离散数学 第8章 命题逻辑

Discrete Mathematics

黄 正 华

Email: huangzh@whu.edu.cn

武汉大学 数学与统计学院

November 18, 2012

数理逻辑简介

- 研究人的思维形式和规律的科学称为逻辑学. 由于研究的对象和方法各有侧重而又分为
  - 形式逻辑
  - 辩证逻辑
  - 数理逻辑

数理逻辑简介

- 研究人的思维形式和规律的科学称为逻辑学. 由于研究的对象和方法各有侧重而又分为
  - 形式逻辑
  - 辨证逻辑
  - 数理逻辑
- 数理逻辑是运用数学方法研究推理的科学.
  - 数理逻辑又叫符号逻辑, 因为它的主要工具是符号体系.
  - 数理逻辑的核心是把逻辑推理符号化, 即变成象数学演算一样的逻辑演算.

数理逻辑简介

- 研究人的思维形式和规律的科学称为逻辑学. 由于研究的对象和方法各有侧重而又分为
  - 形式逻辑
  - 辨证逻辑
  - 数理逻辑
- 数理逻辑是运用数学方法研究推理的科学.
  - 数理逻辑又叫符号逻辑, 因为它的主要工具是符号体系.
  - 数理逻辑的核心是把逻辑推理符号化, 即变成象数学演算一样的逻辑演算.
- 在本课程中主要介绍命题逻辑和谓词逻辑.

关于逻辑的故事

一人在寻找真理, 别人问他: “你真的不知道真理是什么吗? ” 那个人说: “当然! ”

别人又问: “你既然不知道真理是什么, 当你找到真理的时候, 你又如何辨别出来呢? 如果你辨别得出真理与否, 那说明你已经知道了真理是什么, 又何来寻找呢? ”

上帝真的是万能的吗?[1]

让我们来提出一个问题: 上帝是否能创造出一块连自己都举不起来的石头?

[1] 此问题与宗教或信仰无关. 这里我们只谈及逻辑.

关于逻辑的故事

上帝真的是万能的吗?[1]

让我们来提出一个问题: 上帝是否能创造出一块连自己都举不起来的石头?

如果上帝创造出了一块连他自己都举不起来的石头, 那么上帝就不是万能的,

[1]此问题与宗教或信仰无关. 这里我们只谈及逻辑.

关于逻辑的故事

上帝真的是万能的吗?[1]

让我们来提出一个问题: 上帝是否能创造出一块连自己都举不起来的石头?

如果上帝创造出了一块连他自己都举不起来的石头, 那么上帝就不是万能的, 因为有一块石头他举不起来.

[1] 此问题与宗教或信仰无关. 这里我们只谈及逻辑.

上帝真的是万能的吗?[1]

让我们来提出一个问题: 上帝是否能创造出一块连自己都举不起来的石头?

如果上帝创造出了一块连他自己都举不起来的石头, 那么上帝就不是万能的, 因为有一块石头他举不起来.

如果上帝不能创造出一块连他自己都举不起来的石头, 那么上帝也不是万能的,

[1]此问题与宗教或信仰无关. 这里我们只谈及逻辑.

关于逻辑的故事

上帝真的是万能的吗?[1]

让我们来提出一个问题: 上帝是否能创造出一块连自己都举不起来的石头?

如果上帝创造出了一块连他自己都举不起来的石头, 那么上帝就不是万能的, 因为有一块石头他举不起来.

如果上帝不能创造出一块连他自己都举不起来的石头, 那么上帝也不是万能的, 因为有一块石头他创造不出来.

[1] 此问题与宗教或信仰无关. 这里我们只谈及逻辑.

关于逻辑的故事

上帝真的是万能的吗?[1]

让我们来提出一个问题: 上帝是否能创造出一块连自己都举不起来的石头?

如果上帝创造出了一块连他自己都举不起来的石头, 那么上帝就不是万能的, 因为有一块石头他举不起来.

如果上帝不能创造出一块连他自己都举不起来的石头, 那么上帝也不是万能的, 因为有一块石头他创造不出来.

所以无论上帝是否能创造出这么一块石头, 他都不是万能的.

[1]此问题与宗教或信仰无关. 这里我们只谈及逻辑.

关于逻辑的故事

据传, 古希腊有一个叫欧提勒士的年轻人, 向当时著名的智者普罗达哥拉斯学习法律. 双方签了一个合同, 结束学业之后, 学生付给老师一半学费, 另一半学费则要等到学生第一次出庭打赢官司, 再支付.

关于逻辑的故事

据传, 古希腊有一个叫欧提勒士的年轻人, 向当时著名的智者普罗达哥拉斯学习法律. 双方签了一个合同, 结束学业之后, 学生付给老师一半学费, 另一半学费则要等到学生第一次出庭打赢官司, 再支付.

可是学生一直没有打赢官司, 剩下的一半学费老师迟迟没有拿到. 老师终于等不及了, 就向法庭起诉, 要学生支付另一半学费.

关于逻辑的故事

据传, 古希腊有一个叫欧提勒士的年轻人, 向当时著名的智者普罗达哥拉斯学习法律. 双方签了一个合同, 结束学业之后, 学生付给老师一半学费, 另一半学费则要等到学生第一次出庭打赢官司, 再支付.

可是学生一直没有打赢官司, 剩下的一半学费老师迟迟没有拿到. 老师终于等不及了, 就向法庭起诉, 要学生支付另一半学费.

老师说: “如果你打赢这场官司, 依照合同, 你得把另一半学费付给我; 如果你打输这场官司, 那么根据法庭判决, 你也得把另一半学费付给我. 所以, 不管你这场官司是赢是输, 你都要把学费给我.”

关于逻辑的故事

据传, 古希腊有一个叫欧提勒士的年轻人, 向当时著名的智者普罗达哥拉斯学习法律. 双方签了一个合同, 结束学业之后, 学生付给老师一半学费, 另一半学费则要等到学生第一次出庭打赢官司, 再支付.

可是学生一直没有打赢官司, 剩下的一半学费老师迟迟没有拿到. 老师终于等不及了, 就向法庭起诉, 要学生支付另一半学费.

老师说: "如果你打赢这场官司, 依照合同, 你得把另一半学费付给我; 如果你打输这场官司, 那么根据法庭判决, 你也得把另一半学费付给我. 所以, 不管你这场官司是赢是输, 你都要把学费给我."

学生反驳道: "如果我打输这场官司, 依照合同, 我不需要把另一半学费付给你; 如果我打赢这场官司, 那么根据法庭判决, 我也不需要把另一半学费付给你. 所以, 不管我这场官司是赢是输, 我都不需要把学费给你."

关于逻辑的故事

逻辑推理俱乐部门口贴着一张布告:“欢迎你加入推理俱乐部! 只要你通过推理取得一张申请表, 就可以获得会员资格了!”

只见桌子上摆着两个盒子: 一个圆盒子, 一个方盒子.

圆盒子上写着一句话:“申请表不在此盒中”. 方盒子上写着一句话:“这两句话中只有一句是真话”.

那么申请表在哪个盒子里呢?

关于逻辑的故事

逻辑推理俱乐部门口贴着一张布告:“欢迎你加入推理俱乐部! 只要你通过推理取得一张申请表, 就可以获得会员资格了!”

只见桌子上摆着两个盒子: 一个圆盒子, 一个方盒子.

圆盒子上写着一句话:“申请表不在此盒中”. 方盒子上写着一句话:“这两句话中只有一句是真话”.

那么申请表在哪个盒子里呢?

- 设方盒子上写的话 (“这两句话中只有一句是真话”) 是真的, 推出圆盒子上的话 (“申请表不在此盒中”) 是假的. 推出申请表在圆盒子中.

逻辑推理俱乐部门口贴着一张布告:“欢迎你加入推理俱乐部! 只要你通过推理取得一张申请表, 就可以获得会员资格了!”

只见桌子上摆着两个盒子: 一个圆盒子, 一个方盒子.

圆盒子上写着一句话:“申请表不在此盒中”. 方盒子上写着一句话:“这两句话中只有一句是真话”.

那么申请表在哪个盒子里呢?

- 设方盒子上写的话 (“这两句话中只有一句是真话”) 是真的, 推出圆盒子上的话 (“申请表不在此盒中”) 是假的. 推出申请表在圆盒子中.
- 设方盒子上的话 (“这两句话中只有一句是真话”) 是假的, 推出圆盒子上的话也是假的. 推出申请表在圆盒子中.

关于逻辑的故事

逻辑推理俱乐部门口贴着一张布告:"欢迎你加入推理俱乐部! 只要你通过推理取得一张申请表, 就可以获得会员资格了!"

只见桌子上摆着两个盒子: 一个圆盒子, 一个方盒子.

圆盒子上写着一句话:"申请表不在此盒中". 方盒子上写着一句话:"这两句话中只有一句是真话".

那么申请表在哪个盒子里呢?

- 设方盒子上写的话 ("这两句话中只有一句是真话") 是真的, 推出圆盒子上的话 ("申请表不在此盒中") 是假的. 推出申请表在圆盒子中.
- 设方盒子上的话 ("这两句话中只有一句是真话") 是假的, 推出圆盒子上的话也是假的. 推出申请表在圆盒子中.
- 或者方盒子上的话是真的, 或者方盒子上的话是假的. 总之, 申请表在圆盒子中.

数理逻辑的简单历史 —— 三个阶段

0. Aristotle: 形式逻辑 (古典逻辑).
1. 初始阶段: (1660s — 19 世纪末) 将数学应用于逻辑 (Leibniz, George Boole, De Morgan). ▸ Leibniz
2. 过度阶段: (19 世纪末 — 1940 前后) 逻辑应用于数学.
3. 成熟阶段: (1930s — 1970s) 成为数学的独立分支.

1. 命题及其符号化
   - 命题与命题变元
   - 命题联结词
2. 命题公式
3. 范式及其应用
4. 命题演算的推理理论

命题 (propositions *or* statements)

- 命题是非真即假的陈述句.
  - 首先判定它是否为陈述句;
  - 其次判断它是否有惟一的真值.

命题 (propositions *or* statements)

- 命题是非真即假的陈述句.
  - 首先判定它是否为陈述句;
  - 其次判断它是否有惟一的真值.
- 真值只有两个: 真或假[a]. 记作 True 和 False. 分别用符号 **T** 和 **F** 表示. (也经常分别用 1 和 0 表示.)

[a] 只有说法 “真值为真” 或 “真值为假” —— 没有 “假值” 一说.

Example 1.1

判断下列句子是否为命题.

1. 4 是素数.
2. $\sqrt{2}$ 是无理数.
3. x 大于 y.
4. 外太空有生命.
5. 明年元旦武汉是晴天.
6. π 大于 $\sqrt{2}$ 吗?
7. 请不要吸烟!
8. 我正在说假话.

Example 1.1

判断下列句子是否为命题.

1. 4 是素数.
2. $\sqrt{2}$ 是无理数.
3. x 大于 y.
4. 外太空有生命.
5. 明年元旦武汉是晴天.
6. π 大于 $\sqrt{2}$ 吗? ✗
7. 请不要吸烟! ✗
8. 我正在说假话.

Example 1.1

判断下列句子是否为命题.

1. 4 是素数. ✔
2. $\sqrt{2}$ 是无理数. ✔
3. x 大于 y.
4. 外太空有生命.
5. 明年元旦武汉是晴天.
6. π 大于 $\sqrt{2}$ 吗? ✗
7. 请不要吸烟! ✗
8. 我正在说假话.

Example 1.1

判断下列句子是否为命题.

1. 4 是素数. ✓
2. $\sqrt{2}$ 是无理数. ✓
3. x 大于 y. ✗
4. 外太空有生命.
5. 明年元旦武汉是晴天.
6. π 大于 $\sqrt{2}$ 吗? ✗
7. 请不要吸烟! ✗
8. 我正在说假话.

Example 1.1

判断下列句子是否为命题.

1. 4 是素数. ✔
2. $\sqrt{2}$ 是无理数. ✔
3. x 大于 y. ✗
4. 外太空有生命. ✔
5. 明年元旦武汉是晴天.
6. π 大于 $\sqrt{2}$ 吗? ✗
7. 请不要吸烟! ✗
8. 我正在说假话.

Example 1.1

判断下列句子是否为命题.

1. 4 是素数. ✔
2. $\sqrt{2}$ 是无理数. ✔
3. x 大于 y. ✗
4. 外太空有生命. ✔
5. 明年元旦武汉是晴天. ✔
6. π 大于 $\sqrt{2}$ 吗? ✗
7. 请不要吸烟! ✗
8. 我正在说假话.

Example 1.1

判断下列句子是否为命题.

1. 4 是素数. ✔
2. $\sqrt{2}$ 是无理数. ✔
3. x 大于 y. ✗
4. 外太空有生命. ✔
5. 明年元旦武汉是晴天. ✔
6. π 大于 $\sqrt{2}$ 吗? ✗
7. 请不要吸烟! ✗
8. 我正在说假话. (悖论) ✗

简单命题 & 复合命题

根据命题的构成形式, 可以将命题分为:

- 简单命题: 只由一个主语和一个谓语构成的最简单的陈述句, 称为简单命题, 或原子命题或原子 (atoms).
- 复合命题: 由原子命题和命题联结词构成. 也称为分子命题.

简单命题 & 复合命题

根据命题的构成形式, 可以将命题分为:

- 简单命题: 只由一个主语和一个谓语构成的最简单的陈述句, 称为简单命题, 或原子命题或原子 (atoms).
- 复合命题: 由原子命题和命题联结词构成. 也称为分子命题.

Example 1.2

- "明天下雪"、"4 是素数" 都是原子命题.
- "明天下雪或明天下雨" 是复合命题.

命题的符号化

- 可以用以下两种形式将命题符号化:
  - 用大写字母;
    例如, P: 今天天气晴好.
  - 用数字.
    例如, [17]: 今天天气晴好.
- 上述的 P 和 [17] 称为命题标识符.

命题常量, 命题变元, 指派

- 命题常量 (proposition constants)

  —— 表示具体命题的命题标识符.

  例如, P: 今天天气晴好. 则 P 是命题常量.

- 命题变元 (proposition variable)

  —— 未指定具体命题、可以代表任意命题的命题标识符.

  比如讨论运算规律时使用的命题标识符.

  命题变元不是命题.

- 指派 (assignments)

  —— 命题变元用一个特定命题取代, 从而成为一个命题, 这个过程称为对命题变元进行指派. 集合 $\{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$ 是命题变元的值域.

联结词

$$\boxed{原子命题 + 联结词 = 复合命题}$$

联结词是复合命题的重要组成部分, 又称为逻辑运算符.

常用的有五种:

- 否定 $\neg$
- 合取 $\wedge$
- 析取 $\vee$
- 蕴含 $\rightarrow$
- 等价 $\leftrightarrow$

否定 $\neg$

Definition 1.3 (否定 (negation))

- 设 P 为命题, 则 P 的否定是一个新的命题, 记为 $\neg P$, 读做 “非 P”.

否定 $\neg$

Definition 1.3 (否定 (negation))

- 设 P 为命题, 则 P 的否定是一个新的命题, 记为 $\neg P$, 读做 “非 P”.
- 若 P 为 **T**, 则 $\neg P$ 为 **F**; 若 P 为 **F**, 则 $\neg P$ 为 **T**.

否定 $\neg$

Definition 1.3 (否定 (negation))

- 设 P 为命题, 则 P 的否定是一个新的命题, 记为 $\neg P$, 读做 "非 P".
- 若 P 为 **T**, 则 $\neg P$ 为 **F**; 若 P 为 **F**, 则 $\neg P$ 为 **T**.

P	$\neg P$
T	**F**
F	**T**

合取 $\wedge$

Definition 1.4 (合取 (conjunction))

- 如果 P 和 Q 是命题, 那么 "P 并且 Q" 也是命题, 记为 $P \wedge Q$, 或 $P \times Q$ 称为 P 与 Q 的合取, 读做 "P 与 Q" 或 "P 并且 Q".
- $P \wedge Q$ 真值为 **T**, 当且仅当 P 和 Q 真值都为 **T**.

合取 $\wedge$

Definition 1.4 (合取 (conjunction))

- 如果 P 和 Q 是命题, 那么 “P 并且 Q” 也是命题, 记为 $P \wedge Q$, 或 $P \times Q$ 称为 P 与 Q 的合取, 读做 “P 与 Q” 或 “P 并且 Q”.
- $P \wedge Q$ 真值为 **T**, 当且仅当 P 和 Q 真值都为 **T**.

P	Q	$P \wedge Q$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**F**
F	**F**	**F**

Example 1.5

设 P: 这些都是男生;

则 $\neg P$: 这些不都是男生.

Example 1.5

设 P: 这些都是男生;

则 $\neg P$: 这些不都是男生.

(不能写成 "这些都不是男生". Why?)

Example 1.5

设 P: 这些都是男生;

则 $\neg P$: 这些不都是男生.

(不能写成 “这些都不是男生”. Why?)

Example 1.6

P: 2 是素数, Q: 2 是偶数;

则 $P \wedge Q$: 2 是素数, 并且是偶数.

析取 $\vee$

Definition 1.7 (析取 (disjunction))

- 如果 P 和 Q 是命题, 那么 "P 或 Q" 也是命题, 记为 $P \vee Q$, 或 $P + Q$ 称为 P 与 Q 的析取, 读做 "P 或 Q".
- $P \vee Q$ 真值为 **T**, 当且仅当 P 或 Q 至少有一个真值为 **T**.

P	Q	$P \vee Q$
T	**T**	**T**
T	**F**	**T**
F	**T**	**T**
F	**F**	**F**

析取 $\vee$

Definition 1.7 (析取 (disjunction))

- 如果 P 和 Q 是命题, 那么 "P 或 Q" 也是命题, 记为 $P \vee Q$, 或 $P + Q$ 称为 P 与 Q 的析取, 读做 "P 或 Q".
- $P \vee Q$ 真值为 **T**, 当且仅当 P 或 Q 至少有一个真值为 **T**.

P	Q	$P \vee Q$
T	**T**	**T**
T	**F**	**T**
F	**T**	**T**
F	**F**	**F**

☞"或" 的语意: "可兼或", "排斥或"(也称异或, 不可兼或), 表示大概、大约.

“可兼或”(inclusive-or) 和 “排斥或”(exclusive-or)

Example 1.8

将下列命题符号化:

1. 张三爱唱歌或爱听音乐;
2. 张三在 202 房间或 203 房间.

Example 1.8

将下列命题符号化:

1. 张三爱唱歌或爱听音乐;
2. 张三在 202 房间或 203 房间.

解: (1) 设 P: 张三爱唱歌, Q: 张三爱听音乐;

这里的 "或" 是 "可兼或", 也称为 "相容或", 即两者可以同时为真, 因此可以符号化为 $P \vee Q$.

Example 1.8

将下列命题符号化:

1. 张三爱唱歌或爱听音乐;
2. 张三在 202 房间或 203 房间.

解: (2) 设 U: 张三在 202 房间, V: 张三在 203 房间.

如果也符号化为 $U \vee V$, 张三就同时在两个房间, 这违背题意. 这里的"或"是"排斥或".

要达到只能在一个房间的要求, 可用多个联结词符号化为

$$(U \wedge \neg V) \vee (\neg U \wedge V)$$

return

“可兼或”(inclusive-or) 和 “排斥或”(exclusive-or)

Example 1.8

将下列命题符号化:

1. 张三爱唱歌或爱听音乐;
2. 张三在 202 房间或 203 房间.

☞ 析取指的是 “可兼或”.

Example 1.9

将下列命题符号化:

1. 小王是跳远冠军或百米赛跑冠军.
2. 小王在宿舍或在图书馆.
3. 选小王或小李中的一人当班长.

Example 1.9

将下列命题符号化:

1. 小王是跳远冠军或百米赛跑冠军.
2. 小王在宿舍或在图书馆.
3. 选小王或小李中的一人当班长.

解:

1. $P \vee Q$. (可兼或)
   其中 P: 小王是跳远冠军. Q: 小王是百米赛跑冠军.

Example 1.9

将下列命题符号化:

1. 小王是跳远冠军或百米赛跑冠军.
2. 小王在宿舍或在图书馆.
3. 选小王或小李中的一人当班长.

解:

1. $P \vee Q$. (可兼或)
   其中 P: 小王是跳远冠军. Q: 小王是百米赛跑冠军.
2. $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$. (排斥或)
   其中 P: 小王在宿舍. Q: 小王在图书馆.

Example 1.9

将下列命题符号化:

1. 小王是跳远冠军或百米赛跑冠军.
2. 小王在宿舍或在图书馆.
3. 选小王或小李中的一人当班长.

解:

1. $P \vee Q$. (可兼或)
   其中 P: 小王是跳远冠军. Q: 小王是百米赛跑冠军.
2. $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$. (排斥或)
   其中 P: 小王在宿舍. Q: 小王在图书馆.
3. $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$. (排斥或)
   其中 P: 选小王为班长. Q: 选小李当班长.

蕴含 $\rightarrow$

Definition 1.10 (蕴含 (implication))

- 给定两个命题 P 和 Q, 其蕴含命题是一个复合命题, 记作 $P \rightarrow Q$, 读作 "P 蕴含 Q" 或 "如果 P, 那么 Q" 或 "若 P, 则 Q".
- 当且仅当 P 的真值为 **T**, Q 的真值为 **F** 时, $P \rightarrow Q$ 的真值为 **F**.
- 称 P 为前件(或前题), Q 为后件(或结论).

蕴含 $\rightarrow$

Definition 1.10 (蕴含 (implication))

- 给定两个命题 P 和 Q, 其蕴含命题是一个复合命题, 记作 $P \rightarrow Q$, 读作 "P 蕴含 Q" 或 "如果 P, 那么 Q" 或 "若 P, 则 Q".
- 当且仅当 P 的真值为 **T**, Q 的真值为 **F** 时, $P \rightarrow Q$ 的真值为 **F**.
- 称 P 为前件(或前题), Q 为后件(或结论).

P	Q	$P \rightarrow Q$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**T**
F	**F**	**T**

关于 $P \to Q$ 真值表的注解

- 在自然语言中, "如果 P, 那么 Q" 中的前件 P 与后件 Q 往往具有某种内在联系. 而在数理逻辑中, P 与 Q 可以无任何内在联系.

关于 $P \rightarrow Q$ 真值表的注解

- 在自然语言中, "如果 P, 那么 Q" 中的前件 P 与后件 Q 往往具有某种内在联系. 而在数理逻辑中, P 与 Q 可以无任何内在联系. 例如:
  ☞ 如果雪是黑的, 那么太阳从西方出来.

关于 $P \to Q$ 真值表的注解

- 在自然语言中, "如果 P, 那么 Q" 中的前件 P 与后件 Q 往往具有某种内在联系. 而在数理逻辑中, P 与 Q 可以无任何内在联系. 例如:

  ☞ 如果雪是黑的, 那么太阳从西方出来.

- 在数学或其它自然科学中, "如果 P, 那么 Q" 往往表达的是前件 P 为真, 后件 Q 也为真的推理关系.

  但在数理逻辑中, 作为一种 "善意推定" 的规定, 当 P 为假时, 无论 Q 是真是假, $P \to Q$ 均为真.

关于 $P \to Q$ 真值表的注解

- 在自然语言中, “如果 P, 那么 Q” 中的前件 P 与后件 Q 往往具有某种内在联系. 而在数理逻辑中, P 与 Q 可以无任何内在联系. 例如:

  ☞ 如果雪是黑的, 那么太阳从西方出来.

- 在数学或其它自然科学中, “如果 P, 那么 Q” 往往表达的是前件 P 为真, 后件 Q 也为真的推理关系.

  但在数理逻辑中, 作为一种 “善意推定” 的规定, 当 P 为假时, 无论 Q 是真是假, $P \to Q$ 均为真.

  也就是说, 只有 P 为 **T** 并且 Q 为 **F** 这一种情况, 才能使得复合命题 $P \to Q$ 为 **F**.

关于 $P \to Q$ 真值表的注解

- 在自然语言中, “如果 P, 那么 Q” 中的前件 P 与后件 Q 往往具有某种内在联系. 而在数理逻辑中, P 与 Q 可以无任何内在联系. 例如:

  ☞ 如果雪是黑的, 那么太阳从西方出来.

- 在数学或其它自然科学中, “如果 P, 那么 Q” 往往表达的是前件 P 为真, 后件 Q 也为真的推理关系.

  但在数理逻辑中, 作为一种 “善意推定” 的规定, 当 P 为假时, 无论 Q 是真是假, $P \to Q$ 均为真.

  也就是说, 只有 P 为 **T** 并且 Q 为 **F** 这一种情况, 才能使得复合命题 $P \to Q$ 为 **F**.

  ☞ 什么是 “善意的推定”?

善意的推定

Example 1.11

张三对李四说: “若我去图书馆, 我一定帮你借那本书”.

可以将这句话表示为命题 $P \to Q$ (P: 张三去图书馆, Q: 张三借那本书).

善意的推定

Example 1.11

张三对李四说: “若我去图书馆, 我一定帮你借那本书”.

可以将这句话表示为命题 $P \to Q$ (P: 张三去图书馆, Q: 张三借那本书).

后来张三因有事未去图书馆, 即 P 为 **F**, 此时按规定 $P \to Q$ 为 **T**.

善意的推定

Example 1.11

张三对李四说: “若我去图书馆, 我一定帮你借那本书”.

可以将这句话表示为命题 $P \to Q$ (P: 张三去图书馆, Q: 张三借那本书).

后来张三因有事未去图书馆, 即 P 为 **F**, 此时按规定 $P \to Q$ 为 **T**.

我们可理解为张三讲了真话, 即他要是去图书馆, 我们相信他一定会为李四借书.

善意的推定

Example 1.11

张三对李四说: “若我去图书馆, 我一定帮你借那本书”.

可以将这句话表示为命题 $P \to Q$ (P: 张三去图书馆, Q: 张三借那本书).

后来张三因有事未去图书馆, 即 P 为 **F**, 此时按规定 $P \to Q$ 为 **T**.

我们可理解为张三讲了真话, 即他要是去图书馆, 我们相信他一定会为李四借书.

这就是所谓 “善意的推定”.

Example 1.12

将下列命题符号化:

1. 只要天不下雨, 我就骑自行车上班.
2. 只有天不下雨, 我才骑自行车上班.

Example 1.12

将下列命题符号化:

1. 只要天不下雨, 我就骑自行车上班.
2. 只有天不下雨, 我才骑自行车上班.

解: 设 P: 天下雨, Q: 我骑自行车上班.

1. $$\neg P \to Q.$$

   (天不下雨是骑车上班的充分条件.)

Example 1.12

将下列命题符号化:

1. 只要天不下雨, 我就骑自行车上班.
2. 只有天不下雨, 我才骑自行车上班.

解: 设 P: 天下雨, Q: 我骑自行车上班.

1. $$\neg P \to Q.$$
   (天不下雨是骑车上班的充分条件.)
2. $$Q \to \neg P, \text{或 } P \to \neg Q.$$
   (如果骑自行车上班, 一定是天不下雨.)

Example 1.13

将下列命题符号化:

1. 除非今天天气好, 否则我不会去公园.
2. 我将去镇上, 仅当我有时间.

Example 1.13

将下列命题符号化:

1. 除非今天天气好, 否则我不会去公园.
2. 我将去镇上, 仅当我有时间.

解: ① 含义: 我去公园必定是天气好, 至于天气好是否去公园, 在命题中没有涉及.

Example 1.13

将下列命题符号化:

1. 除非今天天气好, 否则我不会去公园.
2. 我将去镇上, 仅当我有时间.

解: ① 含义: 我去公园必定是天气好, 至于天气好是否去公园, 在命题中没有涉及.

设 P: 今天天气好. Q: 我去公园.

$$Q \to P.$$

Example 1.13

将下列命题符号化:

1. 除非今天天气好, 否则我不会去公园.
2. 我将去镇上, 仅当我有时间.

解: ① 含义: 我去公园必定是天气好, 至于天气好是否去公园, 在命题中没有涉及.

设 P: 今天天气好. Q: 我去公园.

$$Q \to P.$$

② 设 P: 我将去镇上. Q: 我有时间.

$$P \to Q.$$

注

以下句式均可符号化为 $P \to Q$:

- "如 P, 则 Q",
- "因为 P, 所以 Q",
- "只要 P, 就 Q",
- "P, 仅当 Q", (我将去镇上, 仅当我有时间时.)
- "只有 Q, 才 P", (只有天不下雨, 我才骑自行车上班.)
- "除非 Q, 才 P",
- "除非 Q, 否则非 P". (除非天气好, 否则我不会去公园的.)

等价 $\leftrightarrow$

Definition 1.14 (等价 (two-way-implication))

- 给定两个命题 P 和 Q, 其复合命题 $P \leftrightarrow Q$ 称作等价命题, 读作 "P 当且仅当 Q".
- $P \leftrightarrow Q$ 为 **T**, 当且仅当 P 和 Q 同时为 **T**, 或同时为 **F**.
- 等价联结词 "$\leftrightarrow$" 也可以记作 "$\rightleftarrows$" 或 "iff".

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**F**
F	**F**	**T**

Example 1.15

分析下列各命题的真值:

1. $2+2=4$, 当且仅当 3 是奇数.
2. $2+2=4$, 当且仅当 3 不是奇数.
3. $2+2\neq 4$, 当且仅当 3 是奇数.
4. $2+2\neq 4$, 当且仅当 3 不是奇数.

Example 1.15

分析下列各命题的真值:

1. $2+2=4$, 当且仅当 3 是奇数.
2. $2+2=4$, 当且仅当 3 不是奇数.
3. $2+2\neq 4$, 当且仅当 3 是奇数.
4. $2+2\neq 4$, 当且仅当 3 不是奇数.

解: 设 P: $2+2=4$. Q: 3 是奇数.

1. $P \leftrightarrow Q$, 真值为 **T**. (因 P, Q 皆为真);
2. $P \leftrightarrow \neg Q$, 真值为 **F**. (因 P 为真, $\neg Q$ 为假);
3. $\neg P \leftrightarrow Q$, 真值为 **F**. (因 $\neg P$ 为假, Q 为真);
4. $\neg P \leftrightarrow \neg Q$, 真值为 **T**. (因 $\neg P$, $\neg Q$ 皆为假).

Example 1.15

分析下列各命题的真值:

1. $2+2=4$, 当且仅当 3 是奇数.
2. $2+2=4$, 当且仅当 3 不是奇数.
3. $2+2\neq 4$, 当且仅当 3 是奇数.
4. $2+2\neq 4$, 当且仅当 3 不是奇数.

解: 设 P: $2+2=4$. Q: 3 是奇数.

1. $P \leftrightarrow Q$, 真值为 **T**. (因 P, Q 皆为真);
2. $P \leftrightarrow \neg Q$, 真值为 **F**. (因 P 为真, $\neg Q$ 为假);
3. $\neg P \leftrightarrow Q$, 真值为 **F**. (因 $\neg P$ 为假, Q 为真);
4. $\neg P \leftrightarrow \neg Q$, 真值为 **T**. (因 $\neg P$, $\neg Q$ 皆为假).

Example 1.15

分析下列各命题的真值:

1. $2+2=4$, 当且仅当 3 是奇数.
2. $2+2=4$, 当且仅当 3 不是奇数.
3. $2+2\neq 4$, 当且仅当 3 是奇数.
4. $2+2\neq 4$, 当且仅当 3 不是奇数.

解: 设 P: $2+2=4$. Q: 3 是奇数.

1. $P\leftrightarrow Q$, 真值为 **T**. (因 P, Q 皆为真);
2. $P\leftrightarrow \neg Q$, 真值为 **F**. (因 P 为真, $\neg Q$ 为假);
3. $\neg P\leftrightarrow Q$, 真值为 **F**. (因 $\neg P$ 为假, Q 为真);
4. $\neg P\leftrightarrow \neg Q$, 真值为 **T**. (因 $\neg P$, $\neg Q$ 皆为假).

Example 1.15

分析下列各命题的真值:

1. $2+2=4$, 当且仅当 3 是奇数.
2. $2+2=4$, 当且仅当 3 不是奇数.
3. $2+2\neq 4$, 当且仅当 3 是奇数.
4. $2+2\neq 4$, 当且仅当 3 不是奇数.

解: 设 P: $2+2=4$. Q: 3 是奇数.

1. $P\leftrightarrow Q$, 真值为 **T**. (因 P, Q 皆为真);
2. $P\leftrightarrow \neg Q$, 真值为 **F**. (因 P 为真, $\neg Q$ 为假);
3. $\neg P\leftrightarrow Q$, 真值为 **F**. (因 $\neg P$ 为假, Q 为真);
4. $\neg P\leftrightarrow \neg Q$, 真值为 **T**. (因 $\neg P$, $\neg Q$ 皆为假).

Example 1.16

设 P: 天下雨, Q: 草木枯黄. 则

$\neg P$: 天不下雨;

Example 1.16

设 P: 天下雨, Q: 草木枯黄. 则

$\neg P$: 天不下雨;

$\neg P \wedge Q$: 天不下雨并且草木枯黄;

Example 1.16

设 P: 天下雨, Q: 草木枯黄. 则

$\neg P$: 天不下雨;

$\neg P \wedge Q$: 天不下雨并且草木枯黄;

$\neg P \vee Q$: 天不下雨或草木枯黄;

Example 1.16

设 P: 天下雨, Q: 草木枯黄. 则

$\neg P$: 天不下雨;

$\neg P \wedge Q$: 天不下雨并且草木枯黄;

$\neg P \vee Q$: 天不下雨或草木枯黄;

$\neg P \to Q$: 如果天不下雨, 那么草木枯黄;

Example 1.16

设 P: 天下雨, Q: 草木枯黄. 则

$\neg P$: 天不下雨;

$\neg P \wedge Q$: 天不下雨并且草木枯黄;

$\neg P \vee Q$: 天不下雨或草木枯黄;

$\neg P \rightarrow Q$: 如果天不下雨, 那么草木枯黄;

$\neg P \leftrightarrow Q$: 天不下雨当且仅当草木枯黄.

小结

1. 命题是客观上能判明真假的陈述句. 当命题为真时, 称命题的真值为 “真”; 否则, 说命题的真值为 “假”.

小结

1. 命题是客观上能判明真假的陈述句. 当命题为真时, 称命题的真值为"真"; 否则, 说命题的真值为"假".
2. 析取联结词 $\vee$ 指的是"可兼或"; 而汉语中的"或", 既可以用于"可兼或", 也可用于"排斥或".

小结

1. 命题是客观上能判明真假的陈述句. 当命题为真时, 称命题的真值为 "真"; 否则, 说命题的真值为 "假".
2. 析取联结词 $\vee$ 指的是 "可兼或"; 而汉语中的 "或", 既可以用于 "可兼或", 也可用于 "排斥或".
3. 复合命题 $P \rightarrow Q$ 表示的逻辑关系是: Q 是 P 的必要条件, P 是 Q 的充分条件.
   - 在数学中, "如 P, 则 Q" 往往要求前件为真, 后者为真的推理关系.
   - 但在数理逻辑中规定: 当前件为假, 不论后件为真为假, 均有 $P \rightarrow Q$ 为真.

练习

多项选择:

1. 设 P: 天热. Q: 我去游泳. R: 我在家读书. 则命题 "如天热, 我去游泳, 否则在家读书." 的符号化结果是 (　　).

   (A) $(P \to Q) \lor (\neg P \to R)$;　　(B) $(P \to Q) \land (\neg P \to R)$;

   (C) $(P \land Q) \lor (\neg P \land R)$;　　(D) $(P \land Q) \land (\neg P \land R)$.

2. 设 P: 我上街. Q: 我有空闲时间. 则命题 "我上街, 仅当我有空闲时间." 的符号化结果是 (　　).

   (A) $P \to Q$;　(B) $Q \to P$;　(C) $\neg P \to \neg Q$;　(D) $\neg Q \to \neg P$.

3. 设 P: 我上街. Q: 我有空闲时间. 则命题 "除非我有空闲时间, 否则我不上街." 的符号化结果是 (　　).

   (A) $P \to Q$;　(B) $Q \to P$;　(C) $\neg P \to \neg Q$;　(D) $\neg Q \to \neg P$.

练习 (答案: ① A. ② A, D. ③ A, D.)

多项选择:

1. 设 P: 天热. Q: 我去游泳. R: 我在家读书. 则命题 "如天热, 我去游泳, 否则在家读书." 的符号化结果是 (   ).

   (A) $(P \to Q) \vee (\neg P \to R)$; (B) $(P \to Q) \wedge (\neg P \to R)$;

   (C) $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)$; (D) $(P \wedge Q) \wedge (\neg P \wedge R)$.

2. 设 P: 我上街. Q: 我有空闲时间. 则命题 "我上街, 仅当我有空闲时间." 的符号化结果是 (   ).

   (A) $P \to Q$; (B) $Q \to P$; (C) $\neg P \to \neg Q$; (D) $\neg Q \to \neg P$.

3. 设 P: 我上街. Q: 我有空闲时间. 则命题 "除非我有空闲时间, 否则我不上街." 的符号化结果是 (   ).

   (A) $P \to Q$; (B) $Q \to P$; (C) $\neg P \to \neg Q$; (D) $\neg Q \to \neg P$.

1 命题及其符号化

2 命题公式

- 命题公式及其真值
- 命题公式的等值式
- 命题公式的逻辑蕴含式
- 全功能联结词集合

3 范式及其应用

4 命题演算的推理理论

命题公式

Definition 2.1 (命题公式 (合式公式))

以下条款规定了命题公式 (proposition formula) 的含义:

(1) 真值 0, 1 是命题公式;

(2) 命题常元、命题变元是命题公式;

(3) 如果 A 是命题公式, 那么 $\neg A$ 也是命题公式;

(4) 如果 A 和 B 是命题公式, 那么 $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$, $(A \leftrightarrow B)$ 都是命题公式;

(5) 只有有限次地应用 (1)~(4) 构成的符号串, 才是命题公式.

命题公式又称为合式公式 (Wff, Well formed formula).

Example 2.2

- 下列公式都是命题公式:

$$\neg(P \wedge Q)$$

$$\neg(P \to Q)$$

$$\big(P \to (P \vee \neg Q)\big)$$

$$\Big(\big((P \to Q) \wedge (Q \to R)\big) \leftrightarrow (S \leftrightarrow T)\Big)$$

- 下列都不是命题公式:

$$(P \to Q) \to (\wedge Q)$$

$$\big(P \to Q, (P \wedge Q) \to Q\big)$$

Example 2.2

- 下列公式都是命题公式:

$$\neg(P \wedge Q)$$

$$\neg(P \rightarrow Q)$$

$$\big(P \rightarrow (P \vee \neg Q)\big)$$

$$\Big(\big((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)\big) \leftrightarrow (S \leftrightarrow T)\Big)$$

- 下列都不是命题公式:

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow (\wedge Q)$$

$$(P \rightarrow Q, (P \wedge Q) \rightarrow Q)$$

约定: 最外层的圆括号可以省略.

联结词运算的秩序

- 运算符结合力的强弱顺序约定为: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.
  - 没有括号时按强弱先后顺序执行.
  - 相同运算符按从左至右顺序执行, 括号可省去.
    例如, $A \vee (B \vee C)$ 与 $A \vee B \vee C$ 运算顺序一样.
  - 最外层的括号总可以省去.
    例如, $(A \wedge B)$ 常写为 $A \wedge B$.
- 要养成"先 $\wedge$ 后 $\vee$" 的习惯.

联结词运算的秩序

- 运算符结合力的强弱顺序约定为: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.
  - 没有括号时按强弱先后顺序执行.
  - 相同运算符按从左至右顺序执行, 括号可省去.
    例如, $A \vee (B \vee C)$ 与 $A \vee B \vee C$ 运算顺序一样.
  - 最外层的括号总可以省去.
    例如, $(A \wedge B)$ 常写为 $A \wedge B$.
- 要养成"先 $\wedge$ 后 $\vee$" 的习惯.

Example 2.3

例如, 下列两式的运算顺序完全一样:

$$\big((\neg P \vee \neg S) \vee (\neg Q \wedge R)\big) \rightarrow \big((R \vee P) \vee Q\big) \tag{1}$$

$$\neg P \vee \neg S \vee \neg Q \wedge R \rightarrow R \vee P \vee Q \tag{2}$$

命题的翻译

命题符号化应注意以下几点:

- 确定句子是否为命题;
- 正确表示原子命题和选择命题联结词;
- 要按逻辑关系翻译而不能凭字面翻译. 例如翻译:
  - Tom 和 Jerry 是好朋友.
  - 蓝色和黄色可以调配成绿色.

命题的翻译

命题符号化应注意以下几点:

- 确定句子是否为命题;
- 正确表示原子命题和选择命题联结词;
- 要按逻辑关系翻译而不能凭字面翻译. 例如翻译:
  - Tom 和 Jerry 是好朋友.
  - 蓝色和黄色可以调配成绿色.

命题符号化应注意以下几点:

- 确定句子是否为命题;
- 正确表示原子命题和选择命题联结词;
- 要按逻辑关系翻译而不能凭字面翻译. 例如翻译:
    - Tom 和 Jerry 是好朋友.
    - 蓝色和黄色可以调配成绿色.

命题的翻译

Example 2.4

符号化下列命题:

1. 张三不是不聪明, 而是不用功.
2. 李文与李武是兄弟.
3. 除非你努力, 否则你将失败.
4. 如果我上街, 我就去书店看看, 除非我很累.

命题的翻译

Example 2.4

符号化下列命题:

1. 张三不是不聪明, 而是不用功.
2. 李文与李武是兄弟.
3. 除非你努力, 否则你将失败.
4. 如果我上街, 我就去书店看看, 除非我很累.

解: ① $\neg P \wedge Q$,

其中 P: 张三不聪明. Q: 张三不用功.

命题的翻译

Example 2.4

符号化下列命题:

1. 张三不是不聪明, 而是不用功.
2. 李文与李武是兄弟.
3. 除非你努力, 否则你将失败.
4. 如果我上街, 我就去书店看看, 除非我很累.

解: ② P,

P: 李文与李武是兄弟. (原子命题.)

命题的翻译

Example 2.4

符号化下列命题:

1. 张三不是不聪明, 而是不用功.
2. 李文与李武是兄弟.
3. 除非你努力, 否则你将失败.
4. 如果我上街, 我就去书店看看, 除非我很累.

解: ③ $\neg P \to Q$,

其中 P: 你努力. Q: 你将失败.

Example 2.4

符号化下列命题:

1. 张三不是不聪明, 而是不用功.
2. 李文与李武是兄弟.
3. 除非你努力, 否则你将失败.
4. 如果我上街, 我就去书店看看, 除非我很累.

解: ④ $Q \to (\neg P \to R)$.

或者 $\neg P \to (Q \to R)$;

或者 $(\neg P \wedge Q) \to R$ 其中 P: 我很累. Q: 我上街. R: 我去书店看看.

真值表的构造

Example 2.5

构造 $\neg P \vee Q$ 的真值表.

解:

P	Q
T	**T**
T	**F**
F	**T**
F	**F**

真值表的构造

Example 2.5

构造 $\neg P \vee Q$ 的真值表.

解:

P	Q	$\neg P$
T	**T**	**F**
T	**F**	**F**
F	**T**	**T**
F	**F**	**T**

真值表的构造

Example 2.5

构造 $\neg P \vee Q$ 的真值表.

解:

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$
T	**T**	**F**	**T**
T	**F**	**F**	**F**
F	**T**	**T**	**T**
F	**F**	**T**	**T**

真值表的构造

Example 2.6

构造 $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$ 的真值表.

P	Q
T	**T**
T	**F**
F	**T**
F	**F**

真值表的构造

Example 2.6

构造 $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$ 的真值表.

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$
T	**T**	**T**	**F**
T	**F**	**F**	**T**
F	**T**	**F**	**T**
F	**F**	**F**	**T**

真值表的构造

Example 2.6

构造 $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$ 的真值表.

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$
T	**T**	**T**	**F**	**F**	**F**
T	**F**	**F**	**T**	**F**	**T**
F	**T**	**F**	**T**	**T**	**F**
F	**F**	**F**	**T**	**T**	**T**

真值表的构造

Example 2.6

构造 $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$ 的真值表.

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$
T	**T**	**T**	**F**	**F**	**F**	**F**
T	**F**	**F**	**T**	**F**	**T**	**T**
F	**T**	**F**	**T**	**T**	**F**	**T**
F	**F**	**F**	**T**	**T**	**T**	**T**

真值表的构造

Example 2.6

构造 $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$ 的真值表.

P	Q	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P \vee \neg Q$
T	**T**	**F**	**F**
T	**F**	**T**	**T**
F	**T**	**T**	**T**
F	**F**	**T**	**T**

真值表的构造

Example 2.6

构造 $\neg(P\wedge Q)\leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q)$ 的真值表.

P	Q	$\neg(P\wedge Q)$	$\neg P\vee\neg Q$	$\neg(P\wedge Q)\leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q)$
T	**T**	**F**	**F**	**T**
T	**F**	**T**	**T**	**T**
F	**T**	**T**	**T**	**T**
F	**F**	**T**	**T**	**T**

真值表的构造

Example 2.6

构造 $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$ 的真值表.

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$
T	**T**	**T**	**F**	**F**	**F**	**F**	**T**
T	**F**	**F**	**T**	**F**	**T**	**T**	**T**
F	**T**	**F**	**T**	**T**	**F**	**T**	**T**
F	**F**	**F**	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**

真值表的构造

Example 2.6

构造 $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$ 的真值表.

P	Q	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$
T	**T**	**F**	**F**	**T**
T	**F**	**T**	**T**	**T**
F	**T**	**T**	**T**	**T**
F	**F**	**T**	**T**	**T**

- $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$ 的真值全为真, 这类公式为永真公式, 记为 **T**. (另有永假公式, 记为 **F**.)

真值表的构造

Example 2.6

构造 $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$ 的真值表.

P	Q	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$
T	**T**	**F**	**F**	**T**
T	**F**	**T**	**T**	**T**
F	**T**	**T**	**T**	**T**
F	**F**	**T**	**T**	**T**

- $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$ 的真值全为真, 这类公式为永真公式, 记为 **T**. (另有永假公式, 记为 **F**.)
- $\neg(P \wedge Q)$ 与 $(\neg P \vee \neg Q)$ 的所有真值相同, 称二者是等价的.

公式的等价

Definition 2.7 (公式的等价)

若命题公式 A 和 B 的所有真值全都相同, 则称 A 和 B 等值或逻辑等价. 记作 $A \Leftrightarrow B$.

公式的等价

Definition 2.7 (公式的等价)

若命题公式 A 和 B 的所有真值全都相同, 则称 A 和 B 等值或逻辑等价. 记作 $A \Leftrightarrow B$.

注: $A \Leftrightarrow B$, 当且仅当 $A \leftrightarrow B$ 为永真公式.

如: $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$ 的真值全为真, 则

$$\neg(P \wedge Q) \quad \text{与} \quad (\neg P \vee \neg Q)$$

是等价的或逻辑相等. 反之亦然.

用真值表证明公式等价

Example 2.8

试证 $\neg P \vee Q \Leftrightarrow P \to Q$.

用真值表证明公式等价

Example 2.8

试证 $\neg P \vee Q \Leftrightarrow P \rightarrow Q$.

证: 列出真值表

用真值表证明公式等价

Example 2.8

试证 $\neg P \vee Q \Leftrightarrow P \rightarrow Q$.

证: 列出真值表

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$P \rightarrow Q$
T	**T**	**F**	**T**	**T**
T	**F**	**F**	**F**	**F**
F	**T**	**T**	**T**	**T**
F	**F**	**T**	**T**	**T**

Example 2.8

试证 $\neg P \vee Q \Leftrightarrow P \rightarrow Q$.

证: 列出真值表

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$P \rightarrow Q$
T	**T**	**F**	**T**	**T**
T	**F**	**F**	**F**	**F**
F	**T**	**T**	**T**	**T**
F	**F**	**T**	**T**	**T**

可知 $\neg P \vee Q$ 与 $P \rightarrow Q$ 真值相同, 所以 $\neg P \vee Q \Leftrightarrow P \rightarrow Q$.

用真值表证明公式等价

Example 2.8

试证 $\neg P \vee Q \Leftrightarrow P \to Q$.

证: 列出真值表

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$P \to Q$
T	**T**	**F**	**T**	**T**
T	**F**	**F**	**F**	**F**
F	**T**	**T**	**T**	**T**
F	**F**	**T**	**T**	**T**

可知 $\neg P \vee Q$ 与 $P \to Q$ 真值相同, 所以 $\neg P \vee Q \Leftrightarrow P \to Q$.

☞ 牢记本题结论: $P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$.

Example 2.9

证明 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$.

Example 2.9

证明 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$.

证: 列出真值表:

P	Q
T	**T**
T	**F**
F	**T**
F	**F**

Example 2.9

证明 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$.

证: 列出真值表:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**F**
F	**F**	**T**

Example 2.9

证明 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$.

证: 列出真值表:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$P \to Q$
T	**T**	**T**	**T**
T	**F**	**F**	**F**
F	**T**	**F**	**T**
F	**F**	**T**	**T**

Example 2.9

证明 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$.

证: 列出真值表:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
T	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**
T	**F**	**F**	**F**	**T**	**F**
F	**T**	**F**	**T**	**F**	**F**
F	**F**	**T**	**T**	**T**	**T**

Example 2.9

证明 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$.

证: 列出真值表:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$P \to Q$	$Q \to P$	$(P \to Q) \wedge (Q \to P)$
T	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**
T	**F**	**F**	**F**	**T**	**F**
F	**T**	**F**	**T**	**F**	**F**
F	**F**	**T**	**T**	**T**	**T**

$P \leftrightarrow Q$ 与 $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$ 真值相同, 得证二者等价.

Example 2.9

证明 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$.

证: 列出真值表:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$P \to Q$	$Q \to P$	$(P \to Q) \wedge (Q \to P)$
T	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**
T	**F**	**F**	**F**	**T**	**F**
F	**T**	**F**	**T**	**F**	**F**
F	**F**	**T**	**T**	**T**	**T**

$P \leftrightarrow Q$ 与 $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$ 真值相同, 得证二者等价.

☞ 记住这个简单的结论.

Example 2.10

证明 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$.

Example 2.10

证明 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$.

证: 列出真值表:

P	Q
T	**T**
T	**F**
F	**T**
F	**F**

Example 2.10

证明 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$.

证: 列出真值表:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**F**
F	**F**	**T**

Example 2.10

证明 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$.

证: 列出真值表:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
T	**T**	**T**	**T**
T	**F**	**F**	**F**
F	**T**	**F**	**F**
F	**F**	**T**	**T**

Example 2.10

证明 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$.

证: 列出真值表:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
T	**T**	**T**	**T**
T	**F**	**F**	**F**
F	**T**	**F**	**F**
F	**F**	**T**	**T**

$P \leftrightarrow Q$ 与 $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ 真值相同, 得证二者等价.

Example 2.10

证明 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$.

证: 列出真值表:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
T	**T**	**T**	**T**
T	**F**	**F**	**F**
F	**T**	**F**	**F**
F	**F**	**T**	**T**

$P \leftrightarrow Q$ 与 $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ 真值相同, 得证二者等价.

☞ 建议记住这个结论: 这是 $\leftrightarrow$ 向 $\vee, \wedge$ 的转化式.

常用的等价公式:

对合律	$\neg\neg P \Leftrightarrow P$	1
幂等律	$P \vee P \Leftrightarrow P,\ P \wedge P \Leftrightarrow P$	2
结合律	$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$ $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$	3
交换律	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P,\quad P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$	4
分配律	$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	5
吸收律	$P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P,\quad P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$	6
德・摩根律	$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$ $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$	7
同一律	$P \vee \mathbf{F} \Leftrightarrow P,\ P \wedge \mathbf{T} \Leftrightarrow P$	8
零律	$P \vee \mathbf{T} \Leftrightarrow \mathbf{T},\ P \wedge \mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{F}$	9
否定律	$P \vee \neg P \Leftrightarrow \mathbf{T},\ P \wedge \neg P \Leftrightarrow \mathbf{F}$	10

常用等价公式的记忆

- 从含义上理解记忆.
- 对比集合的运算律记忆.

分配律	$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$P \cup (Q \cap R) = (P \cup Q) \cap (P \cup R)$ $P \cap (Q \cup R) = (P \cap Q) \cup (P \cap R)$
吸收律	$P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$ $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$	$P \cup (P \cap Q) = P$ $P \cap (P \cup Q) = P$
德 · 摩根律	$\neg (P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$ $\neg (P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$	$\sim (P \cup Q) = \sim P \cap \sim Q$ $\sim (P \cap Q) = \sim P \cup \sim Q$

- 同一律、零律、否定律中的 **F**, **T** 可分别对比集合中的空集 $\varnothing$, 全集.

Example 2.11

证明 $(P \to Q) \wedge (Q \to P) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$. (不使用真值表.)

Example 2.11

证明 $(P \to Q) \land (Q \to P) \Leftrightarrow (P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)$. (不使用真值表.)

证:

$$
\begin{aligned}
& (P \to Q) \land (Q \to P) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \lor Q) \land (\neg Q \lor P)
\end{aligned}
$$

Example 2.11

证明 $(P \to Q) \land (Q \to P) \Leftrightarrow (P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)$. (不使用真值表.)

证:

$$
\begin{aligned}
& (P \to Q) \land (Q \to P) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \lor Q) \land (\neg Q \lor P) \\
\Leftrightarrow\ & \big((\neg P \lor Q) \land \neg Q\big) \lor \big((\neg P \lor Q) \land P\big)
\end{aligned}
$$

Example 2.11

证明 $(P \to Q) \wedge (Q \to P) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$. (不使用真值表.)

证:

$$
\begin{aligned}
& (P \to Q) \wedge (Q \to P) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P) \\
\Leftrightarrow\ & \big((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q\big) \vee \big((\neg P \vee Q) \wedge P\big) \\
\Leftrightarrow\ & \big((\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg Q)\big) \vee \big((\neg P \wedge P) \vee (Q \wedge P)\big)
\end{aligned}
$$

Example 2.11

证明 $(P \to Q) \wedge (Q \to P) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$. (不使用真值表.)

证:

$$
\begin{aligned}
& (P \to Q) \wedge (Q \to P) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P) \\
\Leftrightarrow\ & \big((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q\big) \vee \big((\neg P \vee Q) \wedge P\big) \\
\Leftrightarrow\ & \big((\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg Q)\big) \vee \big((\neg P \wedge P) \vee (Q \wedge P)\big) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge \neg Q) \vee \mathbf{F} \vee \mathbf{F} \vee (Q \wedge P)
\end{aligned}
$$

Example 2.11

证明 $(P \to Q) \wedge (Q \to P) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$. (不使用真值表.)

证:

$$
\begin{aligned}
& (P \to Q) \wedge (Q \to P) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P) \\
\Leftrightarrow\ & \big((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q\big) \vee \big((\neg P \vee Q) \wedge P\big) \\
\Leftrightarrow\ & \big((\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg Q)\big) \vee \big((\neg P \wedge P) \vee (Q \wedge P)\big) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge \neg Q) \vee \mathbf{F} \vee \mathbf{F} \vee (Q \wedge P) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge P)
\end{aligned}
$$

置换

Definition 2.12

如果 X 是合式公式 A 的一部分, 且 X 本身也是一个合式公式,
则称 X 为公式 A 的子公式.

置换

Definition 2.12

如果 X 是合式公式 A 的一部分, 且 X 本身也是一个合式公式,
则称 X 为公式 A 的子公式.

Theorem 2.13 (置换规则 Rule of Replacement)

设 X 是合式公式 A 的子公式, 且 $X \Leftrightarrow Y$.
将 A 中的 X 用 Y 来置换, 得到新的公式 B. 则 $A \Leftrightarrow B$.

置换

Definition 2.12

如果 X 是合式公式 A 的一部分, 且 X 本身也是一个合式公式,
则称 X 为公式 A 的子公式.

Theorem 2.13 (置换规则 Rule of Replacement)

设 X 是合式公式 A 的子公式, 且 $X \Leftrightarrow Y$.
将 A 中的 X 用 Y 来置换, 得到新的公式 B. 则 $A \Leftrightarrow B$.

即, 如果

$$\underbrace{X \wedge P \vee Q \cdots}_{A} \xrightarrow{X \Leftrightarrow Y} \underbrace{Y \wedge P \vee Q \cdots}_{B}$$

则 $A \Leftrightarrow B$.

例如

- 在 $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$ 中以 $A \wedge B$ 代 P 得

$$(A \wedge B) \vee Q \Leftrightarrow Q \vee (A \wedge B)$$

例如

- 在 $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$ 中以 $A \wedge B$ 代 P 得

$$(A \wedge B) \vee Q \Leftrightarrow Q \vee (A \wedge B)$$

- 或以 $\neg C$ 代 P, 同时, 以 $\neg A \wedge B$ 代 Q 得

$$\neg C \vee (\neg A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge B) \vee \neg C$$

重言式 (tautology)

Definition 2.14 (重言式 (tautology))

重言式即永真公式: 无论对分量作怎样的指派, 其对应的真值永为 **T**.

重言式 (tautology)

Definition 2.14 (重言式 (tautology))

重言式即永真公式: 无论对分量作怎样的指派, 其对应的真值永为 $\mathbf{T}$.

例如, $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$ 是重言式.

重言式 (tautology)

Definition 2.14 (重言式 (tautology))

重言式即永真公式: 无论对分量作怎样的指派, 其对应的真值永为 **T**.

例如, $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$ 是重言式.

注

- 任何两个重言式的合取或析取, 仍然是一个重言式.
  (A 为 **T**, B 为 **T**, A 与 B 析取 (或合取) 仍为 **T**.)

重言式 (tautology)

Definition 2.14 (重言式 (tautology))

重言式即永真公式: 无论对分量作怎样的指派, 其对应的真值永为 **T**.

例如, $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$ 是重言式.

注

- 任何两个重言式的合取或析取, 仍然是一个重言式.
  (A 为 **T**, B 为 **T**, A 与 B 析取 (或合取) 仍为 **T**.)
- 一个重言式, 对同一分量都用任何 Wff 置换, 其结果仍为一重言式.
  (因为重言式的真值与分量的指派无关.)

矛盾式 (contradiction *or* absurdity)

- 矛盾式即永假公式, 记为 **F**.

矛盾式 (contradiction *or* absurdity)

- 矛盾式即永假公式, 记为 **F**.
  - 任何两个矛盾式的合取或析取, 仍然是一个矛盾式.
  - 一个矛盾式, 对同一分量都用任何 Wff 置换, 其结果仍为一矛盾式.

重言式 v.s 等价

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$
T	**T**	**T**	**F**	**F**	**F**	**F**	**T**
T	**F**	**F**	**T**	**F**	**T**	**T**	**T**
F	**T**	**F**	**T**	**T**	**F**	**T**	**T**
F	**F**	**F**	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**

- $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$.
- $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$ 是重言式.

重言式 v.s 等价

P	Q	$P\wedge Q$	$\neg(P\wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P\vee\neg Q$	$\neg(P\wedge Q)\leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q)$
T	**T**	**T**	**F**	**F**	**F**	**F**	**T**
T	**F**	**F**	**T**	**F**	**T**	**T**	**T**
F	**T**	**F**	**T**	**T**	**F**	**T**	**T**
F	**F**	**F**	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**

- $\neg(P\wedge Q)\Leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q)$.
- $\neg(P\wedge Q)\leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q)$ 是重言式.

Theorem 2.15

设 A, B 是两个 *Wff*. $A\Leftrightarrow B$ 当且仅当 $A\leftrightarrow B$ 为一个重言式.

蕴含式

Definition 2.16

当且仅当命题公式 $P \to Q$ 为重言式时, 称 " P 蕴含 Q", 记为 $P \Rightarrow Q$, 它又称为逻辑蕴含式 (logically implication).

蕴含式

Definition 2.16

当且仅当命题公式 $P \to Q$ 为重言式时, 称 “ P 蕴含 Q”, 记为 $P \Rightarrow Q$, 它又称为逻辑蕴含式 (logically implication).

蕴含式的理解

符号 $\Rightarrow$ 不是联结词, 它表示公式间的 “永真蕴含” 关系, 也可以看成是 “推导” 关系.

即 $P \Rightarrow Q$ 可以理解成: 由 P 可推出 Q. (即由 P 为真, 可以推出 Q 也为真.)

当 $P \to Q$ 为永真时, 则认为 “由 P 可推出 Q”, 即 “P 蕴含 Q”.

证明蕴含式 $P \Rightarrow Q$ 的方法

方法 1. 列真值表, 证明 $P \to Q$ 为永真式 (略).

证明蕴含式 $P \Rightarrow Q$ 的方法

下面讨论另外两种方法.

先看 $P \to Q$ 的真值表: 如果 $P \to Q$ 为永真式, 则下述真值表的第二组指派不会出现.

P	Q	$P \to Q$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F** ☜
F	**T**	**T**
F	**F**	**T**

证明蕴含式 $P \Rightarrow Q$ 的方法

下面讨论另外两种方法.

先看 $P \to Q$ 的真值表: 如果 $P \to Q$ 为永真式, 则下述真值表的第二组指派不会出现.

P	Q	$P \to Q$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**T**
F	**F**	**T**

于是有下面两种证明方法.

方法 2. 假设前件 P 为 **T**, 推出后件 Q 也为 **T**.

证明蕴含式 $P \Rightarrow Q$ 的方法

下面讨论另外两种方法.

先看 $P \to Q$ 的真值表: 如果 $P \to Q$ 为永真式, 则下述真值表的第二组指派不会出现.

P	Q	$P \to Q$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F** ☜
F	**T**	**T**
F	**F**	**T**

于是有下面两种证明方法.

方法 2. 假设前件 P 为 **T**, 推出后件 Q 也为 **T**.

方法 3. 假设后件 Q 为 **F**, 推出前件 P 也为 **F**.

证明 $\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$.

证明 $\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$.

证: 设 $\neg P \wedge (P \vee Q)$ 为真, 则 $\neg P$ 和 $P \vee Q$ 都为真.

证明 $\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$.

证: 设 $\neg P \wedge (P \vee Q)$ 为真, 则 $\neg P$ 和 $P \vee Q$ 都为真. 那么 P 为假, 再由 $P \vee Q$ 为真, 得知 Q 为真.

证明 $\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$.

证: 设 $\neg P \wedge (P \vee Q)$ 为真, 则 $\neg P$ 和 $P \vee Q$ 都为真. 那么 P 为假, 再由 $P \vee Q$ 为真, 得知 Q 为真.

证明 $(P \to Q) \wedge (Q \to R) \Rightarrow P \to R$.

证明 $\neg P \land (P \lor Q) \Rightarrow Q$.

证: 设 $\neg P \land (P \lor Q)$ 为真, 则 $\neg P$ 和 $P \lor Q$ 都为真. 那么 P 为假, 再由 $P \lor Q$ 为真, 得知 Q 为真.

证明 $(P \to Q) \land (Q \to R) \Rightarrow P \to R$.

证: 设 $P \to R$ 为假, 则 P 为真, 且 R 为假.

证明 $\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$.

证: 设 $\neg P \wedge (P \vee Q)$ 为真, 则 $\neg P$ 和 $P \vee Q$ 都为真. 那么 P 为假, 再由 $P \vee Q$ 为真, 得知 Q 为真.

证明 $(P \to Q) \wedge (Q \to R) \Rightarrow P \to R$.

证: 设 $P \to R$ 为假, 则 P 为真, 且 R 为假.

- 若 Q 为真, 则 $Q \to R$ 为假;

证明 $\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$.

证: 设 $\neg P \wedge (P \vee Q)$ 为真, 则 $\neg P$ 和 $P \vee Q$ 都为真. 那么 P 为假, 再由 $P \vee Q$ 为真, 得知 Q 为真.

证明 $(P \to Q) \wedge (Q \to R) \Rightarrow P \to R$.

证: 设 $P \to R$ 为假, 则 P 为真, 且 R 为假.

- 若 Q 为真, 则 $Q \to R$ 为假;
- 若 Q 为假, 则 $P \to Q$ 为假.

证明 $\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$.

证: 设 $\neg P \wedge (P \vee Q)$ 为真, 则 $\neg P$ 和 $P \vee Q$ 都为真. 那么 P 为假, 再由 $P \vee Q$ 为真, 得知 Q 为真.

证明 $(P \to Q) \wedge (Q \to R) \Rightarrow P \to R$.

证: 设 $P \to R$ 为假, 则 P 为真, 且 R 为假.

- 若 Q 为真, 则 $Q \to R$ 为假;
- 若 Q 为假, 则 $P \to Q$ 为假.

故 $(P \to Q) \wedge (Q \to R)$ 为假.

方法 2. 假设前件为 $\mathbf{T}$, 推出后件也为 $\mathbf{T}$.

Example 2.17

求证: $\big((A \wedge B) \to C\big) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D) \Rightarrow \neg A \vee \neg B.$

方法 2. 假设前件为 T, 推出后件也为 T.

Example 2.17

求证: $((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D) \Rightarrow \neg A \vee \neg B.$

证: 设前件 $((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D)$ 为 **T**.

方法 2. 假设前件为 T, 推出后件也为 T.

Example 2.17

求证: $((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D) \Rightarrow \neg A \vee \neg B.$

证: 设前件 $((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D)$ 为 **T**. 则

$$((A \wedge B) \to C), \quad \neg D, \quad (\neg C \vee D)$$

均为 **T**.

方法 2. 假设前件为 T, 推出后件也为 T.

Example 2.17

求证: $((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$.

证: 设前件 $((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D)$ 为 **T**. 则

$$((A \wedge B) \to C), \quad \neg D, \quad (\neg C \vee D)$$

均为 **T**.

由 $\neg D$ 为 **T**, 则 D 为 **F**.

Example 2.17

求证: $((A \wedge B) \rightarrow C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$.

证: 设前件 $((A \wedge B) \rightarrow C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D)$ 为 **T**. 则

$$((A \wedge B) \rightarrow C), \quad \neg D, \quad (\neg C \vee D)$$

均为 **T**.

由 $\neg D$ 为 **T**, 则 D 为 **F**.

又 $\neg C \vee D$ 为 **T**, 得 $\neg C$ 为 **T**, 即 C 为 **F**.

方法 2. 假设前件为 T, 推出后件也为 T.

Example 2.17

求证: $((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D) \Rightarrow \neg A \vee \neg B.$

证: 设前件 $((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D)$ 为 **T**. 则

$$((A \wedge B) \to C), \quad \neg D, \quad (\neg C \vee D)$$

均为 **T**.

由 $\neg D$ 为 **T**, 则 D 为 **F**.

又 $\neg C \vee D$ 为 **T**, 得 $\neg C$ 为 **T**, 即 C 为 **F**.

又 $((A \wedge B) \to C)$ 为 **T**, 得 $A \wedge B$ 为 **F**.

方法 2. 假设前件为 T, 推出后件也为 T.

Example 2.17

求证: $((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$.

证: 设前件 $((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D)$ 为 **T**. 则

$$((A \wedge B) \to C), \quad \neg D, \quad (\neg C \vee D)$$

均为 **T**.

由 $\neg D$ 为 **T**, 则 D 为 **F**.

又 $\neg C \vee D$ 为 **T**, 得 $\neg C$ 为 **T**, 即 C 为 **F**.

又 $((A \wedge B) \to C)$ 为 **T**, 得 $A \wedge B$ 为 **F**.

而 $\neg A \vee \neg B \Leftrightarrow \neg(A \wedge B)$, 所以 $\neg A \vee \neg B$ 为 **T**. 得证.

方法 3. 假设后件为 **F**, 推出前件也为 **F**.

Example 2.18

求证: $((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$.

方法 3. 假设后件为 **F**, 推出前件也为 **F**.

Example 2.18

求证: $((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$.

证: 假设后件 $\neg A \vee \neg B$ 为 **F**, 即 $\neg(A \wedge B)$ 为 **F**, 亦即则 $A \wedge B$ 为 **T**.

方法 3. 假设后件为 **F**, 推出前件也为 **F**.

Example 2.18

求证: $((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$.

证: 假设后件 $\neg A \vee \neg B$ 为 **F**, 即 $\neg(A \wedge B)$ 为 **F**, 亦即则 $A \wedge B$ 为 **T**.

1. 如 C 为 **F**, 则 $((A \wedge B) \to C)$ 为 **F**,

方法 3. 假设后件为 F, 推出前件也为 F.

Example 2.18

求证: $((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$.

证: 假设后件 $\neg A \vee \neg B$ 为 **F**, 即 $\neg(A \wedge B)$ 为 **F**, 亦即则 $A \wedge B$ 为 **T**.

1. 如 C 为 **F**, 则 $((A \wedge B) \to C)$ 为 **F**, 所以前件 $((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D)$ 为 **F**.

方法 3. 假设后件为 **F**, 推出前件也为 **F**.

Example 2.18

求证: $((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$.

证: 假设后件 $\neg A \vee \neg B$ 为 **F**, 即 $\neg(A \wedge B)$ 为 **F**, 亦即则 $A \wedge B$ 为 **T**.

1. 如 C 为 **F**, 则 $((A \wedge B) \to C)$ 为 **F**, 所以前件 $((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D)$ 为 **F**.
2. 如 C 为 **T**, 则
    1. 若 D 为 **T**, 则 $\neg D$ 为 **F**,

Example 2.18

求证: $((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$.

证: 假设后件 $\neg A \vee \neg B$ 为 **F**, 即 $\neg(A \wedge B)$ 为 **F**, 亦即则 $A \wedge B$ 为 **T**.

1. 如 C 为 **F**, 则 $((A \wedge B) \to C)$ 为 **F**, 所以前件 $((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D)$ 为 **F**.
2. 如 C 为 **T**, 则
   1. 若 D 为 **T**, 则 $\neg D$ 为 **F**, 所以前件 $((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D)$ 为 **F**.

方法 3. 假设后件为 **F**, 推出前件也为 **F**.

Example 2.18

求证: $((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$.

证: 假设后件 $\neg A \vee \neg B$ 为 **F**, 即 $\neg(A \wedge B)$ 为 **F**, 亦即则 $A \wedge B$ 为 **T**.

1. 如 C 为 **F**, 则 $((A \wedge B) \to C)$ 为 **F**, 所以前件 $((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D)$ 为 **F**.
2. 如 C 为 **T**, 则
    1. 若 D 为 **T**, 则 $\neg D$ 为 **F**, 所以前件 $((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D)$ 为 **F**.
    2. 若 D 为 **F**, 则 $\neg C \vee D$ 为 **F**,

Example 2.18

求证: $((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$.

证: 假设后件 $\neg A \vee \neg B$ 为 **F**, 即 $\neg(A \wedge B)$ 为 **F**, 亦即则 $A \wedge B$ 为 **T**.

1. 如 C 为 **F**, 则 $((A \wedge B) \to C)$ 为 **F**, 所以前件 $((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D)$ 为 **F**.
2. 如 C 为 **T**, 则
   1. 若 D 为 **T**, 则 $\neg D$ 为 **F**, 所以前件 $((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D)$ 为 **F**.
   2. 若 D 为 **F**, 则 $\neg C \vee D$ 为 **F**, 所以前件 $((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D)$ 为 **F**.

方法 3. 假设后件为 F, 推出前件也为 F.

Example 2.18

求证: $((A \wedge B) \rightarrow C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$.

证: 假设后件 $\neg A \vee \neg B$ 为 **F**, 即 $\neg(A \wedge B)$ 为 **F**, 亦即则 $A \wedge B$ 为 **T**.

1. 如 C 为 **F**, 则 $((A \wedge B) \rightarrow C)$ 为 **F**, 所以前件 $((A \wedge B) \rightarrow C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D)$ 为 **F**.
2. 如 C 为 **T**, 则
    1. 若 D 为 **T**, 则 $\neg D$ 为 **F**, 所以前件 $((A \wedge B) \rightarrow C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D)$ 为 **F**.
    2. 若 D 为 **F**, 则 $\neg C \vee D$ 为 **F**, 所以前件 $((A \wedge B) \rightarrow C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D)$ 为 **F**.

综上得证.

方法 3. 假设后件为 **F**, 推出前件也为 **F**.

Example 2.18

求证: $((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$.

证: 假设后件 $\neg A \vee \neg B$ 为 **F**, 即 $\neg(A \wedge B)$ 为 **F**, 亦即则 $A \wedge B$ 为 **T**.

1. 如 C 为 **F**, 则 $((A \wedge B) \to C)$ 为 **F**, 所以前件 $((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D)$ 为 **F**.
2. 如 C 为 **T**, 则
   1. 若 D 为 **T**, 则 $\neg D$ 为 **F**, 所以前件 $((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D)$ 为 **F**.
   2. 若 D 为 **F**, 则 $\neg C \vee D$ 为 **F**, 所以前件 $((A \wedge B) \to C) \wedge \neg D \wedge (\neg C \vee D)$ 为 **F**.

综上得证.

(或者先讨论 D 的真值, 也可以证明.)

常用逻辑蕴含式

$P \wedge Q \Rightarrow P$	1
$P \wedge Q \Rightarrow Q$	2
$P \Rightarrow P \vee Q$	3
$\neg P \Rightarrow P \rightarrow Q$	4
$Q \Rightarrow P \rightarrow Q$	5
$\neg (P \rightarrow Q) \Rightarrow P$	6
$\neg (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$	7
$P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$	8
$\neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$	9
$\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$	10
$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow P \rightarrow R$	11
$(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow R$	12
$(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \Rightarrow (P \wedge R) \rightarrow (Q \wedge S)$	13
$(P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R) \Rightarrow P \leftrightarrow R$	14

Theorem 2.19

设 P, Q 为任意两个命题公式, $P \Leftrightarrow Q$ 的充分必要条件是

$$P \Rightarrow Q \text{ 且 } Q \Rightarrow P.$$

Theorem 2.19

设 P, Q 为任意两个命题公式, $P \Leftrightarrow Q$ 的充分必要条件是

$$P \Rightarrow Q \text{ 且 } Q \Rightarrow P.$$

证: 若 $P \Leftrightarrow Q$, 则 $P \leftrightarrow Q$ 为重言式. 因为

$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P),$$

故 $P \rightarrow Q$ 和 $Q \rightarrow P$ 皆为 **T**, 即

$$P \Rightarrow Q \text{ 且 } Q \Rightarrow P.$$

Theorem 2.19

设 P, Q 为任意两个命题公式, $P \Leftrightarrow Q$ 的充分必要条件是

$$P \Rightarrow Q \text{ 且 } Q \Rightarrow P.$$

证: 若 $P \Leftrightarrow Q$, 则 $P \leftrightarrow Q$ 为重言式. 因为

$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P),$$

故 $P \to Q$ 和 $Q \to P$ 皆为 **T**, 即

$$P \Rightarrow Q \text{ 且 } Q \Rightarrow P.$$

反之, 若 $P \Rightarrow Q$ 且 $Q \Rightarrow P$, 则 $P \to Q$ 和 $Q \to P$ 皆为 **T**, 从而 $P \leftrightarrow Q$ 为 **T**, 即 $P \leftrightarrow Q$ 为重言式, 亦即 $P \Leftrightarrow Q$.

蕴含式的性质

(1) 若 $A \Rightarrow B$ 且 A 是重言式, 则 B 必为重言式.

蕴含式的性质

(1) 若 $A \Rightarrow B$ 且 A 是重言式, 则 B 必为重言式.

证: 因为 $A \to B$ 为永真式, 所以, 当 A 为永真时, B 必为永真 (否则与 $A \to B$ 为永真相矛盾).

蕴含式的性质

(1) 若 $A \Rightarrow B$ 且 A 是重言式, 则 B 必为重言式.

证: 因为 $A \to B$ 为永真式, 所以, 当 A 为永真时, B 必为永真 (否则与 $A \to B$ 为永真相矛盾).

(2) 若 $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C$, 则 $A \Rightarrow C$.

蕴含式的性质

(1) 若 $A \Rightarrow B$ 且 A 是重言式, 则 B 必为重言式.

证: 因为 $A \to B$ 为永真式, 所以, 当 A 为永真时, B 必为永真 (否则与 $A \to B$ 为永真相矛盾).

(2) 若 $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C$, 则 $A \Rightarrow C$.

证: 由 $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C$, 则 $A \to B$, $B \to C$ 为永真式, 从而 $(A \to B) \wedge (B \to C)$ 亦为永真式.

蕴含式的性质

(1) 若 $A \Rightarrow B$ 且 A 是重言式, 则 B 必为重言式.

证: 因为 $A \to B$ 为永真式, 所以, 当 A 为永真时, B 必为永真 (否则与 $A \to B$ 为永真相矛盾).

(2) 若 $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C$, 则 $A \Rightarrow C$.

证: 由 $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C$, 则 $A \to B$, $B \to C$ 为永真式, 从而 $(A \to B) \wedge (B \to C)$ 亦为永真式.

由常用蕴含式 $(A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow (A \to C)$, 及性质 (1), 得 $A \to C$ 是永真式, 亦即 $A \Rightarrow C$.

(3) 若 $A \Rightarrow B$ 且 $A \Rightarrow C$, 则 $A \Rightarrow B \wedge C$.

(3) 若 $A \Rightarrow B$ 且 $A \Rightarrow C$, 则 $A \Rightarrow B \wedge C$.

证: 设 A 的真值为 **T**, 由于 $A \Rightarrow B$, $A \Rightarrow C$, 则 B, C 为 **T**, 从而 $B \wedge C$ 为 **T**, 故 $A \rightarrow B \wedge C$ 为 **T**, 从而 $A \Rightarrow B \wedge C$.

(3) 若 $A \Rightarrow B$ 且 $A \Rightarrow C$, 则 $A \Rightarrow B \wedge C$.

证: 设 A 的真值为 **T**, 由于 $A \Rightarrow B$, $A \Rightarrow C$, 则 B, C 为 **T**, 从而 $B \wedge C$ 为 **T**, 故 $A \rightarrow B \wedge C$ 为 **T**, 从而 $A \Rightarrow B \wedge C$.

(4) 若 $A \Rightarrow B$ 且 $C \Rightarrow B$, 则 $A \vee C \Rightarrow B$.

(3) 若 $A \Rightarrow B$ 且 $A \Rightarrow C$, 则 $A \Rightarrow B \wedge C$.

证: 设 A 的真值为 **T**, 由于 $A \Rightarrow B$, $A \Rightarrow C$, 则 B, C 为 **T**, 从而 $B \wedge C$ 为 **T**, 故 $A \to B \wedge C$ 为 **T**, 从而 $A \Rightarrow B \wedge C$.

(4) 若 $A \Rightarrow B$ 且 $C \Rightarrow B$, 则 $A \vee C \Rightarrow B$.

证: 因 $A \to B$ 和 $C \to B$ 为 **T**, 那么 $(A \to B) \wedge (C \to B)$ 为 **T**.

(3) 若 $A \Rightarrow B$ 且 $A \Rightarrow C$, 则 $A \Rightarrow B \wedge C$.

证: 设 A 的真值为 **T**, 由于 $A \Rightarrow B$, $A \Rightarrow C$, 则 B, C 为 **T**, 从而 $B \wedge C$ 为 **T**, 故 $A \rightarrow B \wedge C$ 为 **T**, 从而 $A \Rightarrow B \wedge C$.

(4) 若 $A \Rightarrow B$ 且 $C \Rightarrow B$, 则 $A \vee C \Rightarrow B$.

证: 因 $A \rightarrow B$ 和 $C \rightarrow B$ 为 **T**, 那么 $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow B)$ 为 **T**. 而

$$\begin{aligned}(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow B) &\Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (\neg C \vee B)\\ &\Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg C) \vee B\\ &\Leftrightarrow \neg(A \vee C) \vee B\\ &\Leftrightarrow (A \vee C) \rightarrow B.\end{aligned}$$

(3) 若 $A \Rightarrow B$ 且 $A \Rightarrow C$, 则 $A \Rightarrow B \wedge C$.

证: 设 A 的真值为 **T**, 由于 $A \Rightarrow B$, $A \Rightarrow C$, 则 B, C 为 **T**, 从而 $B \wedge C$ 为 **T**, 故 $A \rightarrow B \wedge C$ 为 **T**, 从而 $A \Rightarrow B \wedge C$.

(4) 若 $A \Rightarrow B$ 且 $C \Rightarrow B$, 则 $A \vee C \Rightarrow B$.

证: 因 $A \rightarrow B$ 和 $C \rightarrow B$ 为 **T**, 那么 $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow B)$ 为 **T**. 而

$$
\begin{aligned}
(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow B) &\Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (\neg C \vee B) \\
&\Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg C) \vee B \\
&\Leftrightarrow \neg (A \vee C) \vee B \\
&\Leftrightarrow (A \vee C) \rightarrow B.
\end{aligned}
$$

故 $A \vee C \rightarrow B$ 为永真, 从而 $A \vee C \Rightarrow B$.

证明 $\neg A \rightarrow (B \vee C)$, $D \vee E$, $(D \vee E) \rightarrow \neg A \Rightarrow B \vee C$.

证明 $\neg A \to (B \vee C),\ D \vee E,\ (D \vee E) \to \neg A \Rightarrow B \vee C.$

证: 由 $D \vee E, (D \vee E) \to \neg A$ 均为 **T**, 用 I_8 得 $\neg A$ 为 **T**,

证明 $\neg A \to (B \vee C),\ D \vee E,\ (D \vee E) \to \neg A \Rightarrow B \vee C$.

证: 由 $D \vee E, (D \vee E) \to \neg A$ 均为 **T**, 用 I_8 得 $\neg A$ 为 **T**,
又由 $\neg A \to (B \vee C)$ 为 **T**, 得 $B \vee C$ 为 **T**.

证明 $\neg A \to (B \vee C),\ D \vee E,\ (D \vee E) \to \neg A \Rightarrow B \vee C.$

证: 由 $D \vee E, (D \vee E) \to \neg A$ 均为 **T**, 用 I_8 得 $\neg A$ 为 **T**,
又由 $\neg A \to (B \vee C)$ 为 **T**, 得 $B \vee C$ 为 **T**.
得证 $\neg A \to (B \vee C),\ D \vee E,\ (D \vee E) \to \neg A \Rightarrow B \vee C.$

反证: 设后件 $B \vee C$ 为 **F**.

证明 $\neg A \to (B \vee C),\ D \vee E,\ (D \vee E) \to \neg A \Rightarrow B \vee C$.

证: 由 $D \vee E, (D \vee E) \to \neg A$ 均为 **T**, 用 I_8 得 $\neg A$ 为 **T**,

又由 $\neg A \to (B \vee C)$ 为 **T**, 得 $B \vee C$ 为 **T**.

得证 $\neg A \to (B \vee C),\ D \vee E,\ (D \vee E) \to \neg A \Rightarrow B \vee C$.

反证: 设后件 $B \vee C$ 为 **F**.

又 $\neg A \to (B \vee C)$ 为 **T**, 得 $\neg A$ 为 **F**.

证明 $\neg A \to (B \vee C),\ D \vee E,\ (D \vee E) \to \neg A \Rightarrow B \vee C$.

证: 由 $D \vee E, (D \vee E) \to \neg A$ 均为 **T**, 用 I_8 得 $\neg A$ 为 **T**,
又由 $\neg A \to (B \vee C)$ 为 **T**, 得 $B \vee C$ 为 **T**.
得证 $\neg A \to (B \vee C),\ D \vee E,\ (D \vee E) \to \neg A \Rightarrow B \vee C$.

反证: 设后件 $B \vee C$ 为 **F**.
又 $\neg A \to (B \vee C)$ 为 **T**, 得 $\neg A$ 为 **F**.
而 $(D \vee E) \to \neg A$ 为 **T**, 则 $D \vee E$ 为 **F**.

证明 $\neg A \to (B \vee C),\ D \vee E,\ (D \vee E) \to \neg A \Rightarrow B \vee C$.

证: 由 $D \vee E, (D \vee E) \to \neg A$ 均为 **T**, 用 I_8 得 $\neg A$ 为 **T**,
又由 $\neg A \to (B \vee C)$ 为 **T**, 得 $B \vee C$ 为 **T**.
得证 $\neg A \to (B \vee C),\ D \vee E,\ (D \vee E) \to \neg A \Rightarrow B \vee C$.

反证: 设后件 $B \vee C$ 为 **F**.
又 $\neg A \to (B \vee C)$ 为 **T**, 得 $\neg A$ 为 **F**.
而 $(D \vee E) \to \neg A$ 为 **T**, 则 $D \vee E$ 为 **F**.
这与 $D \vee E$ 为 **T** 矛盾. 假设不成立. 得证.

最小联结词组:

由 “$\neg$”, “$\wedge$”, “$\vee$”, “$\rightarrow$”, “$\leftrightarrow$” 组成的命题公式, 必可以由仅包含 $\{\neg, \vee\}$ 或 $\{\neg, \wedge\}$ 的命题公式替代.

$\leftrightarrow$	$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
$\rightarrow$	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
$\wedge$	$P \wedge Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$

最小联结词组: $\{\neg, \vee\}$; $\{\neg, \wedge\}$;

由 "$\neg$", "$\wedge$", "$\vee$", "$\rightarrow$", "$\leftrightarrow$" 组成的命题公式, 必可以由仅包含 $\{\neg, \vee\}$ 或 $\{\neg, \wedge\}$ 的命题公式替代.

$\leftrightarrow$	$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
$\rightarrow$	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
$\wedge$	$P \wedge Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$

1. 命题及其符号化
2. 命题公式
3. 范式及其应用
   - 析取范式与合取范式
   - 主范式
   - 范式的应用
4. 命题演算的推理理论

对偶式

Definition 3.1 (对偶式)

设给定的命题公式 A 仅含联结词 $\neg, \wedge, \vee$.
A^* 为将 A 中符号 $\wedge, \vee, \mathbf{T}, \mathbf{F}$ 分别改换为 $\vee, \wedge, \mathbf{F}, \mathbf{T}$ 后所得的公式.
那么称 A^* 为 A 的对偶式 (dual).

对偶式

Definition 3.1 (对偶式)

设给定的命题公式 A 仅含联结词 $\neg, \wedge, \vee$.
A^* 为将 A 中符号 $\wedge, \vee$, **T**, **F** 分别改换为 $\vee, \wedge$, **F**, **T** 后所得的公式.
那么称 A^* 为 A 的对偶式 (dual).

比如, $A = (\neg P \vee Q) \wedge R$ 的对偶式为

$$A^* = (\neg P \wedge Q) \vee R.$$

Theorem 3.2

设公式 A 和 A^* 中仅含命题变元 $P_1, \cdots, P_n$, 及联结词 $\neg$, $\wedge$, $\vee$; 则

$$\neg A(P_1, P_2, \cdots, P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n) \tag{3}$$

$$A(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n) \Leftrightarrow \neg A^*(P_1, P_2, \cdots, P_n) \tag{4}$$

Theorem 3.2

设公式 A 和 A^* 中仅含命题变元 $P_1, \cdots, P_n$, 及联结词 $\neg$, $\wedge$, $\vee$; 则

$$\neg A(P_1, P_2, \cdots, P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n) \quad (3)$$

$$A(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n) \Leftrightarrow \neg A^*(P_1, P_2, \cdots, P_n) \quad (4)$$

此定理是德·摩根律的推广.

Theorem 3.2

设公式 A 和 A^* 中仅含命题变元 $P_1, \cdots, P_n$, 及联结词 $\neg, \wedge, \vee$; 则

$$\neg A(P_1, P_2, \cdots, P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n) \tag{3}$$

$$A(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n) \Leftrightarrow \neg A^*(P_1, P_2, \cdots, P_n) \tag{4}$$

此定理是德 · 摩根律的推广.

比如设 $A(P, Q) = P \vee Q$, 则 $A^*(P, Q) \Leftrightarrow P \wedge Q$.

Theorem 3.2

设公式 A 和 A^* 中仅含命题变元 $P_1, \cdots, P_n$, 及联结词 $\neg$, $\wedge$, $\vee$; 则

$$\neg A(P_1, P_2, \cdots, P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n) \tag{3}$$

$$A(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n) \Leftrightarrow \neg A^*(P_1, P_2, \cdots, P_n) \tag{4}$$

此定理是德 · 摩根律的推广.

比如设 $A(P, Q) = P \vee Q$, 则 $A^*(P, Q) \Leftrightarrow P \wedge Q$. 而

$$\neg A(P, Q) \Leftrightarrow \neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q, \tag{5}$$

$$A^*(\neg P, \neg Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q, \tag{6}$$

Theorem 3.2

设公式 A 和 A^* 中仅含命题变元 $P_1, \cdots, P_n$, 及联结词 $\neg, \wedge, \vee$; 则

$$\neg A(P_1, P_2, \cdots, P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n) \tag{3}$$

$$A(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n) \Leftrightarrow \neg A^*(P_1, P_2, \cdots, P_n) \tag{4}$$

此定理是德 · 摩根律的推广.

比如设 $A(P, Q) = P \vee Q$, 则 $A^*(P, Q) \Leftrightarrow P \wedge Q$. 而

$$\neg A(P, Q) \Leftrightarrow \neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q, \tag{5}$$

$$A^*(\neg P, \neg Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q, \tag{6}$$

所以

$$\neg A(P, Q) \Leftrightarrow A^*(\neg P, \neg Q).$$

Theorem 3.3 (对偶原理)

设 A^*, B^* 分别是命题公式 A, B 的对偶式. 如果 $A \Leftrightarrow B$, 则 $A^* \Leftrightarrow B^*$.

Theorem 3.3 (对偶原理)

设 A^*, B^* 分别是命题公式 A, B 的对偶式. 如果 $A \Leftrightarrow B$, 则 $A^* \Leftrightarrow B^*$.

比如分配律:

$$\underbrace{P \vee (Q \wedge R)}_{A} \Leftrightarrow \underbrace{(P \vee Q) \wedge (P \vee R)}_{B}$$

$$\underbrace{P \wedge (Q \vee R)}_{A^*} \Leftrightarrow \underbrace{(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)}_{B^*}$$

Theorem 3.3 (对偶原理)

设 A^*, B^* 分别是命题公式 A, B 的对偶式. 如果 $A \Leftrightarrow B$, 则 $A^* \Leftrightarrow B^*$.

证: 设 $A(P_1, P_2, \cdots, P_n) \Leftrightarrow B(P_1, P_2, \cdots, P_n)$, 按等价定义可知

$$A(P_1, P_2, \cdots, P_n) \leftrightarrow B(P_1, P_2, \cdots, P_n) \tag{7}$$

是永真式. 那么

$$A(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n) \leftrightarrow B(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n) \tag{8}$$

也为永真式.

Theorem 3.3 (对偶原理)

设 A^*, B^* 分别是命题公式 A, B 的对偶式. 如果 $A \Leftrightarrow B$, 则 $A^* \Leftrightarrow B^*$.

证: 设 $A(P_1, P_2, \cdots, P_n) \Leftrightarrow B(P_1, P_2, \cdots, P_n)$, 按等价定义可知

$$A(P_1, P_2, \cdots, P_n) \leftrightarrow B(P_1, P_2, \cdots, P_n) \tag{7}$$

是永真式. 那么

$$A(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n) \leftrightarrow B(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n) \tag{8}$$

也为永真式. 所以

$$A(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n) \Leftrightarrow B(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n). \tag{9}$$

根据前一定理中 (2) 式, 得

$$\neg A^*(P_1, P_2, \cdots, P_n) \Leftrightarrow \neg B^*(P_1, P_2, \cdots, P_n). \tag{10}$$

Theorem 3.3 (对偶原理)

设 A^*, B^* 分别是命题公式 A, B 的对偶式. 如果 $A \Leftrightarrow B$, 则 $A^* \Leftrightarrow B^*$.

证: 设 $A(P_1, P_2, \cdots, P_n) \Leftrightarrow B(P_1, P_2, \cdots, P_n)$, 按等价定义可知

$$A(P_1, P_2, \cdots, P_n) \leftrightarrow B(P_1, P_2, \cdots, P_n) \tag{7}$$

是永真式. 那么

$$A(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n) \leftrightarrow B(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n) \tag{8}$$

也为永真式. 所以

$$A(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n) \Leftrightarrow B(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n). \tag{9}$$

根据前一定理中 (2) 式, 得

$$\neg A^*(P_1, P_2, \cdots, P_n) \Leftrightarrow \neg B^*(P_1, P_2, \cdots, P_n). \tag{10}$$

故 $A^* \Leftrightarrow B^*$. $\qquad (\neg A \Leftrightarrow \neg B$ 当且仅当 $A \Leftrightarrow B.)$ $\square$

合取范式

Definition 3.4 (合取范式)

一个命题公式称为合取范式(conjunctive normal form), 当且仅当它具有形式:

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n, \quad (n \geqslant 1) \tag{11}$$

其中 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 都是由命题变元或其否定构成的析取式.

Definition 3.4 (合取范式)

一个命题公式称为合取范式(conjunctive normal form), 当且仅当它具有形式:

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n, \quad (n \geqslant 1) \tag{11}$$

其中 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 都是由命题变元或其否定构成的析取式.

例如

$$(P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge \neg Q \tag{12}$$

是合取范式 (整体是合取式, 各部分是析取式.).

析取范式

Definition 3.5 (析取范式)

一个命题公式称为析取范式(conjunctive normal form), 当且仅当它具有形式:

$$A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n, \quad (n \geqslant 1) \tag{13}$$

其中 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 都是由命题变元或其否定构成的合取式.

析取范式

Definition 3.5 (析取范式)

一个命题公式称为析取范式(conjunctive normal form), 当且仅当它具有形式:

$$A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n, \quad (n \geqslant 1) \tag{13}$$

其中 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 都是由命题变元或其否定构成的合取式.

例如

$$\neg P \vee (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \tag{14}$$

是析取范式 (整体是析取式, 各部分是合取式.).

Example 3.6

求 $(P \to Q) \to P$ 的析取范式和合取范式.

Example 3.6

求 $(P \to Q) \to P$ 的析取范式和合取范式.

解: 析取范式:

$$\begin{aligned}(P \to Q) \to P &\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \to P && (\text{去} \to)\\ &\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \vee P\\ &\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee P.\end{aligned}$$

Example 3.6

求 $(P \to Q) \to P$ 的析取范式和合取范式.

解: 析取范式:

$$\begin{aligned}(P \to Q) \to P &\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \to P && (\text{去} \to)\\ &\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \vee P\\ &\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee P.\end{aligned}$$

合取范式:

$$\begin{aligned}(P \to Q) \to P &\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee P\\ &\Leftrightarrow (P \vee P) \wedge (\neg Q \vee P) && (\text{分配律})\\ &\Leftrightarrow P \wedge (\neg Q \vee P).\end{aligned}$$

求析取范式或合取范式的步骤:

1. 将命题公式中的联结词全部化为 $\neg, \wedge, \vee$;
2. 利用德 · 摩根律, 将否定符号 $\neg$ 直接移到各命题变元之前;
3. 利用分配律、结合律将命题公式化为析取范式或合取范式.

练习

求下列命题的析取范式和合取范式:

$$Q \wedge \big((P \vee \neg Q) \rightarrow R\big). \tag{15}$$

练习

求下列命题的析取范式和合取范式:

$$Q \wedge \big((P \vee \neg Q) \to R\big). \tag{15}$$

解: 求析取范式:

$$\begin{aligned}
& Q \wedge \big((P \vee \neg Q) \to R\big) \\
\Leftrightarrow\ & Q \wedge (\neg(P \vee \neg Q) \vee R) && (\text{消去} \to) \\
\Leftrightarrow\ & Q \wedge \big((\neg P \wedge Q) \vee R\big) && (\text{内移} \neg) \\
\Leftrightarrow\ & \big(Q \wedge (\neg P \wedge Q)\big) \vee (Q \wedge R) && (\text{分配律}) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge Q) \vee (Q \wedge R).
\end{aligned}$$

练习

求下列命题的析取范式和合取范式:

$$Q \wedge \big((P \vee \neg Q) \to R\big). \tag{15}$$

解: 求合取范式:

$$\begin{aligned}
& Q \wedge \big((P \vee \neg Q) \to R\big) \\
\Leftrightarrow\ & Q \wedge \big((\neg P \wedge Q) \vee R\big) && (\text{消去} \to) \\
\Leftrightarrow\ & Q \wedge \big((\neg P \vee R) \wedge (Q \vee R)\big) && (\text{分配律}) \\
\Leftrightarrow\ & Q \wedge (\neg P \vee R) \wedge (Q \vee R).
\end{aligned}$$

为什么要讨论 “主范式”?

下面将讨论 “主范式”(主析取范式, 主合取范式), 这是因为一个命题的析取范式或合取范式并不是惟一的.

为什么要讨论“主范式”?

下面将讨论“主范式”(主析取范式, 主合取范式), 这是因为一个命题的析取范式或合取范式并不是惟一的.

例如 $P \vee (Q \wedge R)$ 是一个析取范式, 但它也可以写成

$$\begin{aligned} P \vee (Q \wedge R) &\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \\ &\Leftrightarrow (P \wedge P) \vee (P \wedge R) \vee (Q \wedge P) \vee (Q \wedge R). \end{aligned}$$

为什么要讨论“主范式”?

下面将讨论“主范式”(主析取范式, 主合取范式), 这是因为一个命题的析取范式或合取范式并不是惟一的.

例如 $P \vee (Q \wedge R)$ 是一个析取范式, 但它也可以写成

$$\begin{aligned} P \vee (Q \wedge R) &\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \\ &\Leftrightarrow (P \wedge P) \vee (P \wedge R) \vee (Q \wedge P) \vee (Q \wedge R). \end{aligned}$$

主范式的研究, 使得命题公式可以转化为一个标准形式, 从而易于判断命题公式的性质特征.

为什么要讨论“主范式”?

下面将讨论“主范式”(**主析取范式**, **主合取范式**), 这是因为一个命题的析取范式或合取范式并不是惟一的.

例如 $P \vee (Q \wedge R)$ 是一个析取范式, 但它也可以写成

$$
\begin{aligned}
P \vee (Q \wedge R) &\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \\
&\Leftrightarrow (P \wedge P) \vee (P \wedge R) \vee (Q \wedge P) \vee (Q \wedge R).
\end{aligned}
$$

主范式的研究, 使得命题公式可以转化为一个标准形式, 从而易于判断命题公式的性质特征.

在引入主范式的讨论时, 还要涉及小项、大项的概念.

布尔合取 *or* 小项

Definition 3.7

n 个命题变元 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的合取式, 称作布尔合取或小项, 在任一小项中

(i) 每个变元 P_i 与它的否定 $\neg P_i$ 不能同时出现,

(ii) 但 P_i 与 $\neg P_i$ 必须出现且仅出现一次.

布尔合取 *or* 小项

Definition 3.7

n 个命题变元 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的合取式, 称作布尔合取或小项, 在任一小项中

(i) 每个变元 P_i 与它的否定 $\neg P_i$ 不能同时出现,

(ii) 但 P_i 与 $\neg P_i$ 必须出现且仅出现一次.

Example 3.8

例如, 两个变元 P 和 Q 的所有小项为:

$$P \wedge Q,\ P \wedge \neg Q,\ \neg P \wedge Q,\ \neg P \wedge \neg Q.$$

一般地, n 个命题变元共有 2^n 个小项.

布尔合取 *or* 小项

Definition 3.7

n 个命题变元 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的合取式, 称作布尔合取或小项, 在任一小项中

(i) 每个变元 P_i 与它的否定 $\neg P_i$ 不能同时出现,

(ii) 但 P_i 与 $\neg P_i$ 必须出现且仅出现一次.

Example 3.8

n 个变元 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的小项形如:

$$\underbrace{(\quad) \wedge (\quad) \wedge \cdots \wedge (\quad)}_{n},$$

其中的第 i 个括号内, 只能填上 P_i 和 $\neg P_i$ 之中的一个, 所有不同的填法共有 2^n 个.

所以, n 个命题变元共有 2^n 个小项.

小项的真值

P	Q	$P \wedge Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg P \wedge Q$	$\neg P \wedge \neg Q$
T	**T**	**T**	**F**	**F**	**F**
T	**F**	**F**	**T**	**F**	**F**
F	**T**	**F**	**F**	**T**	**F**
F	**F**	**F**	**F**	**F**	**T**

- 没有两个小项是等价的;

小项的真值

P	Q	$P \wedge Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg P \wedge Q$	$\neg P \wedge \neg Q$
T	**T**	**T**	**F**	**F**	**F**
T	**F**	**F**	**T**	**F**	**F**
F	**T**	**F**	**F**	**T**	**F**
F	**F**	**F**	**F**	**F**	**T**

- 没有两个小项是等价的;
- 每个小项都只有一个真值为 **T**. (这是合取式本身的特点.)

小项 & 编码: 小项真值为 1 时, 对应的一组真值指派.

P	0	0	0	0	1	1	1	1
Q	0	0	1	1	0	0	1	1
R	0	1	0	1	0	1	0	1
$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	1	0	0	0	0	0	0	0
$\neg P \wedge \neg Q \wedge R$	0	1	0	0	0	0	0	0
$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$	0	0	1	0	0	0	0	0
$\neg P \wedge Q \wedge R$	0	0	0	1	0	0	0	0
$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	0	0	0	0	1	0	0	0
$P \wedge \neg Q \wedge R$	0	0	0	0	0	1	0	0
$P \wedge Q \wedge \neg R$	0	0	0	0	0	0	1	0
$P \wedge Q \wedge R$	0	0	0	0	0	0	0	1

小项 & 编码: 小项真值为 1 时, 对应的一组真值指派.

P	0	0	0	0	1	1	1	1
Q	0	0	1	1	0	0	1	1
R	0	1	0	1	0	1	0	1
$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	1	0	0	0	0	0	0	0
$\neg P \wedge \neg Q \wedge R$	0	1	0	0	0	0	0	0
$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$	0	0	1	0	0	0	0	0
$\neg P \wedge Q \wedge R$	0	0	0	1	0	0	0	0
$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	0	0	0	0	1	0	0	0
$P \wedge \neg Q \wedge R$	0	0	0	0	0	1	0	0
$P \wedge Q \wedge \neg R$	0	0	0	0	0	0	1	0
$P \wedge Q \wedge R$	0	0	0	0	0	0	0	1

$$m_{000} = \neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$$

小项 & 编码: 小项真值为 1 时, 对应的一组真值指派.

P	0	0	0	0	1	1	1	1
Q	0	0	1	1	0	0	1	1
R	0	1	0	1	0	1	0	1
$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	1	0	0	0	0	0	0	0
$\neg P \wedge \neg Q \wedge R$	0	1	0	0	0	0	0	0
$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$	0	0	1	0	0	0	0	0
$\neg P \wedge Q \wedge R$	0	0	0	1	0	0	0	0
$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	0	0	0	0	1	0	0	0
$P \wedge \neg Q \wedge R$	0	0	0	0	0	1	0	0
$P \wedge Q \wedge \neg R$	0	0	0	0	0	0	1	0
$P \wedge Q \wedge R$	0	0	0	0	0	0	0	1

$$m_{000} = \neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$$

$$m_{001} = \neg P \wedge \neg Q \wedge R$$

小项 & 编码: 小项真值为 1 时, 对应的一组真值指派.

P	0	0	0	0	1	1	1	1
Q	0	0	1	1	0	0	1	1
R	0	1	0	1	0	1	0	1
$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	1	0	0	0	0	0	0	0
$\neg P \wedge \neg Q \wedge R$	0	1	0	0	0	0	0	0
$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$	0	0	1	0	0	0	0	0
$\neg P \wedge Q \wedge R$	0	0	0	1	0	0	0	0
$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	0	0	0	0	1	0	0	0
$P \wedge \neg Q \wedge R$	0	0	0	0	0	1	0	0
$P \wedge Q \wedge \neg R$	0	0	0	0	0	0	1	0
$P \wedge Q \wedge R$	0	0	0	0	0	0	0	1

$$m_{000} = \neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$$
$$m_{001} = \neg P \wedge \neg Q \wedge R$$
$$m_{010} = \neg P \wedge Q \wedge \neg R$$

小项 & 编码: 小项真值为 1 时, 对应的一组真值指派.

P	0	0	0	0	1	1	1	1
Q	0	0	1	1	0	0	1	1
R	0	1	0	1	0	1	0	1
$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	1	0	0	0	0	0	0	0
$\neg P \wedge \neg Q \wedge R$	0	1	0	0	0	0	0	0
$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$	0	0	1	0	0	0	0	0
$\neg P \wedge Q \wedge R$	0	0	0	1	0	0	0	0
$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	0	0	0	0	1	0	0	0
$P \wedge \neg Q \wedge R$	0	0	0	0	0	1	0	0
$P \wedge Q \wedge \neg R$	0	0	0	0	0	0	1	0
$P \wedge Q \wedge R$	0	0	0	0	0	0	0	1

$$m_{000} = \neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$$
$$m_{001} = \neg P \wedge \neg Q \wedge R$$
$$m_{010} = \neg P \wedge Q \wedge \neg R$$
$$m_{011} = \neg P \wedge Q \wedge R$$

小项 & 编码: 小项真值为 1 时, 对应的一组真值指派.

P	0	0	0	0	1	1	1	1
Q	0	0	1	1	0	0	1	1
R	0	1	0	1	0	1	0	1
$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	1	0	0	0	0	0	0	0
$\neg P \wedge \neg Q \wedge R$	0	1	0	0	0	0	0	0
$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$	0	0	1	0	0	0	0	0
$\neg P \wedge Q \wedge R$	0	0	0	1	0	0	0	0
$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	0	0	0	0	1	0	0	0
$P \wedge \neg Q \wedge R$	0	0	0	0	0	1	0	0
$P \wedge Q \wedge \neg R$	0	0	0	0	0	0	1	0
$P \wedge Q \wedge R$	0	0	0	0	0	0	0	1

$$m_{000} = \neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$$
$$m_{001} = \neg P \wedge \neg Q \wedge R$$
$$m_{010} = \neg P \wedge Q \wedge \neg R$$
$$m_{011} = \neg P \wedge Q \wedge R$$
$$m_{100} = P \wedge \neg Q \wedge \neg R$$
$$m_{101} = P \wedge \neg Q \wedge R$$
$$m_{110} = P \wedge Q \wedge \neg R$$
$$m_{111} = P \wedge Q \wedge R$$

小项 & 编码: 小项真值为 1 时, 对应的一组真值指派.

P	0	0	0	0	1	1	1	1
Q	0	0	1	1	0	0	1	1
R	0	1	0	1	0	1	0	1
$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	1	0	0	0	0	0	0	0
$\neg P \wedge \neg Q \wedge R$	0	1	0	0	0	0	0	0
$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$	0	0	1	0	0	0	0	0
$\neg P \wedge Q \wedge R$	0	0	0	1	0	0	0	0
$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	0	0	0	0	1	0	0	0
$P \wedge \neg Q \wedge R$	0	0	0	0	0	1	0	0
$P \wedge Q \wedge \neg R$	0	0	0	0	0	0	1	0
$P \wedge Q \wedge R$	0	0	0	0	0	0	0	1

$m_{000} = \neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$

$m_{001} = \neg P \wedge \neg Q \wedge R$

$m_{010} = \neg P \wedge Q \wedge \neg R$

$m_{011} = \neg P \wedge Q \wedge R$

$m_{100} = P \wedge \neg Q \wedge \neg R$

$m_{101} = P \wedge \neg Q \wedge R$

$m_{110} = P \wedge Q \wedge \neg R$

$m_{111} = P \wedge Q \wedge R$

- 表中的 0, 1 分别代表真值 **F**, **T**.
- 二进制编码也可以转为十进制, 如 $m_{001} \triangleq m_1$, $m_{010} \triangleq m_2$, $m_{011} \triangleq m_3$.

小项的性质

1. 当真值指派与编码相同时[a], 小项真值为 **T**, 在其余均为 **F**.

   例如:

$$m_{001} = \neg P \wedge \neg Q \wedge R,$$

$$m_{010} = \neg P \wedge Q \wedge \neg R.$$

2. 任意两个不同小项的合取式为永假 .
3. 全体小项的析取式为永真 , 记为:

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} m_i = m_0 \vee m_1 \vee \cdots \vee m_{2^n-1} \Leftrightarrow \mathbf{T}$$

[a]真值 **T** 和 **F** 分别记为 1 和 0.
[b]任意两个不同小项中至少出现一对 P_i, $\neg P_i$.
[c]对任意一组真值指派, 都有 (且仅有) 一个小项真值为 **T**.

小项的性质

1. 当真值指派与编码相同时[a], 小项真值为 **T**, 在其余均为 **F**.

   例如:

$$m_{001} = \neg P \wedge \neg Q \wedge R,$$
$$m_{010} = \neg P \wedge Q \wedge \neg R.$$

2. 任意两个不同小项的合取式为永假[b].
3. 全体小项的析取式为永真, 记为:

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} m_i = m_0 \vee m_1 \vee \cdots \vee m_{2^n-1} \Leftrightarrow \mathbf{T}$$

[a] 真值 **T** 和 **F** 分别记为 1 和 0.
[b] 任意两个不同小项中至少出现一对 P_i, $\neg P_i$.
[c] 对任意一组真值指派, 都有 (且仅有) 一个小项真值为 **T**.

小项的性质

1. 当真值指派与编码相同时[a], 小项真值为 **T**, 在其余均为 **F**.

   例如:

$$m_{001} = \neg P \wedge \neg Q \wedge R,$$

$$m_{010} = \neg P \wedge Q \wedge \neg R.$$

2. 任意两个不同小项的合取式为永假[b].
3. 全体小项的析取式为永真[c], 记为:

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} m_i = m_0 \vee m_1 \vee \cdots \vee m_{2^n-1} \Leftrightarrow \mathbf{T}$$

[a] 真值 **T** 和 **F** 分别记为 1 和 0.

[b] 任意两个不同小项中至少出现一对 P_i, $\neg P_i$.

[c] 对任意一组真值指派, 都有 (且仅有) 一个小项真值为 **T**.

主析取范式

Definition 3.9

对于给定的命题公式 A, 如果存在公式 A' 满足

1) $A' \Leftrightarrow A$;
2) A' 仅由小项的析取所组成.

则称 A' 为 A 的主析取范式(major disjunctive normal form).

主析取范式

Definition 3.9

对于给定的命题公式 A, 如果存在公式 A' 满足

1) $A' \Leftrightarrow A$;
2) A' 仅由小项的析取所组成.

则称 A' 为 A 的主析取范式(major disjunctive normal form).

- 例如

$$P \to Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q),$$

这里 $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ 就是 $P \to Q$ 的主析取范式.

主析取范式

Theorem 3.10

在真值表中，一个公式的真值为 **T** 的指派所对应的小项的析取，即为此公式的主析取范式.

主析取范式

Theorem 3.10

在真值表中，一个公式的真值为 **T** 的指派所对应的小项的析取，即为此公式的主析取范式.

Example 3.11

P	Q	$P \wedge Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg P \wedge Q$	$\neg P \wedge \neg Q$	$P \to Q$
T	**T**	**T**	**F**	**F**	**F**	**T**
T	**F**	**F**	**T**	**F**	**F**	**F**
F	**T**	**F**	**F**	**T**	**F**	**T**
F	**F**	**F**	**F**	**F**	**T**	**T**

$$P \to Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q).$$

主析取范式

Theorem 3.10

在真值表中，一个公式的真值为 **T** 的指派所对应的小项的析取，即为此公式的主析取范式.

证: 记 B 为 "公式 A 真值为 **T** 的指派所对应的小项的析取", 下证 $A \Leftrightarrow B$:

主析取范式

Theorem 3.10

在真值表中, 一个公式的真值为 **T** 的指派所对应的小项的析取, 即为此公式的主析取范式.

证: 记 B 为 "公式 A 真值为 **T** 的指派所对应的小项的析取", 下证 $A \Leftrightarrow B$:

- 若 A 在某一指派下, 真值为 **T**, 则必有 B 中的某个小项真值为 **T**, 所以此时 B 真值为 **T**.
- 对 A 为 **F** 的某一指派, 其对应的小项不包含在 B 中, 故此时 B 真值为 **F**.

☞ 实际使用真值表求主析取范式时, 并不需要列出所有的小项.

☞ 实际使用真值表求主析取范式时, 并不需要列出所有的小项.

如使用下表可求得 $P \to Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$.

P	Q	$P \wedge Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg P \wedge Q$	$\neg P \wedge \neg Q$	$P \to Q$
T	**T**	**T**	**F**	**F**	**F**	**T**
T	**F**	**F**	**T**	**F**	**F**	**F**
F	**T**	**F**	**F**	**T**	**F**	**T**
F	**F**	**F**	**F**	**F**	**T**	**T**

☞ 实际使用真值表求主析取范式时, 并不需要列出所有的小项.

如使用下表可求得 $P \to Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$.

P	Q	$P \wedge Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg P \wedge Q$	$\neg P \wedge \neg Q$	$P \to Q$
T	**T**	**T**	**F**	**F**	**F**	**T**
T	**F**	**F**	**T**	**F**	**F**	**F**
F	**T**	**F**	**F**	**T**	**F**	**T**
F	**F**	**F**	**F**	**F**	**T**	**T**

也可以简化为:

P	Q	$P \to Q$	
T	**T**	**T**	➠ $P \wedge Q$
T	**F**	**F**	
F	**T**	**T**	➠ $\neg P \wedge Q$
F	**F**	**T**	➠ $\neg P \wedge \neg Q$

Example 3.11

求 $P \vee Q$, $\neg(P \wedge Q)$ 的主析取范式.

Example 3.11

求 $P \vee Q$, $\neg(P \wedge Q)$ 的主析取范式.

解: 由真值表

P	Q	$P \vee Q$	$\neg(P \wedge Q)$
T	**T**	**T**	**F**
T	**F**	**T**	**T**
F	**T**	**T**	**T**
F	**F**	**F**	**T**

得

$$P \vee Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q),$$

$$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q).$$

return

Example 3.12

设公式 A 的真值如下表所示, 求 A 的主析取范式.

P	Q	R	A
T	**T**	**T**	**T**
T	**T**	**F**	**F**
T	**F**	**T**	**F**
T	**F**	**F**	**T**
F	**T**	**T**	**F**
F	**T**	**F**	**F**
F	**F**	**T**	**F**
F	**F**	**F**	**T**

Example 3.12

设公式 A 的真值如下表所示, 求 A 的主析取范式.

P	Q	R	A
T	**T**	**T**	**T**
T	**T**	**F**	**F**
T	**F**	**T**	**F**
T	**F**	**F**	**T**
F	**T**	**T**	**F**
F	**T**	**F**	**F**
F	**F**	**T**	**F**
F	**F**	**F**	**T**

解: 公式 A 的主析取范式为

$$A \Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$$

Example 3.12

设公式 A 的真值如下表所示, 求 A 的主析取范式.

P	Q	R	A
T	**T**	**T**	**T**
T	**T**	**F**	**F**
T	**F**	**T**	**F**
T	**F**	**F**	**T**
F	**T**	**T**	**F**
F	**T**	**F**	**F**
F	**F**	**T**	**F**
F	**F**	**F**	**T**

解: 公式 A 的主析取范式为

$$A \Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$$

☞ 注意这也是研究主范式的一个用途: 已知公式为真和为假的赋值, 写出该公式的表达式.

用等价公式构成主析取范式

Example 3.13

求 $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$ 的主析取范式.

用等价公式构成主析取范式

Example 3.13

求 $(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge R)\vee(Q\wedge R)$ 的主析取范式.

解:

$$
\begin{aligned}
& (P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge R)\vee(Q\wedge R) \\
\Leftrightarrow & \big(P\wedge Q\wedge(R\vee\neg R)\big)\vee\big(\neg P\wedge R\wedge(Q\vee\neg Q)\big)\vee\big(Q\wedge R\wedge(P\vee\neg P)\big) \\
\Leftrightarrow & \big(P\wedge Q\wedge R\big)\vee\big(P\wedge Q\wedge\neg R\big)\vee\big(\neg P\wedge R\wedge Q\big)\vee\big(\neg P\wedge R\wedge\neg Q\big).
\end{aligned}
$$

求 $P \to \big((P \to Q) \land \neg(\neg Q \lor \neg P)\big)$ 的主析取范式.

求 $P \to \big((P \to Q) \land \neg(\neg Q \lor \neg P)\big)$ 的主析取范式.

解:

$$\begin{aligned} & P \to \big((P \to Q) \land \neg(\neg Q \lor \neg P)\big) \\ \Leftrightarrow\ & \neg P \lor \big((\neg P \lor Q) \land (Q \land P)\big) \qquad (\text{去} \to) \end{aligned}$$

求 $P \to ((P \to Q) \land \neg(\neg Q \lor \neg P))$ 的主析取范式.

解:

$$
\begin{aligned}
& P \to \big((P \to Q) \land \neg(\neg Q \lor \neg P)\big) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \lor \big((\neg P \lor Q) \land (Q \land P)\big) && (\text{去} \to) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \lor \big((\neg P \land Q \land P) \lor (Q \land Q \land P)\big) && (\text{分配律})
\end{aligned}
$$

求 $P \to ((P \to Q) \wedge \neg(\neg Q \vee \neg P))$ 的主析取范式.

解:

$$\begin{aligned}
& P \to ((P \to Q) \wedge \neg(\neg Q \vee \neg P)) \\
\Leftrightarrow & \neg P \vee ((\neg P \vee Q) \wedge (Q \wedge P)) && (\text{去} \to) \\
\Leftrightarrow & \neg P \vee ((\neg P \wedge Q \wedge P) \vee (Q \wedge Q \wedge P)) && (\text{分配律}) \\
\Leftrightarrow & \neg P \vee (\neg P \wedge P \wedge Q) \vee (Q \wedge P)
\end{aligned}$$

求 $P \to ((P \to Q) \wedge \neg(\neg Q \vee \neg P))$ 的主析取范式.

解:

$$
\begin{aligned}
& P \to \big((P \to Q) \wedge \neg(\neg Q \vee \neg P)\big) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee \big((\neg P \vee Q) \wedge (Q \wedge P)\big) && (\text{去} \to) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee \big((\neg P \wedge Q \wedge P) \vee (Q \wedge Q \wedge P)\big) && (\text{分配律}) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee (\neg P \wedge P \wedge Q) \vee (Q \wedge P) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee (\mathbf{F} \wedge Q) \vee (P \wedge Q) && (\text{否定律})
\end{aligned}
$$

求 $P \to ((P \to Q) \wedge \neg(\neg Q \vee \neg P))$ 的主析取范式.

解:

$$
\begin{aligned}
& P \to ((P \to Q) \wedge \neg(\neg Q \vee \neg P)) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee ((\neg P \vee Q) \wedge (Q \wedge P)) && (\text{去} \to) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee ((\neg P \wedge Q \wedge P) \vee (Q \wedge Q \wedge P)) && (\text{分配律}) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee (\neg P \wedge P \wedge Q) \vee (Q \wedge P) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee (\mathbf{F} \wedge Q) \vee (P \wedge Q) && (\text{否定律}) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee \mathbf{F} \vee (P \wedge Q) && (\text{零律})
\end{aligned}
$$

求 $P \to ((P \to Q) \wedge \neg(\neg Q \vee \neg P))$ 的主析取范式.

解:

$$
\begin{aligned}
& P \to ((P \to Q) \wedge \neg(\neg Q \vee \neg P)) && \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee ((\neg P \vee Q) \wedge (Q \wedge P)) && (\text{去} \to) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee ((\neg P \wedge Q \wedge P) \vee (Q \wedge Q \wedge P)) && (\text{分配律}) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee (\neg P \wedge P \wedge Q) \vee (Q \wedge P) && \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee (\mathbf{F} \wedge Q) \vee (P \wedge Q) && (\text{否定律}) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee \mathbf{F} \vee (P \wedge Q) && (\text{零律}) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee (P \wedge Q) && (\text{同一律})
\end{aligned}
$$

求 $P \to ((P \to Q) \wedge \neg(\neg Q \vee \neg P))$ 的主析取范式.

解:

$$
\begin{aligned}
& P \to \big((P \to Q) \wedge \neg(\neg Q \vee \neg P)\big) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee \big((\neg P \vee Q) \wedge (Q \wedge P)\big) && (\text{去} \to) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee \big((\neg P \wedge Q \wedge P) \vee (Q \wedge Q \wedge P)\big) && (\text{分配律}) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee (\neg P \wedge P \wedge Q) \vee (Q \wedge P) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee (\mathbf{F} \wedge Q) \vee (P \wedge Q) && (\text{否定律}) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee \mathbf{F} \vee (P \wedge Q) && (\text{零律}) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee (P \wedge Q) && (\text{同一律}) \\
\Leftrightarrow\ & \big(\neg P \wedge (Q \vee \neg Q)\big) \vee (P \wedge Q) && (\text{添加项})
\end{aligned}
$$

求 $P \to ((P \to Q) \wedge \neg(\neg Q \vee \neg P))$ 的主析取范式.

解:

$$
\begin{aligned}
& P \to ((P \to Q) \wedge \neg(\neg Q \vee \neg P)) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee ((\neg P \vee Q) \wedge (Q \wedge P)) && (\text{去} \to) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee ((\neg P \wedge Q \wedge P) \vee (Q \wedge Q \wedge P)) && (\text{分配律}) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee (\neg P \wedge P \wedge Q) \vee (Q \wedge P) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee (\mathbf{F} \wedge Q) \vee (P \wedge Q) && (\text{否定律}) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee \mathbf{F} \vee (P \wedge Q) && (\text{零律}) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee (P \wedge Q) && (\text{同一律}) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge (Q \vee \neg Q)) \vee (P \wedge Q) && (\text{添加项}) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) .
\end{aligned}
$$

求 $P \to \big((P \to Q) \wedge \neg(\neg Q \vee \neg P)\big)$ 的主析取范式.

求 $P \to \big((P \to Q) \wedge \neg(\neg Q \vee \neg P)\big)$ 的主析取范式.

另解:

$$
\begin{aligned}
& P \to \big((P \to Q) \wedge \neg(\neg Q \vee \neg P)\big) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee ((\neg P \vee Q) \wedge (Q \wedge P)) && (\text{去} \to)
\end{aligned}
$$

求 $P \to \big((P \to Q) \wedge \neg(\neg Q \vee \neg P)\big)$ 的主析取范式.

另解:

$$
\begin{aligned}
& P \to \big((P \to Q) \wedge \neg(\neg Q \vee \neg P)\big) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee ((\neg P \vee Q) \wedge (Q \wedge P)) && (\text{去} \to) \\
\Leftrightarrow\ & \big(\neg P \vee (\neg P \vee Q)\big) \wedge \big(\neg P \vee (Q \wedge P)\big) && (\text{分配律})
\end{aligned}
$$

求 $P \to \big((P \to Q) \wedge \neg(\neg Q \vee \neg P)\big)$ 的主析取范式.

另解:

$$
\begin{aligned}
& P \to \big((P \to Q) \wedge \neg(\neg Q \vee \neg P)\big) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee ((\neg P \vee Q) \wedge (Q \wedge P)) && (\text{去} \to) \\
\Leftrightarrow\ & \big(\neg P \vee (\neg P \vee Q)\big) \wedge \big(\neg P \vee (Q \wedge P)\big) && (\text{分配律}) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee \neg P \vee Q) \wedge \big((\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee P)\big)
\end{aligned}
$$

求 $P \to \big((P \to Q) \wedge \neg(\neg Q \vee \neg P)\big)$ 的主析取范式.

另解:

$$
\begin{aligned}
& P \to \big((P \to Q) \wedge \neg(\neg Q \vee \neg P)\big) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee ((\neg P \vee Q) \wedge (Q \wedge P)) && (去 \to) \\
\Leftrightarrow\ & \big(\neg P \vee (\neg P \vee Q)\big) \wedge \big(\neg P \vee (Q \wedge P)\big) && (分配律) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee \neg P \vee Q) \wedge \big((\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee P)\big) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee Q
\end{aligned}
$$

求 $P \to ((P \to Q) \wedge \neg(\neg Q \vee \neg P))$ 的主析取范式.

另解:

$$
\begin{aligned}
& P \to ((P \to Q) \wedge \neg(\neg Q \vee \neg P)) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee ((\neg P \vee Q) \wedge (Q \wedge P)) && (去 \to) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee (\neg P \vee Q)) \wedge (\neg P \vee (Q \wedge P)) && (分配律) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee \neg P \vee Q) \wedge ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee P)) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee Q \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge (Q \vee \neg Q)) \vee ((P \vee \neg P) \wedge Q) && (添加项)
\end{aligned}
$$

求 $P \to \big((P \to Q) \wedge \neg(\neg Q \vee \neg P)\big)$ 的主析取范式.

另解:

$$
\begin{aligned}
& P \to \big((P \to Q) \wedge \neg(\neg Q \vee \neg P)\big) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee ((\neg P \vee Q) \wedge (Q \wedge P)) && (\text{去} \to) \\
\Leftrightarrow\ & \big(\neg P \vee (\neg P \vee Q)\big) \wedge \big(\neg P \vee (Q \wedge P)\big) && (\text{分配律}) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee \neg P \vee Q) \wedge \big((\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee P)\big) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee Q \\
\Leftrightarrow\ & \big(\neg P \wedge (Q \vee \neg Q)\big) \vee ((P \vee \neg P) \wedge Q) && (\text{添加项}) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)
\end{aligned}
$$

求 $P \to ((P \to Q) \wedge \neg(\neg Q \vee \neg P))$ 的主析取范式.

另解:

$$
\begin{aligned}
& P \to \big((P \to Q) \wedge \neg(\neg Q \vee \neg P)\big) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee ((\neg P \vee Q) \wedge (Q \wedge P)) && (\text{去} \to) \\
\Leftrightarrow\ & \big(\neg P \vee (\neg P \vee Q)\big) \wedge \big(\neg P \vee (Q \wedge P)\big) && (\text{分配律}) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee \neg P \vee Q) \wedge \big((\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee P)\big) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee Q \\
\Leftrightarrow\ & \big(\neg P \wedge (Q \vee \neg Q)\big) \vee ((P \vee \neg P) \wedge Q) && (\text{添加项}) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q).
\end{aligned}
$$

求 $P \to ((P \to Q) \land \neg(\neg Q \lor \neg P))$ 的主析取范式.

另解:

$$
\begin{aligned}
& P \to \big((P \to Q) \land \neg(\neg Q \lor \neg P)\big) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \lor ((\neg P \lor Q) \land (Q \land P)) && (去 \to) \\
\Leftrightarrow\ & \big(\neg P \lor (\neg P \lor Q)\big) \land \big(\neg P \lor (Q \land P)\big) && (分配律) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \lor \neg P \lor Q) \land \big((\neg P \lor Q) \land (\neg P \lor P)\big) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \lor Q \\
\Leftrightarrow\ & \big(\neg P \land (Q \lor \neg Q)\big) \lor ((P \lor \neg P) \land Q) && (添加项) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q) \lor (\neg P \land Q) \lor (P \land Q) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q) \lor (P \land Q) .
\end{aligned}
$$

☞ 重要的步骤在于: 去 $\to$, 添加项.

利用等价公式求主析取范式的步骤:

1. 化归为析取范式 (总的方向);

利用等价公式求主析取范式的步骤:

1. 化归为析取范式 (总的方向);
2. 除去析取范式中所有永假的析取式 (同一律);

利用等价公式求主析取范式的步骤:

1. 化归为析取范式 (总的方向);
2. 除去析取范式中所有永假的析取式 (同一律);
3. 将析取式中重复出现的合取项和相同的变元合并 (幂等律);

利用等价公式求主析取范式的步骤:

1. 化归为析取范式 (总的方向);
2. 除去析取范式中所有永假的析取式 (同一律);
3. 将析取式中重复出现的合取项和相同的变元合并 (幂等律);
4. 对合取项补入没有出现的命题变元 (如添加 $(P \vee \neg P)$ 式), 再用分配律展开.

布尔析取 *or* 大项

Definition 3.14

n 个命题变元 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的析取式, 称作布尔析取或大项, 其中

(i) 每个变元 P_i 与它的否定 $\neg P_i$ 不能同时出现,

(ii) 但 P_i 与 $\neg P_i$ 必须出现, 且仅出现一次.

布尔析取 *or* 大项

Definition 3.14

n 个命题变元 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的析取式, 称作布尔析取或大项, 其中

(i) 每个变元 P_i 与它的否定 $\neg P_i$ 不能同时出现,

(ii) 但 P_i 与 $\neg P_i$ 必须出现, 且仅出现一次.

Example 3.15

例如, 两个变元 P 和 Q 的大项为:

$$P \vee Q,\ P \vee \neg Q,\ \neg P \vee Q,\ \neg P \vee \neg Q.$$

一般地, n 个命题变元共有 2^n 个大项.

大项 & 编码: 使得该大项真值为 0 的一组指派.

P	0	0	0	0	1	1	1	1
Q	0	0	1	1	0	0	1	1
R	0	1	0	1	0	1	0	1
$P \vee Q \vee R$	0	1	1	1	1	1	1	1
$P \vee Q \vee \neg R$	1	0	1	1	1	1	1	1
$P \vee \neg Q \vee R$	1	1	0	1	1	1	1	1
$P \vee \neg Q \vee \neg R$	1	1	1	0	1	1	1	1
$\neg P \vee Q \vee R$	1	1	1	1	0	1	1	1
$\neg P \vee Q \vee \neg R$	1	1	1	1	1	0	1	1
$\neg P \vee \neg Q \vee R$	1	1	1	1	1	1	0	1
$\neg P \vee \neg Q \vee \neg R$	1	1	1	1	1	1	1	0

大项 & 编码: 使得该大项真值为 0 的一组指派.

P	0	0	0	0	1	1	1	1
Q	0	0	1	1	0	0	1	1
R	0	1	0	1	0	1	0	1
$P \vee Q \vee R$	0	1	1	1	1	1	1	1
$P \vee Q \vee \neg R$	1	0	1	1	1	1	1	1
$P \vee \neg Q \vee R$	1	1	0	1	1	1	1	1
$P \vee \neg Q \vee \neg R$	1	1	1	0	1	1	1	1
$\neg P \vee Q \vee R$	1	1	1	1	0	1	1	1
$\neg P \vee Q \vee \neg R$	1	1	1	1	1	0	1	1
$\neg P \vee \neg Q \vee R$	1	1	1	1	1	1	0	1
$\neg P \vee \neg Q \vee \neg R$	1	1	1	1	1	1	1	0

$$M_{000} = P \vee Q \vee R$$

大项 & 编码: 使得该大项真值为 0 的一组指派.

P	0	0	0	0	1	1	1	1
Q	0	0	1	1	0	0	1	1
R	0	1	0	1	0	1	0	1
$P \vee Q \vee R$	0	1	1	1	1	1	1	1
$P \vee Q \vee \neg R$	1	0	1	1	1	1	1	1
$P \vee \neg Q \vee R$	1	1	0	1	1	1	1	1
$P \vee \neg Q \vee \neg R$	1	1	1	0	1	1	1	1
$\neg P \vee Q \vee R$	1	1	1	1	0	1	1	1
$\neg P \vee Q \vee \neg R$	1	1	1	1	1	0	1	1
$\neg P \vee \neg Q \vee R$	1	1	1	1	1	1	0	1
$\neg P \vee \neg Q \vee \neg R$	1	1	1	1	1	1	1	0

$M_{000} = P \vee Q \vee R$

$M_{001} = P \vee Q \vee \neg R$

大项 & 编码: 使得该大项真值为 0 的一组指派.

P	0	0	0	0	1	1	1	1
Q	0	0	1	1	0	0	1	1
R	0	1	0	1	0	1	0	1
$P \vee Q \vee R$	0	1	1	1	1	1	1	1
$P \vee Q \vee \neg R$	1	0	1	1	1	1	1	1
$P \vee \neg Q \vee R$	1	1	0	1	1	1	1	1
$P \vee \neg Q \vee \neg R$	1	1	1	0	1	1	1	1
$\neg P \vee Q \vee R$	1	1	1	1	0	1	1	1
$\neg P \vee Q \vee \neg R$	1	1	1	1	1	0	1	1
$\neg P \vee \neg Q \vee R$	1	1	1	1	1	1	0	1
$\neg P \vee \neg Q \vee \neg R$	1	1	1	1	1	1	1	0

$$M_{000} = P \vee Q \vee R$$
$$M_{001} = P \vee Q \vee \neg R$$
$$M_{010} = P \vee \neg Q \vee R$$

大项 & 编码: 使得该大项真值为 0 的一组指派.

P	0	0	0	0	1	1	1	1
Q	0	0	1	1	0	0	1	1
R	0	1	0	1	0	1	0	1
$P \vee Q \vee R$	0	1	1	1	1	1	1	1
$P \vee Q \vee \neg R$	1	0	1	1	1	1	1	1
$P \vee \neg Q \vee R$	1	1	0	1	1	1	1	1
$P \vee \neg Q \vee \neg R$	1	1	1	0	1	1	1	1
$\neg P \vee Q \vee R$	1	1	1	1	0	1	1	1
$\neg P \vee Q \vee \neg R$	1	1	1	1	1	0	1	1
$\neg P \vee \neg Q \vee R$	1	1	1	1	1	1	0	1
$\neg P \vee \neg Q \vee \neg R$	1	1	1	1	1	1	1	0

$$M_{000} = P \vee Q \vee R$$
$$M_{001} = P \vee Q \vee \neg R$$
$$M_{010} = P \vee \neg Q \vee R$$
$$M_{011} = P \vee \neg Q \vee \neg R$$

P	0	0	0	0	1	1	1	1
Q	0	0	1	1	0	0	1	1
R	0	1	0	1	0	1	0	1
$P\vee Q\vee R$	0	1	1	1	1	1	1	1
$P\vee Q\vee \neg R$	1	0	1	1	1	1	1	1
$P\vee \neg Q\vee R$	1	1	0	1	1	1	1	1
$P\vee \neg Q\vee \neg R$	1	1	1	0	1	1	1	1
$\neg P\vee Q\vee R$	1	1	1	1	0	1	1	1
$\neg P\vee Q\vee \neg R$	1	1	1	1	1	0	1	1
$\neg P\vee \neg Q\vee R$	1	1	1	1	1	1	0	1
$\neg P\vee \neg Q\vee \neg R$	1	1	1	1	1	1	1	0

$M_{000} = P\vee Q\vee R$

$M_{001} = P\vee Q\vee \neg R$

$M_{010} = P\vee \neg Q\vee R$

$M_{011} = P\vee \neg Q\vee \neg R$

$M_{100} = \neg P\vee Q\vee R$

$M_{101} = \neg P\vee Q\vee \neg R$

$M_{110} = \neg P\vee \neg Q\vee R$

$M_{111} = \neg P\vee \neg Q\vee \neg R$

大项 & 编码: 使得该大项真值为 0 的一组指派.

P	0	0	0	0	1	1	1	1
Q	0	0	1	1	0	0	1	1
R	0	1	0	1	0	1	0	1
$P\vee Q\vee R$	0	1	1	1	1	1	1	1
$P\vee Q\vee \neg R$	1	0	1	1	1	1	1	1
$P\vee \neg Q\vee R$	1	1	0	1	1	1	1	1
$P\vee \neg Q\vee \neg R$	1	1	1	0	1	1	1	1
$\neg P\vee Q\vee R$	1	1	1	1	0	1	1	1
$\neg P\vee Q\vee \neg R$	1	1	1	1	1	0	1	1
$\neg P\vee \neg Q\vee R$	1	1	1	1	1	1	0	1
$\neg P\vee \neg Q\vee \neg R$	1	1	1	1	1	1	1	0

$$M_{000} = P\vee Q\vee R$$
$$M_{001} = P\vee Q\vee \neg R$$
$$M_{010} = P\vee \neg Q\vee R$$
$$M_{011} = P\vee \neg Q\vee \neg R$$
$$M_{100} = \neg P\vee Q\vee R$$
$$M_{101} = \neg P\vee Q\vee \neg R$$
$$M_{110} = \neg P\vee \neg Q\vee R$$
$$M_{111} = \neg P\vee \neg Q\vee \neg R$$

- 表中的 0, 1 分别代表真值 **F**, **T**.
- 二进制编码也可以转为十进制, 如 $M_{000} \triangleq M_0$, $M_{101} \triangleq M_5$, $M_{111} \triangleq M_7$.

大项的性质

(i) 当真值指派与编码相同时[a], 大项真值为 **F**, 在其余均为 **T**.

例如:

$$M_{001} = P \vee Q \vee \neg R, \tag{16}$$

$$M_{010} = P \vee \neg Q \vee R. \tag{17}$$

(ii) 任意两个不同大项的析取式为永真[b].

(iii) 全体大项的合取式为永假, 记为:

$$\prod_{i=0}^{2^n-1} M_i = M_0 \wedge M_1 \wedge \cdots \wedge M_{2^n-1} \Leftrightarrow \mathbf{F}$$

[a] 真值 **T** 和 **F** 分别记为 1 和 0.

[b] 对任意一组真值指派, 有且仅有一个大项真值为 **F**.

主合取范式

Definition 3.16 (主合取范式)

对于给定的命题公式 A, 如果存在公式 A' 满足

1) $A' \Leftrightarrow A$;
2) A' 仅由大项的合取所组成.

则称 A' 为 A 的主合取范式(major conjunctive normal form).

主合取范式

Theorem 3.17

在真值表中，一个公式的真值为 **F** 的指派所对应的大项的合取，即为此公式的主合取范式.

主合取范式

Theorem 3.17

在真值表中，一个公式的真值为 **F** 的指派所对应的大项的合取，即为此公式的主合取范式.

Example 3.18

P	Q	$P \vee Q$	$P \vee \neg Q$	$\neg P \vee Q$	$\neg P \vee \neg Q$	$P \leftrightarrow Q$
T	**T**	**T**	**T**	**T**	**F**	**T**
T	**F**	**T**	**T**	**F**	**T**	**F**
F	**T**	**T**	**F**	**T**	**T**	**F**
F	**F**	**F**	**T**	**T**	**T**	**T**

$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q).$$

利用真值表求 $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)$ 的主析取范式与主合取范式.

利用真值表求 $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)$ 的主析取范式与主合取范式.

解:

P	Q	R	$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)$
T	**T**	**T**	**T**
T	**T**	**F**	**T**
T	**F**	**T**	**F**
T	**F**	**F**	**F**
F	**T**	**T**	**T**
F	**T**	**F**	**F**
F	**F**	**T**	**T**
F	**F**	**F**	**F**

主析取范式: $(P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$

$= m_{111} \vee m_{110} \vee m_{011} \vee m_{001} \triangleq m_7 \vee m_6 \vee m_3 \vee m_1 \triangleq \sum_{1,3,6,7}.$

利用真值表求 $(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge R)$ 的主析取范式与主合取范式.

解:

P	Q	R	$(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge R)$
T	**T**	**T**	**T**
T	**T**	**F**	**T**
T	**F**	**T**	**F**
T	**F**	**F**	**F**
F	**T**	**T**	**T**
F	**T**	**F**	**F**
F	**F**	**T**	**T**
F	**F**	**F**	**F**

主析取范式: $(P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)$

$= m_{111}\vee m_{110}\vee m_{011}\vee m_{001}\triangleq m_7\vee m_6\vee m_3\vee m_1\triangleq\sum_{1,3,6,7}$.

主合取范式: $(\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee R)\wedge(P\vee Q\vee R)$

$= M_{101}\wedge M_{100}\wedge M_{010}\wedge M_{000}\triangleq M_5\wedge M_4\wedge M_2\wedge M_0\triangleq\prod_{0,2,4,5}$.

利用真值表求 $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)$ 的主析取范式与主合取范式.

解:

P	Q	R	$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)$
T	**T**	**T**	**T**
T	**T**	**F**	**T**
T	**F**	**T**	**F**
T	**F**	**F**	**F**
F	**T**	**T**	**T**
F	**T**	**F**	**F**
F	**F**	**T**	**T**
F	**F**	**F**	**F**

主析取范式: $(P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$

$= m_{111} \vee m_{110} \vee m_{011} \vee m_{001} \triangleq m_7 \vee m_6 \vee m_3 \vee m_1 \triangleq \sum_{1,3,6,7}$.

主合取范式: $(\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R)$

$= M_{101} \wedge M_{100} \wedge M_{010} \wedge M_{000} \triangleq M_5 \wedge M_4 \wedge M_2 \wedge M_0 \triangleq \prod_{0,2,4,5}$.

☞ 主析取范式与主合取范式的简记式中的下标是“互补”的.

利用真值表求 $(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge R)$ 的主析取范式与主合取范式.

解:

P	Q	R	$(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge R)$
T	**T**	**T**	**T**
T	**T**	**F**	**T**
T	**F**	**T**	**F**
T	**F**	**F**	**F**
F	**T**	**T**	**T**
F	**T**	**F**	**F**
F	**F**	**T**	**T**
F	**F**	**F**	**F**

主析取范式: $(P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)$

$= m_{111}\vee m_{110}\vee m_{011}\vee m_{001}\triangleq m_7\vee m_6\vee m_3\vee m_1\triangleq\sum_{1,3,6,7}.$

主合取范式: $(\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee R)\wedge(P\vee Q\vee R)$

$= M_{101}\wedge M_{100}\wedge M_{010}\wedge M_{000}\triangleq M_5\wedge M_4\wedge M_2\wedge M_0\triangleq\prod_{0,2,4,5}.$

☞ 主析取范式与主合取范式的简记式中的下标是“互补”的. Why?

为什么编码是“互补”的?

命题公式的真值只有 **T** 和 **F**. 与 **T** 对应的真值指派做了小项的编码, 剩下的是 **F** 对应的真值指派, 作为大项的编码, 这两部分是“互补”的. (合起来就是全部的真值指派.)

$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R) \Leftrightarrow \sum_{1,3,6,7} \Leftrightarrow \prod_{0,2,4,5}$.

P	Q	R	$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)$		
T	**T**	**T**	**T**	$(P \wedge Q \wedge R)$	$m_{111} = m_7$
T	**T**	**F**	**T**	$(P \wedge Q \wedge \neg R)$	$m_{110} = m_6$
T	**F**	**T**	**F**	$(\neg P \vee Q \vee \neg R)$	$M_{101} = M_5$
T	**F**	**F**	**F**	$(\neg P \vee Q \vee R)$	$M_{100} = M_4$
F	**T**	**T**	**T**	$(\neg P \wedge Q \wedge R)$	$m_{011} = m_3$
F	**T**	**F**	**F**	$(P \vee \neg Q \vee R)$	$M_{010} = M_2$
F	**F**	**T**	**T**	$(\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$	$m_{001} = m_1$
F	**F**	**F**	**F**	$(P \vee Q \vee R)$	$M_{000} = M_0$

为什么编码是“互补”的?

命题公式的真值只有 **T** 和 **F**. 与 **T** 对应的真值指派做了小项的编码, 剩下的是 **F** 对应的真值指派, 作为大项的编码, 这两部分是“互补”的. (合起来就是全部的真值指派.)

$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R) \Leftrightarrow \sum_{1,3,6,7} \Leftrightarrow \prod_{0,2,4,5}$.

P	Q	R	$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)$		
T	**T**	**T**	**T**	$(P \wedge Q \wedge R)$	$m_{111} = m_7$
T	**T**	**F**	**T**	$(P \wedge Q \wedge \neg R)$	$m_{110} = m_6$
T	**F**	**T**	**F**	$(\neg P \vee Q \vee \neg R)$	$M_{101} = M_5$
T	**F**	**F**	**F**	$(\neg P \vee Q \vee R)$	$M_{100} = M_4$
F	**T**	**T**	**T**	$(\neg P \wedge Q \wedge R)$	$m_{011} = m_3$
F	**T**	**F**	**F**	$(P \vee \neg Q \vee R)$	$M_{010} = M_2$
F	**F**	**T**	**T**	$(\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$	$m_{001} = m_1$
F	**F**	**F**	**F**	$(P \vee Q \vee R)$	$M_{000} = M_0$

☞ 发现规律了没有? 由真值表, 如果只需要写出主析取范式或主合取范式的简记式, 那就太简单了!

知道主析取范式，直接写出主合取范式？

如果已经得到了主析取范式，可以直接写出主合取范式：对主析取范式中没有出现的小项组合，将 $\wedge$ 换为 $\vee$，P_i 换为 $\neg P_i$，而 $\neg P_j$ 换为 P_j，即得到构成主合取范式的所有大项.

$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R) \Leftrightarrow \sum_{1,3,6,7} \Leftrightarrow \prod_{0,2,4,5}$.

P	Q	R	$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)$	小项与大项	没有出现的小项
T	**T**	**T**	**T**	$(P \wedge Q \wedge R)$	
T	**T**	**F**	**T**	$(P \wedge Q \wedge \neg R)$	
T	**F**	**T**	**F**	$(\neg P \vee Q \vee \neg R)$	$P \wedge \neg Q \wedge R$
T	**F**	**F**	**F**	$(\neg P \vee Q \vee R)$	$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$
F	**T**	**T**	**T**	$(\neg P \wedge Q \wedge R)$	
F	**T**	**F**	**F**	$(P \vee \neg Q \vee R)$	$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$
F	**F**	**T**	**T**	$(\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$	
F	**F**	**F**	**F**	$(P \vee Q \vee R)$	$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$

知道主析取范式, 直接写出主合取范式?

如果已经得到了主析取范式, 可以直接写出主合取范式: 对主析取范式中没有出现的小项组合, 将 $\wedge$ 换为 $\vee$, P_i 换为 $\neg P_i$, 而 $\neg P_j$ 换为 P_j, 即得到构成主合取范式的所有大项.

$$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R) \Leftrightarrow \sum_{1,3,6,7} \Leftrightarrow \prod_{0,2,4,5}.$$

P	Q	R	$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)$	小项与大项	没有出现的小项
T	**T**	**T**	**T**	$(P \wedge Q \wedge R)$	
T	**T**	**F**	**T**	$(P \wedge Q \wedge \neg R)$	
T	**F**	**T**	**F**	$(\neg P \vee Q \vee \neg R)$	$P \wedge \neg Q \wedge R$
T	**F**	**F**	**F**	$(\neg P \vee Q \vee R)$	$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$
F	**T**	**T**	**T**	$(\neg P \wedge Q \wedge R)$	
F	**T**	**F**	**F**	$(P \vee \neg Q \vee R)$	$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$
F	**F**	**T**	**T**	$(\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$	
F	**F**	**F**	**F**	$(P \vee Q \vee R)$	$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$

理论支持? $\neg A(P_1, P_2, \cdots, P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n)$.

知道主析取范式，直接写出主合取范式？

如果已经得到了主析取范式，可以直接写出主合取范式：对主析取范式中没有出现的小项组合，将 $\wedge$ 换为 $\vee$，P_i 换为 $\neg P_i$，而 $\neg P_j$ 换为 P_j，即得到构成主合取范式的所有大项.

$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R) \Leftrightarrow \sum_{1,3,6,7} \Leftrightarrow \prod_{0,2,4,5}$.

P	Q	R	$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)$	小项与大项	没有出现的小项
T	**T**	**T**	**T**	$(P \wedge Q \wedge R)$	
T	**T**	**F**	**T**	$(P \wedge Q \wedge \neg R)$	
T	**F**	**T**	**F**	$(\neg P \vee Q \vee \neg R)$	$P \wedge \neg Q \wedge R$
T	**F**	**F**	**F**	$(\neg P \vee Q \vee R)$	$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$
F	**T**	**T**	**T**	$(\neg P \wedge Q \wedge R)$	
F	**T**	**F**	**F**	$(P \vee \neg Q \vee R)$	$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$
F	**F**	**T**	**T**	$(\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$	
F	**F**	**F**	**F**	$(P \vee Q \vee R)$	$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$

理论支持？$\neg A(P_1, P_2, \cdots, P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n)$. 怎么理解？

验证 $\neg A(P_1, P_2, \cdots, P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n)$.

记 $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)$ 为 $A(P, Q, R)$.

P	Q	R	$A(P,Q,R)$	小项与大项	A 中没有出现的小项	$\neg A(P,Q,R)$
T	**T**	**T**	**T**	$(P \wedge Q \wedge R)$		**F**
T	**T**	**F**	**T**	$(P \wedge Q \wedge \neg R)$		**F**
T	**F**	**T**	**F**	$(\neg P \vee Q \vee \neg R)$	$P \wedge \neg Q \wedge R$	**T**
T	**F**	**F**	**F**	$(\neg P \vee Q \vee R)$	$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	**T**
F	**T**	**T**	**T**	$(\neg P \wedge Q \wedge R)$		**F**
F	**T**	**F**	**F**	$(P \vee \neg Q \vee R)$	$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$	**T**
F	**F**	**T**	**T**	$(\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$		**F**
F	**F**	**F**	**F**	$(P \vee Q \vee R)$	$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	**T**

验证 $\neg A(P_1, P_2, \cdots, P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n)$.

记 $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)$ 为 $A(P, Q, R)$.

P	Q	R	$A(P, Q, R)$	小项与大项	A 中没有出现的小项	$\neg A(P, Q, R)$
T	**T**	**T**	**T**	$(P \wedge Q \wedge R)$		**F**
T	**T**	**F**	**T**	$(P \wedge Q \wedge \neg R)$		**F**
T	**F**	**T**	**F**	$(\neg P \vee Q \vee \neg R)$	$P \wedge \neg Q \wedge R$	**T**
T	**F**	**F**	**F**	$(\neg P \vee Q \vee R)$	$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	**T**
F	**T**	**T**	**T**	$(\neg P \wedge Q \wedge R)$		**F**
F	**T**	**F**	**F**	$(P \vee \neg Q \vee R)$	$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$	**T**
F	**F**	**T**	**T**	$(\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$		**F**
F	**F**	**F**	**F**	$(P \vee Q \vee R)$	$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	**T**

可见 A 中没有出现的小项, 构成 $\neg A(P, Q, R)$ 的小项.

验证 $\neg A(P_1, P_2, \cdots, P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n)$.

记 $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)$ 为 $A(P, Q, R)$.

P	Q	R	$A(P, Q, R)$	小项与大项	A 中没有出现的小项	$\neg A(P, Q, R)$
T	**T**	**T**	**T**	$(P \wedge Q \wedge R)$		**F**
T	**T**	**F**	**T**	$(P \wedge Q \wedge \neg R)$		**F**
T	**F**	**T**	**F**	$(\neg P \vee Q \vee \neg R)$	$P \wedge \neg Q \wedge R$	**T**
T	**F**	**F**	**F**	$(\neg P \vee Q \vee R)$	$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	**T**
F	**T**	**T**	**T**	$(\neg P \wedge Q \wedge R)$		**F**
F	**T**	**F**	**F**	$(P \vee \neg Q \vee R)$	$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$	**T**
F	**F**	**T**	**T**	$(\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$		**F**
F	**F**	**F**	**F**	$(P \vee Q \vee R)$	$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	**T**

可见 A 中没有出现的小项, 构成 $\neg A(P, Q, R)$ 的小项.

$$A(P, Q, R) \Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R),$$

$$\neg A(P, Q, R) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R),$$

$$A^*(P, Q, R) \Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R),$$

$$A^*(\neg P, \neg Q, \neg R) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R).$$

Example 3.19

求 $(P \to Q) \wedge Q$ 的主析取范式与主合取范式.

Example 3.19

求 $(P \to Q) \wedge Q$ 的主析取范式与主合取范式.

解: 主析取范式为:

$$
\begin{aligned}
& (P \to Q) \wedge Q \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee Q) \wedge Q
\end{aligned}
$$

Example 3.19

求 $(P \to Q) \wedge Q$ 的主析取范式与主合取范式.

解: 主析取范式为:

$$
\begin{aligned}
& (P \to Q) \wedge Q \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee Q) \wedge Q \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge Q) \vee (Q \wedge Q)
\end{aligned}
$$

Example 3.19

求 $(P \to Q) \wedge Q$ 的主析取范式与主合取范式.

解: 主析取范式为:

$$
\begin{aligned}
& (P \to Q) \wedge Q \\
\Leftrightarrow & (\neg P \vee Q) \wedge Q \\
\Leftrightarrow & (\neg P \wedge Q) \vee (Q \wedge Q) \\
\Leftrightarrow & (\neg P \wedge Q) \vee (Q \wedge (P \vee \neg P))
\end{aligned}
$$

Example 3.19

求 $(P \to Q) \wedge Q$ 的主析取范式与主合取范式.

解: 主析取范式为:

$$
\begin{aligned}
& (P \to Q) \wedge Q \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee Q) \wedge Q \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge Q) \vee (Q \wedge Q) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge Q) \vee (Q \wedge (P \vee \neg P)) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge Q) \vee (Q \wedge P) \vee (Q \wedge \neg P)
\end{aligned}
$$

Example 3.19

求 $(P \to Q) \wedge Q$ 的主析取范式与主合取范式.

解: 主析取范式为:

$$
\begin{aligned}
& (P \to Q) \wedge Q \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee Q) \wedge Q \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge Q) \vee (Q \wedge Q) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge Q) \vee (Q \wedge (P \vee \neg P)) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge Q) \vee (Q \wedge P) \vee (Q \wedge \neg P) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)
\end{aligned}
$$

Example 3.19

求 $(P \to Q) \wedge Q$ 的主析取范式与主合取范式.

解: 主析取范式为:

$$
\begin{aligned}
& (P \to Q) \wedge Q \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee Q) \wedge Q \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge Q) \vee (Q \wedge Q) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge Q) \vee (Q \wedge (P \vee \neg P)) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge Q) \vee (Q \wedge P) \vee (Q \wedge \neg P) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q) \\
\Leftrightarrow\ & m_{01} \vee m_{11} = \sum\nolimits_{1,3}.
\end{aligned}
$$

Example 3.19

求 $(P \to Q) \wedge Q$ 的主析取范式与主合取范式.

解: 主析取范式为:

$$
\begin{aligned}
& (P \to Q) \wedge Q \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee Q) \wedge Q \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge Q) \vee (Q \wedge Q) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge Q) \vee (Q \wedge (P \vee \neg P)) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge Q) \vee (Q \wedge P) \vee (Q \wedge \neg P) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q) \\
\Leftrightarrow\ & m_{01} \vee m_{11} = \sum\nolimits_{1,3}.
\end{aligned}
$$

主合取范式为:

$$
\begin{aligned}
& (P \to Q) \wedge Q \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee Q) \wedge Q \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee Q) \wedge ((P \wedge \neg P) \vee Q)
\end{aligned}
$$

Example 3.19

求 $(P \to Q) \wedge Q$ 的主析取范式与主合取范式.

解: 主析取范式为:

$$
\begin{aligned}
& (P \to Q) \wedge Q \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee Q) \wedge Q \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge Q) \vee (Q \wedge Q) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge Q) \vee (Q \wedge (P \vee \neg P)) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge Q) \vee (Q \wedge P) \vee (Q \wedge \neg P) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q) \\
\Leftrightarrow\ & m_{01} \vee m_{11} = \sum\nolimits_{1,3}.
\end{aligned}
$$

主合取范式为:

$$
\begin{aligned}
& (P \to Q) \wedge Q \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee Q) \wedge Q \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee Q) \wedge ((P \wedge \neg P) \vee Q) \\
\Leftrightarrow\ & (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q)
\end{aligned}
$$

Example 3.19

求 $(P \to Q) \wedge Q$ 的主析取范式与主合取范式.

解: 主析取范式为:

$$
\begin{aligned}
& (P \to Q) \wedge Q \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee Q) \wedge Q \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge Q) \vee (Q \wedge Q) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge Q) \vee (Q \wedge (P \vee \neg P)) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge Q) \vee (Q \wedge P) \vee (Q \wedge \neg P) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q) \\
\Leftrightarrow\ & m_{01} \vee m_{11} = \sum_{1,3}.
\end{aligned}
$$

主合取范式为:

$$
\begin{aligned}
& (P \to Q) \wedge Q \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee Q) \wedge Q \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee Q) \wedge ((P \wedge \neg P) \vee Q) \\
\Leftrightarrow\ & (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q) \\
\Leftrightarrow\ & M_{00} \wedge M_{10}
\end{aligned}
$$

Example 3.19

求 $(P \to Q) \wedge Q$ 的主析取范式与主合取范式.

解: 主析取范式为:

$$
\begin{aligned}
& (P \to Q) \wedge Q \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee Q) \wedge Q \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge Q) \vee (Q \wedge Q) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge Q) \vee (Q \wedge (P \vee \neg P)) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge Q) \vee (Q \wedge P) \vee (Q \wedge \neg P) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q) \\
\Leftrightarrow\ & m_{01} \vee m_{11} = \sum\nolimits_{1,3}.
\end{aligned}
$$

主合取范式为:

$$
\begin{aligned}
& (P \to Q) \wedge Q \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee Q) \wedge Q \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee Q) \wedge ((P \wedge \neg P) \vee Q) \\
\Leftrightarrow\ & (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q) \\
\Leftrightarrow\ & M_{00} \wedge M_{10} \\
=\ & \prod\nolimits_{0,2}.
\end{aligned}
$$

Example 3.19

求 $(P \to Q) \wedge Q$ 的主析取范式与主合取范式.

解: 主析取范式为:

$$
\begin{aligned}
& (P \to Q) \wedge Q \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee Q) \wedge Q \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge Q) \vee (Q \wedge Q) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge Q) \vee (Q \wedge (P \vee \neg P)) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge Q) \vee (Q \wedge P) \vee (Q \wedge \neg P) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q) \\
\Leftrightarrow\ & m_{01} \vee m_{11} = \sum\nolimits_{1,3}.
\end{aligned}
$$

主合取范式为:

$$
\begin{aligned}
& (P \to Q) \wedge Q \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee Q) \wedge Q \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee Q) \wedge ((P \wedge \neg P) \vee Q) \\
\Leftrightarrow\ & (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q) \\
\Leftrightarrow\ & M_{00} \wedge M_{10} \\
=\ & \prod\nolimits_{0,2}.
\end{aligned}
$$

由于主析取范式与主合取范式的简记式中的下标是“互补”的, 因此也可由其中一个直接求另一个.

练习

利用编码的互补性, 求 $P \leftrightarrow Q$ 的主析取范式与主合取范式.

练习

利用编码的互补性, 求 $P \leftrightarrow Q$ 的主析取范式与主合取范式.

解:

$$
\begin{aligned}
P \leftrightarrow Q &\Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P) \\
&\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P) \\
&\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) && \text{(主合取范式)} \\
&= M_{10} \wedge M_{01} \\
&= \prod\nolimits_{1,2} \\
&\Leftrightarrow \sum\nolimits_{0,3} \\
&= m_{00} \vee m_{11} \\
&= (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q). && \text{(主析取范式)}
\end{aligned}
$$

范式的应用

(1) 判定二命题公式是否等值. $P \Leftrightarrow Q$ 当且仅当 P 与 Q 有相同的主析 (合) 取范式.

(2) 判定命题公式的类型. 设 P 是含有 n 个变元的命题公式:

1. P 为重言式, 当且仅当 P 的主析取范式中含有 2^n 个小项.
2. P 为永假式, 当且仅当 P 的主合取范式中含有 2^n 个大项.

(3) 求命题公式的成真和成假赋值.

用将合式公式化为范式的方法证明下列两式是等价的:

$$(A \to B) \wedge (A \to C), \quad A \to (B \wedge C).$$

用将合式公式化为范式的方法证明下列两式是等价的:

$$(A \to B) \land (A \to C), \quad A \to (B \land C).$$

解: 由

$$\begin{aligned}
(A \to B) \land (A \to C) &\Leftrightarrow (\neg A \lor B) \land (\neg A \lor C), \\
A \to (B \land C) &\Leftrightarrow \neg A \lor (B \land C) \\
&\Leftrightarrow (\neg A \lor B) \land (\neg A \lor C),
\end{aligned}$$

用将合式公式化为范式的方法证明下列两式是等价的:

$$(A \to B) \wedge (A \to C), \quad A \to (B \wedge C).$$

解: 由

$$\begin{aligned}(A \to B) \wedge (A \to C) &\Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee C),\\ A \to (B \wedge C) &\Leftrightarrow \neg A \vee (B \wedge C)\\ &\Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee C),\end{aligned}$$

得

$$(A \to B) \wedge (A \to C) \Leftrightarrow A \to (B \wedge C).$$

求下列各式的主析取范式及主合取范式, 并指出哪些是重言式.

(a) $(\neg P \vee \neg Q) \to (P \leftrightarrow \neg Q)$;

[1]注意到 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$.

[2]前面有例子证明过 $P \vee Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$. ▸ 见前例.

求下列各式的主析取范式及主合取范式, 并指出哪些是重言式.

(a) $(\neg P \vee \neg Q) \to (P \leftrightarrow \neg Q)$;

解: (a)

$$(\neg P \vee \neg Q) \to (P \leftrightarrow \neg Q)$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q) \vee (P \leftrightarrow \neg Q)$$

[1]注意到 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$.

[2]前面有例子证明过 $P \vee Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$. 见前例.

求下列各式的主析取范式及主合取范式, 并指出哪些是重言式.

(a) $(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (P \leftrightarrow \neg Q)$;

解: (a)

$$
\begin{aligned}
& (\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (P \leftrightarrow \neg Q) \\
\Leftrightarrow\ & \neg(\neg P \vee \neg Q) \vee (P \leftrightarrow \neg Q) \\
\Leftrightarrow\ & (P \wedge Q) \vee \overbrace{(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)}^{2} \qquad \text{(主析取范式)}
\end{aligned}
$$

[1]注意到 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$.

[2]前面有例子证明过 $P \vee Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$. 见前例.

求下列各式的主析取范式及主合取范式, 并指出哪些是重言式.

(a) $(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (P \leftrightarrow \neg Q)$;

解: (a)

$$
\begin{aligned}
& (\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (P \leftrightarrow \neg Q) \\
\Leftrightarrow\ & \neg(\neg P \vee \neg Q) \vee (P \leftrightarrow \neg Q) \\
\Leftrightarrow\ & (P \wedge Q) \vee \overbrace{(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)}^{2} \qquad \text{(主析取范式)} \\
=\ & \sum\nolimits_{1,2,3}
\end{aligned}
$$

[1]注意到 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$.

[2]前面有例子证明过 $P \vee Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$. 见前例.

求下列各式的主析取范式及主合取范式, 并指出哪些是重言式.

(a) $(\neg P \vee \neg Q) \to (P \leftrightarrow \neg Q)$;

解: (a)

$$
\begin{aligned}
& (\neg P \vee \neg Q) \to (P \leftrightarrow \neg Q) \\
\Leftrightarrow\ & \neg(\neg P \vee \neg Q) \vee (P \leftrightarrow \neg Q) \\
\Leftrightarrow\ & (P \wedge Q) \vee \overbrace{(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)}^{1}{}^{2} \qquad \text{(主析取范式)} \\
=\ & \sum\nolimits_{1,2,3} \\
\Leftrightarrow\ & \prod\nolimits_{0}
\end{aligned}
$$

[1] 注意到 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$.

[2] 前面有例子证明过 $P \vee Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$. 见前例.

求下列各式的主析取范式及主合取范式, 并指出哪些是重言式.

(a) $(\neg P \vee \neg Q) \to (P \leftrightarrow \neg Q)$;

解: (a)

$$
\begin{aligned}
& (\neg P \vee \neg Q) \to (P \leftrightarrow \neg Q) \\
\Leftrightarrow\ & \neg(\neg P \vee \neg Q) \vee (P \leftrightarrow \neg Q) \\
\Leftrightarrow\ & (P \wedge Q) \vee \overbrace{(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)}^{2} && \text{(主析取范式)} \\
=\ & \sum\nolimits_{1,2,3} \\
\Leftrightarrow\ & \prod\nolimits_{0} \\
=\ & P \vee Q.^{3} && \text{(主合取范式 (只含一个大项!))}
\end{aligned}
$$

[1]注意到 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$.

[2]前面有例子证明过 $P \vee Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$. 见前例.

求下列各式的主析取范式及主合取范式, 并指出哪些是重言式.

(e) $P \to \big(P \wedge (Q \to P)\big)$.

求下列各式的主析取范式及主合取范式, 并指出哪些是重言式.

(e) $P \to \big(P \wedge (Q \to P)\big)$.

解: (e)

$$
\begin{aligned}
& P \to \big(P \wedge (Q \to P)\big) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee \big(P \wedge (\neg Q \vee P)\big)
\end{aligned}
$$

求下列各式的主析取范式及主合取范式, 并指出哪些是重言式.

(e) $P \to \big(P \wedge (Q \to P)\big)$.

解: (e)

$$
\begin{aligned}
& P \to \big(P \wedge (Q \to P)\big) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee \big(P \wedge (\neg Q \vee P)\big) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee P) \wedge (\neg P \vee (\neg Q \vee P))
\end{aligned}
$$

求下列各式的主析取范式及主合取范式, 并指出哪些是重言式.

(e) $P \to \big(P \wedge (Q \to P)\big)$.

解: (e)

$$
\begin{aligned}
& P \to \big(P \wedge (Q \to P)\big) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee \big(P \wedge (\neg Q \vee P)\big) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee P) \wedge \big(\neg P \vee (\neg Q \vee P)\big) \\
\Leftrightarrow\ & \mathbf{T} \wedge (\mathbf{T} \vee \neg Q) \\
\Leftrightarrow\ & \mathbf{T} && \text{(重言式)}
\end{aligned}
$$

求下列各式的主析取范式及主合取范式, 并指出哪些是重言式.

(e) $P \to \big(P \wedge (Q \to P)\big)$.

解: (e)

$$
\begin{aligned}
& P \to \big(P \wedge (Q \to P)\big) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee \big(P \wedge (\neg Q \vee P)\big) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee P) \wedge (\neg P \vee (\neg Q \vee P)) \\
\Leftrightarrow\ & \mathbf{T} \wedge (\mathbf{T} \vee \neg Q) \\
\Leftrightarrow\ & \mathbf{T} && \text{(重言式)} \\
\Leftrightarrow\ & \sum\nolimits_{0,1,2,3}
\end{aligned}
$$

求下列各式的主析取范式及主合取范式, 并指出哪些是重言式.

(e) $P \to \big(P \wedge (Q \to P)\big)$.

解: (e)

$$
\begin{aligned}
& P \to \big(P \wedge (Q \to P)\big) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee \big(P \wedge (\neg Q \vee P)\big) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee P) \wedge (\neg P \vee (\neg Q \vee P)) \\
\Leftrightarrow\ & \mathbf{T} \wedge (\mathbf{T} \vee \neg Q) \\
\Leftrightarrow\ & \mathbf{T} && \text{(重言式)} \\
\Leftrightarrow\ & \textstyle\sum_{0,1,2,3} \\
=\ & (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) && \text{(主析取范式)}
\end{aligned}
$$

求下列各式的主析取范式及主合取范式, 并指出哪些是重言式.

(e) $P \to \big(P \wedge (Q \to P)\big)$.

解: (e)

$$
\begin{aligned}
& P \to \big(P \wedge (Q \to P)\big) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee \big(P \wedge (\neg Q \vee P)\big) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee P) \wedge (\neg P \vee (\neg Q \vee P)) \\
\Leftrightarrow\ & \mathbf{T} \wedge (\mathbf{T} \vee \neg Q) \\
\Leftrightarrow\ & \mathbf{T} && \text{(重言式)} \\
\Leftrightarrow\ & \sum\nolimits_{0,1,2,3} \\
=\ & (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) && \text{(主析取范式)}
\end{aligned}
$$

可见 $P \to \big(P \wedge (Q \to P)\big)$ 是重言式. (没有主合取范式.)

Example 3.20

A, B, C, D 四个人中要派两个人出差, 按下述三个条件有几种派法? 如何派?

1. 若 A 去则 C 和 D 中要去一人;
2. B 和 C 不能都去;
3. C 去则 D 要留下.

Example 3.20

A, B, C, D 四个人中要派两个人出差, 按下述三个条件有几种派法? 如何派?

1. 若 A 去则 C 和 D 中要去一人;
2. B 和 C 不能都去;
3. C 去则 D 要留下.

解: 设 A: A 派出. 其他类似设定. 则派出的三个条件为

$$A \to (C \bigtriangledown D), \quad \neg(B \wedge C), \quad C \to \neg D.$$

Example 3.20

A, B, C, D 四个人中要派两个人出差, 按下述三个条件有几种派法? 如何派?

1. 若 A 去则 C 和 D 中要去一人;
2. B 和 C 不能都去;
3. C 去则 D 要留下.

解: 设 A: A 派出. 其他类似设定. 则派出的三个条件为

$$A \to (C \bigtriangledown D), \quad \neg(B \wedge C), \quad C \to \neg D.$$

往下求使命题

$$\big(A \to (C \bigtriangledown D)\big) \wedge \big(\neg(B \wedge C)\big) \wedge (C \to \neg D) \tag{18}$$

为 **T** 的真值指派.

Example 3.20

A, B, C, D 四个人中要派两个人出差, 按下述三个条件有几种派法? 如何派?

1. 若 A 去则 C 和 D 中要去一人;
2. B 和 C 不能都去;
3. C 去则 D 要留下.

解: 设 A: A 派出. 其他类似设定. 则派出的三个条件为

$$A \to (C \bar{\vee} D), \quad \neg(B \wedge C), \quad C \to \neg D.$$

往下求使命题

$$\big(A \to (C \bar{\vee} D)\big) \wedge \big(\neg(B \wedge C)\big) \wedge (C \to \neg D) \tag{18}$$

为 **T** 的真值指派.

可以通过主析取范式求解, 也可以借助真值表求解. (见下一页)

注意到 “四个人中要派两个人”, 所以真值表中只列出真值指派有 2 个为真的情形:

A	B	C	D
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1

注意到 “四个人中要派两个人”, 所以真值表中只列出真值指派有 2 个为真的情形:

A	B	C	D	$\big(A \to (C \bar{\vee} D)\big) \wedge \big(\neg(B \wedge C)\big) \wedge (C \to \neg D)$
1	1	0	0	0
1	0	1	0	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	0	1	1
0	0	1	1	0

注意到 “四个人中要派两个人”, 所以真值表中只列出真值指派有 2 个为真的情形:

A	B	C	D	$(A \to (C \bar{\vee} D)) \wedge (\neg(B \wedge C)) \wedge (C \to \neg D)$
1	1	0	0	0
1	0	1	0	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	0	1	1
0	0	1	1	0

注意到表中公式真值为 1 所对应的真值指派, 得派出方式有三种:

$$A \wedge C, \qquad A \wedge D, \qquad B \wedge D.$$

有效结论

在逻辑学中把从所谓前提的一些命题出发, 依据公认的推理规则, 推导出所谓结论的一个命题的过程称为有效推理或形式证明, 所得结论叫做有效结论.

有效结论

在逻辑学中把从所谓前提的一些命题出发, 依据公认的推理规则, 推导出所谓结论的一个命题的过程称为有效推理或形式证明, 所得结论叫做有效结论.

Definition 4.1 (有效结论)

设 A 和 C 是两个命题公式. 当且仅当

$$A \to C \text{ 为一重言式, 即 } A \Rightarrow C,$$

称 "C 是 A 的有效结论". 或 "C 可由 A 逻辑地推出".

有效结论

在逻辑学中把从所谓前提的一些命题出发, 依据公认的推理规则, 推导出所谓结论的一个命题的过程称为有效推理或形式证明, 所得结论叫做有效结论.

Definition 4.1 (有效结论)

设 A 和 C 是两个命题公式. 当且仅当

$$A \to C \text{ 为一重言式, 即 } A \Rightarrow C,$$

称 "C 是 A 的有效结论". 或 "C 可由 A 逻辑地推出".

注意: 不是正确结论. 比如

如果猪会飞, 那么太阳从西边出来.

是重言式. 而命题 "太阳从西边出来" 的真值为 **F**.

Definition 4.2 (推广到有 n 个前提的情形)

设 $H_1, H_2, \cdots, H_n$ 和 C 是命题公式, 当且仅当

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \Rightarrow C$$

称 C 是 "一组前提 $H_1, H_2, \cdots, H_n$ 的有效结论".

Definition 4.2 (推广到有 n 个前提的情形)

设 $H_1, H_2, \cdots, H_n$ 和 C 是命题公式, 当且仅当

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \Rightarrow C$$

称 C 是 "一组前提 $H_1, H_2, \cdots, H_n$ 的有效结论".

注

- 在形式证明中重要的是推理的有效性, 而不在于结论是否真实;
- 所谓 "推理有效" 是指, 结论是前提的合乎逻辑的结果.

论证方法

判别有效结论的过程就是论证过程. 论证方法有

1. 真值表法;
2. 直接证法;
3. 间接证法:
   - 反证法;
   - CP 规则.

真值表法

要证明 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \Rightarrow C$ 是否成立, 使用真值表有两个方法:

1. 对于每一个 $H_1, H_2, \cdots, H_m$ 真值均为 **T** 的行, C 也有真值 **T**. (前件为真, 后件也为真.)

真值表法

要证明 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \Rightarrow C$ 是否成立, 使用真值表有两个方法:

1. 对于每一个 $H_1, H_2, \cdots, H_m$ 真值均为 **T** 的行, C 也有真值 **T**. (前件为真, 后件也为真.)
2. 对于每一个 C 的真值为 **F** 的行, $H_1, H_2, \cdots, H_m$ 的真值中至少有一个为 **F**. (后件为假, 前件也为假.)

Example 4.3

一份统计表格的错误或者是由于材料不可靠, 或者是由于计算有错误; 这份统计表格的错误不是由于材料不可靠, 所以这份统计表格是由于计算有错误.

Example 4.3

一份统计表格的错误或者是由于材料不可靠, 或者是由于计算有错误; 这份统计表格的错误不是由于材料不可靠, 所以这份统计表格是由于计算有错误.

解: 设 P: 统计表格的错误是由于材料不可靠; Q: 统计表格的错误是由于计算有错误. 则有

$$\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q.$$

Example 4.3

一份统计表格的错误或者是由于材料不可靠, 或者是由于计算有错误; 这份统计表格的错误不是由于材料不可靠, 所以这份统计表格是由于计算有错误.

解: 设 P: 统计表格的错误是由于材料不可靠; Q: 统计表格的错误是由于计算有错误. 则有

$$\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q.$$

P	Q	$\neg P$	$P \vee Q$	$\neg P \wedge (P \vee Q)$
T	**T**	**F**	**T**	**F**
T	**F**	**F**	**T**	**F**
F	**T**	**T**	**T**	**T**
F	**F**	**T**	**F**	**F**

从真值表看到: 当 $\neg P$ 和 $P \vee Q$ 的真值都为 **T** 时 (在第三行), Q 也为 **T**. 所以 $\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$.

Example 4.3

一份统计表格的错误或者是由于材料不可靠, 或者是由于计算有错误; 这份统计表格的错误不是由于材料不可靠, 所以这份统计表格是由于计算有错误.

解: 设 P: 统计表格的错误是由于材料不可靠; Q: 统计表格的错误是由于计算有错误. 则有

$$\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q.$$

P	Q	$\neg P$	$P \vee Q$	$\neg P \wedge (P \vee Q)$
T	**T**	**F**	**T**	**F**
T	**F**	**F**	**T**	**F**
F	**T**	**T**	**T**	**T**
F	**F**	**T**	**F**	**F**

从真值表看到: 当 $\neg P$ 和 $P \vee Q$ 的真值都为 **T** 时 (在第三行), Q 也为 **T**. 所以 $\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$.

或者由: 当 Q 的真值为 **F** 时, $\neg P$ 和 $P \vee Q$ 的至少有一个为 **F**.

Example 4.3

一份统计表格的错误或者是由于材料不可靠, 或者是由于计算有错误; 这份统计表格的错误不是由于材料不可靠, 所以这份统计表格是由于计算有错误.

解: 设 P: 统计表格的错误是由于材料不可靠; Q: 统计表格的错误是由于计算有错误. 则有

$$\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q.$$

P	Q	$\neg P$	$P \vee Q$	$\neg P \wedge (P \vee Q)$
T	**T**	**F**	**T**	**F**
T	**F**	**F**	**T**	**F**
F	**T**	**T**	**T**	**T**
F	**F**	**T**	**F**	**F**

从真值表看到: 当 $\neg P$ 和 $P \vee Q$ 的真值都为 **T** 时 (在第三行), Q 也为 **T**. 所以 $\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$.

或者由: 当 Q 的真值为 **F** 时, $\neg P$ 和 $P \vee Q$ 的至少有一个为 **F**.

☞本题证明的是一个常用蕴含式, 本质上就是我们常用的排除法.

Example 4.4

如果张老师来了, 这个问题可以得到解答; 如果李老师来了, 这个问题也可以得到解答. 总之张老师或李老师来了, 这个问题就可以得到解答.

Example 4.4

如果张老师来了, 这个问题可以得到解答; 如果李老师来了, 这个问题也可以得到解答. 总之张老师或李老师来了, 这个问题就可以得到解答.

解: 设 P: 张老师来了; Q: 李老师来了; R: 这个问题可以得到解答. 则有

$$(P \to R) \wedge (Q \to R) \wedge (P \vee Q) \Rightarrow R.$$

Example 4.4

如果张老师来了, 这个问题可以得到解答; 如果李老师来了, 这个问题也可以得到解答. 总之张老师或李老师来了, 这个问题就可以得到解答.

解: 设 P: 张老师来了; Q: 李老师来了; R: 这个问题可以得到解答. 则有

$$(P \to R) \wedge (Q \to R) \wedge (P \vee Q) \Rightarrow R.$$

P	Q	R	$P \to R$	$Q \to R$	$P \vee Q$
T	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**
T	**T**	**F**	**F**	**F**	**T**
T	**F**	**T**	**T**	**T**	**T**
T	**F**	**F**	**F**	**T**	**T**
F	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**
F	**T**	**F**	**T**	**F**	**T**
F	**F**	**T**	**T**	**T**	**F**
F	**F**	**F**	**T**	**F**	**F**

从真值表看到: 当 $P \to R$, $Q \to R$ 和 $P \vee Q$ 的真值都为 **T** 时 (在第一、三、五行), R 也为 **T**. 所以 $(P \to R) \wedge (Q \to R) \wedge (P \vee Q) \Rightarrow R$. (☞ 二段推论)

直接证明法

直接证明法就是由一组前提, 利用一些公认的推理规则, 根据已知的等价公式或蕴含公式, 推演得到有效的结论.

- P 规则 (前提引入): 前提在推导过程中的任何时候都可以引入.
- T 规则 (结论引用): 在推导中, 如果有一个或多个公式重言蕴涵着公式 S (结论), 则公式 S 可以引入推导之中.

直接证明法

直接证明法就是由一组前提, 利用一些公认的推理规则, 根据已知的等价公式或蕴含公式, 推演得到有效的结论.

- P 规则 (前提引入): 前提在推导过程中的任何时候都可以引入.
- T 规则 (结论引用): 在推导中, 如果有一个或多个公式重言蕴涵着公式 S (结论), 则公式 S 可以引入推导之中.

常用的蕴含公式和等价公式, 是推理证明的基础.

常用蕴含式

1. $P \wedge Q \Rightarrow P$
2. $P \wedge Q \Rightarrow Q$
3. $P \Rightarrow P \vee Q$
4. $Q \Rightarrow P \vee Q$
5. $\neg P \Rightarrow P \rightarrow Q$
6. $Q \Rightarrow P \rightarrow Q$

若 $P \wedge Q$ 为真, 则 P 为真.

常用蕴含式

1. $P \wedge Q \Rightarrow P$
2. $P \wedge Q \Rightarrow Q$
3. $P \Rightarrow P \vee Q$
4. $Q \Rightarrow P \vee Q$
5. $\neg P \Rightarrow P \to Q$
6. $Q \Rightarrow P \to Q$

常用蕴含式

1. $P \wedge Q \Rightarrow P$
2. $P \wedge Q \Rightarrow Q$
3. $P \Rightarrow P \vee Q$
4. $Q \Rightarrow P \vee Q$
5. $\neg P \Rightarrow P \to Q$
6. $Q \Rightarrow P \to Q$

常用蕴含式

1. $P \wedge Q \Rightarrow P$
2. $P \wedge Q \Rightarrow Q$
3. $P \Rightarrow P \vee Q$
4. $Q \Rightarrow P \vee Q$
5. $\neg P \Rightarrow P \rightarrow Q$
6. $Q \Rightarrow P \rightarrow Q$

常用蕴含式

1. $P \wedge Q \Rightarrow P$
2. $P \wedge Q \Rightarrow Q$
3. $P \Rightarrow P \vee Q$
4. $Q \Rightarrow P \vee Q$
5. $\neg P \Rightarrow P \rightarrow Q$　　若 $\neg P$ 为真, 即 P 为假, 则 $P \rightarrow Q$ 为真.
6. $Q \Rightarrow P \rightarrow Q$

常用蕴含式

1. $P \wedge Q \Rightarrow P$
2. $P \wedge Q \Rightarrow Q$
3. $P \Rightarrow P \vee Q$
4. $Q \Rightarrow P \vee Q$
5. $\neg P \Rightarrow P \to Q$
6. $Q \Rightarrow P \to Q$

常用蕴含式

7. $\neg(P \to Q) \Rightarrow P$
8. $\neg(P \to Q) \Rightarrow \neg Q$
9. $P, Q \Rightarrow P \wedge Q$
10. $\neg P, P \vee Q \Rightarrow Q$
11. $P, P \to Q \Rightarrow Q$
12. $\neg Q, P \to Q \Rightarrow \neg P$

(7) $P \to Q$ 为假,
只能是 P 为真, Q 为假.

常用蕴含式

7. $\neg(P \to Q) \Rightarrow P$
8. $\neg(P \to Q) \Rightarrow \neg Q$
9. $P,\ Q \Rightarrow P \wedge Q$
10. $\neg P,\ P \vee Q \Rightarrow Q$
11. $P,\ P \to Q \Rightarrow Q$
12. $\neg Q,\ P \to Q \Rightarrow \neg P$

(7) 或者

$$\begin{aligned} \neg(P \to Q) &\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \\ &\Leftrightarrow P \wedge \neg Q \\ &\Rightarrow P \ (\text{或} \Rightarrow \neg Q). \end{aligned}$$

常用蕴含式

7. $\neg(P \to Q) \Rightarrow P$
8. $\neg(P \to Q) \Rightarrow \neg Q$
9. $P,\ Q \Rightarrow P \wedge Q$
10. $\neg P,\ P \vee Q \Rightarrow Q$
11. $P,\ P \to Q \Rightarrow Q$
12. $\neg Q,\ P \to Q \Rightarrow \neg P$

(9) 合取引入.

常用蕴含式

7. $\neg(P \to Q) \Rightarrow P$
8. $\neg(P \to Q) \Rightarrow \neg Q$
9. $P,\ Q \Rightarrow P \wedge Q$
10. $\neg P,\ P \vee Q \Rightarrow Q$
11. $P,\ P \to Q \Rightarrow Q$
12. $\neg Q,\ P \to Q \Rightarrow \neg P$

(10) 析取三段论, 或 “选言推理”, “排除法”.

常用蕴含式

7. $\neg(P \to Q) \Rightarrow P$
8. $\neg(P \to Q) \Rightarrow \neg Q$
9. $P,\ Q \Rightarrow P \wedge Q$
10. $\neg P,\ P \vee Q \Rightarrow Q$
11. $P,\ P \to Q \Rightarrow Q$
12. $\neg Q,\ P \to Q \Rightarrow \neg P$

(11) 假言推理, 最常用的推理规则.

常用蕴含式

7. $\neg(P \to Q) \Rightarrow P$
8. $\neg(P \to Q) \Rightarrow \neg Q$
9. $P, Q \Rightarrow P \wedge Q$
10. $\neg P, P \vee Q \Rightarrow Q$
11. $P, P \to Q \Rightarrow Q$
12. $\neg Q, P \to Q \Rightarrow \neg P$

(12) 设 $\neg Q$ 为真, 即 Q 为假;
要 $P \to Q$ 为真, 则 P 必须为假.
得 $\neg P$ 为真.
此为 “拒取式”, 即 “反证法”.

常用蕴含式

(13) 假言三段论. 表明推理的传递性.

13. $P \to Q,\ Q \to R \Rightarrow P \to R$
14. $P \vee Q,\ P \to R,\ Q \to R \Rightarrow R$
15. $A \to B \Rightarrow (A \vee C) \to (B \vee C)$
16. $A \to B \Rightarrow (A \wedge C) \to (B \wedge C)$

常用蕴含式

13. $P \to Q,\ Q \to R \Rightarrow P \to R$
14. $P \vee Q,\ P \to R,\ Q \to R \Rightarrow R$
15. $A \to B \Rightarrow (A \vee C) \to (B \vee C)$
16. $A \to B \Rightarrow (A \wedge C) \to (B \wedge C)$

(14) 假设 $P \vee Q$, $P \to R$, $Q \to R$ 为真.

- 若 P 为真, 要 $P \to R$ 为真, 必 R 为真.
- 若 P 为假, 则 Q 为真. 要 $Q \to R$ 为真, 必 R 为真.

常用蕴含式

13. $P \to Q,\ Q \to R \Rightarrow P \to R$
14. $P \vee Q,\ P \to R,\ Q \to R \Rightarrow R$
15. $A \to B \Rightarrow (A \vee C) \to (B \vee C)$
16. $A \to B \Rightarrow (A \wedge C) \to (B \wedge C)$

(15)

$$
\begin{aligned}
& (A \vee C) \to (B \vee C) \\
\Leftrightarrow & \neg(A \vee C) \vee (B \vee C) \\
\Leftrightarrow & (\neg A \wedge \neg C) \vee (B \vee C) \\
\Leftrightarrow & (\neg A \vee B \vee C) \wedge (\neg C \vee B \vee C) \\
\Leftrightarrow & (\neg A \vee B \vee C) \\
\Leftrightarrow & (A \to B) \vee C
\end{aligned}
$$

由 I_3, 知

$$(A \to B) \Rightarrow (A \to B) \vee C$$

常用蕴含式

13. $P \to Q,\ Q \to R \Rightarrow P \to R$
14. $P \vee Q,\ P \to R,\ Q \to R \Rightarrow R$
15. $A \to B \Rightarrow (A \vee C) \to (B \vee C)$
16. $A \to B \Rightarrow (A \wedge C) \to (B \wedge C)$

常用等价式

1. $\neg\neg P \Leftrightarrow P$ 对合律
2. $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$
3. $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
4. $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$
5. $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$
6. $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
7. $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

常用等价式

1. $\neg\neg P \Leftrightarrow P$ 对合律
2. $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$ 交换律
3. $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
4. $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$
5. $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$
6. $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
7. $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

常用等价式

1. $\neg\neg P \Leftrightarrow P$ 对合律
2. $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$ 交换律
3. $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
4. $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$ 结合律
5. $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$
6. $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
7. $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

常用等价式

1. $\neg\neg P \Leftrightarrow P$ 对合律
2. $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$ 交换律
3. $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
4. $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$ 结合律
5. $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$
6. $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ 分配律
7. $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

常用等价式

8. $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$ 德 · 摩根律
9. $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$
10. $P \vee P \Leftrightarrow P$
11. $P \wedge P \Leftrightarrow P$
12. $R \vee (P \wedge \neg P) \Leftrightarrow R$
13. $R \wedge (P \vee \neg P) \Leftrightarrow R$
14. $R \vee (P \vee \neg P) \Leftrightarrow \mathbf{T}$
15. $R \wedge (P \wedge \neg P) \Leftrightarrow \mathbf{F}$

常用等价式

8. $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$ 德 · 摩根律
9. $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$
10. $P \vee P \Leftrightarrow P$ 幂等律
11. $P \wedge P \Leftrightarrow P$
12. $R \vee (P \wedge \neg P) \Leftrightarrow R$
13. $R \wedge (P \vee \neg P) \Leftrightarrow R$
14. $R \vee (P \vee \neg P) \Leftrightarrow \mathbf{T}$
15. $R \wedge (P \wedge \neg P) \Leftrightarrow \mathbf{F}$

常用等价式

8. $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$ 德 · 摩根律
9. $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$
10. $P \vee P \Leftrightarrow P$ 幂等律
11. $P \wedge P \Leftrightarrow P$
12. $R \vee (P \wedge \neg P) \Leftrightarrow R$ 同一律
13. $R \wedge (P \vee \neg P) \Leftrightarrow R$
14. $R \vee (P \vee \neg P) \Leftrightarrow \mathbf{T}$
15. $R \wedge (P \wedge \neg P) \Leftrightarrow \mathbf{F}$

常用等价式

8. $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$ 德·摩根律
9. $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$
10. $P \vee P \Leftrightarrow P$ 幂等律
11. $P \wedge P \Leftrightarrow P$
12. $R \vee (P \wedge \neg P) \Leftrightarrow R$ 同一律
13. $R \wedge (P \vee \neg P) \Leftrightarrow R$
14. $R \vee (P \vee \neg P) \Leftrightarrow \mathbf{T}$ 零律
15. $R \wedge (P \wedge \neg P) \Leftrightarrow \mathbf{F}$

常用等价式

16. $P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
17. $\neg(P \to Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$
18. $P \to Q \Leftrightarrow \neg Q \to \neg P$
19. $P \to (Q \to R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \to R$
20. $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$
21. $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
22. $\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow P \leftrightarrow \neg Q$

常用等价式

16. $P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
17. $\neg(P \to Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$
18. $P \to Q \Leftrightarrow \neg Q \to \neg P$
19. $P \to (Q \to R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \to R$
20. $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$
21. $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
22. $\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow P \leftrightarrow \neg Q$

常用等价式

16. $P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
17. $\neg(P \to Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$
18. $P \to Q \Leftrightarrow \neg Q \to \neg P$
19. $P \to (Q \to R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \to R$
20. $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$
21. $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
22. $\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow P \leftrightarrow \neg Q$

常用等价式

16. $P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
17. $\neg(P \to Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$
18. $P \to Q \Leftrightarrow \neg Q \to \neg P$
19. $P \to (Q \to R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \to R$
20. $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$
21. $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
22. $\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow P \leftrightarrow \neg Q$

常用等价式

16. $P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
17. $\neg(P \to Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$
18. $P \to Q \Leftrightarrow \neg Q \to \neg P$
19. $P \to (Q \to R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \to R$
20. $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$
21. $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
22. $\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow P \leftrightarrow \neg Q$

常用等价式

16. $P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
17. $\neg(P \to Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$
18. $P \to Q \Leftrightarrow \neg Q \to \neg P$
19. $P \to (Q \to R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \to R$
20. $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$
21. $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
22. $\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow P \leftrightarrow \neg Q$

常用等价式

16. $P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
17. $\neg(P \to Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$
18. $P \to Q \Leftrightarrow \neg Q \to \neg P$
19. $P \to (Q \to R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \to R$
20. $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$
21. $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
22. $\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow P \leftrightarrow \neg Q$

常用等价式

16. $P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
17. $\neg(P \to Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$
18. $P \to Q \Leftrightarrow \neg Q \to \neg P$
19. $P \to (Q \to R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \to R$
20. $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$
21. $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
22. $\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow P \leftrightarrow \neg Q$

☞下证 E_{19} 和 E_{22}.

证明 E_{19}: $P \to (Q \to R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \to R.$

证:

$$P \to (Q \to R) \Leftrightarrow \neg P \vee (Q \to R) \qquad (E_{16})$$

证明 E_{19}: $P \to (Q \to R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \to R.$

证:

$$P \to (Q \to R) \Leftrightarrow \neg P \vee (Q \to R) \quad (E_{16})$$

$$\Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q \vee R) \quad (E_{16})$$

证明 E_{19}: $P \to (Q \to R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \to R.$

证:

$$\begin{aligned} P \to (Q \to R) &\Leftrightarrow \neg P \vee (Q \to R) && (E_{16}) \\ &\Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q \vee R) && (E_{16}) \\ &\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \vee R && (\text{结合律}) \end{aligned}$$

证明 E_{19}: $P \to (Q \to R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \to R$.

证:

$$
\begin{aligned}
P \to (Q \to R) &\Leftrightarrow \neg P \vee (Q \to R) && (E_{16}) \\
&\Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q \vee R) && (E_{16}) \\
&\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \vee R && (\text{结合律}) \\
&\Leftrightarrow \neg (P \wedge Q) \vee R && (\text{德・摩根律})
\end{aligned}
$$

证明 E_{19}: $P \to (Q \to R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \to R$.

证:

$$
\begin{aligned}
P \to (Q \to R) &\Leftrightarrow \neg P \vee (Q \to R) && (E_{16}) \\
&\Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q \vee R) && (E_{16}) \\
&\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \vee R && (\text{结合律}) \\
&\Leftrightarrow \neg(P \wedge Q) \vee R && (\text{德·摩根律}) \\
&\Leftrightarrow (P \wedge Q) \to R && (E_{16})
\end{aligned}
$$

证明 E_{19}: $P \to (Q \to R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \to R$.

证:

$$
\begin{aligned}
P \to (Q \to R) &\Leftrightarrow \neg P \vee (Q \to R) && (E_{16}) \\
&\Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q \vee R) && (E_{16}) \\
&\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \vee R && (\text{结合律}) \\
&\Leftrightarrow \neg (P \wedge Q) \vee R && (\text{德·摩根律}) \\
&\Leftrightarrow (P \wedge Q) \to R && (E_{16})
\end{aligned}
$$

$P \to (Q \to R) \not\Leftrightarrow (P \to Q) \to R.$

证明 E_{22}: $\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow P \leftrightarrow \neg Q$.

证明 E_{22}: $\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow P \leftrightarrow \neg Q$.

证: 注意到 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$,

证明 E_{22}: $\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow P \leftrightarrow \neg Q$.

证: 注意到 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$, 有

$$P \leftrightarrow \neg Q \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg\neg Q). \tag{19}$$

证明 E_{22}: $\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow P \leftrightarrow \neg Q$.

证: 注意到 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$, 有

$$P \leftrightarrow \neg Q \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q). \tag{19}$$

证明 E_{22}: $\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow P \leftrightarrow \neg Q$.

证: 注意到 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$, 有

$$P \leftrightarrow \neg Q \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q). \tag{19}$$

又

$$\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow P \bar{\vee} Q \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q). \tag{20}$$

证明 E_{22}: $\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow P \leftrightarrow \neg Q$.

证: 注意到 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$, 有

$$P \leftrightarrow \neg Q \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q). \tag{19}$$

又

$$\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow P \bar{\vee} Q \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q). \tag{20}$$

由 (19) 式和 (20) 式知

$$\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow P \leftrightarrow \neg Q.$$

证明 E_{22}: $\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow P \leftrightarrow \neg Q$.

证: 注意到 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$, 有

$$P \leftrightarrow \neg Q \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q). \tag{19}$$

又

$$\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow P \bar{\vee} Q \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q). \tag{20}$$

由 (19) 式和 (20) 式知

$$\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow P \leftrightarrow \neg Q.$$

(☞ 或用真值表, 也很简捷.)

形式推理的表上作业

形式推理的具体操作可在包含 3 列的一张表上进行:

- 第一列是序号, 将各次操作按先后排序;
- 第二列是断言或命题公式, 内容可以是前提, 中间结论或最终结论;
- 第三列是注释或根据, 表明所引用的推理规则及与之有关的行的编号.

证明 $\neg(P \wedge \neg Q), \neg Q \vee R, \neg R \Rightarrow \neg P$.

(1)	$\neg R$	P
(2)	$\neg Q \vee R$	P
(3)	$\neg Q$	T(1),(2) I
(4)	$\neg(P \wedge \neg Q)$	P
(5)	$\neg P \vee Q$	T(4) E
(6)	$\neg P$	T(3),(5) I

形式推理的表上作业

为什么可以这样表示?

- 蕴含式 $P \Rightarrow Q$ 的证明方法之一就是: 假设前件 P 为 **T**, 能够推得后件 Q 也为 **T**.

证明 $\neg(P \wedge \neg Q), \neg Q \vee R, \neg R \Rightarrow \neg P$.

(1)	$\neg R$	P
(2)	$\neg Q \vee R$	P
(3)	$\neg Q$	T(1),(2) I
(4)	$\neg(P \wedge \neg Q)$	P
(5)	$\neg P \vee Q$	T(4) E
(6)	$\neg P$	T(3),(5) I

形式推理的表上作业

为什么可以这样表示?

- 蕴含式 $P \Rightarrow Q$ 的证明方法之一就是: 假设前件 P 为 **T**, 能够推得后件 Q 也为 **T**.
- 第二列所列命题公式, 均是真值为 **T** 的. (只是省略, 不言自明而已.)

证明 $\neg(P \wedge \neg Q), \neg Q \vee R, \neg R \Rightarrow \neg P$.

(1)	$\neg R$	P
(2)	$\neg Q \vee R$	P
(3)	$\neg Q$	T(1),(2) I
(4)	$\neg(P \wedge \neg Q)$	P
(5)	$\neg P \vee Q$	T(4) E
(6)	$\neg P$	T(3),(5) I

Example 4.5

证明 $(P \vee Q) \wedge (P \to R) \wedge (Q \to S) \Rightarrow S \vee R.$

Example 4.5

证明 $(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow S) \Rightarrow S \vee R$.

证:

(1)	$P \vee Q$	P

Example 4.5

证明 $(P \vee Q) \wedge (P \to R) \wedge (Q \to S) \Rightarrow S \vee R$.

证:

(1)	$P \vee Q$	P
(2)	$\neg P \to Q$	T(1) E

Example 4.5

证明 $(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow S) \Rightarrow S \vee R$.

证:

(1)	$P \vee Q$	P
(2)	$\neg P \rightarrow Q$	T(1) E
(3)	$Q \rightarrow S$	P

Example 4.5

证明 $(P \vee Q) \wedge (P \to R) \wedge (Q \to S) \Rightarrow S \vee R$.

证:

(1)	$P \vee Q$	P
(2)	$\neg P \to Q$	T(1) E
(3)	$Q \to S$	P
(4)	$\neg P \to S$	T(2),(3) I

Example 4.5

证明 $(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow S) \Rightarrow S \vee R.$

证:

(1)	$P \vee Q$	P
(2)	$\neg P \rightarrow Q$	T(1) E
(3)	$Q \rightarrow S$	P
(4)	$\neg P \rightarrow S$	T(2),(3) I
(5)	$\neg S \rightarrow P$	T(4) E

Example 4.5

证明 $(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow S) \Rightarrow S \vee R.$

证:

(1)	$P \vee Q$	P
(2)	$\neg P \rightarrow Q$	T(1) E
(3)	$Q \rightarrow S$	P
(4)	$\neg P \rightarrow S$	T(2),(3) I
(5)	$\neg S \rightarrow P$	T(4) E
(6)	$P \rightarrow R$	P

Example 4.5

证明 $(P \vee Q) \wedge (P \to R) \wedge (Q \to S) \Rightarrow S \vee R.$

证:

(1)	$P \vee Q$	P
(2)	$\neg P \to Q$	T(1) E
(3)	$Q \to S$	P
(4)	$\neg P \to S$	T(2),(3) I
(5)	$\neg S \to P$	T(4) E
(6)	$P \to R$	P
(7)	$\neg S \to R$	T(5),(6) I

Example 4.5

证明 $(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow S) \Rightarrow S \vee R.$

证:

(1)	$P \vee Q$	P
(2)	$\neg P \rightarrow Q$	T(1) E
(3)	$Q \rightarrow S$	P
(4)	$\neg P \rightarrow S$	T(2),(3) I
(5)	$\neg S \rightarrow P$	T(4) E
(6)	$P \rightarrow R$	P
(7)	$\neg S \rightarrow R$	T(5),(6) I
(8)	$S \vee R$	T(7) E

Example

证明 $(W \vee R) \to V,\ V \to C \vee S,\ S \to U,\ \neg C \wedge \neg U \Rightarrow \neg W.$

Example

证明 $(W \vee R) \to V,\ V \to C \vee S,\ S \to U,\ \neg C \wedge \neg U \Rightarrow \neg W.$

证:

(1)	$\neg C \wedge \neg U$	P

Example

证明 $(W \vee R) \to V,\ V \to C \vee S,\ S \to U,\ \neg C \wedge \neg U \Rightarrow \neg W.$

证:

(1)	$\neg C \wedge \neg U$	P
(2)	$\neg U$	T(1) I

Example

证明 $(W \vee R) \rightarrow V,\ V \rightarrow C \vee S,\ S \rightarrow U,\ \neg C \wedge \neg U \Rightarrow \neg W.$

证:

(1)	$\neg C \wedge \neg U$	P
(2)	$\neg U$	T(1) I
(3)	$S \rightarrow U$	P

Example

证明 $(W \vee R) \to V,\ V \to C \vee S,\ S \to U,\ \neg C \wedge \neg U \Rightarrow \neg W.$

证:

(1)	$\neg C \wedge \neg U$	P
(2)	$\neg U$	T(1) I
(3)	$S \to U$	P
(4)	$\neg S$	T(2),(3) I

Example

证明 $(W \vee R) \to V,\ V \to C \vee S,\ S \to U,\ \neg C \wedge \neg U \Rightarrow \neg W.$

证:

(1)	$\neg C \wedge \neg U$	P
(2)	$\neg U$	T(1) I
(3)	$S \to U$	P
(4)	$\neg S$	T(2),(3) I
(5)	$\neg C$	T(1) I

Example

证明 $(W \vee R) \rightarrow V,\ V \rightarrow C \vee S,\ S \rightarrow U,\ \neg C \wedge \neg U \Rightarrow \neg W.$

证:

(1)	$\neg C \wedge \neg U$	P
(2)	$\neg U$	T(1) I
(3)	$S \rightarrow U$	P
(4)	$\neg S$	T(2),(3) I
(5)	$\neg C$	T(1) I
(6)	$\neg C \wedge \neg S$	T(4),(5) E

Example

证明 $(W \vee R) \rightarrow V,\ V \rightarrow C \vee S,\ S \rightarrow U,\ \neg C \wedge \neg U \Rightarrow \neg W.$

证:

(1)	$\neg C \wedge \neg U$	P
(2)	$\neg U$	T(1) I
(3)	$S \rightarrow U$	P
(4)	$\neg S$	T(2),(3) I
(5)	$\neg C$	T(1) I
(6)	$\neg C \wedge \neg S$	T(4),(5) E
(7)	$\neg (C \vee S)$	T(6) E

Example

证明 $(W \vee R) \to V,\ V \to C \vee S,\ S \to U,\ \neg C \wedge \neg U \Rightarrow \neg W.$

证:

(1)	$\neg C \wedge \neg U$	P
(2)	$\neg U$	T(1) I
(3)	$S \to U$	P
(4)	$\neg S$	T(2),(3) I
(5)	$\neg C$	T(1) I
(6)	$\neg C \wedge \neg S$	T(4),(5) E
(7)	$\neg(C \vee S)$	T(6) E
(8)	$(W \vee R) \to V$	P

Example

证明 $(W \vee R) \rightarrow V,\ V \rightarrow C \vee S,\ S \rightarrow U,\ \neg C \wedge \neg U \Rightarrow \neg W.$

证:

(1)	$\neg C \wedge \neg U$	P
(2)	$\neg U$	T(1) I
(3)	$S \rightarrow U$	P
(4)	$\neg S$	T(2),(3) I
(5)	$\neg C$	T(1) I
(6)	$\neg C \wedge \neg S$	T(4),(5) E
(7)	$\neg(C \vee S)$	T(6) E
(8)	$(W \vee R) \rightarrow V$	P
(9)	$V \rightarrow C \vee S$	P

Example

证明 $(W \vee R) \to V,\ V \to C \vee S,\ S \to U,\ \neg C \wedge \neg U \Rightarrow \neg W.$

证:

(1)	$\neg C \wedge \neg U$	P
(2)	$\neg U$	T(1) I
(3)	$S \to U$	P
(4)	$\neg S$	T(2),(3) I
(5)	$\neg C$	T(1) I
(6)	$\neg C \wedge \neg S$	T(4),(5) E
(7)	$\neg (C \vee S)$	T(6) E
(8)	$(W \vee R) \to V$	P
(9)	$V \to C \vee S$	P
(10)	$(W \vee R) \to (C \vee S)$	T(8),(9) I

Example

证明 $(W \vee R) \to V,\ V \to C \vee S,\ S \to U,\ \neg C \wedge \neg U \Rightarrow \neg W.$

证:

(1)	$\neg C \wedge \neg U$	P
(2)	$\neg U$	T(1) I
(3)	$S \to U$	P
(4)	$\neg S$	T(2),(3) I
(5)	$\neg C$	T(1) I
(6)	$\neg C \wedge \neg S$	T(4),(5) E
(7)	$\neg(C \vee S)$	T(6) E
(8)	$(W \vee R) \to V$	P
(9)	$V \to C \vee S$	P
(10)	$(W \vee R) \to (C \vee S)$	T(8),(9) I
(11)	$\neg(W \vee R)$	T(7),(10) I

Example

证明 $(W \vee R) \rightarrow V,\ V \rightarrow C \vee S,\ S \rightarrow U,\ \neg C \wedge \neg U \Rightarrow \neg W.$

证:

(1)	$\neg C \wedge \neg U$	P
(2)	$\neg U$	T(1) I
(3)	$S \rightarrow U$	P
(4)	$\neg S$	T(2),(3) I
(5)	$\neg C$	T(1) I
(6)	$\neg C \wedge \neg S$	T(4),(5) E
(7)	$\neg(C \vee S)$	T(6) E
(8)	$(W \vee R) \rightarrow V$	P
(9)	$V \rightarrow C \vee S$	P
(10)	$(W \vee R) \rightarrow (C \vee S)$	T(8),(9) I
(11)	$\neg(W \vee R)$	T(7),(10) I
(12)	$\neg W \wedge \neg R$	T(11) E

Example

证明 $(W \vee R) \to V,\ V \to C \vee S,\ S \to U,\ \neg C \wedge \neg U \Rightarrow \neg W.$

证:

(1)	$\neg C \wedge \neg U$	P
(2)	$\neg U$	T(1) I
(3)	$S \to U$	P
(4)	$\neg S$	T(2),(3) I
(5)	$\neg C$	T(1) I
(6)	$\neg C \wedge \neg S$	T(4),(5) E
(7)	$\neg(C \vee S)$	T(6) E
(8)	$(W \vee R) \to V$	P
(9)	$V \to C \vee S$	P
(10)	$(W \vee R) \to (C \vee S)$	T(8),(9) I
(11)	$\neg(W \vee R)$	T(7),(10) I
(12)	$\neg W \wedge \neg R$	T(11) E
(13)	$\neg W$	T(12) I

Example

证明 $(W \vee R) \to V,\ V \to C \vee S,\ S \to U,\ \neg C \wedge \neg U \Rightarrow \neg W.$

另证:

(1)	$\neg C \wedge \neg U$	P

Example

证明 $(W \vee R) \rightarrow V,\ V \rightarrow C \vee S,\ S \rightarrow U,\ \neg C \wedge \neg U \Rightarrow \neg W.$

另证:

(1)	$\neg C \wedge \neg U$	P
(2)	$\neg U$	T(1) I

Example

证明 $(W \vee R) \rightarrow V,\ V \rightarrow C \vee S,\ S \rightarrow U, \neg C \wedge \neg U \Rightarrow \neg W.$

另证:

(1)	$\neg C \wedge \neg U$	P
(2)	$\neg U$	T(1) I
(3)	$S \rightarrow U$	P

Example

证明 $(W \vee R) \to V,\ V \to C \vee S,\ S \to U,\ \neg C \wedge \neg U \Rightarrow \neg W.$

另证:

(1)	$\neg C \wedge \neg U$	P
(2)	$\neg U$	T(1) I
(3)	$S \to U$	P
(4)	$\neg S$	T(2),(3) I

Example

证明 $(W \vee R) \to V,\ V \to C \vee S,\ S \to U,\ \neg C \wedge \neg U \Rightarrow \neg W.$

另证:

(1)	$\neg C \wedge \neg U$	P
(2)	$\neg U$	T(1) I
(3)	$S \to U$	P
(4)	$\neg S$	T(2),(3) I
(5)	$\neg C$	T(1) I

Example

证明 $(W \vee R) \to V,\ V \to C \vee S,\ S \to U,\ \neg C \wedge \neg U \Rightarrow \neg W.$

另证:

(1)	$\neg C \wedge \neg U$	P
(2)	$\neg U$	T(1) I
(3)	$S \to U$	P
(4)	$\neg S$	T(2),(3) I
(5)	$\neg C$	T(1) I
(6)	$\neg C \wedge \neg S$	T(4),(5) I(I_9)

Example

证明 $(W \vee R) \to V,\ V \to C \vee S,\ S \to U,\ \neg C \wedge \neg U \Rightarrow \neg W.$

另证:

(1)	$\neg C \wedge \neg U$	P
(2)	$\neg U$	T(1) I
(3)	$S \to U$	P
(4)	$\neg S$	T(2),(3) I
(5)	$\neg C$	T(1) I
(6)	$\neg C \wedge \neg S$	T(4),(5) I(I_9)
(7)	$\neg (C \vee S)$	T(6) E

Example

证明 $(W \vee R) \to V,\ V \to C \vee S,\ S \to U,\ \neg C \wedge \neg U \Rightarrow \neg W.$

另证:

(1)	$\neg C \wedge \neg U$	P
(2)	$\neg U$	T(1) I
(3)	$S \to U$	P
(4)	$\neg S$	T(2),(3) I
(5)	$\neg C$	T(1) I
(6)	$\neg C \wedge \neg S$	T(4),(5) I(I_9)
(7)	$\neg(C \vee S)$	T(6) E
(8)	$V \to C \vee S$	P

Example

证明 $(W \vee R) \to V,\ V \to C \vee S,\ S \to U,\ \neg C \wedge \neg U \Rightarrow \neg W.$

另证:

(1)	$\neg C \wedge \neg U$	P
(2)	$\neg U$	T(1) I
(3)	$S \to U$	P
(4)	$\neg S$	T(2),(3) I
(5)	$\neg C$	T(1) I
(6)	$\neg C \wedge \neg S$	T(4),(5) I(I_9)
(7)	$\neg(C \vee S)$	T(6) E
(8)	$V \to C \vee S$	P
(9)	$\neg V$	T(7),(8) I

Example

证明 $(W \vee R) \to V,\ V \to C \vee S,\ S \to U,\ \neg C \wedge \neg U \Rightarrow \neg W.$

另证:

(1)	$\neg C \wedge \neg U$	P
(2)	$\neg U$	T(1) I
(3)	$S \to U$	P
(4)	$\neg S$	T(2),(3) I
(5)	$\neg C$	T(1) I
(6)	$\neg C \wedge \neg S$	T(4),(5) I(I_9)
(7)	$\neg(C \vee S)$	T(6) E
(8)	$V \to C \vee S$	P
(9)	$\neg V$	T(7),(8) I
(10)	$(W \vee R) \to V$	P

Example

证明 $(W\vee R)\rightarrow V,\ V\rightarrow C\vee S,\ S\rightarrow U,\ \neg C\wedge\neg U\Rightarrow\neg W.$

另证:

(1)	$\neg C\wedge\neg U$	P
(2)	$\neg U$	T(1) I
(3)	$S\rightarrow U$	P
(4)	$\neg S$	T(2),(3) I
(5)	$\neg C$	T(1) I
(6)	$\neg C\wedge\neg S$	T(4),(5) I(I_9)
(7)	$\neg(C\vee S)$	T(6) E
(8)	$V\rightarrow C\vee S$	P
(9)	$\neg V$	T(7),(8) I
(10)	$(W\vee R)\rightarrow V$	P
(11)	$\neg(W\vee R)$	T(9),(10) I

Example

证明 $(W\vee R)\rightarrow V,\ V\rightarrow C\vee S,\ S\rightarrow U,\ \neg C\wedge\neg U\Rightarrow\neg W.$

另证:

(1)	$\neg C\wedge\neg U$	P
(2)	$\neg U$	T(1) I
(3)	$S\rightarrow U$	P
(4)	$\neg S$	T(2),(3) I
(5)	$\neg C$	T(1) I
(6)	$\neg C\wedge\neg S$	T(4),(5) I(I_9)
(7)	$\neg(C\vee S)$	T(6) E
(8)	$V\rightarrow C\vee S$	P
(9)	$\neg V$	T(7),(8) I
(10)	$(W\vee R)\rightarrow V$	P
(11)	$\neg(W\vee R)$	T(9),(10) I
(12)	$\neg W\wedge\neg R$	T(11) E

Example

证明 $(W \vee R) \rightarrow V,\ V \rightarrow C \vee S,\ S \rightarrow U,\ \neg C \wedge \neg U \Rightarrow \neg W.$

另证:

(1)	$\neg C \wedge \neg U$	P
(2)	$\neg U$	T(1) I
(3)	$S \rightarrow U$	P
(4)	$\neg S$	T(2),(3) I
(5)	$\neg C$	T(1) I
(6)	$\neg C \wedge \neg S$	T(4),(5) I(I_9)
(7)	$\neg(C \vee S)$	T(6) E
(8)	$V \rightarrow C \vee S$	P
(9)	$\neg V$	T(7),(8) I
(10)	$(W \vee R) \rightarrow V$	P
(11)	$\neg(W \vee R)$	T(9),(10) I
(12)	$\neg W \wedge \neg R$	T(11) E
(13)	$\neg W$	T(12) I

Example

证明 $(W \vee R) \to V,\ V \to C \vee S,\ S \to U,\ \neg C \wedge \neg U \Rightarrow \neg W.$

注意: 在上述证明中, 反复用到了 I_{12}:

$$\neg Q,\ P \to Q \Rightarrow \neg P$$

相容 & 不相容

"相容" 与 "不相容"

设 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是出现于前提 $H_1, H_2, \cdots, H_m$ 中的全部命题变元.

- 对于 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的一些真值指派, 如果能使 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m$ 的真值为 **T** , 则称公式 $H_1, H_2, \cdots, H_m$ 是相容的.

相容 & 不相容

"相容" 与 "不相容"

设 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是出现于前提 $H_1, H_2, \cdots, H_m$ 中的全部命题变元.

- 对于 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的一些真值指派, 如果能使 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m$ 的真值为 **T** , 则称公式 $H_1, H_2, \cdots, H_m$ 是相容的.
- 如果对于 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的每一组真值指派, 使得 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m$ 的真值均为 **F**, 则称公式 $H_1, H_2, \cdots, H_m$ 是不相容的.

间接证明法之一: 反证法

要证

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \Rightarrow C,$$

记作

$$S \Rightarrow C,$$

间接证明法之一: 反证法

要证

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \Rightarrow C,$$

记作

$$S \Rightarrow C,$$

即

$$S \to C, \text{ 或 } \neg S \vee C$$

为 **T**, 故 $S \wedge \neg C$ 为 **F**.

间接证明法之一: 反证法

要证

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \Rightarrow C,$$

记作

$$S \Rightarrow C,$$

即

$$S \to C, \text{ 或 } \neg S \vee C$$

为 **T**, 故 $S \wedge \neg C$ 为 **F**. 即 S 与 $\neg C$ 不相容.

间接证明法之一: 反证法

要证

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \Rightarrow C,$$

记作

$$S \Rightarrow C,$$

即

$$S \rightarrow C, \text{ 或 } \neg S \vee C$$

为 **T**, 故 $S \wedge \neg C$ 为 **F**. 即 S 与 $\neg C$ 不相容.

因此要证 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \Rightarrow C$, 只要证 $H_1, H_2, \cdots, H_m$ 与 $\neg C$ 是不相容的.

间接证明法之一: 反证法

要证

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \Rightarrow C,$$

记作

$$S \Rightarrow C,$$

即

$$S \rightarrow C, \text{ 或 } \neg S \vee C$$

为 **T**, 故 $S \wedge \neg C$ 为 **F**. 即 S 与 $\neg C$ 不相容.

因此要证 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \Rightarrow C$, 只要证 $H_1, H_2, \cdots, H_m$ 与 $\neg C$ 是不相容的.

☞ 这其实就是我们经常使用的反证法.

间接证明法之一: 反证法

Example 4.6

证明 $A \to B, \neg(B \vee C)$ 可逻辑推出 $\neg A$.

间接证明法之一: 反证法

Example 4.6

证明 $A \to B, \neg(B \vee C)$ 可逻辑推出 $\neg A$.

证: 使用反证法, 下证 $A \to B, \neg(B \vee C)$ 与 $\neg(\neg A)$ 不相容.

间接证明法之一: 反证法

Example 4.6

证明 $A \rightarrow B, \neg(B \vee C)$ 可逻辑推出 $\neg A$.

证: 使用反证法, 下证 $A \rightarrow B, \neg(B \vee C)$ 与 $\neg(\neg A)$ 不相容.

(1) A P(附加前提)

间接证明法之一: 反证法

Example 4.6

证明 $A \to B, \neg(B \vee C)$ 可逻辑推出 $\neg A$.

证: 使用反证法, 下证 $A \to B, \neg(B \vee C)$ 与 $\neg(\neg A)$ 不相容.

(1)	A	P(附加前提)
(2)	$A \to B$	P

间接证明法之一: 反证法

Example 4.6

证明 $A \to B, \neg(B \vee C)$ 可逻辑推出 $\neg A$.

证: 使用反证法, 下证 $A \to B, \neg(B \vee C)$ 与 $\neg(\neg A)$ 不相容.

(1)	A	P(附加前提)
(2)	$A \to B$	P
(3)	B	T(1),(2) I

Example 4.6

证明 $A \to B, \neg(B \vee C)$ 可逻辑推出 $\neg A$.

证: 使用反证法, 下证 $A \to B, \neg(B \vee C)$ 与 $\neg(\neg A)$ 不相容.

(1)	A	P(附加前提)
(2)	$A \to B$	P
(3)	B	T(1),(2) I
(4)	$\neg(B \vee C)$	P

间接证明法之一: 反证法

Example 4.6

证明 $A \to B, \neg(B \vee C)$ 可逻辑推出 $\neg A$.

证: 使用反证法, 下证 $A \to B, \neg(B \vee C)$ 与 $\neg(\neg A)$ 不相容.

(1)	A	P(附加前提)
(2)	$A \to B$	P
(3)	B	T(1),(2) I
(4)	$\neg(B \vee C)$	P
(5)	$\neg B \wedge \neg C$	T(4) E

间接证明法之一: 反证法

Example 4.6

证明 $A \to B, \neg(B \vee C)$ 可逻辑推出 $\neg A$.

证: 使用反证法, 下证 $A \to B, \neg(B \vee C)$ 与 $\neg(\neg A)$ 不相容.

(1)	A	P(附加前提)
(2)	$A \to B$	P
(3)	B	T(1),(2) I
(4)	$\neg(B \vee C)$	P
(5)	$\neg B \wedge \neg C$	T(4) E
(6)	$\neg B$	T(5) I

间接证明法之一: 反证法

Example 4.6

证明 $A \to B, \neg(B \vee C)$ 可逻辑推出 $\neg A$.

证: 使用反证法, 下证 $A \to B, \neg(B \vee C)$ 与 $\neg(\neg A)$ 不相容.

(1)	A	P(附加前提)
(2)	$A \to B$	P
(3)	B	T(1),(2) I
(4)	$\neg(B \vee C)$	P
(5)	$\neg B \wedge \neg C$	T(4) E
(6)	$\neg B$	T(5) I
(7)	$B \wedge \neg B$ (矛盾)	T(3),(6) I

Example

用反证法再次证明 $(W \vee R) \to V,\ V \to C \vee S,\ S \to U,\ \neg C \wedge \neg U \Rightarrow \neg W$.

证:

(1)	W	P(附加前提)

Example

用反证法再次证明 $(W \vee R) \to V,\ V \to C \vee S,\ S \to U,\ \neg C \wedge \neg U \Rightarrow \neg W.$

证:

(1)	W	P(附加前提)
(2)	$W \vee R$	T(1) I

Example

用反证法再次证明 $(W \vee R) \rightarrow V,\ V \rightarrow C \vee S,\ S \rightarrow U,\ \neg C \wedge \neg U \Rightarrow \neg W.$

证:

(1)	W	P(附加前提)
(2)	$W \vee R$	T(1) I
(3)	$(W \vee R) \rightarrow V$	P

Example

用反证法再次证明 $(W \vee R) \to V,\ V \to C \vee S,\ S \to U,\ \neg C \wedge \neg U \Rightarrow \neg W.$

证:

(1)	W	P(附加前提)
(2)	$W \vee R$	T(1) I
(3)	$(W \vee R) \to V$	P
(4)	$V \to C \vee S$	P

Example

用反证法再次证明 $(W \vee R) \to V,\ V \to C \vee S,\ S \to U,\ \neg C \wedge \neg U \Rightarrow \neg W.$

证:

(1)	W	P(附加前提)
(2)	$W \vee R$	T(1) I
(3)	$(W \vee R) \to V$	P
(4)	$V \to C \vee S$	P
(5)	$(W \vee R) \to (C \vee S)$	T(3),(4) I

Example

用反证法再次证明 $(W \vee R) \to V,\ V \to C \vee S,\ S \to U,\ \neg C \wedge \neg U \Rightarrow \neg W.$

证:

(1)	W	P(附加前提)
(2)	$W \vee R$	T(1) I
(3)	$(W \vee R) \to V$	P
(4)	$V \to C \vee S$	P
(5)	$(W \vee R) \to (C \vee S)$	T(3),(4) I
(6)	$C \vee S$	T(2),(5) I

Example

用反证法再次证明 $(W \vee R) \to V,\ V \to C \vee S,\ S \to U,\ \neg C \wedge \neg U \Rightarrow \neg W.$

证:

(1)	W	P(附加前提)
(2)	$W \vee R$	T(1) I
(3)	$(W \vee R) \to V$	P
(4)	$V \to C \vee S$	P
(5)	$(W \vee R) \to (C \vee S)$	T(3),(4) I
(6)	$C \vee S$	T(2),(5) I
(7)	$\neg C \wedge \neg U$	P

Example

用反证法再次证明 $(W \vee R) \rightarrow V,\ V \rightarrow C \vee S,\ S \rightarrow U,\ \neg C \wedge \neg U \Rightarrow \neg W.$

证:

(1)	W	P(附加前提)
(2)	$W \vee R$	T(1) I
(3)	$(W \vee R) \rightarrow V$	P
(4)	$V \rightarrow C \vee S$	P
(5)	$(W \vee R) \rightarrow (C \vee S)$	T(3),(4) I
(6)	$C \vee S$	T(2),(5) I
(7)	$\neg C \wedge \neg U$	P
(8)	$\neg C$	T(7) I

Example

用反证法再次证明 $(W \vee R) \to V,\ V \to C \vee S,\ S \to U,\ \neg C \wedge \neg U \Rightarrow \neg W.$

证:

(1)	W	P(附加前提)
(2)	$W \vee R$	T(1) I
(3)	$(W \vee R) \to V$	P
(4)	$V \to C \vee S$	P
(5)	$(W \vee R) \to (C \vee S)$	T(3),(4) I
(6)	$C \vee S$	T(2),(5) I
(7)	$\neg C \wedge \neg U$	P
(8)	$\neg C$	T(7) I
(9)	S	T(6),(8) I

Example

用反证法再次证明 $(W \vee R) \rightarrow V,\ V \rightarrow C \vee S,\ S \rightarrow U,\ \neg C \wedge \neg U \Rightarrow \neg W.$

证:

(1)	W	P(附加前提)
(2)	$W \vee R$	T(1) I
(3)	$(W \vee R) \rightarrow V$	P
(4)	$V \rightarrow C \vee S$	P
(5)	$(W \vee R) \rightarrow (C \vee S)$	T(3),(4) I
(6)	$C \vee S$	T(2),(5) I
(7)	$\neg C \wedge \neg U$	P
(8)	$\neg C$	T(7) I
(9)	S	T(6),(8) I
(10)	$S \rightarrow U$	P

Example

用反证法再次证明 $(W \vee R) \to V,\ V \to C \vee S,\ S \to U,\ \neg C \wedge \neg U \Rightarrow \neg W.$

证:

(1)	W	P(附加前提)
(2)	$W \vee R$	T(1) I
(3)	$(W \vee R) \to V$	P
(4)	$V \to C \vee S$	P
(5)	$(W \vee R) \to (C \vee S)$	T(3),(4) I
(6)	$C \vee S$	T(2),(5) I
(7)	$\neg C \wedge \neg U$	P
(8)	$\neg C$	T(7) I
(9)	S	T(6),(8) I
(10)	$S \to U$	P
(11)	U	T(10) I

Example

用反证法再次证明 $(W \vee R) \rightarrow V,\ V \rightarrow C \vee S,\ S \rightarrow U,\ \neg C \wedge \neg U \Rightarrow \neg W.$

证:

(1)	W	P(附加前提)
(2)	$W \vee R$	T(1) I
(3)	$(W \vee R) \rightarrow V$	P
(4)	$V \rightarrow C \vee S$	P
(5)	$(W \vee R) \rightarrow (C \vee S)$	T(3),(4) I
(6)	$C \vee S$	T(2),(5) I
(7)	$\neg C \wedge \neg U$	P
(8)	$\neg C$	T(7) I
(9)	S	T(6),(8) I
(10)	$S \rightarrow U$	P
(11)	U	T(10) I
(12)	$\neg U$	T(7) I

Example

用反证法再次证明 $(W \vee R) \rightarrow V,\ V \rightarrow C \vee S,\ S \rightarrow U,\ \neg C \wedge \neg U \Rightarrow \neg W.$

证:

(1)	W	P(附加前提)
(2)	$W \vee R$	T(1) I
(3)	$(W \vee R) \rightarrow V$	P
(4)	$V \rightarrow C \vee S$	P
(5)	$(W \vee R) \rightarrow (C \vee S)$	T(3),(4) I
(6)	$C \vee S$	T(2),(5) I
(7)	$\neg C \wedge \neg U$	P
(8)	$\neg C$	T(7) I
(9)	S	T(6),(8) I
(10)	$S \rightarrow U$	P
(11)	U	T(10) I
(12)	$\neg U$	T(7) I
(13)	$U \wedge \neg U$(矛盾)	T(11),(12) E

间接证明法的另一种情形: CP 规则

若要证明

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \Rightarrow (R \to C), \tag{21}$$

间接证明法的另一种情形: CP 规则

若要证明

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \Rightarrow (R \to C), \tag{21}$$

将 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m$ 记作 S, 即要证

$$S \Rightarrow (R \to C), \tag{22}$$

间接证明法的另一种情形: CP 规则

若要证明

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \Rightarrow (R \to C), \tag{21}$$

将 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m$ 记作 S, 即要证

$$S \Rightarrow (R \to C), \tag{22}$$

即 $S \to (R \to C)$ 为 **T**.

间接证明法的另一种情形: CP 规则

若要证明

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \Rightarrow (R \to C), \tag{21}$$

将 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m$ 记作 S, 即要证

$$S \Rightarrow (R \to C), \tag{22}$$

即 $S \to (R \to C)$ 为 **T**.

由 E_{19}: $P \to (Q \to R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \to R$,

间接证明法的另一种情形: CP 规则

若要证明

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \Rightarrow (R \to C), \tag{21}$$

将 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m$ 记作 S, 即要证

$$S \Rightarrow (R \to C), \tag{22}$$

即 $S \to (R \to C)$ 为 **T**.

由 E_{19}: $P \to (Q \to R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \to R$, 知

$$S \to (R \to C) \Leftrightarrow (S \wedge R) \to C. \tag{23}$$

间接证明法的另一种情形: CP 规则

若要证明

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \Rightarrow (R \to C), \tag{21}$$

将 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m$ 记作 S, 即要证

$$S \Rightarrow (R \to C), \tag{22}$$

即 $S \to (R \to C)$ 为 **T**.

由 E_{19}: $P \to (Q \to R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \to R$, 知

$$S \to (R \to C) \Leftrightarrow (S \wedge R) \to C. \tag{23}$$

从而, 要证明 $S \Rightarrow (R \to C)$, 转化为证明

$$(S \wedge R) \Rightarrow C. \tag{24}$$

间接证明法的另一种情形: CP 规则

若要证明

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \Rightarrow (R \to C), \tag{21}$$

将 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m$ 记作 S, 即要证

$$S \Rightarrow (R \to C), \tag{22}$$

即 $S \to (R \to C)$ 为 **T**.

由 E_{19}: $P \to (Q \to R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \to R$, 知

$$S \to (R \to C) \Leftrightarrow (S \wedge R) \to C. \tag{23}$$

从而, 要证明 $S \Rightarrow (R \to C)$, 转化为证明

$$(S \wedge R) \Rightarrow C. \tag{24}$$

这就是 CP 规则 (Conditional Proof).

间接证明法的另一种情形: CP 规则

若要证明

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \Rightarrow (R \to C), \tag{21}$$

将 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m$ 记作 S, 即要证

$$S \Rightarrow (R \to C), \tag{22}$$

即 $S \to (R \to C)$ 为 **T**.

由 E_{19}: $P \to (Q \to R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \to R$, 知

$$S \to (R \to C) \Leftrightarrow (S \wedge R) \to C. \tag{23}$$

从而, 要证明 $S \Rightarrow (R \to C)$, 转化为证明

$$(S \wedge R) \Rightarrow C. \tag{24}$$

这就是 CP 规则 (Conditional Proof).

这里, 将 R 称为附加前提.

间接证明法另一种情形: CP 规则

Example 4.7

证明 $A \to (B \to C), \neg D \vee A, B$ 重言蕴含 $D \to C$.

间接证明法另一种情形: CP 规则

Example 4.7

证明 $A \to (B \to C), \neg D \vee A, B$ 重言蕴含 $D \to C$.

证:

(1)	D	P (附加前提)

间接证明法另一种情形: CP 规则

Example 4.7

证明 $A \to (B \to C), \neg D \lor A, B$ 重言蕴含 $D \to C$.

证:

(1)	D	P (附加前提)
(2)	$\neg D \lor A$	P

间接证明法另一种情形: CP 规则

Example 4.7

证明 $A \to (B \to C), \neg D \vee A, B$ 重言蕴含 $D \to C$.

证:

(1)	D	P (附加前提)
(2)	$\neg D \vee A$	P
(3)	A	T(1),(2) I

间接证明法另一种情形: CP 规则

Example 4.7

证明 $A \to (B \to C), \neg D \vee A, B$ 重言蕴含 $D \to C$.

证:

(1)	D	P (附加前提)
(2)	$\neg D \vee A$	P
(3)	A	T(1),(2) I
(4)	$A \to (B \to C)$	P

间接证明法另一种情形: CP 规则

Example 4.7

证明 $A \to (B \to C), \neg D \vee A, B$ 重言蕴含 $D \to C$.

证:

(1)	D	P (附加前提)
(2)	$\neg D \vee A$	P
(3)	A	T(1),(2) I
(4)	$A \to (B \to C)$	P
(5)	$(B \to C)$	T(3),(4) I

间接证明法另一种情形: CP 规则

Example 4.7

证明 $A \to (B \to C), \neg D \vee A, B$ 重言蕴含 $D \to C$.

证:

(1)	D	P (附加前提)
(2)	$\neg D \vee A$	P
(3)	A	T(1),(2) I
(4)	$A \to (B \to C)$	P
(5)	$(B \to C)$	T(3),(4) I
(6)	B	P

间接证明法另一种情形: CP 规则

Example 4.7

证明 $A \to (B \to C), \neg D \vee A, B$ 重言蕴含 $D \to C$.

证:

(1)	D	P (附加前提)
(2)	$\neg D \vee A$	P
(3)	A	T(1),(2) I
(4)	$A \to (B \to C)$	P
(5)	$(B \to C)$	T(3),(4) I
(6)	B	P
(7)	C	T(5),(6) I

间接证明法另一种情形: CP 规则

Example 4.7

证明 $A \to (B \to C), \neg D \vee A, B$ 重言蕴含 $D \to C$.

证:

(1)	D	P (附加前提)
(2)	$\neg D \vee A$	P
(3)	A	T(1),(2) I
(4)	$A \to (B \to C)$	P
(5)	$(B \to C)$	T(3),(4) I
(6)	B	P
(7)	C	T(5),(6) I
(8)	$D \to C$	CP

对下面的论述构造一个证明:

如果李明来武汉大学, 若王军不生病, 则王军一定去看望李明. 如果李明出差到武汉, 那么李明一定来武汉大学. 王军没有生病. 所以, 如果李明出差到武汉, 王军一定去看望李明.

对下面的论述构造一个证明:

如果李明来武汉大学, 若王军不生病, 则王军一定去看望李明. 如果李明出差到武汉, 那么李明一定来武汉大学. 王军没有生病. 所以, 如果李明出差到武汉, 王军一定去看望李明.

证: 设 P: 李明出差到武汉; Q: 李明来武汉大学; R: 王军生病; S: 王军去看望李明.

对下面的论述构造一个证明:

如果李明来武汉大学, 若王军不生病, 则王军一定去看望李明. 如果李明出差到武汉, 那么李明一定来武汉大学. 王军没有生病. 所以, 如果李明出差到武汉, 王军一定去看望李明.

证: 设 P: 李明出差到武汉; Q: 李明来武汉大学; R: 王军生病; S: 王军去看望李明. 则问题归结为证:

$$Q \to (\neg R \to S),\ P \to Q,\ \neg R \Rightarrow P \to S.$$

对下面的论述构造一个证明:

如果李明来武汉大学, 若王军不生病, 则王军一定去看望李明. 如果李明出差到武汉, 那么李明一定来武汉大学. 王军没有生病. 所以, 如果李明出差到武汉, 王军一定去看望李明.

证: 设 P: 李明出差到武汉; Q: 李明来武汉大学; R: 王军生病; S: 王军去看望李明. 则问题归结为证:

$$Q \to (\neg R \to S),\ P \to Q,\ \neg R \Rightarrow P \to S.$$

列表证明如下:

(1)	P	P (附加前提)

对下面的论述构造一个证明:

如果李明来武汉大学, 若王军不生病, 则王军一定去看望李明. 如果李明出差到武汉, 那么李明一定来武汉大学. 王军没有生病. 所以, 如果李明出差到武汉, 王军一定去看望李明.

证: 设 P: 李明出差到武汉; Q: 李明来武汉大学; R: 王军生病; S: 王军去看望李明. 则问题归结为证:

$$Q \to (\neg R \to S),\ P \to Q,\ \neg R \Rightarrow P \to S.$$

列表证明如下:

(1)	P	P (附加前提)
(2)	$P \to Q$	P

对下面的论述构造一个证明:

如果李明来武汉大学, 若王军不生病, 则王军一定去看望李明. 如果李明出差到武汉, 那么李明一定来武汉大学. 王军没有生病. 所以, 如果李明出差到武汉, 王军一定去看望李明.

证: 设 P: 李明出差到武汉; Q: 李明来武汉大学; R: 王军生病; S: 王军去看望李明. 则问题归结为证:

$$Q \to (\neg R \to S),\ P \to Q,\ \neg R \Rightarrow P \to S.$$

列表证明如下:

(1)	P	P (附加前提)
(2)	$P \to Q$	P
(3)	Q	T(1),(2) I

对下面的论述构造一个证明:

如果李明来武汉大学, 若王军不生病, 则王军一定去看望李明. 如果李明出差到武汉, 那么李明一定来武汉大学. 王军没有生病. 所以, 如果李明出差到武汉, 王军一定去看望李明.

证: 设 P: 李明出差到武汉; Q: 李明来武汉大学; R: 王军生病; S: 王军去看望李明. 则问题归结为证:

$$Q \to (\neg R \to S),\ P \to Q,\ \neg R \Rightarrow P \to S.$$

列表证明如下:

(1)	P	P (附加前提)
(2)	$P \to Q$	P
(3)	Q	T(1),(2) I
(4)	$Q \to (\neg R \to S)$	P

对下面的论述构造一个证明:

如果李明来武汉大学, 若王军不生病, 则王军一定去看望李明. 如果李明出差到武汉, 那么李明一定来武汉大学. 王军没有生病. 所以, 如果李明出差到武汉, 王军一定去看望李明.

证: 设 P: 李明出差到武汉; Q: 李明来武汉大学; R: 王军生病; S: 王军去看望李明. 则问题归结为证:

$$Q \to (\neg R \to S),\ P \to Q,\ \neg R \Rightarrow P \to S.$$

列表证明如下:

(1)	P	P (附加前提)
(2)	$P \to Q$	P
(3)	Q	T(1),(2) I
(4)	$Q \to (\neg R \to S)$	P
(5)	$\neg R \to S$	T(3),(4) I

对下面的论述构造一个证明:

如果李明来武汉大学, 若王军不生病, 则王军一定去看望李明. 如果李明出差到武汉, 那么李明一定来武汉大学. 王军没有生病. 所以, 如果李明出差到武汉, 王军一定去看望李明.

证: 设 P: 李明出差到武汉; Q: 李明来武汉大学; R: 王军生病; S: 王军去看望李明. 则问题归结为证:

$$Q \to (\neg R \to S),\ P \to Q,\ \neg R \Rightarrow P \to S.$$

列表证明如下:

(1)	P	P (附加前提)
(2)	$P \to Q$	P
(3)	Q	T(1),(2) I
(4)	$Q \to (\neg R \to S)$	P
(5)	$\neg R \to S$	T(3),(4) I
(6)	$\neg R$	P

对下面的论述构造一个证明:

如果李明来武汉大学, 若王军不生病, 则王军一定去看望李明. 如果李明出差到武汉, 那么李明一定来武汉大学. 王军没有生病. 所以, 如果李明出差到武汉, 王军一定去看望李明.

证: 设 P: 李明出差到武汉; Q: 李明来武汉大学; R: 王军生病; S: 王军去看望李明. 则问题归结为证:

$$Q \to (\neg R \to S),\ P \to Q,\ \neg R \Rightarrow P \to S.$$

列表证明如下:

(1)	P	P (附加前提)
(2)	$P \to Q$	P
(3)	Q	T(1),(2) I
(4)	$Q \to (\neg R \to S)$	P
(5)	$\neg R \to S$	T(3),(4) I
(6)	$\neg R$	P
(7)	S	T(5),(6) I

对下面的论述构造一个证明:

如果李明来武汉大学, 若王军不生病, 则王军一定去看望李明. 如果李明出差到武汉, 那么李明一定来武汉大学. 王军没有生病. 所以, 如果李明出差到武汉, 王军一定去看望李明.

证: 设 P: 李明出差到武汉; Q: 李明来武汉大学; R: 王军生病; S: 王军去看望李明. 则问题归结为证:

$$Q \to (\neg R \to S),\ P \to Q,\ \neg R \Rightarrow P \to S.$$

列表证明如下:

(1)	P	P (附加前提)
(2)	$P \to Q$	P
(3)	Q	T(1),(2) I
(4)	$Q \to (\neg R \to S)$	P
(5)	$\neg R \to S$	T(3),(4) I
(6)	$\neg R$	P
(7)	S	T(5),(6) I
(8)	$P \to S$	CP

Example 4.8

在某研讨会的休息时间, 3 名与会者根据王教授的口音对他是哪个省市的人进行了判断:

- 甲说王教授不是南京人, 是上海人;
- 乙说王教授不是上海人, 是南京人;
- 丙说王教授既不是上海人, 也不是杭州人.

听完以上 3 人的判断后, 王教授笑着说, 他们 3 人中有一人说的全对, 有一人说对了一半, 另一人说的全不对. 试分析王教授是哪里人?

解: 设 N: 王教授是南京人, S: 王教授是上海人, H: 王教授是杭州人; 且

- 甲的判断为 $\neg N \wedge S$,
- 乙的判断为 $N \wedge \neg S$,
- 丙的判断为 $\neg S \wedge \neg H$.

进一步设

- 甲的判断全对 $B_1 = \neg N \wedge S$,

- 甲的判断对一半 $B_2 = (\neg N \wedge \neg S) \vee (N \wedge S)$,
- 甲的判断全错 $B_3 = N \wedge \neg S$,
- 乙的判断全对 $C_1 = N \wedge \neg S$,
- 乙的判断对一半 $C_2 = (N \wedge S) \vee (\neg N \wedge \neg S)$,
- 乙的判断全错 $C_3 = \neg N \wedge S$,
- 丙的判断全对 $D_1 = \neg S \wedge \neg H$,
- 丙的判断对一半 $D_2 = (\neg S \wedge H) \vee (S \wedge \neg H)$,
- 丙的判断全错 $D_3 = S \wedge H$.

由王教授所说

$$\begin{aligned} E = & (B_1 \wedge C_2 \wedge D_3) \vee (B_1 \wedge C_3 \wedge D_2) \vee (B_2 \wedge C_1 \wedge D_3) \\ & \vee (B_2 \wedge C_3 \wedge D_1) \vee (B_3 \wedge C_1 \wedge D_2) \vee (B_3 \wedge C_2 \wedge D_1) \end{aligned} \tag{25}$$

为真命题.

而

$$\begin{aligned}(B_1 \wedge C_2 \wedge D_3) = & (\neg N \wedge S) \wedge \big((N \wedge S) \vee (\neg N \wedge \neg S)\big) \wedge (S \wedge H) \\ \Leftrightarrow & \big((\neg N \wedge S \wedge N \wedge S) \vee (\neg N \wedge S \wedge \neg N \wedge \neg S)\big) \wedge (S \wedge H) \\ \Leftrightarrow & (\mathbf{F} \vee \mathbf{F}) \wedge (S \wedge H) \\ \Leftrightarrow & \mathbf{F}\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}B_1 \wedge C_3 \wedge D_2 = & (\neg N \wedge S) \wedge (\neg N \wedge S) \wedge \big((\neg S \wedge H) \vee (S \wedge \neg H)\big) \\ \Leftrightarrow & (\neg N \wedge S \wedge \neg S \wedge H) \vee (\neg N \wedge S \wedge S \wedge \neg H) \\ \Leftrightarrow & \mathbf{F} \vee (\neg N \wedge S \wedge \neg H) \\ \Leftrightarrow & \neg N \wedge S \wedge \neg H\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}(B_3 \wedge C_1 \wedge D_2) = & (N \wedge \neg S) \wedge (N \wedge \neg S) \wedge \big((\neg S \wedge H) \vee (S \wedge \neg H)\big) \\ \Leftrightarrow & (N \wedge \neg S \wedge \neg S \wedge H) \vee (N \wedge \neg S \wedge S \wedge \neg H) \\ \Leftrightarrow & (N \wedge \neg S \wedge H) \vee \mathbf{F} \\ \Leftrightarrow & (N \wedge \neg S \wedge H)\end{aligned} \tag{28}$$

类似可得

$$(B_2 \wedge C_1 \wedge D_3) \Leftrightarrow \mathbf{F} \tag{29}$$

$$(B_2 \wedge C_3 \wedge D_1) \Leftrightarrow \mathbf{F} \tag{30}$$

$$(B_3 \wedge C_2 \wedge D_1) \Leftrightarrow \mathbf{F} \tag{31}$$

于是, 由同一律可知

$$E \Leftrightarrow (\neg N \wedge S \wedge \neg H) \vee (N \wedge \neg S \wedge H) \tag{32}$$

因为王教授不能既是上海人, 又是杭州人, 因而 $(N \wedge \neg S \wedge H) \Leftrightarrow \mathbf{F}$.
于是只有 $(\neg N \wedge S \wedge \neg H)$ 为真命题, 即王教授是上海人.
甲说的全对, 丙说对了一半, 而乙全说错了.

类似可得

$$(B_2 \wedge C_1 \wedge D_3) \Leftrightarrow \mathbf{F} \tag{29}$$

$$(B_2 \wedge C_3 \wedge D_1) \Leftrightarrow \mathbf{F} \tag{30}$$

$$(B_3 \wedge C_2 \wedge D_1) \Leftrightarrow \mathbf{F} \tag{31}$$

于是, 由同一律可知

$$E \Leftrightarrow (\neg N \wedge S \wedge \neg H) \vee (N \wedge \neg S \wedge H) \tag{32}$$

因为王教授不能既是上海人, 又是杭州人, 因而 $(N \wedge \neg S \wedge H) \Leftrightarrow \mathbf{F}$.
于是只有 $(\neg N \wedge S \wedge \neg H)$ 为真命题, 即王教授是上海人.
甲说的全对, 丙说对了一半, 而乙全说错了.

这一类的推理在报纸、杂志的智力游戏里经常可以看到. 平时我们处理这类推理时并没有这么复杂. 比如: 假设 "甲说的全对", 由乙与甲所说相反, 则乙说的全错, 同时丙说对了一半. 这个假设与王教授所说不矛盾, 所以假设成立, 问题解决. 或者: 王教授不可能同时是两个城市的人, 则丙至少说对了一半, 从而全错只可能是甲乙之一, 然后再来作判断. 这个例子放在这里只是为了说明一种方法.

莱布尼茨 —— “样样皆通的大师”

Gottfried Wilhelm von Leibniz

(Leipzig July 1, 1646 – November 14, 1716 in Hannover),

a philosopher, scientist, mathematician, diplomat, librarian, and lawyer.

- 政治家成为数学家 [1666 年法学博士学位 美因茨选侯 腓特烈公爵]
- 普遍符号语言 [“$\cup$, $\cap$; $\sim$; $\cong$, $\frac{a}{b}$”]
- 26 岁学数学 [惠更斯 计算机器 $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$]
- 创立微积分 [1677 年 $\int$ Summa dx 牛莱之争]
- 与中国的联系 [康熙 (1654–1722) 科学院 二进制 八卦 《中国近事》(1697)]
- 没有结婚, 没有在大学当教授
- 孤寂地离世 ▸ return