**数值实验上机报告(第六周)**

211240021 田铭扬

**一 问题**

一维热传导方程 周期边值问题，对于两个初值条件：  
固定网比，取空间网格数量，分别使用全显、全隐和CN格式求其数值解，并计算误差阶。

**二 数学推导与程序设计**

通过分离变量法易求得原PDE的通解为. 带入并进行Fourier展开，得到两个问题的真解分别为：  
后续实验表明，数值解的L2误差最低会达到量级；因此为避免真解的截断误差影响实验现象，直到当级数项的L2模小于时停止计算真解。

格式的推进均使用线性方程组的方式。当时有：  
全显 ；全隐 ,  
；CN格式 , .

**三 实验结果与分析**

实验结果如下列表格所示：

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **全显格式** | **初值(1)** | | **初值(2)** | |
| **J** | **L2误差** | **收敛阶** | **L2误差** | **收敛阶** |
| **18** | 3.9637e-03 |  | 3.8358e-03 |  |
| **36** | 6.9693e-02 | -4.14 | 8.8324e-04 | 2.12 |
| **72** | 3.4831e-02 | 1.00 | 2.1295e-04 | 2.05 |
| **144** | 1.7414e-02 | 1.00 | 5.2842e-05 | 2.01 |
| **288** | 8.7066e-03 | 1.00 | 1.3180e-05 | 2.00 |

表1. 全显格式实验结果

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **全隐格式** | **初值(1)** | | **初值(2)** | |
| **J** | **L2误差** | **收敛阶** | **L2误差** | **收敛阶** |
| **18** | 1.6176e-02 |  | 3.6644e-02 |  |
| **36** | 6.9702e-02 | -2.11 | 9.2327e-03 | 1.99 |
| **72** | 3.4832e-02 | 1.00 | 2.3161e-03 | 2.00 |
| **144** | 1.7414e-02 | 1.00 | 5.7941e-04 | 2.00 |
| **288** | 8.7066e-03 | 1.00 | 1.4488e-04 | 2.00 |

表2. 全隐格式结果

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **CN格式** | **初值(1)** | | **初值(2)** | |
| **J** | **L2误差** | **收敛阶** | **L2误差** | **收敛阶** |
| **18** | 6.2251e-03 |  | 1.6645e-02 |  |
| **36** | 6.9652e-02 | -3.48 | 4.1899e-03 | 1.99 |
| **72** | 3.4826e-02 | 1.00 | 1.0525e-03 | 1.99 |
| **144** | 1.7413e-02 | 1.00 | 2.6334e-04 | 2.00 |
| **288** | 8.7065e-03 | 1.00 | 6.5855e-05 | 2.00 |

表3. CN格式结果

如表所示，对于不连续的初值(1)，三种格式均表现出1阶收敛性；对于连续、但导数不连续的初值(2)，三种格式均表现出2阶收敛性。

关于绝对误差，三种格式对于初值(1)的表现近乎相同；但对于初值(2)，误差表现：全显格式好于CN格式、好于全隐格式，似乎与“常理”不符。而且将光滑的初值代入程序计算，与真解比较，如下表所示，误差表现与前面所述相同。说明这一现象不是初值不够光滑导致的。可能是因为笔者使用了Matlab中的“左除”操作，舍入误差表现较坏；也可能是全隐格式和CN格式确实“常数”较大，它们优势主要在于更宽松的稳定条件（以及CN的时间2阶）。

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **初值(3)/L2误差** | **全显格式** | **全隐格式** | **CN格式** |
| **J=288** | 3.6210e-05 | 8.7926e-05 | 2.5861e-05 |

表4. 光滑初值的结果

还有一种有趣的现象是，对于初值(1)，三种方法在J=18时的表现都比J更大时好许多。推测是因为18是“单偶数”，而36、72等等都是4的倍数，后者使初值(1)的间断点 也恰好是网格点，导致误差变坏。取另一“单偶数”J=286计算并对比，结果如下表，从而证实了笔者的推测。

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **初值(1)/L2误差** | **全显格式** | **全隐格式** | **CN格式** |
| **J=286** | 1.5030e-05 | 6.5112e-05 | 2.5043e-05 |
| **J=288** | 8.7066e-03 | 8.7066e-03 | 8.7065e-03 |

表5. J=266的结果

**四 结论**

在初值光滑性较差时，全显、全隐与CN格式也能保持一定的收敛阶。

**附一：Matlab代码**（用于表1 2 3）

format shortG

for J=[18,36,72,144,288]

d\_x=2\*pi/J; d\_t=0.4\*d\_x\*d\_x;

x\_array=transpose((-pi+d\_x):d\_x:pi);

N=ceil(1/d\_t); T=N\*d\_t;

ERR=0.0000001/sqrt(d\_x);

%Advancing Matrixes

B0=diag(ones(1,J)\*0.2)+diag(ones(1,J-1)\*0.4,1)+diag(ones(1,J-1)\*0.4,-1);

B0(1,J)=0.4; B0(J,1)=0.4;

B1=diag(ones(1,J)\*1.8)-diag(ones(1,J-1)\*0.4,1)-diag(ones(1,J-1)\*0.4,-1);

B1(1,J)=-0.4; B1(J,1)=-0.4;

B0\_2=diag(ones(1,J)\*0.6)+diag(ones(1,J-1)\*0.2,1)+diag(ones(1,J-1)\*0.2,-1);

B0\_2(1,J)=0.2; B0\_2(J,1)=0.2;

B1\_2=diag(ones(1,J)\*1.4)-diag(ones(1,J-1)\*0.2,1)-diag(ones(1,J-1)\*0.2,-1);

B1\_2(1,J)=-0.2; B1\_2(J,1)=-0.2;

for m=1:2

if m==1 %Initial Value 1 + Real Solution

u0=zeros(J,1);

for j=1:J

if(j>=J/4 && j<=3\*J/4)

u0(j)=1;

end

end

u1=0.5\*ones(J,1);

u\_tmp=ones(J,1);

i=0;

while norm(u\_tmp)>ERR

%让级数的相邻误差在10^-7量级，比pde数值解的误差小至少2个量级

i=i+1; nn=2\*i-1;

u\_tmp=2\*(2\*mod(i,2)-1)\*cos(nn\*x\_array)\*exp(-nn\*nn\*T)/nn/pi;

u1=u1+u\_tmp;

end

else %Initial Value 2 + Real Solution

u0=pi\*ones(J,1)-abs(x\_array);

u1=pi\*ones(J,1)/2;

u\_tmp=ones(J,1);

nn=-1;

while norm(u\_tmp)>ERR

nn=nn+2;

u\_tmp=4\*cos(nn\*x\_array)\*exp(-nn\*nn\*T)/pi/nn/nn;

u1=u1+u\_tmp;

end

end

for k=1:3

u=u0;

if k==1 %Fully Explicit Scheme

for n=1:N

u=B0\*u;

end

elseif k==2 %Fully Implicit Scheme

for n=1:N

u=B1\u;

end

else %Crank-Nicolson Scheme

for n=1:N

u=B1\_2\(B0\_2\*u);

end

end

[J,m,k,norm(u-u1)\*sqrt(d\_x),norm(u-u1,"inf")] %Output

end

end

end

**附二：原始数据**

J 初值 算法 L2模误差 无穷模误差

18 1 1 0.0039637 0.0022211

18 1 2 0.016176 0.0089566

18 1 3 0.0062251 0.0034887

18 2 1 0.0038358 0.0021753

18 2 2 0.036644 0.020792

18 2 3 0.016645 0.0094079

36 1 1 0.069693 0.028972

36 1 2 0.069702 0.029133

36 1 3 0.069652 0.02879

36 2 1 0.00088324 0.00050221

36 2 2 0.0092327 0.0052241

36 2 3 0.0041899 0.0023678

72 1 1 0.034831 0.014419

72 1 2 0.034832 0.014443

72 1 3 0.034826 0.014398

72 2 1 0.00021295 0.00012125

72 2 2 0.0023161 0.00131

72 2 3 0.0010525 0.00059481

J 初值 算法 L2模误差 无穷模误差

J 初值 算法 L2模误差 无穷模误差

144 1 1 0.017414 0.0072013

144 1 2 0.017414 0.0072045

144 1 3 0.017413 0.0071988

144 2 1 5.2842e-05 3.0098e-05

144 2 2 0.00057941 0.00032769

144 2 3 0.00026334 0.00014882

288 1 1 0.0087066 0.0035998

288 1 2 0.0087066 0.0036002

288 1 3 0.0087065 0.0035994

288 2 1 1.318e-05 7.5076e-06

288 2 2 0.00014488 8.1939e-05

288 2 3 6.5855e-05 3.7217e-05

288 3 1 3.621e-05 2.0429e-05

288 3 2 8.7926e-05 4.9607e-05

288 3 3 2.5861e-05 1.459e-05

286 1 1 1.503e-05 8.3644e-06

286 1 2 6.5112e-05 3.6438e-05

286 1 3 2.5043e-05 1.4039e-05

J 初值 算法 L2模误差 无穷模误差