Chapter 5

特征值和特征向量　矩阵的对角化

Linear Algebra

January 3, 2017

黄正华, 数学与统计学院, 武汉大学

5.1

目录

5.2

1　矩阵的特征值和特征向量

为什么要研究矩阵的特征值?

本教材的核心是线性方程组的求解. 为了解决线性方程组的求解, 人们创造了行列式、矩阵等工具. 这一章的以矩阵为专门的研究对象. 讨论矩阵的特征值、矩阵的对角化等问题.

➢ 特征值分析应用广泛:

- Google 搜索;

- 图像处理: 压缩、识别、去噪、修复、去模糊、融合、变形等.
- 汽车设计、建筑设计. 5.3

桥发生了什么情况?

此处有一段视频, 已经嵌入在本 pdf 文档. 在电子设备查看, 可以点击播放.

Tacoma 桥, 美国, 1940 年

发生了什么事情? 有人说是地震了, 有人说是桥的质量太差. 有研究表明, 其原因和本节主题特征值有关. 5.4

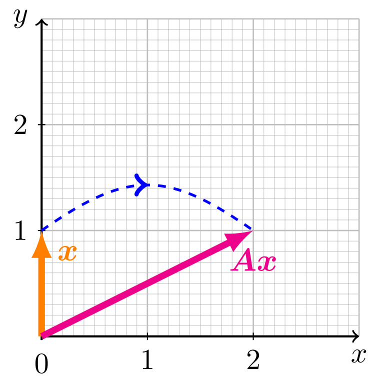
1.1 特征值与特征向量的基本概念

需要强调的是, 本章说讲的矩阵, 都是方阵. 只有方阵才有特征值和特征向量. 要理解矩阵特征值的定义, 我们先来看看, 矩阵乘以向量, 其功能是什么?

矩阵乘以向量, 其功能是什么?

给定 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 取 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 有

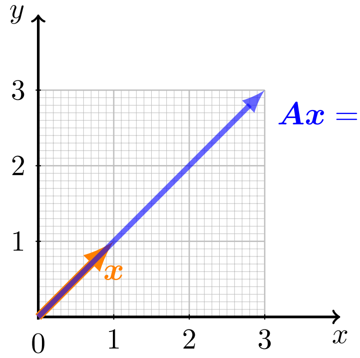
$$\boldsymbol{Ax} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



☞ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$: 将 $\boldsymbol{x}$ 旋转, 并改变长度. 5.5

对 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$, 取 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, 有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}=3\,\boldsymbol{x}.$$



$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=3\,\boldsymbol{x}$ ⇒ $\boxed{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\,\boldsymbol{x}.}$ 5.6

可见, 矩阵乘以一个向量, 一般会将这个向量旋转, 并改变其长度; 但是对某些向量, 只会在原方向或反方向上伸长或缩短, 或者说保持在原来的直线上. 我们对这种现象非常感兴趣: 矩阵和这些数值、向量是否存在某种内在的联系.

定义 1. (特征值与特征向量)
设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, 若存在数 λ 和 n 维非零向量 $\boldsymbol{x}$, 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}, \tag{1}$$

则

1. λ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值;
2. $\boldsymbol{x}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量.

注

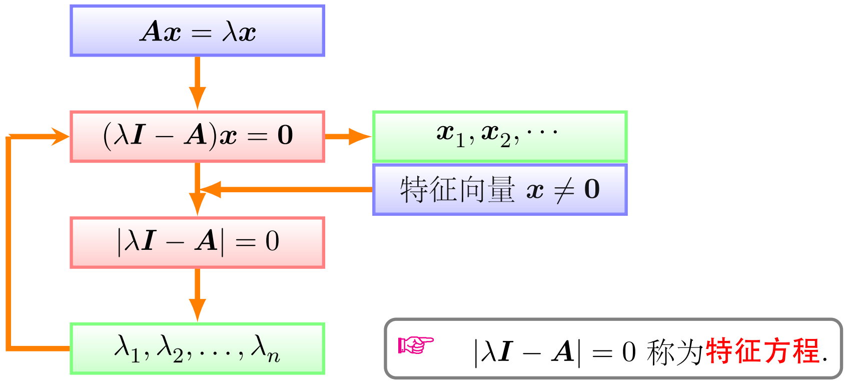
➢ 特征向量是非零向量; 零向量不是特征向量!

➢ $k\boldsymbol{x}$ 也是对应于特征值 λ 的特征向量, $k\neq 0$. 强调: 对应于同一个特征值的特征向量不唯一. 如果找到了一个特征向量, 则所有与它共线的非零向量都是对应于该特征值的特征向量. 或者说这条直线上的全部非零向量, $\boldsymbol{A}$ 作用于它们时, 都不会被旋转. 5.7

特征值与特征向量的求法

问题:
已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$, 求满足关系式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ 的 λ 和 $\boldsymbol{x}$? $\boxed{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}$

只有一个方程, 要解出两个未知量, 这可能吗? —— 破题的关键: $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$.



$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ 等价于 $(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 所求向量 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, 意味着齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有非零解, 其充要条件是 $|\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$. 从而解得 λ, 再带入 $(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 解得 $\boldsymbol{x}$. 5.8

$$|\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0, \tag{2}$$

即

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} & \cdots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

1. $|\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}|$ 称为**特征多项式**.
2. $\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ 称为**特征矩阵**.
3. n 阶矩阵在复数范围内有 n 个特征值 (含重根). 5.9

说明:

由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, 也可等价写为

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.$$

它有非零解的充要条件是

$$|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}| = 0.$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{4}$$

从而, 也可以记

- 特征多项式为: $|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}|$.
- 特征方程为: $|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}| = 0$.

很多教材和参考书, 都是使用的这个写法. 例如同济版线性代数教材. 5.10

特征值与特征向量的求解步骤

1. 特征值: 解特征方程 $|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$, 得到特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.
2. 特征向量: 求方程组 $(\lambda_i \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的所有非零解.

5.11

Example 1. 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解: Step 1 解特征方程 $|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$.

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\ -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-4=(\lambda-3)(\lambda+1),$$

由 $|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$, 得特征值为

$$\lambda_1=3, \quad \lambda_2=-1.$$

Step 2 求方程 $(\lambda_i \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的所有非零解. 5.12

① 对 $\lambda_1=3$, 求解线性方程组 $(\lambda_i \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由

$$3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$, 即对应于 $\lambda_1=3$ 的全部特征向量为

$$k_1\boldsymbol{p}_1=k_1\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}, \qquad k_1\neq 0.$$

5.13

② 对 $\lambda_2=-1$, 求解线性方程组 $(\lambda_i \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由

$$(-1)\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ -2 & -2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$, 即对应于 $\lambda_2=-1$ 的全部特征向量为

$$k_2\boldsymbol{p}_2=k_2\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}, \qquad k_2\neq 0.$$

□

5.14

Example 2. 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解: $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)^2,$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. 5.15

当 $\lambda_1 = 2$ 时, 解方程 $(2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1 = (0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$, 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_1 = 2$ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1$ $(k_1 \neq 0)$. 5.16

当 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_2 = (-1, -2, 1)^{\mathrm{T}}$, 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 的全部特征向量为 $k_2\boldsymbol{\xi}_2$ $(k_2 \neq 0)$. 5.17

Example 3. 求矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解: $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 4 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-2)^2,$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. 5.18

当 $\lambda_1 = -1$ 时, 解方程 $(-\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$-\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & -1 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1 = (1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$, 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_1 = -1$ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1$ $(k_1 \neq 0)$. 5.19

当 $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 时, 解方程组 $(2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_2 = (0, 1, -1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_3 = (1, 0, 4)^{\mathrm{T}}$, 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 的全部特征向量为 $k_2\boldsymbol{\xi}_2 + k_3\boldsymbol{\xi}_3$ $(k_2, k_3$ 不同时为零). □

☞ 上述 $\boldsymbol{\xi}_2$, $\boldsymbol{\xi}_3$ 的任意线性组合, 构造成一个平面. 在这个平面上, 除了零向量以外的任意向量, 都是特征值 $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 所对应的特征向量. 我们把这个平面, 称为特征值 $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 的特征子空间.

综合这两个例子可以看到: k 重根特征值所对应的线性无关特征向量的个数 l, 不一定等于特征值的重数 k. 事实上, 其规律是 $l \leqslant k$. 前例中, 二重特征值对应的线性无关特征向量只有一个; 本例中, 二重特征值对应的线性无关特征向量的个数正好也是 2.

把这两个问题一般化, 就是下文的要进行的讨论. 5.20

特征子空间

Definition 4. 在特征值 λ_0 对应的全部特征向量中, 设有极大无关组 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_l$, 这个极大无关组所张成的空间, 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 关于特征值 λ_0 的**特征子空间**, 记作 V_{λ_0}. 这个特征子空间的维数, 称为特征值 λ_0 的**几何重数**.

注

- 特征子空间 V_{λ_0}, 就是方程组 $(\lambda_0\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解空间.
- "λ_0 对应的全部特征向量" + "零向量"="特征子空间 V_{λ_0}". 即言: 特征子空间 V_{λ_0} 中, 除零向量以外的全体向量, 都是 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 λ_0 的特征向量.

5.21

几何重数的等价含义

λ_0 的几何重数 l 的等价含义

(1) l 等于方程组 $(\lambda_0\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系所包含的解向量的个数, 即: $l = n - \mathrm{r}(\lambda_0\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$.

(2) l 等于 λ_0 的特征子空间的维数, 即: $l = \dim V_{\lambda_0}$.

故

$$l = \dim V_{\lambda_0} = n - \mathrm{r}(\lambda_0\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}).$$

设 λ_0 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 重特征值, 则 k 称为特征值 λ_0 的**代数重数**. 5.22

代数重数 v.s. 几何重数

一般地, 有下述重要结论.

Theorem 5. *若 λ_0 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 重特征值, 设其几何重数为 l, 则 $l \leqslant k$.*

证明略.

☞ 简单讲: 几何重数 $\leqslant$ 代数重数.

这告诉我们一个常识, 在求 k 重特征值 λ_0 的特征向量, 即解线性方程组

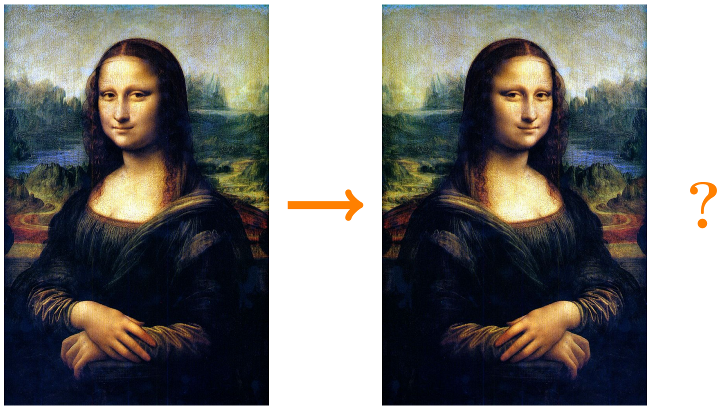
$$(\lambda_0\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

时, 基础解系中向量的个数, 不可能超过 k. (*超过 k, 就说明方程组解错了.*)

显然, 单根特征值的代数重数 = 几何重数 =1. 5.23

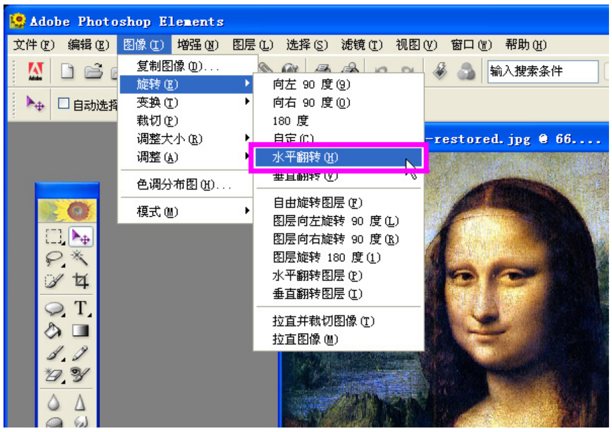
问题

图形的变换，如何实现？

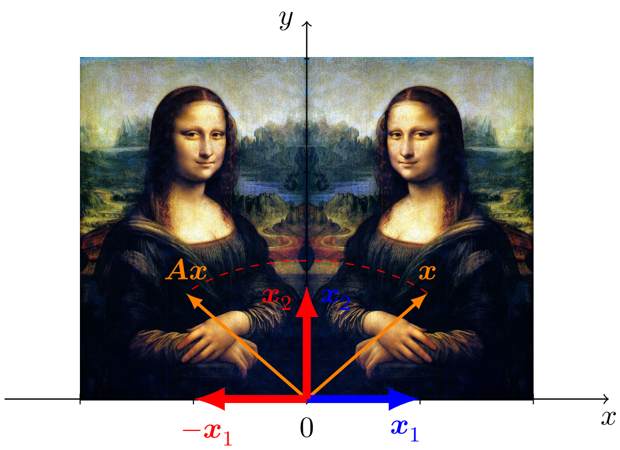


5.24

☞ 其数学方法是什么？



5.25



➢ 特征向量在什么方向上？

➢ 特征值是什么？ 5.26

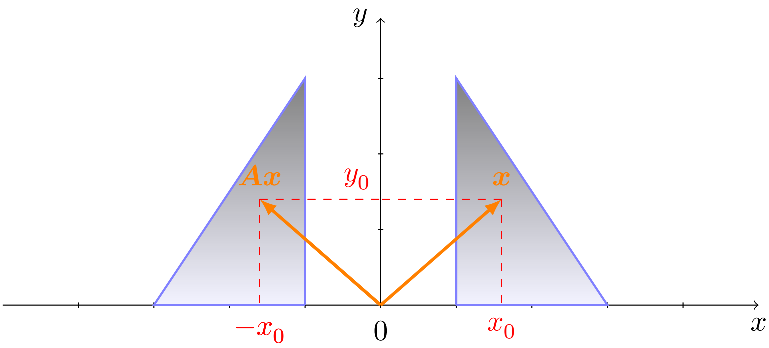
求出矩阵 $\boldsymbol{A}$？

特征值 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = (\lambda_1\boldsymbol{x}_1, \lambda_2\boldsymbol{x}_2) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)\begin{pmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{pmatrix}$, 得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)\begin{pmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{pmatrix}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & \\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix}-1 & \\ & 1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

5.27



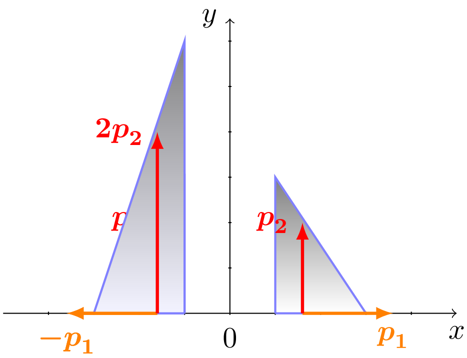
对任意的 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}x_0 \\ y_0\end{pmatrix}$, 要使 $\boldsymbol{Ax} = \begin{pmatrix}-x_0 \\ y_0\end{pmatrix}$, 可以取

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}-1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

5.28

镜面反射矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}-1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$



问题: 翻转, 且纵向拉伸 2 倍, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ =?

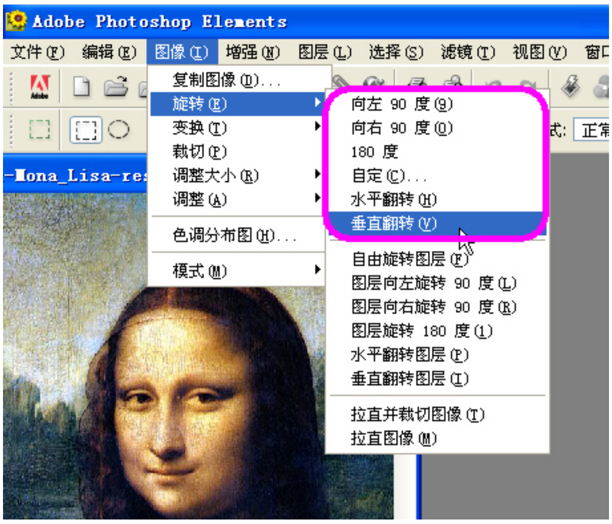
答案:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}-1 & 0 \\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

5.29

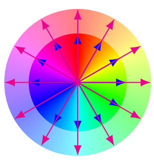
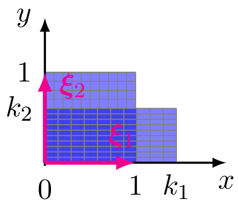
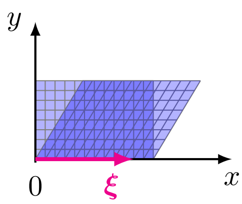
✍ 课后思考

下图菜单中的功能，需要通过怎样的矩阵来实现？



5.30

几种常见的图形变换矩阵

	放缩 scaling	变形 unequal scaling	horizontal shear
图例			
矩阵	$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
特征值	$\lambda_1 = \lambda_2 = k$	$\lambda_1 = k_1, \lambda_2 = k_2$	$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$
特征向量	任意非零向量	$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

5.31

特征值与特征向量

1. 特征值: eigenvalue;
2. 特征向量: eigenvector.

注

- eigen [德语]: 自己的, 特有的.
- “本征值” 与 “本征向量”.

历史

希尔伯特 (David Hilbert, 1862–1943) 于 1904 年首创该词汇.

5.32

1.2 应用举例: Google 财富的秘密

应用举例

Google 财富的秘密?

成立	1998 年 9 月 4 日, California, U.S.
创办人	Larry Page, Sergey Brin
营业额	US$ 858 亿 (2016)
净利润	US$ 190 亿 (2016)
总资产	US$ 1304 亿 (2014)
员工数	59,976 (Q3 2015)

☞ PageRank 算法. 5.33

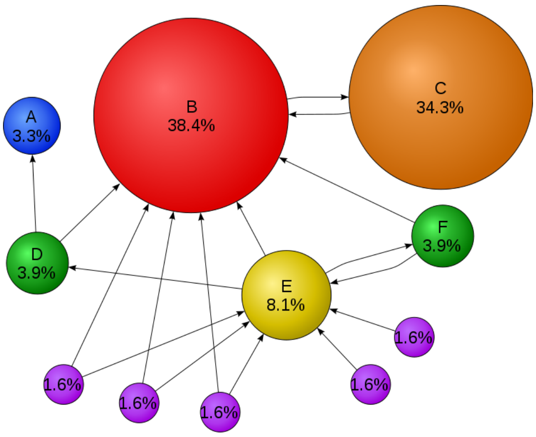
图 1: Larry Page and Sergey Brin in 2003

5.34

PageRank 算法的思想

(1) 网页的重要度, 随着指向该网页的链接的增加而提高;

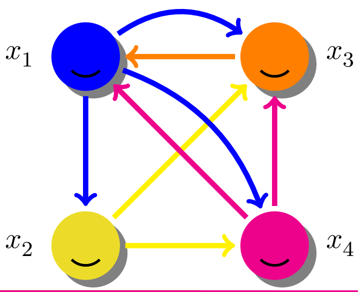
(2) 网页的重要度, 平均分配给被其指向的网页.



5.35

举例

5.36



$$x_1 = \frac{x_3}{1} + \frac{x_4}{2}$$

$$x_2 = \frac{x_1}{3}$$

$$x_3 = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_4}{2}$$

$$x_4 = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2}$$

即

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

记为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x},$$

或者

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 1 \cdot \boldsymbol{x}.$$

5.37

解得对应的特征向量为

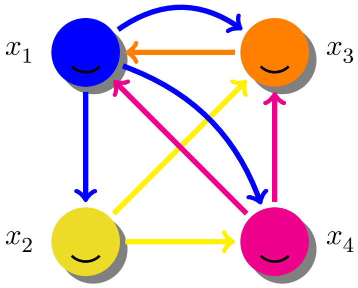
$$k\begin{pmatrix}12\\4\\9\\6\end{pmatrix},\quad k\neq 0$$

若约定 $x_1+x_2+x_3+x_4=1$, 则

$$\begin{aligned}x_1&=\frac{12}{31}\approx 38.7\%,\\x_2&=\frac{4}{31}\approx 12.9\%,\\x_3&=\frac{9}{31}\approx 29.0\%,\\x_4&=\frac{6}{31}\approx 19.4\%.\end{aligned}$$

➤ 哪个网页最重要? 5.38

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的直接求法



$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}&0&0&0\\\frac{1}{3}&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{2}&0&0\end{pmatrix},$$

邻接关系矩阵

$$M_R=\begin{array}{c}\\x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}x_1&x_2&x_3&x_4\end{array}\\\begin{pmatrix}0&0&1&1\\1&0&0&0\\1&1&0&1\\1&1&0&0\end{pmatrix}\end{array}.$$

☞ 矩阵 $\boldsymbol{A}$: 修正的邻接关系矩阵. 5.39

参考

Google ← PageRank ← 矩阵特征值

☞

THE $25,000,000,000* EIGENVECTOR
THE LINEAR ALGEBRA BEHIND GOOGLE

KURT BRYAN† AND TANYA LEISE‡

Abstract. Google's success derives in large part from its PageRank algorithm, which ranks the importance of webpages according to an eigenvector of a weighted link matrix. Analysis of the PageRank formula provides a wonderful applied topic for a linear algebra course. Instructors may assign this article as a project to more advanced students, or spend one or two lectures presenting the material with assigned homework from the exercises. This material also complements the discussion of Markov chains in matrix algebra. Maple and Mathematica files supporting this material can be found at www.rose-hulman.edu/~bryan.

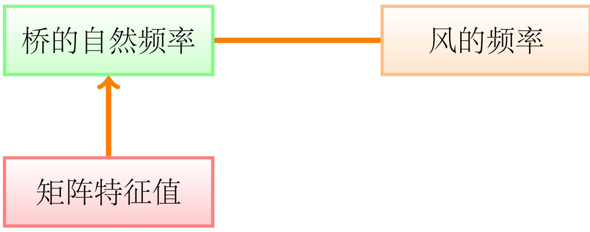
5.40

桥为什么垮塌?

图 2: Tacoma 桥, 美国, 1940 年

5.41

➢ 自然频率 (natural frequency)



5.42

玻璃杯的频率 v.s. 声波的频率

此处视频是南加州大学的一个实验, 演示内容: 声波可以使玻璃杯破裂. 声音刺耳, 请调低音量.

5.43

1.3 特征值和特征向量的性质

Theorem 6. *若 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_0 的特征向量, 则 $k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_0 的特征向量 (其中 k_1, k_2 是任意常数, 但是 $k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2 \neq \boldsymbol{0}$).*

证: 由于 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 是齐次线性方程组

$$(\lambda_0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

的解, 因此 $k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2$ 也是上式的解, 故当 $k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2 \neq \boldsymbol{0}$ 时, 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_0 的特征向量. □ 5.44

☞ 一个特征向量不能属于不同的特征值.

事实上, 如果 $\boldsymbol{x}$ 同时是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_1, λ_2 $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ 的特征向量, 即有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{x}, \qquad \text{且} \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda_2\boldsymbol{x},$$

则

$$\lambda_1\boldsymbol{x}=\lambda_2\boldsymbol{x} \qquad \text{即} \qquad (\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},$$

由于 $\lambda_1-\lambda_2 \neq 0$, 故 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 这与特征向量 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 矛盾. 5.45

Theorem 7 (重要性质☆)**.** *设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值. 证明重要性质:*

- $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$;
- $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=\left|\boldsymbol{A}\right|$.

其中 $a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$ 称为矩阵的迹, 记为 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$.

证: 在特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}$$

的展开式中, 有一项是主对角线上元素的连乘积:

$$(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\cdots(\lambda-a_{nn}),$$

展开式中的其余各项, 至多包含 $n-2$ 个主对角线上的元素, 它们对 λ 的次数最多是 $n-2$. 故特征多项式中含 λ 的 n 次与 $n-1$ 次的项只能在主对角线上元素 5.46
的连乘积中出现, 它们是

$$\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}.$$

因此, 如果只写出特征多项式展开式的前两项与常数项, 则有

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|\boldsymbol{A}|.$$

令 $|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$, 则

$$\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|\boldsymbol{A}|=0. \tag{5}$$

另一方面, 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是特征方程的根, 则

$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)=0, \tag{6}$$

如果只写出 (6) 式前两项与常数项, 则有

$$\lambda^n-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=0. \tag{7}$$

比照 (7) 式与 (5) 式, 得证

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn};\qquad \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=\left|\boldsymbol{A}\right|.$$

5.47

Theorem 8 (☒). *若 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ 的特征向量, 则*

(i) $k\lambda$ 是 $k\boldsymbol{A}$ 的特征值 (k 是任意常数);

(ii) λ^m 是 $\boldsymbol{A}^m$ 的特征值 (m 是正整数);

(iii) 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时, λ^{-1} 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值;

(iv) 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时, $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值.

证: (i) 已知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$, 则 $\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{x})=\lambda(k\boldsymbol{x})$. 故 $k\lambda$ 是 $k\boldsymbol{A}$ 的特征值 (对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$).

(ii) 在 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ 两端同时左乘以矩阵 $\boldsymbol{A}$, 得

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{x})=\lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda^2\boldsymbol{x}. \tag{8}$$

所以 λ^2 是方阵 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征值. 重复以上步骤可得

$$\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{x}=\lambda^m\boldsymbol{x},$$

故 λ^m 是 $\boldsymbol{A}^m$ 的特征值 (对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$). 5.48

(iii) 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时, 由 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$, 知 $\lambda\neq 0$. 在 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ 两端同时左乘以矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 得

$$\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x},$$

故

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}=\lambda^{-1}\boldsymbol{x},$$

得证 λ^{-1} 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值 (对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$).

结论☆

设 λ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则

$$a_0+a_1\lambda+\cdots+a_m\lambda^m$$

是

$$a_0\boldsymbol{I}+a_1\boldsymbol{A}+\cdots+a_m\boldsymbol{A}^m$$

的特征值.

(iv) 因 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$, 由 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 得 5.49

$$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}.$$

从而

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{A}|\lambda^{-1}\boldsymbol{x}.$$

即

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}\boldsymbol{x}.$$

得证 $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值 (对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$). □ 5.50

Example 9. 已知 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1, 2, 3. 求行列式 $|\boldsymbol{A}^3 - 5\boldsymbol{A}^2 + 7\boldsymbol{A}|$ 的值.

分析: 使用结论

1. $|\boldsymbol{A}| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.
2. $\varphi(\lambda)$ 是 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的特征值, 若 λ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

解: 设 λ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $\varphi(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 7\lambda$ 是矩阵 $\varphi(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^3 - 5\boldsymbol{A}^2 + 7\boldsymbol{A}$ 的特征值.

又

$$\varphi(1) = 3, \quad \varphi(2) = 2, \quad \varphi(3) = 3,$$

知 3 阶方阵 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的全部特征值为 3, 2, 3. 所以

$$|\boldsymbol{A}^3 - 5\boldsymbol{A}^2 + 7\boldsymbol{A}| = 3 \times 2 \times 3 = 18. \quad \square$$

5.51

Example 10 (经典题型 ⊠). 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1, -1, 2$, 求 $\boldsymbol{A}^* + 3\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}$ 的特征值.

解: 由题设知 $|\boldsymbol{A}| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -2$, 故 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda} = \frac{-2}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值.

从而, 若 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则

$$\frac{-2}{\lambda} + 3\lambda - 2$$

是 $\boldsymbol{A}^* + 3\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}$ 的特征值.

记

$$\varphi(\lambda) = \frac{-2}{\lambda} + 3\lambda - 2,$$

算得 $\boldsymbol{A}^* + 3\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}$ 的特征值为

$$\varphi(1) = -1, \quad \varphi(-1) = -3, \quad \varphi(2) = 3.$$

5.52

Example 11. 设 $\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}$. 证明 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能取 1 或 2.

解: 设 λ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $\lambda^2-3\lambda+2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}$ 的特征值.

则存在非零向量 $\boldsymbol{x}$ 使得

$$\left(\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{x}=\left(\lambda^2-3\lambda+2\right)\boldsymbol{x}, \tag{9}$$

将 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$ 带入上式得

$$\left(\lambda^2-3\lambda+2\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}. \tag{10}$$

而特征向量 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 所以只能有

$$\lambda^2-3\lambda+2=0.$$

解得 $\lambda=1$ 或 2.

得证 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能取 1 或 2. □ 5.53

一个有缺陷的证明:

由 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$, 得 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=\boldsymbol{0}$. 两边取行列式得

$$|(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})|=|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}|\,|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}|=0.$$

所以

$$|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}|=0 \text{ 或 } |\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}|=0,$$

则 1 或 2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

但是这样只是说明了 1 或 2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是否还有别的特征值没有得到证明, 这就不能下结论说 "$\boldsymbol{A}$ 的特征值只能取 1 或 2". 5.54

Theorem 12. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的特征值相同.

证: 因为

$$(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=(\lambda\boldsymbol{I})^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},$$

所以

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|,$$

因此, $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的特征值相同. □ 5.55

Example 13. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量;

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

解: (i) 由

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}2-\lambda&-2&0\\-2&1-\lambda&-2\\0&-2&-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+2),$$

得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=4$. 5.56

当 $\lambda_1=-2$ 时, 由 $(\lambda_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 即

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系为

$$\boldsymbol{x}_1=(1,2,2)^{\mathrm{T}},$$

故 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 $\lambda_1=-2$ 的全部特征向量为

$$k_1(1,2,2)^{\mathrm{T}},$$

其中 k_1 为不为零的任意常数. 5.57

当 $\lambda_2=1$ 时, 由 $(\lambda_2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 即

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系为

$$\boldsymbol{x}_2=(2,1,-2)^{\mathrm{T}},$$

故 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 $\lambda_2=1$ 的全部特征向量为

$$k_2(2,1,-2)^{\mathrm{T}},$$

其中 k_2 为不为零的任意常数. 5.58

当 $\lambda_3=4$ 时, 由 $(\lambda_3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 即

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系为

$$\boldsymbol{x}_3=(2,-2,1)^{\mathrm{T}},$$

故 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 $\lambda_3=4$ 的全部特征向量为

$$k_3(2,-2,1)^{\mathrm{T}},$$

其中 k_3 为不为零的任意常数. 5.59

(ii) 由

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1,\,\boldsymbol{x}_2,\,\boldsymbol{x}_3)&=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1,\,\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2,\,\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_3)\\&=(\lambda_1\boldsymbol{x}_1,\,\lambda_2\boldsymbol{x}_2,\,\lambda_3\boldsymbol{x}_3)=(\boldsymbol{x}_1,\,\boldsymbol{x}_2,\,\boldsymbol{x}_3)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

记

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{x}_1,\,\boldsymbol{x}_2,\,\boldsymbol{x}_3),\qquad \boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P\Lambda}.$$

5.60

又 $|\boldsymbol{P}|=-27\neq 0$, 故存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

5.61

MATLAB 求特征值和特征向量

用命令 eig(A) 可以同时得到特征向量和特征值.

```
>> A=[2,-2, 0;
      -2, 1, -2;
      0,-2, 0]

A =

   2  -2   0
  -2   1  -2
   0  -2   0
```

(a) 录入矩阵 $\boldsymbol{A}$.

```
>> [P,T]=eig(A)

P =

  -0.3333   0.6667  -0.6667
  -0.6667   0.3333   0.6667
  -0.6667  -0.6667  -0.3333


T =

  -2.0000        0        0
        0   1.0000        0
        0        0   4.0000
```

(b) 矩阵 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{T}$ 记录特征向量及其对应的特征值.

```
>> 3*P

ans =

  -1.0000   2.0000  -2.0000
  -2.0000   1.0000   2.0000
  -2.0000  -2.0000  -1.0000

>> P\A*P

ans =

  -2.0000  -0.0000   0.0000
  -0.0000   1.0000  -0.0000
   0.0000   0.0000   4.0000
```

(c) 验证 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{T}$.

5.62

1.4 相似矩阵及其性质

Definition 14. 对于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$, 若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B},$$

就称 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$, 记作 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

在同济版教材中, 记号 $\sim$ 表示 “等价”(也就是本教材中的 “相抵”).

矩阵的相似关系也是一种等价关系, 满足以下三条性质:

(i) 反身性: $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{A}$;

(ii) 对称性: 若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{A}$;

(iii) 传递性: 若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{C}$, 则 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{C}$. 5.63

相似矩阵有以下性质:

(i) 若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{A}^m \sim \boldsymbol{B}^m$ (m 为正整数).

(ii) 若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, 则 $f(\boldsymbol{A}) \sim f(\boldsymbol{B})$, 其中

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \\
f(\boldsymbol{A}) &= a_n \boldsymbol{A}^n + a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1} + \cdots + a_1 \boldsymbol{A} + a_0 \boldsymbol{I}, \\
f(\boldsymbol{B}) &= a_n \boldsymbol{B}^n + a_{n-1}\boldsymbol{B}^{n-1} + \cdots + a_1 \boldsymbol{B} + a_0 \boldsymbol{I}.
\end{aligned}$$

证: 若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}.$$

于是

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}^m &= (\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\cdots(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}) \\
&= \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{P},
\end{aligned}$$

故

$$\boldsymbol{A}^m \sim \boldsymbol{B}^m.$$

类似可证 $f(\boldsymbol{A}) \sim f(\boldsymbol{B})$. □ 5.64

Theorem 15. *若两个矩阵相似, 则它们的特征多项式相同, 从而特征值也相同.*

证: 设 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}.$$

于是

$$\begin{aligned}
|\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}| &= |\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}| \\
&= |\boldsymbol{P}^{-1}(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{P}| \\
&= |\boldsymbol{P}^{-1}||\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}||\boldsymbol{P}| \\
&= |\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}|. \qquad\qquad (|\boldsymbol{P}^{-1}||\boldsymbol{P}| = 1)
\end{aligned}$$

证毕. □

相似的矩阵, 它们的特征向量是否一定相同呢? 答案为否. 后文会有讨论. 5.65

Corollary 16. *若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵*

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

相似, 则 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值.

证: 因 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的特征多项式为

$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n),$$

故 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的 n 个特征值, 由前述定理知 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值. □ 5.66

2 矩阵可对角化的条件

所谓矩阵可对角化, 是指矩阵与对角阵相似, 即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$$

为对角矩阵.

本节的主要结论:

- n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是: $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.
- n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是: $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值的代数重数, 等于其几何重数. 5.67

Theorem 17. *n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是: $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.*

证: 必要性. 设

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \triangleq \boldsymbol{\Lambda},$$

即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}.$$

记 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$, 则

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

即

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n) = (\lambda_1\boldsymbol{x}_1, \lambda_2\boldsymbol{x}_2, \cdots, \lambda_n\boldsymbol{x}_n),$$

5.68

于是

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i = \lambda_i\boldsymbol{x}_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

从而 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征向量, 而 $\boldsymbol{P}$ 可逆, 故它们是线性无关的.

上述步骤显然可逆, 得充分性也成立. □

若忽略 λ_k 的排列顺序, 则 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是唯一的, 称 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的相似标准形. 5.69

Theorem 18. *矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量是线性无关的.*

证: 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个互不相同的特征值, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 依次是与之对应的特征向量.

用数学归纳法.

当 $m=1$ 时, 因特征向量 $\boldsymbol{x}_1 \neq \mathbf{0}$, 故只含有一个向量的向量组 $\boldsymbol{x}_1$ 线性无关.

假设 $m=k$ 时结论成立, 即 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ 线性无关. 下证 $m=k+1$ 时结论也成立. 设

$$a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_k\boldsymbol{x}_k + a_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} = \mathbf{0}, \tag{11}$$

用 $\boldsymbol{A}$ 左乘上式, 得

$$a_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_k\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k + a_{k+1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{k+1} = \mathbf{0},$$

即

$$a_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\lambda_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_k\lambda_k\boldsymbol{x}_k + a_{k+1}\lambda_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} = \mathbf{0}, \tag{12}$$

5.70

令 $(12) - \lambda_{k+1}(11)$, 得

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\boldsymbol{x}_1 + a_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1})\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})\boldsymbol{x}_k = \mathbf{0}.$$

因 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ 线性无关, 故

$$a_i(\lambda_i - \lambda_{k+1}) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, k).$$

而 $\lambda_i - \lambda_{k+1} \neq 0$, $i = 1, 2, \cdots, k$, 从而

$$a_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, k).$$

代入到 (11) 式, 得

$$a_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} = \mathbf{0},$$

而特征向量 $\boldsymbol{x}_{k+1} \neq \mathbf{0}$, 故 $a_{k+1} = 0$. 得证 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_{k+1}$ 线性无关. □ 5.71

Corollary 19. *若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值, 则 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似.*

5.72

Theorem 20. *设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个互不相同的特征值, 对应于 λ_i 的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{x}_{i_1}, \boldsymbol{x}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{x}_{i_{r_i}}$, $(i = 1, 2, \cdots, m)$, 则由所有这些特征向量 (共 $r_1 + r_2 + \cdots + r_m$ 个) 构成的向量组是线性无关的.*

下面通过一个简单情形的证明, 说明该结论. 5.73

Example 21. 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有三个实特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 且满足 $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, 如果 λ_1 对应两个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$, λ_3 对应一个特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$, 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

证: 设有 k_1, k_2, k_3 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}, \tag{13}$$

则 $\boldsymbol{A}k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{A}k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{A}k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{0}$, 即

$$k_1\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{0}. \tag{14}$$

用 λ_1 乘以 (13) 式, 然后与 (14) 式相减, 并注意到 $\lambda_1 = \lambda_2$, 得

$$k_3(\lambda_3 - \lambda_1)\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{0}, \tag{15}$$

因 $\lambda_3 - \lambda_1 \neq 0$, 特征向量为非零向量, 则 (15) 式中 $k_3 = 0$. 再返回 (13) 式, 得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{0}$, 由于 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 则 $k_1 = k_2 = 0$, 于是 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. 即 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关. 5.74

另证 设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{0}, \tag{16}$$

假设 $k_3 \neq 0$. 则 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 的线性组合, 不妨记 $\boldsymbol{\alpha}_3 = c_1\boldsymbol{\alpha}_1 + c_2\boldsymbol{\alpha}_2$, 由

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3 &= \boldsymbol{A}(c_1\boldsymbol{\alpha}_1 + c_2\boldsymbol{\alpha}_2) = c_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 + c_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = c_1\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + c_2\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_2 \\ &= \lambda_1(c_1\boldsymbol{\alpha}_1 + c_2\boldsymbol{\alpha}_2) = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_3,\end{aligned}$$

得 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 λ_1 所对应的特征向量. 与题设矛盾, 所以假设不成立. 即只能是 $k_3 = 0$, 代入 (16) 式得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{0}$, 又 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 得 $k_1 = k_2 = 0$.

综上, 要使 (16) 式成立, 只能是 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, 得证 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关. □ 5.75

可对角化的第二个充要条件

Theorem 22. *n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是: $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值的代数重数等于其几何重数.*

Corollary 23. *n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是: $\boldsymbol{A}$ 的每个重根特征值的代数重数等于其几何重数.*

检验矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是否可对角化, 只需检验: 重根特征值的代数重数 $\overset{?}{\doteq}$ 几何重数. 单根特征值不予考虑. 5.76

Example 24. 讨论矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 是否可以对角化.

解: $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-2),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

因 $\lambda_1 = 2$ 是单根, 其对应的线性无关特征向量的个数一定为 1. 故只需要考虑重根特征值. 5.77

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时, 解方程 $(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\lambda_2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\eta}=(-1,-2,1)^{\mathrm{T}}$, 故 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 所对应的线性无关特征向量的个数是 1.

可见 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不存在 3 个线性无关的特征向量, 故 $\boldsymbol{A}$ 不能对角化. □

或者: 因 $\mathrm{r}(\lambda_2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=2$, 则 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的几何重数为

$$n-\mathrm{r}(\lambda_2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=3-2=1,$$

重根特征值的几何重数不等于其代数重数, 故 $\boldsymbol{A}$ 不能对角化. 5.78

Example 25 (经典好题 ⊠). 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 问 x 为何值时, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能对角化?

解: $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & -x \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1),$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=\lambda_3=1$.

对应单根 $\lambda_1=-1$, 可求得线性无关的特征向量恰有 1 个, 故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是: 重根 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 对应有 2 个线性无关的特征向量, 即方程组

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

有 2 个线性无关的解. 5.79

亦即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$ 满足 $n-r=2$, 即

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=1.$$

由

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -x \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+r_1]{(r_2+r_1)\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & x+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

要 $\mathrm{r}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=1$, 得 $x+1=0$, 即 $x=-1$.

因此, 当 $x=-1$ 时, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能对角化. □ 5.80

3 实对称矩阵的对角化

复数常记为如下的形式:

$$a+b\mathrm{i},$$

这里 i 为虚数单位, 它满足

$$\mathrm{i}^2 = -1.$$

而 a, b 是实数, 分别称为实部和虚部.

Definition 26. 元素为复数的矩阵和向量, 称为复矩阵和复向量.

例如

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2+4\mathrm{i} & 1-3\mathrm{i} \\ 2-4\mathrm{i} & 3 & 8+6\mathrm{i} \\ 1+3\mathrm{i} & 8-6\mathrm{i} & 5 \end{pmatrix}.$$

5.81

$a+b\mathrm{i}$ 与 $a-b\mathrm{i}$ 互为共轭复数. 复数 x 的共轭复数记为 $\bar{x}$.

例如 $x = 2+3\mathrm{i}$, 则 $\bar{x} = 2-3\mathrm{i}$.

Definition 27. 设 a_{ij} 为复数, $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, 则其共轭矩阵为

$$\overline{\boldsymbol{A}} = (\bar{a}_{ij})_{m\times n}.$$

例如

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2+4\mathrm{i} & 1-3\mathrm{i} \\ 2-4\mathrm{i} & 3 & 8+6\mathrm{i} \end{pmatrix}, \qquad \overline{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2-4\mathrm{i} & 1+3\mathrm{i} \\ 2+4\mathrm{i} & 3 & 8-6\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

☞ $\overline{\overline{\boldsymbol{A}}} = \boldsymbol{A}$, $\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}} = \overline{(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})}$.

当 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵时, $\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$. 5.82

容易证明共轭矩阵有以下性质:

(1) $\overline{k\boldsymbol{A}} = \bar{k}\,\overline{\boldsymbol{A}}$;

(2) $\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}} + \overline{\boldsymbol{B}}$;

(3) $\overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}}\,\overline{\boldsymbol{B}}$;

(4) $\overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}} = \overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}$;

(5) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\overline{\boldsymbol{A}^{-1}} = (\overline{\boldsymbol{A}})^{-1}$;

(6) $\det \overline{\boldsymbol{A}} = \overline{\det \boldsymbol{A}}$.

5.83

n 维复向量 $\boldsymbol{x}$ 满足性质:

$$\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geqslant 0,$$

等号成立当且仅当 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

事实上, 若 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $x_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 则

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} &= \bar{x}_1 x_1 + \bar{x}_2 x_2 + \cdots + \bar{x}_n x_n \\ &= |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2 \\ &\geqslant 0, \end{aligned}$$

其中 $|x_i|$ 是复数 x_i 的模. 且 $\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 当且仅当 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 5.84

3.1 实对称矩阵的特征值和特征向量

Theorem 28. *实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一个特征值都是实数.*

证: 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值. 由 $\boldsymbol{A}$ 为实矩阵, 有 $\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}$, 故

$$\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{A}}\,\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}} = \overline{\lambda\boldsymbol{x}} = \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}}.$$

于是有

$$\begin{aligned}
&\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\lambda\boldsymbol{x} = \lambda\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},\\
&\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = (\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = (\overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},
\end{aligned}$$

两式相减得

$$(\lambda - \overline{\lambda})\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0,$$

但特征向量 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, 从而 $\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} > 0$, 故 $\lambda - \overline{\lambda} = 0$, 即 $\lambda = \overline{\lambda}$, 得证 λ 为实数. □ 5.85

Theorem 29. *实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于不同特征值的特征向量是正交的.*

证: 设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2\boldsymbol{x}_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
因 $\boldsymbol{A}$ 对称, 故 $\lambda_1\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}} = (\lambda_1\boldsymbol{x}_1)^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$, 于是

$$\lambda_1\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}(\lambda_2\boldsymbol{x}_2) = \lambda_2\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_2,$$

即

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_2 = 0.$$

但 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 故 $\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_2 = 0$, 即 $\boldsymbol{x}_1$ 与 $\boldsymbol{x}_2$ 正交. □ 5.86

3.2 实对称矩阵的对角化

Theorem 30. *对任一个 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$, 存在 n 阶正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得*

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n).$$

证明略. 5.87

Corollary 31. *设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵, λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程的 k 重根, 则对应特征值 λ_0 恰有 k 个线性无关的特征向量, 亦即矩阵 $\lambda_0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的秩 $\mathrm{r}(\lambda_0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}) = n-k$.*

事实上, 因实对称矩阵必可对角化, 而任意矩阵可对角化的充要条件是特征值的代数重数等于其几何重数. 即有上述结论成立. 5.88

实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正交对角化的步骤

(i) 求出 $\boldsymbol{A}$ 的全部互不相等的特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$, 它们的重数依次为 $k_1, \cdots, k_s$ $(k_1 + \cdots + k_s = n)$.

(ii) 对每个 k_i 重特征值 λ_i, 求方程 $(\lambda_i \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系, 得 k_i 个线性无关的特征向量. 再把它们用施密特过程进行正交化, 并单位化, 得到 k_i 个两两正交的单位特征向量. 因 $k_1+\cdots+k_s=n$, 故总共可得 n 个两两正交的单位特征向量.

(iii) 将这 n 个两两正交的单位特征向量构成正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 便有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$. 注意 $\boldsymbol{\Lambda}$ 中对角元的排列次序与 $\boldsymbol{P}$ 中列向量的排列次序相对应.

思考: 上述施密特正交化过程得到的向量, 还是对应于 λ_i 的特征向量吗? 为什么?

5.89

Example 32 (精讲题目 ⊠). 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 求一个正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角阵.

解: 由

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \xlongequal{r_1-r_2} \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2+c_1} \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda+1 & -1 \\ -1 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+2),$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=\lambda_3=1$. 5.90

对应 $\lambda_1=-2$, 解方程 $(\lambda_1 \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\lambda_1 \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 将 $\boldsymbol{\xi}_1$ 单位化得 $\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. 5.91

对应 $\lambda_2=\lambda_3=1$, 解方程 $(\lambda_2 \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\lambda_2 \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

将 $\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3$ 正交化: 取 $\boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{\xi}_2$,

$$\boldsymbol{\eta}_3=\boldsymbol{\xi}_3-\frac{(\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\xi}_3)}{|\boldsymbol{\eta}_2|^2}\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

5.92

将 $\boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$ 单位化, 得 $\boldsymbol{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

将 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ 构成正交矩阵

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

5.93

说明:

(1) 要看清楚题目的要求. 如果没有要求 $\boldsymbol{P}$ 为正交阵, 则作一般的对角化即可, 即取

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 正交化过程只出现在重根特征值对应的特征向量. 因为对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量是正交的, 所以只需要将重根特征值对应的特征向量进行施密特正交化, 而无需将 $\boldsymbol{A}$ 所有的特征向量放在一起正交化.

5.94

(3) $\boldsymbol{P}$ 中 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ 的排列顺序要和 $\boldsymbol{\Lambda}$ 中对角元素 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的排列顺序一致. 比如若取

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

则由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_3) = (\lambda_2\boldsymbol{p}_2, \lambda_1\boldsymbol{p}_1, \lambda_3\boldsymbol{p}_3) = (\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_3)\,\mathrm{diag}(\lambda_2, \lambda_1, \lambda_3)$, 得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

5.95

(4)★ 正交化过程其实是可以避免的: 对重根求对应方程组的基础解系时, 可以直接凑出一组正交的基础解系.

对应 $\lambda_2=\lambda_3=1$, 求解 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 时, 得同解方程

$$x_1+x_2-x_3=0.$$

下面构造一组正交的基础解系: 若取 $\boldsymbol{\xi}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$, 要满足正交, 则应有 $\boldsymbol{\xi}_3=(1,\square,-1)^{\mathrm{T}}$, 又要满足方程, 所以 $\boldsymbol{\xi}_3=(1,-2,-1)^{\mathrm{T}}$, 从而得到一组正交的基础解系:

$$\boldsymbol{\xi}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\xi}_3=(1,-2,-1)^{\mathrm{T}}. \tag{17}$$

类似地, 还可以取

$$\boldsymbol{\xi}_2=(1,-1,0)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\xi}_3=(1,1,2)^{\mathrm{T}}. \tag{18}$$

或者 $\boldsymbol{\xi}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_3=(-2,1,-1)^{\mathrm{T}}$, 等等.

5.96

(5) 满足条件的正交阵不是唯一的 (即便忽略 $\boldsymbol{P}$ 中 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$ 的排列顺序). 事实上有无穷多个: 这里特征子空间 V_{λ_2} 是一个平面, 在其中任取两个正交的单位向量即可.

把 (17) 式中的向量单位化得

$$\boldsymbol{p}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{p}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,-1)^{\mathrm{T}},$$

从而得满足条件的正交阵

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

把 (17) 式中的向量单位化得满足条件的正交阵

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

5.97

Example 33. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^n$.

解: 因 $\boldsymbol{A}$ 对称, 故 $\boldsymbol{A}$ 可对角化, 即有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 及对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$. 于是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$, 从而

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}\cdots\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}.$$

由

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 \\ 1 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3),$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$. 于是

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\Lambda}^n = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 3^n \end{pmatrix}.$$

5.98

对应 $\lambda_1 = 1$, 由 $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 得 $\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

对应 $\lambda_2 = 3$, 由 $3\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 得 $\boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

从而 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, 再求出 $\boldsymbol{P}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. 于是

$$\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+3^n & 1-3^n \\ 1-3^n & 1+3^n \end{pmatrix}.$$

5.99

Example 34. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^{100}$.

解: 先把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对角化. 由

$$|\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -4 & -2 \\ 0 & \lambda + 3 & -4 \\ 0 & -4 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 5)(\lambda + 5),$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = -5$.

当 $\lambda_1 = 1$ 时, 解方程 $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可取 $\lambda_1 = 1$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1 = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. 5.100

当 $\lambda_2 = 5$ 时, 解方程 $(5\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 由

$$5\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -2 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可取 $\lambda_2 = 5$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_2 = (2, 1, 2)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_3 = -5$ 时, 解方程 $(-5\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 由

$$-5\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -6 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可取 $\lambda_3 = -5$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_3 = (1, -2, 1)^{\mathrm{T}}$. 5.101

由

$$A(p_1,\, p_2,\, p_3) = (p_1,\, p_2,\, p_3)\,\mathrm{diag}(1,\, 5,\, -5),$$

记 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1,\, \boldsymbol{p}_2,\, \boldsymbol{p}_3)$, $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(1,\, 5,\, -5)$, 则 $\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{P\Lambda}$, 即

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}.$$

则

$$\boldsymbol{A}^{100} = \boldsymbol{P\Lambda}^{100}\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2\cdot 5^{100} & 5^{100} \\ 0 & 5^{100} & -2\cdot 5^{100} \\ 0 & 2\cdot 5^{100} & 5^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5^{100}-1 \\ 0 & 5^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{100} \end{pmatrix}.$$

5.102

注

这个题型很重要. 解此类型的题目的时候, 不要一味地只想到使用对角化的方法, 要灵活地依据题目的特点求解. 比如下面的题目.

Example 35. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, 计算 $\boldsymbol{A}^5$.

5.103

解: (解法一) 注意到

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1, -1, -1)\,,$$

则

$$\boldsymbol{A}^5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1, -1, -1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1, -1, -1) \cdots \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1, -1, -1)\,.$$

5.104

而

$$(1, -1, -1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -3,$$

所以

$$\boldsymbol{A}^5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (-3)^4 \cdot (1, -1, -1) = (-3)^4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1, -1, -1)$$

$$= 81\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -81 & 81 & 81 \\ 81 & -81 & -81 \\ 81 & -81 & -81 \end{pmatrix}.$$

5.105

(解法二) 由

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -3 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = -3\boldsymbol{A},$$

可知

$$\boldsymbol{A}^5 = (-3)^4\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -81 & 81 & 81 \\ 81 & -81 & -81 \\ 81 & -81 & -81 \end{pmatrix}.$$

5.106

Example 36. 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 5 & & \\ & -4 & \\ & & y \end{pmatrix}$ 相似, 求 x, y; 并求一个正交阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$.

解: 方阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似, 则 $5, -4, y$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 由特征值性质 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ 和 $|\boldsymbol{A}| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$, 得

$$\begin{cases} 5 + (-4) + y = 1 + x + 1, \\ 5 \cdot (-4) \cdot y = |\boldsymbol{A}|. \end{cases} \tag{19}$$

又

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_2+2r_1}{\underset{r_3+4r_1}{=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & x-4 & -10 \\ 0 & -10 & -15 \end{vmatrix} = -15x - 40,$$

代入 (19) 式得 5.107

$$\begin{cases} 1 + y = 2 + x, \\ -20y = -15x - 40. \end{cases} \implies \begin{cases} x = 4, \\ y = 5. \end{cases}$$

下求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$.

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$ 时, 解方程 $(\boldsymbol{A} - 5\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A} - 5\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得一组正交的基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1 = (1,\ -2,\ 0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = (2,\ 1,\ -\frac{5}{2})^{\mathrm{T}}.$$

单位化得

$$\boldsymbol{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,\,-2,\,0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \left(\frac{4}{3\sqrt{5}},\,\frac{2}{3\sqrt{5}},\,-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{\mathrm{T}}.$$

5.108

当 $\lambda_3 = -4$ 时, 解方程 $(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. 由

$$\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_3 = (2,\,1,\,2)^{\mathrm{T}}$, 单位化得

$$\boldsymbol{p}_3 = \frac{1}{3}(2,\,1,\,2)^{\mathrm{T}}.$$

5.109

令

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1,\,\boldsymbol{p}_3,\,\boldsymbol{p}_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{P}$ 为所求的一个正交矩阵, 并满足

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 5 & & \\ & -4 & \\ & & 5 \end{pmatrix}.$$

注意到 $\boldsymbol{\Lambda}$ 中的对角元 $5, -4, 5$ 的排列顺序, 故 $\boldsymbol{P}$ 的列向量要对应地取为 $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_3$, $\boldsymbol{p}_2$.

5.110

满足条件的正交矩阵不是唯一的. 比如解方程 $(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 时, 构造一组正交的基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = (1,\,0,\,-1)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = (1,\,-4,\,1)^{\mathrm{T}}.$$

单位化得

$$\boldsymbol{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,\,0,\,-1)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(1,\,-4,\,1)^{\mathrm{T}}.$$

最后可得满足条件的正交矩阵为

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1,\,\boldsymbol{p}_3,\,\boldsymbol{p}_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

5.111

Example 37. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 1$; 对应的特征向量依次为

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{A}$.

解: 记 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\,\boldsymbol{p}_2,\,\boldsymbol{p}_3)$, $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\,\lambda_2,\,\lambda_3)$, 则 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P\Lambda}$, 所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}&=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&&\\&-2&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}^{-1}\\&=\begin{pmatrix}0&-2&1\\2&-2&1\\2&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}^{-1}.\end{aligned}$$

5.112

其中

$$\left(\begin{array}{ccc}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\\\hline 0&-2&1\\2&-2&1\\2&-2&0\end{array}\right)\xrightarrow{c_2-c_1}\left(\begin{array}{ccc}0&1&1\\1&0&1\\1&0&0\\\hline 0&-2&1\\2&-4&1\\2&-4&0\end{array}\right)\xrightarrow{c_3-c_2}\left(\begin{array}{ccc}0&1&0\\1&0&1\\1&0&0\\\hline 0&-2&3\\2&-4&5\\2&-4&4\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{c_1-c_3}\left(\begin{array}{ccc}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\\\hline -3&-2&3\\-3&-4&5\\-2&-4&4\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\\hline -2&3&-3\\-4&5&-3\\-4&4&-2\end{array}\right),$$

5.113

所以

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}=\begin{pmatrix}-2&3&-3\\-4&5&-3\\-4&4&-2\end{pmatrix}.$$

5.114

Example 38. 设 3 阶对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_3=0$; 对应 λ_1, λ_2 的特征向量依次为

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

求 $\boldsymbol{A}$.

解: 设 λ_3 对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_3=(x,\,y,\,z)^{\mathrm{T}}$. 注意到 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵, 由 $\lambda_1\neq\lambda_2\neq\lambda_3$, 知 $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$ 两两正交. 则

$$\begin{cases}x+2y+2z=0,\\2x+y-2z=0.\end{cases}\tag{20}$$

由系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

5.115

可取

$$p_3 = (-2,\ 2,\ -1)^{\mathrm{T}},$$

因 A 对称, 必有正交阵 Q, 使

$$Q^{\mathrm{T}} A Q = Q^{-1} A Q = \mathrm{diag}(1,\ -1,\ 0).$$

前面已经求得 p_1, p_2, p_3 正交, 再单位化, 即得

$$Q = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

5.116

所以

$$\begin{aligned} A &= Q\ \mathrm{diag}(1,\ -1,\ 0)\ Q^{\mathrm{T}} \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5.117

Example 39. 设 3 阶对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 3$, 与特征值 $\lambda_1 = 6$ 对应的特征向量为 $p_1 = (1,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$, 求 A.

解: 1° 先求出 λ_2, λ_3 所对应的特征向量 p_2, p_3.

因 A 为对称阵, 则 p_2, p_3 与 p_1 正交. 设 $(x,\ y,\ z)^{\mathrm{T}}$ 与 p_1 正交, 则

$$x + y + z = 0.$$

得一组正交的基础解系

$$(1,\ -1,\ 0)^{\mathrm{T}},\ (1,\ 1,\ -2)^{\mathrm{T}}.$$

所以可取

$$p_2 = (1,\ -1,\ 0)^{\mathrm{T}}, \quad p_3 = (1,\ 1,\ -2)^{\mathrm{T}}.$$

5.118

2° 因 p_1, p_2, p_3 已经两两正交, 将它们单位化得到的向量记为 η_1, η_2, η_3, 得正交矩阵

$$P = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

记 $\boldsymbol{\Lambda}=\operatorname{diag}(6,3,3)$, 则

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{pmatrix}.$$

5.119

4 习题

Exercise 40 (习题 1)**.** 求下列矩阵的特征值与特征向量.

$$(1)\begin{pmatrix}2&-3\\-3&1\end{pmatrix};\quad(2)\begin{pmatrix}3&-1&1\\2&0&1\\1&-1&2\end{pmatrix};\quad(3)\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&1\\1&-1&3\end{pmatrix};$$

$$(4)\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix};\quad(5)\begin{pmatrix}4&5&-2\\-2&-2&1\\-1&-1&1\end{pmatrix};\quad(6)\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}.$$

解: (1) $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&3\\3&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)-9=\lambda^2-3\lambda-7.$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为: $\lambda_1=\dfrac{3+\sqrt{37}}{2}$, $\lambda_2=\dfrac{3-\sqrt{37}}{2}$. 5.120

当 $\lambda_1=\frac{3+\sqrt{37}}{2}$ 时, 解方程组 $(\lambda_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{37}-1}{2}&3\\3&\frac{\sqrt{37}+1}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\times\frac{\sqrt{37}+1}{2}}\begin{pmatrix}9&3\cdot\frac{\sqrt{37}+1}{2}\\3&\frac{\sqrt{37}+1}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-3r_2}\begin{pmatrix}0&0\\3&\frac{\sqrt{37}+1}{2}\end{pmatrix},$$

解得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=(6,1-\sqrt{37})^{\mathrm{T}}$. 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_1=\frac{3+\sqrt{37}}{2}$ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1$(k_1 为任意非零常数).

当 $\lambda_2=\frac{3-\sqrt{37}}{2}$ 时, 解方程组 $(\lambda_2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{37}+1}{2}&3\\3&\frac{1-\sqrt{37}}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\times\frac{1-\sqrt{37}}{2}}\begin{pmatrix}9&3\cdot\frac{1-\sqrt{37}}{2}\\3&\frac{1-\sqrt{37}}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-3r_2}\begin{pmatrix}0&0\\3&\frac{1-\sqrt{37}}{2}\end{pmatrix},$$

解得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_2=(6,1+\sqrt{37})^{\mathrm{T}}$. 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_2=\frac{3+\sqrt{37}}{2}$ 的全部特征向量为 $k_2\boldsymbol{\xi}_2$(k_2 为任意非零常数). 5.121

(2)

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3&1&-1\\-2&\lambda&-1\\-1&1&\lambda-2\end{vmatrix}\xlongequal[r_2-\lambda r_3]{r_1-r_3}\begin{vmatrix}\lambda-2&0&1-\lambda\\\lambda-2&0&-\lambda^2+2\lambda-1\\-1&1&\lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}\lambda-2&1-\lambda\\\lambda-2&-\lambda^2+2\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-1).$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为: $\lambda_1=\lambda_2=2$, $\lambda_3=1$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 时, 解方程组 $(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(r_1+r_2)\times(-1)]{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$. 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1$ (k_1 为任意非零常数). 5.122

当 $\lambda_3=1$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1-r_3]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

解得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$. 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_3=1$ 的全部特征向量为 $k_2\boldsymbol{\xi}_2$ (k_2 为任意非零常数). 5.123

(3) $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ 1 & \lambda-3 \end{vmatrix}=(\lambda-2)^3.$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$ 时, 解方程组 $(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$. 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$, ($k_1$, k_2 不同时为 0). 5.124

(4) $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & \lambda-1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^4$, 故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=3$, 知其基础解系只包含一个解向量. 而 $(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$ 显然是其解, 故基础解系为 $\boldsymbol{\xi}=(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$. 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1$ 的全部特征向量为 $k\boldsymbol{\xi}$, (k 为任意非零常数). 5.125

(5)

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-4 & -5 & 2 \\ 2 & \lambda+2 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1-c_2} \begin{vmatrix} \lambda-4 & -\lambda-1 & 2 \\ 2 & \lambda & -1 \\ 1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{展开}r_3}\begin{vmatrix} -\lambda-1 & 2 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix}+(\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-4 & -\lambda-1 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix}$$
$$=(-\lambda+1)+(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+2)=(\lambda-1)^3.$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -3 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-2r_3]{r_1+2r_2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$, 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$ 的全部特征向量为 $k\boldsymbol{\xi}$, (k 为任意非零常数). 5.126

(6)

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-1 & 2 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}\xlongequal{\text{展开}r_1}(\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-2)(\lambda^2-\lambda-4)-4\lambda=(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-4).$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为: $\lambda_1=-2,\lambda_2=1,\lambda_3=4$.

当 $\lambda_1=-2$ 时, 解方程组 $(-2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+r_3}\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\div 2]{r_1+2r_2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,2,2)^{\mathrm{T}}$. 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_1=-2$ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1$ (k_1 为任意非零常数). 5.127

当 $\lambda_2=1$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow[r_1\times(-1)]{r_2+2r_1}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_2=(2,1,-2)^{\mathrm{T}}$. 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_2=1$ 的全部特征向量为 $k_2\boldsymbol{\xi}_2$ (k_2 为任意非零常数).

当 $\lambda_3=4$ 时, 解方程组 $(4\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$4\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_3=(-2,2,-1)^{\mathrm{T}}$. 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_3=4$ 的全部特征向量为 $k_3\boldsymbol{\xi}_3$ (k_3 为任意非零常数). 5.128

Exercise 41 (习题 2)**.** 已知矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & x \end{pmatrix}$ 的特征值 $\lambda_1 = 3$ (二重), $\lambda_2 = 12$, 求 x 的值, 并求特征向量.

解: 由特征值的性质 $\lambda_1 + \lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr}(\boldsymbol{A})$, 得

$$3 + 3 + 12 = 7 + 7 + x,$$

故 $x = 4$.

当 $\lambda_1 = 3$ 时, 解方程组 $(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$3\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 \\ -4 & -4 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1 = (-1, 1, 0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\xi}_2 = (1, 0, 4)^{\mathrm{T}}$, 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_1 = 3$ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2$ (k_1, k_2 不同时为零). 5.129

当 $\lambda_2 = 12$ 时, 解方程组 $(\lambda_2 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$\begin{aligned} 12\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} &= \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & 1 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & 5 & 1 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[r_2 + 4r_1]{r_3 - 4r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_3 = (1, 1, -1)^{\mathrm{T}}$, 因此矩阵对应于特征值 $\lambda_2 = 12$ 的全部特征向量为 $k_3\boldsymbol{\xi}_3$ (k_3 为任意非零常数). 5.130

Exercise 42 (习题 3)**.** 设 $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不同特征值的特征向量, 证明 $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征向量.

证: 用反证法. 假设 $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量, 对应的特征值为 λ, 即

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \lambda(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2).$$

设 $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的分别对应于特征值 λ_1, λ_2 的特征向量, 且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 即有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1\boldsymbol{x}_1, \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2\boldsymbol{x}_2,$$

于是

$$\lambda(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2\boldsymbol{x}_2,$$

得到

$$(\lambda - \lambda_1)\boldsymbol{x}_1 + (\lambda - \lambda_2)\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0},$$

因为 $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ 对应 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值, 所以 $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ 线性无关, 从而有 $\lambda - \lambda_1 = \lambda - \lambda_2 = 0$, 得 $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$. 矛盾! □ 5.131

Exercise 43 (习题 4)**.** 设 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ 分别是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于互不相同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的特征向量, 证明 $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

证: 用反证法. 假设 $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量, 对应的特征值为 λ, 即

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3) = \lambda(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3).$$

由题设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_3 = \lambda_3\boldsymbol{x}_3$, 于是

$$\lambda(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3) = \lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2\boldsymbol{x}_2 + \lambda_3\boldsymbol{x}_3,$$

从而

$$(\lambda - \lambda_1)\boldsymbol{x}_1 + (\lambda - \lambda_2)\boldsymbol{x}_2 + (\lambda - \lambda_3)\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0},$$

因为 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ 对应 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值, 所以 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ 线性无关, 从而有

$$\lambda - \lambda_1 = \lambda - \lambda_2 = \lambda - \lambda_3 = 0 \Longrightarrow \lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3.$$

矛盾! □ 5.132

Exercise 44 (习题 5)**.** 证明对合矩阵 $\boldsymbol{A}$ (即 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{I}$) 的特征值只能为 1 或 -1.

证: 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{x}$ 是对应的特征向量, 即有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$.

上式两边同时左乘以 $\boldsymbol{A}$, 得

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda^2\boldsymbol{x},$$

注意到 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{I}$, 则有

$$\boldsymbol{x} = \lambda^2\boldsymbol{x},$$

即

$$(1 - \lambda^2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},$$

因为 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, 所以 $1 - \lambda^2 = 0$, 从而 $\lambda = 1$ 或 -1. □ 5.133

Exercise 45 (习题 6)**.** 设 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 讨论 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值 (特征向量) 之间的相互关系.

解: 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$, 即有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$.

因 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$, 由 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 得

$$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}.$$

从而

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{A}|\lambda^{-1}\boldsymbol{x}.$$

即

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}\boldsymbol{x}.$$

得证 $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值 (对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$).

综上, 如果 λ 是可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 那么 $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 就是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值, 对应的特征向量相同. □ 5.134

Exercise 46 (习题 7)**.** 若 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$, 问: $\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{I}$ 是否成立?

解: $\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}-2\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{I}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{I}$, 即成立. □ 5.135

Exercise 47 (习题 8)**.** 已知 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}$, 求 $\det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})$.

解: 因为 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$, 所以存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$, 即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$, 从而 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}-\boldsymbol{P}\boldsymbol{I}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\Lambda}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{P}^{-1}$, 两边取行列式得:

$$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}|=|\boldsymbol{P}||\boldsymbol{\Lambda}-\boldsymbol{I}||\boldsymbol{P}^{-1}|=|\boldsymbol{\Lambda}-\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}-1-1&0\\0&2-1\end{vmatrix}=-2.$$

另解: 由已知条件可知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 -1 和 2, 那么 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}$ 的特征值为 $-1-1=-2$ 和 $2-1=1$, 于是

$$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}|=(-2)\times 1=-2.$$

5.136

Exercise 48 (习题 9)**.** 已知 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&-1\\3&-2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^n$.

解: 由题设得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$, 又

$$\boldsymbol{P}^{-1}=-\begin{pmatrix}-2&1\\-3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\3&-2\end{pmatrix},$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}^n\boldsymbol{P}^{-1}&=\begin{pmatrix}2&-1\\3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^n&0\\0&2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\3&-2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}4(-1)^n-3\cdot 2^n&2(-1)^{n+1}+2^{n+1}\\6(-1)^n-3\cdot 2^{n+1}&3(-1)^{n+1}+2^{n+2}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

5.137

Exercise 49 (习题 10)**.** 设 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{x}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 λ_0 的特征向量. 证明 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 对应特征值 λ_0 的一个特征向量.

证: 即要证

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x})=\lambda_0(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}).$$

两边左乘 $\boldsymbol{P}$, 得

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}=\lambda_0\boldsymbol{x}.$$

又 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}$, 故上式即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda_0\boldsymbol{x}.$$

而这是题设. 故结论成立. □

这个题目指明了一个问题: 相似的矩阵, 有相同的特征值, 但特征向量不同. 5.138

Exercise 50 (习题 11)**.** 设 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵, 证明 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 相似.

证: 由 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵, 得

$$\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{A},$$

即 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 相似. (从而也有相同的特征值.) □ 5.139

Exercise 51 (习题 12)**.** 设 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C} \sim \boldsymbol{D}$, 证明: $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$.

证: 由 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C} \sim \boldsymbol{D}$, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, 使得

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}, \quad \boldsymbol{D} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{CQ},$$

作矩阵 $\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Q} \end{pmatrix}$, 因为 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ 都可逆, 所以 $\boldsymbol{T}$ 也可逆, 且

$$\boldsymbol{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}^{-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Q}^{-1} \end{pmatrix}.$$

5.140

于是

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix} \boldsymbol{T} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}^{-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Q}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{P} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Q} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{CQ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

所以 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$. □ 5.141

Exercise 52 (习题 13)**.** 证明: m 阶矩阵 $\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ 只有零特征值, 且其特征子空间是 $\mathbb{R}^m$ 的一维子空间, 并求它的基.

证: 由 $|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{J}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ & & & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^m = 0$, 得 $\lambda = 0$, 即矩阵 $\boldsymbol{J}$ 只有零特征值.

因为 $\mathrm{r}(\boldsymbol{J}) = m - 1$, 所以 $(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{J})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 即 $\boldsymbol{Jx} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系中只有一个解向量, 取为 $\boldsymbol{\xi} = (1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$. 即 $\boldsymbol{J}$ 的关于特征值 $\lambda = 0$ 的特征子空间是 $\mathbb{R}^m$ 的一维子空间, 且 $\boldsymbol{\xi}$ 为特征子空间的一个基. □ 5.142

Exercise 53 (习题 14)**.** 若 $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$ 可逆, $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 不可逆, 那么, 关于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值能作出怎样的断语?

解: 由题设可知 $|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}|\neq 0$, 即 $|-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|\neq 0$, 且 $|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$, 所以 1 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 而 -1 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. □ 5.143

Exercise 54 (习题 15)**.** 若 $\det(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^2)=0$, 证明: 1 或 -1 至少有一个是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

证: 因为

$$|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^2|=|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}||\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}|=0,$$

所以 $|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$ 和 $|-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$ 至少有一个成立, 从而 1 或 -1 至少有一个是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. □ 5.144

Exercise 55 (习题 18)**.** 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n^2 个元素全为 1, 试求可逆阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵, 并写出与 $\boldsymbol{A}$ 相似的对角阵.

解: 计算 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式:

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & \lambda-1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-1\end{vmatrix}\xlongequal[j=2,3,\cdots,n]{c_1+c_j}\begin{vmatrix}\lambda-n & -1 & \cdots & -1\\ \lambda-n & \lambda-1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda-n & -1 & \cdots & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-r_1}\begin{vmatrix}\lambda-n & -1 & \cdots & -1\\ 0 & \lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^{n-1}(\lambda-n),$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0,\ \lambda_n=n$. 5.145

对于特征值 0, 解方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 其同解方程组为

$$x_1=-x_2-x_3-\cdots-x_n.$$

故取对应的特征向量为:

$$\boldsymbol{\xi}_1=(1,-1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=(1,0,-1,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-1}=(1,0,0,\cdots,-1)^{\mathrm{T}}.$$

对于特征值 n, 解方程组 $(n\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 因为 $n\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和均为 0, 所以对应的特征向量可取为 $\boldsymbol{\xi}_n=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$.

取

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & n\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{P}$ 可逆, 且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$. □ 5.146

Exercise 56 (习题 19). 已知 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1 = 1$ (三重), $\lambda_2 = -3$; 对应于 λ_1 的特征向量有 $\boldsymbol{x}_1 = (1,-1,0,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x}_2 = (-1,1,-1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x}_3 = (0,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}$, 对应于 λ_2 的特征向量为 $\boldsymbol{x}_4 = (0,0,-1,1)^{\mathrm{T}}$. 问 $\boldsymbol{A}$ 可否对角化? 如能对角化, 求出 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}^n$.

解: 因为

$$
\left(\begin{array}{cccc:cccc}
1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\xrightarrow[r_3+r_4]{r_2+r_1}
\left(\begin{array}{cccc:cccc}
1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
$$
$$
\xrightarrow[r_4-r_2]{r_1-r_3}
\left(\begin{array}{cccc:cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1
\end{array}\right)
\longrightarrow
\left(\begin{array}{cccc:cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1
\end{array}\right),
$$

5.147

即矩阵 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4)$ 可逆, 且 $\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

从而 $\boldsymbol{A}$ 有 4 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$, $\boldsymbol{x}_4$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化.

记 $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(1,1,1,-3)$, 则有 $\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{P\Lambda}$, 从而

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{P\Lambda P}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

5.148

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^n &= \boldsymbol{P\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1+(-3)^n & -1+(-3)^n & 1 & 1-(-3)^n \\ 1-(-3)^n & 1-(-3)^n & 0 & (-3)^n \end{pmatrix}.$$

注: 当然也可以只说明 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ 线性无关, 特征值 $\lambda_1 = 1$ 的代数重数和几何重数相等, 故矩阵可以对角化. 但是后面还是面临着求 $\boldsymbol{P}^{-1}$, 还不如上面的表达简单. 5.149

Exercise 57 (习题 21)**.** 已知 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}^4, \boldsymbol{A}^5, \boldsymbol{A}^k$ (k 为正整数).

(2) 若 $f(x) = \begin{vmatrix} x^4-1 & x \\ x^3 & x^6+1 \end{vmatrix}$, 求 $f(\boldsymbol{A})$.

解: $|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda+3 & -2 \\ 2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+3)+4 = (\lambda+2)(\lambda-1).$

即 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$.

当 $\lambda_1 = -2$ 时, 解齐次线性方程组 $(-2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 因为

$$(-2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 $\lambda_1 = -2$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1 = (2,1)^{\mathrm{T}}$. 5.150

当 $\lambda_2 = 1$ 时, 解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 因为

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 $\lambda_2 = 1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_2 = (1,2)^{\mathrm{T}}$.

取

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则有 $\boldsymbol{P}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, 且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$, 或 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$. 5.151

于是

$$\boldsymbol{A}^4 = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^4\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & -10 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{A}^5 = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^4\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -43 & 22 \\ -22 & 12 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^k\boldsymbol{P}^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1+(-2)^{k+2} & 2+(-2)^{k+1} \\ -2-(-2)^{k+1} & 4-(-2)^k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5.152

(2) 因为 $f(x)=(x^4-1)(x^6+1)-x^4=x^{10}-x^6-1$, 所以

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{A}) &= \boldsymbol{A}^{10}-\boldsymbol{A}^6-\boldsymbol{I}=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\Lambda}^{10}-\boldsymbol{\Lambda}^6-\boldsymbol{I})\boldsymbol{P}^{-1}\\
&=\begin{pmatrix} 2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 959 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1279 & -640\\ 640 & -321\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

5.153

Exercise 58 (习题 22)**.** 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0\\ 4 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^k$ (k 为正整数).

解: 将 $\boldsymbol{A}$ 分块为 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}$, 那么 $\boldsymbol{A}^k=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1^k & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2^k\end{pmatrix}$. 下面分别求 $\boldsymbol{A}_1^k$ 和 $\boldsymbol{A}_2^k$.

由

$$
\boldsymbol{A}_1^2=\begin{pmatrix} 3 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 25 & 0\\ 0 & 25\end{pmatrix}=25\boldsymbol{I}=5^2\boldsymbol{I},
$$

一般地,

$$
\boldsymbol{A}_1^k=\begin{cases} 5^k\boldsymbol{I}, & k \text{ 为偶数},\\ 5^{k-1}\boldsymbol{A}_1, & k \text{ 为奇数}.\end{cases}
$$

5.154

由

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_2^2 &= \begin{pmatrix} 2 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^2 & 4\cdot 2\cdot 2\\ 0 & 2^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 16\\ 0 & 4\end{pmatrix},\\
\boldsymbol{A}_2^3 &= \begin{pmatrix} 2^2 & 4\cdot 2\cdot 2\\ 0 & 2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^3 & 4\cdot 3\cdot 2^2\\ 0 & 2^3\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

一般地,

$$
\boldsymbol{A}_2^k=\begin{pmatrix} 2^k & 4\cdot k\cdot 2^{k-1}\\ 0 & 2^k\end{pmatrix}.
$$

5.155

从而

$$
\boldsymbol{A}^k=\begin{cases}
\begin{pmatrix} 5^k & 0 & 0 & 0\\ 0 & 5^k & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2^k & 4k2^{k-1}\\ 0 & 0 & 0 & 2^k\end{pmatrix}, & k \text{ 为偶数},\\
\begin{pmatrix} 3(5^{k-1}) & 4(5^{k-1}) & 0 & 0\\ 4(5^{k-1}) & -3(5^{k-1}) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2^k & 4k2^{k-1}\\ 0 & 0 & 0 & 2^k\end{pmatrix}, & k \text{ 为奇数}.
\end{cases}
$$

5.156

Exercise 59 (习题 23)**.** 对 5.2 节例 1 (教材 P.237) 的矩阵 $\boldsymbol{A}$, 求正交矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使得 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为对角阵.

解: 使用已知的结果: $\lambda_1 = -2$ (单根), 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}_1 = (1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$. 对 $\lambda_2 = 2$ (三重根), 由 $(\lambda_2 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 即

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0. \tag{21}$$

下面直接构造一组正交的基础解系. 设 $\boldsymbol{x}_2 = (1,-1,0,0)^{\mathrm{T}}$, 要保证正交, 不妨设余下的两个解为

$$(1, 1, \square, \square)^{\mathrm{T}},$$

又要是方程的解, 故可取

$$\boldsymbol{x}_3 = (1,1,-2,0)^{\mathrm{T}}.$$

要使 $\boldsymbol{x}_4$ 与 $\boldsymbol{x}_3$ 正交, 可取其形如 $(1,1,1,\square)^{\mathrm{T}}$, 又要是方程 (21) 的解, 故

$$\boldsymbol{x}_4 = (1,1,1,-3)^{\mathrm{T}}.$$

从而得到方程组 (21) 的一组正交的基础解系 $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$, $\boldsymbol{x}_4$. 5.157

把向量 $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$, $\boldsymbol{x}_4$ 单位化, 得到一组正交的单位向量:

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \frac{\boldsymbol{x}_1}{\|\boldsymbol{x}_1\|} = \frac{1}{2}(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{\eta}_2 = \frac{\boldsymbol{x}_2}{\|\boldsymbol{x}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\eta}_3 = \frac{\boldsymbol{x}_3}{\|\boldsymbol{x}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2,0)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{\eta}_4 = \frac{\boldsymbol{x}_4}{\|\boldsymbol{x}_4\|} = \frac{\sqrt{3}}{6}(1,1,1,-3)^{\mathrm{T}}.$$

故所求正交矩阵可以取为

$$\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3, \boldsymbol{\eta}_4) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix},$$

使得

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} -2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}.$$

注意答案不唯一. 例如可取方程 5.158

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

的一组正交的基础解系为

$$\boldsymbol{x}_2 = (1,-1,0,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{x}_3 = (0,0,1,-1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{x}_4 = (1,1,-1,-1)^{\mathrm{T}}.$$

单位化得

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \frac{\boldsymbol{x}_1}{\|\boldsymbol{x}_1\|} = \frac{1}{2}(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{\eta}_2 = \frac{\boldsymbol{x}_2}{\|\boldsymbol{x}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\eta}_3 = \frac{\boldsymbol{x}_3}{\|\boldsymbol{x}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,-1)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{\eta}_4 = \frac{\boldsymbol{x}_4}{\|\boldsymbol{x}_4\|} = \frac{1}{2}(1,1,-1,-1)^{\mathrm{T}},$$

则所求的正交矩阵可取为

$$\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3, \boldsymbol{\eta}_4) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

5.159

Exercise 60 (习题 24)**.** 对下列实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$, 求正交矩阵 $\boldsymbol{T}$ 和对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$, 使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\Lambda}$.

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$(4) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (5) \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

5.160

解: (1)

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ -4 & -2 & \lambda-3 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3-c_1} \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & -1-\lambda \\ -2 & \lambda & 0 \\ -4 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1+r_3} \begin{vmatrix} \lambda-7 & -4 & 0 \\ -2 & \lambda & 0 \\ -4 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda^2-7\lambda-8) = (\lambda+1)^2(\lambda-8).$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 8$. 5.161

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ 时, 解方程组 $(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}$, 即 $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

得同解方程

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0.$$

下面直接构造一组正交的基础解系. 注意到这里 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ 是二重特征根, 则其对应的线性无关的特征向量必有 2 个. 取其一个解为 $\boldsymbol{\xi}_1 = (1, -2, 0)^{\mathrm{T}}$, 要保持正交, 另一个解可取为

$$(2, 1, t)^{\mathrm{T}}.$$

又要满足方程, 故 $t = -\frac{5}{2}$.

则可取 $\boldsymbol{\xi}_2 = (2, 1, -\frac{5}{2})^{\mathrm{T}}$ 或者 $\boldsymbol{\xi}_2 = (4, 2, -5)^{\mathrm{T}}$.

故得矩阵对应于特征值 -1 的两两正交的特征向量为:

$$\boldsymbol{\xi}_1=(1,-2,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\xi}_2=(4,2,-5)^{\mathrm{T}}.$$

5.162

答案不唯一. 例如可取 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$, 则另一解应形如

$$(1,\square,1)^{\mathrm{T}}.$$

要满足方程, 故 $\boldsymbol{\xi}_2=(1,-4,1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_3=8$ 时, 解方程组 $(8\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$8\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&-2&-4\\-2&8&-2\\-4&-2&5\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+4r_1}\begin{pmatrix}5&-2&-4\\18&0&-18\\-9&0&9\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}5&-2&-4\\1&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-5r_2}\begin{pmatrix}0&-2&1\\1&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

解得矩阵对应于特征值 $\lambda_3=8$ 特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_3=(2,1,2)^{\mathrm{T}}$. 5.163

将 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 单位化, 得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}_1&=\frac{\boldsymbol{\xi}_1}{\|\boldsymbol{\xi}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2,0)^{\mathrm{T}},\\ \boldsymbol{\eta}_2&=\frac{\boldsymbol{\xi}_2}{\|\boldsymbol{\xi}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{45}}(4,2,-5)^{\mathrm{T}},\\ \boldsymbol{\eta}_3&=\frac{\boldsymbol{\xi}_3}{\|\boldsymbol{\xi}_3\|}=\frac{1}{3}(2,1,2)^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

作矩阵

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{4}{\sqrt{45}}&\frac{2}{3}\\\frac{-2}{\sqrt{5}}&\frac{2}{\sqrt{45}}&\frac{1}{3}\\0&\frac{-5}{\sqrt{45}}&\frac{2}{3}\end{pmatrix},\qquad\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&8\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{T}$ 为正交矩阵, 且 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{\Lambda}$. $\square$ 5.164

(2)

$$\begin{aligned}|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|&=\begin{vmatrix}\lambda-1&-3&0\\-3&\lambda-4&1\\0&1&\lambda-1\end{vmatrix}\\&\xlongequal{\text{展开}r_1}(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-4&1\\1&\lambda-1\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}-3&1\\0&\lambda-1\end{vmatrix}\\&=(\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda+3)-9(\lambda-1)\\&=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-6).\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为: $\lambda_1=1,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=6$.

当 $\lambda_1=1$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}0&3&0\\3&3&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&3&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

解得矩阵对应于特征值 1 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,0,3)^{\mathrm{T}}$. 5.165

当 $\lambda_2=-1$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}2&3&0\\3&5&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1}\begin{pmatrix}2&3&0\\1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&3&0\\0&-1&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-1&2\\0&-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\times(-1)]{r_1+2r_2,r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

解得矩阵对应于特征值 $\lambda_2=-1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_2=(-3,2,1)^{\mathrm{T}}$. 5.166

当 $\lambda_3=6$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}-5&3&0\\3&-2&-1\\0&-1&-5\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+2r_2}\begin{pmatrix}1&-1&-2\\3&-2&-1\\0&-1&-5\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&-1&-2\\0&1&5\\0&-1&-5\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_2]{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&5\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

解得矩阵对应于特征值 $\lambda_3=6$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_3=(3,5,-1)^{\mathrm{T}}$. 5.167

取

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}_1&=\frac{\boldsymbol{\xi}_1}{\|\boldsymbol{\xi}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{10}}(1,0,3)^{\mathrm{T}},\\ \boldsymbol{\eta}_2&=\frac{\boldsymbol{\xi}_2}{\|\boldsymbol{\xi}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{14}}(-3,2,1)^{\mathrm{T}},\\ \boldsymbol{\eta}_3&=\frac{\boldsymbol{\xi}_3}{\|\boldsymbol{\xi}_3\|}=\frac{1}{\sqrt{35}}(3,5,-1)^{\mathrm{T}},\end{aligned}$$

作矩阵

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}}&\frac{-3}{\sqrt{14}}&\frac{3}{\sqrt{35}}\\0&\frac{2}{\sqrt{14}}&\frac{5}{\sqrt{35}}\\\frac{3}{\sqrt{10}}&\frac{1}{\sqrt{14}}&\frac{-1}{\sqrt{35}}\end{pmatrix},\qquad\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&6\end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{T}$ 为正交矩阵, 且 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{\Lambda}$. 5.168

(3)

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-2\\0&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda+1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{展开}\,r_1}(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\ -2 & \lambda+1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}0 & \lambda-1\\ -2 & -2\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda+3).$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为: $\lambda_1=1,\lambda_2=3,\lambda_3=-3$.

当 $\lambda_1=1$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&2\\2&2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

解得矩阵对应于特征值 1 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$. 5.169

当 $\lambda_2=3$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}-2&0&2\\0&-2&2\\2&2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_1+r_2}\begin{pmatrix}-2&0&2\\0&-2&2\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\div 2]{r_1\div 2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

解得矩阵对应于特征值 3 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_2=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_3=-3$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}4&0&2\\0&4&2\\2&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\div 2]{r_1\div 2}\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&1\\2&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_1-r_2}\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

解得矩阵对应于特征值 -3 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_3=(1,1,-2)^{\mathrm{T}}$. 5.170

取

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{\boldsymbol{\xi}_1}{\|\boldsymbol{\xi}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\eta}_2=\frac{\boldsymbol{\xi}_2}{\|\boldsymbol{\xi}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\eta}_3=\frac{\boldsymbol{\xi}_3}{\|\boldsymbol{\xi}_3\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)^{\mathrm{T}},$$

作矩阵

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{-2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&&\\&3&\\&&-3\end{pmatrix}.$$

则 $\boldsymbol{T}$ 为正交矩阵, 且 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{\Lambda}$. 5.171

(4)

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-4&-1\\0&\lambda&-1&-4\\-4&-1&\lambda&0\\-1&-4&0&\lambda\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-4r_4]{r_1+\lambda r_4}\begin{vmatrix}0&-4\lambda&-4&\lambda^2-1\\0&\lambda&-1&-4\\0&15&\lambda&-4\lambda\\-1&-4&0&\lambda\end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} -4\lambda & -4 & \lambda^2-1 \\ \lambda & -1 & -4 \\ 15 & \lambda & -4\lambda \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-\lambda r_2]{r_1-4r_2} \begin{vmatrix} -8\lambda & 0 & \lambda^2+15 \\ \lambda & -1 & -4 \\ 15+\lambda^2 & 0 & -8\lambda \end{vmatrix} \\
&= (8\lambda)^2-(\lambda^2+15)^2 = (\lambda-3)(\lambda+3)(\lambda-5)(\lambda+5).
\end{aligned}
$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为: $\lambda_1=3, \lambda_2=-3, \lambda_3=5, \lambda_4=-5.$ 5.172

当 $\lambda_1=3$ 时, 解方程组 $(3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$
\begin{aligned}
3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -4 \\ -4 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1\leftrightarrow r_4]{r_4\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & -4 \\ -4 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[r_4-3r_1]{r_3+4r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 15 & 3 & -12 \\ 0 & -12 & -4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4+4r_2]{r_3-5r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & -8 & -8 \end{pmatrix} \\
&\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

解得矩阵对应于特征值 3 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=(-1,1,-1,1)^{\mathrm{T}}.$ 5.173

当 $\lambda_2=-3$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{I} &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[r_4-3r_1]{r_3-4r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -15 & 3 & -12 \\ 0 & -12 & 4 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4+4r_2]{r_3+5r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \end{pmatrix} \\
&\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

解得矩阵对应于特征值 -3 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_2=(1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}.$ 5.174

当 $\lambda_3=5$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}-5&0&4&1\\0&-5&1&4\\4&1&-5&0\\1&4&0&-5\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&4&0&-5\\0&-5&1&4\\4&1&-5&0\\-5&0&4&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+5r_1]{r_3-4r_1}\begin{pmatrix}1&4&0&-5\\0&-5&1&4\\0&-15&-5&20\\0&20&4&-24\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+4r_1]{r_3-3r_1}\begin{pmatrix}1&4&0&-5\\0&-5&1&4\\0&0&-8&8\\0&0&8&-8\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

解得矩阵对应于特征值 5 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_3=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$. 5.175

当 $\lambda_4=-5$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}5&0&4&1\\0&5&1&4\\4&1&5&0\\1&4&0&5\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&4&0&5\\0&5&1&4\\4&1&5&0\\5&0&4&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-5r_1]{r_3-4r_1}\begin{pmatrix}1&4&0&5\\0&5&1&4\\0&-15&5&-20\\0&-20&4&-24\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+4r_1]{r_3+3r_1}\begin{pmatrix}1&4&0&5\\0&5&1&4\\0&0&8&-8\\0&0&8&-8\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

解得矩阵对应于特征值 5 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_4=(-1,-1,1,1)^{\mathrm{T}}$. 5.176

取

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{\boldsymbol{\xi}_1}{\|\boldsymbol{\xi}_1\|}=\frac{1}{2}(-1,1,-1,1)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\eta}_2=\frac{\boldsymbol{\xi}_2}{\|\boldsymbol{\xi}_2\|}=\frac{1}{2}(1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\eta}_3=\frac{\boldsymbol{\xi}_3}{\|\boldsymbol{\xi}_3\|}=\frac{1}{2}(1,1,1,1)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\eta}_4=\frac{\boldsymbol{\xi}_4}{\|\boldsymbol{\xi}_4\|}=\frac{1}{2}(-1,-1,1,1)^{\mathrm{T}}.$$

作矩阵

$$\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}3&&&\\&-3&&\\&&5&\\&&&-5\end{pmatrix}.$$

则 $\boldsymbol{T}$ 为正交矩阵, 且 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{\Lambda}$. □ 5.177

(5)

$$
\begin{aligned}
&|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|\\
=&\begin{vmatrix}\lambda+1&3&-3&3\\3&\lambda+1&3&-3\\-3&3&\lambda+1&3\\3&-3&3&\lambda+1\end{vmatrix}\xlongequal[i=2,3,4]{c_1+c_i}\begin{vmatrix}\lambda+4&3&-3&3\\\lambda+4&\lambda+1&3&-3\\\lambda+4&3&\lambda+1&3\\\lambda+4&-3&3&\lambda+1\end{vmatrix}\\
\xlongequal[i=2,3,4]{r_i-r_1}&\begin{vmatrix}\lambda+4&3&-3&3\\0&\lambda-2&6&-6\\0&0&\lambda+4&0\\0&-6&6&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda+4)\begin{vmatrix}\lambda-2&6&-6\\0&\lambda+4&0\\-6&6&\lambda-2\end{vmatrix}\\
=&(\lambda+4)^2[(\lambda-2)^2-6^2]=(\lambda+4)^3(\lambda-8).
\end{aligned}
$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-4$, $\lambda_4=8$. 5.178

当 $\lambda_1=-4$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$
\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}3&-3&3&-3\\-3&3&-3&3\\3&-3&3&-3\\-3&3&-3&3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.
$$

解得矩阵对应于特征值 -4 的两两正交的特征向量为

$$
\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\xi}_2=(0,0,1,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\xi}_3=(1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}.
$$

或者取 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$, 要正交, 则余下两个向量可取为形如

$$
(1,-1,\square,\square)^{\mathrm{T}}.
$$

要满足方程, 故可取 $\boldsymbol{\xi}_2=(1,-1,-2,0)^{\mathrm{T}}$. 要 $\boldsymbol{\xi}_3$ 与 $\boldsymbol{\xi}_2$ 正交, 则可取其形如

$$
(1,-1,1,\square)^{\mathrm{T}}.
$$

要满足方程, 故取 $\boldsymbol{\xi}_3=(1,-1,1,3)^{\mathrm{T}}$. 5.179

当 $\lambda_4=8$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A}-8\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}-8\boldsymbol{I}=&\begin{pmatrix}-9&-3&3&-3\\-3&-9&-3&3\\3&-3&-9&-3\\-3&3&-3&-9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&1&-1&1\\1&3&1&-1\\1&-1&-3&-1\\1&-1&1&3\end{pmatrix}\\
&\to\begin{pmatrix}1&-1&1&3\\1&3&1&-1\\1&-1&-3&-1\\3&1&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1&3\\0&4&0&-4\\0&0&-4&-4\\0&4&-4&-8\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解得矩阵对应于特征值 8 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_4 = (-1, 1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$. 5.180

取

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \frac{\boldsymbol{\xi}_1}{\|\boldsymbol{\xi}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{\eta}_2 = \frac{\boldsymbol{\xi}_2}{\|\boldsymbol{\xi}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, 1)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\eta}_3 = \frac{\boldsymbol{\xi}_3}{\|\boldsymbol{\xi}_3\|} = \frac{1}{2}(1, -1, -1, 1)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{\eta}_4 = \frac{\boldsymbol{\xi}_4}{\|\boldsymbol{\xi}_4\|} = \frac{1}{2}(-1, 1, -1, 1)^{\mathrm{T}}.$$

作矩阵

$$\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3, \boldsymbol{\eta}_4) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} -4 & & & \\ & -4 & & \\ & & -4 & \\ & & & 8 \end{pmatrix}.$$

则 $\boldsymbol{T}$ 为正交矩阵, 且 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\Lambda}$. 5.181

或者由 $\boldsymbol{\xi}_1 = (1, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_2 = (1, -1, -2, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_3 = (1, -1, 1, 3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_4 = (-1, 1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$, 得

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

5.182

Exercise 61 (习题 30)**.** 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{4\times 4}$, 已知 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值, 1 是 $\boldsymbol{A}$ 的 (一重) 特征值, 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 特征多项式 $\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$.

解: 由特征值的性质可知 $\boldsymbol{A}$ 的 4 个特征值分别为

$$0,\ 0,\ 1,\ \sum_{i=1}^{4} a_{ii} - 1.$$

若 a 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $\lambda - a$ 是 $\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ 的特征值. 故 $\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ 的 4 个特征值为

$$\lambda,\ \lambda,\ \lambda - 1,\ \lambda - (\sum_{i=1}^{4} a_{ii} - 1).$$

于是

$$\det(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \lambda^2(\lambda - 1)(\lambda - \sum_{i=1}^{4} a_{ii} + 1).$$

5.183

Exercise 62 (习题 31)**.** 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和皆为 1, 问: 能否至少求得 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值?

解: 由题设可知 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|$ 的每行元素之和皆为 $\lambda-1$, 所以至少可以求得 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值为 1.

另解: 事实上还可以求得一个特征向量. 由题设, 知

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix},$$

故得到 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值为 1, 其对应的特征向量为 $(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$. □ 5.184

Exercise 63 (习题 32)**.** 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的 n 个特征值, 证明:

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}a_{ji}.$$

证: 因为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的 n 个特征值, 所以

$$\lambda_1^2,\ \lambda_2^2,\ \cdots,\ \lambda_n^2$$

是矩阵 $\boldsymbol{A}^2$ 的 n 个特征值.

又因为 $\boldsymbol{A}^2$ 主对角元

$$c_{ii}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}a_{ji}\qquad(i=1,2,\cdots,n),$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2=\sum_{i=1}^{n}c_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}a_{ji}.$$

5.185

Exercise 64 (习题 33)**.** 设 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ_0 的特征向量, 证明:

$$\boldsymbol{Bx}\in V_{\lambda_0}\qquad(\boldsymbol{A}\text{ 的特征子空间}).$$

分析: $\boldsymbol{Bx}\in V_{\lambda_0}$ 即言 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Bx})=\lambda_0(\boldsymbol{Bx})$. 但 V_{λ_0} 包含零向量, 故有可能 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$, 所以 $\boldsymbol{Bx}$ 不一定是对应于 λ_0 的特征向量.

证: 在 $\boldsymbol{Ax}=\lambda_0\boldsymbol{x}$ 两边左乘以 $\boldsymbol{B}$, 得

$$\boldsymbol{BAx}=\boldsymbol{B}\lambda_0\boldsymbol{x}=\lambda_0(\boldsymbol{Bx}).$$

代入 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Bx})=\lambda_0(\boldsymbol{Bx}).$$

得证 $\boldsymbol{Bx}\in V_{\lambda_0}$. □ 5.186

Exercise 65 (习题 34)**.** 证明: 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同的特征值, 则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量也是 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量.

证: (充分性). 由题设知 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关特征向量. 设 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ 同时是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的 n 个线性无关特征向量, 且

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_i = \lambda_i \boldsymbol{p}_i, \qquad \boldsymbol{B}\boldsymbol{p}_i = \mu_i \boldsymbol{p}_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

作矩阵 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n)$, 则 $\boldsymbol{P}$ 可逆. 再记

$$\boldsymbol{\Lambda}_1 = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n), \qquad \boldsymbol{\Lambda}_2 = \operatorname{diag}(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n),$$

则有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}_1, \qquad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}_2.$$

注意到对角矩阵可交换, 于是有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} &= (\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{P}^{-1})(\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}_2\boldsymbol{P}^{-1}) \\ &= \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{\Lambda}_2\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}_2\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{P}^{-1} \\ &= (\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}_2\boldsymbol{P}^{-1})(\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{P}^{-1}) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}.\end{aligned}$$

5.187

(必要性). 设 $\boldsymbol{x}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ_0 的特征向量. 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$, 由上一题结论, $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \in V_{\lambda_0}$, 其中 V_{λ_0} 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 关于 λ_0 的特征子空间. (这里不能断定: $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ_0 的特征向量. 因为有可能 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.)

因为 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同的特征值, 即 λ_0 的代数重数为 1, 所以 λ_0 的几何重数也是 1, 即 V_{λ_0} 是一维子空间. 从而存在常数 μ, 使得

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \mu\boldsymbol{x},$$

这说明 $\boldsymbol{x}$ 也是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量. 得证 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量也是 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量. □

(这里 μ 可能为零. 正好对应了 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的情形. 但因 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, 这并不妨碍 $\boldsymbol{x}$ 成为 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量.) 5.188

Exercise 66 (习题 35)**.** 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 皆为 n 阶矩阵, $\varphi(\lambda) = |\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}|$. 证明: $\varphi(\boldsymbol{A})$ 可逆的充要条件是 $\boldsymbol{B}$ 的任一特征值都不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

证: 设 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 那么

$$\varphi(\lambda) = |\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n).$$

从而 $\varphi(\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{A} - \lambda_1\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A} - \lambda_2\boldsymbol{I})\cdots(\boldsymbol{A} - \lambda_n\boldsymbol{I})$. 进一步有

$$|\varphi(\boldsymbol{A})| = |\boldsymbol{A} - \lambda_1\boldsymbol{I}||\boldsymbol{A} - \lambda_2\boldsymbol{I}|\cdots|\boldsymbol{A} - \lambda_n\boldsymbol{I}|.$$

故

$$\varphi(\boldsymbol{A}) \text{ 可逆 } \Longleftrightarrow |\varphi(\boldsymbol{A})| \neq 0 \Longleftrightarrow |\boldsymbol{A} - \lambda_i\boldsymbol{I}| \neq 0,$$

即 λ_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. □ 5.189

Exercise 67 (习题 36)**.** 证明反对称实矩阵的特征值是 0 或纯虚数.

证: 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的任一个特征值, 由 $\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$, 有

$$
\begin{aligned}
& \overline{(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}}=\overline{(\lambda\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}} \\
\Longrightarrow \quad & \overline{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}=\overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}} \\
\Longrightarrow \quad & \overline{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{x}=\overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{x} \\
\Longrightarrow \quad & -\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=-\lambda\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},
\end{aligned}
$$

又因为 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, $\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}>0$, 所以

$$-\lambda=\overline{\lambda},$$

即 λ 只能是 0 或纯虚数. □ 5.190

Exercise 68 (习题 37)**.** 已知 $\mathbb{R}^n$ 中两个非零的正交向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$, 证明: 矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 的特征值全为 0, 且 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化.

证: 因为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交, 所以 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=0$. 从而

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta}=0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}.$$

设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 任一特征值, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$, 即有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$, 于是

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\lambda^2\boldsymbol{x}, \quad 即 \quad \lambda^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},$$

因为 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 所以 $\lambda^2=0$, 即 $\lambda=0$, 故 0 为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 重特征值.

对 $\lambda=0$, 求解 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}.$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 均为非零向量, 所以 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 中至少有一个非零元, 又 $\boldsymbol{A}$ 的各行成比例, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$, 从而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系包含的向量个数 $n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-1$. 即 $\boldsymbol{A}$ 对应于 n 重特征值 0 的线性无关的特征向量少于 n 个, 所以 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化. □ 5.191

Exercise 69 (习题 38)**.** 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n$, 且 $a_i\neq 0\ (i=1,2,\cdots,n)$. 试求矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 的特征值, 并求可逆阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 成对角形.

解:

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}.$$

5.192

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n \\ -a_2a_1 & \lambda-a_2^2 & \cdots & -a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_na_1 & -a_na_2 & \cdots & \lambda-a_n^2 \end{vmatrix}$$

$$
\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-\frac{a_i}{a_1}r_1}\begin{vmatrix} \lambda-a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n \\ -\frac{a_2}{a_1}\lambda & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_n}{a_1}\lambda & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal[i=2,\cdots,n]{c_1+\frac{a_n}{a_1}c_i}\begin{vmatrix} \lambda-a_1^2-a_2^2-\cdots-a_n^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}
$$

$$
=\lambda^{n-1}\left(\lambda-a_1^2-a_2^2-\cdots-a_n^2\right).
$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 5.193

$$
\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0,\ \lambda_n=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2.
$$

当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0$ 时, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的同解方程组为

$$
a_1x_1=-a_2x_2-a_3x_3-\cdots-a_nx_n.
$$

于是对应的线性无关的特征向量为:

$$
\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix} a_3 \\ 0 \\ -a_1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-1}=\begin{pmatrix} a_n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -a_1 \end{pmatrix}.
$$

当 $\lambda_n=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$ 时, 注意到 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=\lambda_n$, 由 5.194

$$
\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\lambda_n\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}.
$$

即对应 $\lambda_n=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_n=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$.

令

$$
\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n)=\begin{pmatrix} a_2 & a_3 & \cdots & a_n & a_1 \\ -a_1 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ 0 & -a_1 & \cdots & 0 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -a_1 & a_n \end{pmatrix},
$$

则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}(0,\cdots,0,\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2)$. □ 5.195

另解: 注意到 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$, 由

$$
\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}.
$$

故 $\lambda_n=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_n=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$.

另一方面, $\boldsymbol{A}$ 为对称阵, 必可对角化. 故存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda} \triangleq \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n).$$

因 $\boldsymbol{A}$ 各行成比例, 且 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 1$. 从而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\Lambda}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 1$. 又 $\lambda_n = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \neq 0$, 故必有 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$.

特征值 0 对应的特征向量的求法, 见前一解法. □ 5.196

Exercise 70 (习题 39)**.** 已知 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$ 的一个特征向量 $\boldsymbol{\xi} = (1, 1, -1)^{\mathrm{T}}$.

(1) 确定 a, b 及 $\boldsymbol{\xi}$ 对应的特征值;

(2) $\boldsymbol{A}$ 能否相似于对角阵? 说明理由.

解: (1) 设 $\boldsymbol{\xi}$ 对应的特征值为 λ, 则有 $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{0}$, 即

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & a-\lambda & 3 \\ -1 & b & -2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda-1 \\ 2+a-\lambda \\ 1+b+\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

故 $\lambda = -1$, $a = -3$, $b = 0$. 5.197

(2)

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}| &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\ &\xlongequal{c_3-(2+\lambda)c_1} \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & \lambda^2-2 \\ 5 & -3-\lambda & -7-5\lambda \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -(\lambda+1)^3, \end{aligned}$$

即 $\lambda = -1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的三重特征值, 而

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1+c_2-c_3} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}) = 2$, 故 $\boldsymbol{A}$ 的对应于三重特征值 -1 的线性无关的特征向量只有一个, 所以 $\boldsymbol{A}$ 不能对角化. □ 5.198

Exercise 71 (习题 40)**.** 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}$, 已知 $|\boldsymbol{A}| = 1$, 且 $\boldsymbol{A}^*$ 有一个特征值 λ_0, 其特征向量 $\boldsymbol{x} = (-1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$, 试求 a, b, c 及 λ_0.

解: 在 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \lambda_0\boldsymbol{x}$ 两端左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$, 得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \lambda_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \quad \text{即} \quad |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{x} = \lambda_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

由 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 知 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆, 故 $\lambda_0 \neq 0$. 从而得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_0}\boldsymbol{x} = \frac{1}{\lambda_0}\boldsymbol{x}$, 即

$$\begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+c+1 \\ -b-2 \\ -a+c-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_0}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (22)$$

得 5.199

$$\frac{-a+c+1}{-1} = \frac{-b-2}{-1} = \frac{-a+c-1}{1},$$

所以 $a = c$, 且 $b = -3$. 代入 (22), 得 $\lambda_0 = -1$. 代入 $|\boldsymbol{A}| = 1$, 得

$$\begin{vmatrix} a & -1 & a \\ 5 & -3 & 3 \\ 1-a & 0 & -a \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+r_3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 3 \\ 1-a & 0 & -a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2+c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1-a & 1-a & -a \end{vmatrix} = a-3 = 1,$$

所以 $a = c = 4$. 因此 $a = 4$, $b = -3$, $c = 4$, $\lambda_0 = -1$. □ 5.200

Exercise 72 (习题 41)**.** 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 4 & y \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, 已知 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个线性无关的特征向量, 且 $\lambda_1 = 2$ 是其二重特征值, 求 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$ (对角矩阵).

解: 由 $\lambda_1 = 2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值, 知方程组 $(\lambda_1\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系由 2 个线性无关的向量构成, 故 $n - r = 2$, 即

$$\mathrm{r}(2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 1.$$

又

$$2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -x & -2 & -y \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix},$$

知其 3 列 (或行) 成比例, 故 $x = 2$, $y = -2$. 5.201

由 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 10$, 得 $\boldsymbol{A}$ 的第 3 个特征值 $\lambda_3 = 6$.

对 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, 解方程组 $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

得对应于二重特征值 2 的线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{p}_1 = (-1, 1, 0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{p}_2 = (1, 0, 1)^{\mathrm{T}}.$$

5.202

对 $\lambda_3 = 6$, 解方程组 $(\boldsymbol{A} - 6\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A} - 6\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+r_1]{r_2+2r_1} \begin{pmatrix} -5 & -1 & 1 \\ -8 & -4 & 0 \\ -8 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\div(-4)]{r_3-r_2} \begin{pmatrix} -5 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

得对应于特征值 6 的特征向量为 $\boldsymbol{p}_3 = (1, -2, 3)^{\mathrm{T}}$.

作矩阵 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}$ 可逆, 且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$. □ 5.203

Exercise 73 (习题 42)**.** 设 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$ 均为非零向量, 已知 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 0$, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$. 试求: (1) $\boldsymbol{A}^2$; (2) $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量.

与习题 37 重复了, 基本上是一个题目.

解: (1) $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta} = 0\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$.

(2) 设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$, 即有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, 于是 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} = \lambda^2\boldsymbol{x}$, 即 $\lambda^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 因为 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, 所以 $\lambda^2 = 0$, 即 $\lambda = 0$, 故 0 为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 重特征值.

对 $\lambda = 0$, 求解 $(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 因为 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 均为非零向量, 不妨设 $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$. 从而

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

5.204

则方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的同解方程组为 $b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = 0$. 于是所求特征向量为:

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} b_2 \\ -b_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} b_3 \\ 0 \\ -b_1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-1} = \begin{pmatrix} b_n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -b_1 \end{pmatrix}.$$

前面已经假设 $b_1 \neq 0$, 故上述 $n-1$ 个向量必线性无关. 而且注意到 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 1$, 故 $\lambda = 0$ 的几何重数为 $n-1$, 即它对应的线性无关特征向量的个数只能是 $n-1$. □ 5.205

5 总结与复习

5.1 要点归纳

(一) 怎么理解特征值、特征向量.

- 矩阵乘以向量, 在功能上相当于把一个向量变换为另一个向量.
- 一个矩阵的特征向量是这样一种特定的向量: 它经过这种变换后方向不变 (或正好反向), 只发生长度上的伸缩.
- 特征值则反映了特征向量的伸缩倍数 (及方向).

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘向量 $\boldsymbol{x}$, 其结果是一个同维数的向量.

比如 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{pmatrix}$, 取 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, 有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix},$$

5.206

可见矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘向量 $\boldsymbol{x}$, 相当于把向量 $\boldsymbol{x}$ 作了一个变换, 把 $\boldsymbol{x}$ 转到了一个新的位置, 而且长度也发生了变化. 这里 $(1,2,3)^{\mathrm{T}}$ 与变换之后的结果 $(3,4,7)^{\mathrm{T}}$ 看不出有什么关联.

但是, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘某些特定的向量 $\boldsymbol{x}$, 会出现特别的现象: 乘积的结果相当于把向量 $\boldsymbol{x}$ 在原方向伸缩或反方向伸缩, 即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x},$$

具有这种特点的向量, 就称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量, 数 λ 反映了伸缩的倍数及方向, 称为与 $\boldsymbol{x}$ 对应的特征值.

比如 $\boldsymbol{x}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x}_2=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 就是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x_1}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}=-\boldsymbol{x}_1,$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x_2}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}=2\boldsymbol{x}_2.$$

5.207

一个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 一旦产生, 那么 n 维空间 [1] 的某处就存在着一些向量, 它们与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有着一种天然的内在联系: $\boldsymbol{A}$ 乘以这些向量相当于只是把这些向量在原方向 (或反方向) 伸长或缩短.

[1]准确地讲, 应该是 n 维复向量空间. 因为方阵在实数域上不一定总有特征值. 比如 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$, $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\lambda^2+1$, 在实数域上无根, 故 $\boldsymbol{A}$ 在实数域上无特征值. 教材也讲明了: n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在复数范围内有 n 个特征值.

特征值、特征向量的专业词汇分别是 eigenvalue, eigenvector. eigen 是德文词汇, 意思是自己的, 特有的. eigen 一词很恰当地反映了矩阵和其特征向量的天然联系和隶属性. 特征值在一些教材里称为"本征值", 这个翻译比较贴近 eigenvalue 的本意.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘零向量总是等于零向量的, 所以, 讨论特征向量时, 是把零向量排除在外的. 请牢记: **零向量不是特征向量; 特征向量是非零向量.**

注意: 特征值可以为零. 5.208

(二) 特征值、特征向量的性质.

(1) 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值, 则

- (a) $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$;
- (b) $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = \left|\boldsymbol{A}\right|$.

(2) 设 λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ_0 的特征向量, 则

- (a) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\lambda_0 \neq 0$, 且 $\dfrac{1}{\lambda_0}$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值; $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_0}$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值.
- (b) $k\lambda_0$ 为 $k\boldsymbol{A}$ 特征值; λ_0^m 是 $\boldsymbol{A}^m$ 特征值.
- (c) $\varphi(\lambda_0)$ 是矩阵多项式 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的特征值, 其中

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda_0) &= a_m \lambda_0^m + \cdots + a_1 \lambda_0 + a_0, \\ \varphi(\boldsymbol{A}) &= a_m \boldsymbol{A}^m + \cdots + a_1 \boldsymbol{A} + a_0 \boldsymbol{I}.\end{aligned}$$

而且 $\boldsymbol{x}$ 仍然是矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$, $\boldsymbol{A}^*$, $k\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^m$, $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的分别对应于特征值 $\dfrac{1}{\lambda_0}$, $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_0}$, $k\lambda_0$, λ_0^m, $\varphi(\lambda_0)$ 的特征向量. 5.209

(3) 特征向量之间的关系:

- (a) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量是线性无关的.
- (b) 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个互异特征值, 对应于 λ_i $(i = 1, 2, \cdots, m)$ 的线性无关的特征向量有 r_i 个, 则由所有这些特征向量 (共 $r_1 + r_2 + \cdots + r_m$ 个) 构成的向量组是线性无关的.
- (c) 对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量是两两正交的. 5.210

(4) 特征值所对应的特征向量的个数:

- (a) 每个特征值都对应着至少一个特征向量.
- (b) k 重特征值对应的线性无关的特征向量的个数不超过 k.
- (c) 若 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值对应的线性无关特征向量的个数恰好等于该特征值的重数.

这几个结论可用来初步排除计算中的错误, 比如单根却对应着多个线性无关的特征向量, 或者 $(\boldsymbol{A} - \lambda_0 \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系中向量的个数超过了 λ_0 的重数, 等等.

(5) 方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\Longleftrightarrow$ 0 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 5.211

(三) 正交矩阵的性质.

$$
\begin{aligned}
&\text{方阵 } \boldsymbol{A} \text{ 为正交矩阵} \\
\iff & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} \iff \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I} \\
\iff & \boldsymbol{A} \text{ 可逆, 且 } \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \\
\iff & \boldsymbol{A} \text{ 的行 (列) 向量组两两正交, 且都是单位向量} \\
\iff & \boldsymbol{A} \text{ 的行 (列) 向量组是一组规范正交基.}
\end{aligned}
$$

若 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵, 则 $|\boldsymbol{A}| = \pm 1$; 其特征值 λ 满足 $|\lambda| = 1$.
正交变换具有保持向量的内积、长度、夹角不变的特性. 5.212

(四) 矩阵对角化.

- 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似的充要条件: $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.
- 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似的充要条件: $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值对应的线性无关特征向量的个数等于该特征值的重数.
- n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同的特征值, 则 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化. 此条件是充分的, 但不是必要的. 5.213

5.2 题型举例

特征值与特征向量

Example 74. 判断正误:

(i) 设 λ_0 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 如果方程组 $(\boldsymbol{A} - \lambda_0 \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ_0 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2$.

(ii) 矩阵的特征向量不是零向量, 同样地, 矩阵的特征值也不为零.

(iii) 设 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个 k 重特征值, 对应于 λ 的线性无关的特征向量的个数一定也为 k.

(iv) 相似的矩阵有相同的特征值, 所以它们的特征向量也相同.

(v) 方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的特征值相同, 从而, 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda_0\boldsymbol{x}$, 则必有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \lambda_0\boldsymbol{x}$.

(vi) 方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同的特征值. 5.214

解:

(i) 错. 必须指明 k_1, k_2 不全为零. (很小的一个细节, 但是很多人解题时忘了加这句话, 以为只是在解方程组.)

(ii) 错. 特征向量不是零向量, 但特征值有可能为零 (当矩阵不可逆时).

(iii) 错. 每个特征值对应的线性无关特征向量的个数小于等于该特征值的重数.

(iv) 错. 设 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 且 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ_0 的特征向量为 $\boldsymbol{x}$, 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda_0\boldsymbol{x}$, 则

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}^{-1}\lambda_0\boldsymbol{x} = \lambda_0(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}),$$

所以 $\boldsymbol{B}$ 的对应于特征值 λ_0 的特征向量为 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$. (注意这个结论.)

(v) 错. 特征向量不一定相同. 例如 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 是其特征向量, 但不是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的特征向量.

(vi) 错. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量. 若 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同的特征值, 则可对角化; 反之不成立. 5.215

Example 75. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2, 3, λ. 若行列式 $|2\boldsymbol{A}|=-48$, 则 $\lambda=$____.

解: $|2\boldsymbol{A}|=2^3|\boldsymbol{A}|=8\times(2\times3\times\lambda)=-48$, 所以 $\lambda=-1$. □

Example 76. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1, 2, 2, $\boldsymbol{I}$ 为 3 阶单位矩阵, 则 $\left|4\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{I}\right|=$____.

解: 设 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $\frac{1}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值, $4\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{I}$ 的特征值为 $\frac{4}{\lambda}-1$. 所以 $4\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{I}$ 的全部特征值为 3, 1, 1. 得 $\left|4\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{I}\right|=3\times1\times1=3$. □ 5.216

Example 77. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值互不相同. 若行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的秩为____.

解: 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值互不相同, 则 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化, 即 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ 相似, 从而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{\Lambda})$.

行列式 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=0$, 则 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 至少有一个为零, 而这三者互不相同, 所以只有一个为零. 不妨设 $\lambda_3=0$, 则 $\lambda_1\neq0$, $\lambda_2\neq0$, 得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\Lambda})=2$. 所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$. □ 5.217

Example 78 (研 2008). 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值 -1, 1 的特征向量, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

(I) 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关;

(II) 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, 求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.

解: (I) 设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}. \tag{23}$$

在上式两边左乘 $\boldsymbol{A}$, 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, 得 $-x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathbf{0}$, 即

$$-x_1\boldsymbol{\alpha}_1+(x_2+x_3)\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}. \tag{24}$$

将 (24) 式减去 (23) 式, 得

$$-2x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_3\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}.$$

又 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值对应的特征向量, 故 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 得 $x_1=x_3=0$. 代入 (23) 式, 得 $x_2\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}$. 5.218

注意到特征向量是非零向量, $\boldsymbol{\alpha}_2\neq\mathbf{0}$, 所以只能是 $x_2=0$.

得证 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

(II) 由

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3)=(-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)$$

$$= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

又 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 知 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$ 可逆, 所以

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

☞ 注意题目没有说向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量, 否则会设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3 = \lambda\boldsymbol{\alpha}_3$ 导致错误的思路. 5.219

实对称矩阵的特征值和特征向量

Example 79 (研 2007). 设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$, 且 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_1 特征向量. 记 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^5 - 4\boldsymbol{A}^3 + \boldsymbol{I}$, 其中 $\boldsymbol{I}$ 为 3 阶单位矩阵.

(I) 验证 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量, 并求 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值与特征向量;

(II) 求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解: (I) 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1$, 知

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}_1 = (\boldsymbol{A}^5 - 4\boldsymbol{A}^3 + \boldsymbol{I})\boldsymbol{\alpha}_1 = (\lambda_1^5 - 4\lambda_1^3 + 1)\boldsymbol{\alpha}_1 = -2\boldsymbol{\alpha}_1,$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的一个特征向量.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值为 $\lambda_i^5 - 4\lambda_i^3 + 1$ $(i = 1, 2, 3)$, 即 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值为 $-2, 1, 1$. 5.220

由 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}_1 = -2\boldsymbol{\alpha}_1$, 故矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的对应于特征值 -2 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1$, 其中 k_1 是不为零的任意常数.

因为 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 所以 $\boldsymbol{B}$ 也是实对称矩阵. 设 $(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的属于 1 的特征向量. 因为实对称矩阵属于不同特征值的特征向量正交, 所以 $(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 = 0$, 即

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0.$$

解得该方程组的基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_2 = (1, 1, 0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = (-1, 0, 1)^{\mathrm{T}},$$

故矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 1 的全部特征向量为 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3$, 其中 k_2, k_3 是不全为零的常数. 5.221

(II) 令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 得

$$\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

因为 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}(-2,1,1)$, 所以

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.222

Example 80. 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}$, 求 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{I}$ 的特征值与特征向量.

解: 若 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 为伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值. 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}^*$ 相似, 二者特征值相同. 进而, $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{I}$ 的特征值为 $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}+2$. 由于

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+c_2+c_3} (7-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_2-r_1]{r_3-r-1} (7-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)(1-\lambda)^2,$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, 且 $|\boldsymbol{A}| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 7$. 得 $\boldsymbol{B}$ 的特征值相应为: 1, 7, 7. $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{I}$ 的特征值相应为: 3, 9, 9. 5.223

设 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ_0 的特征向量为 $\boldsymbol{x}$, 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda_0\boldsymbol{x}$, 则

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_0}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}),$$

所以 $\boldsymbol{B}$ 的对应于特征值 $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_0}$ 的特征向量为 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$, 进而, $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{I}$ 的对应于特征值 $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_0}+2$ 的特征向量为 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$. 5.224

当 $\lambda_1 = 7$ 时, 解方程 $(\boldsymbol{A}-7\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A}-7\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix},$$

显然 $(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是其解. 而单重特征值只能对应一个线性无关的特征向量, 故得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 时, 解方程 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A}-7\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_2 = (-1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_3 = (-1,0,1)^{\mathrm{T}}$. 5.225

又

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

综上, $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{I}$ 的对应于 $\lambda=3$ 的全部特征向量为 $k_1(0,1,1)^{\mathrm{T}}$, k_1 为非零常数; $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{I}$ 的对应于 $\lambda=9$ (二重) 的全部特征向量为 $k_2(1,-1,0)^{\mathrm{T}}+k_3(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$, k_2, k_3 是不全为零的常数. 5.226

Example 81 (研 2006). 设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的两个解.

(I) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量;

(II) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$.

解: (I) 因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3, 即

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

所以 3 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 3 的特征向量.

又 $\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{\alpha}_2$, 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 0 的特征向量.

因此, $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 3, 0, 0. $\lambda=3$ 对应的特征向量为 $k(1,1,1)^{\mathrm{T}}$, k 为非零常数; $\lambda=0$ 对应的特征向量为 $k_1(-1,2,-1)^{\mathrm{T}}+k_2(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$, k_1, k_2 不全为零. 5.227

(II) 注意到 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 要得到一组正交向量, 只需要将 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交化. 取

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}},\\&\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}-\frac{-3}{6}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\end{aligned}$$

单位化得

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

5.228

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}&0&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$, 得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&3\end{pmatrix}$. 5.229