第 1 章　矩阵的初等性质

Matrix Theory

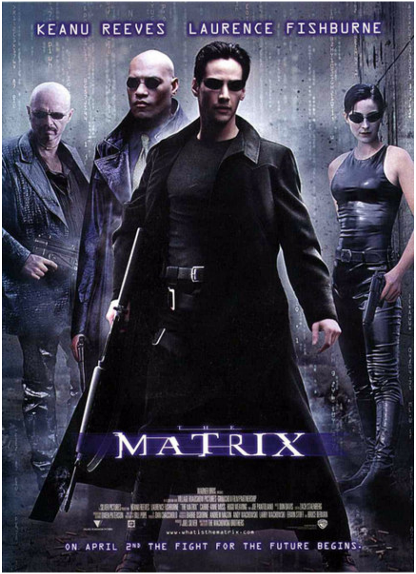
黄 正 华

Email: huangzh@whu.edu.cn

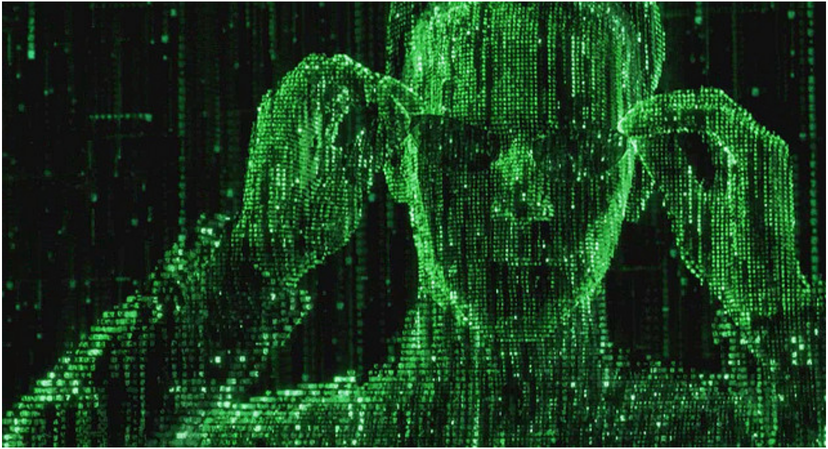
武汉大学　数学与统计学院

September 22, 2014

Matrix


KEANU REEVES LAURENCE FISHBURNE
MATRIX
ON APRIL 2ND THE FIGHT FOR THE FUTURE BEGINS.

Matrix



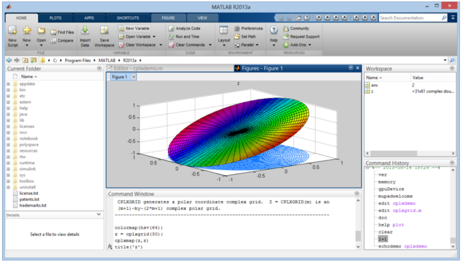
Matrix

MATLAB

MATLAB (matrix laboratory)

MATLAB

MATLAB (matrix laboratory)



使用教材

陈祖明, 周家胜
矩阵论引论 (第 2 版).
北京航空航天大学出版社, 2012

参考资料

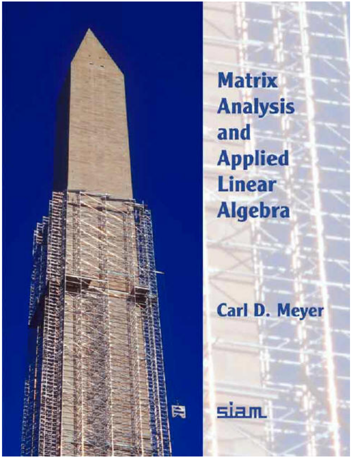
张跃辉 编著
矩阵理论与应用.
科学出版社, 2011

参考资料

北京大学数学系几何与代数教研室代数小组 编
高等代数.
高等教育出版社, 2003

参考资料

Carl D. Meyer
Matrix Analysis and Applied Linear Algebra.
SIAM, 2001



Outline

1. 矩阵及其初等运算
   - 矩阵和向量
   - 矩阵的分块乘法与初等变换
2. 矩阵的行列式和矩阵的秩
3. 矩阵的迹和矩阵的特征值

转置矩阵

设有 $m \times n$ 阶矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

转置矩阵

设有 $m \times n$ 阶矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

则其**转置矩阵** (transposed matrix) 为

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

共轭转置矩阵

$\boldsymbol{A}$ 的共轭转置矩阵为

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \cdots & \bar{a}_{m1} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \cdots & \bar{a}_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{a}_{1n} & \bar{a}_{2n} & \cdots & \bar{a}_{mn} \end{bmatrix} = \overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}},$$

其中 $\bar{a}_{ij}$ 表示复数 a_{ij} 的共轭复数.

共轭转置矩阵

$\boldsymbol{A}$ 的共轭转置矩阵为

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\begin{bmatrix}\bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \cdots & \bar{a}_{m1}\\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \cdots & \bar{a}_{m2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \bar{a}_{1n} & \bar{a}_{2n} & \cdots & \bar{a}_{mn}\end{bmatrix}=\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}},$$

其中 $\bar{a}_{ij}$ 表示复数 a_{ij} 的共轭复数.

例如 $a_{ij}=2+3\mathrm{i}$, 则 $\bar{a}_{ij}=2-3\mathrm{i}$.

矩阵的对称性

- 若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 称为**对称矩阵**;
  若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 称为**反对称矩阵**.

矩阵的对称性

- 若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 称为**对称矩阵**;
  若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 称为**反对称矩阵**.
- 若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 称为**共轭对称矩阵**, 也称为 Hermite **矩阵**;
  若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = -\boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 称为**反** Hermite **矩阵**.

矩阵的对称性

- 若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 称为**对称矩阵**;
  若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 称为**反对称矩阵**.
- 若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 称为**共轭对称矩阵**, 也称为 Hermite **矩阵**;
  若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=-\boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 称为**反** Hermite **矩阵**.

  Hermite 矩阵 (hermitian matrix), 也译为**埃尔米特矩阵**.

Charles Hermite (December 24, 1822 – January 14, 1901) was a French mathematician who did research on number theory, quadratic forms, invariant theory, orthogonal polynomials, elliptic functions, and algebra.

Hermite polynomials, Hermite interpolation, Hermite normal form, Hermitian operators, and cubic Hermite splines are named in his honor. One of his students was **Henri Poincaré**.

He was the first to prove that e, the base of natural logarithms, is a transcendental number.

Figure: Charles Hermite circa 1887

For example, consider

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2+4\mathrm{i} & 1-3\mathrm{i} \\ 2-4\mathrm{i} & 3 & 8+6\mathrm{i} \\ 1+3\mathrm{i} & 8-6\mathrm{i} & 5 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 2+4\mathrm{i} & 1-3\mathrm{i} \\ 2+4\mathrm{i} & 3 & 8+6\mathrm{i} \\ 1-3\mathrm{i} & 8+6\mathrm{i} & 5 \end{bmatrix},$$

矩阵的对称性

For example, consider

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2+4\mathrm{i} & 1-3\mathrm{i} \\ 2-4\mathrm{i} & 3 & 8+6\mathrm{i} \\ 1+3\mathrm{i} & 8-6\mathrm{i} & 5 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2+4\mathrm{i} & 1-3\mathrm{i} \\ 2+4\mathrm{i} & 3 & 8+6\mathrm{i} \\ 1-3\mathrm{i} & 8+6\mathrm{i} & 5 \end{bmatrix},$$

Can you see that $\boldsymbol{A}$ is hermitian but not symmetric, while $\boldsymbol{B}$ is symmetric but not hermitian?

Exercise 1.1

Construct an example of a 3×3 matrix $\boldsymbol{A}$ that satisfies the following conditions.

1. $\boldsymbol{A}$ is both symmetric and skew-symmetric.

Exercise 1.1

Construct an example of a 3×3 matrix $\boldsymbol{A}$ that satisfies the following conditions.

1. $\boldsymbol{A}$ is both symmetric and skew-symmetric.
2. $\boldsymbol{A}$ is both hermitian and symmetric.

Exercise 1.1

Construct an example of a 3×3 matrix $\boldsymbol{A}$ that satisfies the following conditions.

1. $\boldsymbol{A}$ is both symmetric and skew-symmetric.
2. $\boldsymbol{A}$ is both hermitian and symmetric.

Exercise 1.2

Prove that each of the following statements is true.

1. If $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ is skew-symmetric, then $a_{jj} = 0$ for each j.

Exercise 1.1

Construct an example of a 3×3 matrix $\boldsymbol{A}$ that satisfies the following conditions.

1. $\boldsymbol{A}$ is both symmetric and skew-symmetric.
2. $\boldsymbol{A}$ is both hermitian and symmetric.

Exercise 1.2

Prove that each of the following statements is true.

1. If $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ is skew-symmetric, then $a_{jj} = 0$ for each j.
2. If $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ is skew-hermitian, then each a_{jj} is a pure imaginary number—i.e., a multiple of the imaginary unit i.

Exercise 1.1

Construct an example of a 3×3 matrix $\boldsymbol{A}$ that satisfies the following conditions.

1. $\boldsymbol{A}$ is both symmetric and skew-symmetric.
2. $\boldsymbol{A}$ is both hermitian and symmetric.

Exercise 1.2

Prove that each of the following statements is true.

1. If $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ is skew-symmetric, then $a_{jj} = 0$ for each j.
2. If $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ is skew-hermitian, then each a_{jj} is a pure imaginary number—i.e., a multiple of the imaginary unit i.
3. If $\boldsymbol{A}$ is real and symmetric, then $\boldsymbol{B} = \mathrm{i}\boldsymbol{A}$ is skew-hermitian.

记号约定

- $\mathbb{R}^{m\times n}$ 表示: $m \times n$ 阶实数矩阵的集合;
- $\mathbb{C}^{m\times n}$ 表示: $m \times n$ 阶复数矩阵的集合.

矩阵的逆

记号约定

- $\mathbb{R}^{m\times n}$ 表示: $m\times n$ 阶实数矩阵的集合;
- $\mathbb{C}^{m\times n}$ 表示: $m\times n$ 阶复数矩阵的集合.

对 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 若存在 $\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 满足

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I},$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵或非奇异矩阵(nonsingular matrix), 并称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆(inverse).

矩阵的逆

记号约定

- $\mathbb{R}^{m\times n}$ 表示: $m \times n$ 阶实数矩阵的集合;
- $\mathbb{C}^{m\times n}$ 表示: $m \times n$ 阶复数矩阵的集合.

对 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 若存在 $\boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 满足

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I},$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵或非奇异矩阵(nonsingular matrix), 并称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆(inverse).

否则称 $\boldsymbol{A}$ 为不可逆矩阵或奇异矩阵(singular matrix).

常用结论

Proposition 1.3

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则

1. $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$;

常用结论

Proposition 1.3

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则

1. $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$;
2. $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$.

常用结论

Proposition 1.3

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则

1. $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$;
2. $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$.

Proposition 1.4

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 为可逆矩阵, 则

1. $(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$;
2. $(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{H}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^{-1}$.

Exercise 1.5

Let $\boldsymbol{A}$ be any square matrix.

1. Show that $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ is symmetric and $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ is skew-symmetric.
2. Prove that there is one and only one way to write $\boldsymbol{A}$ as the sum of a symmetric matrix and a skew-symmetric matrix.

Outline

1. 矩阵及其初等运算
   - 矩阵和向量
   - 矩阵的分块乘法与初等变换
2. 矩阵的行列式和矩阵的秩
3. 矩阵的迹和矩阵的特征值

Definition 1.6

设矩阵 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$ 的第 $i_1, i_2, \cdots, i_r$ 行和第 $j_1, j_2, \cdots, j_s$ 列交叉处的元素所排成的 $r \times s$ 阶矩阵, 称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个 $r \times s$ 阶子块, 记为

$$\mathrm{BL}_A \begin{Bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_s \end{Bmatrix}. \tag{1}$$

总假定 $i_1 < i_2 < \cdots < i_r, j_1 < j_2 < \cdots < j_s$.

Definition 1.6

设矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$ 的第 $i_1, i_2, \cdots, i_r$ 行和第 $j_1, j_2, \cdots, j_s$ 列交叉处的元素所排成的 $r\times s$ 阶矩阵, 称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个 $r\times s$ 阶子块, 记为

$$\mathrm{BL}_A\left\{\begin{matrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_s \end{matrix}\right\}. \tag{1}$$

总假定 $i_1<i_2<\cdots<i_r$, $j_1<j_2<\cdots<j_s$. 故有

$$\mathrm{BL}_A\left\{\begin{matrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_s \end{matrix}\right\}=\begin{pmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_s} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_rj_1} & a_{i_rj_2} & \cdots & a_{i_rj_s} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

特别地, 由 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i_1, i_2, \cdots, i_r$ 行所构成的子块为

$$\mathrm{BL}_A\left\{\begin{matrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{matrix}\right\} = \begin{bmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 2} & \cdots & a_{i_1 n} \\ a_{i_2 1} & a_{i_2 2} & \cdots & a_{i_2 n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_r 1} & a_{i_r 2} & \cdots & a_{i_r n} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

特别地, 由 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i_1, i_2, \cdots, i_r$ 行所构成的子块为

$$\mathrm{BL}_A \left\{ \begin{matrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 2} & \cdots & a_{i_1 n} \\ a_{i_2 1} & a_{i_2 2} & \cdots & a_{i_2 n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_r 1} & a_{i_r 2} & \cdots & a_{i_r n} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

并被简记为

$$\mathrm{BL}_A \left\{ \begin{matrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ \hline \end{matrix} \right\} \tag{4}$$

相仿地, 由 $\boldsymbol{A}$ 的第 $j_1, j_2, \cdots, j_s$ 列所构成的子块为

$$\mathrm{BL}_A \begin{Bmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_s} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{mj_1} & a_{mj_2} & \cdots & a_{mj_s} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

相仿地, 由 $\boldsymbol{A}$ 的第 $j_1, j_2, \cdots, j_s$ 列所构成的子块为

$$\mathrm{BL}_A\left\{\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_s \end{array}\right\} = \begin{bmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_s} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{mj_1} & a_{mj_2} & \cdots & a_{mj_s} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

并被简记为

$$\mathrm{BL}_A\left\{\begin{array}{cccc} \hline j_1 & j_2 & \cdots & j_s \end{array}\right\} \tag{6}$$

相仿地, 由 $\boldsymbol{A}$ 的第 $j_1, j_2, \cdots, j_s$ 列所构成的子块为

$$\mathrm{BL}_A\left\{\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_s \end{array}\right\} = \begin{bmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_s} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{mj_1} & a_{mj_2} & \cdots & a_{mj_s} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

并被简记为

$$\mathrm{BL}_A\left\{\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\rule{4cm}{0.4pt}} \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_s \end{array}\right\} \tag{6}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 本身也可以看作一个子块:

$$\mathrm{BL}_A\left\{\begin{array}{c} \rule{4cm}{0.4pt} \\ \rule{4cm}{0.4pt} \end{array}\right\} \tag{7}$$

分块矩阵的乘法

一般地说, 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ik}]_{s\times n}$, $\boldsymbol{B}=[b_{kj}]_{n\times m}$,

分块矩阵的乘法

一般地说, 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ik}]_{s\times n}$, $\boldsymbol{B}=[b_{kj}]_{n\times m}$, 把 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 分成一些小矩阵:

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_t \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_l \end{array} \\ \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1l} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{t1} & \boldsymbol{A}_{t2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{tl} \end{bmatrix} \end{array}, \qquad \boldsymbol{B}=\begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_l \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} m_1 & m_2 & \cdots & m_r \end{array} \\ \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1r} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} & \cdots & \boldsymbol{B}_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{l1} & \boldsymbol{B}_{l2} & \cdots & \boldsymbol{B}_{lr} \end{bmatrix} \end{array}, \quad (8)$$

分块矩阵的乘法

一般地说, 设 $\boldsymbol{A} = [a_{ik}]_{s\times n}$, $\boldsymbol{B} = [b_{kj}]_{n\times m}$, 把 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 分成一些小矩阵:

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_t \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_l \end{array} \\ \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1l} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{t1} & \boldsymbol{A}_{t2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{tl} \end{bmatrix} \end{array}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_l \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} m_1 & m_2 & \cdots & m_r \end{array} \\ \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1r} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} & \cdots & \boldsymbol{B}_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{l1} & \boldsymbol{B}_{l2} & \cdots & \boldsymbol{B}_{lr} \end{bmatrix} \end{array}, \quad (8)$$

其中矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列的分法必须与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行的分法一致.

分块矩阵的乘法

一般地说, 设 $\boldsymbol{A} = [a_{ik}]_{s\times n}$, $\boldsymbol{B} = [b_{kj}]_{n\times m}$, 把 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 分成一些小矩阵:

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_t \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_l \end{array} \\ \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1l} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{t1} & \boldsymbol{A}_{t2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{tl} \end{bmatrix} \end{array}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_l \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} m_1 & m_2 & \cdots & m_r \end{array} \\ \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1r} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} & \cdots & \boldsymbol{B}_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{l1} & \boldsymbol{B}_{l2} & \cdots & \boldsymbol{B}_{lr} \end{bmatrix} \end{array}, \tag{8}$$

其中矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列的分法必须与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行的分法一致. 则

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$$

分块矩阵的乘法

一般地说, 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ik}]_{s\times n}$, $\boldsymbol{B}=[b_{kj}]_{n\times m}$, 把 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 分成一些小矩阵:

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_l \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_t \end{array} & \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1l} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{t1} & \boldsymbol{A}_{t2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{tl} \end{bmatrix} \end{array}, \qquad \boldsymbol{B}=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} m_1 & m_2 & \cdots & m_r \end{array} \\ \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_l \end{array} & \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1r} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} & \cdots & \boldsymbol{B}_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{l1} & \boldsymbol{B}_{l2} & \cdots & \boldsymbol{B}_{lr} \end{bmatrix} \end{array}, \quad (8)$$

其中矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列的分法必须与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行的分法一致. 则

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} m_1 & m_2 & \cdots & m_r \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_t \end{array} & \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12} & \cdots & \boldsymbol{C}_{1r} \\ \boldsymbol{C}_{21} & \boldsymbol{C}_{22} & \cdots & \boldsymbol{C}_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{C}_{t1} & \boldsymbol{C}_{t2} & \cdots & \boldsymbol{C}_{tr} \end{bmatrix} \end{array}, \quad (9)$$

其中, $\boldsymbol{C}_{pq}=\boldsymbol{A}_{p1}\boldsymbol{B}_{1q}+\boldsymbol{A}_{p2}\boldsymbol{B}_{2q}+\cdots+\boldsymbol{A}_{pl}\boldsymbol{B}_{lq}$.

Example 1.7

记

$$e_i = (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}, \qquad i = 1, 2, \cdots, n.$$

Example 1.7

记

$$\boldsymbol{e}_i = (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}, \qquad i = 1, 2, \cdots, n.$$

则 n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{I}_n$ 可以写为如下两种分块形式:

$$\boldsymbol{I}_n = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n], \tag{10}$$

$$\tag{11}$$

Example 1.7

记

$$e_i = (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}, \qquad i = 1, 2, \cdots, n.$$

则 n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{I}_n$ 可以写为如下两种分块形式:

$$\boldsymbol{I}_n = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n], \tag{10}$$

$$\boldsymbol{I}_n = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n]^{\mathrm{T}}. \tag{11}$$

Definition 1.8

下面三种对矩阵的变换, 统称为矩阵的初等变换:

1. 用任意数 $\alpha \neq 0$ 乘以矩阵的第 i 行 (列);

初等变换与初等矩阵

Definition 1.8

下面三种对矩阵的变换, 统称为矩阵的初等变换:

1. 用任意数 $\alpha \neq 0$ 乘以矩阵的第 i 行 (列); 记作 $r_i \times \alpha$ ($c_i \times \alpha$)

初等变换与初等矩阵

Definition 1.8

下面三种对矩阵的变换, 统称为矩阵的初等变换:

1. 用任意数 $\alpha \neq 0$ 乘以矩阵的第 i 行 (列); 记作 $r_i \times \alpha$ $(c_i \times \alpha$ $)$
2. 把矩阵的第 j 行 (列) 的 μ 倍加到第 i 行 (列);

初等变换与初等矩阵

Definition 1.8

下面三种对矩阵的变换, 统称为矩阵的初等变换:

1. 用任意数 $\alpha \neq 0$ 乘以矩阵的第 i 行 (列); 记作 $r_i \times \alpha$ ($c_i \times \alpha$)
2. 把矩阵的第 j 行 (列) 的 μ 倍加到第 i 行 (列); 记作 $r_i + \mu r_j$ ($c_i + \mu c_j$).

Definition 1.8

下面三种对矩阵的变换, 统称为矩阵的初等变换:

1. 用任意数 $\alpha \neq 0$ 乘以矩阵的第 i 行 (列); 记作 $r_i \times \alpha$ ($c_i \times \alpha$)
2. 把矩阵的第 j 行 (列) 的 μ 倍加到第 i 行 (列); 记作 $r_i + \mu r_j$ ($c_i + \mu c_j$).
3. 互换矩阵的 i, j 两行 (列);

初等变换与初等矩阵

Definition 1.8

下面三种对矩阵的变换, 统称为矩阵的初等变换:

1. 用任意数 $\alpha \neq 0$ 乘以矩阵的第 i 行 (列); 记作 $r_i \times \alpha$ $(c_i \times \alpha)$
2. 把矩阵的第 j 行 (列) 的 μ 倍加到第 i 行 (列); 记作 $r_i + \mu r_j$ $(c_i + \mu c_j)$.
3. 互换矩阵的 i, j 两行 (列); 记作 $r_i \leftrightarrow r_j$ $(c_i \leftrightarrow c_j)$.

初等行变换矩阵

Definition 1.9

将单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 进行初等行变换所得的矩阵, 统称为初等行变换矩阵:

(1) 用任意数 $\alpha \neq 0$ 乘以矩阵 $\boldsymbol{I}$ 的第 i 行, 得到的矩阵, 记为 $\boldsymbol{J}_1(\alpha \boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}})$,

初等行变换矩阵

Definition 1.9

将单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 进行初等行变换所得的矩阵, 统称为初等行变换矩阵:

(1) 用任意数 $\alpha \neq 0$ 乘以矩阵 $\boldsymbol{I}$ 的第 i 行, 得到的矩阵, 记为 $\boldsymbol{J}_1(\alpha \boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}})$, 即

$$\boldsymbol{J}_1(\alpha \boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \alpha & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \longleftarrow \text{第 } i \text{ 行} \tag{12}$$

(2) 把矩阵 $\boldsymbol{I}$ 的第 i 行的 μ 倍加到第 j 行, 得到的矩阵, 记为 $\boldsymbol{J}_2(\mu\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}} \xrightarrow{+} \boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}})$,

(2) 把矩阵 $\boldsymbol{I}$ 的第 i 行的 μ 倍加到第 j 行, 得到的矩阵, 记为 $\boldsymbol{J}_2(\mu\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}} \xrightarrow{+} \boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}})$, 即

$$\boldsymbol{J}_2(\mu\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}} \xrightarrow{+} \boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}}) = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & \vdots & \ddots & & & \\ & & \mu & \cdots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array} \tag{13}$$

(3) 互换矩阵 $\boldsymbol{I}$ 的 i, j 两行, 得到的矩阵, 记为 $\boldsymbol{J}_3(\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}} \leftrightarrow \boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}})$,

(3) 互换矩阵 $\boldsymbol{I}$ 的 i, j 两行, 得到的矩阵, 记为 $\boldsymbol{J}_3(\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}} \leftrightarrow \boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}})$, 即

$$\boldsymbol{J}_3(\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}} \leftrightarrow \boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}}) = \left[\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & & \\
 & & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\
 & & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & \\
 & & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{array}\right]
\begin{array}{c}
\\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\
\end{array} \tag{14}$$

$\boldsymbol{J}_1(\alpha \boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}})$, $\boldsymbol{J}_2(\mu \boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}} \xrightarrow{+} \boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}})$, $\boldsymbol{J}_3(\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}} \leftrightarrow \boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}})$ 分别称为第 (1)、(2)、(3) 种初等行变换矩阵.

$\boldsymbol{J}_1(\alpha \boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}})$, $\boldsymbol{J}_2(\mu \boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}} \xrightarrow{+} \boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}})$, $\boldsymbol{J}_3(\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}} \leftrightarrow \boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}})$ 分别称为第 (1)、(2)、(3) 种初等行变换矩阵.

类似地, 第 (1)、(2)、(3) 种初等列变换矩阵分别记为

1. $\boldsymbol{J}_1^*(\alpha \boldsymbol{e}_i)$,
2. $\boldsymbol{J}_2^*(\mu \boldsymbol{e}_i \xrightarrow{+} \boldsymbol{e}_j)$,
3. $\boldsymbol{J}_3^*(\boldsymbol{e}_i \leftrightarrow \boldsymbol{e}_j)$.

$\boldsymbol{J}_1(\alpha \boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}})$, $\boldsymbol{J}_2(\mu \boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}} \xrightarrow{+} \boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}})$, $\boldsymbol{J}_3(\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}} \leftrightarrow \boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}})$ 分别称为第 (1)、(2)、(3) 种初等行变换矩阵.

类似地, 第 (1)、(2)、(3) 种初等列变换矩阵分别记为

1. $\boldsymbol{J}_1^*(\alpha \boldsymbol{e}_i)$,
2. $\boldsymbol{J}_2^*(\mu \boldsymbol{e}_i \xrightarrow{+} \boldsymbol{e}_j)$,
3. $\boldsymbol{J}_3^*(\boldsymbol{e}_i \leftrightarrow \boldsymbol{e}_j)$.

下面的结论是显然的:

$$\boldsymbol{J}_1(\alpha \boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}) = \boldsymbol{J}_1^*(\alpha \boldsymbol{e}_i); \tag{15}$$

(17)

$\boldsymbol{J}_1(\alpha\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}})$, $\boldsymbol{J}_2(\mu\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}} \xrightarrow{+} \boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}})$, $\boldsymbol{J}_3(\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}} \leftrightarrow \boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}})$ 分别称为第 (1)、(2)、(3) 种初等行变换矩阵.

类似地, 第 (1)、(2)、(3) 种初等列变换矩阵分别记为

1. $\boldsymbol{J}_1^*(\alpha\boldsymbol{e}_i)$,
2. $\boldsymbol{J}_2^*(\mu\boldsymbol{e}_i \xrightarrow{+} \boldsymbol{e}_j)$,
3. $\boldsymbol{J}_3^*(\boldsymbol{e}_i \leftrightarrow \boldsymbol{e}_j)$.

下面的结论是显然的:

$$\boldsymbol{J}_1(\alpha\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}) = \boldsymbol{J}_1^*(\alpha\boldsymbol{e}_i); \tag{15}$$

$$\boldsymbol{J}_2(\mu\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}} \xrightarrow{+} \boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}}) = \boldsymbol{J}_2^*(\mu\boldsymbol{e}_j \xrightarrow{+} \boldsymbol{e}_i); \tag{16}$$

(17)

$\boldsymbol{J}_1(\alpha \boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}})$, $\boldsymbol{J}_2(\mu \boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}} \xrightarrow{+} \boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}})$, $\boldsymbol{J}_3(\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}} \leftrightarrow \boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}})$ 分别称为第 (1)、(2)、(3) 种初等行变换矩阵.

类似地, 第 (1)、(2)、(3) 种初等列变换矩阵分别记为

1. $\boldsymbol{J}_1^*(\alpha \boldsymbol{e}_i)$,
2. $\boldsymbol{J}_2^*(\mu \boldsymbol{e}_i \xrightarrow{+} \boldsymbol{e}_j)$,
3. $\boldsymbol{J}_3^*(\boldsymbol{e}_i \leftrightarrow \boldsymbol{e}_j)$.

下面的结论是显然的:

$$\boldsymbol{J}_1(\alpha \boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}) = \boldsymbol{J}_1^*(\alpha \boldsymbol{e}_i); \tag{15}$$

$$\boldsymbol{J}_2(\mu \boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}} \xrightarrow{+} \boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}}) = \boldsymbol{J}_2^*(\mu \boldsymbol{e}_j \xrightarrow{+} \boldsymbol{e}_i); \tag{16}$$

$$\boldsymbol{J}_3(\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}} \leftrightarrow \boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}}) = \boldsymbol{J}_3^*(\boldsymbol{e}_i \leftrightarrow \boldsymbol{e}_j). \tag{17}$$

初等矩阵在矩阵乘法中的功能

"复制、传递" —— 初等矩阵是怎么由单位阵得来的, 它将把该变换过程传递到它所乘的矩阵; 并遵循 "左乘则行变, 右乘则列变" 的特点.

初等矩阵在矩阵乘法中的功能

"复制、传递"—— 初等矩阵是怎么由单位阵得来的, 它将把该变换过程传递到它所乘的矩阵; 并遵循"左乘则行变, 右乘则列变"的特点.

例如, 设 $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$.

初等矩阵在矩阵乘法中的功能

"复制、传递" —— 初等矩阵是怎么由单位阵得来的, 它将把该变换过程传递到它所乘的矩阵; 并遵循 "左乘则行变, 右乘则列变" 的特点.

例如, 设 $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$.

(1) 若计算 $\boldsymbol{PA}$, "左乘则行变", 意味着把 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换, $\boldsymbol{P}$ 是由单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 经行变换 $r_1 + \alpha r_3$ 得来, 则把 $\boldsymbol{A}$ 就进行相同的行变换:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + \alpha c_1 & a_2 + \alpha c_2 & a_3 + \alpha c_3 & a_4 + \alpha c_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$$

初等矩阵在矩阵乘法中的功能

"复制、传递" —— 初等矩阵是怎么由单位阵得来的, 它将把该变换过程传递到它所乘的矩阵; 并遵循 "左乘则行变, 右乘则列变" 的特点.

例如, 设 $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$.

(2) 若计算 $\boldsymbol{AP}$, "右乘则列变", 此时要视 $\boldsymbol{P}$ 是由单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 通过初等列变换 $c_3 + kc_1$ 得来, 并有

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 + \alpha a_1 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 + \alpha b_1 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 + \alpha c_1 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 + \alpha d_1 & d_4 \end{bmatrix}.$$

Outline

1. 矩阵及其初等运算
2. 矩阵的行列式和矩阵的秩
   - 行列式及其性质
   - 矩阵的秩及其性质
3. 矩阵的迹和矩阵的特征值

矩阵的行列式

方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}=\left[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n\right]$$

的行列式 (determinant)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

记为 $\det\boldsymbol{A}$, 或 $|\boldsymbol{A}|$, 或 $\mathrm{D}\left(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n\right)$.

$\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_n$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列.

矩阵的行列式

方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}=\left[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\right]$$

的行列式 (determinant)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

记为 $\det \boldsymbol{A}$, 或 $|\boldsymbol{A}|$, 或 $\mathrm{D}\left(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\right)$.

$\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_n$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列. 亦可称为行列式 $\det \boldsymbol{A}$ 的列.

Definition 2.1 (余子式, 代数余子式)

在行列式 $\det \boldsymbol{A}$ 中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列, 剩下的 $(n-1)^2$ 个元素按原来的排法构成一个 $n-1$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{18}$$

称为元素 a_{ij} 的余子式(minor determinant, minor), 记为 M_{ij}.

Definition 2.1 (余子式, 代数余子式)

在行列式 det $\boldsymbol{A}$ 中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列, 剩下的 $(n-1)^2$ 个元素按原来的排法构成一个 $n-1$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{18}$$

称为元素 a_{ij} 的余子式(minor determinant, minor), 记为 M_{ij}. 记

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

称 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式(adjunct, 或 cofactor).

Theorem 2.2

行列式 $\det \boldsymbol{A}$ 对任一行按下式展开, 其值相等, 即

$$\begin{aligned}\det \boldsymbol{A} &= (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} M_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} M_{in} \qquad (19)\\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}\\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}.\end{aligned}$$

Theorem 2.2

行列式 det $\boldsymbol{A}$ 对任一行按下式展开, 其值相等, 即

$$\begin{aligned}\det \boldsymbol{A} &= (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} M_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} M_{in} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}.\end{aligned} \tag{19}$$

亦可按列展开, 比如按第 j 列展开:

$$\begin{aligned}\det \boldsymbol{A} &= a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \cdots + a_{nj} A_{nj} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}.\end{aligned} \tag{20}$$

其中 $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Theorem 2.3

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵, 则有

1. $\det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$;

Theorem 2.3

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵, 则有

1. $\det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$;
2. $\det \boldsymbol{AB} = \det \boldsymbol{BA} = \det \boldsymbol{A} \det \boldsymbol{B}$;

Theorem 2.3

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵, 则有

1. $\det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$;
2. $\det \boldsymbol{AB} = \det \boldsymbol{BA} = \det \boldsymbol{A} \det \boldsymbol{B}$;
3. 设 $\boldsymbol{A} = \left[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\right]$, 则有

$$\begin{aligned}\det \boldsymbol{A} &= \mathrm{D}\left(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_j, \cdots, \boldsymbol{a}_n\right) \\ &= \mathrm{D}\left(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_j + \alpha \boldsymbol{a}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_n\right);\end{aligned}$$

Theorem 2.3

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵, 则有

1. $\det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$;
2. $\det \boldsymbol{AB} = \det \boldsymbol{BA} = \det \boldsymbol{A} \det \boldsymbol{B}$;
3. 设 $\boldsymbol{A} = \left[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\right]$, 则有

$$\begin{aligned}\det \boldsymbol{A} &= \mathrm{D}\left(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_j, \cdots, \boldsymbol{a}_n\right)\\ &= \mathrm{D}\left(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_j + \alpha \boldsymbol{a}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_n\right);\end{aligned}$$

4. 互换两行 (或两列), 行列式要反号:

$$\begin{aligned}\det \boldsymbol{A} &= \mathrm{D}\left(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_j, \cdots, \boldsymbol{a}_n\right)\\ &= -\mathrm{D}\left(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_j, \cdots, \boldsymbol{a}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_n\right);\end{aligned}$$

Definition 2.4 (k 阶子式, k 阶余子式)

在一个 n 阶行列式 D 中任意选定 k 行 k 列 $(k \leqslant n)$.

- 位于这些行与列的交点上的 k^2 个元素按原来的次序组成的一个 k 阶行列式 M 称为行列式 D 的一个 k **阶子式**.

Definition 2.4 (k 阶子式, k 阶余子式)

在一个 n 阶行列式 D 中任意选定 k 行 k 列 $(k \leqslant n)$.

- 位于这些行与列的交点上的 k^2 个元素按原来的次序组成的一个 k 阶行列式 M 称为行列式 D 的一个 k **阶子式**. 即

$$M = \det \mathrm{BL}_A \left\{ \begin{array}{cccc} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{array} \right\}$$

Definition 2.4 (k 阶子式, k 阶余子式)

在一个 n 阶行列式 D 中任意选定 k 行 k 列 $(k \leqslant n)$.

- 位于这些行与列的交点上的 k^2 个元素按原来的次序组成的一个 k 阶行列式 M 称为行列式 D 的一个 k **阶子式**. 即

$$M = \det \mathrm{BL}_A \left\{ \begin{array}{cccc} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{array} \right\}$$

$$\triangleq 式_A \left\{ \begin{array}{cccc} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{array} \right\}.$$

Definition 2.4 (k 阶子式, k 阶余子式)

在一个 n 阶行列式 D 中任意选定 k 行 k 列 $(k \leqslant n)$.

- 位于这些行与列的交点上的 k^2 个元素按原来的次序组成的一个 k 阶行列式 M 称为行列式 D 的一个 k **阶子式**. 即

$$M = \det \mathrm{BL}_A \left\{ \begin{array}{cccc} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{array} \right\}$$
$$\triangleq 式_A \left\{ \begin{array}{cccc} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{array} \right\}.$$

- 在 D 中划去这 k 行 k 列后, 余下的元素按原来的次序组成的 $n-k$ 阶行列式 M', 称为 k 级子式 M 的**余子式**.

Definition 2.4 (k 阶子式, k 阶余子式)

在一个 n 阶行列式 D 中任意选定 k 行 k 列 ($k \leqslant n$).

- 位于这些行与列的交点上的 k^2 个元素按原来的次序组成的一个 k 阶行列式 M 称为行列式 D 的一个 k **阶子式**. 即

$$M = \det \mathrm{BL}_A \left\{ \begin{matrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{matrix} \right\}$$
$$\triangleq 式_A \left\{ \begin{matrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{matrix} \right\}.$$

- 在 D 中划去这 k 行 k 列后, 余下的元素按原来的次序组成的 $n-k$ 阶行列式 M', 称为 k 级子式 M 的**余子式**. 记

$$M' = 余式_A \left\{ \begin{matrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{matrix} \right\}.$$

Example 2.5

在 4 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

中选定第 1、3 行, 第 2、4 列得到一个 2 阶子式

Example 2.5

在 4 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

中选定第 1、3 行, 第 2、4 列得到一个 2 阶子式

Example 2.5

在 4 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

中选定第 1、3 行, 第 2、4 列得到一个 2 阶子式

Example 2.5

在 4 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

中选定第 1、3 行, 第 2、4 列得到一个 2 阶子式

$$M = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

Example 2.5

在 4 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

中选定第 1、3 行, 第 2、4 列得到一个 2 阶子式

$$M = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

M 的余子式为

$$M' = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Example 2.6

在 5 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

Example 2.6

在 5 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

中

$$M = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{42} & a_{43} & a_{45} \end{vmatrix} \qquad \text{与} \qquad M' = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{51} & a_{54} \end{vmatrix}$$

是一对互余的余子式.

Definition 2.7

设 D 的 k 级子式 M 在 D 中所在的行、列指标分别是 $i_1, i_2, \cdots, i_k; j_1, j_2, \cdots, j_k$.

Definition 2.7

设 D 的 k 级子式 M 在 D 中所在的行、列指标分别是 $i_1, i_2, \cdots, i_k; j_1, j_2, \cdots, j_k$. 则 M 的余子式 M' 前面加上符号 $(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}$ 后称为 M 的**代数余子式**.

Definition 2.7

设 D 的 k 级子式 M 在 D 中所在的行、列指标分别是 $i_1, i_2, \cdots, i_k; j_1, j_2, \cdots, j_k$. 则 M 的余子式 M' 前面加上符号 $(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}$ 后称为 M 的**代数余子式**. 记为

$$\begin{aligned} A &\triangleq (-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)} M' \\ &\triangleq 代余式_A \left\{ \begin{matrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{matrix} \right\}. \end{aligned}$$

Definition 2.7

设 D 的 k 级子式 M 在 D 中所在的行、列指标分别是 $i_1, i_2, \cdots, i_k; j_1, j_2, \cdots, j_k$. 则 M 的余子式 M' 前面加上符号 $(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}$ 后称为 M 的**代数余子式**. 记为

$$\begin{aligned} A &\triangleq (-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}M' \\ &\triangleq \text{代余式}_A \left\{ \begin{matrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{matrix} \right\}. \end{aligned}$$

Theorem 2.8 (Laplace 定理)

行列式 D 中任意取定了 k $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ 个行. 由这 k 行元素所组成的一切 k 级子式与它们的代数余子式的乘积的和, 等于行列式 D.

Definition 2.7

设 D 的 k 级子式 M 在 D 中所在的行、列指标分别是 $i_1, i_2, \cdots, i_k$; $j_1, j_2, \cdots, j_k$. 则 M 的余子式 M' 前面加上符号 $(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}$ 后称为 M 的**代数余子式**. 记为

$$\begin{aligned} A &\triangleq (-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)} M' \\ &\triangleq \text{代余式}_A \begin{Bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Theorem 2.8 (Laplace 定理)

行列式 D 中任意取定了 k $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ 个行. 由这 k 行元素所组成的一切 k 级子式与它们的代数余子式的乘积的和, 等于行列式 D.

设 D 中取定 k 行后得到的子式为 $M_1, M_2, \cdots, M_t$, 它们的代数余子式分别为 $A_1, A_2, \cdots, A_t$,

Definition 2.7

设 D 的 k 级子式 M 在 D 中所在的行、列指标分别是 $i_1, i_2, \cdots, i_k; j_1, j_2, \cdots, j_k$. 则 M 的余子式 M' 前面加上符号 $(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}$ 后称为 M 的**代数余子式**. 记为

$$\begin{aligned} A &\triangleq (-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)} M' \\ &\triangleq \text{代余式}_A \left\{ \begin{matrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{matrix} \right\}. \end{aligned}$$

Theorem 2.8 (Laplace 定理)

行列式 D 中任意取定了 k $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ 个行. 由这 k 行元素所组成的一切 k 级子式与它们的代数余子式的乘积的和, 等于行列式 D.

设 D 中取定 k 行后得到的子式为 $M_1, M_2, \cdots, M_t$, 它们的代数余子式分别为 $A_1, A_2, \cdots, A_t$, 则

$$D = M_1 A_1 + M_2 A_2 + \cdots + M_t A_t.$$

Example 2.9

由拉普拉斯定理容易得到:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{nn} \\ \boldsymbol{B}_{mm} & \boldsymbol{C}_{mn} \end{vmatrix} = (-1)^{mn} \left|\boldsymbol{A}_{nn}\right| \cdot \left|\boldsymbol{B}_{mm}\right|, \tag{21}$$

$$\tag{22}$$

Example 2.9

由拉普拉斯定理容易得到:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{nn} \\ \boldsymbol{B}_{mm} & \boldsymbol{C}_{mn} \end{vmatrix} = (-1)^{mn} \left|\boldsymbol{A}_{nn}\right| \cdot \left|\boldsymbol{B}_{mm}\right|, \tag{21}$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{C}_{nm} & \boldsymbol{A}_{nn} \\ \boldsymbol{B}_{mm} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = (-1)^{mn} \left|\boldsymbol{A}_{nn}\right| \cdot \left|\boldsymbol{B}_{mm}\right|. \tag{22}$$

皮埃尔–西蒙·拉普拉斯侯爵 (Pierre-Simon marquis de Laplace, 1749 − 1827), 法国著名的天文学家和数学家, 天体力学的集大成者.

他用数学方法证明了行星轨道大小只有周期性变化, 此即著名的拉普拉斯定理.

他的著名杰作《天体力学》是经典天体力学的代表著作. 在《宇宙系统论》这部书中, 他提出了第一个科学的太阳系起源理论——星云说.

他在数学和物理学方面有重要贡献, 他是拉普拉斯变换和拉普拉斯方程的发现者.

Figure: Pierre-Simon Laplace (1749–1827).

Exercise 2.10

计算 $2n$ 阶行列式

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a_n & & & 0 & & & b_n \\ & \ddots & & & & \iddots & \\ & & a_1 & & b_1 & & \\ 0 & & & & & & 0 \\ & & c_1 & & d_1 & & \\ & \iddots & & & & \ddots & \\ c_n & & & 0 & & & d_n \end{vmatrix}.$$

解: 方法一. 将 c_{2n} 作 $2n-2$ 次列的相邻对换, 移到第二列; 再将 r_{2n} 作 $2n-2$ 次行的相邻对换, 移到第二行:

$$D_{2n}=(-1)^{2n-2}(-1)^{2n-2}\left|\begin{array}{cc|cccccc} a_n & b_n & & & & & & \\ c_n & d_n & & & & & & \\ \hline & & a_{n-1} & & & & & b_{n-1} \\ & & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & & a_1 & b_1 & & \\ & & & & c_1 & d_1 & & \\ & & & \iddots & & & \ddots & \\ & & c_{n-1} & & & & & d_{n-1} \end{array}\right|$$

解: 方法一. 将 c_{2n} 作 $2n-2$ 次列的相邻对换, 移到第二列; 再将 r_{2n} 作 $2n-2$ 次行的相邻对换, 移到第二行:

$$D_{2n} = (-1)^{2n-2}(-1)^{2n-2}\left|\begin{array}{cc:cccccc} a_n & b_n & & & & & & \\ c_n & d_n & & & & & & \\ \hdashline & & a_{n-1} & & & & & b_{n-1} \\ & & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & & a_1 & b_1 & & \\ & & & & c_1 & d_1 & & \\ & & & \iddots & & & \ddots & \\ & & c_{n-1} & & & & & d_{n-1} \end{array}\right|$$

$$= (a_n d_n - b_n c_n) D_{2(n-1)}$$

解: 方法一. 将 c_{2n} 作 $2n-2$ 次列的相邻对换, 移到第二列; 再将 r_{2n} 作 $2n-2$ 次行的相邻对换, 移到第二行:

$$D_{2n} = (-1)^{2n-2}(-1)^{2n-2}\left|\begin{array}{cc:cccccc}
a_n & b_n & & & & & & \\
c_n & d_n & & & & & & \\ \hdashline
 & & a_{n-1} & & & & & b_{n-1} \\
 & & & \ddots & & & \iddots & \\
 & & & & a_1 & b_1 & & \\
 & & & & c_1 & d_1 & & \\
 & & & \iddots & & & \ddots & \\
 & & c_{n-1} & & & & & d_{n-1}
\end{array}\right|$$

$$= (a_n d_n - b_n c_n) D_{2(n-1)}$$

$$= (a_n d_n - b_n c_n)(a_{n-1} d_{n-1} - b_{n-1} c_{n-1}) \cdots (a_1 d_1 - b_1 c_1)$$

解: 方法一. 将 c_{2n} 作 $2n-2$ 次列的相邻对换, 移到第二列; 再将 r_{2n} 作 $2n-2$ 次行的相邻对换, 移到第二行:

$$D_{2n} = (-1)^{2n-2}(-1)^{2n-2}\left|\begin{array}{cc:cccccc}
a_n & b_n & & & & & & \\
c_n & d_n & & & & & & \\
\hdashline
 & & a_{n-1} & & & & & b_{n-1} \\
 & & & \ddots & & & \iddots & \\
 & & & & a_1 & b_1 & & \\
 & & & & c_1 & d_1 & & \\
 & & & \iddots & & & \ddots & \\
 & & c_{n-1} & & & & & d_{n-1}
\end{array}\right|$$

$$= (a_n d_n - b_n c_n) D_{2(n-1)}$$

$$= (a_n d_n - b_n c_n)(a_{n-1} d_{n-1} - b_{n-1} c_{n-1}) \cdots (a_1 d_1 - b_1 c_1)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (a_i d_i - b_i c_i).$$

方法二. 按第一行展开得

$$D_{2n} = a_n \left|\begin{array}{ccccccc:c} a_{n-1} & & & 0 & & & b_{n-1} & 0 \\ & \ddots & & & & \iddots & & \\ & & a_1 & & b_1 & & & \\ 0 & & & & & & 0 & \vdots \\ & & c_1 & & d_1 & & & \\ & \iddots & & & & \ddots & & \\ c_{n-1} & & & 0 & & & d_{n-1} & 0 \\ \hdashline 0 & & & \cdots & & & 0 & d_n \end{array}\right|$$

$$+ (-1)^{2n+1} b_n \left|\begin{array}{c:ccccccc} 0 & a_{n-1} & & & 0 & & & b_{n-1} \\ & & \ddots & & & & \iddots & \\ & & & a_1 & & b_1 & & \\ 0 & \vdots & & & & & & 0 \\ & & & c_1 & & d_1 & & \\ & & \iddots & & & & \ddots & \\ 0 & c_{n-1} & & & & & & d_{n-1} \\ \hdashline c_n & 0 & & & 0 & & & 0 \end{array}\right|$$

方法二. 按第一行展开得

$$D_{2n} = a_n \left|\begin{array}{cccccc:c} a_{n-1} & & & 0 & & b_{n-1} & 0 \\ & \ddots & & & \iddots & & \\ 0 & & a_1 & b_1 & & 0 & \vdots \\ & & c_1 & d_1 & & & \\ & \iddots & & & \ddots & & \\ c_{n-1} & & & 0 & & d_{n-1} & 0 \\ \hdashline 0 & & & \cdots & & 0 & d_n \end{array}\right| \longrightarrow a_n d_n D_{2(n-1)}$$

$$+ (-1)^{2n+1} b_n \left|\begin{array}{c:cccccc} 0 & a_{n-1} & & & 0 & & b_{n-1} \\ & & \ddots & & & \iddots & \\ 0 & \vdots & & a_1 & b_1 & & 0 \\ & & & c_1 & d_1 & & \\ & & \iddots & & & \ddots & \\ 0 & c_{n-1} & & & & & d_{n-1} \\ \hdashline c_n & 0 & & & 0 & & 0 \end{array}\right|$$

方法二. 按第一行展开得

$$D_{2n} = a_n \left|\begin{array}{ccccc:c} a_{n-1} & & 0 & & b_{n-1} & 0 \\ & \ddots & & \iddots & & \\ 0 & & \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{matrix} & & 0 & \vdots \\ & \iddots & & \ddots & & \\ c_{n-1} & & 0 & & d_{n-1} & 0 \\ \hdashline 0 & & \cdots & & 0 & d_n \end{array}\right| \longrightarrow a_n d_n D_{2(n-1)}$$

$$+ (-1)^{2n+1} b_n \left|\begin{array}{c:ccccc} 0 & a_{n-1} & & 0 & & b_{n-1} \\ & & \ddots & & \iddots & \\ 0 & \vdots & & \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{matrix} & & 0 \\ & & \iddots & & \ddots & \\ 0 & c_{n-1} & & & & d_{n-1} \\ \hdashline c_n & 0 & & 0 & & 0 \end{array}\right| \longrightarrow -b_n c_n D_{2(n-1)}$$

方法三. 用 Laplace 定理, 选取第 1 行、第 $2n$ 行展开, 注意到由这两行构成的 2 阶子式只有 $\begin{vmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{vmatrix}$ 有可能不为 0, 得

$$D_{2n} = (-1)^{(1+2n)+(1+2n)} \begin{vmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{n-1} & & & 0 & & & b_{n-1} \\ & \ddots & & & & \iddots & \\ & & a_1 & & b_1 & & \\ 0 & & & & & & 0 \\ & & c_1 & & d_1 & & \\ & \iddots & & & & \ddots & \\ c_{n-1} & & & 0 & & & d_{n-1} \end{vmatrix}$$

方法三. 用 Laplace 定理, 选取第 1 行、第 $2n$ 行展开, 注意到由这两行构成的 2 阶子式只有 $\begin{vmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{vmatrix}$ 有可能不为 0, 得

$$D_{2n} = (-1)^{(1+2n)+(1+2n)} \begin{vmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{n-1} & & & 0 & & & b_{n-1} \\ & \ddots & & & & \iddots & \\ & & a_1 & & b_1 & & \\ 0 & & & & & & 0 \\ & & c_1 & & d_1 & & \\ & \iddots & & & & \ddots & \\ c_{n-1} & & & 0 & & & d_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (a_n d_n - b_n c_n) D_{2(n-1)}$$

方法三. 用 Laplace 定理, 选取第 1 行、第 $2n$ 行展开, 注意到由这两行构成的 2 阶子式只有 $\begin{vmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{vmatrix}$ 有可能不为 0, 得

$$
\begin{aligned}
D_{2n} &= (-1)^{(1+2n)+(1+2n)} \begin{vmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{n-1} & & & 0 & & & b_{n-1} \\ & \ddots & & & & \iddots & \\ & & a_1 & & b_1 & & \\ 0 & & & & & & 0 \\ & & c_1 & & d_1 & & \\ & \iddots & & & & \ddots & \\ c_{n-1} & & & 0 & & & d_{n-1} \end{vmatrix} \\
&= (a_n d_n - b_n c_n) D_{2(n-1)} \\
&= \prod_{i=1}^{n} (a_i d_i - b_i c_i).
\end{aligned}
$$

Outline

1. 矩阵及其初等运算
2. 矩阵的行列式和矩阵的秩
   - 行列式及其性质
   - 矩阵的秩及其性质
3. 矩阵的迹和矩阵的特征值

Definition 2.11

设矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ 至少存在一个 k 阶子式不为零, 而所有 $k+1$ 阶子式 (若存在) 全部为零, 则称 k 为矩阵$\boldsymbol{A}$ 的秩(rank).

Definition 2.11

设矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ 至少存在一个 k 阶子式不为零, 而所有 $k+1$ 阶子式 (若存在) 全部为零, 则称 k 为矩阵$\boldsymbol{A}$ 的秩(rank). 记为

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = k.$$

Definition 2.11

设矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ 至少存在一个 k 阶子式不为零, 而所有 $k+1$ 阶子式 (若存在) 全部为零, 则称 k 为矩阵$\boldsymbol{A}$ 的秩(rank). 记为

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = k.$$

- 若 $k = n$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为列满秩矩阵;

Definition 2.11

设矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ 至少存在一个 k 阶子式不为零, 而所有 $k+1$ 阶子式 (若存在) 全部为零, 则称 k 为矩阵$\boldsymbol{A}$ 的秩(rank). 记为

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = k.$$

- 若 $k = n$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为列满秩矩阵;
- 若 $k = m$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为行满秩矩阵;

Definition 2.11

设矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ 至少存在一个 k 阶子式不为零, 而所有 $k+1$ 阶子式 (若存在) 全部为零, 则称 k 为矩阵$\boldsymbol{A}$ 的秩(rank). 记为

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = k.$$

- 若 $k = n$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为列满秩矩阵;
- 若 $k = m$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为行满秩矩阵;
- 若 $m = n = k$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵.

Definition 2.11

设矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ 至少存在一个 k 阶子式不为零, 而所有 $k+1$ 阶子式 (若存在) 全部为零, 则称 k 为矩阵$\boldsymbol{A}$ 的秩(rank). 记为

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = k.$$

- 若 $k = n$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为列满秩矩阵;
- 若 $k = m$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为行满秩矩阵;
- 若 $m = n = k$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵.

记号约定

- $\mathbb{R}_k^{m\times n}$: $\forall \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}_k^{m\times n}$, 满足 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 且 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = k$;

Definition 2.11

设矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$ 至少存在一个 k 阶子式不为零, 而所有 $k+1$ 阶子式 (若存在) 全部为零, 则称 k 为矩阵$\boldsymbol{A}$ 的秩(rank). 记为

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=k.$$

- 若 $k=n$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为列满秩矩阵;
- 若 $k=m$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为行满秩矩阵;
- 若 $m=n=k$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵.

记号约定

- $\mathbb{R}_k^{m\times n}$: $\forall\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}_k^{m\times n}$, 满足 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 且 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=k$;
- $\mathbb{C}_k^{m\times n}$: $\forall\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}_k^{m\times n}$, 满足 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$ 且 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=k$.

Theorem 2.12

方阵 $\boldsymbol{A}$ 满秩 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 可逆.

Theorem 2.12

方阵 $\boldsymbol{A}$ 满秩 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 可逆.

矩阵可逆的几个等价说法

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 下列表述是等价的:

- 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆.
- $|\boldsymbol{A}| \neq 0$.
- $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵.
- $\boldsymbol{A}$ 是满秩矩阵; 或 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = n$.
- $\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵等价; 或说, $\boldsymbol{A}$ 的标准形是单位阵.
- $\boldsymbol{A}$ 可以分解为一系列初等矩阵的乘积.
- $\boldsymbol{A}$ 的行 (列) 向量组线性无关.
- 齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 只有零解.
- 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有唯一解.

Theorem 2.12

方阵 $\boldsymbol{A}$ 满秩 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 可逆.

矩阵可逆的几个等价说法

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 下列表述是等价的:

- 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆.
- $|\boldsymbol{A}| \neq 0$.
- $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵.
- $\boldsymbol{A}$ 是满秩矩阵; 或 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = n$.
- $\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵等价; 或说, $\boldsymbol{A}$ 的标准形是单位阵.
- $\boldsymbol{A}$ 可以分解为一系列初等矩阵的乘积.
- $\boldsymbol{A}$ 的行 (列) 向量组线性无关.
- 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 只有零解.
- 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有唯一解.

Theorem 2.12

方阵 $\boldsymbol{A}$ 满秩 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 可逆.

矩阵可逆的几个等价说法

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 下列表述是等价的:

- 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆.
- $|\boldsymbol{A}| \neq 0$.
- $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵.
- $\boldsymbol{A}$ 是满秩矩阵; 或 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = n$.
- $\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵等价; 或说, $\boldsymbol{A}$ 的标准形是单位阵.
- $\boldsymbol{A}$ 可以分解为一系列初等矩阵的乘积.
- $\boldsymbol{A}$ 的行 (列) 向量组线性无关.
- 齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 只有零解.
- 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有唯一解.

Theorem 2.12

方阵 $\boldsymbol{A}$ 满秩 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 可逆.

矩阵可逆的几个等价说法

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 下列表述是等价的:

- 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆.
- $|\boldsymbol{A}| \neq 0$.
- $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵.
- $\boldsymbol{A}$ 是满秩矩阵; 或 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = n$.
- $\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵等价; 或说, $\boldsymbol{A}$ 的标准形是单位阵.
- $\boldsymbol{A}$ 可以分解为一系列初等矩阵的乘积.
- $\boldsymbol{A}$ 的行 (列) 向量组线性无关.
- 齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 只有零解.
- 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有唯一解.

Theorem 2.12

方阵 $\boldsymbol{A}$ 满秩 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 可逆.

矩阵可逆的几个等价说法

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 下列表述是等价的:

- 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆.
- $|\boldsymbol{A}| \neq 0$.
- $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵.
- $\boldsymbol{A}$ 是满秩矩阵; 或 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = n$.
- $\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵等价; 或说, $\boldsymbol{A}$ 的标准形是单位阵.
- $\boldsymbol{A}$ 可以分解为一系列初等矩阵的乘积.
- $\boldsymbol{A}$ 的行 (列) 向量组线性无关.
- 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 只有零解.
- 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有唯一解.

Theorem 2.12

方阵 $\boldsymbol{A}$ 满秩 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 可逆.

矩阵可逆的几个等价说法

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 下列表述是等价的:

- 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆.
- $|\boldsymbol{A}| \neq 0$.
- $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵.
- $\boldsymbol{A}$ 是满秩矩阵; 或 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = n$.
- $\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵等价; 或说, $\boldsymbol{A}$ 的标准形是单位阵.
- $\boldsymbol{A}$ 可以分解为一系列初等矩阵的乘积.
- $\boldsymbol{A}$ 的行 (列) 向量组线性无关.
- 齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 只有零解.
- 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有唯一解.

Theorem 2.12

方阵 $\boldsymbol{A}$ 满秩 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 可逆.

矩阵可逆的几个等价说法

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 下列表述是等价的:

- 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆.
- $|\boldsymbol{A}| \neq 0$.
- $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵.
- $\boldsymbol{A}$ 是满秩矩阵; 或 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = n$.
- $\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵等价; 或说, $\boldsymbol{A}$ 的标准形是单位阵.
- $\boldsymbol{A}$ 可以分解为一系列初等矩阵的乘积.
- $\boldsymbol{A}$ 的行 (列) 向量组线性无关.
- 齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 只有零解.
- 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有唯一解.

Theorem 2.12

方阵 $\boldsymbol{A}$ 满秩 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 可逆.

矩阵可逆的几个等价说法

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 下列表述是等价的:

- 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆.
- $|\boldsymbol{A}| \neq 0$.
- $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵.
- $\boldsymbol{A}$ 是满秩矩阵; 或 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = n$.
- $\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵等价; 或说, $\boldsymbol{A}$ 的标准形是单位阵.
- $\boldsymbol{A}$ 可以分解为一系列初等矩阵的乘积.
- $\boldsymbol{A}$ 的行 (列) 向量组线性无关.
- 齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 只有零解.
- 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有唯一解.

Theorem 2.12

方阵 $\boldsymbol{A}$ 满秩 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 可逆.

矩阵可逆的几个等价说法

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 下列表述是等价的:

- 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆.
- $|\boldsymbol{A}| \neq 0$.
- $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵.
- $\boldsymbol{A}$ 是满秩矩阵; 或 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = n$.
- $\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵等价; 或说, $\boldsymbol{A}$ 的标准形是单位阵.
- $\boldsymbol{A}$ 可以分解为一系列初等矩阵的乘积.
- $\boldsymbol{A}$ 的行 (列) 向量组线性无关.
- 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 只有零解.
- 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有唯一解.

Theorem 2.13

1. 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则

$$0 \leqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{A} \leqslant \min(m, n).$$

Theorem 2.13

1. 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则
$$0 \leqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{A} \leqslant \min(m, n).$$
2. $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$;

Theorem 2.13

1. 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则

$$0 \leqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{A} \leqslant \min(m, n).$$

2. $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$;

3. 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{n\times p}$, 则

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{A} + \operatorname{rank} \boldsymbol{B} - n \leqslant \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) \leqslant \min(\operatorname{rank} \boldsymbol{A}, \operatorname{rank} \boldsymbol{B}).$$

Theorem 2.13

1. 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则
$$0 \leqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{A} \leqslant \min(m, n).$$
2. $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$;
3. 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{n\times p}$, 则
$$\operatorname{rank} \boldsymbol{A} + \operatorname{rank} \boldsymbol{B} - n \leqslant \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) \leqslant \min(\operatorname{rank} \boldsymbol{A}, \operatorname{rank} \boldsymbol{B}).$$
4. 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$, $\boldsymbol{X} \in \mathbb{C}_m^{p\times m}$, $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{C}_n^{n\times q}$, 则
$$\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank} \boldsymbol{X}\boldsymbol{A} = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y} = \operatorname{rank} \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}.$$

Theorem 2.14

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rank}[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] + \operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{bmatrix} - \operatorname{rank}\boldsymbol{A} - \operatorname{rank}\boldsymbol{B}\\
\leqslant\ &\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\\
\leqslant\ &\min\left(\operatorname{rank}[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}], \operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{bmatrix}\right)\\
\leqslant\ &\operatorname{rank}\boldsymbol{A} + \operatorname{rank}\boldsymbol{B}.
\end{aligned}$$

Example 2.15

证明: $\max\{\operatorname{rank} \boldsymbol{A}, \operatorname{rank} \boldsymbol{B}\} \leqslant \operatorname{rank}[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] \leqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{A} + \operatorname{rank} \boldsymbol{B}$.

Example 2.15

证明: $\max\{\operatorname{rank} \boldsymbol{A}, \operatorname{rank} \boldsymbol{B}\} \leqslant \operatorname{rank}[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] \leqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{A} + \operatorname{rank} \boldsymbol{B}$.

Proof.

因为 $\boldsymbol{A}$ 的列均可由 $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]$ 的列线性表出, 所以

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{A} \leqslant \operatorname{rank}[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}], \tag{23}$$

□

Example 2.15

证明: $\max\{\operatorname{rank}\boldsymbol{A}, \operatorname{rank}\boldsymbol{B}\} \leqslant \operatorname{rank}[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] \leqslant \operatorname{rank}\boldsymbol{A} + \operatorname{rank}\boldsymbol{B}$.

Proof.

因为 $\boldsymbol{A}$ 的列均可由 $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]$ 的列线性表出, 所以

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{A} \leqslant \operatorname{rank}[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}], \tag{23}$$

同理 $\operatorname{rank}\boldsymbol{B} \leqslant \operatorname{rank}[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]$.

□

Example 2.15

证明: $\max\{\operatorname{rank}\boldsymbol{A}, \operatorname{rank}\boldsymbol{B}\} \leqslant \operatorname{rank}[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] \leqslant \operatorname{rank}\boldsymbol{A} + \operatorname{rank}\boldsymbol{B}$.

Proof.

因为 $\boldsymbol{A}$ 的列均可由 $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]$ 的列线性表出, 所以

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{A} \leqslant \operatorname{rank}[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}], \tag{23}$$

同理 $\operatorname{rank}\boldsymbol{B} \leqslant \operatorname{rank}[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]$. 所以

$$\max\{\operatorname{rank}\boldsymbol{A}, \operatorname{rank}\boldsymbol{B}\} \leqslant \operatorname{rank}[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}].$$

□

Example 2.15

证明: $\max\{\operatorname{rank} \boldsymbol{A}, \operatorname{rank} \boldsymbol{B}\} \leqslant \operatorname{rank}[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] \leqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{A} + \operatorname{rank} \boldsymbol{B}$.

Proof.

设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量的极大线性无关组, $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_s$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的列向量的极大线性无关组.

Example 2.15

证明: $\max\{\operatorname{rank}\boldsymbol{A}, \operatorname{rank}\boldsymbol{B}\} \leqslant \operatorname{rank}[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] \leqslant \operatorname{rank}\boldsymbol{A} + \operatorname{rank}\boldsymbol{B}$.

Proof.

设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量的极大线性无关组, $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_s$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的列向量的极大线性无关组. 则 $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]$ 的列向量均可由向量组 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_r$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{b}_s$ 线性表出,

Example 2.15

证明: $\max\{\operatorname{rank}\boldsymbol{A}, \operatorname{rank}\boldsymbol{B}\} \leqslant \operatorname{rank}[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] \leqslant \operatorname{rank}\boldsymbol{A} + \operatorname{rank}\boldsymbol{B}$.

Proof.

设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量的极大线性无关组, $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_s$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的列向量的极大线性无关组. 则 $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]$ 的列向量均可由向量组 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_r$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{b}_s$ 线性表出, 所以

$$\operatorname{rank}[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] \leqslant \operatorname{rank}[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_s]$$

Example 2.15

证明: $\max\{\operatorname{rank} \boldsymbol{A}, \operatorname{rank} \boldsymbol{B}\} \leqslant \operatorname{rank}[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] \leqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{A} + \operatorname{rank} \boldsymbol{B}$.

Proof.

设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量的极大线性无关组, $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_s$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的列向量的极大线性无关组. 则 $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]$ 的列向量均可由向量组 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_r$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{b}_s$ 线性表出, 所以

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] &\leqslant \operatorname{rank}[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_s] \\ &\leqslant r + s\end{aligned}$$

Example 2.15

证明: $\max\{\operatorname{rank}\boldsymbol{A}, \operatorname{rank}\boldsymbol{B}\} \leqslant \operatorname{rank}[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] \leqslant \operatorname{rank}\boldsymbol{A} + \operatorname{rank}\boldsymbol{B}$.

Proof.

设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量的极大线性无关组, $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_s$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的列向量的极大线性无关组. 则 $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]$ 的列向量均可由向量组 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_r$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{b}_s$ 线性表出, 所以

$$\begin{aligned}
\operatorname{rank}[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] &\leqslant \operatorname{rank}[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_s] \\
&\leqslant r + s \\
&= \operatorname{rank}\boldsymbol{A} + \operatorname{rank}\boldsymbol{B}.
\end{aligned}$$

Example 2.15

证明: $\max\{\operatorname{rank}\boldsymbol{A}, \operatorname{rank}\boldsymbol{B}\} \leqslant \operatorname{rank}[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] \leqslant \operatorname{rank}\boldsymbol{A} + \operatorname{rank}\boldsymbol{B}$.

Proof.

设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量的极大线性无关组, $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_s$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的列向量的极大线性无关组. 则 $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]$ 的列向量均可由向量组 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_r$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{b}_s$ 线性表出, 所以

$$\begin{aligned}
\operatorname{rank}[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] &\leqslant \operatorname{rank}[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_s] \\
&\leqslant r + s \\
&= \operatorname{rank}\boldsymbol{A} + \operatorname{rank}\boldsymbol{B}.
\end{aligned}$$

得证 $\operatorname{rank}[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] \leqslant \operatorname{rank}\boldsymbol{A} + \operatorname{rank}\boldsymbol{B}$. □

Example 2.15

证明: $\max\{\operatorname{rank}\boldsymbol{A}, \operatorname{rank}\boldsymbol{B}\} \leqslant \operatorname{rank}[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] \leqslant \operatorname{rank}\boldsymbol{A} + \operatorname{rank}\boldsymbol{B}$.

Proof.

设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量的极大线性无关组, $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_s$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的列向量的极大线性无关组. 则 $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]$ 的列向量均可由向量组 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_r$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{b}_s$ 线性表出, 所以

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] &\leqslant \operatorname{rank}[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_s] \\ &\leqslant r + s \\ &= \operatorname{rank}\boldsymbol{A} + \operatorname{rank}\boldsymbol{B}.\end{aligned}$$

得证 $\operatorname{rank}[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] \leqslant \operatorname{rank}\boldsymbol{A} + \operatorname{rank}\boldsymbol{B}$. □

同理有 $\max\{\operatorname{rank}\boldsymbol{A}, \operatorname{rank}\boldsymbol{B}\} \leqslant \operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B}\end{bmatrix} \leqslant \operatorname{rank}\boldsymbol{A} + \operatorname{rank}\boldsymbol{B}$.

Example 2.16

证明: $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \leqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{A}+\operatorname{rank} \boldsymbol{B}$.

Example 2.16

证明: $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \leqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{A}+\operatorname{rank} \boldsymbol{B}$.

Proof.

因为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的列均可由 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 的列线性表出,

Example 2.16

证明: $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \leqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{A}+\operatorname{rank} \boldsymbol{B}$.

Proof.

因为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的列均可由 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 的列线性表出, 所以

$$\begin{aligned} \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) & \leqslant \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) && (23) \\ & \leqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{A}+\operatorname{rank} \boldsymbol{B}. && (24) \end{aligned}$$

Example 2.16

证明: $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \leqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{A}+\operatorname{rank} \boldsymbol{B}$.

Proof.

因为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的列均可由 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 的列线性表出, 所以

$$\begin{aligned} \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) & \leqslant \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) && (23) \\ & \leqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{A}+\operatorname{rank} \boldsymbol{B}. && (24) \end{aligned}$$

得证

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \leqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{A}+\operatorname{rank} \boldsymbol{B}. \tag{25}$$

$\square$

Example 2.17

证明: $\operatorname{rank} \boldsymbol{AB} \leqslant \min\{\operatorname{rank} \boldsymbol{A}, \operatorname{rank} \boldsymbol{B}\}$.

Example 2.17

证明: $\operatorname{rank} \boldsymbol{AB} \leqslant \min\{\operatorname{rank} \boldsymbol{A}, \operatorname{rank} \boldsymbol{B}\}$.

Proof.

矩阵$\boldsymbol{AB}$ 的列向量是矩阵$\boldsymbol{A}$ 的列向量的线性组合,

Example 2.17

证明: $\operatorname{rank} \boldsymbol{AB} \leqslant \min\{\operatorname{rank} \boldsymbol{A}, \operatorname{rank} \boldsymbol{B}\}$.

Proof.

矩阵$\boldsymbol{AB}$ 的列向量是矩阵$\boldsymbol{A}$ 的列向量的线性组合, 事实上, 设

$$\boldsymbol{AB} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{ms} \end{pmatrix},$$

矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的第 i 列为 $b_{1i}\boldsymbol{a}_1 + b_{2i}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + b_{mi}\boldsymbol{a}_m$.

Example 2.17

证明: $\operatorname{rank} \boldsymbol{AB} \leqslant \min\{\operatorname{rank} \boldsymbol{A}, \operatorname{rank} \boldsymbol{B}\}$.

Proof.

矩阵$\boldsymbol{AB}$ 的列向量是矩阵$\boldsymbol{A}$ 的列向量的线性组合, 事实上, 设

$$\boldsymbol{AB} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{ms} \end{pmatrix},$$

矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的第 i 列为 $b_{1i}\boldsymbol{a}_1 + b_{2i}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + b_{mi}\boldsymbol{a}_m$. 矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的列向量可以被矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表示, 则

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{AB} \leqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{A}.$$

Example 2.17

证明: $\operatorname{rank} \boldsymbol{AB} \leqslant \min\{\operatorname{rank} \boldsymbol{A}, \operatorname{rank} \boldsymbol{B}\}$.

Proof.

矩阵$\boldsymbol{AB}$ 的列向量是矩阵$\boldsymbol{A}$ 的列向量的线性组合, 事实上, 设

$$\boldsymbol{AB} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{ms} \end{pmatrix},$$

矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的第 i 列为 $b_{1i}\boldsymbol{a}_1 + b_{2i}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + b_{mi}\boldsymbol{a}_m$. 矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的列向量可以被矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表示, 则

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{AB} \leqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{A}.$$

同理, $\boldsymbol{AB}$ 的行向量是$\boldsymbol{B}$ 的行向量的线性组合, 故 $\operatorname{rank} \boldsymbol{AB} \leqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{B}$. □

Theorem 2.18

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, 则 n 阶齐次方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有非零解的充要条件是

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{A} < n.$$

Outline

Definition 3.1

设 n 阶方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

称 $\boldsymbol{A}$ 的主对角元素的和为 $\boldsymbol{A}$ 的迹(trace), 记为 $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}$.

Definition 3.1

设 n 阶方阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

称 $\boldsymbol{A}$ 的主对角元素的和为 $\boldsymbol{A}$ 的迹(trace), 记为 $\operatorname{tr} \boldsymbol{A}$. 即

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{A} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

Theorem 3.2

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵, λ, μ 是任意复数, 则

1. $\operatorname{tr}(\lambda \boldsymbol{A} + \mu \boldsymbol{B}) = \lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{A} + \mu \operatorname{tr} \boldsymbol{B}$;

Theorem 3.2

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵, λ, μ 是任意复数, 则

1. $\operatorname{tr}(\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{B})=\lambda\operatorname{tr}\boldsymbol{A}+\mu\operatorname{tr}\boldsymbol{B}$;
2. $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=\operatorname{tr}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$;

Theorem 3.2

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵, λ, μ 是任意复数, 则

1. $\operatorname{tr}(\lambda \boldsymbol{A} + \mu \boldsymbol{B}) = \lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{A} + \mu \operatorname{tr} \boldsymbol{B}$;
2. $\operatorname{tr} \boldsymbol{A} = \operatorname{tr} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$;
3. $\operatorname{tr} \boldsymbol{AB} = \operatorname{tr} \boldsymbol{BA}$, 其中 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{n\times m}$.

Proof.

下证 (3) $\operatorname{tr} \boldsymbol{AB} = \operatorname{tr} \boldsymbol{BA}$. 其中 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{n\times m}$.

因为 $(\boldsymbol{AB})_{m\times m}$ 的对角线元素为 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1}, \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k2}, \cdots, \sum\limits_{k=1}^{n} a_{mk}b_{km}$,

Proof.

下证 (3) $\operatorname{tr}\boldsymbol{AB}=\operatorname{tr}\boldsymbol{BA}$. 其中 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{n\times m}$.

因为 $(\boldsymbol{AB})_{m\times m}$ 的对角线元素为 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_{1k}b_{k1},\sum\limits_{k=1}^{n}a_{2k}b_{k2},\cdots,\sum\limits_{k=1}^{n}a_{mk}b_{km}$, 而

$(\boldsymbol{BA})_{n\times n}$ 的对角线元素为 $\sum\limits_{i=1}^{m}b_{1i}a_{i1},\sum\limits_{i=1}^{m}b_{2i}a_{i2},\cdots,\sum\limits_{i=1}^{m}b_{ni}a_{in}$,

Proof.

下证 (3) $\operatorname{tr}\boldsymbol{AB}=\operatorname{tr}\boldsymbol{BA}$. 其中 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{n\times m}$.

因为 $(\boldsymbol{AB})_{m\times m}$ 的对角线元素为 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_{1k}b_{k1},\sum\limits_{k=1}^{n}a_{2k}b_{k2},\cdots,\sum\limits_{k=1}^{n}a_{mk}b_{km}$, 而 $(\boldsymbol{BA})_{n\times n}$ 的对角线元素为 $\sum\limits_{i=1}^{m}b_{1i}a_{i1},\sum\limits_{i=1}^{m}b_{2i}a_{i2},\cdots,\sum\limits_{i=1}^{m}b_{ni}a_{in}$, 故

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{AB}=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}b_{k1}+\sum_{k=1}^{n}a_{2k}b_{k2}+\cdots+\sum_{k=1}^{n}a_{mk}b_{km}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki} \tag{26}$$

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{BA}=\sum_{i=1}^{m}b_{1i}a_{i1}+\sum_{i=1}^{m}b_{2i}a_{i2}+\cdots+\sum_{i=1}^{m}b_{ni}a_{in}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}b_{ki}a_{ik}, \tag{27}$$

Proof.

下证 (3) $\operatorname{tr}\boldsymbol{AB}=\operatorname{tr}\boldsymbol{BA}$. 其中 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{n\times m}$.

因为 $(\boldsymbol{AB})_{m\times m}$ 的对角线元素为 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_{1k}b_{k1},\sum\limits_{k=1}^{n}a_{2k}b_{k2},\cdots,\sum\limits_{k=1}^{n}a_{mk}b_{km}$, 而 $(\boldsymbol{BA})_{n\times n}$ 的对角线元素为 $\sum\limits_{i=1}^{m}b_{1i}a_{i1},\sum\limits_{i=1}^{m}b_{2i}a_{i2},\cdots,\sum\limits_{i=1}^{m}b_{ni}a_{in}$, 故

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{AB}=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}b_{k1}+\sum_{k=1}^{n}a_{2k}b_{k2}+\cdots+\sum_{k=1}^{n}a_{mk}b_{km}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki} \tag{26}$$

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{BA}=\sum_{i=1}^{m}b_{1i}a_{i1}+\sum_{i=1}^{m}b_{2i}a_{i2}+\cdots+\sum_{i=1}^{m}b_{ni}a_{in}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}b_{ki}a_{ik}, \tag{27}$$

注意到在双重连加号中, 连加号的次序可以颠倒, 即 $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{n}c_{ik}=\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m}c_{ik}$,

Proof.

下证 (3) $\operatorname{tr}\boldsymbol{AB}=\operatorname{tr}\boldsymbol{BA}$. 其中 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{n\times m}$.

因为 $(\boldsymbol{AB})_{m\times m}$ 的对角线元素为 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_{1k}b_{k1},\sum\limits_{k=1}^{n}a_{2k}b_{k2},\cdots,\sum\limits_{k=1}^{n}a_{mk}b_{km}$, 而 $(\boldsymbol{BA})_{n\times n}$ 的对角线元素为 $\sum\limits_{i=1}^{m}b_{1i}a_{i1},\sum\limits_{i=1}^{m}b_{2i}a_{i2},\cdots,\sum\limits_{i=1}^{m}b_{ni}a_{in}$, 故

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{AB}=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}b_{k1}+\sum_{k=1}^{n}a_{2k}b_{k2}+\cdots+\sum_{k=1}^{n}a_{mk}b_{km}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki} \tag{26}$$

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{BA}=\sum_{i=1}^{m}b_{1i}a_{i1}+\sum_{i=1}^{m}b_{2i}a_{i2}+\cdots+\sum_{i=1}^{m}b_{ni}a_{in}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}b_{ki}a_{ik}, \tag{27}$$

注意到在双重连加号中, 连加号的次序可以颠倒, 即 $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{n}c_{ik}=\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m}c_{ik}$, 故

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}b_{ki}a_{ik}.$$

Proof.

下证 (3) $\operatorname{tr}\boldsymbol{AB}=\operatorname{tr}\boldsymbol{BA}$. 其中 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{n\times m}$.

因为 $(\boldsymbol{AB})_{m\times m}$ 的对角线元素为 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_{1k}b_{k1},\sum\limits_{k=1}^{n}a_{2k}b_{k2},\cdots,\sum\limits_{k=1}^{n}a_{mk}b_{km}$, 而 $(\boldsymbol{BA})_{n\times n}$ 的对角线元素为 $\sum\limits_{i=1}^{m}b_{1i}a_{i1},\sum\limits_{i=1}^{m}b_{2i}a_{i2},\cdots,\sum\limits_{i=1}^{m}b_{ni}a_{in}$, 故

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{AB}=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}b_{k1}+\sum_{k=1}^{n}a_{2k}b_{k2}+\cdots+\sum_{k=1}^{n}a_{mk}b_{km}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki} \tag{26}$$

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{BA}=\sum_{i=1}^{m}b_{1i}a_{i1}+\sum_{i=1}^{m}b_{2i}a_{i2}+\cdots+\sum_{i=1}^{m}b_{ni}a_{in}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}b_{ki}a_{ik}, \tag{27}$$

注意到在双重连加号中, 连加号的次序可以颠倒, 即 $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{n}c_{ik}=\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m}c_{ik}$, 故

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}b_{ki}a_{ik}.$$

得证 $\operatorname{tr}\boldsymbol{AB}=\operatorname{tr}\boldsymbol{BA}$. □

Outline

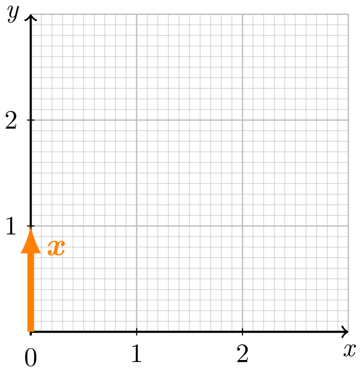
1. 矩阵及其初等运算
2. 矩阵的行列式和矩阵的秩
3. 矩阵的迹和矩阵的特征值
   - 矩阵的迹及其初等性质
   - 矩阵的特征值
   - 应用举例: Google 财富的秘密
   - Geršgorin 圆盘定理

矩阵乘以向量, 其功能是什么?

给定 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

矩阵乘以向量, 其功能是什么?

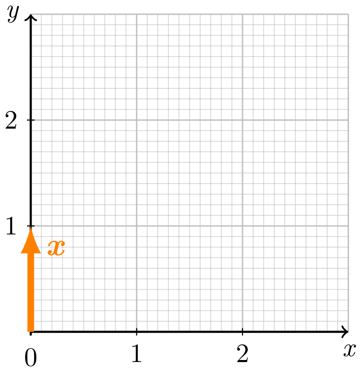
给定 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 取 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,



矩阵乘以向量, 其功能是什么?

给定 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 取 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 有

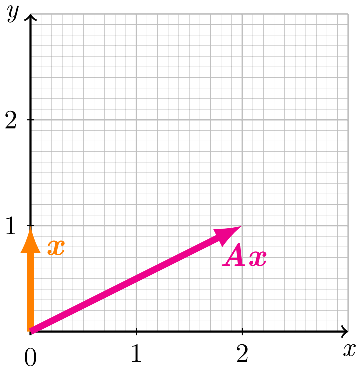
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



矩阵乘以向量, 其功能是什么?

给定 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 取 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 有

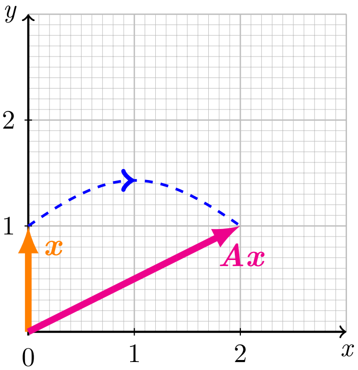
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



矩阵乘以向量, 其功能是什么?

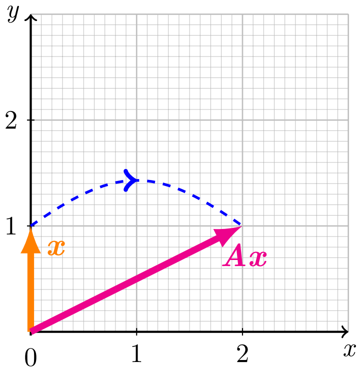
给定 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, 取 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$, 有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}.$$



给定 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, 取 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$, 有

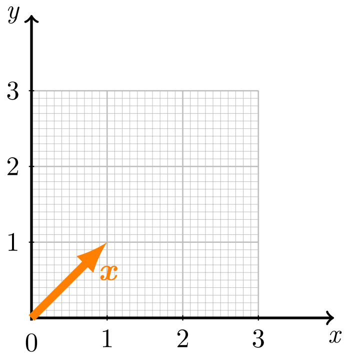
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}.$$



☞ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$: 将 $\boldsymbol{x}$ 旋转, 并改变长度.

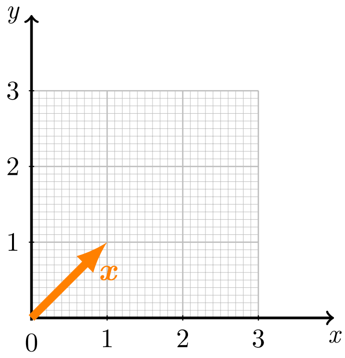
对 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 取 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

对 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, 取 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$,



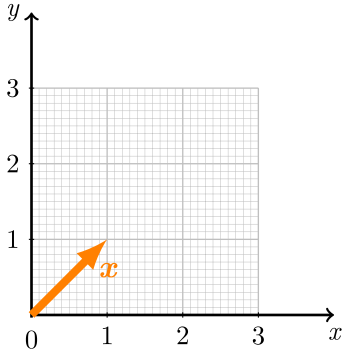
对 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 取 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



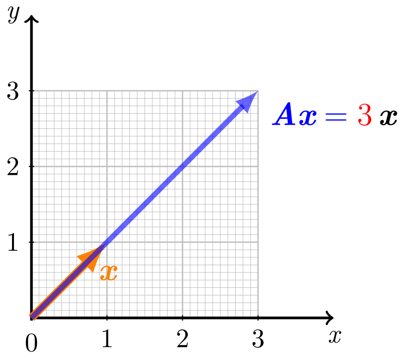
对 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, 取 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$, 有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 3\end{pmatrix}=3\,\boldsymbol{x}.$$



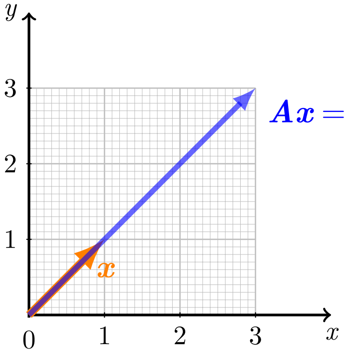
对 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 取 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\,\boldsymbol{x}.$$



对 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 取 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\,\boldsymbol{x}.$$



$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 3\,\boldsymbol{x}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\,\boldsymbol{x}.}$

定义 1. (特征值与特征向量)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, 若存在数 λ 和 n 维非零向量 $\boldsymbol{x}$, 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}, \tag{28}$$

定义 1. (特征值与特征向量)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, 若存在数 λ 和 n 维非零向量 $\boldsymbol{x}$, 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}, \tag{28}$$

则

1. λ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值;

定义 1. (特征值与特征向量)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, 若存在数 λ 和 n 维非零向量 $\boldsymbol{x}$, 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}, \tag{28}$$

则

1. λ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值;
2. $\boldsymbol{x}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量.

定义 1. (特征值与特征向量)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, 若存在数 λ 和 n 维非零向量 $\boldsymbol{x}$, 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}, \tag{28}$$

则

1. λ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值;
2. $\boldsymbol{x}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量.

注

➢ 特征向量是非零向量.

定义 1. (特征值与特征向量)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, 若存在数 λ 和 n 维非零向量 $\boldsymbol{x}$, 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}, \tag{28}$$

则

1. λ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值;
2. $\boldsymbol{x}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量.

注

- 特征向量是非零向量.
- $k\boldsymbol{x}$ 也是对应于特征值 λ 的特征向量

定义 1. (特征值与特征向量)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, 若存在数 λ 和 n 维非零向量 $\boldsymbol{x}$, 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}, \tag{28}$$

则

1. λ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值;
2. $\boldsymbol{x}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量.

注

- 特征向量是非零向量.
- $k\boldsymbol{x}$ 也是对应于特征值 λ 的特征向量, $k \neq 0$.

特征值与特征向量的求法

问题?

已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$, 求满足关系式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ 的 λ 和 $\boldsymbol{x}$?

特征值与特征向量的求法

问题?

已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$, 求满足关系式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ 的 λ 和 $\boldsymbol{x}$? $\boxed{\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}}$

特征值与特征向量的求法

问题?

已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$, 求满足关系式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ 的 λ 和 $\boldsymbol{x}$? $\boxed{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}}$

$$\boxed{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}}$$

特征值与特征向量的求法

问题?

已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$, 求满足关系式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ 的 λ 和 $\boldsymbol{x}$? $\boxed{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}}$

$$\boxed{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}}$$

特征值与特征向量的求法

问题?

已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$, 求满足关系式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ 的 λ 和 $\boldsymbol{x}$? $\boxed{\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}}$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

$$\Downarrow$$

$$(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

$$\Downarrow \quad \Leftarrow \quad \text{特征向量 } \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$$

$$|\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$$

特征值与特征向量的求法

问题?

已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$, 求满足关系式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ 的 λ 和 $\boldsymbol{x}$? $\boxed{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}$

$$\boxed{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}}$$

$$\Downarrow \quad \Leftarrow \quad \boxed{\text{特征向量 } \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}$$

$$\boxed{|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0}$$

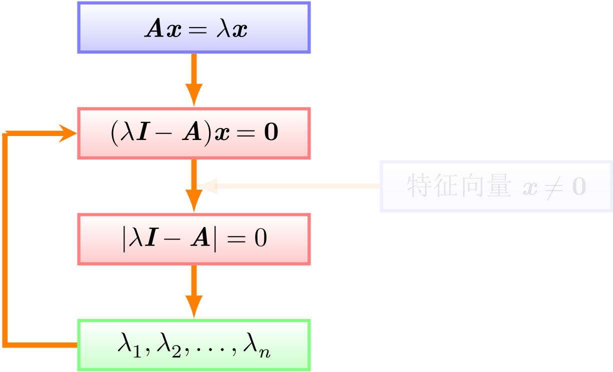
$$\Downarrow$$

$$\boxed{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}$$

特征值与特征向量的求法

问题?

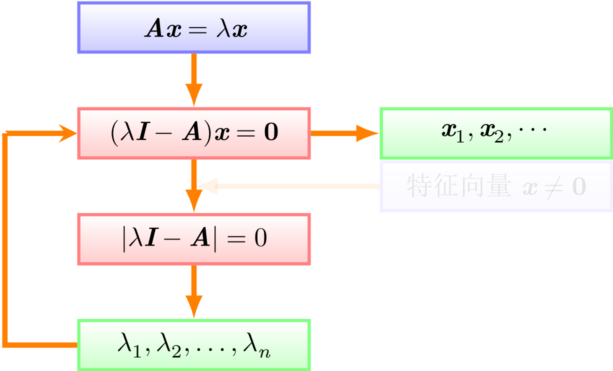
已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$, 求满足关系式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ 的 λ 和 $\boldsymbol{x}$? $\boxed{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}$



特征值与特征向量的求法

问题?

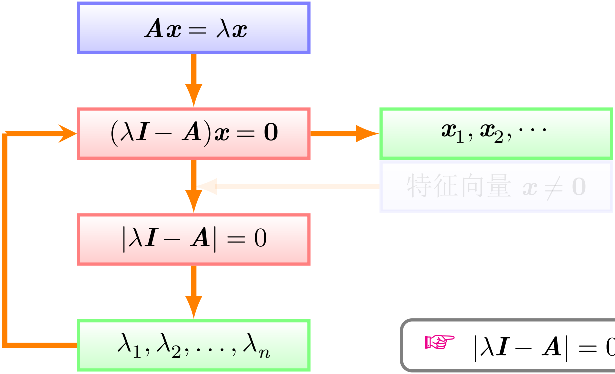
已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$, 求满足关系式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ 的 λ 和 $\boldsymbol{x}$? $\boxed{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}$



特征值与特征向量的求法

问题?

已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$, 求满足关系式 $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$ 的 λ 和 $\boldsymbol{x}$? $\boxed{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}$



☞ $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$ 称为**特征方程**.

特征值与特征向量的求解步骤

1. 特征值: 解特征方程 $|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$;
2. 特征向量: 求方程组 $(\lambda_i \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的所有非零解.

特征值与特征向量的求解步骤

1. 特征值: 解特征方程 $|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$;
2. 特征向量: 求方程组 $(\lambda_i \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的所有非零解.

特征值与特征向量的求解步骤

1. 特征值: 解特征方程 $|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$;
2. 特征向量: 求方程组 $(\lambda_i \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的所有非零解.

☞ $|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$ 称为**特征方程**.

特征值与特征向量的求解步骤

1. 特征值: 解特征方程 $|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$;
2. 特征向量: 求方程组 $(\lambda_i \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的所有非零解.

☞ $|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$ 称为**特征方程**. 即

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} & \cdots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0, \tag{29}$$

特征值与特征向量的求解步骤

1. 特征值: 解特征方程 $|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$;
2. 特征向量: 求方程组 $(\lambda_i \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的所有非零解.

☞ $|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$ 称为**特征方程**. 即

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} & \cdots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0, \tag{29}$$

1. $|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}|$ 称为**特征多项式**.
2. n 阶矩阵在复数范围内恰有 n 个特征值 (含重根).

特征值与特征向量的求解步骤

1. 特征值: 解特征方程 $|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$;
2. 特征向量: 求方程组 $(\lambda_i \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的所有非零解.

☞ $|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$ 称为**特征方程**. 即

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} & \cdots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0, \tag{29}$$

1. $|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}|$ 称为**特征多项式**.
2. n 阶矩阵在复数范围内恰有 n 个特征值 (含重根).

Example 3.3

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值. 证明重要性质:

- $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$;
- $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = \left|\boldsymbol{A}\right|$.

Example 3.3

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值. 证明重要性质:

- $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$;
- $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = \left|\boldsymbol{A}\right|$.

证: 在特征多项式

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

的展开式中, 有一项是主对角线上元素的连乘积:

$$(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \cdots (\lambda - a_{nn}),$$

展开式中的其余各项, 至多包含 $n-2$ 个主对角线上的元素, 它们对 λ 的次数最多是 $n-2$.

因此特征多项式中含 λ 的 n 次与 $n-1$ 次的项只能在主对角线上元素的连乘积中出现, 它们是

$$\lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1}.$$

因此特征多项式中含 λ 的 n 次与 $n-1$ 次的项只能在主对角线上元素的连乘积中出现, 它们是

$$\lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1}.$$

因此, 如果只写出特征多项式展开式的前两项与常数项, 则有

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n |\boldsymbol{A}|.$$

因此特征多项式中含 λ 的 n 次与 $n-1$ 次的项只能在主对角线上元素的连乘积中出现, 它们是

$$\lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1}.$$

因此, 如果只写出特征多项式展开式的前两项与常数项, 则有

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n|\boldsymbol{A}|.$$

令 $|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$, 则

$$\lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n|\boldsymbol{A}| = 0. \tag{30}$$

因此特征多项式中含 λ 的 n 次与 $n-1$ 次的项只能在主对角线上元素的连乘积中出现, 它们是

$$\lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1}.$$

因此, 如果只写出特征多项式展开式的前两项与常数项, 则有

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n |\boldsymbol{A}|.$$

令 $|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$, 则

$$\lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n |\boldsymbol{A}| = 0. \tag{30}$$

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是特征方程的根, 则

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n) = 0, \tag{31}$$

因此特征多项式中含 λ 的 n 次与 $n-1$ 次的项只能在主对角线上元素的连乘积中出现, 它们是

$$\lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1}.$$

因此, 如果只写出特征多项式展开式的前两项与常数项, 则有

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n |\boldsymbol{A}|.$$

令 $|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$, 则

$$\lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n |\boldsymbol{A}| = 0. \tag{30}$$

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是特征方程的根, 则

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n) = 0, \tag{31}$$

如果只写出 (31) 式前两项与常数项, 则有

$$\lambda^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = 0. \tag{32}$$

因此特征多项式中含 λ 的 n 次与 $n-1$ 次的项只能在主对角线上元素的连乘积中出现, 它们是

$$\lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1}.$$

因此, 如果只写出特征多项式展开式的前两项与常数项, 则有

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n|\boldsymbol{A}|.$$

令 $|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$, 则

$$\lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n|\boldsymbol{A}| = 0. \tag{30}$$

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是特征方程的根, 则

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n) = 0, \tag{31}$$

如果只写出 (31) 式前两项与常数项, 则有

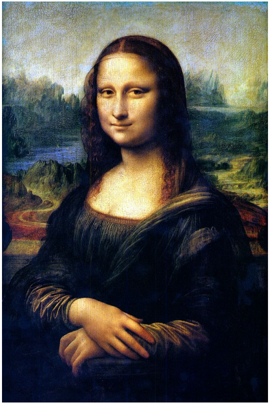
$$\lambda^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = 0. \tag{32}$$

比照 (32) 式与 (30) 式, 得证

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}; \qquad \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = \big|\boldsymbol{A}\big|.$$

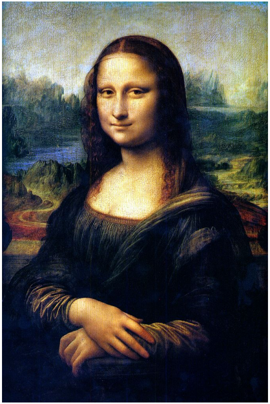
问题

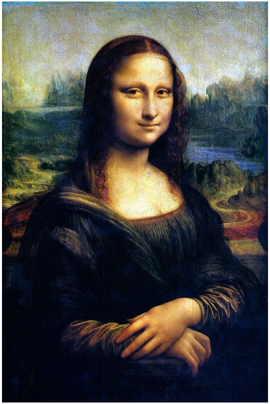
图形的变换, 如何实现?



问题

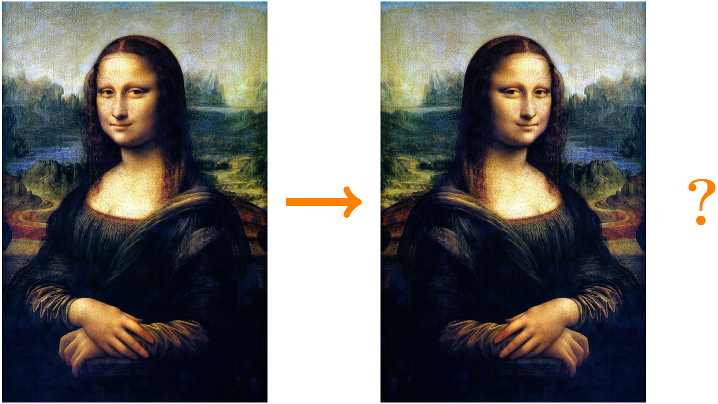
图形的变换, 如何实现?



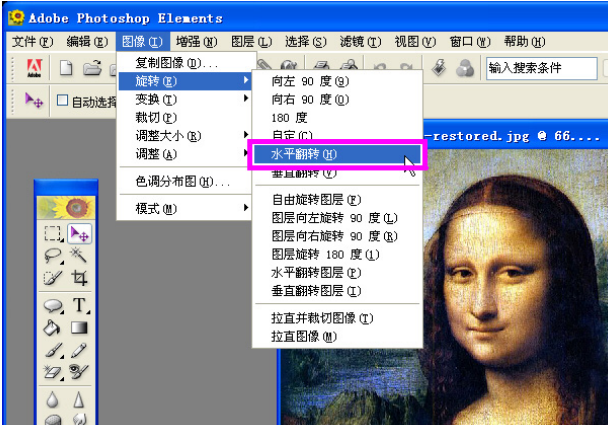


问题

图形的变换, 如何实现?



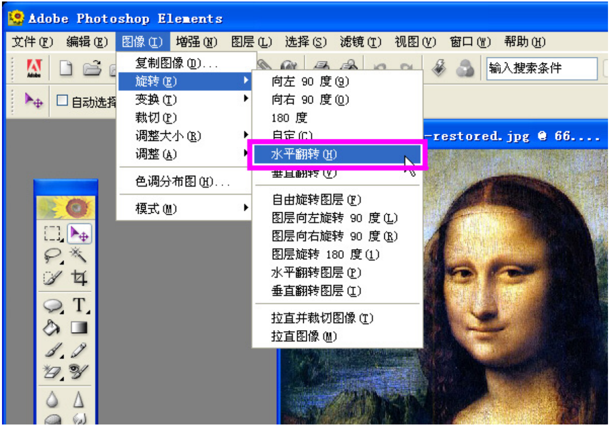
问题



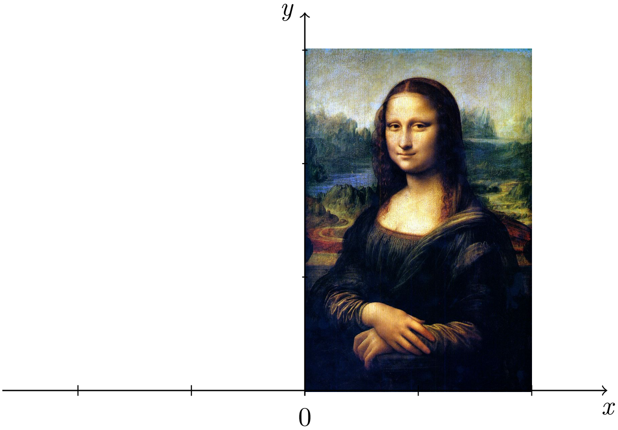
Adobe Photoshop Elements
文件(F) 编辑(E) 图像(I) 增强(N) 图层(L) 选择(S) 滤镜(T) 视图(V) 窗口(W) 帮助(H)
输入搜索条件
自动选择
复制图像(D)...
旋转(R)
变换(T)
裁切(P)
调整大小(R)
调整(A)
色调分布图(H)...
模式(M)
向左 90 度(9)
向右 90 度(0)
180 度
水平翻转(H)
自由旋转图层(F)
图层向左旋转 90 度(L)
图层向右旋转 90 度(R)
图层旋转 180 度(1)
水平翻转图层(P)
垂直翻转图层(I)
拉直并裁切图像(T)
拉直图像(M)
-restored.jpg @ 66....

问题

☞ 其数学方法是什么?

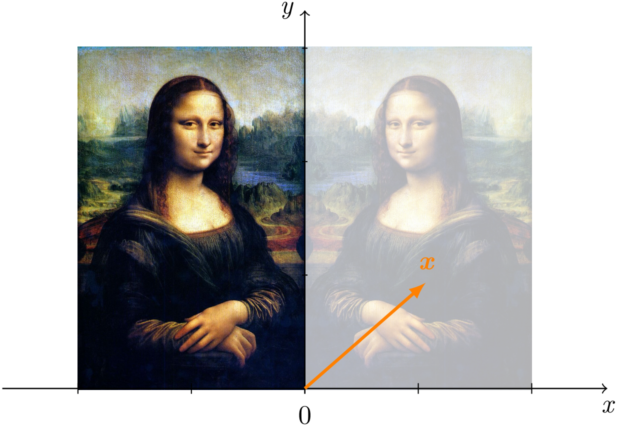


Adobe Photoshop Elements
文件(F) 编辑(E) 图像(I) 增强(N) 图层(L) 选择(S) 滤镜(T) 视图(V) 窗口(W) 帮助(H)
输入搜索条件
复制图像(D)...
旋转(R)
变换(T)
裁切(P)
调整大小(R)
调整(A)
色调分布图(H)...
模式(M)
向左 90 度(9)
向右 90 度(0)
180 度
水平翻转(H)
自由旋转图层(F)
图层向左旋转 90 度(L)
图层向右旋转 90 度(R)
图层旋转 180 度(1)
水平翻转图层(P)
垂直翻转图层(I)
拉直并裁切图像(T)
拉直图像(M)
-restored.jpg @ 66....

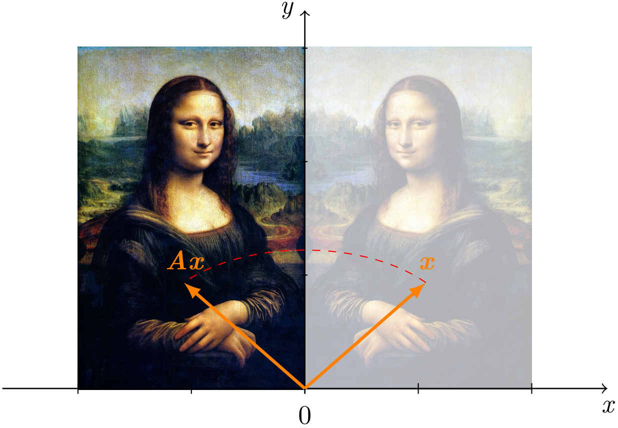


y
x
0

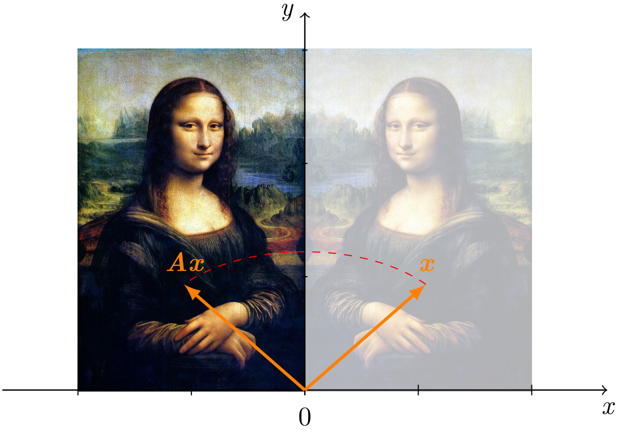

y
x
0



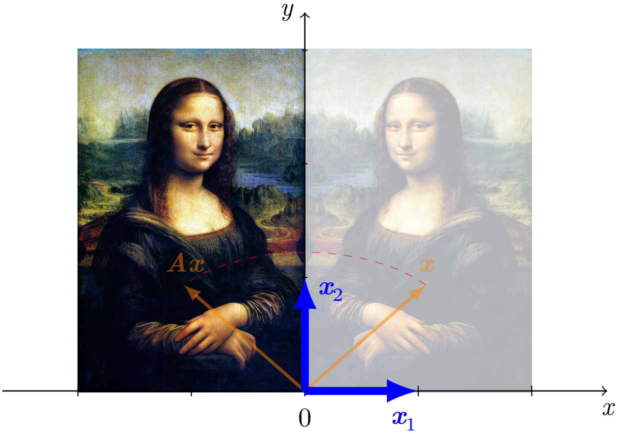
y
x
x
0



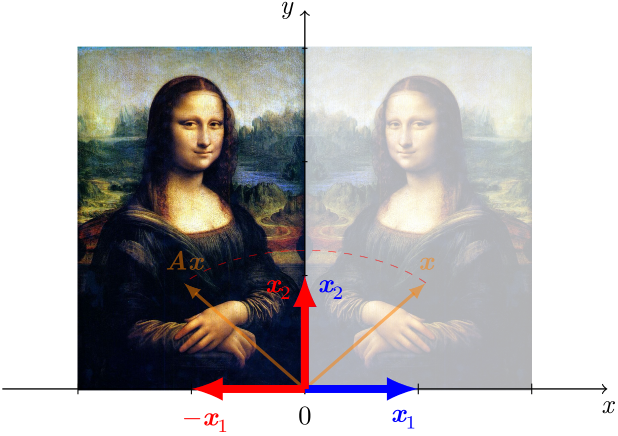
y
Ax
x
0
x



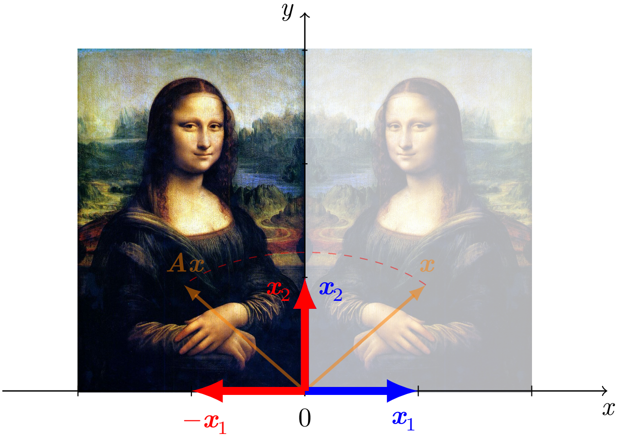
➢ 特征向量在什么方向上?



➢ 特征向量在什么方向上?



➢ 特征向量在什么方向上?



- 特征向量在什么方向上?
- 特征值是什么?

求出矩阵 $\boldsymbol{A}$？

特征值 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$

求出矩阵 $\boldsymbol{A}$?

特征值 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

求出矩阵 $\boldsymbol{A}$?

特征值 $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2) = (\lambda_1\boldsymbol{x}_1,\ \lambda_2\boldsymbol{x}_2) = (\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2)\begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix},$

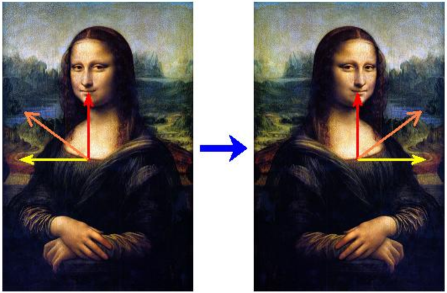
求出矩阵 $\boldsymbol{A}$？

特征值 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

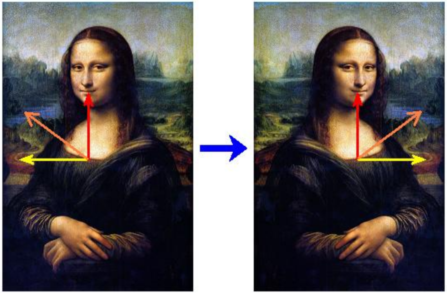
由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1,\, \boldsymbol{x}_2) = (\lambda_1\boldsymbol{x}_1,\, \lambda_2\boldsymbol{x}_2) = (\boldsymbol{x}_1,\, \boldsymbol{x}_2)\begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}$, 得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= (\boldsymbol{x}_1,\, \boldsymbol{x}_2)\begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}(\boldsymbol{x}_1,\, \boldsymbol{x}_2)^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

镜面反射矩阵: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

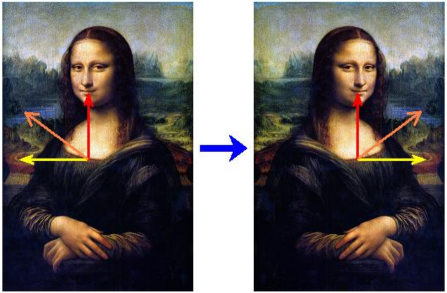


镜面反射矩阵: $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.



$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$,

镜面反射矩阵: $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$

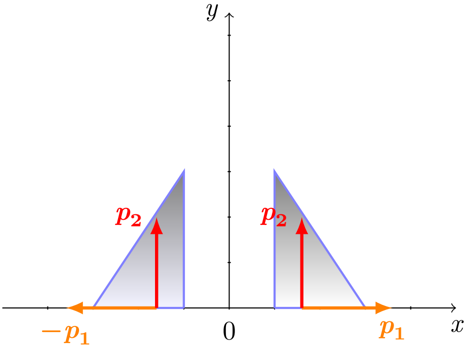


$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=-1,$

对应的特征向量为 $k_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ k_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ k_1,k_2\neq 0.$

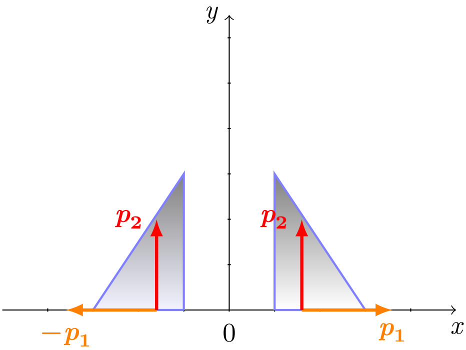
镜面反射矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



镜面反射矩阵

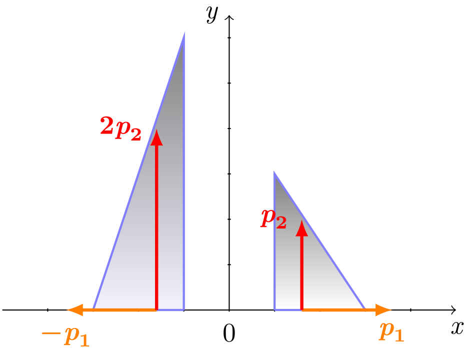
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



问题: 翻转, 且纵向拉伸 2 倍, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ =?

镜面反射矩阵

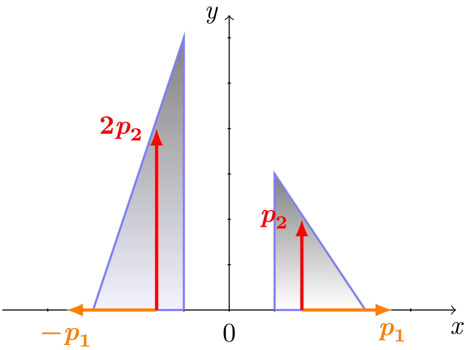
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



问题: 翻转, 且纵向拉伸 2 倍, 矩阵 A =?

镜面反射矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

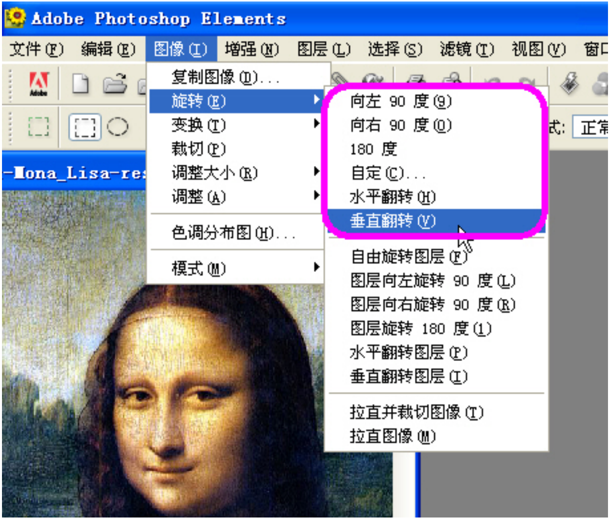


问题: 翻转, 且纵向拉伸 2 倍, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ =?

答案:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

✍ 思考



Adobe Photoshop Elements
文件(F) 编辑(E) 图像(I) 增强(N) 图层(L) 选择(S) 滤镜(T) 视图(V) 窗口
复制图像(D)...
旋转(E)
变换(T)
裁切(P)
调整大小(R)
调整(A)
色调分布图(H)...
模式(M)
向左 90 度(9)
向右 90 度(0)
180 度
自定(C)...
水平翻转(H)
垂直翻转(V)
自由旋转图层(F)
图层向左旋转 90 度(L)
图层向右旋转 90 度(R)
图层旋转 180 度(1)
水平翻转图层(P)
垂直翻转图层(I)
拉直并裁切图像(T)
拉直图像(M)

特征值与特征向量

1. 特征值: eigenvalue;
2. 特征向量: eigenvector.

特征值与特征向量

1. 特征值: eigenvalue;
2. 特征向量: eigenvector.

词源

eigen [德语]: 自己的, 特有的.

特征值与特征向量

1. 特征值: eigenvalue;
2. 特征向量: eigenvector.

词源

eigen [德语]: 自己的, 特有的.

翻译

eigenvalue, 本征值; eigenvector, 本征向量.

Outline

应用举例

Google 财富的秘密?

成立	1998 年 9 月 4 日, California, U.S.
创办人	Larry Page, Sergey Brin

应用举例

Google 财富的秘密?

Google

成立	1998 年 9 月 4 日, California, U.S.
创办人	Larry Page, Sergey Brin
营业额	US$ 598.2 亿 (2013)
净利润	US$ 129.2 亿 (2013)
总资产	US$ 1109.2 亿 (2013)

应用举例

Google 财富的秘密?

Google

成立	1998 年 9 月 4 日, California, U.S.
创办人	Larry Page, Sergey Brin
营业额	US\$ 598.2 亿 (2013)
净利润	US\$ 129.2 亿 (2013)
总资产	US\$ 1109.2 亿 (2013)
员工数	49,829 (Q1 2014)

应用举例

Google 财富的秘密?

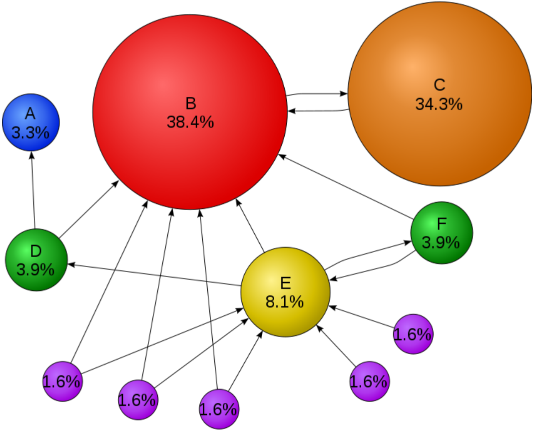
成立	1998 年 9 月 4 日, California, U.S.
创办人	Larry Page, Sergey Brin
营业额	US$ 598.2 亿 (2013)
净利润	US$ 129.2 亿 (2013)
总资产	US$ 1109.2 亿 (2013)
员工数	49,829 (Q1 2014)

☞ PageRank 算法.

Figure: Larry Page and Sergey Brin in 2003

PageRank 算法的思想:

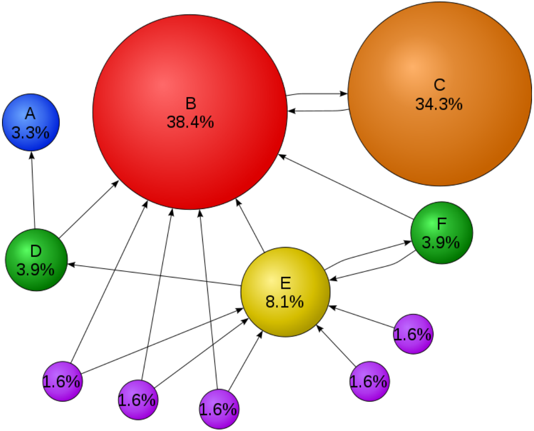
(1) 网页的重要度, 随着指向该网页的链接的增加而提高;



PageRank 算法的思想:

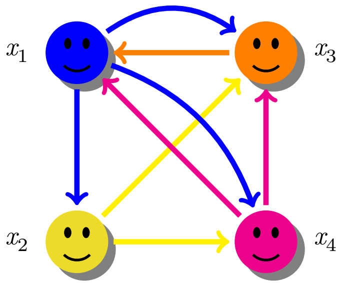
(1) 网页的重要度, 随着指向该网页的链接的增加而提高;

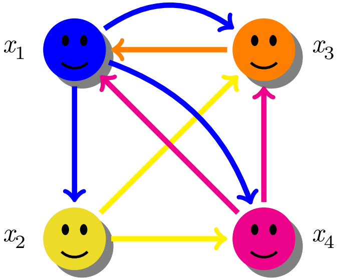
(2) 网页的重要度, 平均分配给被其指向的网页.



举例

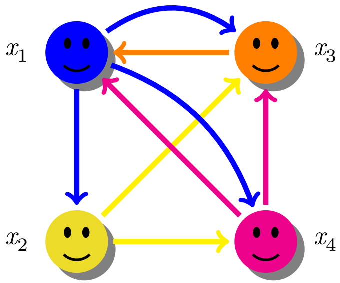
Figure: 4 个网页及其链接


x_1
x_3
x_2
x_4



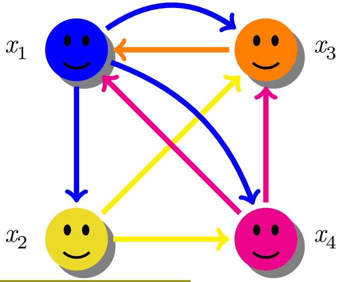
x_1 x_2 x_3 x_4

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \phantom{\frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2}} + \frac{x_3}{1} + \frac{x_4}{2} \\
x_2 &= \frac{x_1}{3} \\
x_3 &= \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} \phantom{+ \frac{x_3}{1}} + \frac{x_4}{2} \\
x_4 &= \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2}
\end{aligned}
$$

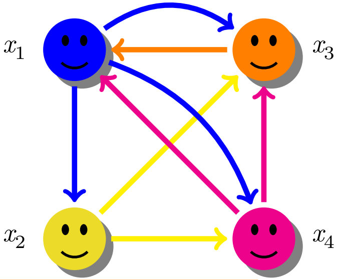


$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \phantom{\frac{x_1}{3}+\frac{x_2}{2}} + \frac{x_3}{1} + \frac{x_4}{2}\\
x_2 &= \frac{x_1}{3}\\
x_3 &= \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} \phantom{+\frac{x_3}{1}} + \frac{x_4}{2}\\
x_4 &= \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2}
\end{aligned}
$$

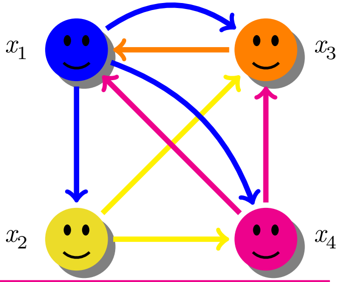


$$\begin{array}{rccccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\
x_1 = & & & +\frac{x_3}{1} & +\frac{x_4}{2} \\
x_2 = & \frac{x_1}{3} & & & \\
x_3 = & \frac{x_1}{3} & +\frac{x_2}{2} & & +\frac{x_4}{2} \\
x_4 = & \frac{x_1}{3} & +\frac{x_2}{2} & &
\end{array}$$



x_1 x_2 x_3 x_4

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \qquad\qquad\qquad\quad + \frac{x_3}{1} + \frac{x_4}{2} \\
x_2 &= \frac{x_1}{3} \\
x_3 &= \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} \qquad\quad + \frac{x_4}{2} \\
x_4 &= \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2}
\end{aligned}
$$



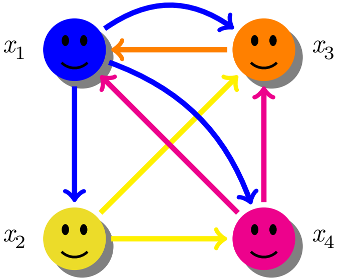
x_1 x_2 x_3 x_4

$$x_1 = \frac{x_3}{1} + \frac{x_4}{2}$$

$$x_2 = \frac{x_1}{3}$$

$$x_3 = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_4}{2}$$

$$x_4 = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2}$$



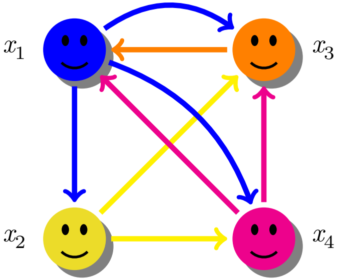
x_1 x_2 x_3 x_4

$$x_1 = \qquad\qquad + \frac{x_3}{1} + \frac{x_4}{2}$$

$$x_2 = \frac{x_1}{3}$$

$$x_3 = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} \qquad + \frac{x_4}{2}$$

$$x_4 = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2}$$

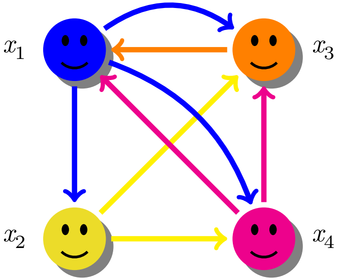


$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4$

$$\begin{aligned}
x_1 &= \qquad\qquad\qquad\quad + \frac{x_3}{1} + \frac{x_4}{2} \\
x_2 &= \frac{x_1}{3} \\
x_3 &= \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} \qquad\quad + \frac{x_4}{2} \\
x_4 &= \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2}
\end{aligned}$$

即

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$



$$\begin{array}{cccc} \textcircled{x_1} & \textcircled{x_2} & \textcircled{x_3} & \textcircled{x_4} \end{array}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= & & & +\frac{x_3}{1} & +\frac{x_4}{2} \\ x_2 &= \frac{x_1}{3} & & & & \\ x_3 &= \frac{x_1}{3} & +\frac{x_2}{2} & & & +\frac{x_4}{2} \\ x_4 &= \frac{x_1}{3} & +\frac{x_2}{2} & & & \end{aligned}$$

即

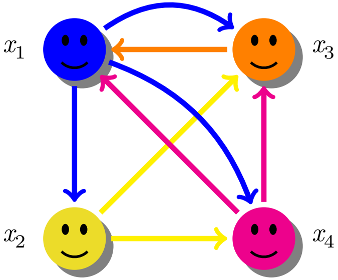
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

记为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x},$$

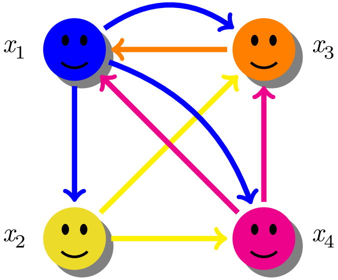
或者

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 1 \cdot \boldsymbol{x}.$$



解得对应的特征向量为

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix},$$

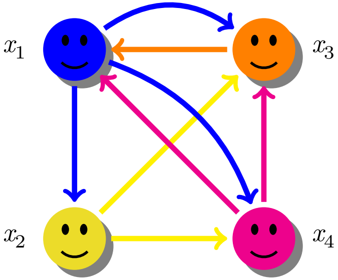


解得对应的特征向量为

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix},$$

从而

$$x_1 = \frac{12}{31} \approx 38.7\%,$$
$$x_2 = \frac{4}{31} \approx 12.9\%,$$
$$x_3 = \frac{9}{31} \approx 29.0\%,$$
$$x_4 = \frac{6}{31} \approx 19.4\%.$$



解得对应的特征向量为

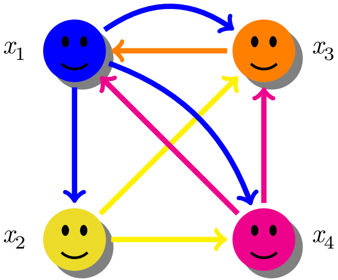
$$\begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix},$$

从而

$$x_1 = \frac{12}{31} \approx 38.7\%,$$
$$x_2 = \frac{4}{31} \approx 12.9\%,$$
$$x_3 = \frac{9}{31} \approx 29.0\%,$$
$$x_4 = \frac{6}{31} \approx 19.4\%.$$

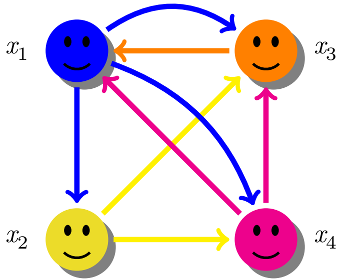
- 哪个网页最重要?

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的直接求法



$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的直接求法

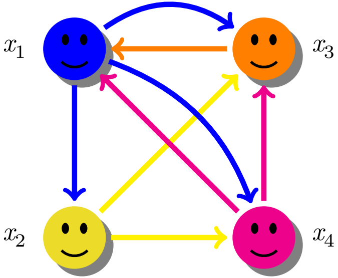


$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

邻接关系矩阵

$$M_R = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{array} \right) \end{array}.$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的直接求法

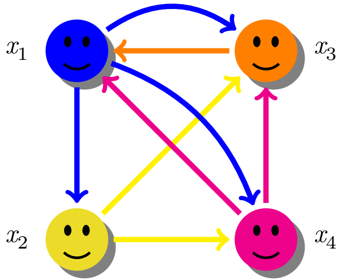


$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

邻接关系矩阵

$$M_R = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \boxed{1} & & & \\ \boxed{1} & & & \\ \boxed{1} & & & \end{pmatrix} \end{array}.$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的直接求法

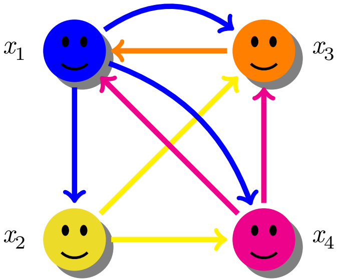


$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

邻接关系矩阵

$$M_R = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & & \\ \boxed{1} & 0 & & \\ \boxed{1} & \boxed{1} & & \\ \boxed{1} & \boxed{1} & & \end{pmatrix} \end{array}.$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的直接求法

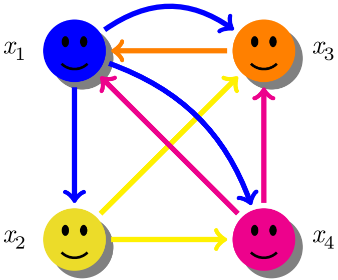


$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

邻接关系矩阵

$$M_R = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的直接求法



$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

邻接关系矩阵

$$M_R = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

☞ 矩阵 $\boldsymbol{A}$: 修正的邻接关系矩阵.

参考

Google

参考

Google $\longleftarrow$ PageRank

参考

Google ← PageRank ← 矩阵特征值

参考

Google ← PageRank ← 矩阵特征值

☞

THE $25,000,000,000* EIGENVECTOR
THE LINEAR ALGEBRA BEHIND GOOGLE

KURT BRYAN† AND TANYA LEISE‡

Abstract. Google's success derives in large part from its PageRank algorithm, which ranks the importance of webpages according to an eigenvector of a weighted link matrix. Analysis of the PageRank formula provides a wonderful applied topic for a linear algebra course. Instructors may assign this article as a project to more advanced students, or spend one or two lectures presenting the material with assigned homework from the exercises. This material also complements the discussion of Markov chains in matrix algebra. Maple and Mathematica files supporting this material can be found at www.rose-hulman.edu/∼bryan.

桥发生了什么情况?

Tacoma 桥, 美国, 1940 年

桥为什么垮塌?

Figure: Tacoma 桥, 美国, 1940 年

桥为什么垮塌?

- 自然频率 (natural frequency)

  桥的自然频率

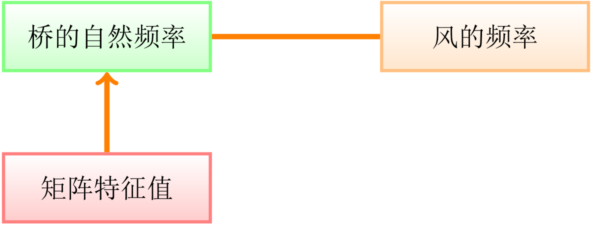
桥为什么垮塌?

- 自然频率 (natural frequency)

桥的自然频率 —— 风的频率

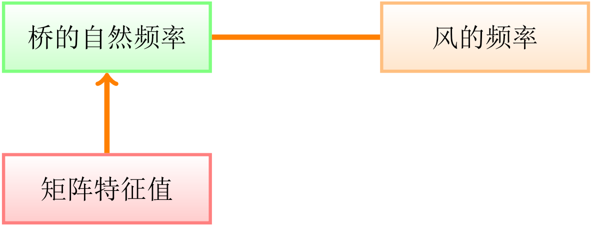
桥为什么垮塌?

- 自然频率 (natural frequency)



桥为什么垮塌?

- 自然频率 (natural frequency)



"...... The waves of the bridge were caused by the frequency of the wind being too close to the natural frequency of the bridge. The natural frequency of the bridge is the eigenvalue of smallest magnitude of a system that models the bridge."

玻璃杯的频率 v.s. 声波的频率

Outline

1. 矩阵及其初等运算
2. 矩阵的行列式和矩阵的秩
3. 矩阵的迹和矩阵的特征值
   - 矩阵的迹及其初等性质
   - 矩阵的特征值
   - 应用举例: Google 财富的秘密
   - Geršgorin 圆盘定理

Definition 3.4

设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 引入下列记号:

$$R_i = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \qquad P_i = R_i - |a_{ii}|, \tag{33}$$

Definition 3.4

设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 引入下列记号:

$$R_i = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \qquad\qquad P_i = R_i - |a_{ii}|, \tag{33}$$

- 如果对任一 i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 都有 $|a_{ii}| \geqslant P_i$, 则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为行对角占优矩阵.

Definition 3.4

设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 引入下列记号:

$$R_i=\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|, \qquad P_i=R_i-|a_{ii}|, \tag{33}$$

$$T_j=\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|, \qquad Q_j=T_j-|a_{jj}|. \tag{34}$$

- 如果对任一 $i\ (1\leqslant i\leqslant n)$ 都有 $|a_{ii}|\geqslant P_i$, 则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为行对角占优矩阵.

Definition 3.4

设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 引入下列记号:

$$R_i=\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|, \qquad P_i=R_i-|a_{ii}|, \tag{33}$$

$$T_j=\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|, \qquad Q_j=T_j-|a_{jj}|. \tag{34}$$

- 如果对任一 $i\ (1\leqslant i\leqslant n)$ 都有 $|a_{ii}|\geqslant P_i$, 则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为行对角占优矩阵.
- 如果对任一 $j\ (1\leqslant j\leqslant n)$ 都有 $|a_{jj}|\geqslant Q_j$, 则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为列对角占优矩阵.

Definition 3.4

设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 引入下列记号:

$$R_i = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \qquad P_i = R_i - |a_{ii}|, \tag{33}$$

$$T_j = \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \qquad Q_j = T_j - |a_{jj}|. \tag{34}$$

- 如果对任一 $i\ (1 \leqslant i \leqslant n)$ 都有 $|a_{ii}| \geqslant P_i$, 则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为行对角占优矩阵.
- 如果对任一 $j\ (1 \leqslant j \leqslant n)$ 都有 $|a_{jj}| \geqslant Q_j$, 则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为列对角占优矩阵.
- 如果 $|a_{ii}| > P_i\ (|a_{jj}| > Q_j)$ 对任一 $i\ (j)$ 成立, 则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为严格行 (列) 对角占优矩阵.

Theorem 3.5

如果 $\boldsymbol{A}$ 为严格行 (列) 对角占优矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 必为非奇异矩阵.

Theorem 3.5

如果 $\boldsymbol{A}$ 为严格行 (列) 对角占优矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 必为非奇异矩阵.

Proof.

反证法. 设 $\boldsymbol{A}$ 为奇异矩阵,

Theorem 3.5

如果 $\boldsymbol{A}$ 为严格行 (列) 对角占优矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 必为非奇异矩阵.

Proof.

反证法. 设 $\boldsymbol{A}$ 为奇异矩阵, 则线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 有非零解 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$.

Theorem 3.5

如果 $\boldsymbol{A}$ 为严格行 (列) 对角占优矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 必为非奇异矩阵.

Proof.

反证法. 设 $\boldsymbol{A}$ 为奇异矩阵, 则线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有非零解 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$. 设

$$|x_r| = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \{|x_j|\},$$

Theorem 3.5

如果 $\boldsymbol{A}$ 为严格行 (列) 对角占优矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 必为非奇异矩阵.

Proof.

反证法. 设 $\boldsymbol{A}$ 为奇异矩阵, 则线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有非零解 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$. 设

$$|x_r| = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \{|x_j|\},$$

则有 $|x_r| \neq 0$ 且 $|x_j| \leqslant |x_r|$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$.

Theorem 3.5

如果 $\boldsymbol{A}$ 为严格行 (列) 对角占优矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 必为非奇异矩阵.

Proof.

反证法. 设 $\boldsymbol{A}$ 为奇异矩阵, 则线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$. 设

$$|x_r|=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\{|x_j|\},$$

则有 $|x_r|\neq 0$ 且 $|x_j|\leqslant|x_r|$ $(j=1,2,\cdots,n)$. 由

$$a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rr}x_r+\cdots+a_{rn}x_n=0,$$

得

$$|a_{rr}||x_r|=\Big|-\sum_{\substack{j=1\\j\neq r}}^{n}a_{rj}x_j\Big|\leqslant\sum_{\substack{j=1\\j\neq r}}^{n}|a_{rj}||x_j|\leqslant P_r|x_r|,$$

Theorem 3.5

如果 $\boldsymbol{A}$ 为严格行 (列) 对角占优矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 必为非奇异矩阵.

Proof.

反证法. 设 $\boldsymbol{A}$ 为奇异矩阵, 则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$. 设

$$|x_r| = \max_{1\leqslant j\leqslant n}\{|x_j|\},$$

则有 $|x_r|\neq 0$ 且 $|x_j|\leqslant|x_r|$ $(j=1,2,\cdots,n)$. 由

$$a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rr}x_r+\cdots+a_{rn}x_n=0,$$

得

$$|a_{rr}||x_r| = \Big|-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq r}}^{n} a_{rj}x_j\Big| \leqslant \sum_{\substack{j=1\\ j\neq r}}^{n}|a_{rj}||x_j| \leqslant P_r|x_r|,$$

从而 $|a_{rr}|\leqslant P_r$.

Theorem 3.5

如果 $\boldsymbol{A}$ 为严格行 (列) 对角占优矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 必为非奇异矩阵.

Proof.

反证法. 设 $\boldsymbol{A}$ 为奇异矩阵, 则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$. 设

$$|x_r|=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\{|x_j|\},$$

则有 $|x_r|\neq 0$ 且 $|x_j|\leqslant|x_r|$ $(j=1,2,\cdots,n)$. 由

$$a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rr}x_r+\cdots+a_{rn}x_n=0,$$

得

$$|a_{rr}||x_r|=\Big|-\sum_{\substack{j=1\\j\neq r}}^{n}a_{rj}x_j\Big|\leqslant\sum_{\substack{j=1\\j\neq r}}^{n}|a_{rj}||x_j|\leqslant P_r|x_r|,$$

从而 $|a_{rr}|\leqslant P_r$. 与题设矛盾. 证毕. □

Theorem 3.6 (Geršgorin, 1931)

设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 则它的所有特征值都落在复平面上的 n 个圆盘

$$D_i(\boldsymbol{A})=\left\{z \mid |z-a_{ii}|\leqslant P_i\right\},\quad i=1,2,\cdots,n \tag{35}$$

的并集 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i(\boldsymbol{A})$ 上.

Theorem 3.6 (Geršgorin, 1931)

设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 则它的所有特征值都落在复平面上的 n 个圆盘

$$D_i(\boldsymbol{A})=\left\{z \mid |z-a_{ii}|\leqslant P_i\right\},\quad i=1,2,\cdots,n \tag{35}$$

的并集 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i(\boldsymbol{A})$ 上.

Proof.

设 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值, 则

$$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=0,$$

Theorem 3.6 (Geršgorin, 1931)

设 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 则它的所有特征值都落在复平面上的 n 个圆盘

$$D_i(\boldsymbol{A}) = \{z \mid |z - a_{ii}| \leqslant P_i\}, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{35}$$

的并集 $\bigcup_{i=1}^{n} D_i(\boldsymbol{A})$ 上.

Proof.

设 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值, 则

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0,$$

则矩阵 $\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ 必不是严格行 (列) 对角占优矩阵.

Theorem 3.6 (Geršgorin, 1931)

设 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 则它的所有特征值都落在复平面上的 n 个圆盘

$$D_i(\boldsymbol{A}) = \left\{z \mid |z - a_{ii}| \leqslant P_i\right\}, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{35}$$

的并集 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i(\boldsymbol{A})$ 上.

Proof.

设 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值, 则

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0,$$

则矩阵 $\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ 必不是严格行 (列) 对角占优矩阵. 即至少存在一个 i, 使得

$$|\lambda - a_{ii}| \leqslant P_i.$$

Theorem 3.6 (Geršgorin, 1931)

设 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 则它的所有特征值都落在复平面上的 n 个圆盘

$$D_i(\boldsymbol{A}) = \left\{z \mid |z - a_{ii}| \leqslant P_i\right\}, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{35}$$

的并集 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i(\boldsymbol{A})$ 上.

Proof.

设 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值, 则

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0,$$

则矩阵 $\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ 必不是严格行 (列) 对角占优矩阵. 即至少存在一个 i, 使得

$$|\lambda - a_{ii}| \leqslant P_i.$$

故 $\lambda \in D_i(\boldsymbol{A}) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i(\boldsymbol{A})$. □

Semyon Aranovich Gershgorin (August 24, 1901 – May 30, 1933) was a Soviet (born in Pruzhany, Belarus, Russian Empire) mathematician. He began as a student at the Petrograd Technological Institute in 1923, became a Professor in 1930, and was given an appointment at the Leningrad Mechanical Engineering Institute in the same year. His contributions include the Gershgorin circle theorem.[1]

The spelling of S. A. Gershgorin's name has been transliterated in several different ways, including Geršgorin, Gerschgorin, Gerszgorin, Gershgorin.

[1] S. A. Gershgorin illustrated the use of Gershgorin circles for estimating eigenvalues in 1931, but the concept appears earlier in work by L. Lévy in 1881, by H. Minkowski in 1900, and by J. Hadamard in 1903. However, each time the idea surfaced, it gained little attention and was quickly forgotten until Olga Taussky (1906–1995), the premier woman of linear algebra, and her fellow German émigrè Alfred Brauer (1894–1985) became captivated by the result. Taussky and Brauer devoted significant effort to strengthening, promoting, and popularizing Gershgorin-type eigenvalue bounds. Their work during the 1940s and 1950s ended the periodic rediscoveries, and they made Gershgorin (who might otherwise have been forgotten) famous.

Definition 3.7

圆盘

$$D_i(\boldsymbol{A}) = \left\{ z \mid |z - a_{ii}| \leqslant P_i \right\}, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{36}$$

称为由 $\boldsymbol{A}$ 所确定的盖氏圆盘.

Definition 3.7

圆盘

$$D_i(\boldsymbol{A}) = \left\{z \mid |z - a_{ii}| \leqslant P_i\right\}, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{36}$$

称为由 $\boldsymbol{A}$ 所确定的盖氏圆盘.

注 1

圆盘定理只是说明 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值一定落在并集 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i(\boldsymbol{A})$ 上, 而不能保证每个圆盘都含有 $\boldsymbol{A}$ 特征值.

例如矩阵

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -10 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

的特征值为 $1 \pm \sqrt{15}$, 它们都包含在圆盘

$$D_1(A) = \left\{ z \mid |z+4| \leqslant 10 \right\}$$

上, 而圆盘

$$D_2(A) = \left\{ z \mid |z-6| \leqslant 1 \right\}$$

上不包含有 A 特征值.

Theorem 3.8

设 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个圆盘中有 s 个圆盘构成了复平面上的一个连通区域 G, 且 G 与 $\boldsymbol{A}$ 的其余 $n-s$ 个圆盘都不相交, 则 G 中有且仅有 $\boldsymbol{A}$ 的 s 个特征值.

Theorem 3.8

设 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个圆盘中有 s 个圆盘构成了复平面上的一个连通区域 G, 且 G 与 $\boldsymbol{A}$ 的其余 $n-s$ 个圆盘都不相交, 则 G 中有且仅有 $\boldsymbol{A}$ 的 s 个特征值.

Corollary 3.9

如果方阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 的 n 个盖氏圆盘两两互不相交, 则 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互异的特征值.

Theorem 3.8

设 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个圆盘中有 s 个圆盘构成了复平面上的一个连通区域 G, 且 G 与 $\boldsymbol{A}$ 的其余 $n-s$ 个圆盘都不相交, 则 G 中有且仅有 $\boldsymbol{A}$ 的 s 个特征值.

Corollary 3.9

如果方阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 的 n 个盖氏圆盘两两互不相交, 则 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互异的特征值.

Corollary 3.10

如果方阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的 n 个盖氏圆盘两两互不相交, 则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 n 个互异实数.

Exercise 3.11

若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足条件 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}^{-1}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为酉矩阵(unitary matrix). 证明任意酉矩阵的特征值都分布在复平面的单位圆周上.

Exercise 3.11

若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足条件 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}^{-1}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为酉矩阵(unitary matrix). 证明任意酉矩阵的特征值都分布在复平面的单位圆周上.

Proof.

即要证其特征值的模为 1.

Exercise 3.11

若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足条件 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}^{-1}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为酉矩阵(unitary matrix). 证明任意酉矩阵的特征值都分布在复平面的单位圆周上.

Proof.

即要证其特征值的模为 1.

设 λ 是酉矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值, $\boldsymbol{x}$ 为其相应的特征向量, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$.

Exercise 3.11

若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足条件 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}^{-1}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为酉矩阵(unitary matrix). 证明任意酉矩阵的特征值都分布在复平面的单位圆周上.

Proof.

即要证其特征值的模为 1.

设 λ 是酉矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值, $\boldsymbol{x}$ 为其相应的特征向量, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$. 两边取共轭转置有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \overline{\lambda}\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}},$$

Exercise 3.11

若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足条件 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}^{-1}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为酉矩阵(unitary matrix). 证明任意酉矩阵的特征值都分布在复平面的单位圆周上.

Proof.

即要证其特征值的模为 1.

设 λ 是酉矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值, $\boldsymbol{x}$ 为其相应的特征向量, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$. 两边取共轭转置有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \overline{\lambda}\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}},$$

两式相乘, 并注意 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$, 则

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x} = (\overline{\lambda}\lambda)\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x} = |\lambda|^2\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x},$$

Exercise 3.11

若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足条件 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}^{-1}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为酉矩阵(unitary matrix). 证明任意酉矩阵的特征值都分布在复平面的单位圆周上.

Proof.

即要证其特征值的模为 1.

设 λ 是酉矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值, $\boldsymbol{x}$ 为其相应的特征向量, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$. 两边取共轭转置有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \overline{\lambda}\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}},$$

两式相乘, 并注意 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$, 则

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x} = (\overline{\lambda}\lambda)\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x} = |\lambda|^2\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x},$$

消去 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}$, 得 $|\lambda|^2 = 1$, 所以 $|\lambda| = 1$. □

Exercise 3.12

满足条件 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{-1}$ 的 n 阶实矩阵, 称为正交矩阵. 试证正交矩阵的实特征值为 1 或 -1; 虚特征值必成对出现为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 及 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$.

Exercise 3.12

满足条件 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{-1}$ 的 n 阶实矩阵, 称为正交矩阵. 试证正交矩阵的实特征值为 1 或 -1; 虚特征值必成对出现为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 及 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$.

Proof.

当酉矩阵的元素全为实数时, 酉矩阵就是正交矩阵. 或者说, 正交矩阵必定是酉矩阵.

Exercise 3.12

满足条件 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{-1}$ 的 n 阶实矩阵, 称为正交矩阵. 试证正交矩阵的实特征值为 1 或 -1; 虚特征值必成对出现为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 及 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$.

Proof.

当酉矩阵的元素全为实数时, 酉矩阵就是正交矩阵. 或者说, 正交矩阵必定是酉矩阵. 故设 λ 是正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值, 必有 $|\lambda| = 1$.

Exercise 3.12

满足条件 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{-1}$ 的 n 阶实矩阵, 称为正交矩阵. 试证正交矩阵的实特征值为 1 或 -1; 虚特征值必成对出现为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 及 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$.

Proof.

当酉矩阵的元素全为实数时, 酉矩阵就是正交矩阵. 或者说, 正交矩阵必定是酉矩阵. 故设 λ 是正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值, 必有 $|\lambda| = 1$.

若 λ 为实数, 则 $\lambda = 1$ 或 -1.

Exercise 3.12

满足条件 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{-1}$ 的 n 阶实矩阵, 称为正交矩阵. 试证正交矩阵的实特征值为 1 或 -1; 虚特征值必成对出现为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 及 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$.

Proof.

当酉矩阵的元素全为实数时, 酉矩阵就是正交矩阵. 或者说, 正交矩阵必定是酉矩阵. 故设 λ 是正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值, 必有 $|\lambda| = 1$.
若 λ 为实数, 则 $\lambda = 1$ 或 -1. 若 λ 为虚数, 则 $\lambda = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 或 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$.

Exercise 3.12

满足条件 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{-1}$ 的 n 阶实矩阵, 称为正交矩阵. 试证正交矩阵的实特征值为 1 或 -1; 虚特征值必成对出现为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 及 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$.

Proof.

当酉矩阵的元素全为实数时, 酉矩阵就是正交矩阵. 或者说, 正交矩阵必定是酉矩阵. 故设 λ 是正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值, 必有 $|\lambda| = 1$.

若 λ 为实数, 则 $\lambda = 1$ 或 -1. 若 λ 为虚数, 则 $\lambda = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 或 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$.

而实矩阵的复特征值一定成对共轭出现, 故 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 与 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ 必成对出现. □

Exercise 3.12

满足条件 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{-1}$ 的 n 阶实矩阵, 称为正交矩阵. 试证正交矩阵的实特征值为 1 或 -1; 虚特征值必成对出现为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 及 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$.

Proof.

当酉矩阵的元素全为实数时, 酉矩阵就是正交矩阵. 或者说, 正交矩阵必定是酉矩阵. 故设 λ 是正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值, 必有 $|\lambda| = 1$.

若 λ 为实数, 则 $\lambda = 1$ 或 -1. 若 λ 为虚数, 则 $\lambda = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 或 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$.

而实矩阵的复特征值一定成对共轭出现, 故 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 与 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ 必成对出现. □

说明: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$, $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta$, 故 $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}| = 1$, $|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}| = 1$.

Exercise 3.13

方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的模的最大值, 称为 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径(spectral radius). 对 $\boldsymbol{A}=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$, 设 $R=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$, $T=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}|$, $\rho(\boldsymbol{A})$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径, 试由圆盘定理证明: $\rho(\boldsymbol{A})\leqslant\min\{R,T\}$.

Exercise 3.13

方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的模的最大值, 称为 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径(spectral radius). 对 $\boldsymbol{A} = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$, 设 $R = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$, $T = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$, $\rho(\boldsymbol{A})$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径, 试由圆盘定理证明: $\rho(\boldsymbol{A}) \leqslant \min\{R, T\}$.

Proof.

设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值, 由圆盘定理知有 i 使得

$$|\lambda - a_{ii}| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|.$$

Exercise 3.13

方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的模的最大值, 称为 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径(spectral radius). 对 $\boldsymbol{A}=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$, 设 $R=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$, $T=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}|$, $\rho(\boldsymbol{A})$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径, 试由圆盘定理证明: $\rho(\boldsymbol{A})\leqslant\min\{R,T\}$.

Proof.

设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值, 由圆盘定理知有 i 使得

$$|\lambda-a_{ii}|\leqslant\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|.$$

由 $|\lambda|-|a_{ii}|\leqslant|\lambda-a_{ii}|$, 故

$$|\lambda|\leqslant|a_{ii}|+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|=\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|,$$

Exercise 3.13

方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的模的最大值, 称为 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径(spectral radius). 对 $\boldsymbol{A} = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$, 设 $R = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$, $T = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$, $\rho(\boldsymbol{A})$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径, 试由圆盘定理证明: $\rho(\boldsymbol{A}) \leqslant \min\{R, T\}$.

Proof.

设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值, 由圆盘定理知有 i 使得

$$|\lambda - a_{ii}| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|.$$

由 $|\lambda| - |a_{ii}| \leqslant |\lambda - a_{ii}|$, 故

$$|\lambda| \leqslant |a_{ii}| + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

得 $|\lambda| \leqslant R$, 故 $\rho(\boldsymbol{A}) \leqslant R$.

Exercise 3.13

方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的模的最大值, 称为 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径(spectral radius). 对 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$, 设 $R = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$, $T = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$, $\rho(\boldsymbol{A})$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径, 试由圆盘定理证明: $\rho(\boldsymbol{A}) \leqslant \min\{R, T\}$.

Proof.

设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值, 由圆盘定理知有 i 使得

$$|\lambda - a_{ii}| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|.$$

由 $|\lambda| - |a_{ii}| \leqslant |\lambda - a_{ii}|$, 故

$$|\lambda| \leqslant |a_{ii}| + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

得 $|\lambda| \leqslant R$, 故 $\rho(\boldsymbol{A}) \leqslant R$. 同理, $\rho(\boldsymbol{A}) \leqslant T$. 得证 $\rho(\boldsymbol{A}) \leqslant \min\{R, T\}$. □

Exercise 3.14

用 Geršgorin 定理证明矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}9 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 8 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 4 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

至少有两个实特征值.

Exercise 3.14

用 Geršgorin 定理证明矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

至少有两个实特征值.

证: $\boldsymbol{A}$ 的 4 个盖氏圆盘为

$$G_1 = \{z \mid |z-9| \leqslant 4\}, \qquad G_2 = \{z \mid |z-8| \leqslant 2\},$$

$$G_3 = \{z \mid |z-4| \leqslant 1\}, \qquad G_4 = \{z \mid |z-1| \leqslant 1\}.$$

Exercise 3.14

用 Geršgorin 定理证明矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

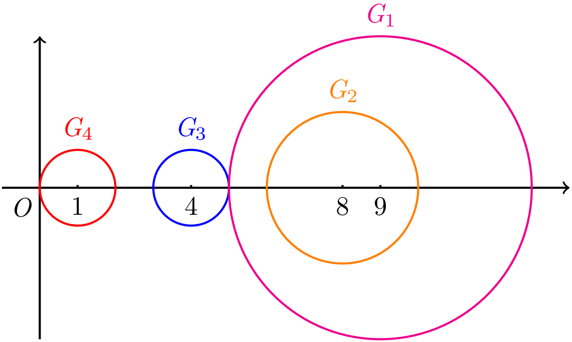
至少有两个实特征值.

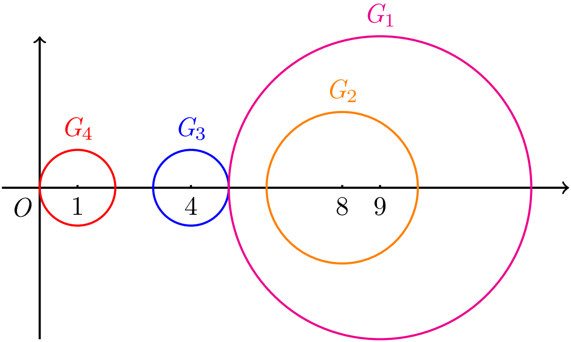
证: $\boldsymbol{A}$ 的 4 个盖氏圆盘为

$$G_1 = \{z \mid |z-9| \leqslant 4\}, \qquad G_2 = \{z \mid |z-8| \leqslant 2\},$$
$$G_3 = \{z \mid |z-4| \leqslant 1\}, \qquad G_4 = \{z \mid |z-1| \leqslant 1\}.$$

它们构成 2 个连通区域:

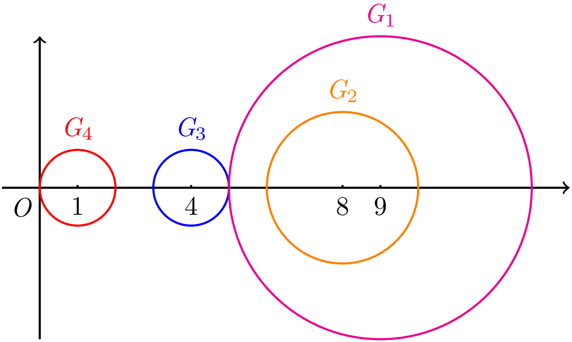
$$S_1 = G_1 \cup G_2 \cup G_3, \qquad S_2 = G_4.$$


G_1
G_2
G_4
G_3
O
1
4
8
9



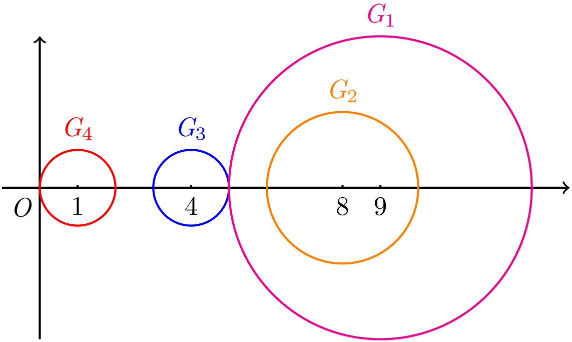
由 Geršgorin 定理知,

- S_2 中含有 1 个特征值. 而实矩阵的复特征值一定共轭成对出现, 故这个特征值必为实数;



由 Geršgorin 定理知,

- S_2 中含有 1 个特征值. 而实矩阵的复特征值一定共轭成对出现, 故这个特征值必为实数;
- S_1 中含有 3 个特征值, 其中至少有一个特征值为实数 (否则 S_1 中就有至少 4 个特征值, 矛盾).



由 Geršgorin 定理知,

- S_2 中含有 1 个特征值. 而实矩阵的复特征值一定共轭成对出现, 故这个特征值必为实数;
- S_1 中含有 3 个特征值, 其中至少有一个特征值为实数 (否则 S_1 中就有至少 4 个特征值, 矛盾).

得证矩阵 $\boldsymbol{A}$ 至少有两个实特征值.

课后作业

教材 P.29, 习题 15

用 Geršgorin 定理证明矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\frac{\mathrm{i}}{2} & 5 & \frac{\mathrm{i}}{2} \\ -1 & 0 & 0 & 5\mathrm{i} \end{bmatrix}$$

至少有一个虚特征值.