

中国科学技术大学

2019-2020 第一学期期末考试题

考试科目: 随机过程 (B) 得分: _____

学生所在系: _____ 姓名: _____ 学号: _____

(2020 年 1 月 6 日, 半开卷)

一、(30 分, 每空 2 分) 判断是非与填空:

(1) 设 $X_0 = 0$, $X_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, ($n \geq 1$), 其中 $\{\xi_i, i \geq 1\}$ 为 i.i.d., 且 $P\{\xi_i = -1\} = P\{\xi_i = 1\} = 0.5$, 则 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为:

- a. 独立增量过程 (); b. 平稳独立增量过程 ();
c. 正常返马氏链 (); d. 瞬过马氏链 (); e. $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{X_n = 0\} = 0$ 。

(2) 下列函数是否为平稳过程的谱密度函数:

- a. $S_1(\omega) = \frac{\omega^2 - 16}{\omega^4 + 11\omega^2 + 18}$ (); b. $S_2(\omega) = \frac{\omega^2 + 1}{\omega^4 + 5\omega^2 + 6}$ ();
c. $S_3(\omega) = \frac{\omega^2 \cos \omega}{\omega^4 + 1}$ (); d. $S_4(\omega) = \frac{e^{-i|\omega|}}{\omega^2 + a^2}$, ($i = \sqrt{-1}$) ()

(3) 到达某邮箱的正常电子邮件和垃圾邮件数分别是强度为 9 和 3 的泊松过程, 且相互独立。则第一封邮件的平均到达时间为 (), 第一封垃圾邮件到达之前恰好到达了 k 封正常邮件的概率为 ()。

(4) 设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是强度为 λ 的泊松过程, 命 $X_T = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt$, 则:

$E(X_T) = (\quad)$, $Var(X_T) = (\quad)$ 。

(5) 到达某商店的顾客数 $N(t)$ 是一强度为 $\lambda(t) = 2 + t/2$ 的非齐次泊松过程, 若该商店早上 8:00 开门, 则午时段(11:00-13:00)没有顾客到达的概率为(), 午时段到达商店的平均人数为()。

二、(15 分) 设某种健康险投保者中的出险人数 $N(t)$ 为一强度为 5 的泊松过程, 若以

Y_i 表示第 i 个出险者应获赔偿, 并假定 $Y_i \sim U(1, 3)$ (均匀分布, 单位: 万元), 且 $\{Y_i, i \geq 1\}$

为 i.i.d., 试求到时刻 t 为止保险公司应付全部赔偿 $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ 的期望 $EX(t)$ 、方差

$Var[X(t)]$ 及矩母函数 $g_{X(t)}(s)$ 。(均匀分布矩母函数: $g(s) = \frac{e^{bs} - e^{as}}{(b-a)s}$)

三、(18 分) 圆周上有 1,2,3,4 四个位置按顺时针方向排列, 一个粒子在这四个位置上(沿圆周)作随机游动。它从任何一个位置各以概率 0.5 顺时针方向或逆时针方向游动至其相邻位置, 若以 $X_n = j$ 表示时刻 n 粒子处于位置 j ($j = 1, 2, 3, 4$), 则 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为一马氏链,

- (1) 求该马氏链的转移概率矩阵 P 及 $P^{(2)}$, 并求 $P\{X_{n+3} = 3, X_{n+1} = 1 | X_n = 2\} = ?$
- (2) 讨论该马氏链状态分类并求其平稳分布 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$;
- (3) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}$ 是否存在? 为什么?

四、(12 分) 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为区间 $[0, 3]$ 上的随机游动, 其转移概率矩阵为:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

试求粒子由 k 出发而被 0 吸收的概率 p_k 及它被吸收的平均步数 v_k , ($k = 1, 2, 3$)。

五、(15 分) 设 A 与 Θ 独立, $A \sim \text{Exp}(1/3)$ (指数分布), $\Theta \sim U(0, 2\pi)$ (均匀分布), 定义随机过程:

$$X(t) = A \cos(t + \Theta), \quad (t \in R)$$

- (1) 证明 $\{X(t), t \in R\}$ 为宽平稳过程;
- (2) 试求其功率谱密度函数 $S(\omega)$ 。

六、(10 分) 设平稳过程 $X = \{X(t), t \in R\}$ (均值为 0) 的功率谱密度函数为:

$$S(\omega) = \frac{\omega^2 + 3}{\omega^4 + 11\omega^2 + 28}$$

- (1) 试求 X 的协方差函数 $R(\tau)$;
- (2) 问 X 的均值是否有遍历性? 为什么?

(完)