元素不同. 将第 1 行乘以 $(-1)$ 加到第 $2, 3, \ldots, n$ 行, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} n & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & n-2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!.$$

1.131

*Example* 37. 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$.

解: 注意到从第 1 列开始, 每一列与它后一列中有 $n-1$ 个数相差 1. 依次进行列运算: $c_n - c_{n-1}$, $c_{n-1} - c_{n-2}$, $\cdots$, $c_2 - c_1$, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 3 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

1.132

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ 2 & 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & -n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_1+\frac{1}{n}r_i}\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{n}(1+\cdots+(n-1)) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ 2 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-1 & -n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

1.133

$$\xlongequal{\text{展开 } r_1}\frac{(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & -n & \cdots & 0 & 0 \\ -n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$= \frac{(n+1)}{2}\cdot(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\cdot(-n)^{n-1}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\frac{(n+1)}{2}\cdot n^{n-1}.$$

1.134

### 降阶法

按一行 (列) 展开, 或使用 Laplace 定理展开 (见本文附录), 使行列式降阶, 此方法统称为**降阶法**.

*Example* 38. 计算 $n$ 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}.$$

**解:** 按第一列展开,

$$D_n = a^n + (-1)^{n+1}b^n.$$

1.135

### 递推法

一般地, 递推方法是通过降阶等途径, 建立 $n$ 阶行列式 $D_n$ 和较它阶低的结构相同的行列式之间的关系, 并求得 $D_n$. 1.136

*Example* 39. 计算三对角行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & & & \\ 1 & a+b & ab & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & a+b & ab \\ & & & 1 & a+b \end{vmatrix}.$

**解:** 按第 1 列展开, 得

$$
\begin{aligned}
D_n = (a+b)D_{n-1} - &\begin{vmatrix}
ab & 0 & 0 & & & \\
1 & a+b & ab & & & \\
 & 1 & a+b & ab & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & 1 & a+b & ab \\
 & & & & 1 & a+b
\end{vmatrix} \\
= (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}. & \qquad (57)
\end{aligned}
$$

由 (57) 得到 1.137

$$D_n - bD_{n-1} = a(D_{n-1} - bD_{n-2}) = a^2(D_{n-2} - bD_{n-3}) = \cdots = a^{n-2}(D_2 - bD_1).$$

又 $D_1 = a+b$, $D_2 = a^2+b^2+ab$, 得

$$D_n - bD_{n-1} = a^n. \tag{58}$$

同理 (或由 $a$, $b$ 的对称性) 得

$$D_n - aD_{n-1} = b^n. \tag{59}$$

若 $a \neq b$, 联立 (58) 和 (59) 消去 $D_{n-1}$, 得

$$D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}.$$

若 $a = b$, 则 $D_n = aD_{n-1} + a^n$. 依此递推, 得 $D_n = (n+1)a^n$. 1.138

**注 1.** 与递推过程相反的方法是归纳. 如要计算 $n$ 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix}
3 & 2 & & & \\
1 & 3 & 2 & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & 1 & 3 & 2 \\
 & & & 1 & 3
\end{vmatrix},$$

因为 $D_1 = 3 = 2^2 - 1$, $D_2 = 7 = 2^3 - 1$, $D_3 = 15 = 2^4 - 1$. 因此, 猜想

$$D_n = 2^{n+1} - 1,$$

并利用数学归纳法易证此结论成立.

1.139

## 4.2 常用化简手法

总结上面例子有以下常用手法:

- 行累加, 即把行列式的某 $n-1$ 个行, 加到余下的一行. 当行列式的各行的和相同时常使用此技巧.

- 主行消法, 即某行的适当倍数, 加到其余的各行.
- 逐行消法, 即第 $i$ 行乘以 $k$ 加到第 $i+1$ 行, $i=n-1,n-2,\cdots,1$; 或第 $i+1$ 行乘以 $k$ 加到第 $i$ 行, $i=1,2,\cdots,n-1$.
- 逐行相邻互换.

☞ 这些方法都是行列式三种基本变换的 "高级形式". 1.140

*Example* 40. 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}.$$

解: 各列加到第一列, 再展开第一列, 得

$$D_n=(-1)^{n-1}\frac{(n+1)!}{2}.$$

1.141

## 4.3 辅助算法

### 升阶

将 $n$ 阶行列式添上一行、一列, 变为 $n+1$ 阶行列式再化简计算, 称为**升阶法**, 也称**加边法**.

☞ 其关键: 每行或每列是否有相同的元素. 1.142

*Example* 41. 计算 $n$ 阶行列式:

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1^2+1 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2+1 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n^2+1 \end{vmatrix}.$$

分析: 暂时不看主对角线上的 1, 则第 $i$ 行是 $x_i$ 与 $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ 相乘. 该行列式每行有相同的元素 $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$, 从而考虑加边法.

解:

$$D_n=\left|\begin{array}{c:cccc} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \hdashline 0 & x_1^2+1 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ 0 & x_2x_1 & x_2^2+1 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n^2+1 \end{array}\right|_{(n+1)\text{阶}}$$

1.143

$$\xlongequal[i=1,\cdots,n]{r_{i+1}-x_ir_1}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -x_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -x_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -x_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$\xlongequal[i=1,\cdots,n]{c_1+x_ic_{i+1}}\begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{n+1} = 1+\sum_{i=1}^{n}x_i^2.$$

☞ 升阶法最大的特点就是要找出每行或每列相同的元素, 把 1 及这些相同的元素作为新行列式的第一行, 那么升阶之后, 就可利用行列式的性质把绝大部分元素化为零, 从而简化计算. 1.144

## 裂开

将一个行列式裂开成 2 个 (或 2 个以上) 行列式来化简计算.

*Example* 42. 试证

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

**解:** 记左端行列式为 $D$, 利用行列式的性质, 将 $D$ 的第 1 列拆开得到两个行列式

$$D = \begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ q & r+p & p+q \\ y & z+x & x+y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ r & r+p & p+q \\ z & z+x & x+y \end{vmatrix}.$$

将第一个行列式中将第 3 列减去第 1 列, 在第 2 个行列式中将第 2 列减去第 1 列: 1.145

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} b & c+a & a \\ q & r+p & p \\ y & z+x & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & a+b \\ r & p & p+q \\ z & x & x+y \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} b & c & a \\ q & r & p \\ y & z & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & b \\ r & p & q \\ z & x & y \end{vmatrix} \\ &= 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

1.146

## 4.4 特殊行列式: Vandermonde 行列式

*Example* 43. 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1+1 & a_2+1 & \cdots & a_n+1 \\ a_1^2+a_1 & a_2^2+a_2 & \cdots & a_n^2+a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1}+a_1^{n-2} & a_2^{n-1}+a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1}+a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

解: 从第二行起, 各行减去上一行, 得范德蒙行列式, 故

$$D_n = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j).$$

1.147

*Example* 44. 计算行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix}.$$

解: 将第 $i$ 行提公因子 $i$, 得

$$D_n = n!\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix} = n!\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(i-j)$$

1.148

$$\begin{aligned} &= n!\,(2-1)(3-1)(4-1)\cdots(n-1) \\ &\qquad\qquad \cdot(3-2)(4-2)\cdots(n-2) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot\big(n-(n-1)\big) \\ &= n!\,(n-1)!\,(n-2)!\,\cdots 2!\,1!. \end{aligned}$$

1.149

**Exercise 45** (P35 习题 30)**.** 计算 $\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \cdots & a_1b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \cdots & a_2b_2^{n-1} & b_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \cdots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}.$

解: 1.150

$$\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \cdots & a_1b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \cdots & a_2b_2^{n-1} & b_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \cdots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_i \div a_i^n} a_1^n a_2^n \cdots a_{n+1}^n \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{b_1}{a_1} & (\dfrac{b_1}{a_1})^2 & \cdots & (\dfrac{b_1}{a_1})^n \\ 1 & \dfrac{b_2}{a_2} & (\dfrac{b_2}{a_2})^2 & \cdots & (\dfrac{b_2}{a_2})^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}} & (\dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}})^2 & \cdots & (\dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}})^n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{Vandermonde 行列式}]{n+1\text{ 阶}} a_1^n a_2^n \cdots a_{n+1}^n \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} \left( \frac{b_j}{a_j} - \frac{b_i}{a_i} \right)$$

$$= \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (a_i b_j - a_j b_i).$$

1.151

**Exercise 46** (P37 习题 44). 证明 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j)$.

证: 考虑 $n+1$ 阶 Vandermonde 行列式

$$V_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & y^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & y^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_n^n & y^n \end{vmatrix}$$

1.152

这里 $y^{n-1}$ 的余子式 $M_{n,n+1}$ 即所求的 $D_n$.

一方面, 由 Vandermonde 行列式的结果可知:

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= (y - x_1)(y - x_2) \cdots (y - x_n) \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j) \\ &= [y^n - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) y^{n-1} + \cdots + (-1)^n x_1 x_2 \cdots x_n] \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j). \end{aligned} \tag{60}$$

另一方面, 将 $V_{n+1}$ 按第 $n+1$ 列展开得:

$$V_{n+1} = 1 \cdot A_{1,n+1} + y \cdot A_{2,n+1} + \cdots + y^{n-1} \cdot A_{n,n+1} + y^n \cdot A_{n+1,n+1}. \qquad (61)$$

因 (60) 和 (61) 对应项的系数相等, 从而有:

$$A_{n,n+1} = -(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j).$$

注意到 $A_{n,n+1} = (-1)^{2n+1} M_{n,n+1} = -M_{n,n+1} = -D_n$, 所以:

$$D_n = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j).$$

1.153

## 5 习题讲解

**Exercise 47** (P38 习题 50)**.** 已知 $a^2 \neq b^2$, 证明方程组

$$\begin{cases}
ax_1 & & & + & & & bx_{2n} & = 1, \\
& ax_2 & & + & & bx_{2n-1} & & = 1, \\
& & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & & & \\
& & ax_n & + & bx_{n+1} & & & = 1, \\
& & bx_n & + & ax_{n+1} & & & = 1, \\
& & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & & & \\
& bx_2 & & + & & ax_{2n-1} & & = 1, \\
bx_1 & & & + & & & ax_{2n} & = 1,
\end{cases}$$

有唯一解, 并求解.

证: 由 $a^2 \neq b^2$ 可知, $a, b$ 不同时为 0. 若 $a \neq 0$, $b = 0$, 方程组有唯一解 $x_i = \dfrac{1}{a}$.
若 $a = 0$, $b \neq 0$, 方程组也有唯一解 $x_i = \dfrac{1}{b}$. 下面讨论 $a$, $b$ 均不为 0 的情形. 1.154

因为方程组的系数行列式

$$D_{2n} = \begin{vmatrix}
a & & & & & & & b \\
& a & & & & & b & \\
& & \ddots & & & \iddots & & \\
& & & a & b & & & \\
& & & b & a & & & \\
& & \iddots & & & \ddots & & \\
& b & & & & & a & \\
b & & & & & & & a
\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=0,1,\cdots,n-1]{r_{2n-i}-\frac{b}{a}r_{1+i}}\begin{vmatrix} a &&&&&& b \\ & a &&&& b & \\ && \ddots && \iddots && \\ &&& a \quad b &&& \\ &&& 0 \quad \frac{a^2-b^2}{a} &&& \\ && \iddots && \ddots && \\ & 0 &&&& \frac{a^2-b^2}{a} & \\ 0 &&&&&& \frac{a^2-b^2}{a} \end{vmatrix}$$

$$=(a^2-b^2)^n \neq 0.$$

所以方程组有唯一解. 1.155

由第 1 个方程和第 $2n$ 个方程

$$\begin{cases} ax_1+bx_{2n}=1, \\ bx_1+ax_{2n}=1, \end{cases}$$

可得:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}}=\frac{a-b}{a^2-b^2}=\frac{1}{a+b}, \qquad x_{2n}=\frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}}=\frac{a-b}{a^2-b^2}=\frac{1}{a+b}.$$

同理, 由第 2 个方程和第 $2n-1$ 个方程得 $x_2=x_{2n-1}=\dfrac{1}{a+b}$, $\cdots$, 由第 $n$ 个方程和第 $n+1$ 个方程可以求出 $x_n=x_{n+1}=\dfrac{1}{a+b}$.

所以方程组的解为

$$x_i=\frac{1}{a+b}, \quad i=1,2,\cdots,2n.$$

1.156

*Example* 48. 计算 $D_{2n}=\begin{vmatrix} a_n && 0 && b_n \\ & \ddots && \iddots & \\ 0 && \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{matrix} && 0 \\ & \iddots && \ddots & \\ c_n && 0 && d_n \end{vmatrix}$.

1.157

解: 方法一. 将 $c_{2n}$ 作 $2n-2$ 次列的相邻对换, 移到第二列; 再将 $r_{2n}$ 作 $2n-2$

次行的相邻对换, 移到第二行, 得

$$D_{2n} = (-1)^{2n-2}(-1)^{2n-2}\left|\begin{array}{cc:cccccc} a_n & b_n & & & & & & \\ c_n & d_n & & & & & & \\ \hdashline & & a_{n-1} & & & & & b_{n-1} \\ & & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & & a_1 & b_1 & & \\ & & & & c_1 & d_1 & & \\ & & & \iddots & & & \ddots & \\ & & c_{n-1} & & & & & d_{n-1} \end{array}\right|$$

$$= (a_n d_n - b_n c_n) D_{2(n-1)},$$

又 $n=1$ 时 $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} = a_1 d_1 - b_1 c_1$, 所以

$$D_{2n} = (a_n d_n - b_n c_n) \cdots (a_1 d_1 - b_1 c_1) = \prod_{i=1}^{n} (a_i d_i - b_i c_i).$$

1.158

方法二.

$$D_{2n} \xlongequal{\text{展开 } r_1} a_n \begin{vmatrix} a_{n-1} & & 0 & & b_{n-1} & 0 \\ & \ddots & & \iddots & & \\ 0 & & \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{matrix} & & 0 & \vdots \\ & \iddots & & \ddots & & \\ c_{n-1} & & 0 & & d_{n-1} & 0 \\ 0 & & \cdots & & 0 & d_n \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{2n+1} b_n \begin{vmatrix} 0 & a_{n-1} & & 0 & & b_{n-1} \\ & & \ddots & & \iddots & \\ 0 & \vdots & & \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{matrix} & & 0 \\ & & \iddots & & \ddots & \\ 0 & c_{n-1} & & & & d_{n-1} \\ c_n & 0 & & 0 & & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{展开 } r_{2n-1}} a_n d_n D_{2n-2} - b_n c_n D_{2n-2}.$$

由此得递推公式: 1.159

$$D_{2n} = (a_n d_n - b_n c_n) D_{2n-2},$$

即

$$D_{2n} = \prod_{i=2}^{n} (a_i d_i - b_i c_i) D_2.$$

而 $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} = a_1d_1 - b_1c_1$, 得

$$D_{2n} = \prod_{i=1}^{n}(a_id_i - b_ic_i).$$

方法三. 用 Laplace 定理 (定理叙述见本文附录). 选取第 1 行、第 $2n$ 行展 1.160
开, 注意到由这两行构成的 2 阶子式只有 $\begin{vmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{vmatrix}$ 有可能不为 0, 得

$$\begin{aligned} D_{2n} &= (-1)^{(1+2n)+(1+2n)} \begin{vmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{n-1} & & & 0 & & & b_{n-1} \\ & \ddots & & & & \iddots & \\ & & a_1 & & b_1 & & \\ 0 & & & & & & 0 \\ & & c_1 & & d_1 & & \\ & \iddots & & & & \ddots & \\ c_{n-1} & & & 0 & & & d_{n-1} \end{vmatrix} \\ &= (a_nd_n - b_nc_n)D_{2(n-1)} \\ &= \prod_{i=1}^{n}(a_id_i - b_ic_i). \end{aligned}$$

1.161

**Exercise 49** (27)**.** 计算 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$.

解:

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2 \leftrightarrow c_4} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = (a_1a_4 - b_1b_4)(a_2a_3 - b_2b_3).$$

1.162

*Example* 50. 设

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix},$$

$D$ 的 $(i, j)$ 元的代数余子式记作 $A_{ij}$, 求

$$A_{31} + 3A_{32} - 2A_{33} + 2A_{34}.$$

**解:** 在任何行列式中, 仅改变 $a_{ij}$ 的取值, 不会改变其对应的代数余子式 $A_{ij}$. 形如

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ * & * & * & * \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

的行列式, 其第 3 行元素的代数余子式, 都是相同的. 所以 1.163

$$A_{31}+3A_{32}-2A_{33}+2A_{34}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}=24.$$

☞ 代数余子式 $A_{ij}$, 与 $a_{ij}$ 的取值无关. 1.164

*Example* 51. 计算 $D_n=\det(a_{ij})$, 其中 $a_{ij}=|i-j|$.

**解:** 由 $a_{ij}=|i-j|$ 得

$$D_n=\det(a_{ij})=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & n-5 & \cdots & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=1,2,\cdots]{r_i-r_{i+1}}\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

1.165

$$\xlongequal[j=2,3,\cdots]{c_j+c_1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -2 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -2 & -2 & -2 & \cdots & 0 \\ n-1 & 2n-3 & 2n-4 & 2n-5 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}.$$

1.166

*Example* 52. 设 $n$ 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$, 把 $D$ 上下翻转、或逆时针旋转 90°、或依副对角线翻转, 依次得

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix},$$

证明 $D_1=D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D$, $D_3=D$. 1.167

**证:**

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix} \xlongequal[\text{使 } r_n \text{ 换到第一行}]{n-1\text{ 次行的相邻互换}} (-1)^{n-1}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{使 } r_n \text{ 换到第二行}]{n-2\text{ 次行的相邻互换}} (-1)^{n-1}(-1)^{n-2}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{31} & \cdots & a_{3n} \end{vmatrix}=\cdots$$

$$=(-1)^{n-1}(-1)^{n-2}\cdots(-1)\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)}D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D.$$

同理可证 1.168

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{上下翻转}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D^{\mathrm{T}}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D.$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{左右翻转}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D_2$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D$$

$$=(-1)^{n(n-1)}D=D.$$

1.169

*Example* 53. 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & a \end{vmatrix},$$

其中对角线上元素都是 $a$, 未写出的元素都是 0.

解: 方法一. 将 $r_n$ 作 $n-2$ 次行的相邻对换, 移到第 2 行:

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = (-1)^{n-2} \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \end{vmatrix}$$

将 $c_n$ 作 $n-2$ 次列的相邻对换, 移到第二列: 1.170

$$\begin{aligned} D_n &= (-1)^{n-2}(-1)^{n-2} \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a \end{vmatrix}_{(n-2)} \\ &= (a^2-1)a^{n-2}. \end{aligned}$$

方法二. 1.171

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} \\ &\xlongequal{\text{展开 } c_1} a \begin{vmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{vmatrix}_{(n-1)} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \boxed{1} \\ a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a & 0 \end{vmatrix}_{(n-1)} \\ &\xlongequal{\text{展开 } r_1} a^n + (-1)^{n+1}(-1)^{(n-1)+1} \begin{vmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{vmatrix}_{(n-2)} \\ &= a^n - a^{n-2}. \end{aligned}$$

1.172

*Example* 54. 计算 $D_{n+1} = \begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$. (提示: 利用范德蒙德行列式的结果. )

**解:** 把行列式上下翻转: 从第 $n+1$ 行开始, 第 $n+1$ 行经过 $n$ 次相邻对换, 换到第 1 行; 新的第 $n+1$ 行 (原式中的第 $n$ 行) 经 $(n-1)$ 次对换换到第 2 行. 反复此过程, 经 $n+(n-1)+\cdots+1=\frac{n(n+1)}{2}$ 次行交换, 得 1.173

$$D_{n+1}=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix},$$

此为 $n+1$ 阶范德蒙德行列式.

对照范德蒙德行列式的写法, 记 $a=x_1$, $a-1=x_2$, $\cdots$, $a-(n-1)=x_n$, $a-n=x_{n+1}$. 即

$$x_i=a-(i-1),\ x_j=a-(j-1).$$

所以 1.174

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{n+1\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j) \\ &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{n+1\geqslant i>j\geqslant 1}\big[(a-i+1)-(a-j+1)\big] \\ &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{n+1\geqslant i>j\geqslant 1}\big[-(i-j)\big] \\ &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\times(-1)^{n+(n-1)+\cdots+1}\times\prod_{n+1\geqslant i>j\geqslant 1}(i-j) \\ &= \prod_{n+1\geqslant i>j\geqslant 1}(i-j). \end{aligned}$$

1.175

## 6 附录: 拉普拉斯 (Laplace) 定理

拉普拉斯[6]定理, 是行列式按一行展开公式的推广.

**Definition 55** ($k$ 阶子式, $k$ 阶余子式)**.** 在一个 $n$ 阶行列式 $D$ 中任意选定 $k$ 行 $k$ 列 ($k\leqslant n$).

- 位于这些行与列的交点上的 $k^2$ 个元素按原来的次序组成的一个 $k$ 阶行列式 $M$, 称为行列式 $D$ 的一个 $k$ **阶子式**.

[6]拉普拉斯 (Pierre-Simon Laplace, 1749 -1827), 法国著名科学家, 其研究工作对数学、统计学、物理学、天文学有着举足轻重的影响. 拉普拉斯被视为史上最伟大的科学家之一, 被称为是法国的牛顿. 他是拉普拉斯变换和拉普拉斯方程的发现者, 这些数学工具在数学物理的各个分支领域得到了广泛的应用. 拉普拉斯是 "三 L" 之一. 法国 18 世纪后期到 19 世纪初数学界有三个著名人物: 拉格朗日 (Lagrange)、拉普拉斯 (Laplace) 和勒让德 (Legendre). 因为他们三个姓氏的第一个字母为 "L", 又生活在同一时代, 所以被称为 "三 L". 拉普拉斯在 1806 年成为法兰西第一帝国的伯爵, 后于 1817 年受封为侯爵.

- 在 $D$ 中划去这 $k$ 行 $k$ 列后, 余下的元素按原来的次序组成的 $n-k$ 阶行列式 $M'$, 称为 $k$ 级子式 $M$ 的**余子式**.

从定义知, $M$ 也是 $M'$ 的余子式, 所以 $M$ 和 $M'$ 可以称为 $D$ 的一对互余的子式. 1.176

*Example* 56. 在 4 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

中选定第 1、3 行, 第 2、4 列得到一个 2 阶子式

$$M = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$M$ 的余子式为

$$M' = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

1.177

*Example* 57. 在 5 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

中

$$M = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{42} & a_{43} & a_{45} \end{vmatrix} \quad \text{与} \quad M' = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{51} & a_{54} \end{vmatrix}$$

是一对互余的余子式. 1.178

**Definition 58.** 设 $D$ 的 $k$ 级子式 $M$ 在 $D$ 中所在的行、列指标分别是 $i_1, i_2, \cdots, i_k; j_1, j_2, \cdots, j_k$. 则 $M$ 的余子式 $M'$ 前面加上符号 $(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}$ 后称为 $M$ 的**代数余子式**. 记为

$$A \triangleq (-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)} M'.$$

**Theorem 59** (Laplace 定理)**.** *行列式 $D$ 中任意取定 $k$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ 个行. 由这 $k$ 行元素所组成的一切 $k$ 级子式与它们的代数余子式的乘积的和, 等于行列式 $D$.*

设 $D$ 中取定 $k$ 行后得到的子式为 $M_1, M_2, \cdots, M_t$, 它们的代数余子式分别为 $A_1, A_2, \cdots, A_t$, 则

$$D = M_1A_1 + M_2A_2 + \cdots + M_tA_t.$$

1.179

例如, 在行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

中取定第一、二行, 得到六个 2 阶子式:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$
$$M_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \quad M_5 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad M_6 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

它们对应的代数余子式为

$$\begin{aligned} A_1 &= (-1)^{(1+2)+(1+2)}M_1' = M_1', & A_2 &= (-1)^{(1+2)+(1+3)}M_2' = -M_2', \\ A_3 &= (-1)^{(1+2)+(1+4)}M_3' = M_3', & A_4 &= (-1)^{(1+2)+(2+3)}M_4' = M_4', \\ A_5 &= (-1)^{(1+2)+(2+4)}M_5' = -M_5', & A_6 &= (-1)^{(1+2)+(3+4)}M_6' = M_6'. \end{aligned}$$

根据拉普拉斯定理 1.180

$$\begin{aligned} D &= M_1A_1 + M_2A_2 + \cdots + M_6A_6 \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &\quad + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &\quad - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-1) \times (-8) - 2 \times (-3) + 1 \times (-1) + 5 \times 1 - 6 \times 3 + (-7) \times 1 \\ &= 8 + 6 - 1 + 5 - 18 - 7 = -7. \end{aligned}$$

1.181

# 7 杂谈

## 行列式的几何意义

设有向量 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)$. 则它们的混合积 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$ 的绝对值, 等于这 3 个向量张成的平行六面体的体积 $V$. 当 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 构成右手系时, 混合积取正值; 构成左手系时, 混合积取负值.

这样可以定义这 3 个向量张成的平行六面体的**有向体积**: 当 3 个向量构成右手系时, 混合积取正值; 构成左手系时, 混合积取负值. 于是 3 个向量的混合积就等于这 3 个向量张成的平行六面体的有向体积. 这个有向体积的计算公式是

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

因此, **三阶行列式的值就是它的 3 个列向量张成的平行六面体的有向体积**. 相仿地, $n$ 阶行列式的值就是它的 $n$ 个列向量张成的平行多面体的有向体积.

行列式的性质 3(i) 说明: 如果其中一个向量变成原来的 $k$ 倍, 那么它的有向体积也成为原来的 $k$ 倍. 性质 3(ii) 说明: 如果其中一个向量能分解成两个向量之和, 那么它的有向体积也能分解成两部分之和. 性质 6 说明: 如果其中两个向量交换了位置, 那么相应地平行多面体改变了方向, 从而它的有向体积要改变符号. 1.182

## 线性方程组应用举例: 商品交换的经济模型

假设一个原始社会的部落中, 人们从事三种职业: 农业生产、手工业制作、缝制衣物. 最初, 假设部落中不存在货币制度, 所有的商品和服务均进行实物交换.

农民留他们收成的一半给自己、1/4 给手工业者, 另 1/4 给制衣工人. 手工业者将其产品平均分为三份, 每一类成员得到 1/3. 制衣工人将一半的衣物给农民, 并将剩余的一半平均分给手工业者和他们自己. 我们记这三类人为 F, M 和 C, 可得如下表格:

| | F | M | C |
|---|---|---|---|
| F | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ |
| M | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ |
| C | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ |

上述各列表示产品的分配, 各行是三种职业获得的产品比例.

当部落规模增大时, 实物交易系统就变得非常复杂, 因此, 部落决定使用货币系统. 问题是: 如何给三种产品定价, 才可以公平地实现当前的实物交易系统.

这个问题可以利用经济学家瓦西里·列昂季耶夫 (Wassily Leontief, 1906 – 1999) 提出的经济模型转化为线性方程组. 对这个模型, 我们令 $x_1$ 为所有农产品的价值, $x_2$ 为所有手工业品的价值, $x_3$ 为所有服装的价值. 由表格的第一行, 农民总共得到的产品价值为 $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3$. 如果这个系统是公平的, 那么农民获得的产品价值应等于农民生产的产品总价值 $x_1$. 即

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = x_1.$$

相仿地, 手工业者、制衣工人的生产和消费分配相等, 分别得到

$$\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = x_2,$$
$$\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = x_3.$$

由此得到齐次线性方程组

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{2}x_3&=0,\\
\frac{1}{4}x_1-\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{4}x_3&=0,\\
\frac{1}{4}x_1+\frac{1}{3}x_2-\frac{3}{4}x_3&=0.
\end{aligned}
$$

得到通解为 $(5k,3k,3k)$. 即变量 $x_1$, $x_2$, $x_3$ 应按下面的比例取值:

$$x_1:x_2:x_3=5:3:3.$$

这个简单的系统是列昂季耶夫生产—消费模型 (input-output model) 的例子. 该模型是我们理解经济体系的基础. 列昂季耶夫在 1973 年获诺贝尔经济学奖. 他的三个博士生也获得了这一奖项 (Paul Samuelson 1970, Robert Solow 1987, Vernon L. Smith 2002).

有趣的是, 这个模型和 Google 搜索的 Pagerank 算法模型, 其实是一样的. 在第 5 章我们会解释该算法. 1.183