七、(10 分) 设 A、B 是两个三阶矩阵，满足关系：$A^2 - AB - 2B^2 = A - 2BA - B + I$，且 $A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，

I 为三阶单位矩阵，求 A.

八、(10分) 用正交变换化二次型 $f = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3$ 为标准形，写出所用正交变换及 f 的标准形，并判断二次型的正定性。

九、(8 分) 证明:线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$ 对任何 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 都有解的充分必要条件是系数行列式

不为 0，即 $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$。

十、(10 分) 已知线性空间 R^3 的基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵为 P，且

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix};\ P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

试求：(1) 基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$；(2) 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下有相同坐标的全体向量。

十一、(10 分) 设 A 为 n 阶矩阵，且 $A^2 - A = 12E$，(1) 证明秩 $r(A+3E) + r(A-4E) = n$；

(2) 证明 A 可相似于对角阵；(3) 求行列式 $|A+4E|$。