

中国科学技术大学

2016—2017学年第二学期考试试卷

考试科目 随机过程(B) 得分 _____

所在系 _____ 学号 _____ 姓名 _____

(2017年6月22日上午8:30-10:30, 半开卷)

一. (29分) 填空或选择题.

1. 设随机变量 X 和 Y 的矩母函数 $g_X(t)$ 和 $g_Y(t)$ 均存在, 则下列说法错误的是().
(A) $g_X(t)$ 能唯一决定 X 的分布
(B) 若 X 的方差存在且 $g_X(t)$ 二阶可导, 则 $\text{Var}(X) = g_X''(0) - [g_X'(0)]^2$
(C) $X + Y$ 的矩母函数也存在且为 $g_X(t)g_Y(t)$
(D) 对任意 $n > 0$, n 阶矩 $E[X^n]$ 一定存在
2. 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个强度为 λ 的Poisson过程, 则 $E[N(1)N(2)] =$ _____;
 $E[N(10)|N(5)] =$ _____; 若又已知 $N(3) = 1$, 则 $P(N(2) - N(1) = 1) =$ _____.
3. 假定某天文台观测到的流星流是一个Poisson过程, 据以往资料统计为每小时平均观测到3颗流星. 则在晚上8点到10点期间, 该天文台没有观察到流星的概率是 _____. 凌晨0点后该天文台观察到第一颗流星的时间的分布是 _____.
4. 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是一个Markov链, 且一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

若 X_0 的分布律为 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$, 则 X_2 的分布律为 _____; 且该Markov链的平稳分布为 _____.

5. 在离散时间Markov链中, 关于常返性下列说法正确的是().
(A) 若状态 i 常返且 $j \rightarrow i$, 则状态 j 也是常返的
(B) 若状态 i 常返且 $i \rightarrow j$, 则状态 j 不一定是常返的
(C) 若状态 i 零常返, 则极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(n)}$ 一定存在
(D) 若状态 i 正常返, 则极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(n)}$ 一定存在
6. 关于离散时间Markov链的平稳分布和极限分布, 下列说法正确的是().
(A) 只要有正常返类, 则必有平稳分布
(B) 平稳分布和极限分布都存在, 则它们必相等
(C) 极限分布若存在则与 X_0 的取值无关
(D) 平稳分布若存在则必唯一
7. 关于直线上的简单对称随机游动 $\{X_n, n \geq 0\}$, 下列说法错误的是().
(A) 所有状态的周期均为2

- (B) $\{X_n, n \geq 0\}$ 为一个 Markov 链且无平稳分布
- (C) 若 $X_0 = 0$, 则对任意整数 n , 其最终能到达它的概率为 1
- (D) 若 $X_0 = 0$, 则其首次返回原点所需平均时间是有限的

8. 关于平稳过程, 下列说法正确的是().

- (A) 宽平稳过程具有平稳增量性
- (B) Poisson 过程是宽平稳过程
- (C) 初始状态服从平稳分布的 Markov 过程为严平稳过程
- (D) 严平稳过程一定是宽平稳过程

二. (12分) 假设一个电子管内到达阳极的电子数目 $N(t)$ 服从参数为 λ 的 Poisson 过程, 每个电子携带能量相互独立且与电子数目 $N(t)$ 相互独立, 并均服从区间 $[1, 2]$ 上的均匀分布, 设到 t 时刻的阳极接受的能量为 $S(t)$. 求 $S(t)$ 的均值 $E[S(t)]$ 和方差 $\text{Var}[S(t)]$.

三. (20分) 现有红色、黄色、蓝色三种汽车, 分别按强度为 λ_1, λ_2 和 λ_3 且相互独立的 Poisson 过程通过公路上的某观察站,

- (1) 若不论颜色, 求第一辆车通过该观察站所需的时间的概率密度函数与期望;
- (2) 在已知时刻 t_0 观察到一辆红车的条件下,
 - (a) 下一辆仍是红车的概率是多少? (b) 下一辆是黄车的概率是多少?
- (3) 已知时刻 t_0 观察到一辆红车的条件下, 接下来通过的 k 辆全是红车, 而后是非红车的概率是多少? ($k \geq 0$)
- (4) 在相继两辆红车之间通过该观察站的蓝车恰有 n 辆的概率, $n = 0, 1, 2, \dots$.

四. (15分) 设马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 的状态空间为 $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ (全体非负整数), 转移概率为

$$P_{i,i+1} = P_{i,0} = \frac{1}{2}, \quad i \geq 0.$$

- (1) 证明该马氏链为不可约遍历的;
- (2) 试求该马氏链的极限分布 $\pi = \{\pi_i, i \geq 0\}$.

五. (8分) 设 $X(t) = Y \cos(\omega t + \Theta)$, 其中 ω 为常数, Y 服从均值为 μ , 方差为 σ^2 正态分布, Θ 服从区间 $[0, 2\pi]$ 上的均匀分布, 且 Y 与 Θ 相互独立. 试判断 $X(t)$ 是否为宽平稳过程. 如是, 请给出证明; 否则, 请说明原因.

六. (16分) 已知平稳过程 $\{X(t), -\infty < t < \infty\}$ 的均值函数为 0, 谱密度函数为

$$S(\omega) = \frac{\omega^2 + 4}{\omega^4 + 10\omega^2 + 21}, \quad -\infty < \omega < \infty.$$

- (1) 求 $X(t)$ 的协方差函数 $R(\tau)$;
- (2) $X(t)$ 是否有均值遍历性? 为什么?