

中国科学技术大学

2018-2019 第一学期期末考试题

考试科目: 随机过程 (B)

得分: _____

学生所在系: _____ 姓名: _____ 学号: _____

(2019 年 1 月 10 日, 半开卷)

一、(30 分。填空题每空 3 分, 其余每空 2 分) 判断是非与填空:

(1) (是非) 若马氏链 $X = \{X_n, n \geq 0\}$ 的初始分布 $\pi = \{\pi_j, j \geq 0\}$ 为其平稳分布, 则:

(a) $\sum_{i \geq 0} \pi_i p_{i,j}^{(n)} = \pi_j, (j \geq 0, n \in N)$ () ; (b) X 为严格平稳过程 ()

(c) $\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{i,j}^{(n)}, (i, j \geq 0)$ () ; (d) X 必有正常返状态 () 。

(2) (是非) 下列关于 τ 的函数 $R(\tau)$ 是否为(实或复)平稳过程的协方差函数?

(a) $R(\tau) = e^{-|\tau|}(|\tau| + 1)^2$ () ; (b) $R(\tau) = |\tau| e^{-\tau^2/2}$ () ; (c) $R(\tau) = \frac{\sin \tau}{\pi \tau}$ ()

(d) $R(\tau) = \sigma^2 e^{i\lambda \tau}$ () ; (e) $R(\tau) = \sigma^2 e^{-i\lambda |\tau|}$ () 。(注: $\sigma, \lambda > 0, i = \sqrt{-1}$)

(3) (填空) 设 X_1, X_2, X_3 相互独立, 且 $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i), i = 1, 2, 3$ (指数分布), 则 $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, X_3\}$ 的分布为 (), 概率 $P\{X_1 = X_{(1)}\}$ 等于 () 。

(4) (填空) 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一强度为 λ 的 Poisson 过程, W_k 为其第 k 个事件发生的时间, 并设 $1 \leq k \leq n, t > 0$, 则 $E\{W_k | N(t) = n\} = ()$, $E(W_k) = ()$ 。

二、(8 分) 假设汽车按强度为 λ 的泊松过程进入一条单向行驶的无限长的公路, 进入的第 i 辆车以速度 V_i 行驶。假定诸 V_i ($i \geq 1$) 为相互独立的正随机变量, 有共同分布 F 。

试求在时刻 t 位于区间 (a, b) 内的平均汽车辆数。

三、(15 分) 设马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 的转移概率为:

$$p_{0,j} = a_j > 0, (j \geq 0) \quad p_{i,i-1} = 1, (i \geq 1)$$

(1) 证明该马氏链为不可约常返的, 且为非周期;

(2) 试求过程由 0 出发后首次返回到 0 的平均时间 μ_0 , 并据以回答: 过程何时为正常

返? 何时为零常返?

(3) 在正常返时, 试求该马氏链的极限分布: $\pi = \{\pi_j, j \geq 0\}$ 。

四、(20 分) 设马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 的一步转移概率矩阵为:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(1) 试讨论该马氏链的状态分类 (即: 分为几个等价类、各类的周期性如何、是否为常返、是否为正常返?)。

(2) 试求过程由状态 k 出发而被状态 j 吸收的概率 $f_{k,j}$, ($k=1,2; j=3,4$)。

五、(15 分) 设 A 与 Θ 独立且分别服从均匀分布 $U(0,1)$ 与 $U(0,2\pi)$, 定义过程:

$$X(t) = A \cos(\omega_0 t + \Theta) \quad (t \in R, \omega_0 \text{ 为非零常数})$$

(1) 证明 $\{X(t), t \in R\}$ 为宽平稳过程;

(2) 试求其功率谱密度函数 $S(\omega)$ 。

六、(12 分) 设平稳过程 $X = \{X(t), t \in R\}$ (均值为 0) 的功率谱密度函数为:

$$S(\omega) = \frac{\omega^2 + 3}{\omega^4 + 11\omega^2 + 28}$$

(1) 试求 X 的协方差函数 $R(\tau)$;

(2) 问 X 的均值是否有遍历性? 为什么?

(完)