随机过程习题解析（未完成版）

8/31/2015

1. 令 $X(t)$ 为二阶矩存在的随机过程. 试证它是宽平稳的当且仅当 $EX(t)$ 与 $EX(t)X(s+t)$ 都不依赖 s.

证:

充分性：若 $EX(s)$ 与 $EX(s)X(s+t)$ 都不依赖 s

则 $EX(s) =$ 常数 m, $EX(s)X(s+t) = f(t)$

令 $s' = s+t$,

$$\therefore EX(s)X(s') = f(s'-s)$$

$$\begin{aligned}\therefore R_X(s,s') &= EX(s)X(s') - EX(s)EX(s') \\ &= f(s'-s) - m^2\end{aligned}$$

$\therefore X(t)$ 是宽平稳的

必要性：若 $X(t)$ 宽平稳则 $EX(S)$ 为常数 m，即 $EX(S)$ 与 s 无关

则

$$\begin{aligned}R_X(s,s') &= EX(s)X(s') - EX(s)EX(s') \\ &= g(s'-s)\end{aligned}$$

令 $s' = s+t$

则 $EX(s)X(s+t) = m^2 + g(t)$ 与 s 无关

2. 记 $U_1,\cdots,U_n$ 为在 $(0,1)$ 中均匀分布的独立随机变量. 对 $0<t,x<1$ 定义

$$I(t,x) = \begin{cases} 1, & x \leqslant t, \\ 0, & x > t, \end{cases}$$

并记 $X(t) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} I(t,U_k), 0 \leqslant t \leqslant 1$, 这是 $U_1,\cdots,U_n$ 的经验分布函数. 试求过程 $X(t)$ 的均值和协方差函数.

解:

$$\begin{aligned}EX(t) &= E[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I(t,U_k)] \\ &= EI(t,U_1) \\ &= \int_0^t 1\,dx = t\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
R_x(s,t) &= E[X(s)X(t)] - EX(s)EX(t) \\
&= E[\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} I(s,U_i)\cdot\sum_{j=1}^{n} I(s,U_j)] - st \\
&= \frac{1}{n^2}[(n^2-n)E(I(s,U_1)\cdot I(t,U_2)) + nE(I(s,U_1)\cdot I(t,U_1)] - st \\
&= \frac{1}{n^2}[(n^2-n)st + n\cdot\min(s,t)] - st \\
&= \frac{1}{n}[\min(s,t) - st]
\end{aligned}
$$

3. 令 Z_1, Z_2 为独立的正态随机变量, 均值为 0, 方差为 σ^2, λ 为实数. 定义过程 $X(t) = Z_1\cos\lambda t + Z_2\sin\lambda t$. 试求 $X(t)$ 的均值函数和协方差函数. 它是宽平稳的吗?

解：

$$
\begin{aligned}
EX(t) &= \cos\lambda t EZ_1 + \sin\lambda t EZ_2 = 0 \\
R_X(s,t) &= Cov(Z_1\cos\lambda s + Z_2\sin\lambda s, Z_z\cos\lambda t + Z_2\sin\lambda t) \\
&= \cos\lambda s\cos\lambda t Cov(Z_1,Z_1) + \sin\lambda s\sin\lambda t Cov(Z_2,Z_2) \\
&= \sigma^2\cos\lambda(s-t)
\end{aligned}
$$

只与 $s-t$ 有关, $\therefore$ 是宽平稳的

4. Poisson 过程 $X(t), t \geqslant 0$ 满足 (i) $X(t)=0$; (ii) 对 $t>s$, $X(t)-X(s)$ 服从均值为 $\lambda(t-s)$ 的 Possion 分布; (iii) 过程是有独立增量的. 试求其均值函数和协方差函数. 它是宽平稳的吗?

解：

$$
\begin{aligned}
EX(t) &= E[X(t)-X(0)] = \lambda t \\
R_X(s,t) &= Cov(X(t),X(s)) \\
&= Cov(X(s)-X(t)+X(t)-X(0), X(t)-X(0)) \\
&= Cov(X(t)-X(0), X(t)-X(0)) \qquad \text{（独立增量）} \\
&= \lambda t \qquad (s \geqslant t)
\end{aligned}
$$

$\therefore$ 非宽平稳

5. X(t) 为第 4 题中的 Possion 过程. 记 $Y(t) = X(t+1) - X(t)$, 试求过程 $Y(t)$ 的均值函数和协方差函数, 并研究其平稳性.

解：

$$
\begin{aligned}
EY(t) &= EX(t+1) - EX(t) = \lambda \\
R_X(s,t) &= Cov(X(s+1)-X(s), X(t+1)-X(t)) \\
&= Cov(X(s+1), X(t+1)) + Cov(X(s), X(t)) \\
&\quad - Cov(X(s), X(t+1)) - Cov(X(s+1), X(t)) \\
&= \lambda[\min(s+1,t+1) + \min(s,t) - \min(s,t+1) - \min(s+1,t)]
\end{aligned}
$$

令 $\beta = s-t$, 当 $\beta > 1$ 或 $\beta < -1$ 时, $R_Y(s,t) = 0$

当 $0 < \beta \leqslant 1$ 时, $R_Y(s,t) = \lambda(t+1+t-s-t) = \lambda(t-s+1)$

当 $-1 \leqslant \beta \leqslant 0$ 时, $R_Y(s,t) = \lambda(s+1+s-s-t) = \lambda(s-t+1)$

$\therefore$ 宽平稳

6. 令 Z_1 和 Z_2 是独立同分布的随机变量. $P(Z_1=-1) = P(Z_1=1) = \frac{1}{2}$. 记 $X(t) = Z_1\cos\lambda t + Z_2\sin\lambda t$, $t \in R$. 试证 $X(t)$ 是宽平稳的, 它是严平稳的吗?

解：

$$
\begin{aligned}
EZ_1 &= EZ_2 = 0 \\
EX(t) &= \cos\lambda t EZ_1 + \sin\lambda t EZ_2 = 0 \\
R_X(s,t) &= Cov(Z_1\cos\lambda s + Z_2\sin\lambda s, Z_1\cos\lambda t + Z_2\sin\lambda t) \\
&= \cos\lambda s\cos\lambda t Cov(Z_1,Z_1) + \sin\lambda s\sin\lambda t Cov(Z_2,Z_2) \\
&= 2\cos\lambda(s-t) Var Z_1 \\
&= 2\cos\lambda(s-t)\left(E(Z_1^2) - E^2(Z_1)\right) \\
&= \cos\lambda(s-t)
\end{aligned}
$$

$\therefore$ 是宽平稳

$F_t(x) = P(Z_1\cos\lambda t + Z_2\sin\lambda t \leqslant x)$

考虑 $F_t(x) = P(Z_1\cos\lambda t + Z_2\sin\lambda t \leqslant 0)$

当 $t=0$ 时 $F_t(0) = P(Z_1 \leqslant 0) = \frac{1}{2}$

当 $t = \frac{\pi}{4\lambda}$ 时 $F_t(x) = P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(Z_1+Z_2) \leqslant 0\right) = \frac{3}{4}$

$\therefore F_t(x)$ 与 t 有关, 故 $X(t)$ 不是严平稳过程

7. 试证：若 $Z_0, Z_1, \cdots$ 为独立同分布随机变量, 定义 $X_n = Z_0 + Z_1 + \cdots + Z_n$, 则 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 是独立增量过程.

证：$X_n - X_{n-1} = Z_n$

$\therefore X_1 - X_0, X_2 - X_1, \cdots, X_n - X_{n-1}$ 即 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ 独立同分布

$\therefore \{X_n, n \geqslant 0\}$ 为独立增量过程

又 $X_{t_1+h} - X_{t_1} = Z_{t_1+1} + \cdots + Z_{t_1+h}$

$X_{t_2+h}-X_{t_2}=Z_{t_2+1}+\cdots+Z_{t_2+h}$
$\because Z_n$ 独立同分布
$\therefore Z_{t_1+1}+\cdots+Z_{t_1+h}\overset{d}{=}Z_{t_2+1}+\cdots+Z_{t_2+h}$
$\therefore$ 是平稳的
逆命题：已知 $X_n=\sum\limits_{i=0}^{n}Z_i$, 过程 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 是平稳独立增量过程
$\therefore X_i-X_{i-1}=Z_i$ 与 $X_j-X_{j-1}=Z_j$ 独立同分布
即 $Z_i,i=0,1,\cdots$ 是一串独立同分布的随机变量

8. 若 $X_1,X_2,\cdots$ 为独立随机变量, 还要添加什么条件才能确保它是严平稳的随机过程?

解：

若 $\{X_1,X_2,\cdots\}$ 严平稳, 则对任意正整数 m 和 n , X_m 和 X_n 的分布都相同, 从而 $X_1,X_2,\cdots$ 是一列同分布的随机变量. 而当 $X_1,X_2,\cdots$ 是一列独立同分布的随机变量时. 对任意正整数 k 及 $n_1,\cdots,n_k,k$ 维随机向量 $(X_{n_1},\cdots,X_{n_k})$ 的分布函数为 (记 $X_1,X_2,\cdots$ 的共同分布函数为 $F(x)$)

$$\begin{aligned}F_{\left(X_{n_1},\cdots,X_{n_k}\right)}(x_1,\cdots,x_k)&=F_{X_{n_1}}(x_1)\cdots F_{X_{n_k}}(x_n)\\&=F(x_1)\cdots F(x_k).\quad -\infty<x_1,\cdots,x_k<+\infty.\end{aligned}$$

这说明了 $(X_{n_1},\cdots,X_{n_k})$ 的分布函数与 $n_1,\cdots,n_k$ 无关, 故 $\{X_1,X_2,\cdots\}$ 严平稳.

9. 令 X 和 Y 是从单位圆内的均匀分布中随机选取一点所得的横坐标和纵坐标. 试计算条件概率

$$P\left(X^2+Y^2\geqslant\frac{3}{4}\middle|X>Y\right).$$

解：易见答案为 $\frac{1}{4}$.

12. 气体分子的速度 V 有三个垂直分量 V_x,V_y,V_z, 它们的联合分布密度依 $Maxwell-Boltzman$ 定律为

$$f_{V_x,V_y,V_z}(v_1,v_2,v_3)=\frac{1}{(2\pi kT)^{3/2}}\exp\left\{-\left(\frac{v_1^2+v_2^2+v_3^2}{2kT}\right)\right\},$$

其中 k 是 Boltzman 常数, T 为绝对温度, 给定分子的总动能为 e. 试求 x 方向的动量的绝对值的期望值.

解：由题中所给分布律知分子质量为单位质量, 即有 $e=\frac{1}{2}\left(V_x^2+V_y^2+V_z^2\right)$.
则所求为

$$\mathrm{E}\left[|V_x|\middle|\frac{1}{2}\left(V_x^2+V_y^2+V_z^2\right)=e\right]$$

作 $\left(V_x, V_y, V_z\right)$ 的球坐标变换

$$
\begin{aligned}
V_x &= R\cos\Phi \\
V_y &= R\cos\Theta\sin\Phi \\
V_z &= R\sin\Theta\sin\Phi,
\end{aligned}
$$

则 (R,Θ,Φ) 的联合概率密度为

$$
\begin{aligned}
f_{R,\Theta,\Phi}(r,\theta,\phi) &= f_{V_x,V_y,V_z}(r\cos\phi, r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta\sin\phi)\cdot r^2\sin\phi \\
&= \frac{\sqrt{2}r^2}{\sqrt{\pi}(kT)^{3/2}}e^{-r^2/2kT}\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\sin\phi \\
&= f_R(r)f_\Theta(\theta)f_\Phi(\phi)
\end{aligned}
$$

由此可知 R,Θ,Φ 相互独立.

$$
\begin{aligned}
\therefore\quad & \mathrm{E}\left[|V_x|\,\middle|\,\frac{1}{2}\left(V_x^2+V_y^2+V_z^2\right)=e\right] \\
&= \mathrm{E}\left[R|\cos\Phi|\,\middle|\,\frac{1}{2}R^2=e\right] \\
&= \mathrm{E}\left[R|\cos\Phi|\,\middle|\,R=\sqrt{2e}\right] \\
&= \sqrt{2e}\,\mathrm{E}\left[R|\cos\Phi|\right] \\
&= \sqrt{2e}\int_0^\pi \frac{1}{2}\sin\phi|\cos\phi|\,d\phi \\
&= \sqrt{\frac{e}{2}}
\end{aligned}
$$

13. 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布. 它们服从参数为 λ 的指数分布. 试证 $\sum\limits_{i=1}^n X_i$ 是参数为 (n,λ) 的 Γ 分布, 其密度为

$$
f(t) = \lambda\exp\{-\lambda t\}(\lambda t)^{n-1}/(n-1)!\ ,\quad t\geqslant 0.
$$

证：

令 $Y=\sum\limits_{i=1}^n X_i$
$g_Y(t)=g_X^n(t)=\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^n$
$\therefore Y$ 服从参数为 (n,λ) 的 Γ 分布, 其密度函数如题所述

14. 设 X_1 和 X_2 为相互独立的均值为 λ_1 和 λ_2 的 Possion 随机变量. 试求 X_1+X_2 的分布, 并计算给定 $X_1+X_2=n$ 时 X_1 的条件分布.
解：令 $Y=X_1+X_2$

$$\begin{aligned} g_Y(t) &= g_{X_1}(t) g_{X_2}(t) \\ &= e^{\lambda_1(e^t-1)} e^{\lambda_2(e^t-1)} \\ &= e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^t-1)} \end{aligned}$$

$\therefore Y \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$
$\therefore$ 给定 $X_1+X_2=n$ 时 X_1 服从参数为 $p=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}, n=n$ 的二项分布

15. 若 $X_1, X_2, \cdots$ 独立且有相同的以 λ 为参数的指数分布, N 服从几何分布, 即

$$P(N=n)=\beta(1-\beta)^{n-1}, n=1,2,\cdots,0<\beta<1.$$

试求随机和 $Y=\sum\limits_{i=1}^{N} X_i$ 的分布.
解:

$$E(e^{tY}|N=n)=g_X^n(t)=\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^n \triangleq \alpha^n$$

$$\therefore g_Y(t)=E[E(e^{tY}|N)]=E(\alpha^N)=\sum_{n=1}^{+\infty}\beta(1-\beta)^{n-1}\alpha^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha\beta(\alpha-\alpha\beta)^{n-1}$$

当 $|\alpha-\alpha\beta|<1$ 时 $g_Y(t)=\frac{\alpha\beta}{1-\alpha(1-\beta)}=\frac{\lambda\beta}{\lambda\beta-t}$
$\therefore Y$ 服从参数为 $\lambda\beta$ 的指数分布

16. 若 $X_1, X_2, \cdots$ 独立同分布, $P(X_i=\pm 1)=\frac{1}{2}$. N 与 X_i, $i \geqslant 1$ 独立且服从参数为 β 的几何分布, $0<\beta<1$. 试求随机和 $Y=\sum\limits_{i=1}^{N} X_i$ 的均值, 方差和三、四阶矩.
解:

$$E(e^{tY}|N=n)=g_X^n(t)=E^n(e^{tY})=\left(\tfrac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^n$$
$$\therefore g_Y(t)=E\left[E(e^{tY}|N)\right]=E\left[\left(\tfrac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^N\right]=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\tfrac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^n\beta(1-\beta)^{n-1}$$

$$\therefore EY = g_Y'(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^{n-1}\beta(1-\beta)^{n-1}\frac{e^t-e^{-t}}{2}\bigg|_{t=0} = 0$$

$$\begin{aligned}
EY^2 &= g_Y''(0)\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\left[n(n-1)\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^{n-2}\beta(1-\beta)^{n-1}\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2 + \right.\\
&\qquad \left. n\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^{n}\beta(1-\beta)^{n-1}\right]\Bigg|_{t=0}\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} n\beta(1-\beta)^{n-1}\\
&= \frac{1}{\beta}
\end{aligned}$$

$$VarY = EY^2 - (EY)^2 = \frac{1}{\beta^2}$$

$$\begin{aligned}
EY^3 &= g_Y^{(3)}(0)\\
&= \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{n\beta(1-\beta)^{n-1}\left[(n-1)\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^{n-2}\frac{e^t-e^{-t}}{2}^2 + \left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^{n}\right]\right\}\right)'\Bigg|_{t=0}\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\left\{n\beta(1-\beta)^{n-1}\left[(n-1)(n-2)\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^3 + \right.\right.\\
&\qquad \left.\left.(n-1)\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^{n-2}\cdot 2\cdot\frac{e^t-e^{-t}}{2}\cdot\frac{e^t+e^{-t}}{2} + n\cdot\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right]\right\}\Bigg|_{t=0}\\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
EY^4 &= g_Y^{(4)}(0)\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\left\{n\beta(1-\beta)^{n-1}\left[(n-1)\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^{n-1}(e^t+e^{-t}) + n\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^{n}\right]\right\}\Bigg|_{t=0}\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}(3n^2-2n)\beta(1-\beta)^{n-1}\\
&= 3\sum_{n=1}^{+\infty}n^2\beta(1-\beta)^{n-1} - 2\sum_{n=1}^{+\infty}n\beta(1-\beta)^{n-1}\\
&= 3\left(\frac{1-\beta}{\beta^2}+\frac{1}{\beta^2}\right) - 2\frac{1}{\beta^2}\\
&= \frac{6-5\beta}{\beta^2}
\end{aligned}$$

17. 随机变量 N 服从参数为 λ 的 Possion 分布. 给定 $N=n$, 随机变量 M 服从以 n 和 p 为参数的二项分布. 试求 M 的无条件概率分布.

解：

$$\mathrm{E}\left(e^{tM}|N=n\right)=\left(pe^{t}+(1-p)\right)^{n}\overset{\Delta}{=}a^{n}$$

$$g_M(t)=\mathrm{E}(a^N)=\sum_{n=0}^{+\infty}a^n\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}=e^{\lambda p(e^t-1)}$$

$$\therefore M\sim P(\lambda p)$$

1. $N(t)$ 为一 Possion 过程, 对 $s<t$ 试求条件概率 $P\{N(s)=k|N(t)=n\}$.
解：

$$\begin{aligned}
P\{N(s)=k|N(t)=n\} &= P(N(s)=k,N(t)=n)/P(N(t)=n) \\
&= P(N(s)-N(0)=k,N(t)-N(s)=n-k)/P(N(t)=n) \\
&= \left[\frac{(\lambda s^k)e^{-\lambda s}}{k!}\cdot\frac{(\lambda(t-s))^{n-k}e^{-\lambda(t-s)}}{(n-k)!}\right]\Bigg/\left[\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}\right] \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{s}{t}\right)^k\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

2. $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 为一强度是 λ 的 Possion 过程. 对 $s>0$ 试计算 $E[N(t)\cdot N(t+s)]$.
解：

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= E\left[N(t)\left(N(t+s)-N(t)+N(t)\right)\right] \\
&= E\left(N(t)\right)E\left(N(t+s)-N(t)\right)+E\left(N^2(t)\right) \\
&= \lambda t\cdot\lambda s+VarN(t)+E^2N(t) \\
&= \lambda^2 ts+\lambda t+(\lambda t)^2 \\
&= \lambda^2 t(s+t)+\lambda t
\end{aligned}$$

3. 电报依平均速率为每小时 3 个的 Possion 过程到达电报局, 试问:
(i) 从早上八时到中午没收到电报的概率;
(ii) 下午第一份电报到达时间的分布是什么?
解:
(i) 令 t 的计时单位为小时, 并以早上 8:00 为起始时刻
所求事件即 {N(4) = 0}
其概率为 $\frac{e^{-12}\cdot 12^0}{0!}\approx 6.1\times 10^{-6}$
(ii) 取中午 12:00 为起始时刻, T 表示下午第一份电报到达时间 $F(t)=P(T\leqslant t)=P(N(t)\geqslant 1)=1-e^{-3t}$
$\therefore f(t)=3e^{-3t}$, 即 T 服从参数为 3 的指数分布

4. $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 为一 $\lambda=2$ 的 Possion 过程, 试求：
(i)$P\{N(1)\leqslant 2\}$;
(ii)$P\{N(1)=1\text{且}N(2)=3\}$;
(iii)$P\{N(1)\geqslant 2|N(1)\geqslant 1\}$.
解：

(i)

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= P\{N(1)-N(0)=0\}+P\{N(1)-N(0)=1\}+P\{N(1)-N(0)=2\} \\
&= e^{-2}+\frac{2e^{-2}}{1!}+\frac{2^2e^{-2}}{2!} \\
&= 5e^{-2}
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= P\{N(1)-N(0)=1\text{且}N(2)-N(1)=2\} \\
&= P\{N(1)-N(0)=1\}\cdot P\{N(2)-N(1)=2\} \\
&= 2e^{-2}\cdot 2e^{-2} \\
&= 4e^{-4}
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{P\{N(1)\geqslant 2\}\text{且}N(1)\geqslant 1}{P\{N(1)\geqslant 1\}} \\
&= \frac{P\{N(1)\geqslant 2\}}{P\{N(1)\geqslant 1\}} \\
&= \frac{1-P\{N(1)-N(0)\leqslant 1\}}{1-P\{N(1)-N(0)=0\}} \\
&= \frac{1-3e^{-2}}{1-e^{-2}}
\end{aligned}$$

6. 一部 600 页的著作总共有 240 个印刷错误, 试利用 Possion 过程近似求出某连续三页无错误的概率.

解：设 $N(t)$——到第 t 页为止的印刷错误数, 则 $N(t)$ 为一 Possion 过程

观点一：该 Possion 过程的参数 λ 未知

则所求概率为

$$\begin{aligned}
&P\{N(t+3)-N(t)=0|N(600)-N(0)=240\} \\
&= P\{N(t+3)-N(t)=0;N(600)-N(0)=240\}/P\{N(600)-N(0)=240\} \\
&= P\{N(3)-N(0)=0\}\cdot P\{N(600)-N(3)=240\}/P\{N(600)-N(0)=240\} \\
&= e^{-3\lambda}\cdot\frac{(597\lambda)^{240}}{240!}e^{-597\lambda}\Bigg/\left[\frac{(600\lambda)^{240}}{240!}\cdot e^{-600\lambda}\right] \\
&= \left(\frac{597}{600}\right)^{240}\approx 0.3003\approx 0.3
\end{aligned}$$

观点二：该 Possion 过程的参数 λ 已知, $\lambda = 240/600 = 0.4$,
则所求概率为 $P\{N(3)=0\} = e^{-0.4\times 3} \approx 0.3012 \approx 0.3$

7. $N(t)$ 是强度为 λ 的 Possion 过程. 给定 $N(t)=n$, 试求第 r 个事件 $(r \leqslant n)$ 发生的时刻 W_r 的条件概率密度 $f_{W_r|N(t)=n}(w_r|n)$.

解：

$$\begin{aligned}
&f_{W_r|N(t)=n}(w_r|n)\cdot \Delta w_r \\
&= P\{N(w_r)-N(0)=r-1, N(w_r+\Delta w_r)-N(w_r)=1|N(t)=n\} \\
&= P\{N(w_r)-N(0)=r-1\}\cdot P\{N(w_r+\Delta w_r)-N(w_r)=1\} \\
&\quad \cdot P\{N(t)-N(w_r+\Delta w_r)=n-r\}/P\{N(t)=n\} \\
&= \frac{(\lambda w_r)^{r-1}}{(r-1)!}e^{-\lambda w_r}\cdot(\lambda\Delta w_r+o(\Delta w_r))\cdot\frac{(\lambda(t-w_r-\Delta w_r))^{n-r}}{(n-r)!}e^{-\lambda(t-w_r-\Delta w_r)}\bigg/\left[\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{\lambda t}\right]
\end{aligned}$$

两边除以 Δw_r 并令 $\Delta w_r \to 0$ 得
$f_{W_r|N(t)=n}(w_r|n) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\frac{(w_r)^{r-1}(t-w_r)^{n-r}}{t^n}$

8. 令 $\{N_i(t), t\geqslant 0\}, i=1,2,\cdots,n$ 为 n 个独立的有相同强度参数 λ 的 Possion 过程. 记 T 为在全部 n 个过程中至少发生了一件事的时刻, 试求 T 的分布.

解：

$$\begin{aligned}
F_T(t) = P\{T\leqslant t\} &= 1-P(T<t) \\
&= 1-P(N_i(t)=0, i=1,2,\cdots,n) \\
&= 1-\left(e^{-\lambda t}\right)^n
\end{aligned}$$

$\therefore f_T(t) = F_T'(t) = n\lambda e^{-n\lambda t}$
即 T 服从参数为 $n\lambda$ 的指数分布.

10. 到达某加油站的公路上的卡车服从参数为 λ_1 的 Possion 过程 $N_1(t)$, 而到达的小汽车服从参数为 λ_2 的 Possion 过程 $N_2(t)$, 且过程 $N_1(t)$ 与 $N_2(t)$ 独立. 试问随机过程 $N(t)=N_1(t)+N_2(t)$ 是什么过程? 并计算在总车流数 $N(t)$ 中卡车首先到达的概率.

解：

$$\begin{aligned}
g_{N(t)}(v) &= g_{N_1t}(v)\cdot g_{N_2t}(v) \\
&= e^{\lambda_1 v(e^t-1)}e^{\lambda_2 v(e^t-1)} \\
&= e^{(\lambda_1+\lambda_2)v(e^t-1)}
\end{aligned}$$

$\therefore N(t)$ 是强度为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的 Possion 过程
记 W_1,W_2 分别为卡车、小汽车的第一次到达时间, 则 W_1 服从参数为 λ_1 的指数分布, W_1 服从参数为 λ_1 的指数分布.

$$\begin{aligned}\therefore P(W_1<W_2) &= \iint_{0\leqslant W_1<W_2\leqslant+\infty} f_{W_1,W_2}(w_1,w_2)\,dw_1dw_2\\ &= \int_0^{+\infty}dw_1\int_{w_1}^{+\infty}\lambda_1\lambda_2 e^{-w_1\lambda_1-w_2\lambda_2}\,dw_2\\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\end{aligned}$$

11. 冲击模型 (Shock Model) 记 $N(t)$ 为某系统到某时刻 t 受到的冲击次数, 它是参数为 λ 的 Possion 过程. 设第 k 次冲击对系统的损害大小 Y_k 服从参数为 μ 的指数分布, $Y_k,k=1,2,\cdots$, 独立同分布. 记 $X(t)$ 为系统所受到的总损害. 当损害超过一定的极限 α 时系统不能运行, 寿命终止, 记 T 为系统寿命. 试求该系统的平均寿命 ET, 并对所得结果作出直观解释.
提示：对非负随机变量 $\mathrm{E}T=\int_0^\infty P(T>t)\,dt$
解：令 $W_n=\sum\limits_{k=1}^{n}Y_k$
法一：

$$\begin{aligned}P(T>t) &= P\{X(t)\leqslant\alpha\}\\ &= P\{\sum_{k=1}^{N(t)}Y_k\leqslant\alpha\}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}P\left\{\sum_{k=1}^{N(t)}Y_k\leqslant\alpha|N(t)=n\right\}\cdot P\{N(t)=n\}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}P\left\{\sum_{k=1}^{n}Y_k\leqslant\alpha|N(t)=n\right\}\cdot P\{N(t)=n\}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}P\{W_n\leqslant\alpha\}\cdot P\{N(t)=n\}\end{aligned}$$

求和式中当 $n=0$ 时认为 $P\{W_n\leqslant\alpha|N(t)=n\}=1$
$\because Y_k\sim\exp(\mu)$, $\therefore W_n=\sum\limits_{k=1}^{n}Y_k\sim\Gamma(n,\mu)$

$$\therefore P(W_n\leqslant\alpha)=\frac{\mu^n}{(n-1)!}\int_0^\alpha s^{n-1}e^{-\mu s}\,ds\qquad(n\geqslant1)$$

$$P\{N(t)=n\}=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$$

$$\therefore P(T>t)=e^{-\lambda t}+e^{-\lambda t}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\lambda\mu t)^n}{n!(n-1)!}\int_0^\alpha s^{n-1}e^{-\mu s}\,ds$$

$$\begin{aligned}
\therefore \mathrm{E}T &= \int_0^{+\infty} P(T>t)\,dt \\
&= \frac{1}{\lambda} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\lambda\mu)^n}{n!(n-1)!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-\lambda t}\,dt \int_0^{\alpha} s^{n-1} e^{-\mu s}\,ds \\
&= \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu^n \Gamma(n+1)}{n!(n-1)!} \int_0^{\alpha} s^{n-1} e^{-\mu s}\,ds \\
&= \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\alpha} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\mu s)^{n-1} e^{-\mu s}}{(n-1)!} \right] d(\mu s) \\
&= \frac{1+\mu\alpha}{\lambda}
\end{aligned}$$

从结果看, 若 λ 越大 (系统所受冲击越频繁), μ 越小 (每次冲击所造成的平均损害越大), α 越小 (系统所能承受的的损害极限越小), 则系统平均寿命越短, 且当 α 等于 0 时系统的平均寿命即为第一次冲击到来的平均时间, 符合常识.

法二：

$$\begin{aligned}
\because G_n(\alpha) &= P\{Y_1+\cdots+Y_k \leqslant \alpha\} \\
&= P\{W_n \leqslant \alpha\} \\
&= P\{N_1(\alpha) \geqslant n\} \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(\mu\alpha)^n}{k!} e^{-\mu\alpha}
\end{aligned}$$

其中 $N_1(t)$ 是强度为 μ 的 Possion 过程

$$\begin{aligned}
\therefore P(T>t) &= P\{X(t) \leqslant \alpha\} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} G_n(\alpha) \qquad (\text{例}2.4) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \frac{(\mu\alpha)^n}{k!} e^{-\mu\alpha} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\mu\alpha)^n}{k!} e^{-\mu\alpha} \sum_{n=0}^{k} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \mathrm{E}T &= \int_0^{+\infty} P(T>t)\,dt \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\mu\alpha)^k}{k!} e^{-\mu\alpha} \sum_{n=0}^{k} \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}\,dt \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\mu\alpha)^k}{k!} e^{-\mu\alpha} \frac{(k+1)\Gamma(n+1)}{n!\lambda} \\
&= \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\mu\alpha)^k}{k!} e^{-\mu\alpha} + \frac{\mu\alpha}{\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\mu\alpha)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu\alpha} \\
&= \frac{1+\mu\alpha}{\lambda}
\end{aligned}
$$

12. 令 $N(t)$ 是强度函数为 $\lambda(t)$ 的非齐次 Possion 过程, $X_1, X_2, \cdots$ 为事件间的时间间隔. (i)X_i 是否独立;

(ii)X_i 是否同分布;

(iii) 试求 X_1 与 X_2 的分布.

解：记 $m(t) = \int_0^t \lambda(u)\,du$

法一：等待时间 W_1, W_2 的联合分布函数为

$$
\begin{aligned}
F_{W_1,W_2}(t_1,t_2) &= P(W_1 \leqslant t_1, W_2 \leqslant t_2), \quad 0 \leqslant t_1 < t_2 \\
&= P(N(t_1) \geqslant 1, N(t_2) \geqslant 2) \\
&= \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\ell=1}^{k} P(N(t_1)=\ell, N(t_2)=k) \\
&= \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\ell=1}^{k} P(N(t_1)=\ell, N(t_2)-N(t_1)=k-\ell) \\
&= \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\ell=1}^{k} P(N(t_1)=\ell) P(N(t_2)-N(t_1)=k-\ell) \\
&= \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\ell=1}^{k} \frac{(m(t_1)^\ell)}{\ell!} e^{-m(t_1)} \cdot \frac{[m(t_2)-m(t_1)]^{k-\ell}}{(k-\ell)!} e^{-[m(t_2)-m(t_1)]} \\
&= \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\ell=1}^{k} \frac{(m(t_1))^\ell [m(t_2)-m(t_1)]^{k-\ell}}{\ell!(k-\ell)!} e^{-m(t_2)} \\
&= e^{-m(t_2)} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\ell=1}^{k} C_k^\ell (m(t_1))^\ell [m(t_2)-m(t_1)]^{k-\ell} \\
&= e^{-m(t_2)} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left\{ \sum_{\ell=0}^{k} C_k^\ell (m(t_1))^\ell [m(t_2)-m(t_1)]^{k-\ell} - [m(t_2)-m(t_1)]^k \right\} \\
&= e^{-m(t_2)} \left\{ e^{m(t_2)} - e^{m(t_2)-m(t_1)} - m(t_1) \right\} \\
&= 1 - e^{-m(t_1)} - m(t_1) e^{-m(t_2)}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore f_{W_1,W_2}(t_1,t_2) = \frac{\partial^2 F_{W_1,W_2}(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \lambda(t_1)\lambda(t_2) e^{-m(t_2)}
$$

$$\because \begin{cases} W_1 = X_1 \\ W_2 = X_1 + X_2 \end{cases}$$

$$\therefore f_{X_2,X_2}(t_1,t_2) = \lambda(t_1)\lambda(t_1+t_2)e^{-m(t_1+t_2)}\text{不能写为}g_1(t_1)g_2(t_2)\text{形式}$$

$\therefore X_1, X_2$ 不独立

$$\begin{aligned} \text{又有} f_{X_1}(t_1) &= \lambda(t_1)\int_0^{+\infty}\lambda(t_1+t_2)e^{-m(t_1+t_2)}\,dt_2 \\ &= \lambda(t_1)\left[e^{-m(t_1)} - e^{-m(+\infty)}\right], \qquad t_1 > 0 \end{aligned}$$

下面确定 $e^{-m(\infty)}$:

$$1 = \int_0^{+\infty} f_{X_1}(t_1)\,dt_1 = \int_0^{+\infty}\lambda(t_1)\left[e^{-m(t_1)} - e^{-m(+\infty)}\right]dt_1 = 1 - [m(+\infty)+1]e^{-m(+\infty)}$$

$\therefore e^{-m(+\infty)} = 0$

$$\begin{aligned} \therefore f_{X_1}(t_1) &= \lambda(t_1)e^{-m(t_1)} \quad (t_1 > 0) \\ f_{X_2}(t_2) &= \int_0^{+\infty}\lambda(t_1)\lambda(t_1+t_2)e^{-m(t_1+t_2)}\,dt_1 \quad (t_2 > 0) \end{aligned}$$

$\therefore X_1, X_2$ 不同分布且其概率密度函数如上.

法二：

$$\begin{aligned} P\{X_2 > t | X_1 = s\} &= \lim_{s' \to s} P\left\{N(s+t) - N(s) = 0 | N(s') = 0, N(s) - N(s') = 1\right\} \\ &= P\left\{N(s+t) - N(s) = 0\right\} \\ &= e^{m(s) - m(s+t)} \end{aligned}$$

与 s 有关, 故 X_1, X_2 不独立.

$$\begin{aligned} P\{X_1 > t\} &= P\{N(t) = 0\} = e^{-m(t)} \\ P\{X_2 > t\} &= \int_0^{+\infty} P\{X_2 > t | X_1 = s\} f_{X_1}(s)\,ds \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-m(s+t)}\lambda(s)\,ds \\ &= e^{-m(t)}\int_0^{+\infty} e^{m(t)-m(s+t)}\lambda(s)\,ds \\ &= P\{X_1 > t\}\int_0^{+\infty} e^{m(t)-m(s+t)}\lambda(s)\,ds \\ &\neq P\{X_1 > t\} \end{aligned}$$

$\therefore X_1, X_2$ 不同分布 ($P\{X_1 > t$和$P\{X_2 > t\}$ 给出 X_1和X_2 的分布).

13. 考虑对所有 t, 强度函数 $\lambda(t)$ 均大于 0 的非齐次 Possion 过程 $\{N(t),t\geqslant 0\}$. 令 $m(t)=\int_0^t\lambda(u)\,du, m(t)$ 的反函数为 $\ell(t)$, 记 $N_1(t)\equiv N(\ell(t))$. 试证 $N_1(t)$ 是通常的 Possion 过程, 试求 $N_1(t)$ 的强度参数 λ.

解:

(i)$N_1(0)=N(\ell(0))=N(0)=0$

(ii)$\because m(\ell)$ 单增, $\therefore \ell(t)$ 单增

$\therefore$ 对任意 $0\leqslant t_1<t_2\cdots<t_n$, 有 $0\leqslant \ell(t_1)<\ell(t_2)<\cdots<\ell(t_n)$

$$\begin{aligned}
\therefore \text{有} N_1(t_2)-N_1(t_1)&=N(\ell(t_2))-N(\ell(t_1))\\
N_1(t_3)-N_1(t_2)&=N(\ell(t_3))-N(\ell(t_2))\\
&\vdots\\
N_1(t_n)-N_1(t_{n-1})&=N(\ell(t_n))-N(\ell(t_{n-1}))
\end{aligned}$$

$\because N(t)$ 是独立增量过程

$\therefore N_1(t)$ 也是独立增量过程

(iii)$\forall 0\leqslant s<t$, 有

$$\begin{aligned}
P(N_1(t)-N_1(s)=k)&=P\{N(\ell(t))-N(\ell(s))=k\}\\
&=\frac{[m(\ell(t))-m(\ell(s))]^k}{k!}e^{-[m(\ell(t))-m(\ell(s))]}\\
&=\frac{(t-s)^k}{k!}e^{-(t-s)}\qquad k=0,1,\cdots
\end{aligned}$$

$\therefore N_1(t)$ 是强度为 1 的 Possion 过程

14. 设 $N(t)$ 为更新过程, 试判断下述命题的真伪:

(i)$\{N(t)<k\}\Longleftrightarrow\{W_k>t\}$;

(ii)$\{N(t)\leqslant k\}\Longleftrightarrow\{W_k\geqslant t\}$;

(iii)$\{N(t)>k\}\Longleftrightarrow\{W_k<t\}$;

其中 $W-k$ 为第 k 个事件的等待时间.

解:

(i)

$$\begin{aligned}
\{N(t)<k\}&=\overline{\{N(t)\geqslant k\}}\\
&=\overline{\{W_k\leqslant t\}}\\
&=\{W_k>t\}
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\{N(t) \leqslant k\} &= \{N(t) < k+1\} \\ &= \overline{\{N(t) \geqslant k+1\}} \\ &= \overline{\{W_{k+1} \leqslant t\}} \\ &= \{W_{k+1} > t\} \\ &\neq \{W_k \geqslant t\}\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}\{N(t) > k\} &= \{N(t) \geqslant k+1\} \\ &= \{W_{k+1} \leqslant t\} \\ &\neq \{W_k < t\}\end{aligned}$$

14.5 设 $X_1(t)$ 与 $X_2(t)$ 为两个独立的 Possion 过程, 速率分别为 λ_1 和 λ_2
(a) 试证 $X_1(t)+X_2(t)$ 为速率 $\lambda_1+\lambda_2$ 的 Possion 过程
(b) $X_1(t)-X_2(t)$ 是 Possion 过程吗？为什么？
(c) 试求在过程 $X_1(t)$ 的任意两个相邻事件时间间隔之内, 过程 $X_2(t)$ 恰好发生 k 个事件的概率 $P_k(k \geqslant 0)$
解:
(a)

$$\begin{aligned}g_{X_1(t)+X_2(t)}(v) &= g_{X_1(t)}(v) \cdot g_{X_2(t)}(v) \\ &= \exp\left\{\lambda_1 t(e^v-1)\right\} \cdot \exp\left\{\lambda_2 t(e^v-1)\right\} \\ &= \exp\left\{(\lambda_1+\lambda_2)t(e^v-1)\right\}\end{aligned}$$

$\therefore X_1(t)+X_2(t)$ 是强度为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的 Possion 过程.
(b)

$$\begin{aligned}g_{X_1(t)-X_2(t)}(v) &= g_{X_1(t)}(v) \cdot g_{X_2(t)}(v) \\ &= \exp\left\{\lambda_1 t(e^v-1)\right\}\mathrm{E}\left(e^{-vX_2(t)}\right) \\ &= \exp\left\{\lambda_1 t(e^v-1)\right\} \cdot \exp\left\{\lambda_2 t(e^{-v}-1)\right\}\end{aligned}$$

不能化为 Possion 过程的矩母函数形式,
$\therefore X_1(t)-X_2(t)$ 不是 Possion 过程.
(c)$X_1(t)$ 的相邻两个事件时间间隔 τ 服从参数为 λ_1 的指数分布, 其概率密度函数为 $f(\tau)=\lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau}$

$$
\begin{aligned}
\therefore P_k &= \int_0^{+\infty} f(\tau) P\Big\{X_2(t+\tau) - X_2(t) = k\Big\}\, d\tau \\
&= \int_0^{+\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} \cdot \frac{(\lambda_2 \tau)^k}{k!} e^{-\lambda_2 \tau}\, d\tau \\
&= \frac{\lambda_1 \lambda_2^k}{(\lambda_1+\lambda_2)^{k+1} k!} \cdot \int_0^{+\infty} \big((\lambda_1+\lambda_2)\tau\big)^k e^{-(\lambda_1+\lambda_2)\tau}\, d(\lambda_1+\lambda_2)\tau \\
&= \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k
\end{aligned}
$$

1. 对 Markov 链 $X_n, n \geqslant 0$, 试证条件

$$P\{X_{n+1}=j|X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i\}=P\{X_{n+1}=j|X_n=i\}$$

等价于对所有时刻 n,m 及所有状态 $i_0,\cdots,i_n,j_1,\cdots,j_m$ 有

$$\begin{aligned}&P\{X_{n+1}=j_1,\cdots,X_{n+m}=j_m|X_0=i_0,\cdots,X_n=i\}\\=&P\{X_{n+1}=j_1,\cdots,X_{n+m}=j_m|X_n=i_n\}.\end{aligned}$$

证：$\Leftarrow$ 只需令 $m=1$

$\Rightarrow$ 由 $P_{27}(3.4)$ 可知

$$\begin{aligned}&P\{X_{n+1}=j_1,\cdots,X_{n+m}=j_m|X_0=i_0,\cdots,X_n=i_n\}\\=&P\{X_{n+1}=j_1,\cdots,X_{n+m}=j_m,X_0=i_0,\cdots,X_n=i_n\}/P\{X_0=i_0,\cdots,X_n=i_n\}\\=&P\{X_0=i_0\}\cdot P_{j_1j_2}\cdots P_{j_{m-1}j_m}P_{i_0i_1}\cdots P_{i_1j_1}/[P\{X_0=i_0\}\cdot P_{i_0i_1}\cdots P_{i_{n-1}i_n}\\=&P\{X_n=i\}\cdot P_{j_1j_2}\cdots P_{j_{m-1}j_m}P_{i_nj_1}/P\{X_n=i_n\}\\=&P\{X_{n+1}=j_1,\cdots,X_{n+m}=j_m|X_n=i_n\}\end{aligned}$$

2. 考虑状态 $0,1,2$ 上的一个 Markov 链 $X_n, n \geqslant 0$, 它有转移概率矩阵

$$P=\begin{pmatrix}0.1&0.2&0.7\\0.9&0.1&0\\0.1&0.8&0.1\end{pmatrix},$$

初始分布为 $p_0=0.3, p_1=0.4, p_2=0.3$, 试求概率 $P\{X_0=0,X_1=1,X_2=2\}$.

解：

$$P\{X_0=0,X_1=1,X_2=2\}=p_0P_{01}P_{12}=0.3\times0.1\times0=0$$

3. 信号传送问题. 信号只有 0,1 两种, 分为多个阶段传输. 在每一步上出错的概率为 α . $X_0=0$ 是送出的信号, 而 X_n 是在第 n 步接收到的信号. 假定 X_n 为一 Markov 链, 它有转移概率矩阵 $P_{00}=P_{11}=1-\alpha, P_{01}=P_{10}=\alpha, 0<\alpha<1$. 试求

(a) 两步均不出错的概率 $P\{X_0=0,X_1=0,X_2=0\}$;

(b) 两步传送后收到正确信号的概率;

(c) 五步之后传送无误的概率 $P\{X_5=0|X_0=0\}$.

解：(a) $P\{X_0=0,X_1=0,X_2=0\}=p_0P_{00}P_{00}=1\cdot(1-\alpha)\cdot(1-\alpha)=(1-\alpha)^2$;

(b) $P=p_0P_{00}P_{00}+p_0P_{01}P_{10}=(1-\alpha)^2+\alpha^2=2\alpha^2-2\alpha+1$

(c) 转移概率矩阵 $P=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0\\0&1-2\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$

$$\therefore P^{(5)} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-2\alpha)^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1+(1-2\alpha)^5}{2} & \frac{1-(1-2\alpha)^5}{2} \\ \frac{1-(1-2\alpha)^5}{2} & \frac{1+(1-2\alpha)^5}{2} \end{pmatrix}$$

$\therefore P\{X_5 = 0 | X_0 = 0\} = p_0 \cdot \frac{1+(1-2\alpha)^5}{2} = \frac{1+(1-2\alpha)^5}{2}$

4. A,B 两罐总共装各 N 个球. 作如下实验：在时刻 n 先 n 个球中等概率地任取一球. 然后从 A,B 两罐中任选一个, 选中 A 的概率为 p, 选中 B 的概率为 q. 之后再将选出的球放入选好的罐中. 设 X_n 为每次试验时 A 罐中的球数. 试求此 Markov 过程的转移概率矩阵.

解：

$$P_{ij} = \begin{cases} p \cdot \frac{i}{N} + q \cdot \frac{N-i}{N} & ,j=i \\ q \cdot \frac{i}{N} & ,j=i-1(i=1,2,\cdots,N) \\ p \cdot \frac{N-i}{N} & ,j=i+1(i=0,1,\cdots,N-1) \\ 0 & ,\text{其他} \end{cases}$$

其转移概率矩阵为

$$P = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} qN & pN & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ q & q(N-1)+p & p(N-1) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2q & q(N-2)+2p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2q+p(N-2) & 2p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & q(N-1) & q+p(N-1) & p \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & qN & pN \end{pmatrix}$$

5. 重复掷币一直到连续出现两次正面为止. 假定钱币是均匀的, 试引入以连续出现次数为状态空间的 Markov 链, 并求出平均需要掷多少次试验才可以结束.

解：记 X_n 为第 n 次掷币后连续出现的正面次数, 则 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 为一 $M.C.$

$$\text{其转移概率矩阵为 } P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

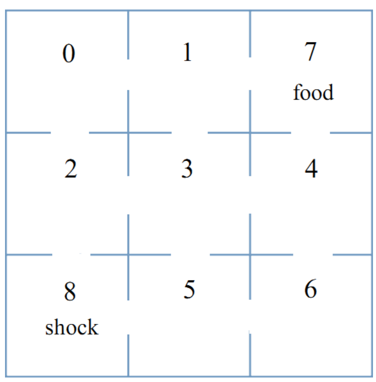
$$
\begin{aligned}
\therefore\quad & E(T|X_0=0) \\
&= \sum_{k=0}^{2} E(T|X_0=0, X_1=k)\cdot P(X_1=k|X_0=0) \\
&= \sum_{k=0}^{2} E(T|X_1=k)\cdot P(X_1=k|X_0=0) \\
&= (1+v)\cdot\frac{1}{2} + E(T|X_1=1)\cdot\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

及

$$
\begin{aligned}
& E(T|X_1=1) \\
&= \sum_{k=0}^{2} E(T|X_1=1, X_2=k)\cdot P(X_2=k|X_1=1) \\
&= \sum_{k=0}^{2} E(T|X_2=k)\cdot P(X_2=k|X_1=1) \\
&= (2+v)\cdot\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}\times 2
\end{aligned}
$$

解得 $E(T|X_0=0)=6$, 平均需掷 6 次.

6. 迷宫问题. 将小家鼠放入迷宫内作动物的学习试验, 如下图所示. 在迷宫的第 7 号小格内放有美味食物而第 8 号小格内则是电击捕鼠装置. 假定当家鼠位于某格时有 k 个出口可以离去, 则它总是随机地选择一个, 概率为 $1/k$. 并假定每一次家鼠只能跑到相邻的小格去. 令过程 X_n 为家鼠在时刻 n 时所在小格的号码, 试写出这一 Markov 过程的转移概率阵, 并求出家鼠在遭到电击前能找到食物的概率.



解:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

设 u_k 为家鼠从 k 出发在遭到电击前能找到食物的概率, 显然 $u_7 = 1, u_8 = 0$, 设 T 为进入吸收态时刻, 则当 $0 \leqslant k \leqslant 6$ 时,

$$\begin{aligned} u_k &= P\{X_T = 7 | X_0 = k\} \\ &= \sum_{i=0}^{8} P\{X_T = 7, X_1 = i | X_0 = k\} \\ &= \sum_{i=0}^{8} P\{X_T = 7, X_1 = i\} P\{X_1 = i | X_0 = k\} \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} u_0 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \\ u_1 = \frac{1}{3}(u_0 + u_3 + u_7) \\ u_2 = \frac{1}{3}(u_0 + u_3 + u_8) \\ u_3 = \frac{1}{4}(u_1 + u_2 + u_4 + u_5) \\ u_4 = \frac{1}{3}(u_3 + u_6 + u_7) \\ u_5 = \frac{1}{3}(u_3 + u_6 + u_8) \\ u_6 = \frac{1}{2}(u_4 + u_5) \\ u_7 = 1 \\ u_8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_1 = \frac{2}{3} \\ u_2 = \frac{1}{3} \\ u_3 = \frac{1}{2} \\ u_4 = \frac{2}{3} \\ u_5 = \frac{1}{3} \\ u_6 = \frac{1}{2} \\ u_7 = 1 \\ u_8 = 0 \end{cases}$$

7. 记 $Z_i, i = 1, 2, \cdots$ 为一串独立同分布的离散随机变量. $P\{Z_1 = k\} = p_k \geqslant 0, k = 0, 1, 2, \cdots, \sum_{k=0}^{\infty} = 1$. 记 $X_n = Z_n, n = 1, 2, \cdots$. 试求过程 X_n 的转移概率矩阵.

解：$\because P\{X_{n+1} = i_{n+1} | X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n\} = P\{X_{n+1} = i_{n+1}\}$

$P\{X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n\} = P\{X_{n+1} = i_{n+1}\}$

$\therefore P\{X_{n+1} = i_{n+1} | X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n\} = P\{X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n\}$

$\therefore \{X_n\}$ 是一 $M.C.$ 其转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

8. 对第 7 题中的 Z_i, 令 $X_n = \max\{Z_1, \cdots, Z_n\}, n = 1, 2, \cdots$, 并约定 $X_0 = 0$. X_n 是否为 Markov 链? 如果是, 其转移概率阵是什么?

解：

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \max\{Z_1, \cdots, Z_n, Z_{n+1}\} \\ &= \max\{\max\{Z_1, \cdots, Z_n\}, Z_{n+1}\} \\ &= \max\{X_n, Z_{n+1}\} \end{aligned}$$

$\therefore \{X_n\}$ 是 $M.C.$

$$P_{ij} = \begin{cases} 0 & , j < i \\ p_j & , j > i \\ \sum\limits_{k=0}^{i} p_k & , j = i \\ 0 & ,\text{其他} \end{cases}$$

其转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ 0 & p_0 + p_1 & p_2 & \cdots \\ 0 & 0 & p_0 + p_1 + p_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

9. 设 $f_{ij}^{(n)}$ 表示从 i 出发在 n 步转移时首次到达 j 的概率, 试证明

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)}.$$

证：设 $T_j = \min\{n : n \geqslant 0 \text{且} X_n = j\}$

$$
\begin{aligned}
\therefore P_{ij}^{(n)} &= P\{X_n = j | X_0 = i\} \\
&= \sum_{k=0}^{n} P\{X_n = j, T_j = k | X_0 = i\} \\
&= \sum_{k=0}^{n} P\{T_j = k | X_0 = i\} P_{jj}^{(n-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} P\{X_k = j, X_s \neq j (s = 0, 1, \cdots, k-1) | X_0 = i\} P_{jj}^{(n-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)}
\end{aligned}
$$

10. 对第 7 题中的 Z_i, 若定义 $X_n = \sum\limits_{i=1}^{n} Z_i, n = 1, 2, \cdots, X_0 = 0$, 试证 X_n 为 Markov 链. 并求其转移概率矩阵.

证：对 $n \geqslant 0$ 有

$$
\begin{aligned}
& P\{X_{n+1} = i_{n+1} | X_0 = i_0, \cdots, X_n = i_n\} \qquad (i_0 = 0) \\
&= P\{Z_{n+1} = i_{n+1} - i_n | X_0 = i_0, \cdots, X_n = i_n\} \\
&= P\{Z_{n+1} = i_{n+1} - i_n\} \\
&= \begin{cases} P_{i_{n+1} - i_n} & , i_{n+1} - i_n = 0, 1, 2, \cdots \\ 0 & , ow \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& P\{X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n\} \\
&= P\{X_n + Z_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n\} \\
&= P\{Z_{n+1} = i_{n+1} - i_n\}
\end{aligned}
$$

$\therefore X_n$ 是 $M.C.$

$$
P = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ 0 & p_0 & p_1 & \cdots \\ 0 & 0 & p_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}
$$

11. 一 Markov 链有状态 $0, 1, 2, 3$ 和转移概率矩阵

$$
P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}
$$

试求 $f_{00}^{(n)}, n=1,2,3,4,5,\cdots$, 其中 $f_{00}^{(n)}$ 由

$$P\{X_n=i, X_k\neq i, k=1,\cdots,n-1|X_0=i\}$$

定义.

解：$f_{00}^{(1)}=P_{00}=0, f_{00}^{(2)}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^T=\frac{1}{4}$

对 $n\geqslant 2$ 有

$$f_{00}^{(n)}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^{n-2}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

当 $n=3$ 时, $f_{00}^{(3)}=\frac{1}{8}$

当 $n\geqslant 4$ 时,

$$f_{00}^{(n)}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & \frac{1}{2^{n-2}}\\ 0 & 0 & \frac{1}{2^{n-1}}\\ 0 & 0 & \frac{1}{2^{n-1}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+2}}$$

12. 在成败型的重复试验中, 每次试验结果为成功（S）或失败（F）. 同一结果相继出现称为一个游程（run）, 比如一结果 $FSSFFFSF$ 中共有两个成功游程, 三个失败游程. 设成功概率为 p, 失败概率为 $q=1-p$. 记 X_n 为第 n 次试验后成功游程的长度（若第 n 次试验, 则 $X_n=0$）. 试证 $\{X_n, n=1,2,\cdots\}$ 为一 Markov 链, 并确定其转移概率阵. 记 T 为返回状态 0 的时间, 试求 T 的分布及均值. 并由此对这一 Markov 链的状态进行分类.

证：$X_{n+1}=\begin{cases}X_{n+1} & \text{,第 n+1 次试验成功}\\ 0 & \text{,第 n+1 次试验失败}\end{cases}$

$\therefore \{X_n\}$ 是 $M.C.$

$P(X_{n+1}=j|X_n=i)=\begin{cases}p & ,j=i+1\\ q & ,j=0\end{cases}$

$$P=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc}0 & 1 & 2 & 3 & \cdots\end{array}\\ \begin{array}{c}0\\1\\2\\\vdots\end{array} & \begin{pmatrix}q & p & 0 & 0 & \cdots\\ q & 0 & p & 0 & \cdots\\ q & 0 & 0 & p & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix}\end{array}$$

$$T=\min\{n: X_n=0, X_s\neq 0(s=1,2,\cdots,n-1)\}$$

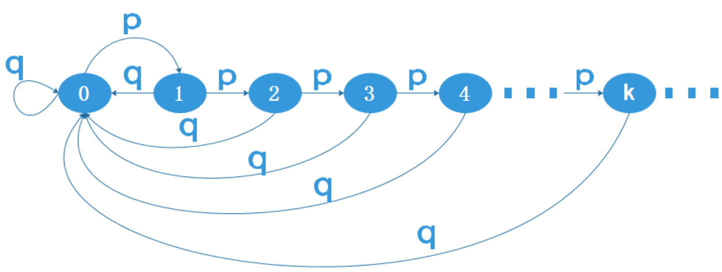
$$P(T=k)=p^{k-1}q \quad\quad k=1,2,\cdots$$

$$\mathrm{E}T=\sum_{k=1}^{+\infty}p^{k-1}qk$$

$$\therefore p\mathrm{E}T=\sum_{k=1}^{+\infty}p^{k}qk$$

$$\therefore (1-p)\mathrm{E}T=q\mathrm{E}T=q+pq+p^2q+\cdots=\frac{q}{1-p}=1$$

$$\therefore \mathrm{E}T=\frac{1}{q}$$



所有状态互通, 为一类

13. 试证各方向游动的概率相等的对称随机游动在二维时是常返的

证：为使 n 步游动后回到原位置, 向左移动的步数应等于向右移动的步数, 向上移动的步数应等于向下移动的步数, $\therefore P_{00}^{(2k+1)}=0, k=0,1,2,\cdots$

再考虑 2k 步的情况,

$$P_{00}^{(2k)}=\sum_{k_1=0}^{k}C_{2k-2k_1}^{k-k_1}C_{2k_1}^{k}C_{2k}^{2k_1}\left(\frac{1}{4}\right)^{2k}$$
$$=\sum_{k_1=0}^{k}\frac{(2k)!}{(k!)^2}\left(C_k^{k_1}\right)^2\left(\frac{1}{2^{2k}}\right)^2$$

断言

$$\sum_{k_1=0}^{k}\left(C_k^{k_1}\right)^2=\frac{(2k)!}{(k!)^2},$$

$$\therefore P_{00}^{(2k)}=\left(\frac{(2k)!}{(k!)^2}\cdot\frac{1}{2^{2k}}\right)^2$$

当 n 充分大时, 由 Stiring 公式

$$P_{00}^{(2k)}\sim\left(\frac{(2k)^{2k+\frac{1}{2}}e^{-2k}\sqrt{2\pi}}{(k^{k+\frac{1}{2}}e^{-k}\sqrt{2\pi})^2}\cdot\frac{1}{2^{2k}}\right)^2=\frac{1}{\pi k}$$

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{+\infty} P_{ii}^{(n)} = +\infty$ (i 代表任一格点)
$\therefore$ 二维对称随机游动是常返的
断言的证明：

$$(1+x)^k = \sum_{k_1=0}^{k} C_k^{k_1} x^{k_1}$$
$$(1+x)^{2k} = \left(\sum_{k_1=0}^{k} C_k^{k_1} x^{k_1}\right)\left(\sum_{k_2=0}^{k} C_k^{k_2} x^{k_2}\right)$$

比较两边 x^k 的系数, 有 $C_{2k}^k = \sum\limits_{k_1=0}^{k} C_k^{k_1} C_k^{k-k_1} = \sum\limits_{k_1=0}^{k} \left(C_k^{k_1}\right)^2 = \frac{(2k)!}{(k!)^2}$

14. 某厂对该厂生产的同类产品的三种型号调查顾客的消费习惯. 并把它们归结为 Markov 链模型. 记顾客消费习惯在 A,B,C 三种型号间的转移概率矩阵分别为下列四种. 请依这些转移阵所提供的信息对厂家提出关于 A,B 两种型号的咨询意见.

$$(1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (2)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$
$$(3)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad (4)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解：
(1) 不是概率转移矩阵, 第三行行和不为 1.
(2)

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\therefore A,B,C$ 三状态互通, 所有状态可遍历.
设 (π_A,π_B,π_C) 为经过长时间后三个产品的市场占有额, 则

$$\begin{cases} (\pi_A,\pi_B,\pi_C)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = (\pi_A,\pi_B,\pi_C) \\ \pi_A+\pi_B+\pi_C = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \pi_A = \pi_B = \pi_C = 1$$

$\therefore$ 三个品牌竞争力差不多, 可以都生产.

(3) 由归纳法可知

$$P^n=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right) & \frac{1}{3^n} & \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

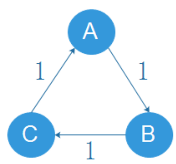
可见

$$\pi_B=\lim_{n\to}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0,$$

$$\begin{cases}(\pi_A,\pi_C)\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=(\pi_A,\pi_C)\\ \pi_A+\pi_C=1\end{cases}\Rightarrow\quad \pi_A=\pi_C=\frac{1}{2}$$

$\therefore B$ 将逐渐淡出市场, 建议停止生产 B, 扩大对 A 的生产.

(4)



$\therefore A,B,C$ 三状态互通, 所有状态可遍历.

$$\begin{cases}(\pi_A,\pi_B,\pi_C)\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}=(\pi_A,\pi_B,\pi_C)\\ \pi_A+\pi_B+\pi_C=1\end{cases}\Rightarrow\quad \pi_A=\pi_B=\pi_C=\frac{1}{3}$$

$\therefore A,B,C$ 市场占有率相同, 可维持现状.

15. 考虑一有限状态的 Markov 链. 试证明

(a) 至少有一个状态是常返的,

(b) 任何常返状态必定是正常返的.

证：(a) 反设所有状态均为瞬过或零常返 (加强结论), 则对 $\forall i\in S$, 有

$$\lim_{n\to+\infty}P_{ii}^{(n)}=0\qquad(*)$$

考虑 $P_{ij}^{(n)}=\sum_{k=1}^{+\infty}f_{ij}^{(k)}P_{jj}^{(n-k)}$, 则有

$$\sum_{k=1}^{\ell}f(k)_{ij}P_{jj}^{(n-k)}\leqslant P_{ij}^{(n)}\leqslant\sum_{k=1}^{\ell}f_{ij}^{(k)}P_{jj}^{(n-k)}+\sum_{k=l}^{+\infty}f_{ij}^{(k)}\qquad(**)$$

固定 ℓ, 令 $n \to +\infty$, 则由 $(*)$ 得

$$0 \leqslant \lim_{n \to +\infty} P_{ij}^{(n)} \leqslant 0 + \sum_{k=\ell}^{+\infty} f_{ij}^{(k)} \qquad (***)$$

在 $(***)$ 中令 $\ell \to +\infty$, 由于 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} f_{ij}^{(k)} \leqslant 1$ 收敛

$$\therefore \lim_{n \to +\infty} P_{ij}^{(n)} = 0 \qquad (*4)$$

若此有限状态 $M.C.$ 有 N 个状态, 则

$$\sum_{j=1}^{N} P_{ij}^{(n)} = 1 \qquad (*5)$$

$(*5)$ 中令 $n \to +\infty$, 由 $(*4)$ 得 $0 = 1$, 矛盾
$\therefore$ 至少有一个状态是 (正) 常返的
(b) 若存在零常返状态 i, 可构造 $C(i) = \{j | i \leftrightarrow j\}$, 则 $C(i)$ 为原 $M.C.$ 的一不可约子 $M.C.$(有限状态), 于是 $C(i)$ 中所有状态均为零常返, 与有限状态 $M.C.$ 至少有一个正常返状态矛盾, $\therefore$ 任何常返状态均为正常返

16. 考虑一生长与灾害模型. 这类 Markov 链有状态 $0, 1, 2, \cdots$, 当过程处于状态 i 时它既可能以概率 p_i 转移到 $i+1$(生长) 也能以概率 $q_i = 1 - p_i$ 落回到状态 0(灾害). 而从状态“0”又必然“无中”生有. 即 $P_{01} \equiv 1$.
(a) 试证所有状态为常返的条件是

$$\lim_{n \to \infty} (p_1 p_2 p_3 \cdots p_n) = 0.$$

(b) 若此链为常返, 试求其为零常返的条件.
证:
(a) 其概率转移阵为

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & cdots \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ q_1 & 0p_1 & 0 & & \\ q_2 & 0 & 0p_2 & & \\ q_3 & 0 & 0 & 0 & \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix} \end{array}$$

易知此 M.C. 是不可约的, $\therefore$ 只需证状态 0 常返 $\Leftrightarrow$ $\lim_{n \to +\infty} p_1 p_2 \cdots p_n = 0$

显然 $f_{00}^{(0)}=f_{00}^{(1)}=0, f_{00}^{(2)}=q_1$

$$
\begin{aligned}
f_{00}^{(n)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & p_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & p_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & p_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}^{n-2} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \\
&= AB^{n-2}C^T, \quad (n \geqslant 3)
\end{aligned}
$$

易知

$$
B^{n-2} = \begin{pmatrix} \underbrace{0 \ \cdots \ 0}_{n-2\text{个}} & p_1 \cdots p_{n-2} & 0 & \cdots \\ \underbrace{0 \ \cdots \ 0}_{n-2\text{个}} & 0 & p_2 \cdots p_{n-2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}
$$

$$
\therefore f_{00}^{(n)} = (\overbrace{0 \ \cdots \ 0}^{n-2\text{个}} \ \ p_1 \cdots p_{n-2} \ \ 0 \ \ 0 \ \ \cdots)(q_1 \ \ q_2 \ \ \cdots)^T = p_1 \cdots p_{n-2} q_{n-1}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore f_{00} &= q_1 + \sum_{n=3}^{+\infty} p_1 \cdots p_{n-2} q_{n-1} \\
&= 1 - p_1 + \sum_{n=3}^{+\infty} (p_1 \cdots p_{n-2} - p_1 \cdots p_{n-2} p_{n-1}) \\
&= 1 - \lim_{n \to +\infty} p_1 p_2 \cdots p_n
\end{aligned}
$$

而状态 0 常返 $\Leftrightarrow f_{00}=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} p_1p_2\cdots p_n = 0.$

(b) 只需考虑状态 0,

$$
\begin{aligned}
\mu_0 &= \sum_{n=0}^{+\infty} n f_{00}^{(n)} \\
&= 2(1-p_1) + \sum_{n=3}^{+\infty} n(p_1 \cdots p_{n-2} - p_1 \cdots p_{n-1}) \\
&= 2 + p_1 + p_1 p_2 + p_1 p_2 p_3 + \cdots
\end{aligned}
$$

若为零常返, 则 $\mu_0 = +\infty \Leftrightarrow$ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_1 \cdots p_n$ 发散 (且通项趋于 0)

17. 试计算转移概率阵

$$
P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}
$$

的极限分布.

解；设 π 为该 $M.C.$ 的平稳分布, $\pi=(\pi_0,\pi_1,\pi_2)$

$$\begin{cases}\pi \geqslant 0 \\ \sum\limits_{i=0}^{2}\pi_i=1 \\ \pi P=\pi\end{cases} \Rightarrow \pi=(\frac{5}{14},\frac{6}{14},\frac{3}{14})$$

易知该 $M.C.$ 不可约且遍历

$\therefore$ 极限分布为 $\begin{pmatrix}\frac{5}{14} & \frac{6}{14} & \frac{3}{14}\\ \frac{5}{14} & \frac{6}{14} & \frac{3}{14}\\ \frac{5}{14} & \frac{6}{14} & \frac{3}{14}\end{pmatrix}$

18. 假定在逐日的天气变化模型中, 每天的阴晴与前两天的状况关系很大. 于是可考虑 4 状态的 Markov 链：接连两晴天, 一晴一阴, 一阴一晴, 以及接连两阴天, 分别记为 $(S,S),(S,C),(C,S),(C,C)$. 该链的转移概率阵为

$$P=\begin{array}{c}\\ (S,S)\\ (S,C)\\ (C,S)\\ (C,C)\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}(S,S) & (S,C) & (C,S) & (C,C)\end{array}\\ \begin{pmatrix}0.8 & 0.2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6\\ 0.6 & 0.4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.1 & 0.9\end{pmatrix}\end{array}$$

试求这一 Markov 链的平稳分布. 并求出长期平均的晴朗天数.

解：设其平稳分布为 $\pi=(\pi_0,\pi_1,\pi_2,\pi_3)$

$$\begin{cases}\pi \geqslant 0 \\ \sum\limits_{i=0}^{3}\pi_i=1 \\ \pi P=\pi\end{cases} \Rightarrow \pi=(\frac{3}{11},\frac{1}{11},\frac{1}{11},\frac{6}{11})$$

π 反映了 $M.C.$ 中各状态在长期中所占的平均比例

$\therefore$ 一年中晴朗的天数 $=\frac{365}{2}\times\left(\frac{3}{11}\times 2+\frac{1}{11}+\frac{1}{11}\right)=132.7$(天)

19. 某人有 M 把伞并在办公室和家之间往返. 如某天他在家时 (办公室时) 下雨了而且家中 (办公室) 有伞他就带一把伞去上班 (回家), 不下雨时他从不带伞. 如果每天与以往独立地早上 (或晚上) 下雨的概率为 p, 试定义一 $M+1$ 状态的 Markov 链以研究他被雨淋湿的机会.

解：

定义 X_n：第 n 天早晨家中雨伞数, $\therefore \{X_n,n\geqslant 0\}$ 为一 $M.C.$

$$P=\begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & & & \\ p(1-p) & (1-p)^2+p^2 & p(1-p) & & & \\ 0 & p(1-p) & (1-p)^2+p^2 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & p(1-p) & (1-p)^2+p^2 & p(1-p) \\ & & & 0 & p(1-p) & 1-p(1-p) \end{pmatrix}$$

设 $\pi=(\pi_0,\pi_1,\cdots,\pi_M)$ 为其平稳分布

$$\begin{cases}\pi\geqslant 0\\ \sum\limits_{i=0}^{M}\pi_i=1\\ \pi P=\pi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\pi_0=\frac{1-p}{M+1-p}\\ \pi_i=\frac{1}{M+1-p}(i=1,2,\cdots,M)\end{cases}$$

易知此 $M.C.$ 遍历,

$\therefore\pi$ 又是其极限分布, 其被雨淋湿的概率为

$$P_{淋}=p\pi_0+(1-p)\pi_M=2p\frac{1-p}{M+1-p}$$

19.5 袋中有 N 个球, 为白色或黑色, 每次从袋中随机取一球然后放回一个不同颜色的球, 若袋中有 k 个白球, 则称系统为状态 k. 试用 M.C. 描述此模型, 且

(1) 求 P, 作状态分类.

(2) 问该 M.C. 是否存在平稳分布, 有则求出.

(3) 问极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}P_{ij}^{(n)}$ 是否存在? 为什么?

解:

(1) 转移概率

$$P_{ij}=\begin{cases}\frac{N-i}{N} & ,j=i+1\\ \frac{i}{N} & ,j=i-1\\ 0 & ,ow\end{cases}$$

转移概率矩阵为

$$P=\begin{array}{c} \\ 0\\ 1\\ 2\\ 3\\ \vdots\\ \vdots\\ N\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc}0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & \cdots & N\end{array}\\ \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ \frac{1}{N} & 0 & \frac{N-1}{N} & 0 & & & \\ 0 & \frac{2}{N} & 0 & \frac{N-2}{N} & & & \\ 0 & 0 & \frac{3}{N} & 0 & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & \ddots & \frac{1}{N}\\ & & & & & 1 & 0\end{pmatrix}\end{array}$$

显然任两状态可互达, 所以不可约.

(2) 设有平稳分布 $\pi = (\pi_0, \pi_1, \cdots, \pi_N)$

$$\begin{cases} \pi \geqslant 0 \\ \sum_{i=0}^{N} \pi_i = 1 \\ \pi P = \pi \end{cases} \Rightarrow \pi_i = \frac{C_N^i}{2^N} \quad (i = 0, 1, \cdots, N)$$

(3)$\because$M.C. 为有限状态的不可约链, 故所有状态均为正常返,

$\therefore \mu_j < +\infty$ $(\forall j \in S)$, 易知其周期为 $d = 2$.

引入

$$f_{ij}(r) = \sum_{m=0}^{+\infty} f_{ij}^{(md+r)} \ (0 \leqslant r \leqslant d-1),$$

表示从状态 i 出发, 在时刻 $n \equiv r \pmod d$ 首次到达状态 j 的概率.

断言: 若 j 为正常返状态且周期为 d, 则对 $\forall i$及$0 \leqslant r \leqslant d-1$, 有

$$\lim_{n \to +\infty} P_{ij}^{(nd+r)} = f_{ij}(r) \frac{d}{\mu_j}.$$

则当 $i - j$ 为偶数时, 易知在此 M.C. 中

$$f_{ij}(1) = 0, \ f_{ij}(0) > 0,$$

$$\therefore \lim_{n \to +\infty} P_{ij}^{(2n)} = f_{ij}(0) \frac{2}{\mu_j} > 0, \ \lim_{n \to +\infty} P_{ij}^{(2n+1)} = f_{ij}(1) \frac{2}{\mu_j} = 0$$

即当 $i - j$ 为偶数时 $\lim\limits_{n \to +\infty} P_{ij}^{(n)}$ 不存在.

当 $i - j$ 为奇数时,

$$f_{ij}(1) = 0, \ f_{ij}(0) > 0,$$

同理知不存在, $\therefore \lim\limits_{n \to +\infty} P_{ij}^{(n)}$ 不存在.

断言的证明:

$\because$ 当$n \neq kd$时,$P_{jj}^{(n)} = 0$

$$\therefore P_{ij}^{(nd+r)} = \sum_{k=0}^{nd+r} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(nd+r-k)} = \sum_{m=0}^{n} f_{ij}^{(nd+r)} P_{jj}^{(n-m)d}$$

$\therefore$ 对 $1 \leqslant N < n$, 有

$$\sum_{m=0}^{N} f_{ij}^{(md+r)} P_j^{(n-m)d} j \leqslant P_{ij}^{(nd+r)} \leqslant \sum_{m=0}^{N} f_{ij}^{(md+r)} P_j^{(n-m)d} j + \sum_{m=N+1}^{+\infty} f_{ij}^{(md+r)}$$

先令 $n \to +\infty$ 再令 $N \to +\infty$, 由 M.C. 基本极限定理得 (注意到 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_{ii}^{(N)}$ 收敛)

$$f_{ij}(r) \frac{d}{\mu_j} \leqslant \lim_{n \to +\infty} P_{ij}^{(nd+r)} \leqslant f_{ij}(r) \frac{d}{\mu_j}$$

23. 一连续时间 Markov 链有 0 和 1 两个状态, 在状态 0 和 1 的逗留时间服从参数为 $\lambda>0$ 及 $\mu>0$ 的指数分布. 试求在时刻 0 从状态 0 起始, t 时刻后过程处于状态 0 的概率 $P_{00}(t)$

解：

$$\begin{aligned}
P_{00}(t+h) &= \sum_{k\geqslant 0} P_{0k}(t)P_{k0}(h) \\
&= P_{00}(t)P_{00}(h)+P_{01}(t)P_{10}(h) \\
&= P_{00}(1-\lambda h+o(h))+(1-P_{00}(t))(\mu h+o(h))
\end{aligned}$$

$\therefore \dfrac{P_{00}(t+h)-P_{00}(t)}{h} = -(\lambda+\mu)P_{00}(t)+\mu+\dfrac{o(h)}{h}$

令 $h\to 0$, 则 $P'_{00}(t) = -(\lambda+\mu)P_{00}(t)+\mu$

而 $P_{00}(0)=1$, 解微分方程得

$$P_{00}(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

24. 在第 23 题中如果 $\lambda=\mu$. 定义 $N(t)$ 为过程在 $[0,t]$ 中改变的次数, 试求 $N(t)$ 的概率分布.

解：设 $f(t)$ 为状态 0(或 1) 逗留时间的概率密度函数, $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$

记 $P_k(t)=P\left(N(t)=k|N(0)=0\right), k=0,1,2,\cdots$

$$\begin{aligned}
P_0(t) &= P(\text{在状态 0(或 1) 逗留时间 } t_s>t) \\
&= 1-P(t_s\leqslant t) \\
&= 1-\int_0^t \lambda e^{\lambda t_s}dt_s \\
&= e^{-\lambda t}
\end{aligned}$$

猜想 $P_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$

设到 $k-1$ 为止猜想成立, 则

$$\begin{aligned}
P_k(t) &= \int_0^t f(t_s)P_{k-1}(t-t_s)dt_s \\
&= \int_0^t \lambda e^{-\lambda t_s}\frac{\left(\lambda(t-t_s)\right)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda(t-t_s)}dt_s \\
&= \frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda t}\int_0^t (t-t_s)^{k-1}dt_s \\
&= \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}
\end{aligned}$$

综上, 当 $\lambda=\mu$ 时 $N(t)$ 服从参数为 λt 的 Possion 分布

以下如果没有指明变量 t 的取值范围, 一般视为 $t \in R$, 平稳过程是指宽平稳过程.

1. 设 $X(t)=\sin Ut$, 这里 U 为 $(0,2\pi)$ 上的均匀分布.

(a) 若 $t=1,2,\cdots$, 证明 $\{X(t), t=1,2,\cdots\}$ 是宽平稳但不是严平稳过程,

(b) 设 $t \in [0,+\infty)$, 证明 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 既不是严平稳也不是宽平稳过程.

证：(a)

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X(t)) &= \mathrm{E}\sin Ut \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\sin Ut dU \\ &= 0 \quad (t=1,2,\cdots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X(t),X(s)) &= \mathrm{E}(\sin Ut \cdot \sin Us) \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{E}\left(\cos(t-s)U-\cos(t+s)U\right) \\ &= \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{t-s}\sin(t-s)U\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{t+s}\sin(t+s)U\Big|_0^{2\pi}\right\} \\ &= 0 \quad (t \neq s) \end{aligned}$$

当 $t=s$ 时 $\mathrm{Cov}(X(t),X(s))=\mathrm{E}\sin^2 Ut=\frac{1}{2}$

$\therefore$ 是宽平稳

考虑 $F_t(x)=P(\sin Ut \leqslant x)$, 显然 $F_{t+h}=P\left(\sin U(t+h) \leqslant x\right)$ 与其不一定相同

$\therefore$ 不是严平稳

(b)

$$EX(t)=\frac{1}{2\pi t}(1-\cos 2\pi t)$$

$$DX(t)=\mathrm{E}\left(\sin Ut-\frac{1}{2\pi t}(1-\cos 2\pi t)\right)^2=\frac{1}{2}-\frac{\sin 4\pi t}{8\pi t}-\left(\frac{1-\cos 2\pi t}{2\pi t}\right)^2$$

都与 t 相关

$\therefore$ 不是宽平稳

若其严平稳, 则因二阶矩存在, 应为宽平稳, 矛盾.

$\therefore$ 不是严平稳.

2. 设 $\{X_n, n=0,1,2\cdots\}$ 是平稳序列, 定义 $\{X_n^{(i)}, n=1,2,\cdots\}, i=1,2,\cdots$, 为

$$X_n^{(1)}=X_n-X_{n-1},$$

$$X_n^{(2)}=X_n^{(1)}-X_{n-1}^{(1)}, \cdots\cdots$$

证明这些序列仍是平稳序列.

证：

$1^\circ \ell = 0$ 时

$\mathrm{E}X_n$ 依定义为常数 C_0

$\mathrm{Cov}(X_n, X_m)$ 依定义为 $n-m$ 的函数 $f_0(n-m)$

成立

2° 设当 $\ell \leqslant k$ 时成立, 则当 $\ell = k+1$ 时

$$\mathrm{E}X_n^{(\ell)} = \mathrm{E}(X_n^{(k)} - X_{n-1}^{(k)}) = C_k - C_k = 0$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X^{(k+1)}, X_m^{(k+1)}) &= \mathrm{E}(X_n^{(k+1)} X_m^{(k+1)}) \\
&= \mathrm{E}\left[(X_n^{(k)} - X_{n-1}^{(k)})(X_m^{(k)} - X_{m-1}^{(k)})\right] \\
&= \mathrm{E}(X_n^{(k)} X_m^{(k)}) - \mathrm{E}(X_{n-1}^{(k)} X_m^{(k)}) - \mathrm{E}(X_n^{(k)} X_{m-1}^{(k)}) + \mathrm{E}(X_{n-1}^{(k)} X_{m-1}^{(k)}) \\
&= f_k(n-m) - f_k(n-1-m) - f_k(n-m+1) + f_k(n-m) \\
&= f_\ell(n-m)
\end{aligned}$$

只与 $n-m$ 有关

$\therefore$ 是平稳的

3. 设 $X_n = \sum\limits_{k=1}^{N} \sigma_k \sqrt{2} \cos(a_k n - U_k)$, 这里 σ_k 和 a_k 为正常数, $k = 1, \cdots, N; U_1, \cdots, U_n$ 是 $(0, 2\pi)$ 上独立均匀分布随机变量, 证明 $\{X_n, n = 0, \pm 1, \cdots\}$ 是平稳过程.

证：$EX_n = \sum\limits_{k=1}^{N} \sigma_k \sqrt{2} (\cos a_k n E \cos U_k + \sin a_k n E \sin U_k) = 0$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_n, X_m) &= \mathrm{E}(X_n, X_m) \\
&= \mathrm{E}\left[\sum_{k=1}^{N} \sigma_k \sqrt{2} \cos a_k n - U_k \sum_{j=1}^{N} \sigma_j \sqrt{2} \cos(a_j m - U_j)\right] \\
&= \sum_{k=1}^{N} 2\sigma_k^2 \mathrm{E}\left[\cos(a_k n - U_k)\cos(a_k m - U_k)\right] \\
&= \sum_{k=1}^{N} \sigma_k^2 \mathrm{E}\left[\cos a_k(n-m) + \cos(a_k n + a_k m - 2U_k)\right] \\
&= \sum_{k=1}^{N} \sigma_k^2 \cos a_k(n-m)
\end{aligned}$$

只与 $n-m$ 有关

$\therefore$ 宽平稳.

4. 设 $A_k, k = 1, 2, \cdots, n$ 是 n 个实随机变量; $\omega_k, k = 1, 2, \cdots, n$, 是 n 个实数. 试问 A_k 以及 A_k 之间应满足怎样的条件才能使

$$Z(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k e^{j\omega_k t}$$

是一个复的平稳过程.

解：要求

$$\mathrm{E}Z(t)=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}A_k e^{j\omega_k t}=const$$

$\therefore \mathrm{E}A_k=0$

要求

$$\mathrm{Cov}(Z(t),Z(s))=\mathrm{E}(Z(t)\bar{Z(s)})=\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{\ell=1}^{+\infty}\mathrm{E}(A_kA_\ell)\cdot e^{j\omega_k t-j\omega_\ell s}$$

只与 $t-s$ 有关

$\therefore \mathrm{E}(A_kA_l)=0 \quad (k\neq\ell且\omega_k\neq\omega_\ell)$

6. 设 $\{X(t)\}$ 是一个平稳过程, 对每个 $t\in\mathbf{R}$, $X'(t)$ 存在. 证明对每个给定的 t, $X(t)$ 与 $X'(t)$ 不相关, 其中 $X'(t)=\frac{dX(t)}{dt}$.

证明：以下假定求导数和求期望可交换

设 $\mathrm{E}(X(t))=m, D(X(t))=\sigma^2$

$$\begin{aligned}
&\therefore \mathrm{E}(X(t+\Delta t))=m\\
&\because X'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}\\
&\therefore \mathrm{E}(X'(t))=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \mathrm{Cov}(X(t),X'(t))&=\mathrm{E}(X(t)X'(t))\\
&=\frac{1}{2}\mathrm{E}\left[\left(X^2(t)\right)'\right]\\
&=\frac{1}{2}\left(EX^2(t)\right)'\\
&=\frac{1}{2}(\sigma^2+m^2)'\\
&=0
\end{aligned}$$

$\therefore$ 不相关

7. 设 $\{X(t)\}$ 是高斯过程, 均值为 0, 协方差函数 $R(\tau)=4\exp-2|\tau|$. 令

$$Z(t)=X(t+1),W(t)=X(t-1),$$

(i) 求 $E(Z(t)W(t))$ 和 $E(Z(t)+W(t))^2$;

(ii) 求 $Z(t)$ 的密度函数 $f_Z(z)$ 及 $P(Z(t)<1)$;

(iii) 求 $Z(t),W(t)$ 的联合密度 $f_{Z,W}(z,w)$.

解：

(i)

$$\begin{aligned}E(Z(t)W(t)) &= E(X(t+1)X(t-1)) \\ &= R(2) \\ &= 4e^{-4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E(Z(t)W(t))^2 &= E\big(X^2(t+1)+2X(t+1)X(t-1)+X^2(t-1)\big) \\ &= 2EX^2(t)+2R(2) \\ &= 2\big[DX(t)-E^2X(t)\big]+4e^{-4} \\ &= 2R(0)+4e^{-4} \\ &= 4(1+e^{-4})\end{aligned}$$

(ii)$Z(t)=X(t+1)\sim N(0,2^2)$

$\therefore f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 2^2}}e^{-\frac{z^2}{2\cdot 2^2}}=\frac{1}{\sqrt{8\pi}}e^{-\frac{z^2}{8}}$

$\therefore P(Z(t)<1)=\int_{-\infty}^{1}f_Z(z)\,dz=\frac{1}{\sqrt{8\pi}}\int_{-\infty}^{1}e^{-\frac{z^2}{8}}\,dz$

(iii) 显然 $f_{Z,W}(z,w)$ 为二维正态分布概率密度函数

协方差矩阵

$$C=\begin{pmatrix}4 & 4e^{-4}\\ 4e^{-4} & 4\end{pmatrix}$$

其逆矩阵

$$C^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4(1-e^{-8})} & -\frac{e^{-4}}{41-e^{-8}}\\ -\frac{e^{-4}}{41-e^{-8}} & \frac{1}{4(1-e^{-8})}\end{pmatrix}$$

其行列式 $|C|=16(1-e^{-8})$

期望向量 $\bar{\mu}=(0,0)$

$$\begin{aligned}\therefore f_{Z,W}(z,w) &= \frac{1}{2\pi|C|}\exp\left\{-\frac{1}{2}\Big((z,w)-\bar{\mu}\Big)C^{-1}\Big((z,w)-\bar{\mu}\Big)^T\right\} \\ &= \frac{1}{8\pi\sqrt{1-e^{-8}}}\exp\left\{-\frac{z^2+w^2-2e^{-4}wz}{8(1-e^{-8})}\right\}\end{aligned}$$

8. 设 $\{X(t),t\in\mathbf{R}\}$ 是一个严平稳过程, ε 为只取有限个值的随机变量. 证明 $\{Y(t)=X(t-\varepsilon),t\in\mathbf{R}\}$ 仍是一个严平稳过程.

提示：对 ε 用全概率公式.

证：设 ε 可取 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$

$$\begin{aligned}\text{则}\quad & P\big\{Y(t_1+h)\leqslant y_1,\cdots,Y(t_k+h)\leqslant y_k\big\} \\ &= P\big\{X(t_1-\varepsilon+h)\leqslant y_1,\cdots,X(t_k-\varepsilon+h)\leqslant y_k\big\} \\ &= \sum_{i=1}^{n}P(\varepsilon=\varepsilon_i)P\big\{X(t_1-\varepsilon_i+h)\leqslant y_1,\cdots,X(t_k-\varepsilon_i+h)\leqslant y_k|\varepsilon=\varepsilon_i\big\}\end{aligned}$$

$\because X(t)$ 严平稳

$$\begin{aligned}\therefore \text{上式} &= \sum_{i=1}^{n} P(\varepsilon=\varepsilon_i) P\left\{X(t_1-\varepsilon_i)\leqslant y_1,\cdots,X(t_k-\varepsilon)\leqslant y_k|\varepsilon=\varepsilon_i\right\}\\ &= P\left\{X(t_1-\varepsilon)\leqslant y_1,\cdots,X(t_k-\varepsilon)\leqslant y_k\right\}\\ &= P\left\{Y(t_1)\leqslant y_1,\cdots,Y(t_k)\leqslant y_k\right\}\end{aligned}$$

$\therefore Y(t)$ 为严平稳.

10. 设 $\{X(t)\}$ 是一个复值平稳过程, 证明

$$E|X(t+\tau)-X(t)|^2 = 2\Re e(R(0)-R(\tau)).$$

证：记 $m=EX(t)$

$$\begin{aligned}\text{则} E\left|X(t+\tau)-X(t)\right|^2 &= E\left|(X(t+\tau)-m)-(X(t)-m)\right|^2\\ &= E\left|X(t+\tau)-m\right|^2 + E\left|X(t)-m\right|^2 - E\left[(X(t+\tau)-m)\overline{(X(t)-m)}\right]\\ &\quad - E\left[(X(t)-m)\overline{(X(t+\tau)-m)}\right]\\ &= 2R(0)-R(-\tau)-R(\tau)\end{aligned}$$

又 $\because R(-\tau)=\overline{R(\tau)}$

$\therefore$ 上式 $=2\Re e(R(0)-R(\tau))$

11. 设 $\{X(t)\}$ 是零均值的平稳高斯过程, 协方差函数为 $R(\tau)$, 证明

$$P(X'(t)\leqslant a) = \phi\left(\frac{a}{\sqrt{-R''(0)}}\right),$$

其中 $\phi(\cdot)$ 为标准正态分布函数.

证：注意到 $X'(t)$ 服从正态分布

而 $EX'(t) = \left[EX(t)\right]' = 0$

$Var X'(t) = \mathrm{Cov}(X'(t), X'(t+0)) = -R''(0)$

$\therefore X'(t) \sim N(0, -R''(0))$

$$\therefore P\big(X'(t)\leqslant a\big) = P\left(\frac{X'(t)}{\sqrt{-R''(0)}} \leqslant \frac{a}{\sqrt{-R''(0)}}\right) = \phi\left(\frac{a}{\sqrt{-R''(0)}}\right)$$

12. 设 $\{X(t)\}$ 为连续宽平稳过程, 均值 m 未知, 协方差函数为 $R(\tau) = ae^{-b|\tau|}, \tau\in R, a>0, b>0$. 对固定的 $T>0$, 令 $\overline{X} = T^{-1}\int_0^T X(s)\,ds$. 证明 $E\overline{X} = m$(即 $\overline{X}$ 是 m 的无偏估计) 以及

$$Var(\overline{X}) = 2a[(bT)^{-1}-(bT)^{-2}(1-e^{-bT})].$$

提示：在上述条件下, 期望号与积分号可以交换.

证：

$$
\begin{aligned}
E\overline{X} &= E\big[\frac{1}{T}\int_0^T X(s)\,ds\big]\\
&= \frac{1}{T}\int_0^T EX(s)\,ds\\
&= \frac{mT}{T}\\
&= m
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Var(\overline{X}) &= E\left[\frac{1}{T^2}\left(\int_0^T X(t)\,dt - m\right)\left(\int_0^T X(s)\,ds - m\right)\right]\\
&= \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T E\big[(X(t)-m)(X(s)-m)\big]\,dsdt\\
&= \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T R(t-s)\,dsdt\\
&= \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T ae^{-b|t-s|}\,dsdt\\
&= \frac{2a}{T^2}\int_0^T dt\int_0^T e^{-b(t-s|}\,ds\\
&= \frac{2a}{T^2}\int_0^T \frac{1}{b}\big(1-e^{-bt}\big)\,dt\\
&= 2a\big[(bT)^{-1}-(bT)^{-2}(1-e^{-bT})\big].
\end{aligned}
$$

13. 设 $\{X(t)\}$ 为平稳过程, 设 $\{X(t)\}$ 的 n 阶导数 $X^{(n)}(t)$ 存在, 证明 $\{X^{(n)}(t)\}$ 是平稳过程.

提示：利用协方差函数性质 4.

证：$EX^{(n)}(t) = \big[EX(t)\big]^{(n)} = 0$

$\mathrm{Cov}\big(X^{(n)}(t), X^{(n)}(t+\tau)\big) = (-1)^n R^{(2n)}(\tau)$

$\therefore \{X^{(n)}(t)\}$ 是平稳过程.

14. 证明定理 4.1 中关于平稳序列均值的遍历性定理.

提示：用 Schwarz 不等式

证：

充分性：

$$
\begin{aligned}
& E\left|\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}X(k)-m\right|^2 \qquad (m=E(X_n)) \\
&= \frac{1}{(2N+1)^2}E\left(\sum_{k=-N}^{N}X(k)-m\right)^2 \\
&= \frac{1}{(2N+1)^2}E\left(\sum_{k=-N}^{N}X(k)-m\right)\left(\sum_{\ell=-N}^{N}X(\ell)-m\right) \\
&= \frac{1}{(2N+1)^2}\sum_{k=-N}^{N}\sum_{\ell=-N}^{N}R(k-\ell) \\
&= \frac{1}{(2N+1)^2}\left[\sum_{\tau=0}^{N}R(\tau)\cdot 2(2N+1-\tau)-(2N+1)R(0)\right] \\
&\leqslant \left|\frac{2}{2N+1}\sum_{\tau=0}^{N}R(\tau)\right|+\left|\frac{1}{2N+1}R(0)\right|
\end{aligned}
$$

$\because \lim\limits_{N\to+\infty}\dfrac{2}{2N+1}\sum\limits_{\tau=0}^{N}R(\tau)=\lim\limits_{N\to+\infty}\dfrac{2}{2N-1}\sum\limits_{\tau=0}^{N-1}R(\tau)=\lim\limits_{N\to+\infty}\dfrac{2N}{2N-1}\cdot\dfrac{1}{N}\sum\limits_{\tau=0}^{N-1}R(\tau)=0,$

$\lim\limits_{N\to+\infty}\dfrac{1}{2N+1}R(0)=0,$

$\therefore \lim\limits_{N\to+\infty}E\left|\dfrac{1}{2N+1}\sum\limits_{k=-N}^{N}X(k)-m\right|^2=0.$

必要性：记 $\overline{X}_N=\frac{1}{2N+1}\sum\limits_{-N}^{N}X_k$, 则有

$$
\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{2N+1}\sum_{\tau=0}^{2N}R(\tau)\right]^2 \\
&= \left[\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}\mathrm{Cov}(X_{-N},X_k)\right]^2 \\
&= \left[\mathrm{Cov}(X_{-N},\overline{X}_N)\right]^2 \\
&\leqslant Var(X_{-N})Var(\overline{X}_N) \qquad (\text{Schwarz 不等式}) \\
&= R(0)E(\overline{X}_N-m)^2\to 0 \quad (N\to+\infty)
\end{aligned}
$$

从而有

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{\tau=0}^{2N}R(\tau)=0,$$

由上易得

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{\tau=0}^{N-1}R(\tau)=0.$$

15. 如果 (X_1,X_2,X_3,X_4) 是均值为 0 的联合正态随机向量, 则

$$\begin{aligned}\mathrm{E}X_1X_2X_3X_4 =&\mathrm{Cov}(X_1,X_2)\mathrm{Cov}(X_3,X_4)+\mathrm{Cov}(X_1,X_3)\mathrm{Cov}(X_2,X_4)\\&+\mathrm{Cov}(X_1,X_4)\mathrm{Cov}(X_2,X_3).\end{aligned}$$

利用这个事实证明定理 4.3

证:

取固定的 $\tau\in\mathbb{Z}$, 记 $X_{n+\tau}X_n\triangleq Y_n$, 则

$$\begin{aligned}\mathrm{E}Y_n &= R_X(\tau)(const)\\ \mathrm{Cov}(Y_{n+\tau_1},Y_n) &= \mathrm{E}Y_{n+\tau_1}Y_n-R_X^2(\tau)\\ &= \mathrm{E}X_{n+\tau_1+\tau}X_{n+\tau_1}X_{n+\tau}X_n-R_X^2(\tau)\\ &= R_X^2(\tau)+R_X^2(\tau_1)+R_X(\tau_1+\tau)R_X(\tau_1-\tau)-R_X^2(\tau)\\ &= R_X^2(\tau_1)+R_X(\tau_1+\tau)R_X(\tau_1-\tau)\\ &= R_Y(\tau_1)\end{aligned}$$

$\therefore \{Y_n\}$ 是平稳过程.

又易见 $X=\{X_n,n\in\mathbb{Z}\}$ 的协方差函数遍历性成立的充要条件是 $Y=\{Y_n,n\in\mathbb{Z}\}$ 的均值遍历性成立.

而我们有

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{N}\sum_{\tau_1=0}^{N-1}R_Y(\tau_1)\right| &\leqslant \frac{1}{N}\sum_{\tau_1=0}^{N-1}\left|R_Y(\tau_1)\right|\\ &\leqslant \frac{1}{N}\sum_{\tau_1=0}^{N-1}\left[R_X^2(\tau_1)+\left(R_X^2(\tau_1+\tau)+R_X^2(\tau_1-\tau)\right)/2\right]\to 0,(N\to+\infty)\end{aligned}$$

由均值遍历性定理 (i) 可知, $Y=\{Y_n,n\in\mathbb{Z}\}$ 的均值遍历性成立, 即 $X=\{X_n,n\in\mathbb{Z}\}$ 的协方差函数遍历性成立.

16. 设 X_0 为随机变量, 其概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

设 X_{n+1} 在给定 $X_0,X_1,\cdots,X_n$ 下是 $(1-X_n,1]$ 上的均匀分布, $n=0,1,2,\cdots$, 证明 $\{X_n,n=0,1,\cdots\}$ 的均值有遍历性.

证:

$$\mathrm{E}X_0=\int_0^1 2x^2\,dx=\frac{2}{3}$$

$$\mathrm{E}X_0^2=\int_0^1 2x^3\,dx=\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}X_{n+1} &= \mathrm{E}[\mathrm{E}(X_{n+1}|X_N)] \\
&= \mathrm{E}\Big[\int_{1-x_n}^{1} \frac{x_{n+1}}{x_n}\, dx_{n+1}\Big] \\
&= \mathrm{E}(1-\frac{1}{2}X_n) \\
&= 1-\frac{1}{2}\mathrm{E}X_n
\end{aligned}$$

$$\because \mathrm{E}X_0 = \frac{2}{3} \qquad \therefore \mathrm{E}X_n \equiv \frac{1}{2}$$

又有

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}X_{n+1}^2 &= \mathrm{E}\Big[\mathrm{E}(X_{n+1}^2|X_n)\Big] \\
&= \mathrm{E}\Big[\int_{1-x_n}^{1} \frac{x_{n+1}^2}{x_n}\, dx_{n+1}\Big] \\
&= 1-\mathrm{E}X_n+\frac{1}{3}\mathrm{E}X_n^2
\end{aligned}$$

$$\because \mathrm{E}X_0^2 = \frac{1}{2} \qquad \therefore \mathrm{E}X_n^2 \equiv \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_nX_{n+m}) &= \mathrm{E}\Big[\mathrm{E}(X_nX_{n+m}|X_n)\Big] \\
&= \mathrm{E}\Big[X_n\mathrm{E}(X_{n+m}|X_n)\Big] \\
&= \mathrm{E}\Big[X_n\big(1-\frac{1}{2}\mathrm{E}(X_{n+m-1}|X_n)\big)\Big] \\
&= \mathrm{E}X_n-\frac{1}{2}\mathrm{E}\Big[\mathrm{E}(X_nX_{n+m-1}|X_n)\Big] \\
&= \frac{2}{3}-\frac{1}{2}\mathrm{E}(X_nX_{n+m-1})
\end{aligned}$$

$\therefore \mathrm{E}(X_nX_{n+m})-\dfrac{4}{9} = -\dfrac{1}{2}\Big(\mathrm{E}(X_nX_{n+m})-\dfrac{4}{9}\Big) = \cdots = \Big(-\dfrac{1}{2}\Big)^m\Big(\mathrm{E}X_n^2-\dfrac{4}{9}\Big) = \dfrac{1}{18}\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)^m$

$\therefore R_X(n,n+m) = \mathrm{E}\big(X_n-\dfrac{2}{3}\big)\big(X_{n+m}-\dfrac{2}{3}\big) = \mathrm{E}(X_nX_{n+m})-\dfrac{4}{9} = \dfrac{1}{18}\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)^m = R(m)$

$\therefore \{X_n\}$ 是平稳序列

又 $\because \lim_{m\to+\infty} R(m) = 0$

$\therefore$ 是均值遍历的

17. 设 $\{\varepsilon_n, n=0,\pm1,\cdots\}$ 为白噪声序列, 令

$$X_n = \alpha X_{n-1}+\varepsilon, |\alpha|<1, n=\cdots,-1,0,1,\cdots,$$

则 $X_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\alpha^k\varepsilon_{n-k}$, 从而证明 $\{X_n, n=\cdots,-1,0,1,\cdots\}$ 为平稳序列. 求出该序列的协方差函数. 此序列是否具有遍历性?

解：

$$\mathrm{E}X_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k \mathrm{E}\varepsilon_{n-k} = 0$$

$$\begin{aligned}
R_X(n, n+m) &= \mathrm{Cov}(X_n, X_{n+m}) \\
&= \mathrm{E}\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k \varepsilon_{n-k}\Big)\Big(\sum_{\ell=0}^{+\infty} \alpha^\ell \varepsilon_{m+n-\ell}\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{\ell=0}^{+\infty} \alpha^{k+\ell} \mathrm{E}\varepsilon_{n-k}\varepsilon_{m+n-\ell} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^{2k+m} \mathrm{E}\varepsilon_{n-k}^2 \\
&= \alpha^m \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2} \\
&= R(m)
\end{aligned}$$

$\therefore \{X_n\}$ 为平稳序列

又 $\lim\limits_{m\to+\infty} R(m) = 0$, $\therefore$ 是均值遍历的

以下没有特殊声明, 所涉及的过程均假定均值函数为 0

20. 设 $\{X(t)\}$ 为平稳过程, 令 $Y(t) = X(t+a) - X(t-a)$. 分别以 R_X, S_X 和 R_Y, S_Y 记随机过程 X 和 Y 的协方差函数和功率谱密度, 证明

$$\begin{aligned}
&R_Y(\tau) = 2R_X(\tau) - R_X(\tau+2a) - R_X(\tau-2a), \\
&S_Y(\omega) = 4S_X(\omega)\sin^2 a\omega.
\end{aligned}$$

证：

$$\begin{aligned}
R(\tau) &= \mathrm{E}\Big[X(t+a) - X(t-a)\Big]\Big[X(t-\tau+a) - X(t-\tau-a)\Big] \\
&= \mathrm{E}\Big[X(t+a)X(t-\tau-a)\Big] - \mathrm{E}\Big[X(t+a) - X(t-\tau-a)\Big] \\
&\quad - \mathrm{E}\Big[X(t-a)X(t-\tau-a)\Big] + \mathrm{E}\Big[X(t-a) - X(t-\tau-a)\Big] \\
&= R_X(\tau) - R_X(\tau+2a) - R_X(\tau-2a) + R_X(\tau) \\
&= 2R_X(\tau) - R_X(\tau+2a) - R_X(\tau-2a)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
S_Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_Y(\tau) e^{-i\omega\tau}\, d\tau \\
&= 2\int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-i\omega\tau}\, d\tau - \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau+2a) e^{-i\omega\tau}\, d\tau \\
&\quad - \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau-2a) e^{-i\omega\tau}\, d\tau \\
&= S_X(\omega)\big(2 - e^{2a\omega i} - e^{-2a\omega i}\big) \\
&= S_X(\omega)\big(2 - 2\cos 2a\omega\big) \\
&= 4S_X(\omega)\sin^2 a\omega
\end{aligned}
$$

21. 设平稳过程 X 的协方差函数 $R(\tau) = \sigma^2 e^{-\tau^2}$, 试研究其功率谱密度函数的性质.

解:

$$
\begin{aligned}
S(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 e^{-\tau^2} e^{-i\omega\tau}\, d\tau \\
&= \sigma^2 e^{-\frac{\omega^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\tau^2 + i\omega\tau - \frac{\omega^2}{4})}\, d\tau \\
&= \sigma^2 e^{-\frac{\omega^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\tau+\frac{i\omega}{2})^2}{2\times\frac{1}{2}}}\, d\tau \\
&= \sigma^2 \sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4}}.
\end{aligned}
$$

$S(\omega)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的实的、偶的、非负且可积的函数.