

文章编号: 1005-3085(2003)05-0029-12

车灯线光源的优化设计

王伟叶, 姜文华, 吴家麒

指导老师: 曹 沅

(复旦大学数学系, 上海 200433)

编者按: 本文的一个优点是能从入射角等于反射角, 入射向量, 入射点处抛物面的法向量和反射向量共面以及抛物面方程三组方程出发应用数学软件详细算出光源上一点射向抛物面时, 可能有几个反射点(反射光线)可以反射到 C 点(类似的 B 点), 尽管没有指出有可能会有三个反射点。本文的另一个优点是能对本文所作的近似假设的合理性作比较仔细的分析。本文在计算亮区时能用两种方法计算并作了比较。

摘 要: 本文首先将车前灯线光源的优化设计问题通过合理的假设、近似和数学推理归结为一个求函数最值的模型, 进而通过 Matlab 的符号计算和绘图功能求解。得到了切合实际的解答, 其次对该长度的光源在测试屏上产生的反射光亮斑用两种不同的方法进行了绘制, 最后对题中所提及的设计规范进行了分析, 阐述了其合理性。

在第一个问题上我们将着眼点主要放在从光源上同一点出发经过直射或反射到达屏上某点(B 或 C)的光线的条数上, 而忽略了其它因素诸如光程及入射角等带来的影响。运用空间解析几何中关于旋转抛物面的知识分别列出在 FAB 平面上和不在 FAB 平面上的反射光必须满足的方程, 用 Matlab 求符号解, 利用反射关系在光源上的点和镜面上的点之间作对应, 进而画出函数图像来分析光线的条数多寡。在明确光源上每一点对光屏上 B、C 点的“贡献”后构造合理的目标函数, 用 Matlab 编程计算, 画图求最大值。最后我们得到最合理的光源长度应为 3.82 毫米左右。

针对第二个问题我们首先建立了三个关于光线传播和光线被截断时必须满足的条件的相关定理, 然后采取了两种各有长处的描绘方法并用 Matlab 软件加以实现。其一是描点法, 即在光源和抛物面上都每隔一定距离取出一个点进行计算。其二是线段法, 线段法的理论根据是线段在抛物面上一点的反射下, 投影在屏上图像仍然是线段而且保持线段上各点的比例不变, 于是可以在镜面上取一些密集的点, 将光源通过其中每一点的反射像叠加, 就得到屏上的亮区。两张图在轮廓上是完全一致的, 都是长约为 6 米, 高约为 2 米的纺锤形。而前者在屏上光的强度方面能观察得更清晰, 后者在速度和轮廓清晰度上更占优势。

而对第三个问题即该设计规范合理性的分析, 我们从三个不同的角度进行了探讨, 其一是遭遇突发情况时汽车司机的反应, 其二是在整个空间范围内的光强度, 其三是光的强度分布。

在模型的评价部分, 我们对近似假设的合理性作了量化的分析, 在光源长度假设上, 我们结合实际对其合理性作了验证。最后还对模型的优缺点作了分析, 并在一定程度上介绍了其推广前景。

关键词: 连续模型; 函数最值

分类号: AMS(2000) 49K35

中图分类号: O224

文献标识码: A

1 问题重述(略)

2 模型假设

- H1. 只考虑从光源直接照射或经一次反射照到 B、C 两点的光线, 反射两次以上的光线不予考虑。
- H2. 经查阅资料后, 假设旋转抛物面的反射率为 0.95, 即经过抛物面一次反射后光强损失 5%。
- H3. 光源视为一条均匀发光的线段, 不考虑其粗细。
- H4. 当光源长度一定时, 屏上点的光强度与光源功率成正比。
- H5. 光源上所有的点经一次反射后到屏上同一点的光程和入射角视为相同。光源上所有的点直射到屏上同一点的光程和入射角也视为相同(这条假设的合理性在误差分析中将提到)。
- H6. 光源的长度不能太长(这条假设的合理性将在模型评价中提到)

3 符号说明

S : 旋转抛物面 $x^2 + y^2 = 60z, 0 \leq z \leq 21.6$

F : 旋转抛物面的焦点 $(0, 0, 15)$

k : 主光轴 $x = y = 0$

L : 线光源 $y = 0, z = 15, -b \leq x \leq b$ (长度为 $2b$)

B : 光屏上的给定点 $(2600, 0, 25015)$

C : 光屏上的给定点 $(1300, 0, 25015)$

P_0 : 单位长度的功率

$f_B(b)$: 当 $P_0 = 1$ 时, B 点的光强度关于光源长度 $2b$ 的函数

$f_C(b)$: 当 $P_0 = 1$ 时, C 点的光强度关于光源长度 $2b$ 的函数

W : 线光源的总功率 $W = 2bP_0$

(x_0, y_0, z_0) : 曲面 S 上的某一点

t : C 点的光强度不小于额定值 t , B 点的光强度不小于额定值 $2t$

4 问题分析

当 C 点的光强度不小于 t , B 点的光强度不小于 $2t$ 时, 要求光源的功率最小。换句话说,

若 $\begin{cases} p_0 f_B(b) \geq 2t \\ p_0 f_C(b) \geq t \end{cases}$, 我们要求的最小值。

因为, 所以 $p_0 \geq \max(\frac{2t}{f_B(b)}, \frac{t}{f_C(b)})$, 所以 $2bp_0 \geq \max(\frac{4bt}{f_B(b)}, \frac{2bt}{f_C(b)})$ 而此处 t 为一常值,

因而只要求 $\max(\frac{2b}{f_B(b)}, \frac{b}{f_C(b)})$ 的最小值。或者求 $\min(\frac{f_B(b)}{2b}, \frac{f_C(b)}{b})$ 的最大值。

5 模型的建立

线光源长度计算模型 我们先分析光屏上点 C 的情况。对于线光源上一点 M , 光线可以直接从 M 照射到 C , 也可以从 M 经过一次反射照到 C , 因此光屏上点 C 的光强度由直射

光线和反射光线叠加决定,我们来仔细分析一下反射光线的路径。

1). 设光源位于平面 xoz 上,则在平面 xoz 上至少存在一条路径从 M 经拓展后的抛物面反射到 C 。事实上,对于直线 l_2 上任意一点,在 xoz 平面上必定存在这样一条路线。为了寻找这样的反射点 R ,设 R 的坐标为 $(x_0, 0, z_0)$,在平面 xoz 中过点 R 的抛物线的切线记为 l_3 ,那么 l_3 与 MR 的夹角和 l_3 与 CR 的夹角相同。现抛物线的方程为 $x^2 = 60z$,在点 $R(x_0, 0, z_0)$ 处切线的斜率为 $x_0/30$,则法线斜率为 $k_1 = -30/x_0$, M 点的坐标为 $(x_1, 0, 15)$, C 点的坐标为 $(2600, 0, 25015)$, RM 的斜率为 $K_2 = \frac{z_0 - 15}{x_0 - x_1}$, CR 的斜率为 $k_3 = \frac{z_0 - 25015}{x_0 - 2600}$,根据夹角的计算公式,得到 $\frac{k_1 - k_3}{1 + k_1 k_3} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}$ 。

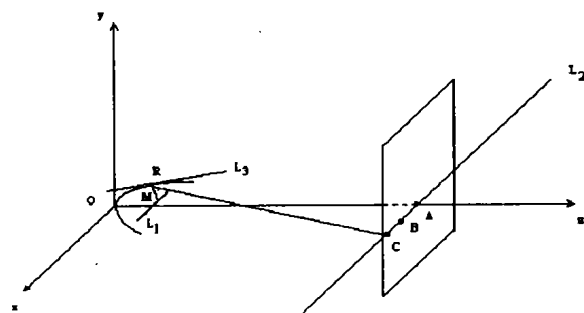


图1 光反射示意图

2). 光线还可以经 xoz 平面以外的点 T 反射到点 C ,记过抛物面上点 T 的法线为 l_4 ,则 MT, l_4, TC 在同一平面上,这里 $T = (x_0, y_0, z_0)$,则 $\overrightarrow{MT} = (x_0 - x_1, y_0, z_0 - 15)$, $\vec{l}_4 = (x_0, y_0, 30)$, $\overrightarrow{TC} = (2600 - x_0, y_0, 25015 - z_0)$ 。那么,它们的混合积为零。即

$$\begin{vmatrix} x_0 - x_1 & y_0 & z_0 - 15 \\ x_0 & y_0 & -30 \\ 2600 - x_0 & -y_0 & 25015 - z_0 \end{vmatrix} = 0. \text{由 } MT \text{ 与 } l_4 \text{ 的夹角和 } TC \text{ 与 } l_4 \text{ 的夹角相同得 } \frac{\overrightarrow{MT} \cdot \vec{l}_4}{|\overrightarrow{MT}| |\vec{l}_4|} = \frac{\vec{l}_4 \cdot \overrightarrow{TC}}{|\vec{l}_4| |\overrightarrow{TC}|},$$

根据空间向量的内积可以得到。另外还有 $x_0^2 + y_0^2 = 60z_0$ 。从上面的三个式子解出的所有 (x_0, y_0, z_0) 就是所要求的反射点。

由上述两点的分析,我们可以得知从线光源上的每一点 M 出发,在 xoz 平面上有多少条路径反射到 C ,在 xoz 平面以外有多少条路径反射到 C ,再利用假设中提到的反射系数 0.95,并结合从 M 直射到 C 的光线,就得到了光源上任意一点 M 对点 C 的光强贡献,从最后的计算结果来看,光强贡献相同的点呈区间分布(即可以对线光源作分割,使得同一段内的点对点 C 的光强贡献相同,这类似于 Lebesgue 积分中的阶梯函数)。最后,在整个线光源上对光强贡献积分,我们得到了线光源长度 $2b$ 与 C 点光强的关系 $f_c(b)$ 。至此,第一题的模型建立完毕。

反射光的亮区 我们来设法画出反射光的亮区。为此,建立几个定理(略)。

6 模型的求解

6.1 线光源长度计算

要求得 $f_B(b)$ 和 $f_C(b)$ 的具体值,除了假设中的距离,角度以外,我们还需要知道,从光源 $y = 0, z = 15, -b \leq x \leq b$ 上的每一点出发的光线有多少条能够经过抛物面 S 反射到 B 点或者 C 点。前文中已经详细叙述了从一点 $(x_1, 0, 15)$ 出发的光线经过旋转抛物面上点 (x_0, y_0, z_0) 反射后经过点 $C(2600, 0, 25015)$ 或点 $B(1300, 0, 25015)$ 的充分必要条件。此处我们将对这些方程进行分析,运用数学软件 Matlab 来计算对于满足 $-30 \leq x_1 \leq 30$ 的每组 $(x_1, 0, 15)$ 究竟有几条光线能最终经过反射到达 B 点及 C 点。

以 $C(2600, 0, 25015)$ 点为例

$$\text{首先由方程} \begin{vmatrix} x_0 - x_1 & y_0 & z_0 - 15 \\ x_0 & y_0 & 30 \\ 2600 - x_0 & -y_0 & 25015 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

我们知道如果能够反射到 C 点的话,那么反射点需满足 $y_0 = 0$ 或者 $2600(z_0 + 15) = (z_0 - 24985)x_1$

$y_0 = 0$ 时完全是一个平面上的问题,因此我们分两种完全不同的情况加以讨论。

第一类:反射点在 xoz 平面上(即 $y = 0$ 平面上)

光路是可逆的,我们不妨假设光线是从 C 点 $(2600, 0, 25015)$ 出发经过抛物线 $x^2 = 60z$, $-36 \leq x \leq 36$ 上一点 (x_0, z_0) 反射然后和线段 $z = 15, -30 \leq x \leq 30$ 交于 $(x_1, 15)$ 。将 x_1 视做 x_0 的函数,再研究对 $-30 \leq x_1 \leq 30$ 的每个 x_1 有多少个 x_0 可作为它的原像,原像的个数就是在平面上,由 $(x_1, 15)$ 出发经反射后经过 C 点的光线的条数。

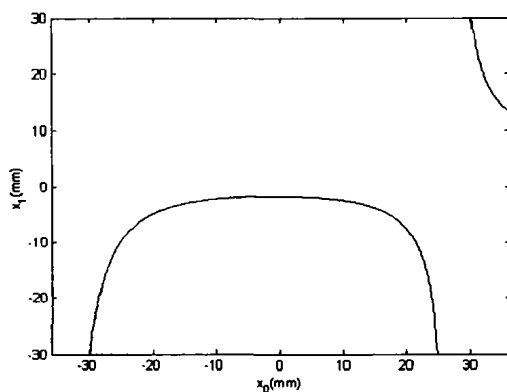


图2 在 $y = 0$ 平面上 x_0 与 x_1 关系

利用 Matlab 的符号计算功能来解方程 $\frac{k_1 - k_3}{1 + k_1 k_3} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}$, 我们得到了 x_1 关于 x_0 的函数如下:

$$x_1 = \frac{x_0^5 - 2600x_0^4 + 1800x_0^3 - 4680000x_0^2 + 810000x_0 + 2106000000}{x_0^4 - 1498200x_0^2 - 9360000x_0 + 1350810000}$$

将之绘成图像,并截取其中 $-30 \leq x_1 \leq 30$ 的部分如下:

从图中可以看出,在 $x_1 \in [-30, x^*)$ 时原像为两个,在 $x_1 \in [x^{**}, 30]$ 时原像为一个。其中, x^* 为函数在区间 $[-30, 20]$ 中的极大值,可用求导的方法求得,而 x^{**} 就是 $x_0 = 36$ 时 x_1 的值。

同样用 Matlab 的符号计算功能求导,并求导数的零点,我们得到,函数的极大值点在 $x_0 = -0.9879$ 时取到, $x^* = -1.5541$ 。而 $x^{**} = 13.3508$ 。

由于测度为零的单点集对我们最后的积分不产生影响,因此我们可以认为:

当 $x_1 \in [-30, -1.5541)$ 时有两条反射到 C 点的光线, $x_1 \in [-1.5541, 13.3508)$ 时没有反射到 C 点的光线, $x_1 \in [13.3508, 30]$ 时有一条反射到 C 点的光线,类似地对于 B 点,通过图像我们用同样的方法得到结论:

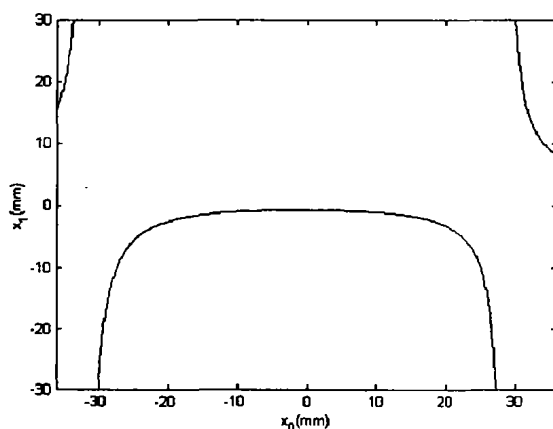


图3 不在 $y = 0$ 上 x_0 与 x_1 关系

当 $x_1 \in [-30, -0.7791)$ 时有两条反射到 B 点的光线, $x_1 \in [-0.7791, 8.0452)$ 时没有反射到 B 点的光线, $x_1 \in [8.0452, 15.3144)$ 时有一条反射到 B 点的光线, $x_1 \in [15.3144, 30]$ 时有两条反射到 B 点的光线。

第二类:反射点不在 $y = 0$ 平面上,仍以 C 点为例

此时由三向量共面且 $y_0 \neq 0$, 得到 $x_1 = \frac{2600(z_0 + 15)}{z_0 - 24985}$, x_1 和 z_0 是一一对应的,这意味着可能使从 $(x_1, 0, 15)$ 发出的光线反射到 C 点的反射点均在抛物面和某一垂直于主轴的平面的交线,即一个圆周上。当 z_0 从 0 变化到 21.6 时, x_1 从 -1.5609 单调变化到 -3.8120。当 z_0 一定时, x_0 和 y_0 上可用 z_0 以及参数 $\theta (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ 来表示,然后计算 z_0 一定时两条光线所在的方向 $(2600 - x_0, -y_0, 25015 - z_0)$, $(x_1 - x_0, -y_0, 15 - z_0)$ 与法线 $(x_0, y_0, -30)$ 之间的夹角的差关于 θ 的函数并作图观察零点的个数,零点的个数就是反射光线的条数。我们列举一些图像如下:

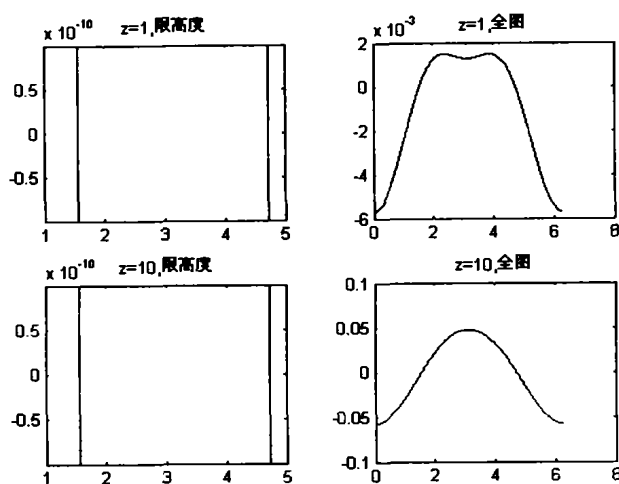


图 4 几个例子

图中横轴为 θ , 从 0 到 2π , 纵轴为两条光线与法线的夹角的余弦值的差

上两个图是 $z_0 = 1$ 的情况下的函数图像, 下两个图是 $z_0 = 10$ 的情况下的函数图像

左边的是为了观察零点的个数, 而将图像的高度限制在 $[-10^{-10}, 10^{-10}]$ 的区间内

对 0 到 21.6 中的一大批 z_0 进行计算和绘图, 发现当 z_0 在 0 到 0.0005 内函数无零点, 当 z_0 在 0.0005 到 21.6 中变化时函数均有两个零点。

对 $z_0 = 0.0005, 21.6$ 分别算出相应的 $x_1 = -1.5610, -3.8120$

所以当 $x_1 \in [-3.8120, -1.5610]$ 时有两条反射到 C 点的光线, 其余位置没有反射到 C 点的光线。

对于 B 点, 类似可得当 $x_1 \in [-1.9060, -0.7806]$ 时有两条反射到 B 点的光线, 其余位置没有反射到 B 点的光线。

把以上这些数据综合起来我们得到如下的两张表格:

到 C 点	- 30 ~ - 3.8120	- 3.8120 ~ - 1.5610	- 1.5610 ~ - 1.5541	- 1.5541 ~ 13.3508	13.3508 ~ 30
直射光	1	1	1	1	1
平面反射	2	2	2	0	1
非平面反射	0	2	0	0	0
反射光总数	2	4	2	0	1

到 B 点	- 30 ~ - 1.9060	- 1.9060 ~ - 0.7806	- 0.7806 ~ - 0.7791	- 0.7791 ~ 8.0452	8.0452 ~ 15.3144	15.3144 ~ 30
直射光	1	1	1	1	1	1
平面反射	2	2	2	0	1	2
非平面反射	0	2	0	0	0	0
反射光总数	2	4	2	0	1	2

有了这些数据,我们就可以编程对目标函数 $\min\left(\frac{f_B(b)}{2b}, \frac{f_C(b)}{b}\right)$ 进行分析进而求其最大值了。

查阅相关资料我们得到车前灯反射镜反射率大约为 0.95 左右。以点 $C(2600, 0, 25015)$ 为例,我们的计算目标函数 $f_C(b)$ 方法是把光源 $[-b, b]$ 这段区间按照第一张表格中的数据进行分段,查得每一段的光源有多少条反射光能到达 C 点,然后用这个数字乘以该段的长度,再乘以反射系数和入射角的余弦 $\rho \cos \varphi$,除以光程的平方。由光学知识可以知道,所得的这个数据除以该段光源反射到 C 点的光照强度是一个常数。由于最后的目标函数是个比例式,考察其最值在何时取到时,函数值相差常数倍并不会影响最后结果,所以可以把这个数据当作是该段光源在 C 点产生的光照强度,然后将各段相加,再加上直射光产生的光照强度,就得到了目标函数 $f_C(b)$ 。 $f_B(b)$ 的计算方法类似。我们用程序(附录中程序略,编者注)算出了 $b = 0 \sim -30$ 之间,每隔 0.01 取一个 b 得到的 f_B 和 f_C 的值,然后用描点法得到的函数图像如下:

第一个最大值在 $b = 1.91$ 时取到,而下一个是函数值达到此值的 b 在 13 左右,由假设(H6),这个值相对于实际情况来说显得太大,后文我们也将从照明效率和生产成本的角度说明 $b = 1.91$,即线光源长度约为 3.82 毫米是最为恰当合理的。

6.2 反射光的亮区

我们采取了两种方法来获取光源通过一次反射后在 25 米的光屏上产生的亮区。

要绘出光源关于抛物面的一次反射亮区,那么一个最简单的思想就是画出光源上每一个点关于抛物面上的每一个点的反

射光在测试屏上的交点就可以了。而实际上在计算机的实际操作中不可能每个点被取到,于是我们利用了格点绘制的思想,即在光源和抛物面上都每隔一定距离取出一个点进行计算。

因此,在 Matlab 下编制通过描点法绘出亮区的程序描绘出 $b = 1.91$ 时的亮区范围这个程序的具体操作是:在光源上从左端点 $(-b, 0, 15)$ 到右端点 $(b, 0, 15)$ 每隔 $b/20$ 的距离取点

对于每一个光源上的点,在抛物面上,先固定抛物面方程 $x^2 + y^2 = 60z$ 中的 z ,使得抛物

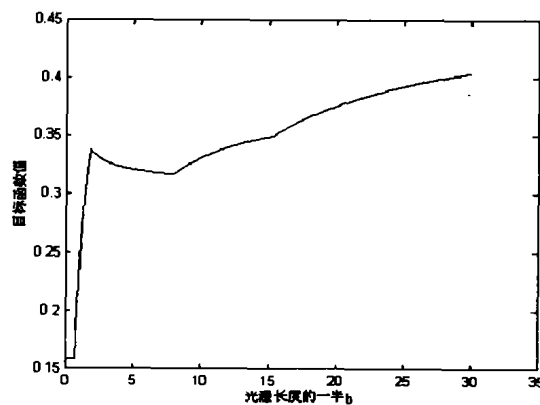


图 5 $f_C(b)$ 图像

面被 $z = z_0$ 平面截面为一个圆周,然后在这个圆周上均匀取点。再通过 z 的变化,取到抛物面上的不同点。具体的操作是对于每一个 z ,在圆周上均匀取 40 个点。 z 的间隔是 21.6/50。

然后要做的就是作出从光源上取出的每个点到抛物面上取出的点反射光线,求出反射光线与测试屏上的交点。把这些交点画出来就可以得到一个基本的亮区轮廓图。

这里值得注意的是,由于有些反射的光线先会被抛物面截掉,因而形成多次反射,所以要把这些反射线与测试屏的交点去掉。由于定理 2 已经证明,若一条反射光线会形成多次反射,那么它与抛物面截口的交点一定在抛物面的外面。所以,我们在求反射光线与测试屏的交点之前先加入了判断,先计算出反射光线与 $z = 21.6$ 平面的交点(这个平面实际上就是抛物面的开口截面),然后判断这个交点是否则在抛物面开口截面图内,即它到 $(0,0,21.6)$ 的距离是否小于等于 36。

通过上述的算法,我们使用 Matlab 绘出了光源经过抛物面上的一次反射在测试屏上的形成的亮区如图所示

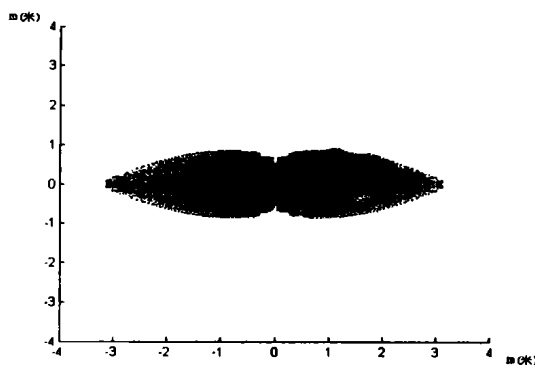


图 6 描点法给出的亮区

由于描点法是把所有光源上的点对抛物面上的点的反射绘出,所以计算量非常的大。因此我们设计出线段法来绘制亮区图,同时弥补由于计算量带来的问题。

线段法的基本原理是这样的:由于定理 1 的证明,所以我们知道整个光源关于抛物面上的一点的反射在测试屏上所得到的图案也是一条线段,而且保持一定的齐次性。所以,我们要绘出整个测试屏上的亮区,只要把光源关于抛物面上的每一点的反射在测试屏上形成的线段画出来即可。

这样我们编制了 Matlab 下通过线段法绘出亮区的程序来描绘 $b = 1.91$ 时的亮区范围。

同样,由于保持齐次性,所以测试屏上的关于抛物面上每个点反射形成的线段的端点就是光源的端点 $(-b, 0, 15)$ 和 $(b, 0, 15)$ 在测试屏上得到的反射点。

但是,同样的我们要考虑反射光线是否可能被抛物面挡住形成多次反射。因此,我们首先把光源分成两段 $[(-b, 0, 15), (0, 0, 15)]$ 和 $[(0, 0, 15), (b, 0, 15)]$ 来考虑,关于抛物面上的每一点,每一段在测试屏上反射出来一条线段(事实上,关于抛物面上的同一点,测试屏上的两段线段是共线且有一个端点重合的)。那么考虑反射光线是否被抛物面截掉就是考虑每一条这样的线光源的反射光线是否给抛物面截掉的问题。由于对称性 $[(-b, 0, 15), (0, 0, 15)]$ 和 $[(0, 0, 15), (b, 0, 15)]$ 我们只要讨论其中的一段就可以了。因为我们已经知道 $(0, 0, 15)$ 是抛物面的焦点,所以由抛物面的性质知道它反射出来的光是平行于 z 轴的平行光,是不可能被抛物面截掉形成多次反射的。因此只需要考虑另外一个端点关于抛物面的反射情况就可以了。

这里的做法就和描点法一样了,我们先把这段线光源关于抛物面某点的反射投影到了抛物面开口的截面上,由定理 1 这段光源的像也应该是一条线段,然后看这条线段在开口圆 $x^2 + y^2 = 1296z = 21.6$ 内的部分,在开口圆内的线段就是实际能够最后射到测试屏的反射

光在开口圆上的交线,我们知道(0,0,15)的反射光一定在开口圆内,所以这条反射线段至多和开口圆有一个交点。若无交点,则说明这段光源关于抛物面上这个反射点的所有一次反射光线都可以射到测试屏上。

若有交点,则如图所示,不妨设为 T 点, T 点为光源上 E 点关于抛物面上点 P 反射在开口圆上的交点。其中 M 点为光源中点 $F(0,0,15)$ 的反射光在开口截面上的交点, M 点一定在圆内。 N 点为光源端点 $(b,0,15)$ 的反射光在开口截面上的交点。若 N 在圆内,则说明线段关于抛物面上的点 P 的反射不可能给抛物面截掉,否则就说明 EF 这段光源关于 P 的反射光线不被抛物面截掉。因此,在测试屏上能够得到的亮区是

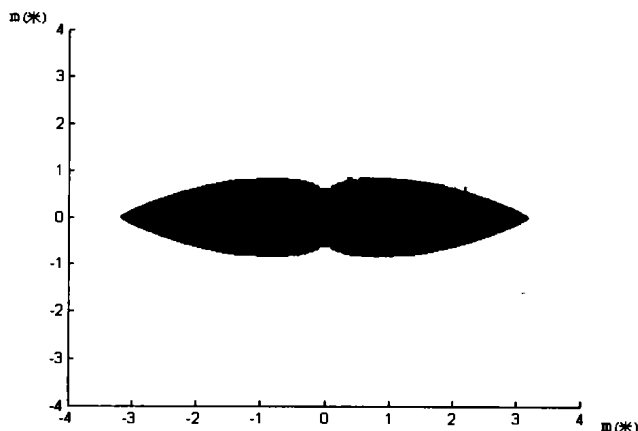


图7 线段法绘出的亮区

所有这种 NM 线段或者 TM 线段关于 P 在测试屏上的位似线段的叠加。

因此,在实际操作中,我们取 z 的间隔是 $21.6/500$,每个圆周上均匀取 100 个点。最后得到的亮区如图所示

7 模型的评价

1) 假设(H5)的合理性分析

我们用平面上的反射光线来说明光程及角度近似的问题。

用上文提及的函数

$$x_1 = \frac{x_0^5 - 2600x_0^4 + 1800x_0^3 - 4680000x_0^2 + 810000x_0 + 2106000000}{x_0^4 - 1498200x_0^3 - 9360000x_0^2 + 1350810000}$$

来计算通过镜面上每一点的反射光线的长度,我们得到如下的图像

可见反射光的光程均在 2.514×10^4 到 2.52×10^4 之间,相对误差不超过千分之三,完全可以近似看成是同一长度。

而平面反射时,角度的余弦的限制为 $\cos(\arctg(\frac{2600 \pm 36}{25000 + 15 - 21.6}))$,分别为 0.994484 和 0.994779,相对误差仅万分之三,因此反射光亦可近似看成是同一个方向。

在计算中,这三个量是相互之间做乘除法的,由数值分析中的相关知识知道乘除法之间的相对误差是作累加的,因此,这样作近似以后,最后结果的相对误差不会超过千分之四。

对于非平面的反射和照射到 C 点的光线,其近似的相对误差限也是这个尺度,近似的假设是合乎情理的。

2) 两种作图法的比较

描点法和线段法的比较分析

我们通过描点法所画出来的亮区的最大优点是:因为在光源上取点是均匀分布的,所以描点法得到的点的大致分布就能在一定程度上反映出来灯光在测试屏上的强弱关系,从图中可以明显看出中间比较亮,周围比较暗,这和实际情况相符。

而对于线段法来说优点在于

第一:大大地缩短了画图的时间,因为描点法对于抛物面上和光源上都要取点计算,而线段法只要算抛物面上的点,光源上只需计算 2 个端点和中点就可以了,这样大大缩短了计算的时间,这个可以从下表中看出。

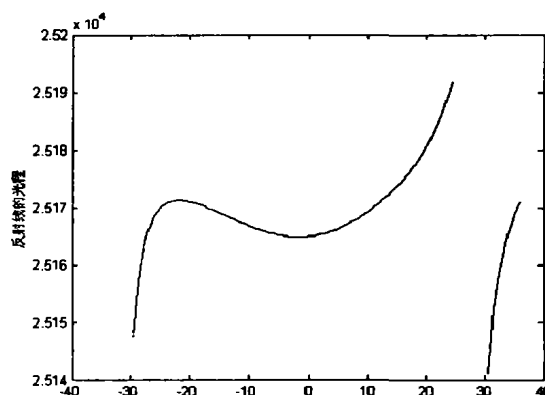


图 8 镜面上点的 x 坐标

描点法和线段法绘图的时间比较

绘制序号	绘制方法	光源分割数	抛物面 z 轴分割数	圆周分割数	绘制时间(s)
1	描点法	20	50	40	55
2	线段法	/	50	40	6
3	线段法	/	500	100	76

第二:线段法所取的点是对抛物面的一个均匀分布,而描点法所取的点是对光源和抛物面的均匀分布,事实上,我们很容易看出,在接近光源端点的时候,光源上相同距离的两点的反射光在测试屏上的偏差就要比靠近中心距离相同的两点的反射光的偏差来的大,所以描点法画出的亮区图形的在两个边界的端点上比较模糊,而线段法因为不对光源进行分割,所以不存在这方面的问题。边界显得非常清晰。可以更好地看清楚一次反射亮区的轮廓。

通过对两种不同的方法的对比,我们可以看出,两种画法所画的亮区的形状尺度是几乎一致的。而且这两种算法各有所长。通过这两张图,我们不仅得到了清晰的亮区分布轮廓图,而且可以大致看出在亮区上一次反射光强的分布情况。事实上,这个结果与我们平时的生活常识也是相一致的。

3) 假设(H6)的合理性分析

我们给出 $b = 1.9$ 和 $b = 15$ 时的两张光斑图进行比较:

当 $b = 1.9$ 时,车前灯在 25 米处的照射范围是大约左右 6 米上下 2 米,而 $b = 15$ 时,其照射的光斑将达到左右 80 米上下 20 米的范围,对于夜间行驶的汽车来说,这么大的范围无疑是非常大的浪费,夜间驾驶的司机只需要清晰的观察面前 50 - 100 米处,左右大约 10 米的范围便已能够保证行车的安全。另外,前灯的亮度是非常大的,如果任其向四周发散,一来从环境的角度考虑很不合适,二来对迎面而来的行人,骑车人或汽车驾驶员会带来“眩目”效应从而产生危险。故而在效率相差仅 5% 左右的情况下选择长的线光源并非明智之举。另外,制造长的线光源需要改造现行的生产工艺,所需成本也将大大提高。因此,我们取局部最大值 $b = 1.9$,即光源长度为 3.8 从生产实际上考虑,是合理的。

4) 该设计规范的合理性分析

夜间行车一般车速较快,在每小时 40—60 公里内,现在不妨假定车速为 50 公里/小时。当驾驶员突然发现前方 25 米处有一障碍物,从发现到开始刹车大约需要 0.7 秒的时间,然后踩刹车,通过查阅资料知道加速度可以达到 -7m/s^2 ,那么从发现到停止运动,汽车一共驶出

了 $\frac{50000}{3600} \times 0.7 + \frac{1}{2} \frac{(\frac{50000}{3600})^2}{7} \approx 23.5$ 米,这个数值已经比较接近 25 米了。这就是说,在夜间快速行驶时,驾驶员最需要关注的距离(生命线)是车前 25 米左右的地方,因为太远的地方相对比较安全,司机还有足够的时间作出反应,而在车前 25 米处,行人会产生一种犹豫的心理,又想穿越马路而又不肯贸然行动,一旦此人决定在车前通过,在这样的距离下将是十分危险的,而夜间在小于 25 米的距离内,行人经过目测和判断一般不会对车前横穿马路,这符合我们日常生活的经验。

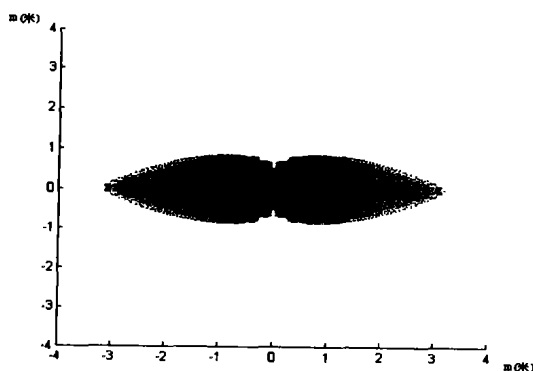
接下来还存在一个光强的问题,在 25 米处的光屏上光亮度不能太弱,否则无法准确分辨障碍物,这就是规定光强度的额定值的依据。当然,光强也不能太强烈,前文提到的光源长度为 30 毫米的情况下,在 B 点的光强度将是光源长度为 3.82 毫米的 7—8 倍,这样的光强会使相向行驶的车辆或是迎面而来的行人产生“眩目”的效应,反而容易发生事故。

除此以外,光强的分布也值得注意,一般来说,越靠近车辆正前方的地方,光线越强,越往两侧则光强越弱。光强的分布不可能是均匀的,也没有这个必要。合适的光强分布可以使车前方视野显得主次分明。使得驾驶员能集中有限的精力关注行车时应该关注的周围环境。否则心有旁骛,在夜晚容易发生危险。设计规范中所提及的到车灯同侧 1.3 米和 2.6 米处光强的不同,就是在这方面的体现。至于具体光强的额定值为多少,则需要查阅汽车照明的专业资料才能加以确定。我们认为,本简化规范中所提到的 2 倍并非本质,在不同情况下可以加以改进。

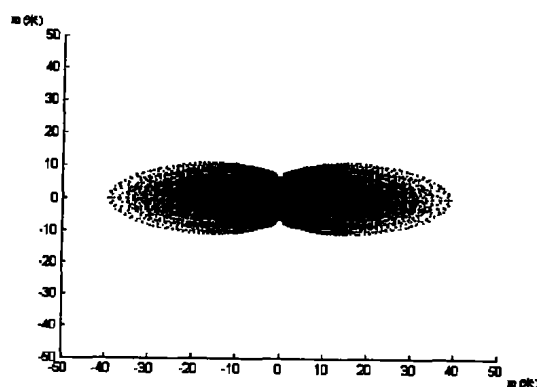
附录中我们给出了 $b = 1.91$ 与 $b = 15$ 时光斑的比较图(描点法)。

$b = 1.91$

$b = 15$



光源长度为 3.82mm 时的亮区图



光源长度为 30mm 时的亮区图

参考文献:

- [1] 姜启源. 数学模型(第二版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 1993
- [2] 许世文. 计量光学[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1988
- [3] 苏步青等. 空间解析几何[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1982
- [4] 李丽等. MATLAB 工程计算及应用[M]. 北京: 人民邮电出版社, 2001
- [5] 李庆扬著. 数值分析[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 1986

An Design of the Car's Front Light

WANG Wei-ye, JIANG Wen-hua, WU Jia-qi

Advisor: CAO Yuan

(Fudan University, Shanghai 200433)

Abstract: This paper presents a math model used to find out the best length of the car's front light. We first show that this problem can be changed into a problem in which we only have to find the maximum of a function, and then we use the "symbolic mathematics" and "2D plotting" functions to solve this problem and get an appropriate solution (about 3.82mm). As to the second problem, we proved 3 theorems, which helps to draw the shade on the test screen. We developed two different methods to finish the picture (dot-by-dot and line-by-line). We discussed the third problem from 3 different ways. Finally we proved that every proximity hypothesis we made is appropriate.

Keywords: continuous modeling; maximum

(上接 64 页)

The Optimising Designal Model of Linear Luminaire of Motor Light

ZHANG Zuo-qi, HAN Fang, CHEN Yan-zhou

Adrisor: CHEN Si-hua

(Wuhan University, Wuhan 430072)

Abstract: In this paper, the law how the number of valid points of incidence changes with different points on the linear luminaire is studied firstly, then a rational division is given. On the basis of that, an optimising mathematical model is established; with the method of numerical calculation and diagrammatic analysis, the optimal result, $l = 3.8\text{mm}$ and $P_{\min} = 7210$, are acquired. According to the result, the figure of area lighted by reflective rays can be defined easily with the help of software Matlab. The model is simple and can also be used in other relative domains.

Keywords: the optimising designal model, linear luminaire, the optimal length, the minimum power