

# 中国科学技术大学

## 2016-2017学年第一学期期末考试试卷 (A卷)

考试科目 随机过程(B) 得分 \_\_\_\_\_

学生所在系 \_\_\_\_\_ 学号 \_\_\_\_\_ 姓名 \_\_\_\_\_

(考试时间: 2017年1月11日上午8:30-10:30, 半开卷)

### 一、(32分) 判断是非与填空题.

- (1) 设  $\{N(t), t \geq 0\}$  是一个强度为  $\lambda > 0$  的Poisson过程, 则  $\text{Cov}(N(t), N(s)) =$  \_\_\_\_\_.
- (2) (判断是非) 设有  $m \geq 1$  使得对于马氏链的所有状态  $i$ , 有  $P_{i,j}^{(m)} > 0$ , 则:
- A  $d(j)|m$ , 其中  $d(j)$  为  $j$  的周期; ( )
- B  $d(j) = m$ ; ( )
- C  $j$  是非周期的; ( )
- D  $j$  的周期为无穷; ( )
- (3) 设某路口白、红、灰三种颜色的汽车的到达数量分别为强度为  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  的Poisson过程到达, 且相互独立。若不论颜色, 第一辆汽车平均到达时间为\_\_\_\_\_; 第一辆红色汽车的平均到达时间为\_\_\_\_\_。
- (4) 设  $[0, t]$  内到达某商店门口的顾客数  $\{N(t), t \geq 0\}$  是一个强度为  $\lambda > 0$  的Poisson过程, 每个达到的顾客依概率  $p$  进入店内, 以概率  $1 - p$  不进店即离开, 且顾客是否进店是相互独立的; 进店的每个顾客又独立地以概率  $q$  进行消费, 以概率  $1 - q$  不消费。则进店的顾客数的均值和方差为\_\_\_\_\_和\_\_\_\_\_; 消费的顾客数的均值和方差为\_\_\_\_\_和\_\_\_\_\_。
- (5) 设  $X(t) = A \sin(2\pi\Theta_1 t + \Theta_2)$ ,  $A$  为常数,  $\Theta_1, \Theta_2$  为相互独立的随机变量,  $\Theta_1$  的密度函数为一个偶函数, 而  $\Theta_2$  服从区间  $[-\pi, \pi]$  上的均匀分布, 则其均值函数为\_\_\_\_\_, 协方差函数为\_\_\_\_\_, 从而该过程为\_\_\_\_\_。
- (6) 设马氏链的状态  $i$  是周期为  $d$  的常返状态,  $\mu_i$  为状态  $i$  的平均常返时, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ii}^{(nd)} =$  \_\_\_\_\_。

### 二、(16分) 设某人甲负责订阅杂志, 前来订阅的顾客数是日均到达率为6 的泊松过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 。

若每个顾客的订阅季数  $Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$  且各人的选择相互独立。设  $N_i(t)$  为订阅  $i$  季杂志的顾客人数,  $i = 1, 2, 3$ . 并以  $\{X(t)\}$  表示到时刻  $t$  为止甲所得全部手续费 (假设每订出一季杂志, 甲可得手续费 1 元),

- (1) 问  $N_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$  分别是什么过程? 它们是否相互独立?
- (2) 试求:  $E[X(t)]$ ,  $\text{Var}(X(t))$ , 及  $X(t)$  的矩母函数  $g_{X(t)}(u) = E[e^{uX(t)}]$ .

三、(20分) 设有夏普、大金两个品牌的空气净化器在某地市场占有率开始时 ( $n = 0$ ) 均为1/3(其他品牌总的市场占有率为1/3). 而每过一个月 (单位时间) 顾客消费倾向的改变可以用一个三状态的马氏链  $\{X_n, n \geq 0\}$  来描述,其一步转移概率(状态1、2、3分别表示购买夏普、大金、其他品牌的空气净化器)如下图所示.

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0.35 & 0.3 & 0.35 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

- (1) 证明该链为不可约、遍历的;
- (2) 问两个月后各品牌的市场占有率将变成多少?
- (3) 各品牌对市场的占有率最终会稳定于什么样的比例?

四、(16分) 逐个随机地把球放入到  $a$  个盒子中去 (可重复放), 以  $X_n$  表示放了  $n$  个球之后的空盒数, 则  $\{X_n, n \geq 0\}$  为马氏链,

- (1) 写出该马氏链的转移概率矩阵  $P$ , 并进行状态分类;
- (2) 试求放满  $a$  个盒子的平均时间 (次数)。

五、(16分) 已知平稳过程  $\{X(t), -\infty < t < \infty\}$  的均值函数为 0, 谱密度函数为

$$S(\omega) = \frac{\omega^2 + 5}{\omega^4 + 11\omega^2 + 24}, \quad -\infty < \omega < \infty.$$

- (1) 求  $X(t)$  的协方差函数  $R(\tau)$ ;
- (2)  $X(t)$  是否有均值遍历性? 为什么?

(完)