

线性代数 B (A 卷解答)

1、(10 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 问 A 是否可逆? 如可逆求 A^{-1} , 如不可逆, 求 A 的伴随

矩阵 A^* .

$$\text{解 } |A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad A \text{ 不可逆}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

2、(10 分) 已知矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 可交换, 试求 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ 的值.

解 由 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 可交换, 得 $a_2 = b_3 = 1, b_1 = a_3 = 2, a_1 = b_2 = 3$.

$$\text{所求行列式为 } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 18$$

3、(10 分) 向量 α 在基 $\alpha_1 = (1, 1, 1)$, $\alpha_2 = (0, 1, 1)$, $\alpha_3 = (1, -1, 1)$ 下的坐标 $(4, 2, -2)$, 求 α 在基 $\beta_1 = (1, 2, 2)$, $\beta_2 = (1, 0, 2)$, $\beta_3 = (2, 0, 2)$ 下的坐标.

解 法一 由 $\alpha = 4\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3$ 令 $\alpha = x\beta_1 + y\beta_2 + z\beta_3$ 则有:

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = x\beta_1 + y\beta_2 + z\beta_3, \text{ 得 } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

它有唯一解: $(x_1, x_2, x_3) = (4, -2, 0)$. 故 α 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标为: $(4, -2, 0)$

法二 由 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3$, $\beta_3 = \alpha_3 + \alpha_1$

有题设知 $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = x(\alpha_1 + \alpha_2) + y(\alpha_2 + \alpha_3) + z(\alpha_3 + \alpha_1)$

$$\text{故有 } \begin{cases} x + z = 4 \\ x + y = 2 \\ y + z = -2 \end{cases} \quad \text{解得: } \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \\ z = 0 \end{cases}$$

故 α 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标为: $(4, -2, 0)$

4、(12 分) 设 3 阶方阵 A 的特征值分别为 $1, -1, 0$, 方阵 $B = 2A^2 - 3A - 4E$

1) 试求矩阵 B 的特征值及与 B 相似的对角矩阵; 2) 验证 B 可逆, 并求 B^{-1} 的特征值及行列式 $|B^{-1}|$ 之值。

解 1) B 的特征值分别为 $u_1 = -5; u_2 = 1; u_3 = -4$ 与 B 相似的对角矩阵为 $\Lambda = \begin{pmatrix} -5 & & \\ & 1 & \\ & & -4 \end{pmatrix}$

2) $|B| = (-5) \times 1 \times (-4) = 20 \neq 0$ 故 B 可逆。 B^{-1} 的 3 个特征值分别为 $-\frac{1}{5}, 1, -\frac{1}{4}$

$$|B^{-1}| = -\frac{1}{5} \times 1 \times (-\frac{1}{4}) = \frac{1}{20}$$

5、(10 分) 设 $\alpha_1 = (2, 1, 3, 1), \alpha_2 = (1, 2, 0, 1), \alpha_3 = (-1, 1, -3, 0), \alpha_4 = (1, 1, 1, 1)$, 求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个最大无关组, 并用最大无关组线性表示该组中其它向量。

解 设 $A = [\alpha_1' \ \alpha_2' \ \alpha_3' \ \alpha_4']$, 对 A 作初等行变换: $A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 是该向量组的一个最大无关组, 且有 $\alpha_3 = -\alpha_1 + \alpha_2 + 0\alpha_4$

6、(10 分) 设二次型 $f = x_1^2 + 2x_2^2 + (1-k)x_3^2 + 2kx_1x_2 + 2x_1x_3$ 其中 k 为参数, 确定 k 的取值范围使 f 为正定的。

解 $A = \begin{bmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1-k \end{bmatrix}$ 由 $\Delta_1 = 1 > 0 \quad \Delta_2 = 2 - k^2 > 0 \quad \Delta_3 = |A| = k(k-2)(k+1) > 0$

可得 $-1 < k < 0$

7、(10 分) 设 A 是 4×4 矩阵且 A 的秩为 2, B 是 4×1 的非零矩阵, 若 a_1, a_2, a_3 是方程组 $AX = B$ 的解向量, 且设 $a_1 = (1, 1, 1, 1)^T, a_1 + a_2 = (1, 2, 3, 4)^T, a_2 + a_3 = (1, 0, 4, 3)^T$, 求方程组 $AX = B$ 的通解。

解 记 $b_1 = a_2 - a_1 = (a_1 + a_2) - 2a_1 = (-1, 0, 1, 2), b_2 = a_3 - a_1 = (a_2 + a_3) - (a_1 + a_2) = (0, -2, 1, -1),$

则 $Ab_1 = 0, Ab_2 = 0$, 且 b_1, b_2 线性无关。又 A 的秩为 2, 故 $AX = B$ 的通解为:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 b_1 + k_2 b_2 + a_1 = k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, (k_1, k_2 \in R)$$

8、(12 分) 已知方程组 (I) $\begin{cases} x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + bx_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + cx_4 = 1 \end{cases}$ 与方程组 (II) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$ 同

解, 试确定 a, b, c 之值。

解 方程组(II)的 $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

$\therefore X = k_1 \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 将特解 $\eta_0 = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 代入(I)入得到 $\begin{cases} 6-4a-1=1 \\ 12-4-b=4 \\ 12-8-3=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=4 \end{cases}$

令 $k_1 = -1$ 将 $X = \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 代入(I)

$2+3-c=1 \Rightarrow c=4 \quad \therefore a=1, b=4, c=4.$

9、(10分) 用正交变换化二次型 $f = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_2$ 为标准形, 并写出所用正交变换及 f 的标准形。

解 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$

$e_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), e_2 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T, e_3 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^T$

经正交变换 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ f 化为标准形: $y_2^2 + 3y_3^2$

10、(6分) 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ 是 R^n 中 $n-1$ 线性无关的向量, β_i 与 $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ 均正交 ($i=1, 2$), 证明: β_1, β_2 线性相关。

证明 因为 $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \beta_1, \beta_2$ 是 $n+1$ 个 n 维向量, 故必线性相关, 存在 $k_1, \dots, k_{n-1}, \ell_1, \ell_2$ 使

得 $k_1\alpha_1 + \dots + k_{n-1}\alpha_{n-1} + \ell_1\beta_1 + \ell_2\beta_2 = 0 \quad \dots\dots(1)$

因 $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ 线性无关, 故 ℓ_1, ℓ_2 不全为 0 用 $\ell_1\beta_1 + \ell_2\beta_2$ 与 (1) 式两边作内积得

$[\ell_1\beta_1 + \ell_2\beta_2, \ell_1\beta_1 + \ell_2\beta_2] = 0$ 故 $\ell_1\beta_1 + \ell_2\beta_2 = 0, \ell_1, \ell_2$ 不全为 0, β_1, β_2 线性相关。