平面五连杆并联机器人连杆长度的优化设计

王娜君[1],梁 春[1]，施平[1]

1.2.3.哈尔滨工业大学机械制造及其自动化系，中国，黑龙江，哈尔滨，150001

摘要：平面五连杆并联机器人的目标运动范围决定于各个杆的长度和摆角的大小。在一般的设计中都是以单目标约束法进行优化设计，把全局运动性能指标最大作为优化目标。这种方法虽然可以寻找到全部可能的运动范围，但是却忽略了机械铰链结构自身约束问题。以这种方法确定的杆长，在样机制造后容易出现干涉和卡死的现象。针对这个问题本文在单约束基础上添加了机械结构本身的约束。建立了一套新的优化算法。运用解析法建立平面五连杆并联机器人的正解算法。通过MATLAB计算求出目标位置的正解。一般无约束情况下我们发现该并联机构存在两种可能正解且关于 x 轴相互对称。添加角度约束后我们成功地找到了最优的解。最后通过MATLAB进行实例计算成功地确定了各杆的长度并且找到了一个200×150 mm的目标运动范围。通过散点图找到了解2 为最优解。达到了预期的应用效果。该优化方法可以用于平面五连杆并联机器人连杆长度的优化设计。

关键字：平面五连杆；并联机器人；运动范围；优化设计

0 前言

平面五连杆机器人是最近国内外科学家研究比较多的一种并联机器人。因其具有刚度大、承载能力强、误差小、精度高、自重负荷比小、动力性能好、控制容易等一系列优点,受到了许多学者的关注[1]。机器人的运动范围是一项重要的技术指标[2]。五连杆机器人目标运动点的运动范围受到各杆的长度和摆动的角度约束[3]。然而如何确定各杆的长度以及各个摆动角度一直没有一个完整可行的方法，在很多的设计案例中都是通过以全局运动性能指标最大为目标的单目标约束进行优化设计，并利用随机方向法搜索到一个最优解[4]。这样可以满足对于运动范围参数的要求，但是却忽略机械结构本身的干涉和连杆转角卡死的问题。连杆之间是铰接的，所以各个杆的摆动角度是受到机械机构约束的。单纯的只考虑运动范围参数，实际上由于机械结构本身的约束，最后制造的样机达不到设计的预定值。这样的设计方法是不可靠的。采用怎样的设计计算方法可以准确地获得样机预定的运动范围是五杆并联机器人设计中亟待解决的关键问题。所以本文提出了一种新的优化设计方法。在满足单约束的基础上添加各个关节的角度约束。从而避免了由于机械机构约束而出现干涉和连杆转角卡死的问题。这对于保证机器人运动的稳定可靠有十分重要的意义。

1 数学模型的建立

如图1所示，五杆机构各杆矢量 L_1、L_2、L_3、L_4、L_5 的长度分别为 l_1、l_2、l_3、l_4、l_5，它们与 x 轴正向的夹角分别为 θ_1，θ_2，θ_3，θ_4，0°。$\angle AP_1P_2=\beta$，$\angle AP_2P_1=\gamma$。将平面五杆并联机器人机构中的杆 P_1P_2 为动平台，B_1B_2 为基座, θ_1 和 θ_4 为主动输入角，则平面五杆并联机器人机构是由枝链 B_1CP_1 和 B_2P_2 构成的平面并联机器人结构。动平台 l_3 上的参考点 A 到 P_1 点和 P_2 点的矢量分别为 r_1 和 r_2。

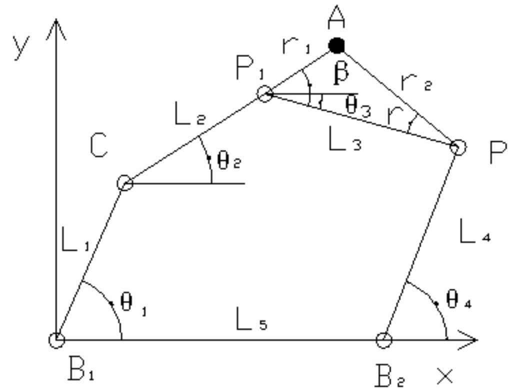


图 1 平面五杆并联机器人机构简图

由图1中标出的各矢量可以写出以下矢量关系式

$$L_1+L_2+L_3=L_4+L_5 \tag{1}$$

将上式向 x，y 方向投影得

$$\begin{cases} l_1\cos\theta_1+l_2\cos\theta_2+l_3\cos\theta_3-l_4\cos\theta_4-l_5=0 \\ l_1\sin\theta_1+l_2\sin\theta_2+l_3\sin\theta_3-l_4\cos\theta_4=0 \end{cases} \tag{2}$$

基金项目：与哈尔滨气轮机厂合作项目（CBQQ25500455 ）
作者简介：王娜君(1958 年生)，女，哈尔滨工业大学副教授，博士；
梁 春(1984 年生)，男，哈尔滨工业大学硕士；
施 平(1956 年生)，男，哈尔滨工业大学教授，博士。

在图 1 所示坐标系中，参考点 A 的坐标为

$$\begin{cases} x_A = l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2 + r_1\cos(\theta_3+\beta) \\ y_A = l_1\sin\theta_1 + l_2\sin\theta_2 + r_1\sin(\theta_3+\beta) \end{cases} \quad (3)$$

或

$$\begin{cases} x_A = l_5 + l_4\cos\theta_4 - r_2\cos(\theta_3-\gamma) \\ y_A = l_4\sin\theta_4 - r_2\sin(\theta_3-\gamma) \end{cases} \quad (4)$$

如果选择 θ_1 和 θ_4 为运动参数输入，则可以由式（1）或式（2）求出 θ_2 和 θ_3。为消去 θ_2，将式（1）改写为：$L_4+L_5-L_1-L_3=L_2$ 将两边各自点乘得

$$\begin{aligned} &l_1^2+l_3^2+l_4^2+l_5^2-l_2^2+2l_4l_5\cos\theta_4-2l_1l_4\cos(\theta_4-\theta_1)-2l_3l_4\cos(\theta_4-\theta_3) \\ &-2l_1l_5\cos\theta_1-2l_3l_5\cos\theta_3+2l_1l_3\cos(\theta_3-\theta_1)=0 \end{aligned} \quad (4)$$

令

$A=l_1^2+l_3^2+l_4^2+l_5^2-l_2^2$；

$B=2l_4l_5\cos\theta_4-2l_1l_4\cos(\theta_4-\theta_1)-2l_1l_5\cos\theta_1$

$C=2l_3l_4\cos\theta_4+2l_3l_5-2l_1l_3\cos\theta_1$；

$D=2l_3l_4\sin\theta_4-2l_1l_3\sin\theta_1$

则式（4）进一步简化为

$$A+B-C\frac{1-x^2}{1+x^2}-D\sin\theta_3=0 \quad (5)$$

令 $x=\tan(\theta_3/2)$，将 x 代入式（5）中，得

$$(A+B+C)x^2-2Dx+A+B-C=0 \quad (6)$$

这是一个关于 x 的一元二次方程。式（6）的解为

$$x=\frac{D\pm\sqrt{D^2-(A+B+C)(A+B-C)}}{A+B+C} \quad (7)$$

式（7）有实数根的判别条件为

$$\Delta=4D^2-4(A+B+C)(A+B-C)\geq 0 \quad (8)$$

当 $\Delta\geq 0$ 时动平台姿态角 θ_3 为：

$$\theta_3=2\arctan(x)$$

将主动输入参数 θ_1，θ_4 以及动平台姿态角 θ_3 代入式（2）中的二式，求得杆 2 的姿态角

$$\theta_2=\arcsin\left(\frac{l_4\sin\theta_4-l_1\sin\theta_1-l_3\sin\theta_3}{l_2}\right) \quad (9)$$

将求得的 θ_2，θ_3 以及主动输入参数 θ_1，θ_4 代入式(3)，即可求得在主动输入参数 θ_1，θ_4 的情况下对应的动平台上 A 点的位置 x_A，y_A。但是我们可以看到在 $\Delta>0$ 时 x 存在两个实数解从而对应两个 θ_3，所以存在两个正解。

2 杆长度的优化方法

在整个计算过程中影响的参数较多。为了方便搜索全部可能的解。这里可以设主动输入的两个连架杆为两个曲柄即参数 θ_1，θ_4 可以分别为 $0°\sim 360°$。根据五连杆机构双曲柄存在的条件[5]：

$$\begin{cases} a+b+c>d+e \\ a+c\leq b+d+e \\ b+c\leq a+d+e \end{cases} \quad (10)$$

其中 a 为最短杆，b 为次长杆 c 为最长杆 d，e 为其它两杆。而且最短杆和次长杆必须为连架杆。所以，我们不妨设 $l_1=l_4=l_5=l$、$l_2=l_3=1.5l$。经验证满足不等式组（10）；

为了进一步简化运算我们设 $\beta=0,\gamma=0$。

$x_1=\dfrac{D+\sqrt{D^2-(A+B+C)(A+B-C)}}{A+B+C}$ 为解 1；

$x_2=\dfrac{D-\sqrt{D^2-(A+B+C)(A+B-C)}}{A+B+C}$ 为解 2。

通过试算可以找到一个存在目标运动范围 l 的大小从而确定各个连杆的长度。在获得所有的可能的解后。为了防止干涉和卡死，考虑到铰链结构的运动范围约束。为了防止干涉经分析我们把主动输入参数 θ_1，θ_4 分别为 $60°\leq\theta_1\leq 240°$，$-60°\leq\theta_4\leq 120°$，并且为了防止出现卡死要求 $\theta_2<\theta_1$，$\theta_4+\theta_3<180°$。添加新约束后我们如图 2 程序框图建立了新的搜索方法。

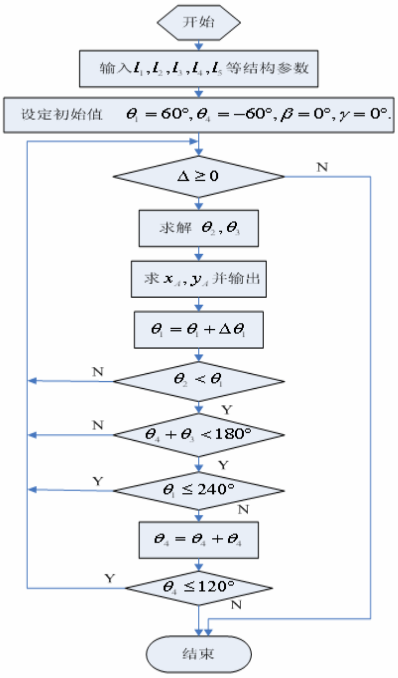
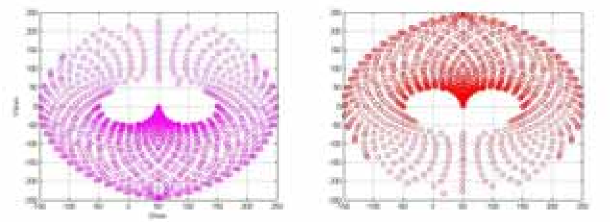


图 2 平面五杆机器人位姿正解验算程序框图

3　实例计算与结果分析

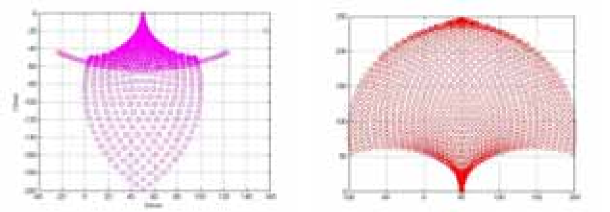
我们假设要寻找到一个 200×150 mm 的平面运动范围。我们在无约束条件下通过试算l的大小。发现当l=100 mm 时，在其运动范围内存在一个 200×150 mm 的平面运动范围。我们使用 MATLAB 进行分析得出下图 3 两种正解散点图：



解 1 的散点图　　　　解 2 的散点图

图 3 无约束条件下搜索到的运动范围

通过两种解的散点图我们发现它们的值是相互对称的，说明其运动范围一样，而且更进一步验证，我们上面所给定杆长存在双曲柄。但是我们考虑到机械结构本身的约束。为了防止干涉和卡死。我们把主动输入参数θ_1，θ_4 分别为$60° \le \theta_1 \le 240°$，$-60° \le \theta_4 \le 120°$，并且要求$\theta_2 < \theta_1$，$\theta_4 + \theta_3 < 180°$。添加新约束后我们按图 2 程序框图建立新的搜索方法。通过使用 MATLAB 分析得出如下图 4 散点图。



解 1 修正后的散点图　　　　解 2 修正后的散点图

图 4 添加机械结构约束条件下搜索到的运动范围

通过这两个图的对比分析我们可以得出：

1. 在同样条件约束下解 2 的运动范围内可找到一个 200×150 mm 的平面范围，但是解 1 中不存在这样的解。
2. 解 2 的解分布更广更均匀，更符合我们的设计需要。而解 1 中分布不均。

因此，我们成功地找到了目标的运动范围而且可以确定解 2 为我们设计的目标解。从而可以舍去解 1。达到了设计预期效果。

4　结论

在五连杆并联机构存在双曲柄和存在目标运动范围的条件约束下确定各杆长度。提出了一种新的五连杆机器人运动范围的搜索方法。通过 MATLAB 计算分析搜索它的运动范围并添加机械约束进行优化，在此基础上得到了最优解和目标运动范围。

参考文献：

[1] 辛洪兵，余跃庆. 平面五杆并联机器人运动学导论[M]. 北京：国防工业出版社.2007.1

[2] Asada. H. Youcef-Toumi, Kamal. Analysis of and Design of a Direct-Drive Arm a Five-Bar-Link Parallel Drive Mechanism[J]. ASME Journal of Dynamic System Measurement and Control, 1984, 106(9): 225-230.

[3] Asada. H, Youcef-Toumi. Torque feedback of MIT Direct Drive Robot. Proc Of American Control Conference[R]. San Digo, 1984:663-670.

[4] 郑亚青, 刘雄伟. CNC雕刻机平面并联机构的运动学设计[J]. 华侨大学学报, 2002, 3(3):293-299.

[5] 李佳，廖汉元. 两自由度五杆铰链机构的有曲柄条件[J]. 机械传动, 2003, 27(1):18-19.