线性代数 (54 学时) 总复习

黄 正 华

Email: huangzh@whu.edu.cn

武汉大学 数学与统计学院

2016 年 6 月 23 日

如果非要给这本书加一个副标题, 我希望是 —— 《一个方程组引发的故事》.

我们现在使用的教材是工程数学《线性代数》, 是线性代数学科比较基础的部分. 这一部分的中心是围绕 “用高斯消元法求解线性方程组” 的问题展开的. 全书中心的话题其实是第二章 P.41 的高斯消元法.

由此衍生了三个工具 —— 行列式、矩阵、向量组, 从不同的角度来阐述方程组的求解问题.

要特别注意, 矩阵、向量组、方程组这三个问题的相互转化. 比如, 向量组的问题, 可能需要转化成矩阵的问题来解决; 也可能要借助方程组解的相关理论来解决.

第一章的中心可以认为是克拉默法则, 前面的行列式讨论是为克拉默法则作铺垫的.

高斯消元法的过程, 可以简单地表示为方程组的增广矩阵的初等行变换, 这自然引出了对矩阵的专门讨论. 方程组经过高斯消元法总是会稳定地保留一定数量的方程, 这就对应着秩的问题. 矩阵的细部是向量, 更进一步讨论向量的线性表示、线性相关性才说明了, 为什么矩阵的初等行变换中有一些行会被变为零, 为什么消元法解方程时有的方程会被消掉. 极大无关组的概念才真正解释了, 为什么消元法解方程组时保留下来的方程个数是稳定不变的.

既然中心的议题是解方程组, 那么关于线性方程组解的理论要非常清楚, 比如 “$n-r$” 的含义, 有解、无解的充要条件.

要点 TOP 10

(I) $|\lambda \boldsymbol{A}| = \lambda^n |\boldsymbol{A}|$. ($\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵)

要点 TOP 10

(I) $|\lambda \boldsymbol{A}| = \lambda^n |\boldsymbol{A}|$. ($\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵)

(II) 伴随矩阵的定义, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$. (另见教材 P.150 习题 34.)

要点 TOP 10

(I) $|\lambda \boldsymbol{A}| = \lambda^n |\boldsymbol{A}|$. ($\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵)

(II) 伴随矩阵的定义, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$. (另见教材 P.150 习题 34.)

(III) 矩阵乘法不满足交换律、消去律.

要点 TOP 10

(I) $|\lambda \boldsymbol{A}| = \lambda^n |\boldsymbol{A}|$. ($\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵)

(II) 伴随矩阵的定义, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$. (另见教材 P.150 习题 34.)

(III) 矩阵乘法不满足交换律、消去律.

(IV) 矩阵秩的性质. (教材 P.128)

要点 TOP 10

(I) $|\lambda \boldsymbol{A}| = \lambda^n |\boldsymbol{A}|$. ($\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵)

(II) 伴随矩阵的定义, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$. (另见教材 P.150 习题 34.)

(III) 矩阵乘法不满足交换律、消去律.

(IV) 矩阵秩的性质. (教材 P.128)

(V) 特征值性质: $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$;
$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = \big|\boldsymbol{A}\big|$.

要点 TOP 10

(I) $|\lambda \boldsymbol{A}| = \lambda^n |\boldsymbol{A}|$. ($\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵)

(II) 伴随矩阵的定义, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$. (另见教材 P.150 习题 34.)

(III) 矩阵乘法不满足交换律、消去律.

(IV) 矩阵秩的性质. (教材 P.128)

(V) 特征值性质: $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$;
$\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = \big|\boldsymbol{A}\big|$.

(VI) 若 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, 则 $\varphi(\lambda)$ 是矩阵多项式 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的特征值. (教材 P.250 习题 28.)

要点 TOP 10

(I) $|\lambda \boldsymbol{A}| = \lambda^n |\boldsymbol{A}|$. ($\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵)

(II) 伴随矩阵的定义, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$. (另见教材 P.150 习题 34.)

(III) 矩阵乘法不满足交换律、消去律.

(IV) 矩阵秩的性质. (教材 P.128)

(V) 特征值性质: $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$;
$\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = \big|\boldsymbol{A}\big|$.

(VI) 若 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, 则 $\varphi(\lambda)$ 是矩阵多项式 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的特征值. (教材 P.250 习题 28.)

(VII) 齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系由 $n - r$ 个线性无关的解构成.

要点 TOP 10

(I) $|\lambda \boldsymbol{A}| = \lambda^n |\boldsymbol{A}|$. ($\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵)

(II) 伴随矩阵的定义, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$. (另见教材 P.150 习题 34.)

(III) 矩阵乘法不满足交换律、消去律.

(IV) 矩阵秩的性质. (教材 P.128)

(V) 特征值性质: $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$;
$\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = \big|\boldsymbol{A}\big|$.

(VI) 若 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, 则 $\varphi(\lambda)$ 是矩阵多项式 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的特征值. (教材 P.250 习题 28.)

(VII) 齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系由 $n - r$ 个线性无关的解构成.

(VIII) 线性方程组有解、无解的充要条件.

要点 TOP 10

(I) $|\lambda \boldsymbol{A}| = \lambda^n |\boldsymbol{A}|$. ($\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵)

(II) 伴随矩阵的定义, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$. (另见教材 P.150 习题 34.)

(III) 矩阵乘法不满足交换律、消去律.

(IV) 矩阵秩的性质. (教材 P.128)

(V) 特征值性质: $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$;
$\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = \left|\boldsymbol{A}\right|$.

(VI) 若 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, 则 $\varphi(\lambda)$ 是矩阵多项式 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的特征值. (教材 P.250 习题 28.)

(VII) 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系由 $n-r$ 个线性无关的解构成.

(VIII) 线性方程组有解、无解的充要条件.

(IX) 矩阵可对角化的充要条件.

要点 TOP 10

(I) $|\lambda \boldsymbol{A}| = \lambda^n |\boldsymbol{A}|$. ($\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵)

(II) 伴随矩阵的定义, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$. (另见教材 P.150 习题 34.)

(III) 矩阵乘法不满足交换律、消去律.

(IV) 矩阵秩的性质. (教材 P.128)

(V) 特征值性质: $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$;
$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = \left|\boldsymbol{A}\right|$.

(VI) 若 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, 则 $\varphi(\lambda)$ 是矩阵多项式 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的特征值. (教材 P.250 习题 28.)

(VII) 齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系由 $n - r$ 个线性无关的解构成.

(VIII) 线性方程组有解、无解的充要条件.

(IX) 矩阵可对角化的充要条件.

(X) 相抵、相似、合同, 它们的区别与联系.

例题 TOP 5

下述的例子特别重要:

(I) 行列式计算的经典例题. (打印版 CH1, P.26, 例 23.)

例题 TOP 5

下述的例子特别重要:

(I) 行列式计算的经典例题. (打印版 CH1, P.26, 例 23.)

(II) 带参量的线性方程组解的讨论. (打印版 CH3, P.33, 例 63. CH3, P.59, 例 113.)

例题 TOP 5

下述的例子特别重要:

(I) 行列式计算的经典例题. (打印版 CH1, P.26, 例 23.)

(II) 带参量的线性方程组解的讨论. (打印版 CH3, P.33, 例 63. CH3, P.59, 例 113.)

(III) 打印版 CH5, P.17, 例 10, 特征值性质的应用. 这是近年考研常见的考点.

例题 TOP 5

下述的例子特别重要:

(I) 行列式计算的经典例题. (打印版 CH1, P.26, 例 23.)

(II) 带参量的线性方程组解的讨论. (打印版 CH3, P.33, 例 63. CH3, P.59, 例 113.)

(III) 打印版 CH5, P.17, 例 10, 特征值性质的应用. 这是近年考研常见的考点.

(IV) 打印版 CH5, P.24, 例 25. 综合了矩阵对角化的充要条件、“$n-r$” 结论.

例题 TOP 5

下述的例子特别重要:

(I) 行列式计算的经典例题. (打印版 CH1, P.26, 例 23.)

(II) 带参量的线性方程组解的讨论. (打印版 CH3, P.33, 例 63. CH3, P.59, 例 113.)

(III) 打印版 CH5, P.17, 例 10, 特征值性质的应用. 这是近年考研常见的考点.

(IV) 打印版 CH5, P.24, 例 25. 综合了矩阵对角化的充要条件、“$n-r$” 结论.

(V) 教材 P.137 例 3, 常用结论. $\boldsymbol{AB}=\mathbf{0}$, 则视 $\boldsymbol{B}$ 的列为方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解, 这个观念很重要.

考点

(1) n 阶行列式的计算;

考点

(1) n 阶行列式的计算;

(2) 解矩阵方程;

考点

(1) n 阶行列式的计算;

(2) 解矩阵方程;

(3) 带参量的线性方程组解的讨论;

考点

(1) n 阶行列式的计算;

(2) 解矩阵方程;

(3) 带参量的线性方程组解的讨论;

(4) 找出极大无关组, 并表示余下的向量;

考点

(1) n 阶行列式的计算;

(2) 解矩阵方程;

(3) 带参量的线性方程组解的讨论;

(4) 找出极大无关组, 并表示余下的向量;

(5) 二次型的标准化;

行列式

(1) 行列式的定义;

行列式

(1) 行列式的定义;

(2) 行列式的性质;

行列式

(1) 行列式的定义;

(2) 行列式的性质;

(3) 计算行列式的一般方法: 化上三角行列式法; 降阶法; 升阶法 (加边法);

行列式

(1) 行列式的定义;

(2) 行列式的性质;

(3) 计算行列式的一般方法: 化上三角行列式法; 降阶法; 升阶法 (加边法);

(4) 重要结论: (对角行列式、上下三角行列式、范德蒙行列式、准三角行列式、奇数阶反对称行列式);

行列式

(1) 行列式的定义;

(2) 行列式的性质;

(3) 计算行列式的一般方法: 化上三角行列式法; 降阶法; 升阶法 (加边法);

(4) 重要结论: (对角行列式、上下三角行列式、范德蒙行列式、准三角行列式、奇数阶反对称行列式);

(5) 利用矩阵的秩的性质.

Example

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 都是四维列向量, 且四阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1| = m, |\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\alpha}_3| = n$, 求四阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2|$.

Example

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 都是四维列向量, 且四阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1| = m, |\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\alpha}_3| = n$, 求四阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2|$.

解:

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2| &= |\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_1| + |\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_2| \\
&= -|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1| + |\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\alpha}_3| \\
&= n - m.
\end{aligned}$$

Example

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 都是三维列向量, 记三阶矩阵
$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3), \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 + 4\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1 + 3\boldsymbol{\alpha}_2 + 9\boldsymbol{\alpha}_3)$, 已知
$|\boldsymbol{A}| = 1$, 求 $|\boldsymbol{B}|$.

Example

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 都是三维列向量, 记三阶矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3), \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 + 4\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1 + 3\boldsymbol{\alpha}_2 + 9\boldsymbol{\alpha}_3)$, 已知 $|\boldsymbol{A}| = 1$, 求 $|\boldsymbol{B}|$.

解:

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{B}| &= |\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 + 4\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1 + 3\boldsymbol{\alpha}_2 + 9\boldsymbol{\alpha}_3| \\
&\xlongequal[c_2 - c_1]{c_3 - c_2} |\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2 + 3\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2 + 5\boldsymbol{\alpha}_3| \\
&\xlongequal{c_3 - c_2} |\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2 + 3\boldsymbol{\alpha}_3, 2\boldsymbol{\alpha}_3| \\
&= 2|\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2 + 3\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3| \\
&\xlongequal{c_2 - 3c_3} 2|\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3| \\
&\xlongequal[c_1 - c_3]{c_1 - c_2} 2|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3| = 2|\boldsymbol{A}| = 2.
\end{aligned}
$$

另解: 因为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{B} &= (\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3) \\
&= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

另解: 因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} &= (\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3) \\ &= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

所以

$$|\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}|\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

另解: 因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} &= (\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3) \\ &= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

所以

$$|\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}|\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

另解: 因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} &= (\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3)\\ &= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 9\end{pmatrix}\end{aligned}$$

所以

$$|\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}|\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 9\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 8\end{vmatrix} = 2.$$

Example

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, 求行列式 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$ 的值.

Example

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, 求行列式 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$ 的值.

解: $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$

Example

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, 求行列式 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$ 的值.

解: $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}|^2,$

Example

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & -1\\ 1 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 2 & 4\end{pmatrix}$, 求行列式 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$ 的值.

解: $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|^2$, 而

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -3 & -1\\ 1 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 2 & 4\end{vmatrix}$$

Example

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & -1\\ 1 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 2 & 4\end{pmatrix}$, 求行列式 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$ 的值.

解: $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|^2$, 而

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -3 & -1\\ 1 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 2 & 4\end{vmatrix} \xlongequal[r_4-3r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix}1 & 2 & -3 & -1\\ 0 & -4 & 4 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & -6 & 11 & 7\end{vmatrix}$$

Example

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & -1\\ 1 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 2 & 4\end{pmatrix}$, 求行列式 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$ 的值.

解: $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|^2$, 而

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -3 & -1\\ 1 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 2 & 4\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-3r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1 & 2 & -3 & -1\\ 0 & -4 & 4 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & -6 & 11 & 7\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-4 & 4 & 2\\ 1 & -1 & 2\\ -6 & 11 & 7\end{vmatrix}$$

Example

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, 求行列式 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$ 的值.

解: $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|^2$, 而

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} \overset{r_2-r_1}{\underset{r_4-3r_1}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 11 & 7 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -6 & 11 & 7 \end{vmatrix} \overset{r_1+4r_2}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 1 & -1 & 2 \\ -6 & 11 & 7 \end{vmatrix}$$

Example

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, 求行列式 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$ 的值.

解: $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|^2$, 而

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-3r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 11 & 7 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -6 & 11 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+4r_2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 1 & -1 & 2 \\ -6 & 11 & 7 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 11 \end{vmatrix} = 50.$$

Example

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-3&-1\\1&-2&1&1\\0&1&-1&2\\3&0&2&4\end{pmatrix}$, 求行列式 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$ 的值.

解: $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|^2$, 而

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&2&-3&-1\\1&-2&1&1\\0&1&-1&2\\3&0&2&4\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-3r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&2&-3&-1\\0&-4&4&2\\0&1&-1&2\\0&-6&11&7\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-4&4&2\\1&-1&2\\-6&11&7\end{vmatrix}\xlongequal{r_1+4r_2}\begin{vmatrix}0&0&10\\1&-1&2\\-6&11&7\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1&-1\\-6&11\end{vmatrix}=50.$$

所以 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=50^2=2500.$ □

Example

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$, 求行列式 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$.

Example

已知 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$, 求行列式 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$.

解: 注意到 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 4 阶方阵,

Example

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\\10&11&12\end{pmatrix}$, 求行列式 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$.

解: 注意到 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 4 阶方阵, 且

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$$

Example

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\\10&11&12\end{pmatrix}$, 求行列式 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$.

解: 注意到 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 4 阶方阵, 且

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A})\leqslant 3,$$

Example

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$, 求行列式 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$.

解: 注意到 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 4 阶方阵, 且

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) \leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \leqslant 3,$$

所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为降秩矩阵,

Example

已知 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$, 求行列式 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$.

解: 注意到 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 4 阶方阵, 且

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) \leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \leqslant 3,$$

所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为降秩矩阵, 从而 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = 0$. □

Example

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵, $|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 若 $a_{ij}+A_{ij}=0\ (i,j=1,2,3)$, 则 $|\boldsymbol{A}|=$________.

Example

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵, $|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 若 $a_{ij}+A_{ij}=0\ (i,j=1,2,3)$, 则 $|\boldsymbol{A}|=$________.

解: 由 $a_{ij}+A_{ij}=0$,

Example

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵, $|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 若 $a_{ij}+A_{ij}=0\ (i,j=1,2,3)$, 则 $|\boldsymbol{A}|=$________.

解: 由 $a_{ij}+A_{ij}=0$, 得 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵为

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Example

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵, $|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 若 $a_{ij}+A_{ij}=0\ (i,j=1,2,3)$, 则 $|\boldsymbol{A}|=$________.

解: 由 $a_{ij}+A_{ij}=0$, 得 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵为

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{21} & -a_{31} \\ -a_{12} & -a_{22} & -a_{32} \\ -a_{13} & -a_{23} & -a_{33} \end{pmatrix}$$

Example

设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵, $|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 若 $a_{ij} + A_{ij} = 0\ (i, j = 1, 2, 3)$, 则 $|\boldsymbol{A}| =$________.

解: 由 $a_{ij} + A_{ij} = 0$, 得 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵为

$$\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{21} & -a_{31} \\ -a_{12} & -a_{22} & -a_{32} \\ -a_{13} & -a_{23} & -a_{33} \end{pmatrix} = -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}.$$

Example

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵, $|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 若 $a_{ij}+A_{ij}=0\ (i,j=1,2,3)$, 则 $|\boldsymbol{A}|=$________.

解: 由 $a_{ij}+A_{ij}=0$, 得 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵为

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{21} & -a_{31} \\ -a_{12} & -a_{22} & -a_{32} \\ -a_{13} & -a_{23} & -a_{33} \end{pmatrix}=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}.$$

又 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$,

Example

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵, $|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 若 $a_{ij}+A_{ij}=0\ (i,j=1,2,3)$, 则 $|\boldsymbol{A}|=$________.

解: 由 $a_{ij}+A_{ij}=0$, 得 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵为

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{21} & -a_{31} \\ -a_{12} & -a_{22} & -a_{32} \\ -a_{13} & -a_{23} & -a_{33} \end{pmatrix}=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}.$$

又 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$, 得

$$-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}.$$

Example

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵, $|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 若 $a_{ij}+A_{ij}=0\ (i,j=1,2,3)$, 则 $|\boldsymbol{A}|=$________.

解: 由 $a_{ij}+A_{ij}=0$, 得 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵为

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{21} & -a_{31} \\ -a_{12} & -a_{22} & -a_{32} \\ -a_{13} & -a_{23} & -a_{33} \end{pmatrix}=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}.$$

又 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$, 得

$$-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}.$$

两边取行列式,

Example

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵, $|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 若 $a_{ij}+A_{ij}=0\ (i,j=1,2,3)$, 则 $|\boldsymbol{A}|=$________.

解: 由 $a_{ij}+A_{ij}=0$, 得 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵为

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{21} & -a_{31} \\ -a_{12} & -a_{22} & -a_{32} \\ -a_{13} & -a_{23} & -a_{33} \end{pmatrix}=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}.$$

又 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$, 得

$$-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}.$$

两边取行列式, 注意到 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵,

Example

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵, $|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 若 $a_{ij}+A_{ij}=0\ (i,j=1,2,3)$, 则 $|\boldsymbol{A}|=$________.

解: 由 $a_{ij}+A_{ij}=0$, 得 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵为

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{21} & -a_{31} \\ -a_{12} & -a_{22} & -a_{32} \\ -a_{13} & -a_{23} & -a_{33} \end{pmatrix}=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}.$$

又 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$, 得

$$-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}.$$

两边取行列式, 注意到 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵, 得

$$(-1)^3|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|^3,$$

Example

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵, $|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 若 $a_{ij}+A_{ij}=0\ (i,j=1,2,3)$, 则 $|\boldsymbol{A}|=$________.

解: 由 $a_{ij}+A_{ij}=0$, 得 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵为

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{21} & -a_{31} \\ -a_{12} & -a_{22} & -a_{32} \\ -a_{13} & -a_{23} & -a_{33} \end{pmatrix}=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}.$$

又 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$, 得

$$-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}.$$

两边取行列式, 注意到 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵, 得

$$(-1)^3|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|^3, \qquad \text{即} \ -|\boldsymbol{A}|^2=|\boldsymbol{A}|^3.$$

故 $|\boldsymbol{A}| = -1$ 或 0.

故 $|\boldsymbol{A}| = -1$ 或 0.

若 $|\boldsymbol{A}| = 0$,

故 $|\boldsymbol{A}| = -1$ 或 0.

若 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 由前述 $-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$,

故 $|\boldsymbol{A}| = -1$ 或 0.

若 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 由前述 $-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$, 得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{0}.$$

故 $|\boldsymbol{A}| = -1$ 或 0.

若 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 由前述 $-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$, 得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{0}.$$

这说明 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$.

故 $|\boldsymbol{A}| = -1$ 或 0.

若 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 由前述 $-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$, 得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{0}.$$

这说明 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$. 而题设 $\boldsymbol{A}$ 是非零矩阵, 矛盾.

故 $|\boldsymbol{A}| = -1$ 或 0.

若 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 由前述 $-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$, 得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}.$$

这说明 $\boldsymbol{A} = \mathbf{0}$. 而题设 $\boldsymbol{A}$ 是非零矩阵, 矛盾. 故 $|\boldsymbol{A}| = -1$. $\square$

☞ 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\mathbf{0}$, 则 $\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$.

☞ 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\mathbf{0}$, 则 $\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$.

事实上, 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\mathbf{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的对角线上的元素依次为

$$a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2=0,\quad a_{21}^2+a_{22}^2+a_{23}^2=0,\quad a_{31}^2+a_{32}^2+a_{33}^2=0,$$

☞ 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$, 则 $\boldsymbol{A} = \mathbf{0}$.

事实上, 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的对角线上的元素依次为

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 0, \quad a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 0, \quad a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 0,$$

故 $a_{ij} = 0\ (i, j = 1, 2, 3)$, 即 $\boldsymbol{A} = \mathbf{0}$.

☞ 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\mathbf{0}$, 则 $\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$.

事实上, 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\mathbf{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的对角线上的元素依次为

$$a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2=0,\quad a_{21}^2+a_{22}^2+a_{23}^2=0,\quad a_{31}^2+a_{32}^2+a_{33}^2=0,$$

故 $a_{ij}=0\ (i,j=1,2,3)$, 即 $\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$.

以上是以 3 阶的矩阵为例, n 阶矩阵的情形同理.

(1) 矩阵的运算 (计算矩阵的方幂, 矩阵的转置与对称矩阵, 求逆矩阵, 解矩阵方程.)

矩阵及其运算

(1) 矩阵的运算 (计算矩阵的方幂, 矩阵的转置与对称矩阵, 求逆矩阵, 解矩阵方程.)

(2) 逆矩阵的性质.

矩阵及其运算

(1) 矩阵的运算 (计算矩阵的方幂, 矩阵的转置与对称矩阵, 求逆矩阵, 解矩阵方程.)

(2) 逆矩阵的性质.

(3) 矩阵可逆的证明.

计算矩阵的方幂

Example

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^{2006}$.

计算矩阵的方幂

Example

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^{2006}$.

解: 因为 $\boldsymbol{A}$

计算矩阵的方幂

Example

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^{2006}$.

解: 因为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

计算矩阵的方幂

Example

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^{2006}$.

解: 因为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(1,1,1)$,

计算矩阵的方幂

Example

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^{2006}$.

解: 因为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(1,1,1)$, 所以

$$\boldsymbol{A}^{2006}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(1,1,1)$$

Example

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^{2006}$.

解: 因为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(1,1,1)$, 所以

$$\boldsymbol{A}^{2006}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(1,1,1)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(1,1,1)$$

Example

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^{2006}$.

解: 因为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(1,1,1)$, 所以

$$\boldsymbol{A}^{2006} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(1,1,1)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(1,1,1)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(1,1,1)$$

Example

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^{2006}$.

解: 因为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(1,1,1)$, 所以

$$\boldsymbol{A}^{2006}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(1,1,1)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(1,1,1)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(1,1,1)\cdots\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(1,1,1)$$

Example

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^{2006}$.

解: 因为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(1,1,1)$, 所以

$$\boldsymbol{A}^{2006}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(1,1,1)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(1,1,1)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(1,1,1)\cdots\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(1,1,1)$$

$$=(a+b+c)^{2005}\boldsymbol{A}.$$

Example

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^n$.

Example

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^n$.

解: $\boldsymbol{A}^n = (-3)^{n-1}\boldsymbol{A}$. $\square$

Example

设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 试求:

(1) $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量;

(2) $\boldsymbol{A}^k$ 及其特征值和特征向量.

Example

设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 试求:

(1) $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量;

(2) $\boldsymbol{A}^k$ 及其特征值和特征向量.

解: (1) $|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}|$

Example

设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 试求:

(1) $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量;

(2) $\boldsymbol{A}^k$ 及其特征值和特征向量.

解: (1) $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

Example

设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 试求:

(1) $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量;

(2) $\boldsymbol{A}^k$ 及其特征值和特征向量.

解: (1) $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)^2(1-\lambda).$

Example

设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 试求:

(1) $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量;

(2) $\boldsymbol{A}^k$ 及其特征值和特征向量.

解: (1) $|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(1-\lambda).$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 2.$

当 $\lambda_1 = 1$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$,

当 $\lambda_1 = 1$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

当 $\lambda_1 = 1$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

当 $\lambda_1 = 1$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\boldsymbol{p}_1=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$,

当 $\lambda_1 = 1$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\boldsymbol{p}_1 = (0, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, 则对应特征值 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量为 $k_1\boldsymbol{p}_1 (k_1 \neq 0)$.

当 $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$,

当 $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

当 $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, 由

$$\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

当 $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系为

当 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&-1\\1&0&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\boldsymbol{p}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{p}_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$,

当 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&-1\\1&0&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\boldsymbol{p}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{p}_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$, 则对应特征值 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的特征向量为

当 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&-1\\1&0&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\boldsymbol{p}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{p}_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$, 则对应特征值 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的特征向量为 $k_2\boldsymbol{p}_2+k_3\boldsymbol{p}_3$ (k_2, k_3 不同时为 0).

(2) 令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$

(2) 令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(2) 令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}(1, 2, 2)$,

(2) 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(1,2,2)$, 即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\,\mathrm{diag}(1,2,2)\boldsymbol{P}^{-1}$,

(2) 令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}(1, 2, 2)$, 即 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\,\mathrm{diag}(1, 2, 2)\boldsymbol{P}^{-1}$, 从而

$$\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{P}\,\mathrm{diag}(1, 2, 2)^k\boldsymbol{P}^{-1}$$

(2) 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(1,2,2)$, 即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\,\mathrm{diag}(1,2,2)\boldsymbol{P}^{-1}$, 从而

$$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P}\,\mathrm{diag}(1,2,2)^k\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\,\mathrm{diag}(1,2^k,2^k)\boldsymbol{P}^{-1}.$$

下面先求 $\boldsymbol{P}^{-1}$,

下面先求 $\boldsymbol{P}^{-1}$, 因为

$$(\boldsymbol{P},\boldsymbol{I})=\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&0&1&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\1&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&0&1\\1&1&0&0&1&0\\0&0&1&1&0&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-r_1}\left(\begin{array}{rrr|rrr}1&0&1&0&0&1\\0&1&-1&0&1&-1\\0&0&1&1&0&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1-r_3}\left(\begin{array}{rrr|rrr}1&0&0&-1&0&1\\0&1&0&1&1&-1\\0&0&1&1&0&0\end{array}\right),$$

下面先求 $\boldsymbol{P}^{-1}$, 因为

$$(\boldsymbol{P},\boldsymbol{I})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}0&0&1&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\1&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&0&0&1\\1&1&0&0&1&0\\0&0&1&1&0&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccr:ccr}1&0&1&0&0&1\\0&1&-1&0&1&-1\\0&0&1&1&0&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1-r_3}\left(\begin{array}{ccc:rcr}1&0&0&-1&0&1\\0&1&0&1&1&-1\\0&0&1&1&0&0\end{array}\right),$$

所以 $\boldsymbol{P}^{-1}$

下面先求 $\boldsymbol{P}^{-1}$, 因为

$$(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{I}) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccr:ccr} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2 + r_3]{r_1 - r_3} \left(\begin{array}{ccc:rcr} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

所以 $\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

于是

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^k &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2^k \\ 1 & 2^k & 0 \\ 1 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 2^k-1 & 2^k & -2^k+1 \\ 2^k-1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

于是

$$\boldsymbol{A}^k=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^k&0\\0&0&2^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&2^k\\1&2^k&0\\1&0&2^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^k&0&0\\2^k-1&2^k&-2^k+1\\2^k-1&0&1\end{pmatrix}.$$

由特征值与特征向量的性质可知: $\boldsymbol{A}^k$ 的特征值为 $1, 2^k, 2^k$,

于是

$$
\boldsymbol{A}^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2^k \\ 1 & 2^k & 0 \\ 1 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 2^k-1 & 2^k & -2^k+1 \\ 2^k-1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

由特征值与特征向量的性质可知: $\boldsymbol{A}^k$ 的特征值为 $1, 2^k, 2^k$, 对应的特征向量依次为 $k_1\boldsymbol{p}_1$ $(k_1 \neq 0)$, $k_2\boldsymbol{p}_2 + k_3\boldsymbol{p}_3$ $(k_2,\ k_3$ 不同时为 $0)$. $\square$

解矩阵方程

Example

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{I}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$, 求矩阵 $\boldsymbol{C}$.

解矩阵方程

Example

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{I}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$, 求矩阵 $\boldsymbol{C}$.

解: 由 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{I}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$,

解矩阵方程

Example

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{I}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$, 求矩阵 $\boldsymbol{C}$.

解: 由 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{I}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$, 得 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{I}$.

Example

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{I}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$, 求矩阵 $\boldsymbol{C}$.

解: 由 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{I}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$, 得 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{I}$. 其中

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}$$

Example

设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $AC - I = B + C$, 求矩阵 C.

解: 由 $AC - I = B + C$, 得 $(A - I)C = B + I$. 其中

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

Example

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{I}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$, 求矩阵 $\boldsymbol{C}$.

解: 由 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{I}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$, 得 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{I}$. 其中

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}+\boldsymbol{I}$$

解矩阵方程

Example

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 2 & -3\\ 2 & -1 & 4\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{I}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$, 求矩阵 $\boldsymbol{C}$.

解: 由 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{I}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$, 得 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{I}$. 其中

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}+\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 0 & 4\\ 0 & -1 & 5\end{pmatrix}.$$

由

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I},\boldsymbol{B}+\boldsymbol{I})=\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & -5 & 11 \end{array}\right)\xrightarrow{r_3-r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -2 & 7 \end{array}\right)\xrightarrow{r_3-2r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & 4 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3\times(-1)}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -4 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow[r_1+r_2]{r_1-r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -4 & 1 \end{array}\right).$$

可知 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}$ 可逆,

可知 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}$ 可逆, 且

$$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{I})$$

可知 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}$ 可逆, 且

$$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{I})=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -3 & -3 & 4 \\ -7 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Example

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵.

(I) 求方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系;

(II) 求满足 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$.

Example

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵.

(I) 求方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系;

(II) 求满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解: 显然 $\boldsymbol{B}$ 是 4×3 矩阵.

Example

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵.

(I) 求方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系;

(II) 求满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解: 显然 $\boldsymbol{B}$ 是 4×3 矩阵. 视 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$,

Example

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵.

(I) 求方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系;

(II) 求满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解: 显然 $\boldsymbol{B}$ 是 4×3 矩阵. 视 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$ 即

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3).$$

Example

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵.

(I) 求方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系;

(II) 求满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解: 显然 $\boldsymbol{B}$ 是 4×3 矩阵. 视 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$ 即

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3).$$

故求解矩阵方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$ 等价于求解 3 个线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{e}_1,\qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{e}_2,\qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{e}_3.$$

Example

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵.

(I) 求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系;

(II) 求满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解: 显然 $\boldsymbol{B}$ 是 4×3 矩阵. 视 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$, 则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 即

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3).$$

故求解矩阵方程 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 等价于求解 3 个线性方程组

$$\boldsymbol{A\beta}_1=\boldsymbol{e}_1,\qquad \boldsymbol{A\beta}_2=\boldsymbol{e}_2,\qquad \boldsymbol{A\beta}_3=\boldsymbol{e}_3.$$

其中 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 是它们对应的齐次线性方程组.

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E}) &= \left(\begin{array}{cccc:ccc} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{r_3-r_1} \left(\begin{array}{cccc:ccc} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{r_3-4r_2} \left(\begin{array}{cccc:ccc} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow[r_1-3r_3]{r_2+r_3} \left(\begin{array}{cccc:ccc} 1 & -2 & 0 & 5 & 4 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{r_1+2r_2} \left(\begin{array}{cccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right),
\end{aligned}
$$

(I) 故

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix},
$$

(I) 故

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&-3\end{pmatrix},$$

得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的同解方程组为

$$\begin{cases}x_1=-x_4,\\x_2=2x_4,\\x_3=3x_4.\end{cases}$$

(I) 故

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

得 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1=-x_4, \\ x_2=2x_4, \\ x_3=3x_4. \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1=-x_4, \\ x_2=2x_4, \\ x_3=3x_4, \\ x_4=x_4. \end{cases}$$

(I) 故

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = -x_4, \\ x_2 = 2x_4, \\ x_3 = 3x_4. \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1 = -x_4, \\ x_2 = 2x_4, \\ x_3 = 3x_4, \\ x_4 = x_4. \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(I) 故

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1=-x_4, \\ x_2=2x_4, \\ x_3=3x_4. \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1=-x_4, \\ x_2=2x_4, \\ x_3=3x_4, \\ x_4=x_4. \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=c\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

得到 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系为 $\boldsymbol{\xi}=(-1,2,3,1)^{\mathrm{T}}$.

(II) 由

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{e}_1) = \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right),$$

(II) 由

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{e}_1) = \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right),$$

得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{e}_1$ 的通解为

$$\boldsymbol{\beta}_1 = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(II) 由

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{e}_1) = \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right),$$

得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{e}_1$ 的通解为

$$\boldsymbol{\beta}_1 = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 + 2 \\ 2c_1 - 1 \\ 3c_1 - 1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

同理可知, $\boldsymbol{A\beta}_2 = \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{A\beta}_3 = \boldsymbol{e}_3$ 的通解分别为

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} -c_2+6 \\ 2c_2-3 \\ 3c_2-4 \\ c_2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\beta}_3 = \begin{pmatrix} -c_3-1 \\ 2c_3+1 \\ 3c_3+1 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

同理可知, $\boldsymbol{A\beta}_2 = \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{A\beta}_3 = \boldsymbol{e}_3$ 的通解分别为

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} -c_2+6 \\ 2c_2-3 \\ 3c_2-4 \\ c_2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\beta}_3 = \begin{pmatrix} -c_3-1 \\ 2c_3+1 \\ 3c_3+1 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

故满足 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为

$$\begin{pmatrix} -c_1+2 & -c_2+6 & -c_3-1 \\ 2c_1-1 & 2c_2-3 & 2c_3+1 \\ 3c_1-1 & 3c_2-4 & 3c_3+1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

☞ 上述题型与平时所练习的求解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 不同: 这里的矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 不是有唯一解, 而是有无穷多解.

☞ 上述题型与平时所练习的求解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 不同: 这里的矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 不是有唯一解, 而是有无穷多解.

求解方法: 转化为多个线性方程组的求解.

☞ 上述题型与平时所练习的求解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 不同: 这里的矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 不是有唯一解, 而是有无穷多解.

求解方法: 转化为多个线性方程组的求解.

这类题目的要点: 明白矩阵方程和一般的线性方程组之间的关系.

Example

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ a & b & c \end{pmatrix}$,

(1) 问 a, b, c 为何值时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$?

(2) 求矩阵方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$ 的全部解.

Example

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&0&-2\\a&b&c\end{pmatrix}$,

(1) 问 a,b,c 为何值时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$?

(2) 求矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的全部解.

解: (1) 由

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&2&0\\-1&1&0&-1&0&-2\\1&0&1&a&b&c\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&2&0\\0&2&2&0&2&-2\\0&-1&-1&a-1&b-2&c\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2 \div 2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & a-1 & b-2 & c \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 + r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & b-1 & c-1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2 \div 2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & a-1 & b-2 & c \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 + r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & b-1 & c-1 \end{array}\right)$$

可知当 $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$ 时,

$$\xrightarrow{r_2 \div 2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & a-1 & b-2 & c \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 + r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & b-1 & c-1 \end{array}\right)$$

可知当 $a=1,\ b=1,\ c=1$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 2.$

(2) 由 (1) 知当 $a=1, b=1, c=1$ 时矩阵方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$ 有无穷多解.

(2) 由 (1) 知当 $a=1, b=1, c=1$ 时矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有无穷多解.

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(2) 由 (1) 知当 $a=1, b=1, c=1$ 时矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有无穷多解.

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1-r_2}$$

(2) 由 (1) 知当 $a=1, b=1, c=1$ 时矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有无穷多解.

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1-r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

由 $\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ 得

$$\text{由}\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\text{得}\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-k_1 \\ -k_1 \\ k_1 \end{pmatrix}(k_1\text{ 为任意常数}).$$

由 $\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ 得

由 $\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ 得 $\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-k_2 \\ 1-k_2 \\ k_2 \end{pmatrix}$ (k_2 为任意常数).

由 $\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ 得

由 $\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ 得 $\begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-k_3 \\ -1-k_3 \\ k_3 \end{pmatrix}$ (k_3 为任意常数).

故所求矩阵方程的通解为:

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} 1-k_1 & 1-k_2 & 1-k_3 \\ -k_1 & 1-k_2 & -1-k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix},$$

其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数. $\square$

Example

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & a & 0\\ 0 & 0 & 1 & a\\ a & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$.

(I) 计算行列式 $|\boldsymbol{A}|$.

(II) 当实数 a 为何值时, 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解, 并求其通解.

Example

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$.

(I) 计算行列式 $|\boldsymbol{A}|$.

(II) 当实数 a 为何值时, 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解, 并求其通解.

解: (I) 将 $|\boldsymbol{A}|$ 按第一列展开得

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{vmatrix}+(-1)^{4+1}a\begin{vmatrix}a&0&0\\1&a&0\\0&1&a\end{vmatrix}=1-a^4.$$

Example

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$.

(I) 计算行列式 $|\boldsymbol{A}|$.

(II) 当实数 a 为何值时, 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解, 并求其通解.

解: (I) 将 $|\boldsymbol{A}|$ 按第一列展开得

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{vmatrix}+(-1)^{4+1}a\begin{vmatrix}a&0&0\\1&a&0\\0&1&a\end{vmatrix}=1-a^4.$$

(II) 因 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解的必要条件是 $|\boldsymbol{A}|=0$, 即 $1-a^4=0$.

Example

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$.

(I) 计算行列式 $|\boldsymbol{A}|$.

(II) 当实数 a 为何值时, 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解, 并求其通解.

解: (I) 将 $|\boldsymbol{A}|$ 按第一列展开得

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{vmatrix}+(-1)^{4+1}a\begin{vmatrix}a&0&0\\1&a&0\\0&1&a\end{vmatrix}=1-a^4.$$

(II) 因 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解的必要条件是 $|\boldsymbol{A}|=0$, 即 $1-a^4=0$. 又 a 为实数, 故 $a=1$ 或者 $a=-1$.

(1) 当 $a=1$ 时, 由

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\1&0&0&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_4-r_1}\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\0&-1&0&1&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_4+r_2}\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\0&0&1&1&-2\end{array}\right),$$

(1) 当 $a=1$ 时, 由

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_4-r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_4+r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right),$$

出现矛盾方程, 故方程组无解.

(2) 当 $a=-1$ 时, 由

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_4+r_1} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_4+r_2} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2+r_3]{r_4-r_3} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

故 $a=-1$ 时, 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解, 且通解为

$$\boldsymbol{x}=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\qquad c\in\mathbb{R}.$$

另解: 由

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{cccc:c}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\a&0&0&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_4-ar_1}\left(\begin{array}{cccc:c}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&-a^2&0&1&-a\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_4+a^2r_2}\left(\begin{array}{cccc:c}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&0&a^3&1&-a-a^2\end{array}\right)\xrightarrow{r_4-a^3r_3}\left(\begin{array}{cccc:c}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&0&0&1-a^4&-a-a^2\end{array}\right)$$

另解: 由

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{cccc|c}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\a&0&0&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_4-ar_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&-a^2&0&1&-a\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_4+a^2r_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&0&a^3&1&-a-a^2\end{array}\right)\xrightarrow{r_4-a^3r_3}\left(\begin{array}{cccc|c}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&0&0&1-a^4&-a-a^2\end{array}\right)$$

故 $1-a^4=0$ 且 $-a-a^2=0$,

另解: 由

$$
(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{cccc:c}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\a&0&0&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_4-ar_1}\left(\begin{array}{cccc:c}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&-a^2&0&1&-a\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{r_4+a^2r_2}\left(\begin{array}{cccc:c}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&0&a^3&1&-a-a^2\end{array}\right)\xrightarrow{r_4-a^3r_3}\left(\begin{array}{cccc:c}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&0&0&1-a^4&-a-a^2\end{array}\right)
$$

故 $1-a^4=0$ 且 $-a-a^2=0$, 即 $a=-1$ 时, 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解.

另解: 由

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{cccc|c}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\a&0&0&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_4-ar_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&-a^2&0&1&-a\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_4+a^2r_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&0&a^3&1&-a-a^2\end{array}\right)\xrightarrow{r_4-a^3r_3}\left(\begin{array}{cccc|c}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&0&0&1-a^4&-a-a^2\end{array}\right)$$

故 $1-a^4=0$ 且 $-a-a^2=0$, 即 $a=-1$ 时, 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解. 此时 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$ 初等行变换的结果为 $\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-1&0\\0&1&0&-1&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$, 得到如前述的通解. □

矩阵及向量组的秩

(1) 求矩阵的秩及最高阶非零子式;

矩阵及向量组的秩

(1) 求矩阵的秩及最高阶非零子式;

(2) 矩阵秩的性质;

(1) 求矩阵的秩及最高阶非零子式;

(2) 矩阵秩的性质;

(3) 判定向量组的线性相关性;

矩阵及向量组的秩

(1) 求矩阵的秩及最高阶非零子式;

(2) 矩阵秩的性质;

(3) 判定向量组的线性相关性;

(4) 求向量组的秩, 极大无关组及线性表示式.

求矩阵的秩

Example

求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ 的秩.

求矩阵的秩

Example

求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ 的秩.

解: 因为

$$|\boldsymbol{A}|$$

求矩阵的秩

Example

求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ 的秩.

解: 因为

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix}$$

求矩阵的秩

Example

求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ 的秩.

解: 因为

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix}=(k+3)$$

求矩阵的秩

Example

求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ 的秩.

解: 因为

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix}=(k+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix}$$

$$(k+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix} = (k+3)$$

$$
(k+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix} = (k+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{vmatrix}
$$

$$(k+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix} = (k+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{vmatrix} = (k+3)(k-1)^3$$

$$(k+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix} = (k+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{vmatrix} = (k+3)(k-1)^3$$

所以当 $(k+3)(k-1)^3 \neq 0$,

$$(k+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix} = (k+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{vmatrix} = (k+3)(k-1)^3$$

所以当 $(k+3)(k-1)^3 \neq 0$, 即 $k \neq -3$ 且 $k \neq 1$ 时,

$$(k+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix} = (k+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{vmatrix} = (k+3)(k-1)^3$$

所以当 $(k+3)(k-1)^3 \neq 0$, 即 $k \neq -3$ 且 $k \neq 1$ 时, $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 此时

$$(k+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix} = (k+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{vmatrix} = (k+3)(k-1)^3$$

所以当 $(k+3)(k-1)^3 \neq 0$, 即 $k \neq -3$ 且 $k \neq 1$ 时, $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 此时 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 4$.

当 $k = -3$ 时, 因为 $|\boldsymbol{A}| = 0$,

当 $k=-3$ 时, 因为 $|\boldsymbol{A}|=0$, 且

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

当 $k=-3$ 时, 因为 $|\boldsymbol{A}|=0$, 且

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[c_1+c_3]{c_1+c_2}$$

当 $k=-3$ 时, 因为 $|\boldsymbol{A}|=0$, 且

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[c_1+c_3]{c_1+c_2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

当 $k=-3$ 时, 因为 $|\boldsymbol{A}|=0$, 且

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[c_1+c_3]{c_1+c_2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}$$

当 $k=-3$ 时, 因为 $|\boldsymbol{A}|=0$, 且

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[c_1+c_3]{c_1+c_2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

当 $k=-3$ 时, 因为 $|\boldsymbol{A}|=0$, 且

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[c_1+c_3]{c_1+c_2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= -16 \neq 0.$$

当 $k=-3$ 时, 因为 $|\boldsymbol{A}|=0$, 且

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[c_1+c_3]{c_1+c_2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= -16 \neq 0.$$

所以

当 $k=-3$ 时, 因为 $|\boldsymbol{A}|=0$, 且

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[c_1+c_3]{c_1+c_2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= -16 \neq 0.$$

所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3$.

当 $k=1$ 时,

当 $k=1$ 时, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

当 $k=1$ 时, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 显然 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$

当 $k=1$ 时, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 显然 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$.

另解: 因为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 - kr_1]{r_2 - r_1, r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k \\ 0 & k-1 & 0 & 1-k \\ 0 & 0 & k-1 & 1-k \\ 0 & 1-k & 1-k & 1-k^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k \\ 0 & k-1 & 0 & 1-k \\ 0 & 0 & k-1 & 1-k \\ 0 & 1-k & 1-k & 1-k^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4+r_3]{r_4+r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k \\ 0 & k-1 & 0 & 1-k \\ 0 & 0 & k-1 & 1-k \\ 0 & 0 & 0 & (1-k)(3+k) \end{pmatrix}$$

所以

(1) 当 $(1-k)(3+k) \neq 0$,

所以

(1) 当 $(1-k)(3+k)\neq 0$, 即 $k\neq 1$ 且 $k\neq -3$ 时,

所以

(1) 当 $(1-k)(3+k)\neq 0$, 即 $k\neq 1$ 且 $k\neq -3$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=4$.

所以

(1) 当 $(1-k)(3+k)\neq 0$, 即 $k\neq 1$ 且 $k\neq -3$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=4$.

(2) 当 $k=-3$ 时,

所以

(1) 当 $(1-k)(3+k) \neq 0$, 即 $k \neq 1$ 且 $k \neq -3$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 4$.

(2) 当 $k = -3$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 3$.

所以

(1) 当 $(1-k)(3+k)\neq 0$, 即 $k\neq 1$ 且 $k\neq -3$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=4$.

(2) 当 $k=-3$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3$.

(3) 当 $k=1$ 时,

所以

(1) 当 $(1-k)(3+k) \neq 0$, 即 $k \neq 1$ 且 $k \neq -3$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 4$.

(2) 当 $k = -3$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 3$.

(3) 当 $k = 1$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 1$.

关于矩阵的秩的证明

Example

设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, 且满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})=n$, 证明 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

Example

设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, 且满足 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{B}$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}) = n$, 证明 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

证: 因为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I} = n$,

Example

设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, 且满足 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{B}$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} - \boldsymbol{I}) = n$, 证明 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

证: 因为 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} - \boldsymbol{I} = n$, 所以 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} - \boldsymbol{I}$ 可逆, 从而

Example

设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, 且满足 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{B}$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}) = n$, 证明 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

证: 因为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I} = n$, 所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}$ 可逆, 从而

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = r[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})] = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}),$$

关于矩阵的秩的证明

Example

设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, 且满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})=n$, 证明 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

证: 因为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}=n$, 所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}$ 可逆, 从而

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})]=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}),$$

又因为 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,

关于矩阵的秩的证明

Example

设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, 且满足 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{B}$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}) = n$, 证明 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

证: 因为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I} = n$, 所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}$ 可逆, 从而

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = r[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})] = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}),$$

又因为 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$, 所以 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$,

Example

设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, 且满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})=n$, 证明 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

证: 因为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}=n$, 所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}$ 可逆, 从而

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})]=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}),$$

又因为 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$, 所以 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$, 即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})$.

关于矩阵的秩的证明

Example

设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, 且满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})=n$, 证明 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

证: 因为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}=n$, 所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}$ 可逆, 从而

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})]=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}),$$

又因为 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$, 所以 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$, 即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})$.

同理可得

Example

设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, 且满足 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{B}$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}) = n$, 证明 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

证: 因为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I} = n$, 所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}$ 可逆, 从而

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = r[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})] = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{A}),$$

又因为 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$, 所以 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{A} = \boldsymbol{AB}$, 即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{AB})$.

同理可得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$

关于矩阵的秩的证明

Example

设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, 且满足 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{B}$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}) = n$, 证明 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

证: 因为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I} = n$, 所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}$ 可逆, 从而

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = r[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})] = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}),$$

又因为 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$, 所以 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$, 即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})$.

同理可得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) = r[(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{B}]$

Example

设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, 且满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})=n$, 证明 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

证: 因为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}=n$, 所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}$ 可逆, 从而

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})]=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}),$$

又因为 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$, 所以 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$, 即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})$.

同理可得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=r[(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{B}]=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^2-\boldsymbol{B})$

Example

设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, 且满足 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{B}$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}) = n$, 证明 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

证: 因为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I} = n$, 所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}$ 可逆, 从而

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = r[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})] = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}),$$

又因为 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$, 所以 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$, 即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})$.

同理可得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) = r[(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{B}] = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^2-\boldsymbol{B}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})$.

Example

设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, 且满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})=n$, 证明 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

证: 因为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}=n$, 所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}$ 可逆, 从而

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})]=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}),$$

又因为 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$, 所以 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$, 即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})$.

同理可得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=r[(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{B}]=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^2-\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})$.

所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

另证: $A^2 = A$

另证: $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}) = \boldsymbol{0}$

另证: $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}) = \boldsymbol{0} \Rightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}) \leqslant n.$

另证: $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\Rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=\boldsymbol{0}\Rightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\leqslant n.$

另一方面 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})$

另证: $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=\mathbf{0} \Rightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}) \leqslant n.$

另一方面 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$

另证: $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=\mathbf{0} \Rightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}) \leqslant n.$

另一方面 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}) \geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$

另证: $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\Rightarrow\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=\boldsymbol{0}\Rightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\leqslant n.$

另一方面 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{I})=n,$
即有

另证: $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\Rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=\mathbf{0}\Rightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\leqslant n.$

另一方面 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{I})=n,$
即有

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=n.$$

另证: $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}) = \boldsymbol{0} \Rightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}) \leqslant n.$

另一方面 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}) \geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{I}) = n,$ 即有

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}) = n.$$

又因为 $n = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})$

另证: $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\Rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=\boldsymbol{0}\Rightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\leqslant n.$

另一方面 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{I})=n,$ 即有

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=n.$$

又因为 $n=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})\leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B}),$

另证: $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}) = \boldsymbol{0} \Rightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}) \leqslant n.$

另一方面 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}) \geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{I}) = n$, 即有

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}) = n.$$

又因为 $n = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}) \leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$, 所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

另证: $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}) = \boldsymbol{0} \Rightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}) \leqslant n.$

另一方面 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}) \geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{I}) = n,$ 即有

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}) = n.$$

又因为 $n = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}) \leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$, 所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

同理可得:

另证: $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\Rightarrow\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=\mathbf{0}\Rightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\leqslant n.$

另一方面 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{I})=n,$ 即有

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=n.$$

又因为 $n=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})\leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$, 所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

同理可得: $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$,

另证: $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}) = \boldsymbol{0} \Rightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}) \leqslant n.$

另一方面 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) \geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{I}) = n,$ 即有

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}) = n.$$

又因为 $n = \mathrm{r}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} - \boldsymbol{I}) \leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$, 所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

同理可得: $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) \leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

证法三: $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$

证法三: $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\Rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})=\boldsymbol{AB}$,

证法三: $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\Rightarrow\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}$

证法三: $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{B} \Rightarrow (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}.$

证法三: $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\Rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}\Rightarrow(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}.$
即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{B},$

证法三: $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\Rightarrow\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}\Rightarrow(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}.$

即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{B}$, 又因为 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})=n$,

证法三: $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\Rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}\Rightarrow (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$.

即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{B}$, 又因为 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})=n$, 所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}$ 可逆,

证法三: $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\Rightarrow\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}\Rightarrow(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$.

即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{B}$, 又因为 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})=n$, 所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}$ 可逆, 从而 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})$,

证法三: $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{B} \Rightarrow (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$. 即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}) = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{B}$, 又因为 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}) = n$, 所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}$ 可逆, 从而 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})$, 故

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{B}).$$

Example

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为同阶方阵, $\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵, 且满足 $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^2 = \mathbf{0}$, 证明 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2$ 以及 $\boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{B}^{-1}$ 都是可逆矩阵.

Example

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为同阶方阵, $\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵, 且满足 $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{0}$, 证明 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2$ 以及 $\boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{B}^{-1}$ 都是可逆矩阵.

证: 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵.

Example

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为同阶方阵, $\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵, 且满足 $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{0}$, 证明 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2$ 以及 $\boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{B}^{-1}$ 都是可逆矩阵.

证: 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵. 因为 $\boldsymbol{B}$ 可逆,

Example

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为同阶方阵, $\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵, 且满足 $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{0}$, 证明 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2$ 以及 $\boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{B}^{-1}$ 都是可逆矩阵.

证: 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵. 因为 $\boldsymbol{B}$ 可逆, 所以 $|\boldsymbol{B}| \neq 0$.

Example

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为同阶方阵, $\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵, 且满足 $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{0}$, 证明 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2$ 以及 $\boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{B}^{-1}$ 都是可逆矩阵.

证: 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵. 因为 $\boldsymbol{B}$ 可逆, 所以 $|\boldsymbol{B}| \neq 0$. 而
$\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{0}$

Example

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵, $\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵, 且满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{0}$, 证明 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2$ 以及 $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 都是可逆矩阵.

证: 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵. 因为 $\boldsymbol{B}$ 可逆, 所以 $|\boldsymbol{B}|\neq 0$. 而
$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{0}\Rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=-\boldsymbol{B}^2$,

Example

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵, $\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵, 且满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{0}$, 证明 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2$ 以及 $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 都是可逆矩阵.

证: 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵. 因为 $\boldsymbol{B}$ 可逆, 所以 $|\boldsymbol{B}|\neq 0$. 而

$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{0}\Rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=-\boldsymbol{B}^2$, 两边取行列式得

Example

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为同阶方阵, $\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵, 且满足 $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{0}$, 证明 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2$ 以及 $\boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{B}^{-1}$ 都是可逆矩阵.

证: 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵. 因为 $\boldsymbol{B}$ 可逆, 所以 $|\boldsymbol{B}| \neq 0$. 而 $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = -\boldsymbol{B}^2$, 两边取行列式得

$$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}| = (-1)^n |\boldsymbol{B}|^2$$

Example

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为同阶方阵, $\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵, 且满足 $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{0}$, 证明 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2$ 以及 $\boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{B}^{-1}$ 都是可逆矩阵.

证: 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵. 因为 $\boldsymbol{B}$ 可逆, 所以 $|\boldsymbol{B}| \neq 0$. 而 $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = -\boldsymbol{B}^2$, 两边取行列式得

$$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}| = (-1)^n |\boldsymbol{B}|^2 \neq 0$$

Example

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为同阶方阵, $\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵, 且满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^2=\mathbf{0}$, 证明 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2$ 以及 $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 都是可逆矩阵.

证: 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵. 因为 $\boldsymbol{B}$ 可逆, 所以 $|\boldsymbol{B}| \neq 0$. 而 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^2=\mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=-\boldsymbol{B}^2$, 两边取行列式得

$$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=(-1)^n|\boldsymbol{B}|^2 \neq 0$$

故 $|\boldsymbol{A}| \neq 0, |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| \neq 0,$

Example

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为同阶方阵, $\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵, 且满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^2=\mathbf{0}$, 证明 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2$ 以及 $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 都是可逆矩阵.

证: 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵. 因为 $\boldsymbol{B}$ 可逆, 所以 $|\boldsymbol{B}| \neq 0$. 而 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^2=\mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=-\boldsymbol{B}^2$, 两边取行列式得

$$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=(-1)^n|\boldsymbol{B}|^2 \neq 0$$

故 $|\boldsymbol{A}| \neq 0, |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| \neq 0$, 即 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也可逆.

Example

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为同阶方阵, $\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵, 且满足 $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{0}$, 证明 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2$ 以及 $\boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{B}^{-1}$ 都是可逆矩阵.

证: 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵. 因为 $\boldsymbol{B}$ 可逆, 所以 $|\boldsymbol{B}| \neq 0$. 而 $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = -\boldsymbol{B}^2$, 两边取行列式得

$$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}| = (-1)^n |\boldsymbol{B}|^2 \neq 0$$

故 $|\boldsymbol{A}| \neq 0, |\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}| \neq 0$, 即 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ 也可逆.

又 $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{0}$,

Example

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为同阶方阵, $\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵, 且满足 $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{0}$, 证明 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2$ 以及 $\boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{B}^{-1}$ 都是可逆矩阵.

证: 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵. 因为 $\boldsymbol{B}$ 可逆, 所以 $|\boldsymbol{B}| \neq 0$. 而 $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = -\boldsymbol{B}^2$, 两边取行列式得

$$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}| = (-1)^n |\boldsymbol{B}|^2 \neq 0$$

故 $|\boldsymbol{A}| \neq 0, |\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}| \neq 0$, 即 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ 也可逆.

又 $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{0}$, 得 $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2 = -\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$,

Example

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为同阶方阵, $\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵, 且满足 $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{0}$, 证明 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2$ 以及 $\boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{B}^{-1}$ 都是可逆矩阵.

证: 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵. 因为 $\boldsymbol{B}$ 可逆, 所以 $|\boldsymbol{B}| \neq 0$. 而 $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = -\boldsymbol{B}^2$, 两边取行列式得

$$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}| = (-1)^n |\boldsymbol{B}|^2 \neq 0$$

故 $|\boldsymbol{A}| \neq 0, |\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}| \neq 0$, 即 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ 也可逆.

又 $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{0}$, 得 $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2 = -\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$, 因为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都可逆,

Example

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为同阶方阵, $\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵, 且满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^2=\mathbf{0}$, 证明 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2$ 以及 $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 都是可逆矩阵.

证: 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵. 因为 $\boldsymbol{B}$ 可逆, 所以 $|\boldsymbol{B}| \neq 0$. 而 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^2=\mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=-\boldsymbol{B}^2$, 两边取行列式得

$$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=(-1)^n|\boldsymbol{B}|^2 \neq 0$$

故 $|\boldsymbol{A}| \neq 0, |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| \neq 0$, 即 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也可逆.

又 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^2=\mathbf{0}$, 得 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2=-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$, 因为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都可逆, 所以 $-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 也可逆,

Example

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为同阶方阵, $\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵, 且满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^2=\mathbf{0}$, 证明 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2$ 以及 $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 都是可逆矩阵.

证: 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵. 因为 $\boldsymbol{B}$ 可逆, 所以 $|\boldsymbol{B}| \neq 0$. 而 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^2=\mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=-\boldsymbol{B}^2$, 两边取行列式得

$$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=(-1)^n|\boldsymbol{B}|^2 \neq 0$$

故 $|\boldsymbol{A}| \neq 0, |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| \neq 0$, 即 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也可逆.

又 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^2=\mathbf{0}$, 得 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2=-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$, 因为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都可逆, 所以 $-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 也可逆, 即 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2$ 可逆.

因为

$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$

因为

$$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}$$

因为

$$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}^{-1}$$

因为

$$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}^{-1},$$

因为

$$A^{-1}+B^{-1}=A^{-1}BB^{-1}+A^{-1}AB^{-1}=A^{-1}(B+A)B^{-1}=A^{-1}(A+B)B^{-1},$$

且 $A^{-1},(A+B),B^{-1}$ 都可逆,

因为

$$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}^{-1},$$

且 $\boldsymbol{A}^{-1},(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}),\boldsymbol{B}^{-1}$ 都可逆, 所以 $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 可逆.

求向量组的秩、极大无关组、线性表示式

Example

已知向量组 $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,3,-1,2),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,2,-2,-3),\boldsymbol{\alpha}_3=(5,0,7,-5,-4),\boldsymbol{\alpha}_4=(3,-1,5,-3,-1)$, 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩和一个最大线性无关组, 并将其余向量用极大无关组线性表示.

求向量组的秩、极大无关组、线性表示式

Example

已知向量组 $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,3,-1,2),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,2,-2,-3),\boldsymbol{\alpha}_3=(5,0,7,-5,-4),\boldsymbol{\alpha}_4=(3,-1,5,-3,-1)$, 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩和一个最大线性无关组, 并将其余向量用极大无关组线性表示.

解: 作矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}})$,

Example

已知向量组 $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,3,-1,2),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,2,-2,-3),\boldsymbol{\alpha}_3=(5,0,7,-5,-4),\boldsymbol{\alpha}_4=(3,-1,5,-3,-1)$, 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩和一个最大线性无关组, 并将其余向量用极大无关组线性表示.

解: 作矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}})$, 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换:

Example

已知向量组 $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,3,-1,2),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,2,-2,-3),\boldsymbol{\alpha}_3=(5,0,7,-5,-4),\boldsymbol{\alpha}_4=(3,-1,5,-3,-1)$, 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩和一个最大线性无关组, 并将其余向量用极大无关组线性表示.

解: 作矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}})$, 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&5&3\\-2&1&0&-1\\3&2&7&5\\-1&-2&-5&-3\\2&-3&-4&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+r_1,r_5-2r_1]{r_2+2r_1,r_3-3r_1}\begin{pmatrix}1&2&5&3\\0&5&10&5\\0&-4&-8&-4\\0&0&0&0\\0&-7&-14&-7\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 10 & 5 \\ 0 & -4 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -14 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 10 & 5 \\ 0 & -4 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -14 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由此可知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 10 & 5 \\ 0 & -4 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -14 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

由此可知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 2,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 10 & 5 \\ 0 & -4 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -14 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由此可知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 2，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 是其一个极大无关组，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 10 & 5 \\ 0 & -4 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -14 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由此可知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 2, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 是其一个极大无关组, 且

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 10 & 5 \\ 0 & -4 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -14 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由此可知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 2, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 是其一个极大无关组, 且

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2, \qquad \boldsymbol{\alpha}_4 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2.$$

说明

1. 不管所给向量是行向量还是列向量,

说明

1. 不管所给向量是行向量还是列向量, 总是将它们作为列向量构造矩阵,

说明

1. 不管所给向量是行向量还是列向量, 总是将它们作为列向量构造矩阵, 再对矩阵进行初等行变换.

说明

1. 不管所给向量是行向量还是列向量, 总是将它们作为列向量构造矩阵, 再对矩阵进行初等行变换.
2. 如果题目只要求向量组的秩及极大无关组,

说明

1. 不管所给向量是行向量还是列向量, 总是将它们作为列向量构造矩阵, 再对矩阵进行初等行变换.
2. 如果题目只要求向量组的秩及极大无关组, 那么只需将矩阵化为行阶梯形矩阵即可以得到结果:

说明

1. 不管所给向量是行向量还是列向量, 总是将它们作为列向量构造矩阵, 再对矩阵进行初等行变换.
2. 如果题目只要求向量组的秩及极大无关组, 那么只需将矩阵化为行阶梯形矩阵即可以得到结果: 非零行的行数即为所求的秩,

说明

1. 不管所给向量是行向量还是列向量, 总是将它们作为列向量构造矩阵, 再对矩阵进行初等行变换.
2. 如果题目只要求向量组的秩及极大无关组, 那么只需将矩阵化为行阶梯形矩阵即可以得到结果: 非零行的行数即为所求的秩, 每个非零行的非零首元所在列即为极大无关组.

求抽象的向量组的秩

Example

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geqslant 2)$ 为 n 维向量, 且

$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_m, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_{m-1}$,

设向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 的秩为 r, 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩.

求抽象的向量组的秩

Example

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geqslant 2)$ 为 n 维向量, 且
$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_m, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_{m-1}$,
设向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 的秩为 r, 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩.

解: 由已知可得

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m)$$

求抽象的向量组的秩

Example

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geqslant 2)$ 为 n 维向量, 且
$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_m, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_{m-1}$,
设向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 的秩为 r, 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩.

解: 由已知可得

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$$

求抽象的向量组的秩

Example

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \geqslant 2)$ 为 n 维向量, 且
$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_m, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_{m-1}$,
设向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 的秩为 r, 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩.

解: 由已知可得

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

因为 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

因为 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (m-1)$

因为 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (m-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

因为 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (m-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

$$= (m-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

因为 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (m-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

$$= (m-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{m-1}(m-1) \neq 0.$$

因为 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (m-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

$= (m-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{m-1}(m-1) \neq 0.$ 所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩和向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 的秩相等, 为 r.

另解: 由已知 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_m$,

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_m, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_{m-1},$$

可得

另解: 由已知 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_m$,

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_m, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_{m-1},$$

可得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}_1 &= \frac{1}{m-1}(\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + \boldsymbol{\beta}_m) - \boldsymbol{\beta}_1 \\
\boldsymbol{\alpha}_2 &= \frac{1}{m-1}(\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + \boldsymbol{\beta}_m) - \boldsymbol{\beta}_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\boldsymbol{\alpha}_m &= \frac{1}{m-1}(\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + \boldsymbol{\beta}_m) - \boldsymbol{\beta}_m.
\end{aligned}$$

另解: 由已知 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_m$,

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_m, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_{m-1},$$

可得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}_1 &= \frac{1}{m-1}(\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + \boldsymbol{\beta}_m) - \boldsymbol{\beta}_1 \\
\boldsymbol{\alpha}_2 &= \frac{1}{m-1}(\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + \boldsymbol{\beta}_m) - \boldsymbol{\beta}_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\boldsymbol{\alpha}_m &= \frac{1}{m-1}(\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + \boldsymbol{\beta}_m) - \boldsymbol{\beta}_m.
\end{aligned}$$

即向量组向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 和向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 等价,

另解: 由已知 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_m$,

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_m, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_{m-1},$$

可得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}_1 &= \frac{1}{m-1}(\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + \boldsymbol{\beta}_m) - \boldsymbol{\beta}_1 \\
\boldsymbol{\alpha}_2 &= \frac{1}{m-1}(\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + \boldsymbol{\beta}_m) - \boldsymbol{\beta}_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\boldsymbol{\alpha}_m &= \frac{1}{m-1}(\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + \boldsymbol{\beta}_m) - \boldsymbol{\beta}_m.
\end{aligned}$$

即向量组向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 和向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 等价, 故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩为 r.

线性相关性的判定

Example

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $n \times m$ 矩阵, $\boldsymbol{I}$ 是 n 阶单位矩阵, 已知 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$, 试判断 $\boldsymbol{A}$ 的列向量是否线性相关? 为什么?

Example

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $n \times m$ 矩阵, $\boldsymbol{I}$ 是 n 阶单位矩阵, 已知 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$, 试判断 $\boldsymbol{A}$ 的列向量是否线性相关? 为什么?

解: 因为 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$, 所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{BA}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{I}) = n$

线性相关性的判定

Example

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $n \times m$ 矩阵, $\boldsymbol{I}$ 是 n 阶单位矩阵, 已知 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$, 试判断 $\boldsymbol{A}$ 的列向量是否线性相关? 为什么?

解: 因为 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$, 所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{BA}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{I}) = n$

又因为 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵, 所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \leqslant n$.

Example

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵, $\boldsymbol{I}$ 是 n 阶单位矩阵, 已知 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$, 试判断 $\boldsymbol{A}$ 的列向量是否线性相关? 为什么?

解: 因为 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$, 所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\geqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{BA})=\mathrm{r}(\boldsymbol{I})=n$

又因为 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, 所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\leqslant n$.

从而得到 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关.

带参数的线性方程组解的讨论

Example

设有线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda - 1. \end{cases}$ 问 λ 取何值时, 方程组有唯一解、无解或有无穷多解? 并在有无穷多解时求其通解.

Example

设有线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda - 1. \end{cases}$ 问 λ 取何值时, 方程组有唯一解、无解或有无穷多解? 并在有无穷多解时求其通解.

解: 对方程组的增广矩阵进行初等行变换

带参数的线性方程组解的讨论

Example

设有线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda - 1. \end{cases}$ 问 λ 取何值时, 方程组有唯一解、无解或有无穷多解? 并在有无穷多解时求其通解.

解: 对方程组的增广矩阵进行初等行变换

$$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 & 3 \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda - 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda - 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 3 \\ \lambda & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 - \lambda r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda - 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda & 4 - \lambda \\ 0 & 1 - \lambda & 1 - \lambda^2 & \lambda(1 - \lambda) \end{array}\right)$$

$$
\left(\begin{array}{ccc:c}
1 & 1 & \lambda & \lambda-1 \\
0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 4-\lambda \\
0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & \lambda(1-\lambda)
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{r_3+r_2}
\left(\begin{array}{ccc:c}
1 & 1 & \lambda & \lambda-1 \\
0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 4-\lambda \\
0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & 4-\lambda^2
\end{array}\right)
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc:c}
1 & 1 & \lambda & \lambda-1 \\
0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 4-\lambda \\
0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & \lambda(1-\lambda)
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc:c}
1 & 1 & \lambda & \lambda-1 \\
0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 4-\lambda \\
0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & 4-\lambda^2
\end{array}\right)
$$

(1) 当 $(1-\lambda)(2+\lambda)\neq 0$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & \lambda & \lambda-1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 4-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & \lambda(1-\lambda) \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & \lambda & \lambda-1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 4-\lambda \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & 4-\lambda^2 \end{array}\right)$$

(1) 当 $(1-\lambda)(2+\lambda) \neq 0$ 即 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$ 时,

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & \lambda & \lambda-1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 4-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & \lambda(1-\lambda) \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & \lambda & \lambda-1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 4-\lambda \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & 4-\lambda^2 \end{array}\right)$$

(1) 当 $(1-\lambda)(2+\lambda)\neq 0$ 即 $\lambda\neq 1$ 且 $\lambda\neq -2$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3$,

$$
\left(\begin{array}{ccc:c}
1 & 1 & \lambda & \lambda-1 \\
0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 4-\lambda \\
0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & \lambda(1-\lambda)
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{r_3+r_2}
\left(\begin{array}{ccc:c}
1 & 1 & \lambda & \lambda-1 \\
0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 4-\lambda \\
0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & 4-\lambda^2
\end{array}\right)
$$

(1) 当 $(1-\lambda)(2+\lambda) \neq 0$ 即 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 3$, 此时方程组有唯一解.

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & \lambda & \lambda-1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 4-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & \lambda(1-\lambda) \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & \lambda & \lambda-1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 4-\lambda \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & 4-\lambda^2 \end{array}\right)$$

(1) 当 $(1-\lambda)(2+\lambda) \neq 0$ 即 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 3$, 此时方程组有唯一解.

(2) 当 $(1-\lambda)(2+\lambda) = 0$ 且 $4-\lambda^2 \neq 0$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda-1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 4-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & \lambda(1-\lambda) \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda-1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 4-\lambda \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & 4-\lambda^2 \end{pmatrix}$$

(1) 当 $(1-\lambda)(2+\lambda) \neq 0$ 即 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 3$, 此时方程组有唯一解.

(2) 当 $(1-\lambda)(2+\lambda) = 0$ 且 $4-\lambda^2 \neq 0$, 即 $\lambda = 1$ 时,

$$
\left(\begin{array}{ccc:c}
1 & 1 & \lambda & \lambda-1 \\
0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 4-\lambda \\
0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & \lambda(1-\lambda)
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc:c}
1 & 1 & \lambda & \lambda-1 \\
0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 4-\lambda \\
0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & 4-\lambda^2
\end{array}\right)
$$

(1) 当 $(1-\lambda)(2+\lambda)\neq 0$ 即 $\lambda\neq 1$ 且 $\lambda\neq -2$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3$, 此时方程组有唯一解.

(2) 当 $(1-\lambda)(2+\lambda)=0$ 且 $4-\lambda^2\neq 0$, 即 $\lambda=1$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\neq\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$,

$$
\left(\begin{array}{ccc:c}
1 & 1 & \lambda & \lambda-1 \\
0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 4-\lambda \\
0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & \lambda(1-\lambda)
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc:c}
1 & 1 & \lambda & \lambda-1 \\
0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 4-\lambda \\
0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & 4-\lambda^2
\end{array}\right)
$$

(1) 当 $(1-\lambda)(2+\lambda)\neq 0$ 即 $\lambda\neq 1$ 且 $\lambda\neq -2$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3$, 此时方程组有唯一解.

(2) 当 $(1-\lambda)(2+\lambda)=0$ 且 $4-\lambda^2\neq 0$, 即 $\lambda=1$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\neq\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$, 此时方程组无解.

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & \lambda & \lambda-1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 4-\lambda \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & 4-\lambda^2 \end{array}\right)$$

$$
\left(\begin{array}{ccc:c}
1 & 1 & \lambda & \lambda-1 \\
0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 4-\lambda \\
0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & 4-\lambda^2
\end{array}\right)
$$

(3) 当 $(1-\lambda)(2+\lambda)=0$ 且 $4-\lambda^2=0$,

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & \lambda & \lambda-1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 4-\lambda \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & 4-\lambda^2 \end{array}\right)$$

(3) 当 $(1-\lambda)(2+\lambda)=0$ 且 $4-\lambda^2=0$, 即 $\lambda=-2$ 时,

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & \lambda & \lambda-1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 4-\lambda \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & 4-\lambda^2 \end{array}\right)$$

(3) 当 $(1-\lambda)(2+\lambda)=0$ 且 $4-\lambda^2=0$, 即 $\lambda=-2$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2<3$,

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & \lambda & \lambda-1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 4-\lambda \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & 4-\lambda^2 \end{array}\right)$$

(3) 当 $(1-\lambda)(2+\lambda)=0$ 且 $4-\lambda^2=0$, 即 $\lambda=-2$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2<3$, 此时方程组有无穷多解,

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & \lambda & \lambda-1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 4-\lambda \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & 4-\lambda^2 \end{array}\right)$$

(3) 当 $(1-\lambda)(2+\lambda)=0$ 且 $4-\lambda^2=0$, 即 $\lambda=-2$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2<3$, 此时方程组有无穷多解, 因为

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc:c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以同解方程组为

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = x_3 - 1 \\ x_2 = x_3 - 2 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = x_3 - 1 \\ x_2 = x_3 - 2 \end{cases}$ 取 $x_3 = k$,

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = x_3 - 1 \\ x_2 = x_3 - 2 \end{cases}$ 取 $x_3 = k$, 得方程组的通解为

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

所以同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = x_3 - 1 \\ x_2 = x_3 - 2 \end{cases}$ 取 $x_3 = k$, 得方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k-1 \\ k-2 \\ k \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} (k\text{为任意常数}).$$

另解: 方程组的系数行列式

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

另解: 方程组的系数行列式

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 2)$$

另解: 方程组的系数行列式

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

另解: 方程组的系数行列式

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

另解: 方程组的系数行列式

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+2)(\lambda-1)^2.$$

另解: 方程组的系数行列式

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+2)(\lambda-1)^2.$$

由 Cramer 法则知:

另解: 方程组的系数行列式

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+2)(\lambda-1)^2.$$

由 Cramer 法则知:

(1) 当 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$,

另解: 方程组的系数行列式

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+2)(\lambda-1)^2.$$

由 Cramer 法则知:

(1) 当 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 即 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$ 时,

另解: 方程组的系数行列式

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+2)(\lambda-1)^2.$$

由 Cramer 法则知:

(1) 当 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 即 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$ 时, 方程组有唯一解.

(2) 当 $\lambda = 1$ 时,

(2) 当 $\lambda = 1$ 时, 由

$$\boldsymbol{B} = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

(2) 当 $\lambda=1$ 时, 由

$$\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}$$

(2) 当 $\lambda = 1$ 时, 由

$$\boldsymbol{B} = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

(2) 当 $\lambda = 1$ 时, 由

$$\boldsymbol{B} = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \rightarrow$$

(2) 当 $\lambda=1$ 时, 由

$$\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(2) 当 $\lambda = 1$ 时, 由

$$\boldsymbol{B} = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

可知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) \neq \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$,

(2) 当 $\lambda = 1$ 时, 由

$$\boldsymbol{B} = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

可知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) \neq \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$, 所以方程组无解.

(3) 当 $\lambda = -2$ 时,

(3) 当 $\lambda=-2$ 时, 由

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc:c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

(3) 当 $\lambda=-2$ 时, 由

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc:c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(3) 当 $\lambda = -2$ 时, 由

$$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc:c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(3) 当 $\lambda=-2$ 时, 由

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc:c}-2&1&1&0\\1&-2&1&3\\1&1&-2&-3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-2&3\\0&-3&3&6\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&1\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

可知同解方程组为

(3) 当 $\lambda=-2$ 时, 由

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc:c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

可知同解方程组为 $\begin{cases} x_1=x_3-1 \\ x_2=x_3-2 \end{cases}$

(3) 当 $\lambda=-2$ 时, 由

$$B=(A,b)=\left(\begin{array}{ccc|c}-2&1&1&0\\1&-2&1&3\\1&1&-2&-3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&3\\0&-3&3&6\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&1\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

可知同解方程组为 $\begin{cases}x_1=x_3-1\\x_2=x_3-2\end{cases}$ 取 $x_3=k$, 得方程组的通解为

(3) 当 $\lambda=-2$ 时, 由

$$B=(A,b)=\left(\begin{array}{ccc:c}-2&1&1&0\\1&-2&1&3\\1&1&-2&-3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-2&3\\0&-3&3&6\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&1\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

可知同解方程组为 $\begin{cases}x_1=x_3-1\\x_2=x_3-2\end{cases}$ 取 $x_3=k$, 得方程组的通解为

$$(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=(k-1,k-2,k)^{\mathrm{T}}=k(1,1,1)^{\mathrm{T}}+(-1,-2,0)^{\mathrm{T}}(k\text{为任意常数.})$$

关于求解带参数的线性方程组,

关于求解带参数的线性方程组, 推荐使用第二种方法,

关于求解带参数的线性方程组, 推荐使用第二种方法, 但一定要注意能用解法二的条件

关于求解带参数的线性方程组, 推荐使用第二种方法, 但一定要注意能用解法二的条件 (系数矩阵为方阵)

关于求解带参数的线性方程组, 推荐使用第二种方法, 但一定要注意能用解法二的条件 (系数矩阵为方阵) 及其理论依据

关于求解带参数的线性方程组, 推荐使用第二种方法, 但一定要注意能用解法二的条件 (系数矩阵为方阵) 及其理论依据 (克拉默法则).

关于求解带参数的线性方程组, 推荐使用第二种方法, 但一定要注意能用解法二的条件 (系数矩阵为方阵) 及其理论依据 (克拉默法则).

如果使用初等变换的方法 (第一种方法),

关于求解带参数的线性方程组, 推荐使用第二种方法, 但一定要注意能用解法二的条件 (系数矩阵为方阵) 及其理论依据 (克拉默法则).

如果使用初等变换的方法 (第一种方法), 一定要避免参数作分母的情况.

Example

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$. 已知线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 存在两个不同的解,

(1) 求 λ, a;

(2) 求方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

Example

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$. 已知线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 存在两个不同的解,

(1) 求 λ, a;

(2) 求方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

解: 由条件可知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<3$, 而

Example

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$. 已知线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 存在两个不同的解,

(1) 求 λ, a;

(2) 求方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

解: 由条件可知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<3$, 而

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc:c}\lambda & 1 & 1 & a\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & \lambda & 1\end{array}\right)$$

Example

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$. 已知线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 存在两个不同的解,

(1) 求 λ, a;

(2) 求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

解: 由条件可知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<3$, 而

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc:c}\lambda & 1 & 1 & a\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & \lambda & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & a-\lambda+1\end{array}\right)$$

所以有:

所以有: $\begin{cases} \lambda - 1 \neq 0 \\ \\ \end{cases}$

所以有: $\begin{cases} \lambda - 1 \neq 0 \\ 1 - \lambda^2 = 0 \\ \end{cases}$

所以有: $\begin{cases} \lambda - 1 \neq 0 \\ 1 - \lambda^2 = 0 \\ a - \lambda + 1 = 0 \end{cases}$

所以有: $\begin{cases} \lambda - 1 \neq 0 \\ 1 - \lambda^2 = 0 \\ a - \lambda + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ a = -2 \end{cases}$

此时

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

此时

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

此时

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

于是方程组的通解为

此时

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

于是方程组的通解为 $\begin{cases} x_1 = k + \frac{3}{2} \\ x_2 = -\frac{1}{2} \\ x_3 = k \end{cases}$ (k 为任意常数).

另解: 由条件有 $|\boldsymbol{A}|$

另解: 由条件有 $|\boldsymbol{A}| = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$

另解: 由条件有 $|\boldsymbol{A}| = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0$, 即

另解: 由条件有 $|\boldsymbol{A}| = (\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0$, 即 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = -1$.

另解: 由条件有 $|\boldsymbol{A}| = (\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0$, 即 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = -1$.

当 $\lambda = 1$ 时, 第二个方程为

另解: 由条件有 $|\boldsymbol{A}| = (\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0$, 即 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = -1$.

当 $\lambda = 1$ 时, 第二个方程为 $0 = 1$, 为矛盾方程,

另解: 由条件有 $|\boldsymbol{A}| = (\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$, 即 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-1$.

当 $\lambda=1$ 时, 第二个方程为 $0=1$, 为矛盾方程, 不符合条件, 故舍去.

另解: 由条件有 $|\boldsymbol{A}| = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0$, 即 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = -1$.

当 $\lambda = 1$ 时, 第二个方程为 $0 = 1$, 为矛盾方程, 不符合条件, 故舍去.

当 $\lambda = -1$ 时,

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

另解: 由条件有 $|\boldsymbol{A}| = (\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0$, 即 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = -1$.

当 $\lambda = 1$ 时, 第二个方程为 $0 = 1$, 为矛盾方程, 不符合条件, 故舍去.

当 $\lambda = -1$ 时,

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:r} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{array}\right)$$

另解: 由条件有 $|\boldsymbol{A}| = (\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0$, 即 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = -1$.

当 $\lambda = 1$ 时, 第二个方程为 $0 = 1$, 为矛盾方程, 不符合条件, 故舍去.

当 $\lambda = -1$ 时,

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:r} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{array}\right)$$

由条件知: $a = -2$,

另解: 由条件有 $|\boldsymbol{A}| = (\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0$, 即 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = -1$.

当 $\lambda = 1$ 时, 第二个方程为 $0 = 1$, 为矛盾方程, 不符合条件, 故舍去.

当 $\lambda = -1$ 时,

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{array}\right)$$

由条件知: $a = -2$, 且由上述最简形矩阵可知方程组的通解为

另解: 由条件有 $|\boldsymbol{A}| = (\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0$, 即 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = -1$.

当 $\lambda = 1$ 时, 第二个方程为 $0 = 1$, 为矛盾方程, 不符合条件, 故舍去.

当 $\lambda = -1$ 时,

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{array}\right)$$

由条件知: $a = -2$, 且由上述最简形矩阵可知方程组的通解为

$$x_1 = k + \frac{3}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = k(k\text{为任意常数.})$$

向量空间与线性变换

(1) 基的定义及判定, 求向量在给定基下的坐标, 过渡矩阵;

(1) 基的定义及判定, 求向量在给定基下的坐标, 过渡矩阵;

(2) 内积, Schmidt 正交化方法, 正交矩阵的定义及判定;

向量空间与线性变换

(1) 基的定义及判定, 求向量在给定基下的坐标, 过渡矩阵;

(2) 内积, Schmidt 正交化方法, 正交矩阵的定义及判定;

(3) 线性变换的定义;

向量空间与线性变换

(1) 基的定义及判定, 求向量在给定基下的坐标, 过渡矩阵;

(2) 内积, Schmidt 正交化方法, 正交矩阵的定义及判定;

(3) 线性变换的定义;

(4) 线性变换在给定基下的矩阵及同一线性变换在不同基下的矩阵间的关系.

Example

设 $\mathbb{R}^3$ 的三组基分别为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix};\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix};$$

且线性变换 T 把基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 映到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$.

(1) 求基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵;

(2) 求 T 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵;

(3) 求 T 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵;

(4) 求 $T\big(T(\boldsymbol{\alpha}_1)\big)$.

解: (1) 设所求过渡矩阵为 $\boldsymbol{A}$,

解: (1) 设所求过渡矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 由 $(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A}$ 可得:

解: (1) 设所求过渡矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 由 $(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A}$ 可得:

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(2) 设 T 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{B}$, 即

(2) 设 T 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{B}$, 即

$$T(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = (T\boldsymbol{\alpha}_1, T\boldsymbol{\alpha}_2, T\boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{B},$$

(2) 设 T 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{B}$, 即

$$T(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = (T\boldsymbol{\alpha}_1, T\boldsymbol{\alpha}_2, T\boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{B},$$

而 $(T\boldsymbol{\alpha}_1, T\boldsymbol{\alpha}_2, T\boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)$,

(2) 设 T 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{B}$, 即

$$T(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = (T\boldsymbol{\alpha}_1, T\boldsymbol{\alpha}_2, T\boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{B},$$

而 $(T\boldsymbol{\alpha}_1, T\boldsymbol{\alpha}_2, T\boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)$, 所以

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) 设 T 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{B}$, 即

$$T(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = (T\boldsymbol{\alpha}_1, T\boldsymbol{\alpha}_2, T\boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{B},$$

而 $(T\boldsymbol{\alpha}_1, T\boldsymbol{\alpha}_2, T\boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)$, 所以

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(3) 设由基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{C}$, 因为

(3) 设由基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{C}$, 因为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3,$$

(3) 设由基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{C}$, 因为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3,$$

所以 $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(3) 设由基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{C}$, 因为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3,$$

所以 $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 于是 T 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵

(3) 设由基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{C}$, 因为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3,$$

所以 $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 于是 T 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵

$$\boldsymbol{D} =$$

(3) 设由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{C}$, 因为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_2=\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3=\boldsymbol{\alpha}_3,$$

所以 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 于是 T 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4) 由已知 $T(\boldsymbol{\alpha}_1)$

(4) 由已知 $T(\boldsymbol{\alpha}_1)=(1,0,2)^{\mathrm{T}}$

(4) 由已知 $T(\boldsymbol{\alpha}_1) = (1, 0, 2)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3$,

(4) 由已知 $T(\boldsymbol{\alpha}_1) = (1,0,2)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3$, 所以

$T(T(\boldsymbol{\alpha}_1))$

(4) 由已知 $T(\boldsymbol{\alpha}_1) = (1,0,2)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3$, 所以

$$T(T(\boldsymbol{\alpha}_1)) = T(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3)$$

(4) 由已知 $T(\boldsymbol{\alpha}_1) = (1, 0, 2)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3$, 所以

$$T(T(\boldsymbol{\alpha}_1)) = T(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3) = T(\boldsymbol{\alpha}_1) + T(\boldsymbol{\alpha}_3)$$

(4) 由已知 $T(\boldsymbol{\alpha}_1)=(1,0,2)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$, 所以

$$T(T(\boldsymbol{\alpha}_1))=T(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3)=T(\boldsymbol{\alpha}_1)+T(\boldsymbol{\alpha}_3)=(1,0,2)^{\mathrm{T}}+(1,0,0)^{\mathrm{T}}=(2,0,2)^{\mathrm{T}}.$$

Example

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, $\boldsymbol{\beta}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + 2k\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\beta}_2 = 2\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + (k+1)\boldsymbol{\alpha}_3$.

Example

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, $\boldsymbol{\beta}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + 2k\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\beta}_2 = 2\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + (k+1)\boldsymbol{\alpha}_3$.

(I) 证明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基.

Example

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, $\boldsymbol{\beta}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + 2k\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\beta}_2 = 2\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + (k+1)\boldsymbol{\alpha}_3$.

(I) 证明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基.

(II) 当 k 为何值时, 存在非零向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 与基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标相同, 并求出所有的 $\boldsymbol{\xi}$.

Example

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, $\boldsymbol{\beta}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + 2k\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\beta}_2 = 2\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + (k+1)\boldsymbol{\alpha}_3$.

(I) 证明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基.

(II) 当 k 为何值时, 存在非零向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 与基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标相同, 并求出所有的 $\boldsymbol{\xi}$.

解: (I) 由

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{pmatrix},$$

Example

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, $\boldsymbol{\beta}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + 2k\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\beta}_2 = 2\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + (k+1)\boldsymbol{\alpha}_3$.

(I) 证明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基.

(II) 当 k 为何值时, 存在非零向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 与基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标相同, 并求出所有的 $\boldsymbol{\xi}$.

解: (I) 由

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{pmatrix},$$

且

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 - kr_1} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

Example

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, $\boldsymbol{\beta}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + 2k\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\beta}_2 = 2\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + (k+1)\boldsymbol{\alpha}_3$.

(I) 证明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基.

(II) 当 k 为何值时, 存在非零向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 与基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标相同, 并求出所有的 $\boldsymbol{\xi}$.

解: (I) 由

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{pmatrix},$$

且

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 - kr_1} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0,$$

Example

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, $\boldsymbol{\beta}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + 2k\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\beta}_2 = 2\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + (k+1)\boldsymbol{\alpha}_3$.

(I) 证明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基.

(II) 当 k 为何值时, 存在非零向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 与基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标相同, 并求出所有的 $\boldsymbol{\xi}$.

解: (I) 由

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{pmatrix},$$

且

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 - kr_1} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0,$$

得证向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基.

(II) 由

$$\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(II) 由

$$\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(II) 由

$$\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}.$$

(II) 由

$$\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

得

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

(II) 由

$$\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}.$$

得

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\qquad \text{即}\quad \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\2k&0&k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0. \tag{1}$$

注意到 $\boldsymbol{\xi}$ 为非零向量, 故 $(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} \neq \mathbf{0}$,

注意到 $\boldsymbol{\xi}$ 为非零向量, 故 $(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} \neq \mathbf{0}$, 即上述齐次方程组 (1) 有非零解,

注意到 $\boldsymbol{\xi}$ 为非零向量, 故 $(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} \neq \mathbf{0}$, 即上述齐次方程组 (1) 有非零解, 从而

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2k & 0 & k \end{vmatrix} = -k = 0.$$

注意到 $\boldsymbol{\xi}$ 为非零向量, 故 $(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} \neq \mathbf{0}$, 即上述齐次方程组 (1) 有非零解, 从而

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2k & 0 & k \end{vmatrix} = -k = 0.$$

将 $k = 0$ 代入齐次方程组 (1), 解得

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c \neq 0, c \in \mathbb{R}.$$

注意到 $\boldsymbol{\xi}$ 为非零向量, 故 $(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} \neq \mathbf{0}$, 即上述齐次方程组 (1) 有非零解, 从而

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2k & 0 & k \end{vmatrix} = -k = 0.$$

将 $k = 0$ 代入齐次方程组 (1), 解得

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c \neq 0, c \in \mathbb{R}.$$

故所求向量为 $\boldsymbol{\xi} = c\boldsymbol{\alpha}_1 - c\boldsymbol{\alpha}_3$, 其中 c 为非零常数. □

相似矩阵及二次型

1. 求方阵的特征值与特征向量;

相似矩阵及二次型

1. 求方阵的特征值与特征向量;
2. 特征值与特征向量的性质;

相似矩阵及二次型

1. 求方阵的特征值与特征向量;
2. 特征值与特征向量的性质;
3. 判断矩阵是否能对角化; 实对称矩阵的对角化;

相似矩阵及二次型

1. 求方阵的特征值与特征向量;
2. 特征值与特征向量的性质;
3. 判断矩阵是否能对角化; 实对称矩阵的对角化;
4. 二次型的矩阵, 二次型的秩;

相似矩阵及二次型

1. 求方阵的特征值与特征向量;
2. 特征值与特征向量的性质;
3. 判断矩阵是否能对角化; 实对称矩阵的对角化;
4. 二次型的矩阵, 二次型的秩;
5. 二次型化标准形 (重点掌握正交变换法);

相似矩阵及二次型

1. 求方阵的特征值与特征向量;
2. 特征值与特征向量的性质;
3. 判断矩阵是否能对角化; 实对称矩阵的对角化;
4. 二次型的矩阵, 二次型的秩;
5. 二次型化标准形 (重点掌握正交变换法);
6. 二次型 (矩阵) 的正定性的判定.

判定能否对角化

Example

设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重根, 求 a 的值, 并讨论 $\boldsymbol{A}$ 是否可相似对角化.

判定能否对角化

Example

设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重根, 求 a 的值, 并讨论 $\boldsymbol{A}$ 是否可相似对角化.

解: $|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}|$

Example

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&5&5\\0&4&3\\0&a&2\end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重根, 求 a 的值, 并讨论 $\boldsymbol{A}$ 是否可相似对角化.

解: $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}1-\lambda&5&5\\0&4-\lambda&3\\0&a&2-\lambda\end{vmatrix}$

判定能否对角化

Example

设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重根, 求 a 的值, 并讨论 $\boldsymbol{A}$ 是否可相似对角化.

解: $|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 & 5 \\ 0 & 4-\lambda & 3 \\ 0 & a & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[(4-\lambda)(2-\lambda) - 3a]$

判定能否对角化

Example

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&5&5\\0&4&3\\0&a&2\end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重根, 求 a 的值, 并讨论 $\boldsymbol{A}$ 是否可相似对角化.

解: $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}1-\lambda&5&5\\0&4-\lambda&3\\0&a&2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)[(4-\lambda)(2-\lambda)-3a]=(1-\lambda)[\lambda^2-6\lambda+8-3a]$.

如果 $\lambda = 1$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程的二重根,

如果 $\lambda = 1$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程的二重根, 则有

$$1 - 6 + 8 - 3a = 0$$

如果 $\lambda = 1$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程的二重根, 则有

$$1 - 6 + 8 - 3a = 0 \Rightarrow a = 1.$$

如果 $\lambda = 1$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程的二重根, 则有

$$1 - 6 + 8 - 3a = 0 \Rightarrow a = 1.$$

此时 $|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}|$

如果 $\lambda = 1$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程的二重根, 则有

$$1 - 6 + 8 - 3a = 0 \Rightarrow a = 1.$$

此时 $|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = (1 - \lambda)[\lambda^2 - 6\lambda + 5]$

如果 $\lambda = 1$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程的二重根, 则有

$$1 - 6 + 8 - 3a = 0 \Rightarrow a = 1.$$

此时 $|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = (1-\lambda)[\lambda^2 - 6\lambda + 5] = (1-\lambda)^2(5-\lambda)$,

如果 $\lambda = 1$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程的二重根, 则有

$$1 - 6 + 8 - 3a = 0 \Rightarrow a = 1.$$

此时 $|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = (1-\lambda)[\lambda^2 - 6\lambda + 5] = (1-\lambda)^2(5-\lambda)$, $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

如果 $\lambda = 1$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程的二重根, 则有

$$1 - 6 + 8 - 3a = 0 \Rightarrow a = 1.$$

此时 $|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = (1-\lambda)[\lambda^2 - 6\lambda + 5] = (1-\lambda)^2(5-\lambda)$, $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 5$.

因为 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}$

因为 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

因为 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

因为 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=1$,

因为 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=1$，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于二重特征值 1 的线性无关的特征向量有

因为 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=1$, 所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于二重特征值 1 的线性无关的特征向量有 2 个,

因为 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=1$, 所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于二重特征值 1 的线性无关的特征向量有 2 个, 从而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化.

如果 $\lambda = 1$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程的二重根,

如果 $\lambda = 1$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程的二重根, 则 $\lambda^2 - 6\lambda + 8 - 3a$ 应为一完全平方,

如果 $\lambda=1$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程的二重根, 则 $\lambda^2-6\lambda+8-3a$ 应为一完全平方, 从而 $8-3a=9$

如果 $\lambda=1$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程的二重根, 则 $\lambda^2-6\lambda+8-3a$ 应为一完全平方, 从而 $8-3a=9 \Rightarrow a=-\dfrac{1}{3}$.

如果 $\lambda=1$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程的二重根, 则 $\lambda^2-6\lambda+8-3a$ 应为一完全平方, 从而 $8-3a=9 \Rightarrow a=-\dfrac{1}{3}$. 此时 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|$

如果 $\lambda = 1$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程的二重根, 则 $\lambda^2 - 6\lambda + 8 - 3a$ 应为一完全平方, 从而 $8 - 3a = 9 \Rightarrow a = -\dfrac{1}{3}$. 此时 $|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = (1 - \lambda)(\lambda - 3)^2$,

如果 $\lambda=1$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程的二重根, 则 $\lambda^2-6\lambda+8-3a$ 应为一完全平方, 从而 $8-3a=9 \Rightarrow a=-\dfrac{1}{3}$. 此时 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=(1-\lambda)(\lambda-3)^2$, $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

如果 $\lambda=1$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程的二重根, 则 $\lambda^2-6\lambda+8-3a$ 应为一完全平方, 从而 $8-3a=9 \Rightarrow a=-\dfrac{1}{3}$. 此时 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=(1-\lambda)(\lambda-3)^2$, $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=3, \lambda_3=1$.

因为 $\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{I}$

因为 $\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} -2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -\dfrac{1}{3} & -1 \end{pmatrix}$

因为 $\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} -2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -\dfrac{1}{3} & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

因为 $\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} -2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})=2$,

因为 $\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} -2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -\dfrac{1}{3} & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})=2$, 所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于二重特征值 3 的线性无关的特征向量只有 1 个,

因为 $\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} -2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -\dfrac{1}{3} & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})=2$, 所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于二重特征值 3 的线性无关的特征向量只有 1 个, 从而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不能相似对角化.

因为 $\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} -2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -\dfrac{1}{3} & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})=2$, 所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于二重特征值 3 的线性无关的特征向量只有 1 个, 从而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不能相似对角化.

Example

证明 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.

Example

证明 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.

证: 通过讨论 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似于同一个对角阵来证明结论.

Example

证明 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.

证: 通过讨论 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似于同一个对角阵来证明结论.

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \lambda-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-n)\lambda^{n-1}.$$

Example

证明 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.

证: 通过讨论 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似于同一个对角阵来证明结论.

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \lambda-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-n)\lambda^{n-1}.$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=n$, $\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$.

Example

证明 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.

证: 通过讨论 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似于同一个对角阵来证明结论.

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \lambda-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-n)\lambda^{n-1}.$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=n$, $\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$. 又 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 必可以对角化,

Example

证明 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.

证: 通过讨论 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似于同一个对角阵来证明结论.

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \lambda-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-n)\lambda^{n-1}.$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=n$, $\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$. 又 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 必可以对角化, 故 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\operatorname{diag}(n,0,\cdots,0)$.

$$
|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} \lambda & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda - n \end{vmatrix} = (\lambda - n)\lambda^{n-1}.
$$

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} \lambda & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda - n \end{vmatrix} = (\lambda - n)\lambda^{n-1}.$$

故 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1 = n$, $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} \lambda & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda - n \end{vmatrix} = (\lambda - n)\lambda^{n-1}.$$

故 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1 = n$, $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

下面说明 $n-1$ 重特征值 $\lambda = 0$, 正好对应 $n-1$ 个线性无关的特征向量,

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} \lambda & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda - n \end{vmatrix} = (\lambda - n)\lambda^{n-1}.$$

故 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1 = n$, $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

下面说明 $n-1$ 重特征值 $\lambda = 0$, 正好对应 $n-1$ 个线性无关的特征向量, 从而 $\boldsymbol{B}$ 可对角化.

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} \lambda & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda - n \end{vmatrix} = (\lambda - n)\lambda^{n-1}.$$

故 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1 = n$, $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

下面说明 $n-1$ 重特征值 $\lambda = 0$, 正好对应 $n-1$ 个线性无关的特征向量, 从而 $\boldsymbol{B}$ 可对角化.

事实上, 当 $\lambda = 0$ 时, 方程组 $(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 即 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$,

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} \lambda & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda - n \end{vmatrix} = (\lambda - n)\lambda^{n-1}.$$

故 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1 = n$, $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

下面说明 $n-1$ 重特征值 $\lambda = 0$, 正好对应 $n-1$ 个线性无关的特征向量, 从而 $\boldsymbol{B}$ 可对角化.

事实上, 当 $\lambda = 0$ 时, 方程组 $(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 即 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, 而 $\boldsymbol{B}$ 的秩为 1,

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} \lambda & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda - n \end{vmatrix} = (\lambda - n)\lambda^{n-1}.$$

故 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1 = n$, $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

下面说明 $n-1$ 重特征值 $\lambda = 0$, 正好对应 $n-1$ 个线性无关的特征向量, 从而 $\boldsymbol{B}$ 可对角化.

事实上, 当 $\lambda = 0$ 时, 方程组 $(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 即 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 而 $\boldsymbol{B}$ 的秩为 1, 故 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系由 $n-1$ 个向量构成.

$$
|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} \lambda & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda - n \end{vmatrix} = (\lambda - n)\lambda^{n-1}.
$$

故 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1 = n$, $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

下面说明 $n-1$ 重特征值 $\lambda = 0$, 正好对应 $n-1$ 个线性无关的特征向量, 从而 $\boldsymbol{B}$ 可对角化.

事实上, 当 $\lambda = 0$ 时, 方程组 $(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 即 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 而 $\boldsymbol{B}$ 的秩为 1, 故 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系由 $n-1$ 个向量构成. 即 $n-1$ 重特征值 $\lambda = 0$ 对应 $n-1$ 个线性无关的特征向量.

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix} \lambda & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda-n \end{vmatrix}=(\lambda-n)\lambda^{n-1}.$$

故 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1=n,\ \lambda_2=\cdots=\lambda_n=0.$

下面说明 $n-1$ 重特征值 $\lambda=0$, 正好对应 $n-1$ 个线性无关的特征向量, 从而 $\boldsymbol{B}$ 可对角化.

事实上, 当 $\lambda=0$ 时, 方程组 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 即 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 而 $\boldsymbol{B}$ 的秩为 1, 故 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系由 $n-1$ 个向量构成. 即 $n-1$ 重特征值 $\lambda=0$ 对应 $n-1$ 个线性无关的特征向量.

故 $\boldsymbol{B}$ 也相似于 $\mathrm{diag}(n,0,\cdots,0)$,

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} \lambda & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda - n \end{vmatrix} = (\lambda - n)\lambda^{n-1}.$$

故 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1 = n$, $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

下面说明 $n-1$ 重特征值 $\lambda = 0$, 正好对应 $n-1$ 个线性无关的特征向量, 从而 $\boldsymbol{B}$ 可对角化.

事实上, 当 $\lambda = 0$ 时, 方程组 $(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 即 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 而 $\boldsymbol{B}$ 的秩为 1, 故 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系由 $n-1$ 个向量构成. 即 $n-1$ 重特征值 $\lambda = 0$ 对应 $n-1$ 个线性无关的特征向量.

故 $\boldsymbol{B}$ 也相似于 $\mathrm{diag}(n, 0, \cdots, 0)$, 得证矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$. □

Example (2015 年 7 月期末试题)

设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为 1, 2, -3, 矩阵 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^3 - 7\boldsymbol{A} + 5\boldsymbol{I}$, 求 $\boldsymbol{B}$.

Example (2015 年 7 月期末试题)

设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为 1, 2, -3, 矩阵 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^3 - 7\boldsymbol{A} + 5\boldsymbol{I}$, 求 $\boldsymbol{B}$.

解: 因 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个不同的特征值, 故 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

Example (2015 年 7 月期末试题)

设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为 1, 2, -3, 矩阵 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^3 - 7\boldsymbol{A} + 5\boldsymbol{I}$, 求 $\boldsymbol{B}$.

解: 因 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个不同的特征值, 故 $\boldsymbol{A}$ 可对角化. 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda} \triangleq \mathrm{diag}(1, 2, -3).$$

Example (2015 年 7 月期末试题)

设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为 1, 2, −3, 矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^3-7\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{I}$, 求 $\boldsymbol{B}$.

解: 因 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个不同的特征值, 故 $\boldsymbol{A}$ 可对角化. 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}\triangleq \mathrm{diag}(1,2,-3).$$

即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$,

Example (2015 年 7 月期末试题)

设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为 1, 2, -3, 矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^3-7\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{I}$, 求 $\boldsymbol{B}$.

解: 因 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个不同的特征值, 故 $\boldsymbol{A}$ 可对角化. 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}\triangleq \mathrm{diag}(1,2,-3).$$

即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$, 则

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\Lambda}^3-7\boldsymbol{\Lambda}+5\boldsymbol{I})\boldsymbol{P}^{-1}.$$

Example (2015 年 7 月期末试题)

设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为 1, 2, -3, 矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^3-7\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{I}$, 求 $\boldsymbol{B}$.

解: 因 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个不同的特征值, 故 $\boldsymbol{A}$ 可对角化. 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}\triangleq\operatorname{diag}(1,2,-3).$$

即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$, 则

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\Lambda}^3-7\boldsymbol{\Lambda}+5\boldsymbol{I})\boldsymbol{P}^{-1}.$$

而

$$\boldsymbol{\Lambda}^3-7\boldsymbol{\Lambda}+5\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}1-7+5 & 0 & 0\\ 0 & 8-14+5 & 0\\ 0 & 0 & -27+21+5\end{pmatrix}=-\boldsymbol{I}.$$

Example (2015 年 7 月期末试题)

设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为 1, 2, -3, 矩阵 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^3 - 7\boldsymbol{A} + 5\boldsymbol{I}$, 求 $\boldsymbol{B}$.

解: 因 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个不同的特征值, 故 $\boldsymbol{A}$ 可对角化. 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda} \triangleq \mathrm{diag}(1, 2, -3).$$

即 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$, 则

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{\Lambda}^3 - 7\boldsymbol{\Lambda} + 5\boldsymbol{I})\boldsymbol{P}^{-1}.$$

而

$$\boldsymbol{\Lambda}^3 - 7\boldsymbol{\Lambda} + 5\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1-7+5 & 0 & 0 \\ 0 & 8-14+5 & 0 \\ 0 & 0 & -27+21+5 \end{pmatrix} = -\boldsymbol{I}.$$

故 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}(-\boldsymbol{I})\boldsymbol{P}^{-1} = -\boldsymbol{I}$. □

Example

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(I) 求 a, b 的值;

(II) 求 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵.

Example

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(I) 求 a, b 的值;

(II) 求 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵.

解: (I) 相似的矩阵有相同的特征值,

Example

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(I) 求 a, b 的值;

(II) 求 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵.

解: (I) 相似的矩阵有相同的特征值, 又由公式 $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=\left|\boldsymbol{A}\right|$,
$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$,

Example

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(I) 求 a, b 的值;

(II) 求 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵.

解: (I) 相似的矩阵有相同的特征值, 又由公式 $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=\left|\boldsymbol{A}\right|$, $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$, 知

$$\begin{cases} 0+3+a=1+b+1, \\ \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}. \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} 3+a=b+2, \\ 2a-3=b. \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} 3+a=b+2, \\ 2a-3=b. \end{cases}$$

故 $a=4,\ b=5.$

得

$$\begin{cases} 3+a=b+2, \\ 2a-3=b. \end{cases}$$

故 $a=4,\ b=5$.

(II) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 为计算方便, 可以先转向求 $\boldsymbol{B}$ 的特征值.

得

$$\begin{cases} 3+a=b+2, \\ 2a-3=b. \end{cases}$$

故 $a=4,\ b=5.$

(II) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 为计算方便, 可以先转向求 $\boldsymbol{B}$ 的特征值.

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 0 \\ 0 & \lambda-b & 0 \\ 0 & -3 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

得

$$\begin{cases} 3+a=b+2, \\ 2a-3=b. \end{cases}$$

故 $a=4,\ b=5$.

(II) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 为计算方便, 可以先转向求 $\boldsymbol{B}$ 的特征值.

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 0 \\ 0 & \lambda-b & 0 \\ 0 & -3 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-5).$$

得

$$\begin{cases} 3+a=b+2, \\ 2a-3=b. \end{cases}$$

故 $a=4,\ b=5.$

(II) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 为计算方便, 可以先转向求 $\boldsymbol{B}$ 的特征值.

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 0 \\ 0 & \lambda-b & 0 \\ 0 & -3 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-5).$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=5.$

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 时, 由

$$\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 时, 由

$$\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1 = (2, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_2 = (3, 0, -1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 时，由

$$\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1 = (2, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_2 = (3, 0, -1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_3 = 5$ 时，由

$$5\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得特征向量 $\boldsymbol{\xi}_3 = (1, 1, -1)^{\mathrm{T}}$.

所以

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

所以

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

且

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 5 \end{pmatrix}.$$

判定能否对角化

Example

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & k & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, 讨论下面的问题:

(1) 当 $k=1$ 时, 是否存在正交矩阵 Q, 使得 $Q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}Q$ 为对角阵? 如果存在, 是否唯一?

(2) 当 $k=0$ 时, $\boldsymbol{A}$ 能否与对角阵相似?

判定能否对角化

Example

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & k & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, 讨论下面的问题:

(1) 当 $k=1$ 时, 是否存在正交矩阵 Q, 使得 $Q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}Q$ 为对角阵? 如果存在, 是否唯一?

(2) 当 $k=0$ 时, $\boldsymbol{A}$ 能否与对角阵相似?

解: (1) 当 $k=1$ 时, $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵,

Example

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & k & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, 讨论下面的问题:

(1) 当 $k=1$ 时, 是否存在正交矩阵 Q, 使得 $Q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}Q$ 为对角阵? 如果存在, 是否唯一?

(2) 当 $k=0$ 时, $\boldsymbol{A}$ 能否与对角阵相似?

解: (1) 当 $k=1$ 时, $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 所以一定正交矩阵 Q,

判定能否对角化

Example

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 讨论下面的问题:

(1) 当 $k = 1$ 时, 是否存在正交矩阵 Q, 使得 $Q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}Q$ 为对角阵? 如果存在, 是否唯一?

(2) 当 $k = 0$ 时, $\boldsymbol{A}$ 能否与对角阵相似?

解: (1) 当 $k = 1$ 时, $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 所以一定正交矩阵 Q, 使得 $Q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}Q$ 为对角阵, 且正交矩阵 Q 不唯一.

判定能否对角化

Example

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & k & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, 讨论下面的问题:

(1) 当 $k=1$ 时, 是否存在正交矩阵 Q, 使得 $Q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}Q$ 为对角阵? 如果存在, 是否唯一?

(2) 当 $k=0$ 时, $\boldsymbol{A}$ 能否与对角阵相似?

解: (1) 当 $k=1$ 时, $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 所以一定正交矩阵 Q, 使得 $Q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}Q$ 为对角阵, 且正交矩阵 Q 不唯一.

(2) 当 $k=0$ 时, $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|$

判定能否对角化

Example

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 讨论下面的问题:

(1) 当 $k=1$ 时, 是否存在正交矩阵 Q, 使得 $Q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}Q$ 为对角阵? 如果存在, 是否唯一?

(2) 当 $k=0$ 时, $\boldsymbol{A}$ 能否与对角阵相似?

解: (1) 当 $k=1$ 时, $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 所以一定正交矩阵 Q, 使得 $Q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}Q$ 为对角阵, 且正交矩阵 Q 不唯一.

(2) 当 $k=0$ 时, $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$

判定能否对角化

Example

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&k&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, 讨论下面的问题:

(1) 当 $k=1$ 时, 是否存在正交矩阵 Q, 使得 $Q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}Q$ 为对角阵? 如果存在, 是否唯一?

(2) 当 $k=0$ 时, $\boldsymbol{A}$ 能否与对角阵相似?

解: (1) 当 $k=1$ 时, $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 所以一定正交矩阵 Q, 使得 $Q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}Q$ 为对角阵, 且正交矩阵 Q 不唯一.

(2) 当 $k=0$ 时, $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\1&-\lambda&1\\0&1&-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda^2-1)(1-\lambda)$,

Example

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 讨论下面的问题:

(1) 当 $k=1$ 时, 是否存在正交矩阵 Q, 使得 $Q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}Q$ 为对角阵? 如果存在, 是否唯一?

(2) 当 $k=0$ 时, $\boldsymbol{A}$ 能否与对角阵相似?

解: (1) 当 $k=1$ 时, $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 所以一定正交矩阵 Q, 使得 $Q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}Q$ 为对角阵, 且正交矩阵 Q 不唯一.

(2) 当 $k=0$ 时, $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=(\lambda^2-1)(1-\lambda)$, $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=-1$.

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 时,

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 时, 因为 $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}$

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时, 因为 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时, 因为 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=2,$

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 时, 因为 $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}) = 2$, 所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于二重特征值 1 的线性无关的特征向量只有一个,

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时, 因为 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=2$, 所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于二重特征值 1 的线性无关的特征向量只有一个, 所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不与对角阵相似.

Example

已知 $1,1,-1$ 是三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,2,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量.

(1) 能否求得 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_3=-1$ 的特征向量? 若能, 试求出该特征向量, 若不能, 则说明理由.

(2) 能否由此求得实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$? 若能, 试求之, 若不能则说明理由.

Example

已知 $1, 1, -1$ 是三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,2,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的特征向量.

(1) 能否求得 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_3 = -1$ 的特征向量? 若能, 试求出该特征向量, 若不能, 则说明理由.

(2) 能否由此求得实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$? 若能, 试求之, 若不能则说明理由.

解: (1) 因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵, 所以对应矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值的特征向量是正交的,

求实对称矩阵的特征向量及矩阵 $\boldsymbol{A}$

Example

已知 $1, 1, -1$ 是三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (2, 2, 1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的特征向量.

(1) 能否求得 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_3 = -1$ 的特征向量? 若能, 试求出该特征向量, 若不能, 则说明理由.

(2) 能否由此求得实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$? 若能, 试求之, 若不能则说明理由.

解: (1) 因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵, 所以对应矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值的特征向量是正交的, 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 $\lambda_3 = -1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3 = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$,

求实对称矩阵的特征向量及矩阵 $\boldsymbol{A}$

Example

已知 $1, 1, -1$ 是三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (2, 2, 1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的特征向量.

(1) 能否求得 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_3 = -1$ 的特征向量? 若能, 试求出该特征向量, 若不能, 则说明理由.

(2) 能否由此求得实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$? 若能, 试求之, 若不能则说明理由.

解: (1) 因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵, 所以对应矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值的特征向量是正交的, 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 $\lambda_3 = -1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3 = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$, 则有

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} = (1, -1, 0)^{\mathrm{T}}.$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} = (1, -1, 0)^{\mathrm{T}}.$$

于是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_3 = -1$ 的特征向量为 $k\boldsymbol{\alpha}_3 = (k, -k, 0)^{\mathrm{T}} (k \neq 0)$.

(2) 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

(2) 令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则有

(2) 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则有

$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(1,1,-1)$, 于是

(2) 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, 则有

$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(1,1,-1)$, 于是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\,\mathrm{diag}(1,1,-1)\boldsymbol{P}^{-1}$,

(2) 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, 则有

$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(1,1,-1)$, 于是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\mathrm{diag}(1,1,-1)\boldsymbol{P}^{-1}$, 因为

$$(\boldsymbol{P},\boldsymbol{I})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$
\left(\begin{array}{ccc:ccc}
1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\
0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1
\end{array}\right)
\xrightarrow[r_2 \div (-1)]{r_2 \leftrightarrow r_3}
\left(\begin{array}{ccc:ccc}
1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{r_3 \div (-2)}
\left(\begin{array}{ccc:ccc}
1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0
\end{array}\right)
\xrightarrow[r_2 - r_3]{r_1 - r_3}
\left(\begin{array}{ccc:ccc}
1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0
\end{array}\right)
$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

所以 $\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$,

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

所以 $\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, 于是

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Example

设二次型 $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2bx_2x_3 + 2x_1x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化成标准形 $f = y_2^2 + 2y_3^2$, 其中: $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{P}$ 为三阶正交矩阵, 试求常数 a, b.

二次型及其标准形

Example

设二次型 $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2bx_2x_3 + 2x_1x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化成标准形 $f = y_2^2 + 2y_3^2$, 其中: $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{P}$ 为三阶正交矩阵, 试求常数 a, b.

解: 由题设可知, 矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}$

二次型及其标准形

Example

设二次型 $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2bx_2x_3 + 2x_1x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化成标准形 $f = y_2^2 + 2y_3^2$, 其中: $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{P}$ 为三阶正交矩阵, 试求常数 a, b.

解: 由题设可知, 矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}$ 与矩阵 $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(0, 1, 2)$ 相似.

Example

设二次型 $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2bx_2x_3 + 2x_1x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化成标准形 $f = y_2^2 + 2y_3^2$, 其中: $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{P}$ 为三阶正交矩阵, 试求常数 a, b.

解: 由题设可知, 矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}$ 与矩阵 $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(0, 1, 2)$ 相似. 相似的矩阵有相同的特征多项式,

Example

设二次型 $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2bx_2x_3 + 2x_1x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化成标准形 $f = y_2^2 + 2y_3^2$, 其中: $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{P}$ 为三阶正交矩阵, 试求常数 a, b.

解: 由题设可知, 矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}$ 与矩阵 $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(0, 1, 2)$ 相似. 相似的矩阵有相同的特征多项式, 从而

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & a & 1 \\ a & 1-\lambda & b \\ 1 & b & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}.$$

计算得

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + (2 - a^2 - b^2)\lambda + (a-b)^2 = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda,$$

计算得

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + (2 - a^2 - b^2)\lambda + (a-b)^2 = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda,$$

比较系数可得

计算得

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + (2 - a^2 - b^2)\lambda + (a-b)^2 = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda,$$

比较系数可得

$$\begin{cases} 2 - a^2 - b^2 = 2, \\ (a-b)^2 = 0. \end{cases}$$

计算得

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + (2 - a^2 - b^2)\lambda + (a-b)^2 = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda,$$

比较系数可得

$$\begin{cases} 2 - a^2 - b^2 = 2, \\ (a-b)^2 = 0. \end{cases}$$

故 $a = b = 0$. $\square$

Example

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$, 记

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

(I) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$.

(II) 若 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 正交且为单位向量, 证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

Example

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$, 记 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$.

(I) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$.

(II) 若 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 正交且为单位向量, 证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

解: (I) 记 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$.

Example

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$, 记

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

(I) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$.

(II) 若 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 正交且为单位向量, 证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

解: (I) 记 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$. 则

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$$

Example

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$, 记

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

(I) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$.

(II) 若 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 正交且为单位向量, 证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

解: (I) 记 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$. 则

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}.$$

Example

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$, 记 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$.

(I) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$.

(II) 若 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 正交且为单位向量, 证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

解: (I) 记 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$. 则

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}.$$

故 $(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$.

Example

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$, 记 $\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$.

(I) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$.

(II) 若 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 正交且为单位向量, 证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

解: (I) 记 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$. 则

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}.$$

故 $(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$. 同理 $(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2 = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$.

Example

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$, 记

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

(I) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$.

(II) 若 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 正交且为单位向量, 证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

解: (I) 记 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$. 则

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}.$$

故 $(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$. 同理 $(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2 = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$.

从而 $f(x_1, x_2, x_3) = 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}$.

Example

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$, 记 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$.

(I) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$.

(II) 若 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 正交且为单位向量, 证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

解: (I) 记 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$. 则

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}.$$

故 $(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$. 同理 $(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$.

从而 $f(x_1,x_2,x_3)=2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}$. 又 $(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})$,

Example

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$, 记 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$.

(I) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$.

(II) 若 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 正交且为单位向量, 证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

解: (I) 记 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$. 则

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}.$$

故 $(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$. 同理 $(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$.

从而 $f(x_1,x_2,x_3)=2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}$. 又 $(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})$, 得证二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$.

(II) 设 $\boldsymbol{\gamma}$ 是与 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 正交的单位向量.

(II) 设 $\boldsymbol{\gamma}$ 是与 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 正交的单位向量. (若不考虑 $\boldsymbol{\gamma}$ 的方向, 则 $\boldsymbol{\gamma}$ 是唯一确定的.)

(II) 设 $\boldsymbol{\gamma}$ 是与 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 正交的单位向量. (若不考虑 $\boldsymbol{\gamma}$ 的方向, 则 $\boldsymbol{\gamma}$ 是唯一确定的.) 令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$,

(II) 设 $\boldsymbol{\gamma}$ 是与 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 正交的单位向量. (若不考虑 $\boldsymbol{\gamma}$ 的方向, 则 $\boldsymbol{\gamma}$ 是唯一确定的.) 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$, 则 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵,

(II) 设 $\boldsymbol{\gamma}$ 是与 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 正交的单位向量. (若不考虑 $\boldsymbol{\gamma}$ 的方向, 则 $\boldsymbol{\gamma}$ 是唯一确定的.) 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$, 则 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵, 且

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}.$$

(II) 设 $\boldsymbol{\gamma}$ 是与 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 正交的单位向量. (若不考虑 $\boldsymbol{\gamma}$ 的方向, 则 $\boldsymbol{\gamma}$ 是唯一确定的.) 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$, 则 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵, 且

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}.$$

由 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 是两两正交的单位向量,

(II) 设 $\boldsymbol{\gamma}$ 是与 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 正交的单位向量. (若不考虑 $\boldsymbol{\gamma}$ 的方向, 则 $\boldsymbol{\gamma}$ 是唯一确定的.) 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$, 则 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵, 且

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}.$$

由 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 是两两正交的单位向量, 有

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0,\quad \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1,\quad \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=1.$$

(II) 设 $\boldsymbol{\gamma}$ 是与 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 正交的单位向量. (若不考虑 $\boldsymbol{\gamma}$ 的方向, 则 $\boldsymbol{\gamma}$ 是唯一确定的.) 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$, 则 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵, 且

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}.$$

由 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 是两两正交的单位向量, 有

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0,\quad \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1,\quad \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=1.$$

同样地, $\boldsymbol{\gamma}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 之间也有类似的表达式, 比如

$$\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\gamma}=0,\quad \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\gamma}=0.$$

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{P}\\
=&\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})\\
=&\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\\ \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\end{bmatrix}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})\\
=&\begin{bmatrix}2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\\ 0\end{bmatrix}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})\\
=&\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1,\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0,\\
\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0,\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=1,\\
\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0,\ \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0.
\end{aligned}
$$

得证 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$. □

另解: 记 $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 下证 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2, 1, 0.

另解: 记 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 下证 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2, 1, 0.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}$$

另解: 记 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 下证 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2, 1, 0.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha},$$

另解: 记 $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 下证 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2, 1, 0.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = (2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha} = 2\boldsymbol{\alpha},$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 为单位向量, 故 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$,

另解: 记 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 下证 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2, 1, 0.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha},$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 为单位向量, 故 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$, 从而 2 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 是对应的特征向量.

另解: 记 $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 下证 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2, 1, 0.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = (2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha} = 2\boldsymbol{\alpha},$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 为单位向量, 故 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, 从而 2 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 是对应的特征向量.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta} = (2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta}$$

另解: 记 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 下证 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2, 1, 0.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha},$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 为单位向量, 故 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$, 从而 2 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 是对应的特征向量.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta},$$

另解: 记 $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 下证 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2, 1, 0.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = (2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha} = 2\boldsymbol{\alpha},$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 为单位向量, 故 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, 从而 2 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 是对应的特征向量.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta} = (2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta},$$

同理, 1 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\beta}$ 是对应的特征向量.

另解: 记 $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 下证 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2, 1, 0.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = (2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha} = 2\boldsymbol{\alpha},$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 为单位向量, 故 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, 从而 2 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 是对应的特征向量.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta} = (2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta},$$

同理, 1 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\beta}$ 是对应的特征向量. 又

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})$$

另解: 记 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 下证 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2, 1, 0.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha},$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 为单位向量, 故 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$, 从而 2 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 是对应的特征向量.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta},$$

同理, 1 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\beta}$ 是对应的特征向量. 又

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant\mathrm{r}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})+\mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})$$

另解: 记 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 下证 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2, 1, 0.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha},$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 为单位向量, 故 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$, 从而 2 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 是对应的特征向量.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta},$$

同理, 1 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\beta}$ 是对应的特征向量. 又

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant\mathrm{r}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})+\mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=1+1=2$$

另解: 记 $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 下证 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2, 1, 0.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = (2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha} = 2\boldsymbol{\alpha},$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 为单位向量, 故 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, 从而 2 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 是对应的特征向量.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta} = (2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta},$$

同理, 1 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\beta}$ 是对应的特征向量. 又

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}) \leqslant \mathrm{r}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}) = 1 + 1 = 2 \leqslant 3,$$

另解: 记 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 下证 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2, 1, 0.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha},$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 为单位向量, 故 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$, 从而 2 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 是对应的特征向量.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta},$$

同理, 1 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\beta}$ 是对应的特征向量. 又

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant\mathrm{r}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})+\mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=1+1=2\leqslant 3,$$

故 $|\boldsymbol{A}|=0$,

另解: 记 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 下证 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2, 1, 0.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha},$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 为单位向量, 故 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$, 从而 2 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 是对应的特征向量.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta},$$

同理, 1 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\beta}$ 是对应的特征向量. 又

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant\mathrm{r}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})+\mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=1+1=2\leqslant 3,$$

故 $|\boldsymbol{A}|=0$, 即 0 必是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

另解: 记 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 下证 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2, 1, 0.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha},$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 为单位向量, 故 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$, 从而 2 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 是对应的特征向量.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta},$$

同理, 1 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\beta}$ 是对应的特征向量. 又

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant\mathrm{r}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})+\mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=1+1=2\leqslant 3,$$

故 $|\boldsymbol{A}|=0$, 即 0 必是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

从而 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 2, 1, 0.

另解: 记 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 下证 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2, 1, 0.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha},$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 为单位向量, 故 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$, 从而 2 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 是对应的特征向量.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta},$$

同理, 1 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\beta}$ 是对应的特征向量. 又

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant\mathrm{r}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})+\mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=1+1=2\leqslant 3,$$

故 $|\boldsymbol{A}|=0$, 即 0 必是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

从而 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 2, 1, 0. 证毕. $\square$

☞ (1) 矩阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的各列成比例, 且 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$,

☞ (1) 矩阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的各列成比例, 且 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}) = 1$.

☞ (1) 矩阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的各列成比例, 且 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}) = 1$.

另外, 见教材 P.153 习题 63: 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 1$, 证明:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1, b_2, \cdots, b_n).$$

☞ (1) 矩阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的各列成比例, 且 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}) = 1$.

另外, 见教材 P.153 习题 63: 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 1$, 证明:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1, b_2, \cdots, b_n).$$

(2) 由 $\left|\boldsymbol{A}\right| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$,

☞ (1) 矩阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的各列成比例, 且 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}) = 1$.

另外, 见教材 P.153 习题 63: 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 1$, 证明:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1, b_2, \cdots, b_n).$$

(2) 由 $\left|\boldsymbol{A}\right| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$, 故 $\left|\boldsymbol{A}\right| = 0$, 则 0 必是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

Example

设二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & -a & 2b-1 \\ a-b & c & 2-c \\ c-2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, a, b, c 为常数,

(1) 写出二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的具体形式;

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值与特征向量;

(3) 求一个正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 将二次型 f 化为标准形;

(4) 在 $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ 的条件下, 求二次型 f 的最大值与最小值.

Example

设二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 5 & -a & 2b-1 \\ a-b & c & 2-c \\ c-2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, a, b, c 为常数,

(1) 写出二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的具体形式;

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值与特征向量;

(3) 求一个正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 将二次型 f 化为标准形;

(4) 在 $\|\boldsymbol{x}\|=1$ 的条件下, 求二次型 f 的最大值与最小值.

解: (1) 因为 $\boldsymbol{A}$ 是二次型的矩阵, 所以 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵, 即有

Example

设二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 5 & -a & 2b-1 \\ a-b & c & 2-c \\ c-2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, a, b, c 为常数,

(1) 写出二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的具体形式;

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值与特征向量;

(3) 求一个正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 将二次型 f 化为标准形;

(4) 在 $\|\boldsymbol{x}\|=1$ 的条件下, 求二次型 f 的最大值与最小值.

解: (1) 因为 $\boldsymbol{A}$ 是二次型的矩阵, 所以 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵, 即有

$$\begin{cases} -a=a-b, \\ 2b-1=c-2, \\ 2-c=-3. \end{cases}$$

Example

设二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & -a & 2b-1 \\ a-b & c & 2-c \\ c-2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, a, b, c 为常数,

(1) 写出二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的具体形式;

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值与特征向量;

(3) 求一个正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 将二次型 f 化为标准形;

(4) 在 $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ 的条件下, 求二次型 f 的最大值与最小值.

解: (1) 因为 $\boldsymbol{A}$ 是二次型的矩阵, 所以 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵, 即有

$$\begin{cases} -a = a - b, \\ 2b - 1 = c - 2, \\ 2 - c = -3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1, \\ b = 2, \\ c = 5. \end{cases}$$

于是 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$,

于是 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, 故二次型的具体形式为

$$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3.$$

于是 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, 故二次型的具体形式为

$$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3.$$

(2)

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & 3 \\ -1 & 5-\lambda & -3 \\ 3 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+r_2} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ -1 & 5-\lambda & -3 \\ 3 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2-c_1} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 6-\lambda & -3 \\ 3 & -6 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\begin{vmatrix} 6-\lambda & -3 \\ -6 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(4-\lambda)[18-9\lambda+\lambda^2-18]=(4-\lambda)\lambda(\lambda-9).$$

于是 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, 故二次型的具体形式为

$$f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3.$$

(2)

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & 3 \\ -1 & 5-\lambda & -3 \\ 3 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+r_2} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ -1 & 5-\lambda & -3 \\ 3 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2-c_1} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 6-\lambda & -3 \\ 3 & -6 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda) \begin{vmatrix} 6-\lambda & -3 \\ -6 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)[18 - 9\lambda + \lambda^2 - 18] = (4-\lambda)\lambda(\lambda-9).$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 9.$

当 $\lambda_1 = 0$ 时, 解方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

当 $\lambda_1 = 0$ 时, 解方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

当 $\lambda_1 = 0$ 时, 解方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \leftrightarrow r_1]{r_3 \div 3}$$

当 $\lambda_1 = 0$ 时, 解方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \leftrightarrow r_1]{r_3 \div 3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

当 $\lambda_1 = 0$ 时, 解方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \leftrightarrow r_1]{r_3 \div 3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 - 5r_1]{r_2 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

当 $\lambda_1 = 0$ 时, 解方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, 由

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \leftrightarrow r_1]{r_3 \div 3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 - 5r_1]{r_2 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

当 $\lambda_1 = 0$ 时, 解方程组 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$, 由

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \leftrightarrow r_1]{r_3 \div 3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 - 5r_1]{r_2 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系为

当 $\lambda_1 = 0$ 时, 解方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \leftrightarrow r_1]{r_3 \div 3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 - 5r_1]{r_2 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\boldsymbol{p}_1 = (-1, 1, 2)^{\mathrm{T}}$,

当 $\lambda_1 = 0$ 时, 解方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \leftrightarrow r_1]{r_3 \div 3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 - 5r_1]{r_2 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\boldsymbol{p}_1 = (-1, 1, 2)^{\mathrm{T}}$, 从而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 $\lambda_1 = 0$ 的全部特征向量为 $k_1 \boldsymbol{p}_1$ $(k_1 \neq 0)$.

当 $\lambda_2 = 4$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

当 $\lambda_2 = 4$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

当 $\lambda_2 = 4$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 + r_1}$$

当 $\lambda_2 = 4$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

当 $\lambda_2 = 4$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, 由

$$\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

当 $\lambda_2 = 4$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\boldsymbol{p}_2 = (1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$,

当 $\lambda_2 = 4$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, 由

$$\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\boldsymbol{p}_2 = (1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, 从而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 $\lambda_2 = 4$ 的全部特征向量为 $k_2\boldsymbol{p}_2$ $(k_2 \neq 0)$.

当 $\lambda_3 = 9$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A} - 9\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

当 $\lambda_3 = 9$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A} - 9\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A} - 9\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ -1 & -4 & -3 \\ 3 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

当 $\lambda_3 = 9$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A} - 9\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A} - 9\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ -1 & -4 & -3 \\ 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \leftrightarrow r_1]{r_3 \div 3}$$

当 $\lambda_3 = 9$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A} - 9\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A} - 9\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ -1 & -4 & -3 \\ 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \leftrightarrow r_1]{r_3 \div 3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & -4 & -3 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

当 $\lambda_3 = 9$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A} - 9\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A} - 9\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ -1 & -4 & -3 \\ 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \leftrightarrow r_1]{r_3 \div 3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & -4 & -3 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 + 4r_1]{r_2 + r_1}$$

当 $\lambda_3 = 9$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A} - 9\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A} - 9\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ -1 & -4 & -3 \\ 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \leftrightarrow r_1]{r_3 \div 3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & -4 & -3 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 + 4r_1]{r_2 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

当 $\lambda_3 = 9$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A} - 9\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A} - 9\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ -1 & -4 & -3 \\ 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \leftrightarrow r_1]{r_3 \div 3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & -4 & -3 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 + 4r_1]{r_2 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

当 $\lambda_3 = 9$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A} - 9\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A} - 9\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ -1 & -4 & -3 \\ 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \leftrightarrow r_1]{r_3 \div 3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & -4 & -3 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+4r_1]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\boldsymbol{p}_3 = (1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$,

当 $\lambda_3 = 9$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A} - 9\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A} - 9\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ -1 & -4 & -3 \\ 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \leftrightarrow r_1]{r_3 \div 3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & -4 & -3 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 + 4r_1]{r_2 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\boldsymbol{p}_3 = (1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$, 从而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 $\lambda_3 = 9$ 的全部特征向量为 $k_3\boldsymbol{p}_3$ $(k_3 \neq 0)$.

(3) 将 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ 单位化,

(3) 将 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ 单位化, 得到

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \frac{\boldsymbol{p}_1}{\|\boldsymbol{p}_1\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

(3) 将 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ 单位化, 得到

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \frac{\boldsymbol{p}_1}{\|\boldsymbol{p}_1\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2 = \frac{\boldsymbol{p}_2}{\|\boldsymbol{p}_2\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix},$$

(3) 将 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ 单位化, 得到

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \frac{\boldsymbol{p}_1}{\|\boldsymbol{p}_1\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2 = \frac{\boldsymbol{p}_2}{\|\boldsymbol{p}_2\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_3 = \frac{\boldsymbol{p}_3}{\|\boldsymbol{p}_3\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

(3) 将 $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$ 单位化, 得到

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \frac{\boldsymbol{p}_1}{\|\boldsymbol{p}_1\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2 = \frac{\boldsymbol{p}_2}{\|\boldsymbol{p}_2\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_3 = \frac{\boldsymbol{p}_3}{\|\boldsymbol{p}_3\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

令

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

(3) 将 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ 单位化, 得到

$$\boldsymbol{\xi}_1=\frac{\boldsymbol{p}_1}{\|\boldsymbol{p}_1\|}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2=\frac{\boldsymbol{p}_2}{\|\boldsymbol{p}_2\|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_3=\frac{\boldsymbol{p}_3}{\|\boldsymbol{p}_3\|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}.$$

令

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},$$

则有正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 将二次型化为标准形

$$f=4y_2^2+9y_3^2.$$

(4) 因为正交变换保持向量的长度不变,

(4) 因为正交变换保持向量的长度不变, 所以二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在条件 $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ 下的最值,

(4) 因为正交变换保持向量的长度不变, 所以二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在条件 $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ 下的最值, 就是二次型

$$f(y_1, y_2, y_3) = 4y_2^2 + 9y_3^2$$

在条件 $\|\boldsymbol{y}\| = 1$ 下的最值,

(4) 因为正交变换保持向量的长度不变, 所以二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在条件 $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ 下的最值, 就是二次型

$$f(y_1, y_2, y_3) = 4y_2^2 + 9y_3^2$$

在条件 $\|\boldsymbol{y}\| = 1$ 下的最值, 因为

$$0 \leqslant 4y_2^2 + 9y_3^2 \leqslant 9,$$

(4) 因为正交变换保持向量的长度不变, 所以二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在条件 $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ 下的最值, 就是二次型

$$f(y_1, y_2, y_3) = 4y_2^2 + 9y_3^2$$

在条件 $\|\boldsymbol{y}\| = 1$ 下的最值, 因为

$$0 \leqslant 4y_2^2 + 9y_3^2 \leqslant 9,$$

故所求的最大值为 9,

(4) 因为正交变换保持向量的长度不变, 所以二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在条件 $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ 下的最值, 就是二次型

$$f(y_1, y_2, y_3) = 4y_2^2 + 9y_3^2$$

在条件 $\|\boldsymbol{y}\| = 1$ 下的最值, 因为

$$0 \leqslant 4y_2^2 + 9y_3^2 \leqslant 9,$$

故所求的最大值为 9, 最小值为 0. □

Example

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2bx_1x_3$ $(b > 0)$, 其中二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值之和为 1, 特征值之积为 -12.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 用正交变换将二次型化为标准形, 并写出所用的正交变换与正交矩阵.

Example

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2bx_1x_3$ $(b > 0)$, 其中二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值之和为 1, 特征值之积为 -12.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 用正交变换将二次型化为标准形, 并写出所用的正交变换与正交矩阵.

解: (1) 二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$,

Example

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2bx_1x_3$ $(b > 0)$, 其中二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值之和为 1, 特征值之积为 -12.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 用正交变换将二次型化为标准形, 并写出所用的正交变换与正交矩阵.

解: (1) 二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$, 由题设可得:

$$\begin{cases} a + 2 - 2 = 1, \\ \\ \\ \end{cases}$$

Example

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2bx_1x_3$ $(b > 0)$, 其中二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值之和为 1, 特征值之积为 -12.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 用正交变换将二次型化为标准形, 并写出所用的正交变换与正交矩阵.

解: (1) 二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$, 由题设可得:

$$\begin{cases} a + 2 - 2 = 1, \\ -12 = \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{vmatrix} \end{cases}$$

Example

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3\ (b>0)$, 其中二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值之和为 1, 特征值之积为 -12.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 用正交变换将二次型化为标准形, 并写出所用的正交变换与正交矩阵.

解: (1) 二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$, 由题设可得:

$$\begin{cases} a+2-2=1, \\ -12=\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{vmatrix}=2(-2a-b^2). \end{cases}$$

Example

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3\ (b>0)$, 其中二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值之和为 1, 特征值之积为 -12.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 用正交变换将二次型化为标准形, 并写出所用的正交变换与正交矩阵.

解: (1) 二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$, 由题设可得:

$$\begin{cases} a+2-2=1, \\ -12=\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{vmatrix}=2(-2a-b^2). \end{cases}$$

故 $a=1,\ b=2$.

Example

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2bx_1x_3$ $(b > 0)$, 其中二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值之和为 1, 特征值之积为 -12.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 用正交变换将二次型化为标准形, 并写出所用的正交变换与正交矩阵.

解: (1) 二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$, 由题设可得:

$$\begin{cases} a + 2 - 2 = 1, \\ -12 = \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2(-2a - b^2). \end{cases}$$

故 $a = 1$, $b = 2$.

(2) 略. □