



# Politecnico di Torino

Corso di Laurea Magistrale In Ingegneria Aerospaziale  
A.a. 2020/2021

## Studio numerico di flussi separati in ugelli propulsivi

Relatori:

Francesco Larocca  
Andrea Ferrero

Candidato:

Fatjon Tosku

Tutor aziendale:

Elia Cipolato



*Ad Edona.*

## Sommario

Nel campo Aerospaziale l'utilizzo della fluidodinamica computazionale (CFD) ha assunto una particolare rilevanza. In passato, in fase di progettazione, molti fenomeni fisici potevano essere studiati esclusivamente mediante l'analisi sperimentale ma questo, in termini di costi, tempi e difficoltà di analisi richiedeva risorse molto elevate. Per far fronte a queste difficoltà si sono sviluppati strumenti di fluidodinamica computazionale che sono in grado di fornire risultati sempre più accurati e vicini ai risultati sperimentali.

Il seguente lavoro di tesi è dedicato allo studio del flusso in un ugello convergente-divergente mediante diversi modelli di turbolenza RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes). L'ugello in utilizzo è un ugello TIC (Truncated Ideal Contour) che lavora in condizioni di sovraespansione con separazione nel divergente.

Lo scopo della tesi è verificare l'influenza del modello di turbolenza utilizzato nella previsione della separazione. I risultati ottenuti sono stati confrontati con dati sperimentali disponibili in letteratura.

Il lavoro è stato condotto in collaborazione con MSC software Corporation, utilizzando il codice Cradle CFD e in particolare il tool scFlow che permette di gestire discretizzazioni non strutturate.

## **Abstract**

In the Aerospace field the use of Computational Fluid Dynamics (CFD) has assumed a particular relevance. In the past, during the design phase, many physical phenomena could be studied exclusively through experimental analysis but this, in terms of cost, time and difficulty of analysis required very high resources. To cope with these difficulties, computational fluid dynamics tools have been developed that are able to provide increasingly accurate results that are close to experimental results.

The following thesis work is devoted to the study of the flow in a convergent-divergent nozzle by means of different RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes) turbulence models. The nozzle in use is a TIC (Truncated Ideal Contour) nozzle operating under over-expansion conditions with separation in the divergent.

The purpose of this thesis is to verify the influence of the turbulence model used in the prediction of separation. The results obtained have been compared with experimental data available in the literature.

The work has been conducted in collaboration with MSC software Corporation, using the Cradle CFD code and in particular the scFlow tool that allows to handle unstructured discretizations.

# **Ringraziamenti**

Ringrazio il professor Francesco Larocca e il professor Andrea Ferrero per la disponibilità, l'attenzione e il sostegno dimostrati durante la stesura della tesi.

Vorrei inoltre esprimere un sincero ringraziamento all'ingegnere Elia Cipolato che mi ha seguito scrupolosamente nel mio lavoro.

# Indice

<b>Ringraziamenti</b>	<b>1</b>
<b>Elenco delle figure</b>	<b>4</b>
<b>1 Introduzione</b>	<b>7</b>
1.1 Utilizzo della CFD in campo aerospaziale . . . . .	7
1.2 Descrizione del fenomeno di separazione e del lavoro di tesi . . . . .	8
<b>2 Fenomeno fisico</b>	<b>9</b>
2.1 Introduzione all'ugello . . . . .	9
2.2 Geometria dell'ugello TIC . . . . .	12
2.3 Il fenomeno della separazione . . . . .	15
2.3.1 Suddivisione dello strato limite . . . . .	16
2.4 Separazione negli ugelli . . . . .	17
2.5 Carichi laterali negli ugelli . . . . .	21
<b>3 Equazioni di Governo</b>	<b>23</b>
3.1 Volume di controllo finito . . . . .	24
3.2 Equazioni di Navier-Stokes in forma integrale . . . . .	25
3.2.1 Legge di conservazione della massa (o di continuità) . . . . .	25
3.2.2 Legge della quantità di moto . . . . .	25
3.2.3 Equazione dell'energia . . . . .	26
3.2.4 Tensore degli sforzi . . . . .	27
3.2.5 Sistema completo delle equazioni di Navier-Stokes . . . . .	28
<b>4 Modelli di Turbolenza</b>	<b>31</b>
4.1 Equazioni di governo della turbolenza . . . . .	32
4.1.1 Media alla Reynolds . . . . .	33
4.1.2 Media alla Favre . . . . .	34
4.1.3 Media alla Favre e Reynolds delle equazioni di Navier Stokes	36
4.1.4 Eddy-viscosity, ipotesi di Boussinesq . . . . .	37

4.1.5	Equazioni di trasporto dello sforzo di Reynolds . . . . .	38
4.2	Modelli di turbolenza con chiusura al primo ordine . . . . .	39
4.2.1	Spalart-Allmaras modello a un equazione . . . . .	39
4.2.2	Modello $K - \varepsilon$ . . . . .	40
4.2.3	SST $K - \omega$ , modello a due equazioni . . . . .	42
<b>5</b>	<b>Discretizzazione spaziale</b>	<b>45</b>
5.1	Metodo ai volumi finiti . . . . .	47
5.2	Metodo ai volumi finiti per griglia non strutturata . . . . .	49
5.2.1	Schema cella centrata . . . . .	51
5.2.2	Schema cella vertice median-dual . . . . .	52
5.2.3	Confronto tra schema cella-centrato e cella-vertice . . . . .	53
<b>6</b>	<b>Analisi CFD e risultati</b>	<b>56</b>
6.1	Descrizione di sc-Flow . . . . .	56
6.2	Geometria e dominio . . . . .	56
6.2.1	Condizioni al contorno . . . . .	58
6.3	Generazione della mesh e della struttura Octree . . . . .	59
6.4	Risultati modello $K - \omega$ . . . . .	63
6.4.1	Commento . . . . .	66
6.5	Risultati modello $K - \varepsilon$ . . . . .	66
6.5.1	Commento . . . . .	69
6.6	Risultati modello <i>Spalart – Allmaras</i> . . . . .	69
6.6.1	Commento . . . . .	73
<b>7</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>74</b>
<b>Bibliografia</b>		<b>75</b>

# Elenco delle figure

2.1	Schema di una sezione di prova di un endoreattore in orizzontale [11]	9
2.2	Schema di un ugello in un endoreattore [8]	10
2.3	(a) Prestazioni per diversi ugelli (b) Fenomeno di flusso sovraespanso, attaccato, sottoespanso [9]	12
2.4	Campo di moto interno per ugelli di diversa forma [9]	13
2.5	Ugello ideale creato col metodo delle linee caratteristiche di lunghezza $L \approx 50r_t$ [1]	14
2.6	Schema di Ahlberg J.H. per troncare un ugello ideale dato i vincoli di progetto [1]	14
2.7	Ugello TIC con $L \approx 18r_t$ ottenuto troncando l'ugello ideale con il metodo di Ahlberg J.H. [1]	15
2.8	Generico profilo di velocità dello strato limite e linee di corrente con transizione a separazione [6]	16
2.9	Esempi di interazione tra onde d'urto e strato limite per flusso supersonico con parete di diversa geometria. a)Rampa. b) Piana. c) Gradino [9]	17
2.10	Profilo di velocità strato limite [7]	18
2.11	Modelli di separazione con punti caratteristici: a) Separazione shock libero. b) Separazione d'urto ristretta.[9]	19
2.12	Visualizzazione dei fenomeni fisici generati dalla separazione negli ugelli sovraespansi [9]	20
2.13	Confronto dei modelli si separazione per rapporto di separazione con risultati sperimentali [5]	21
3.1	Definizione di volume di controllo finito (fisso nello spazio) [2]	24
3.2	Forze superficiali che agiscono su un elemento di superficie del volume di controllo [2]	26
3.3	Sforzi normali (a) e di taglio (b) che agiscono su un elemento fluido finito. [2]	28
4.1	Modelli di turbolenza ordinati secondo livello di complessità [2]	31

4.2	Mediazione alla Reynolds - Grafico delle fluttuazioni della velocità turbolenta $v'$ e del valore medio statistico $\bar{v}$ [2] . . . . .	35
5.1	Tipologie di griglie [2] . . . . .	45
5.2	Esempi di griglie strutturate body-fitted nel caso 2D [2] . . . . .	46
5.3	Esempi di griglie strutturate body-fitted nel caso 2D [2] . . . . .	47
5.4	Griglia mista non strutturata nel caso 2D [2] . . . . .	47
5.5	Visualizzazione di griglia strutturata e non strutturata 3D su Cradle CFD [3] . . . . .	48
5.6	(a) Volume di controllo cella centrato. (b) Volume di controllo cella vertice (dual control). [2] . . . . .	49
5.7	Esempio di mesh mista 3D non strutturata [3] . . . . .	50
5.8	Schema cella centrato in un volume di controllo 2D [2] . . . . .	51
5.9	Volume di controllo di uno schema median-dual 2D [2] . . . . .	52
5.10	Confronto tra volumi di controllo (a) schema median-dual (b) contrainment-dual con griglia triangolare stirata [2] . . . . .	53
5.11	Posizione del centroide in una generica mesh 3D poliedrica [3] . . . . .	54
6.1	Spicchio del dominio di 5° con mesh . . . . .	57
6.2	Dati e elementi in una vista schematica 2D in sc-Flow [3] . . . . .	57
6.3	Dominio completo utilizzato per lo studio . . . . .	58
6.4	Rappresentazione della scelta delle regioni . . . . .	59
6.5	Scheda condizioni al contorno . . . . .	60
6.6	Scheda Octree con dominio . . . . .	61
6.7	Dominio con Mesh . . . . .	61
6.8	Confronto tra punti sperimentalni e soluzioni all'aumentare dei prismi a parete. . . . .	62
6.9	Prism layer e mesh vicino a parete nella sezione d'uscita . . . . .	62
6.10	Campo di Mach . . . . .	63
6.11	Punto di separazione nel campo di Mach . . . . .	63
6.12	Linee di corrente . . . . .	64
6.13	Linee di corrente disco di Mach . . . . .	64
6.14	Campo di pressione in scala logaritmica . . . . .	65
6.15	Confronto tra dati sperimentalni e modello $k - \omega$ . . . . .	65
6.16	Campo di Mach . . . . .	66
6.17	Punto di separazione nel campo di Mach . . . . .	67
6.18	Linee di corrente . . . . .	67
6.19	Linee di corrente disco di Mach . . . . .	68
6.20	Campo di pressione in scala logaritmica . . . . .	68
6.21	Confronto tra dati sperimentalni e modello $k - \varepsilon$ . . . . .	69
6.22	Campo di Mach . . . . .	70

6.23 Punto di separazione nel campo di Mach . . . . .	70
6.24 Linee di corrente . . . . .	71
6.25 Linee di corrente disco di Mach . . . . .	71
6.26 Campo di pressione in scala logaritmica . . . . .	72
6.27 Confronto tra dati sperimentali e modello $k - \varepsilon$ . . . . .	72
7.1 Confronto tra dati sperimentali e modelli di turbolenza RANS . . .	74

# Capitolo 1

## Introduzione

### 1.1 Utilizzo della CFD in campo aerospaziale

Per molto tempo nel campo della fluidodinamica l'unico modo per studiare un fenomeno fisico ed ottenere dei risultati concreti era la fluidodinamica sperimentale, questo per la limitatezza nel risolvere analiticamente questi problemi perché i modelli matematici che descrivono la meccanica e la termodinamica dei fluidi sono sistemi di equazioni differenziali irrisolvibili analiticamente, tranne per pochi casi semplici.

Negli anni quindi si è dovuto sviluppare un nuovo strumento per risolvere i sistemi di equazioni differenziali che caratterizzano la fluidodinamica, questo nuovo strumento è la CFD (computational fluid dynamics) che consiste nella risoluzione numerica dei sistemi di equazione. All'inizio fù limitata in quanto le risorse computazionali erano molto scarse, oggi invece ha un ruolo da protagonista in fase di progettazione in campo aerospaziale, ma anche in altri ambiti ingegneristici, i codici utilizzati sono molto precisi e questo è un vantaggio rispetto allo studio sperimentale perché i tempi di calcolo delle simulazioni CFD possono essere relativamente ridotti, invece nell'aerodinamica sperimentale ci sono tempi molto lunghi dovuti a: allestimento della catena di misurata; costruzione modello; costi elevati dovuti alla galleria del vento e modello; modifiche al modello in fase di studio. La CFD ha risolto molte problematiche nello studio della fluidodinamica ma risente ancora di alcune limitazioni come l'incertezza legata alla modellazione della turbolenza, ma comunque al giorno d'oggi entrambe le tecniche vengono utilizzate sia in fase di progettazione in quanto i risultati della CFD vanno validati attraverso l'approccio sperimentale. Nel campo della propulsione aerospaziale come nel lavoro di questa tesi la CFD è fondamentale perché risolve molte problematiche, come descritto prima, in termini di tempistiche e costi e i risultati che si ottengono sono molto precisi.

## **1.2 Descrizione del fenomeno di separazione e del lavoro di tesi**

Le prestazioni dei motori a razzo sono fortemente dipendenti dal design aerodinamico dell'ugello di espansione, i principali parametri di progettazione sono la forma del profilo e il rapporto di area. La progettazione ottimale degli ugelli tradizionali a campana per determinate condizioni operative (essenzialmente dal rapporto tra pressione totale in camera e pressione statica dell'ambiente, Nozzle Pressure Ratio-NPR) è già supportata da strumenti accurati e validati. Tuttavia, durante il funzionamento in condizioni di forte sovraespansione si può manifestare una separazione nel divergente. La linea di separazione si muoverà verso l'uscita dell'ugello quando la pressione della camera di combustione aumenta (durante l'avvio) o quando la pressione ambiente diminuisce (durante la salita dei veicoli).

Nell'ugello quando il flusso è separato si verificano diverse tipologie di carichi dinamici, il più noto di questi è il cosiddetto carico laterale. Gli ugelli usati nei primi stati dei lanciatori devono lavorare dal livello del mare fino a condizioni prossime al vuoto: al fine di massimizzare le prestazioni medie sarebbe utile scegliere rapporti di area relativamente elevati ma questi indurrebbero separazione incontrollate al decollo con il conseguente rischio di pericolosi carichi laterali. Una possibile soluzione del problema appena descritto è quella di adottare dispositivi di adattamento dove l'ugello durante il volo modifica la propria geometria e si adatta ai cambiamenti di pressione ambientale e della camera di combustione, ma queste soluzioni sono eccessivamente complesse e pesanti. Un altro approccio è quello di introdurre i cosiddetti dispositivi di controllo della separazione del flusso (FSCD), con i quali gli ugelli ad alto rapporto d'area possono essere azionati in condizioni di separazione ad alta pressione ambientale a livello del mare senza carichi pesanti, ottenendo così un miglioramento delle prestazioni complessive.

Questo lavoro di tesi verte nel studiare il fenomeno della separazione in un ugello TIC (Truncated Ideal Contour) convergente-divergente, che lavora in condizioni di sovraespansione con fenomeno di separazione nel divergente attraverso modelli di turbolenza RANS. In particola si è verificata l'influenza del modello di turbolenza utilizzato nella previsione della separazione e si sono confrontati i risultati ottenuti con i dati sperimentali disponibili in letteratura. Viene riportata una descrizione dettagliata del fenomeno fisico, equazioni di governo e modelli di turbolenza al fine di introdurre al meglio possibile lo studio effettuato.

# Capitolo 2

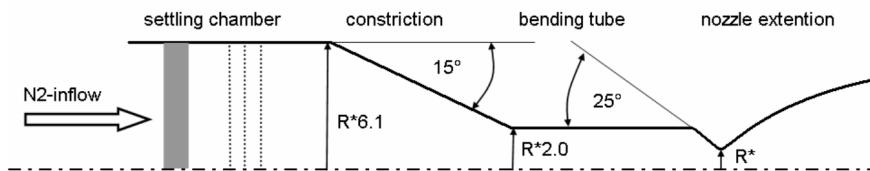
## Fenomeno fisico

### 2.1 Introduzione all'ugello

Nel campo della propulsione spaziale il sistema principale è l'endoreattore, che immagazzina della massa di propellente e la espelle a velocità elevatissime attraverso l'**ugello** con lo scopo di generare forza che è esprimibile attraverso la seconda legge di Newton come:

$$F = m \frac{dv}{dt} \quad \text{oppure} \quad F = \dot{m}c \quad (2.1)$$

dove  $c$  corrisponde alla velocità efficace di scarico. Questa forza prodotta dal motore del razzo si chiama *spinta* e l'ugello permette di accelerare le particelle del propellente a velocità e direzione desiderata. Uguagliando le due relazioni scritte



**Figura 2.1:** Schema di una sezione di prova di un endoreattore in orizzontale [11]

sopra e considerando una massa variabile ( $\dot{m} = -\frac{dm}{dt}$ ) che per un endoreattore non è trascurabile si trova:

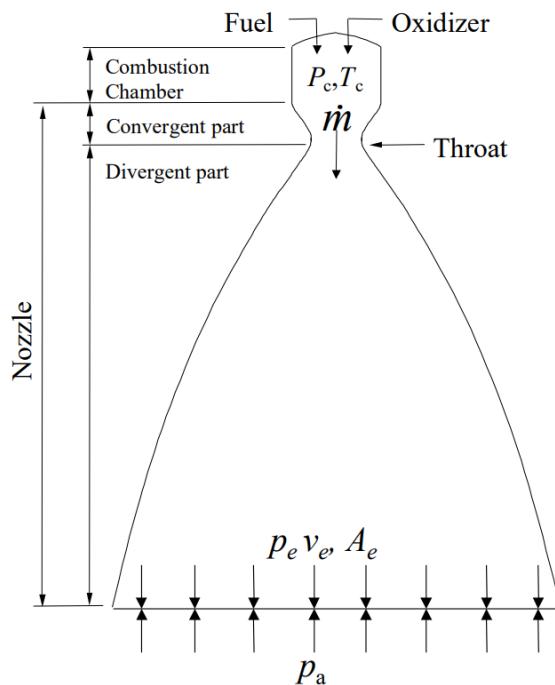
$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{dt} c \quad (2.2)$$

Questa relazione si può integrare facilmente, assumendo  $c = \text{cost}$ , ottenendo così la **legge di Tsiolkowsky-Obert** (chiamata anche equazione del razzo) che fornisce una variazione di velocità a fronte di un certo utilizzo di massa: [4]

$$\Delta V_{ideale} = c \cdot \ln\left(\frac{m_i}{m_f}\right) \quad (2.3)$$

dove  $\Delta V$  è ideale nel caso in cui  $F$  sia parallela a  $V$  (spinta sempre in direzione della velocità), in cui non ci sia resistenza aerodinamica e in cui non ci sia l'effetto di un campo gravitazionale.

L'ugello è la parte del vettore che si estende oltre la camera di combustione. Nella camera i propellenti vengono iniettati, miscelati, bruciati e deve avere lunghezza sufficiente a permettere la combustione completa dei propellenti al suo interno prima che l'ugello acceleri i gas combusti. L'ugello inizia nel punto in cui il diametro della camera inizia a diminuire, la prima parte dell'ugello ha sezione convergente con lo scopo di fornire un accelerazione subsonica al flusso in uscita dalla camera di combustione ( $Mach < 1$ ) fino all'area di gola (dove la sezione è minima) dove il numero di Mach sarà unitario. La seconda parte dell'ugello ha una geometria con un area crescente, tratto divergente, e ha lo scopo di accelerare il flusso in maniera supersonica ( $Mach > 1$ ). Nel flusso supersonico le equazioni di Eulero sono iperboliche, cioè il flusso è determinato solo dalle condizioni a monte.



**Figura 2.2:** Schema di un ugello in un endoreattore [8]

Quindi l'ugello accelera i gas combusti ad una velocità supersonica e la velocità in uscita dipende dal rapporto di espansione  $\varepsilon$  dell'ugello, ovvero il rapporto tra l'area di uscita  $A_e$  e l'area di gola  $A_t$ . In un ugello ideale la spinta in uscita è la massima possibile e la pressione in uscita è alla pressione ambiente e per definizione espande il flusso isentropicamente producendo un flusso parallelo uniforme in uscita

ad rapporto d'espansione o numero di Mach prescritto. Il rapporto d'espansione  $\varepsilon$  e la pressione in uscita dell'ugello  $p_e$  si possono scrivere come:

$$\varepsilon = \frac{A_e}{A_t} = \frac{1}{M_e} \sqrt{\left[ \frac{2}{\gamma + 1} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 \right) \right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}} \quad (2.4)$$

$$p_e = p_c \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \quad (2.5)$$

$\gamma$  corrisponde al calore specifico legato alla chimica del gas. Nella propulsione è possibile scrivere la spinta  $F$  prodotta dall'ugello come:

$$F = (\dot{m} v_e + p_e A_e) - p_a A_e = C_F p_c A_t = \dot{m} c = \dot{m} I_{sp} g_0 \quad (2.6)$$

$C_F$  è il coefficiente di spinta adimensionale,  $\dot{m}$  la portata massica del motore e  $I_{sp}$  è l'impulso specifico in  $[s]$ .  $v_e$  e  $p_e$  sono valori medi della velocità e della pressione sull'area d'uscita dell'ugello.

$$C_F = \frac{F}{p_c A_t} = \frac{\dot{m} w_e + A_e (p_e - p_o)}{p_c A_t} = \Gamma \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \left[ 1 - \left( \frac{p_e}{p_c} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} + \varepsilon \left( \frac{p_e}{p_c} - \frac{p_o}{p_c} \right) \quad (2.7)$$

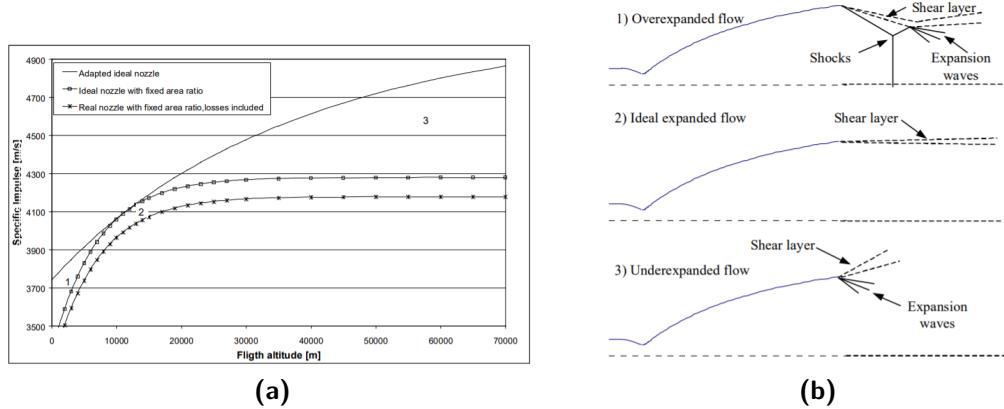
Il  $C_F$  dà l'amplificazione della spinta e dipende da  $C_F = f(\gamma, \varepsilon, \frac{p_o}{p_c})$  ed è massimo quando  $\frac{p_o}{p_c} = 0$  ovvero nel vuoto,  $I_{sp}$  misura l'efficienza con cui la portata di propellente viene trasformata in spinta ed usando le relazioni isentropiche si può esprimere come:

$$c_{id} = g_0 I_{sp,id} = \frac{F}{\dot{m}} = v_e + A_e \frac{p_e - p_a}{\dot{m}} = \sqrt{\frac{2\gamma R T_c}{\gamma - 1} \left[ 1 - \left( \frac{p_e}{p_c} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} + \sqrt{\frac{R T_c}{\gamma} \left[ \frac{2}{\gamma + 1} \right]^{\frac{\gamma+1}{1-\gamma}} \varepsilon} \frac{p_e - p_a}{p_c} \quad (2.8)$$

$R$  è la costante del gas e  $T_c$  la temperatura totale in camera di combustione. Le prestazioni ottimali per un endoreattore si ottiene quando  $p_e = p_a$ . Questi fattori fanno in modo che gli ugelli adattati vengano utilizzati solo in ambito sperimentale, invece al vero si utilizza un ugello con rapporto di espansione fisso e questo perché in fase di progettazione bisogna trovare un compromesso in base alla missione del vettore.

Nel caso al vero dove si utilizzano ugelli a geometria fissa, qualsiasi operazione fuori progetto con flusso sovraespanso oppure sottoespanso inducono perdite intrinseche in termini prestazionali che possono salire fino al 15% rispetto a ugello adattato. In generale i rapporti di area dei motori principali usati nei primi stadi vengono scelti come compromesso tra la necessità di avere buone prestazioni medie e la necessità di evitare separazioni incontrollate e carichi laterali al decollo. Quindi si

deve soddisfare il requisito di avere un funzionamento stabile a terra ma allo stesso tempo elevate prestazioni in vuoto e per fare questo bisogna progettare un ugello altamente sovraespanso che a livello del mare operi a flusso pieno ma ad alta quota ( $p_a = 0$ ) sia in sottoespanso. In 2.3a si è riportato il grafico dell'impulso specifico



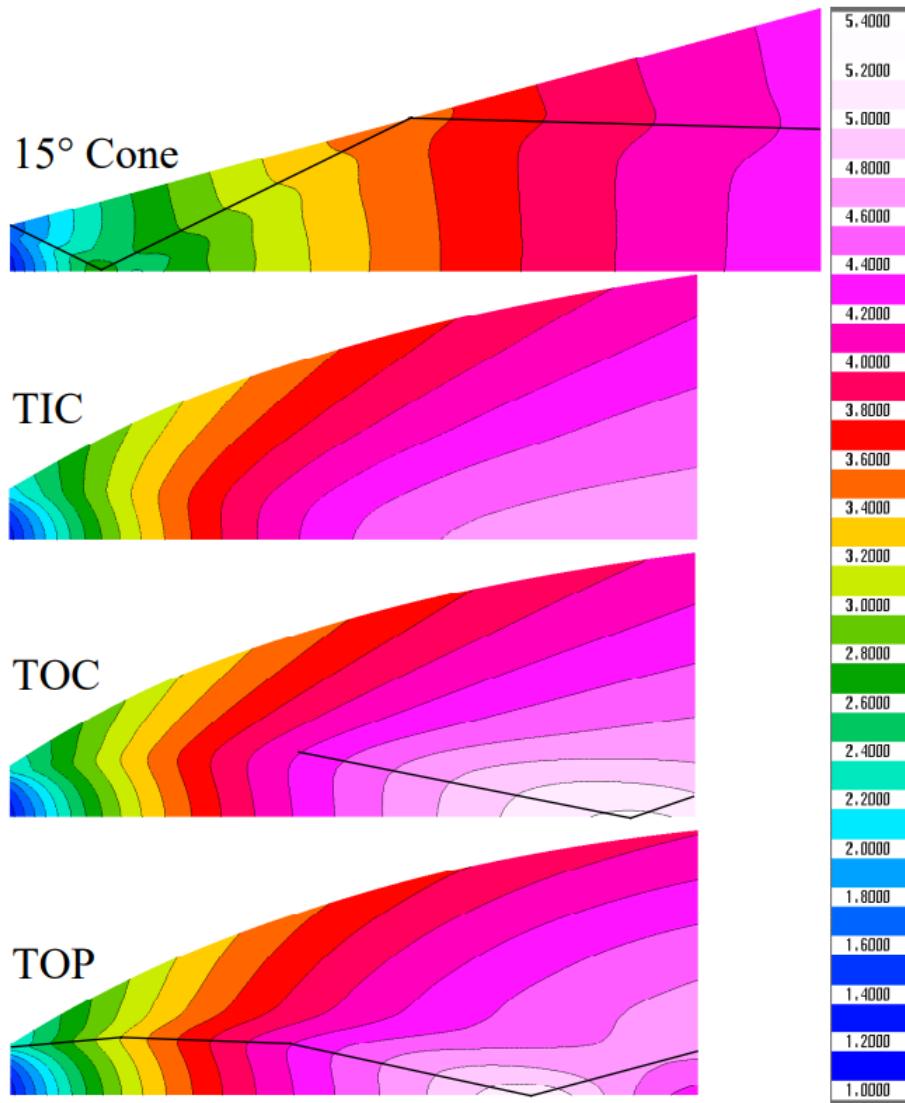
**Figura 2.3:** (a) Prestazioni per diversi ugelli (b) Fenomeno di flusso sovraespanso, attaccato, sottoespanso [9]

in funzione dell'altitudine per tre diversi ugelli. Invece 2.3b mostra il fenomeno di flusso sovraespanso, attaccato, sottoespanso e i fenomeni fisici che originano.

In letteratura esistono diverse tipologie di ugelli convergenti-divergenti per endoreattori, ed ognuno dei quali genera il proprio campo di flusso interno e quindi è importante sapere la forma dell'ugello per studiarne separazione e carichi laterali. In figura 2.4 si è riportato dei esempi. Gli ugelli per i motori a razzo sono soggetti a tre tipologie di perdite: perdite geometriche; perdite per resistenza viscosa; perdite cinetiche chimiche. Gli effetti combinati di queste tre perdite si possono tradurre in un'efficienza complessiva dell'ugello  $\eta_{nozzle}$ . Generalmente negli ugelli l'efficienza varia tra  $0.9 < \eta_{nozzle} < 0.98$  infatti il profilo dell'ugello deve essere un compromesso progettuale per ottenere la massima efficienza complessiva possibile.

## 2.2 Geometria dell'ugello TIC

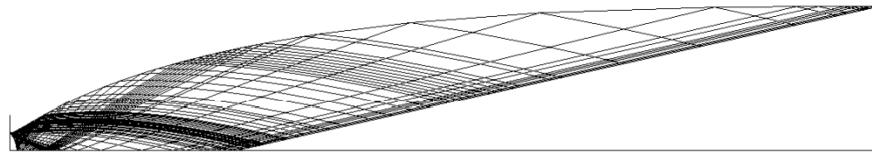
Nel campo della propulsione aerospaziale si dovrebbe sempre usare un ugello ideale 2.3b perché il flusso in uscita è uniforme ed attaccato ma è infattibile a livello progettuale perché ci sono diverse difficoltà d'applicazione. Una di queste difficoltà riguarda la lunghezza, possiamo osservare che questo ugello, mostrato in figura 2.5, ha lunghezza  $L \approx 50r_t$  ( $r_t$  raggio gola) e questo in campo pratico non è fattibile perché è troppo lungo. Per i motori a razzo vengono utilizzati gli ugelli TIC



**Figura 2.4:** Campo di moto interno per ugelli di diversa forma [9]

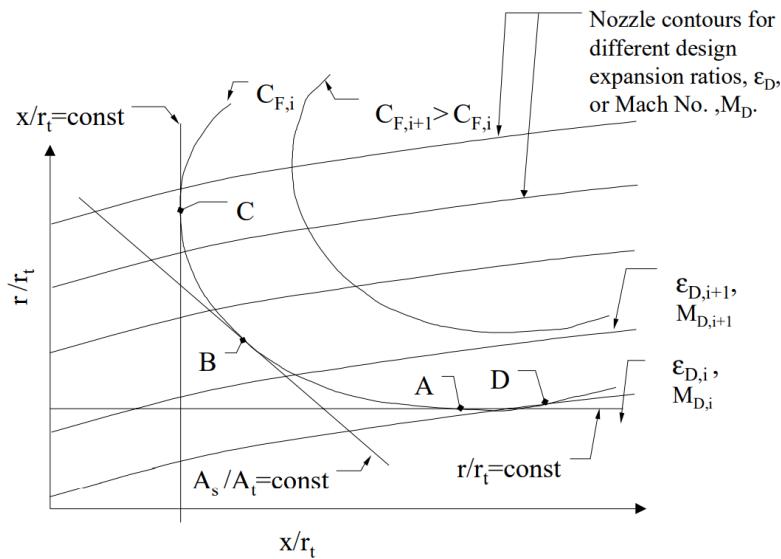
(Truncad Ideal Contours), questi ugelli si ottengono andando a troncare il profilo di un ugello ideale il quale profilo viene costruito attraverso il metodo delle linee caratteristiche (MOC) e il punto dove effettuare questo troncamento viene descritto dalla tecnica grafica di Ahlberg J.H. [1]

Dati i vincoli di progetto come possono essere il rapporto di espansione  $\varepsilon$ , la superficie o la lunghezza, si sintetizzano una serie di profili di ugelli insieme a delle linee che rappresentano la superficie costante, il diametro di uscita, la lunghezza e il  $C_F$  a vuoto e attraverso un processo di ottimizzazione si determina dove troncare il



**Figura 2.5:** Ugello ideale creato col metodo delle linee caratteristiche di lunghezza  $L \approx 50r_t$  [1]

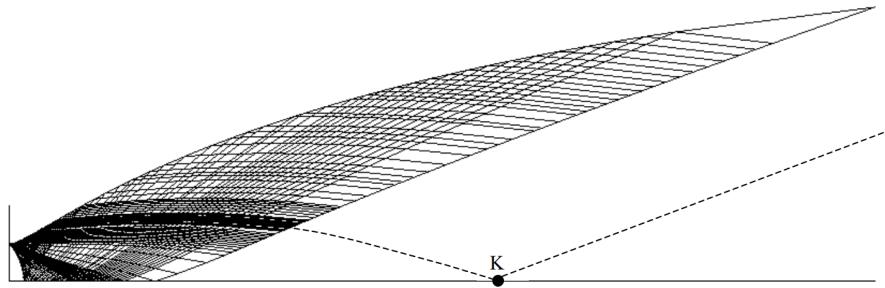
profilo completo dell'ugello al fine di ottenere il massimo delle prestazioni. Quello



**Figura 2.6:** Schema di Ahlberg J.H. per troncare un ugello ideale dato i vincoli di progetto [1]

appena scritto possiamo vederlo nel grafico 2.6, il punto  $A$  è il punto in cui il coefficiente di spinta  $C_F$  è tangente ad una linea di raggio costante  $r/r_t$  questo punto rappresenta il punto di uscita dell'ugello in cui si ha spinta massima ad un dato  $\varepsilon$ . Nel punto  $B$  il  $C_F$  è tangente alla linea di superficie costante  $A_s/A_t$  e rappresenta il punto di ottimo per una data superficie, l'ugello con massime prestazioni ad una data lunghezza è rappresentato dal punto  $C$ . Il punto  $D$  invece rappresenta la massima spinta ottenibile ad un dato profilo dell'ugello e oltre questo punto l'attrito delle pareti diventa maggiore delle forze di pressione generando così un contributo negativo della spinta ma questa tipologia di TIC non sono molto pratici in quanto gli ugelli del punto  $A$  a parità di spinta hanno dimensione più piccola. Si riporta in figura 2.7 il troncamento di un ugello ideale con il metodo

appena descritto e possiamo notare che l'ugello TIC rispetto a quello ideale ha una lunghezza meno della metà e questo è ottimo in campo della propulsione.



**Figura 2.7:** Ugello TIC con  $L \approx 18r_t$  ottenuto troncando l'ugello ideale con il metodo di Ahlberg J.H. [1]

## 2.3 Il fenomeno della separazione

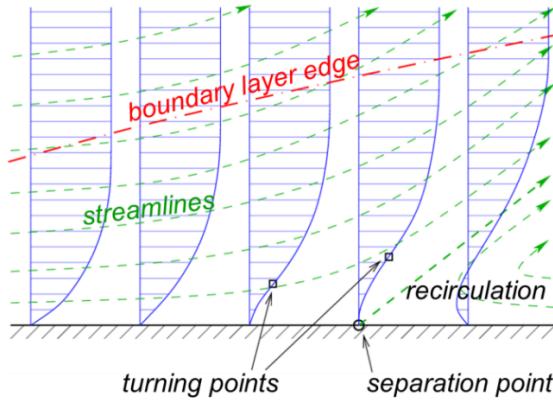
Il campo di moto attorno a un corpo può essere schematizzato in due regioni. La prima regione vicino a parete dove dominano gli sforzi d'attrito e della dissipazione si chiama strato limite, invece la regione dove gli effetti dell'attrito vengono trascurati è la regione indisturbata. Nello strato limite il flusso a parete deve soddisfare la condizione di aderenza (no-slip), questo significa che la velocità del fluido in corrispondenza della superficie del corpo deve assumere esattamente la velocità del corpo. La pressione statica della corrente esterna e interna allo strato limite si mantiene costante  $p(y) = p_w = \text{costante}$ .

Quando il gradiente di pressione a parete risulta favorevole oppure nullo il flusso è attaccato e il profilo di velocità segue l'andamento da letteratura come 2.10, quando invece la pressione a parete aumenta nella direzione del flusso l'energia cinetica delle particelle fluide si trasforma in energia potenziale e questo aumento di pressione provoca un effetto decelerante fino a provocare uno scorrimento in direzione opposta al flusso. Questo provoca lo separazione dello strato limite alla parete andando a crearsi un ricircolo di flusso in prossimità della parete come si può vedere dal grafico e lo sforzo d'attrito nel punto di separazione è nullo 2.9.

$$\tau_w = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_w = 0 \quad (2.9)$$

Il fenomeno della separazione nasce quando domina lo sforzo d'attrito e si ha un gradiente di pressione avverso 2.10 a parete lungo il corpo, se una di queste due condizioni manca allora non è detto che ci sia separazione.

$$\frac{\partial p}{\partial x} > 0 \quad (2.10)$$



**Figura 2.8:** Generico profilo di velocità dello strato limite e linee di corrente con transizione a separazione [6]

Quando un flusso supersonico è soggetto a gradiente di pressione avverso esso si adatta al livello di pressione superiore attraverso una serie di onde d'urto. Si può dire che il fenomeno della separazione in un flusso supersonico è un processo che combina l'interazione di onde d'urto.

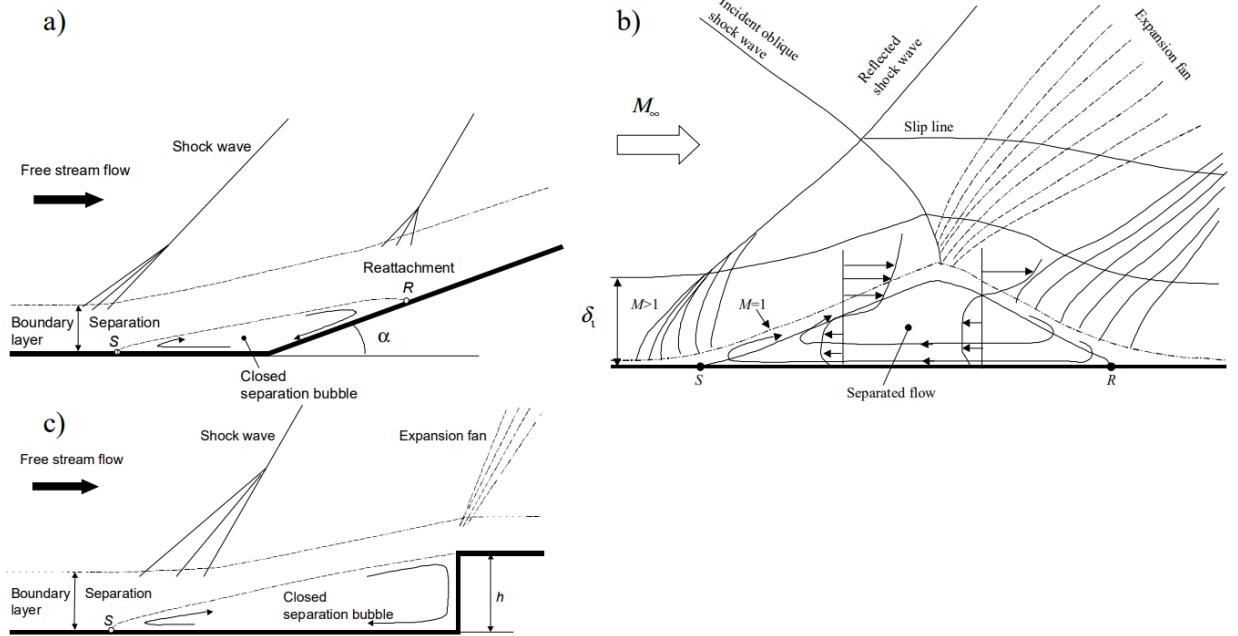
Le configurazioni 2.9 coinvolgono tutte l'interazione tra onda d'urto e strato limite per flussi supersonici. Il flusso in entrata, per tutte e tre le configurazioni, è uniforme e possiamo vedere che per la configurazione a) si forma una discontinuità nella direzione della parete da cui si forma l'onda d'urto dove il flusso supersonico subisce una deflessione pari all'angolo della rampa. Nella configurazione b) l'interazione del fascio di onde di compressione provoca un urto obliquio che deflette le linee di corrente, a valle il flusso deve essere di nuovo parallelo alla parete e questo avviene grazie a un urto riflesso che si forma nel punto di impingement. Nello schema c) vi è riportato un gradino che ostacola la corrente che provoca la separazione del flusso nel punto S, la bolla di separazione genera delle onde di compressione che convergono in un'onda d'urto. Dallo spigolo del gradino si genera un fascio di espansione.

### 2.3.1 Suddivisione dello strato limite

Lo strato limite, che può essere di natura laminare oppure turbolenta, si divide in due regioni:[7]

- Inner-Layer
- Outer-Layer

L'inner-layer si divide in altre tre sotto regioni:

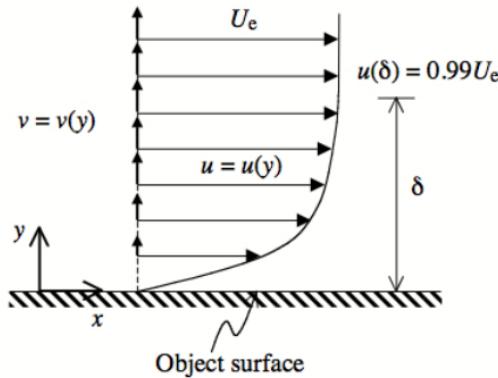


**Figura 2.9:** Esempi di interazione tra onde d'urto e strato limite per flusso supersonico con parete di diversa geometria. a)Rampa. b) Piana. c) Gradino [9]

- Viscous Sublayer: il sottostato viscoso ha uno spessore molto piccolo, dominano lo sforzo viscoso ed il profilo di velocità  $u(y)$  ha un andamento lineare  $u^+ = y^+ \quad y^+ \leq 5$ .
- Buffer Layer: in questa regione il profilo di velocità raccorda il profilo lineare del sottostato viscoso con il profilo soprastante della regione logaritmica. In questa regione si verifica maggiore attività turbolenta in termini di produzione di energia cinetica turbolenta.
- Regione logaritmica: il profilo di velocità è dato da una legge logaritmica  $u^+ = \frac{1}{k} \ln(y^+) + C \quad 30 \leq y^+ \leq 1000$

## 2.4 Separazione negli ugelli

Come descritto precedentemente la separazione a parete in una generica placca piana è provocata da un gradiente avverso di pressione e quando un ugello opera in condizione di sovraespansione succede lo stesso. Un ugello si dice sovraespanso se la pressione d'uscita in condizioni di vuoto  $p_{e,vuoto}$  è inferiore alla pressione ambiente  $p_e$  e il rapporto di queste due pressioni deve essere minore di uno  $n = \frac{p_{e,vuoto}}{p_a} < 1$ ,



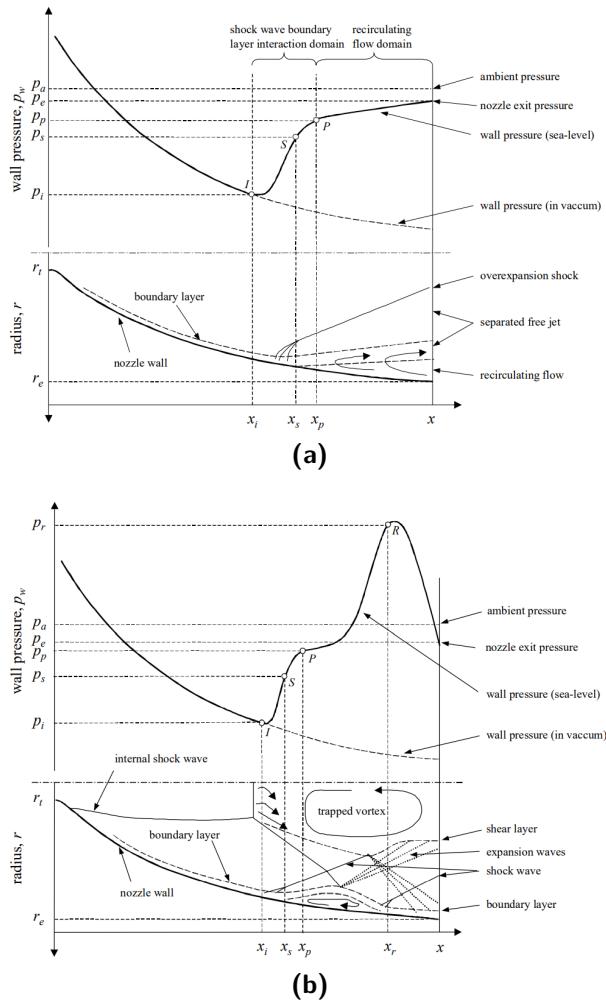
**Figura 2.10:** Profilo di velocità strato limite [7]

dove  $n$  è il parametro che definisce la condizione di flusso,  $n = 1$  ugello adattati,  $n > 1$  sottoespansione. Quando  $n$  scende appena sotto l'unità, quindi sovraespansione, si forma un'urto obliquo sul bordo d'uscita della parete dell'ugello per colpa del gradiente di pressione avverso. Quando  $0.4 < n < 0.8$  lo sforzo viscoso non riesce a sostenere il gradiente di pressione avverso e quindi lo strato limite si separa dalla parete. Esistono due diversi modelli di separazione: separazione a shock libero e la separazione d'urto ristretta.

La separazione studiata in questo lavoro di tesi è quella che si verifica nello schema 2.11a dove il flusso sovraespanso si separa completamente dalla parete ad un certo valore del rapporto  $p_w/p_a$ , nel grafico notiamo che il rapporto decresce parabolicamente fino al punto di separazione dove l'onda d'urto generata fa salire la pressione riportando vicino a parete il flusso in cambo subsonico. Viene riportata una visualizzazione del fenomeno di separazione con codice CFD in un ugello convergente-divergente sovraespanso 2.12. Notiamo che dal punto di separazione si genera un urto obliquo che si collega poi a un urto retto detto disco di Mach. A valle del punto di separazione si genera una bolla di ricircolo subsonica che risulta separata dal flusso supersonico centrale da uno shear layer.

### Criteri per la previsione della separazione

In letteratura esistono una serie di criteri empirici e semi-empirici per predire la separazione, è impossibile determinare con certezza il punto esatto in quanto esso dipende da molti parametri come temperatura della parete, profilo dell'ugello, proprietà del gas, rugosità e configurazione della parete. Il criterio empirico più semplice e classico utilizzato è quello di Summerfield che è basato su studi approfonditi sul fenomeno della separazione in ugelli conici alla fine del 1940 che non tiene conto del numero di Mach, il rapporto di pressione di separazione con questo



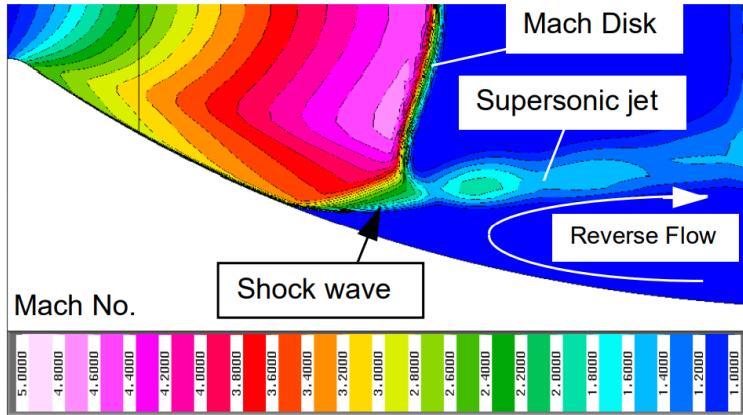
**Figura 2.11:** Modelli di separazione con punti caratteristici:  
 a) Separazione shock libero.  
 b) Separazione d'urto ristretta.[9]

criterio vale:

$$\frac{p_i}{p_a} \approx 0.4 \quad (2.11)$$

dove  $p_a$  è la pressione ambiente e  $p_i$  è la pressione di separazione incipiente. Arens e Spiegler ai inizi dei anni '60 trovarono una relazione per includere il numero di Mach che però si rivelò troppo complicata in campo ingegneristico, ma nel 1962 Schiling, basandosi su esperimenti su ugelli TIC, derivò una semplice relazione che teneva conto dell'aumento del rapporto di separazione  $p_i/p_a$  all'aumentare del Mach:

$$\frac{p_i}{p_a} = k_1 \left( \frac{p_c}{p_a} \right)^{k_2} \quad (2.12)$$



**Figura 2.12:** Visualizzazione dei fenomeni fisici generati dalla separazione negli ugelli sovraespansi [9]

dove  $k_1 = 0.582$ ,  $k_2 = -0.195$  per ugelli TIC e  $k_1 = 0.541$ ,  $k_2 = -0.136$  per ugelli conici. Nel 1965 Kalt e Badal in accordo con i loro dati sperimentali scelsero  $k_1 = 2/3$  e  $k_2 = -0.2$  nella relazione di Schiling. La Nasa invece nella metà dei anni '70 utilizzò una correlazione simile a quella originale di Schiling.

Le successive indagini di Schmucker portarono la NASA a raccomandare il criterio semi-empirico di Crocco e Probstein che si basa su un approccio integrale semplificato dello strato limite che ne tiene conto delle sue proprietà, del gas e del numero di Mach inviscido all'inizio della separazione. Schmucker propose un criterio puramente empirico alla fine dei anni '70:

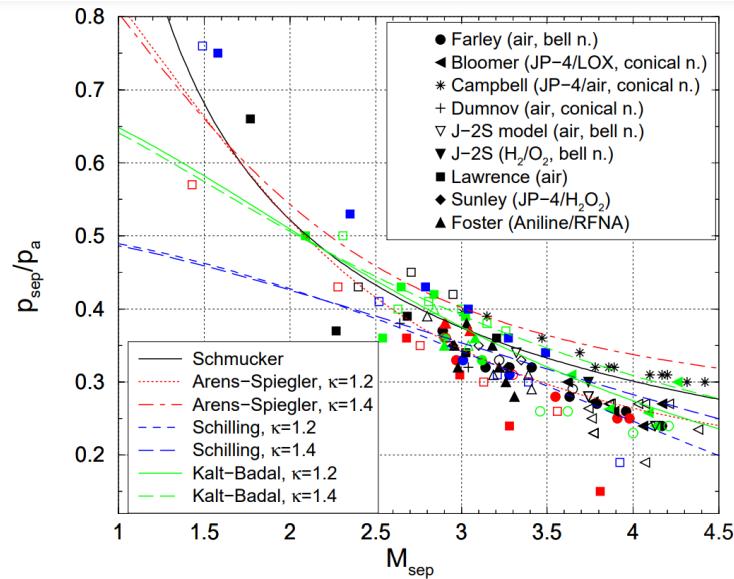
$$\frac{p_i}{p_a} = (1.88 \cdot M_i - 1)^{-0.64} \quad (2.13)$$

con caratteristiche simili alla relazione di Crocco e Probstein che tutt'oggi è ampiamente utilizzato. In 2.13 viene riportato un confronto con i criteri appena descritti con dati dei test. Notiamo una grossa dispersione di punti di dati, la NASA nel 1976 consigliava un margine del 20%. Lawrence suggerì che il recupero di pressione,  $p_i/p_a$ , doveva essere suddiviso in due parti, una parte per l'aumento di pressione critica e una parte per l'aumento di pressione nella zona di ricircolo  $p_p/p_a$ .

Zukoski trovò il seguente criterio, che è in buon accordo con i risultati sperimentali, per predire la separazione ad alti numeri di Reynolds:

$$\frac{p_i}{p_p} = (1 + 0.5M_i)^{-1} \quad (2.14)$$

Lo svantaggio del criterio di Zukoski è che non include la dipendenza del rapporto di calore specifico osservato nei dati sperimentali e dovrebbe quindi essere usato



**Figura 2.13:** Confronto dei modelli si separazione per rapporto di separazione con risultati sperimentali [5]

solamente per il flusso di gas con  $\gamma = 1.4$ , poiché gli esperimenti sono stati eseguiti con aria.

## 2.5 Carichi laterali negli ugelli

I carichi laterali sono stati osservati sia in ugelli per razzi in scala ridotta che in scala reale durante operazioni transitorie come l'avvio o lo spegnimento, così come durante il funzionamento stazionario con flusso separato all'interno dell'ugello. Tali forze, che agiscono lateralmente alla direzione di spinta principale, sono un fenomeno indesiderato e possono diventare un severo vincolo di progettazione per i nuovi concetti di motori a razzo. Le possibili cause che originano carichi laterali da un'evoluzione asimmetrica della pressione di parete all'interno dell'ugello sono:

- transizione nel modello di separazione, da FSS a RSS e viceversa,
- linea di separazione inclinata,
- pulsazioni di pressione nella regione di separazione e nella regione del flusso di ricircolo,
- accoppiamento aeroelastico.

## *Carichi laterali negli ugelli*

---

Riporto di seguito una relazione per stimare l'intensità dei carichi laterali definita come [10]

$$F_s = 2k_g k_{fl} \frac{r}{r_t} r_t^2 \frac{p_i}{p_a} \frac{p_a}{p_c} p_a \left(1 - \frac{p_i}{p_a}\right) \frac{1}{\frac{d(p_w/p_c)}{d(1/r_t)}} \frac{1}{1 - \frac{1+(\gamma-1)/2M_i^2}{(1.88M_i-1)M_i} \frac{1.2}{\gamma}} \quad (2.15)$$

Da quest'equazione possiamo notare che l'intensità dei carichi laterali dipende fortemente dal gradiente di pressione a parete appena prima della separazione e per  $p_c/p_a$ , rapporti di pressione, più alti l'intensità del carico laterale diminuisce fino a scomparire quasi del tutto con un ugello adattato.

# Capitolo 3

## Equazioni di Governo

Al fine di descrivere il comportamento di fluido bisogna utilizzare un modello matematico, di cui una formulazione esatta è data dal set di equazioni di Navier-Stokes che richiedono valida l'ipotesi del continuo. Un fluido si definisce continuo se, il numero di particelle al suo interno è abbastanza elevato da considerare le sue grandezze intensive (densità, velocità media macroscopica, temperatura) macroscopicamente continue. Attraverso la risoluzione del set di equazioni, è possibile ricavare tutte le proprietà intensive del fluido. Ed affinché l'ipotesi del continuo sia valida

$$K_n = \frac{l}{L} < 0.01$$

dove  $l$  è il libero cammino medio della molecola ed  $L$  è la lunghezza caratteristica del corpo.

La derivazione delle principali equazioni della dinamica dei fluidi si basa sul fatto che il comportamento dinamico di un fluido è determinato dalle seguenti leggi di conservazione:

1. legge di conservazione della massa.
2. legge di conservazione della quantità di moto.
3. legge di conservazione dell'energia.

Una proprietà importante delle leggi è che la variazione temporale di una qualsiasi grandezza all'interno di un volume di controllo, in assenza di eventuali termini sorgenti, è dovuta soltanto a quello che accade sulla superficie di contorno.

Il flusso può essere suddiviso in due parti:

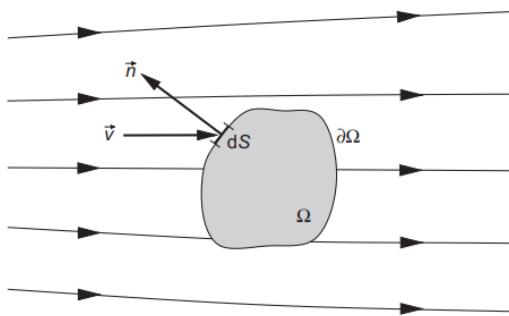
- una parte che riguarda i termini convettivi;

- una parte che riguarda la parte diffusiva molecolare legata al fluido stesso.

Il termine diffusivo nasce solo in casi di gradienti presenti all'interno del flusso; in casi di flusso con grandezze omogenee tale termine può essere trascurato. Il modello matematico viene sviluppato applicando la legge di conservazione ad un volume di controllo finito, fisso nello spazio e che non varia nel tempo. E' inoltre necessario definire il volume di controllo finito.

### 3.1 Volume di controllo finito

Considerando un generico flusso, si definisce attraverso una superficie di controllo  $\partial\Omega$  un volume finito  $\Omega$  Fig.3.1. Si considera un elemento infinitesimo a parete  $dS$  definito da un vettore unitario  $\vec{n}$  uscente dalla superficie e normale ad esso. La legge di conservazione applicata ad una grandezza scalare per unità di volume  $U$ , afferma che la variazione di tale grandezza nel tempo all'interno del volume di controllo  $\Omega$  è uguale alla somma dei flussi convettivi, diffusivi e da sorgenti superficiali o volumiche  $\vec{Q}_S$ ,  $Q_V$ .



**Figura 3.1:** Definizione di volume di controllo finito (fisso nello spazio) [2]

Applicando la formulazione a una grandezza vettoriale, i termini convettivi e diffusivi dei flussi non saranno più grandezze vettoriali ma tensoriali. Il termine sorgente superficiale diviene un tensore ed il termine volumico invece diventa un vettore ottenendo così la seguente legge di conservazione:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \vec{U} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \left[ (\overline{F_C} - \overline{F_D}) \cdot \vec{n} \right] dS = \int_{\Omega} \vec{Q}_V d\Omega + \oint_{\partial\Omega} (\overline{Q}_s \cdot \vec{n}) dS \quad (3.1)$$

Questa formulazione è utile poiché la variazione delle grandezze in esame dipende solo dai flussi attraverso la superficie di contorno. All'interno del volume di controllo, infatti, gli effetti scambiati da ogni volumetto sono uguali e contrari cosicché solo i flussi agenti in superficie determinano la variazione della grandezza

nel tempo. Questo tipo di scrittura in forma integrale è detta **conservativa** e rimane valida anche in caso di discontinuità quali onde d'urto o superfici di contatto. Dalle leggi di conservazione di Eulero 1D, è possibile formulare le relazioni di salto di Rankine-Hugoniot per catturare cosa accade a monte e a valle di una discontinuità.

## 3.2 Equazioni di Navier-Stokes in forma integrale

. È possibile ora formulare le leggi della fluidodinamica in forma integrale. Le equazioni del moto per un fluido viscoso si ottengono dall'applicazione di tre principi:[Libro\_aero]

- *conservazione della massa*, la massa non può essere né creata né distrutta;
- *conservazione della quantità di moto*, la variazione della quantità di moto è determinata dalle forze applicate;
- *conservazione dell'energia*, così come la massa, l'energia non può essere né creata né distrutta.

### 3.2.1 Legge di conservazione della massa (o di continuità)

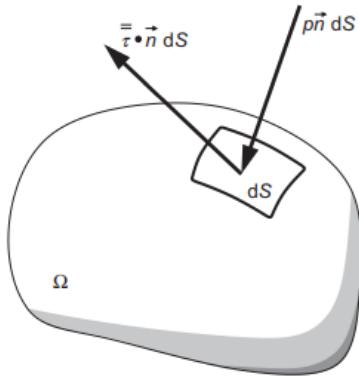
Prendendo in esame un volumetto infinitesimo di fluido, dal momento che non vi sono sorgenti all'interno di esso, possiamo scrivere la legge della conservazione della massa in forma integrale:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = 0 \quad (3.2)$$

### 3.2.2 Legge della quantità di moto

La legge della quantità di moto viene derivata applicando al volumetto infinitesimo di fluido, la seconda legge di Newton.

Le forze applicate al volume esterno possono essere di superficie o volumiche; le forze volumiche riguardano la massa della particella elementare, mentre quelle di superficie sono forze dovute al tensore di sforzo superficiale. Esso è composto da



**Figura 3.2:** Forze superficiali che agiscono su un elemento di superficie del volume di controllo [2]

una parte isotropa dovuta alla componente di pressione e dal tensore degli stress viscosi. Compresa la natura di questi termini si passa alla formulazione integrale, scritta come segue:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \vec{v} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \int_{\Omega} \rho \vec{f}_e d\Omega - \oint_{\partial\Omega} p \vec{n} dS + \oint_{\partial\Omega} (\bar{\tau} \cdot \vec{n}) dS \quad (3.3)$$

### 3.2.3 Equazione dell'energia

La formulazione matematica dell'equazione dell'energia viene realizzata applicando il primo principio della termodinamica. Considerando il volume di controllo finito, si ha che la variazione nel tempo dell'energia totale per unità di massa, è causata dal lavoro delle forze che agiscono su di esso e dal flusso netto di calore attraverso quest'ultimo. Si considera l'energia totale di un sistema come il contributo di energia interna e energia cinetica macroscopica per unità di massa, definita in una terna cartesiana:

$$E = e + \frac{|\vec{v}|^2}{2} = e + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \quad (3.4)$$

La variazione nel tempo dell'energia totale all'interno di un volume fisso nello spazio, può essere scritta come:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho E d\Omega \quad (3.5)$$

Ad essa si somma il contributo di flusso convettivo che trasporta l'energia totale attraverso la superficie di contorno

$$-\oint_{\partial\Omega} \rho E(\vec{v} \cdot \vec{n}) dS. \quad (3.6)$$

Nello scrivere l'equazione dell'energia si deve tener conto anche della diffusione molecolare all'interno del volume di controllo, che genera dei flussi di calore. Questi si ottengono dalla legge di Fourier che mette in relazione la natura diffusiva del fluido, attraverso il coefficiente di conduttiva termica  $\kappa$  e i gradienti di temperatura statica:

$$\vec{F}_D = -\kappa \nabla T \quad (3.7)$$

Nell'equazione dell'energia si deve tener conto di termini sorgente di calore volumico e superficiale. Il termine di sorgente volumico tiene conto del lavoro fatto dalle forze di volume  $\vec{f}_e$  e da sorgenti di calore per unità di tempo. Le sorgenti di tipo superficiale sono legate al lavoro compiuto dalla pressione e dal tensore degli sforzi. Esse agiscono sul contorno della superficie di controllo.

$$Q_V = \rho \vec{f}_e \cdot \vec{v} + \dot{q}_h \quad (3.8)$$

$$\vec{Q}_S = -p \vec{v} + \bar{\tau} \cdot \vec{v} \quad (3.9)$$

Per ottenere la formulazione completa dell'energia è possibile sommare tutti i contributi sopracitati, ottenendo tale equazione:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho E d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \rho E (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \oint_{\partial\Omega} \kappa (\nabla T \cdot \vec{n}) dS + \int_{\Omega} (\rho \vec{f}_e \cdot \vec{v} + \dot{q}_h) d\Omega + \oint_{\partial\Omega} (\bar{\tau} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{n} dS \quad (3.10)$$

### 3.2.4 Tensore degli sforzi

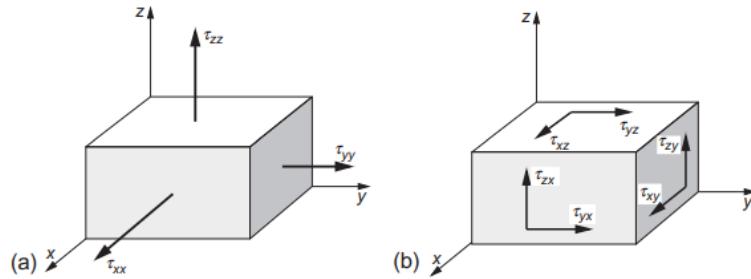
Nelle equazioni della quantità di moto e dell'energia compare il tensore degli sforzi viscosi  $\bar{\tau}$ . Le componenti in un sistema cartesiano sono nove, ma solo sei sono indipendenti, in quanto la matrice degli sforzi è simmetrica. È possibile scrivere:

$$\bar{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Inoltre, per un fluido Newtoniano lo sforzo di attrito è proporzionale al gradiente di velocità. Una relazione che lega lo sforzo d'attrito alla presenza di gradienti di velocità, è la legge costitutiva. Le componenti del tensore degli sforzi diventano:

$$\tau_{xx} = \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.12)$$

$$\tau_{yy} = \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.13)$$



**Figura 3.3:** Sforzi normali (a) e di taglio (b) che agiscono su un elemento fluido finito.  
[2]

$$\tau_{xx} = \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.14)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (3.15)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (3.16)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (3.17)$$

dove  $\mu$  è la viscosità dinamica e  $\lambda$  rappresenta il secondo coefficiente. Considerando l'ipotesi di Stokes

$$\lambda + \frac{2}{3}\mu = 0 \quad (3.18)$$

dove si definisce la *bulk viscosity* che rappresenta la dissipazione di energia legata alla variazione in volume di un fluido, si ottengono le seguenti relazioni

$$\tau_{xx} = 2\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \vec{v} \right) \quad (3.19)$$

$$\tau_{yy} = 2\mu \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \vec{v} \right) \quad (3.20)$$

$$\tau_{zz} = 2\mu \left( \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \vec{v} \right) \quad (3.21)$$

### 3.2.5 Sistema completo delle equazioni di Navier-Stokes

E' possibile riordinare le precedenti equazioni in un unico sistema. Formalmente possono essere riscritte in un'unica equazione nella quale compaiono i termini legati

ai flussi di natura convettiva  $\vec{F}_C$ , di natura diffusiva  $\vec{F}_V$  e i termini sorgente. Si ottiene così una legge conservativa integrale del tipo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \vec{W} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} (\vec{F}_C - \vec{F}_V) dS = \int_{\Omega} \vec{Q} d\Omega \quad (3.22)$$

Un problema fluidodinamico nelle tre dimensioni richiede la risoluzione di un sistema di 5 equazioni: due di natura scalare (massa ed energia) e tre di natura vettoriale legate alla quantità di moto. Si definisce il termine delle variabili conservative  $\vec{W}$  valutato nelle tre dimensioni:

$$\vec{W} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Il termine del vettore dei flussi convettivi che è legato al trasporto convettivo delle quantità nel fluido:

$$\vec{F}_C = \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho u V + n_x p \\ \rho v V + n_x p \\ \rho w V + n_z p \\ \rho(E + p/\rho)V \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

il termine dei flussi viscosi che contiene i termini di attrito viscoso:

$$\vec{F}_V = \begin{bmatrix} 0 \\ n_x \tau_{xx} + n_y \tau_{xy} + n_z \tau_{xz} \\ n_x \tau_{yx} + n_y \tau_{yy} + n_z \tau_{yz} \\ n_x \tau_{zx} + n_x \tau_{zy} + n_z \tau_{zz} \\ n_x \Theta_x + n_y \Theta_y + n_z \Theta_z \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Dove:

$$\Theta_x = u \tau_{xx} + v \tau_{xy} + w \tau_{xz} + k \frac{\partial T}{\partial x} \Theta_y = u \tau_{yx} + v \tau_{yy} + w \tau_{yz} + k \frac{\partial T}{\partial y} \Theta_z = u \tau_{zx} + v \tau_{zy} + w \tau_{zz} + k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (3.26)$$

ed infine il termine sorgente di volume:

$$\vec{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho f_{e,x} \\ \rho f_{e,y} \\ \rho f_{e,z} \\ \rho \vec{f}_e \cdot \vec{v} + \dot{q}_h \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$V$  è la velocità perpendicolare alla superficie  $dS$ ,  $H$  è l'entalpia totale,  $\Omega$  rappresenta il lavoro dell'attrito viscoso e della conduzione di calore nel fluido. Il sistema così descritto contiene ben sedici incognite,  $\rho$ ,  $u, v, w$ , sei componenti del tensore degli sforzi viscosi  $\bar{\tau}$ ,  $e$  l'energia interna, tre flussi termici  $q_T, p, T$ . Per poter chiudere il sistema si sono riscritti i termini dei flussi termici attraverso la legge di Fourier e i termini viscosi con le equazioni costitutive. Inoltre, viene utilizzata la legge di stato dei gas perfetti e la relazione che lega la temperatura all'energia interna

$$\frac{p}{\rho} = \frac{R}{M}T \quad (3.28)$$

$$e = c_v T \quad (3.29)$$

Dove  $R$  è la costante dei gas perfetti e  $M$  è la massa molare dei gas,  $c_v$  è il coefficiente di calore specifico a volume costante. Infine, è possibile calcolare la viscosità dinamica in funzione della temperatura attraverso la legge di Sutherland.

$$\mu = \frac{1.45T^{3/2}}{T + 110} \cdot 10^{-6} \quad (3.30)$$

dove la temperatura è espressa in gradi Kelvin (K). Il coefficiente di diffusività termica  $k$  è espresso dalla relazione

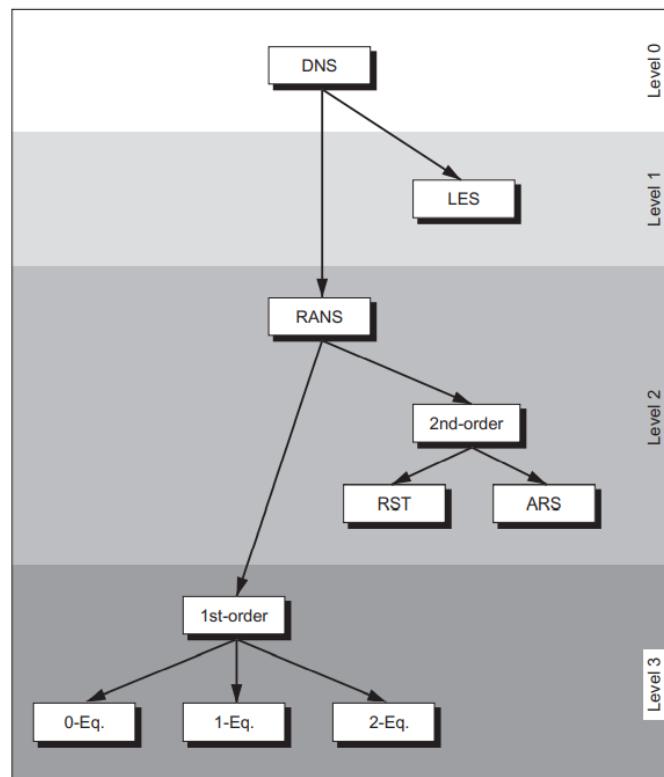
$$\kappa = c_p \frac{\mu}{Pr} \quad (3.31)$$

Dove  $Pr$  esprime il numero di Prandtl che può essere assunto costante è pari a  $Pr=0.72$  per l'aria.

# Capitolo 4

## Modelli di Turbolenza

In campo ingegneristico i flussi che sono caratterizzati da un comportamento turbolento, hanno un grande ruolo. Questo capitolo ha lo scopo di presentare i modelli che vengono utilizzati nelle simulazioni CFD per flussi turbolenti, andando però a descrivere in dettaglio le Equazioni di Navier-Stokes mediate alla Reynolds (RANS) che sono state utilizzate per questo lavoro di tesi. In un flusso turbolento,



**Figura 4.1:** Modelli di turbolenza ordinati secondo livello di complessità [2]

il moto delle particelle è del tutto irregolare e caratterizza il comportamento delle fluttuazioni delle variabili che descrivono lo stesso flusso ed è per questo che è quasi impossibile risolvere le equazioni di Navier Stokes attraverso simulazioni numeriche dirette della turbolenza. Questo perché utilizzare la tecnica DNS (Direct Numerical Simulation) è troppo onerosa in termine di costo computazionale dato che il costo cresce rapidamente col numero di Reynolds. Per sviare a queste difficoltà sono stati sviluppati diversi modelli di turbolenza racchiusi in questi tre gruppi:

- Large-Eddy Simulation
- RANS con modelli di chiusura al primo ordine
- RANS con modelli di chiusura al secondo ordine

Con caratteristiche diverse l'una dall'altra e al fine di utilizzare il modello più opportuno per lo studio occorre conoscere bene il problema fisico da studiare anche perché ogni modello ha un costo computazionale diverso.

## 4.1 Equazioni di governo della turbolenza

Di seguito vengono scritte le equazioni di Navier Stoke in forma differenziale, dato si possono esprimere sia in forma integrale che differenziale. Omettendo i termini di sorgente, per un flusso comprimibile si possono scrivere le eq. di Navier-Stokes come:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_j) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_j) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j v_i) &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j H) &= -\frac{\partial}{\partial x_j}(v_i \tau_{ij}) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k \frac{\partial T}{\partial x_j}\right) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Le equazioni scritte sopra descrivono il bilancio della massa, quantità di moto ed energia. La componente velocità è rappresentata da  $v_i$  ( $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]^T$ ) e l coordinata della direzione da  $x_i$ . Il tensore di attrito viscoso (viscou stress tensor) è dato da  $\tau_{ij}$  ed è definito come:

$$\tau_{ij} = 2\mu S_{ij} - \left(\frac{2\mu}{3}\right) \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (4.2)$$

E le componenti del *strain-rate tensor* sono date da

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.3)$$

A questo punto definiamo anche *rotation-rate tensor* come:

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \partial v_i \partial x_j - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.4)$$

Nella terza equazione invece compare l'entalpia totale  $H$  e l'energia totale  $E$  espresse come:

$$E = e + \frac{1}{2} v_i v_i \quad H = h + \frac{1}{2} v_i v_i \quad (4.5)$$

Per un flusso incompressibile le equazioni 4.1 si riscrivono come:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} &= 0 \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 v_i \\ \frac{\partial T}{\partial t} + v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} &= k \nabla^2 T \end{aligned} \quad (4.6)$$

La viscosità cinematica è descritta da  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ , in questo caso (per flusso incompressibile) il bilancio dell'energia è disaccoppiato dall'equazione di bilancio della quantità di moto e della massa.

#### 4.1.1 Media alla Reynolds

Reynolds propone un approccio differente per risolvere le equazioni di Navier-Stokes. Questo metodo si basa sul principio di decomporre le grandezze che caratterizzano il flusso in due parti, una parte media e una fluttuante. Definiamo una generica equazione come:

$$a = \bar{a} + a' \quad (4.7)$$

Il termine  $\bar{a}$  corrisponde al valore medio della grandezza che si sta studiando,  $a'$  invece corrisponde al termine delle fluttuazioni turbolente. Vediamo ora diversi modi per definire il valore medio.

- **Media temporale**

$$\bar{a} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^t +Tadt \quad (4.8)$$

Attraverso questa relazione si ottiene un valor medio costante nel tempo ma che varia nello spazio.  $T \rightarrow \infty$  significa che  $T$  è il più grande valore della scala temporale che caratterizza le fluttuazioni turbolente del flusso in esame.

- **Media spaziale**

$$\bar{a} = \lim_{\Omega} \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} ad\Omega \quad (4.9)$$

Il volume di controllo è definito da  $\Omega$ . La media spaziale, al contrario della media temporale, varia nel tempo mantenendosi uniforme nello spazio infatti viene utilizzato per descrivere turbolenze omogenee.

- **Media di insieme**

$$\bar{a} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N a \quad (4.10)$$

Questa media ha la peculiarità che il valor medio è in funzione sia dello spazio che del tempo e viene utilizzata per descrivere la turbolenza in generale.

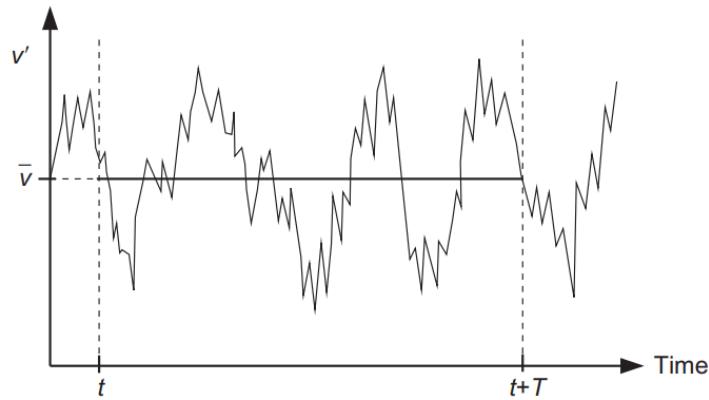
Queste relazioni sono importanti perché i modelli RANS risolvono le equazioni di Navier-Stokes in termini di valor medio. Quando la turbolenza è omogenea e stazionaria le tre tipologie di medie appena descritte sono equivalenti e quindi si parlerà di *ipotesi ergodica*. Applicando la generica equazione  $a$  alle equazioni di governo per flusso incompressibile si riscrivono nelle equazioni 4.1 le variabili di velocità e pressione:

$$v_i = \bar{v}_i + v'_i \quad p = \bar{p} + p' \quad (4.11)$$

Un esempio della media alla Reynolds per la velocità viene riportata nella figura 4.2. Nel caso illustrato nella figura si può notare come la media delle fluttuazioni della velocità è  $\bar{v}'_i = 0$ , perché ci sono valori che oscillano nell'intorno del valor medio. La media del prodotto delle fluttuazioni non sarà nulla  $v'_i v'_j \neq 0$  questo varrà anche per  $v'_i \bar{v}'_j$  se e solo se esiste una correlazione tra componenti di velocità.

### 4.1.2 Media alla Favre

Quando la densità non è costante si applica all'equazione 4.1 una decomposizione diversa chiamata decomposizione alla Favre. Applicare questo approccio su tutte le variabile che compaiono nel sistema delle equazioni di governo risulta complicato per le ulteriori correlazioni dovute alle fluttuazioni di densità. Si utilizza quindi un approccio misto mediando densità e pressione alla Reynolds invece le altre variabili



**Figura 4.2:** Mediazione alla Reynolds - Grafico delle fluttuazioni della velocità turbolenta  $v'$  e del valore medio statistico  $\bar{v}$  [2]

si scomponete alla Favre.

La media di Favre sulla componente di velocità si scrive come:

$$\tilde{v}_i = \frac{1}{\bar{\rho}} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^t +T \rho v_i dt \quad (4.12)$$

$\bar{\rho}$  rappresenta la densità mediata alla Reynolds e la componente di velocità per Favre viene espressa come:

$$v_i = \tilde{v}_i + v''_i \quad (4.13)$$

Anche in questo caso si scomponete la variabile in un valor medio( $\tilde{v}_i$ ) e in uno fluttuante ( $v''_i$ ). Le caratteristiche descritte prima sull'operatore di media per fluttuazioni turbolente continueranno a valere:

$$\tilde{v}''_i = 0 \quad \widetilde{v''_i v''_i} \neq 0 \quad \widetilde{v''_i v''_j} \neq 0 \quad (4.14)$$

Si utilizzassero sia la media di Reynolds che quella di Favre varrebbero le seguenti relazioni:

$$\widetilde{\rho \tilde{v}_i} = \bar{\rho} \tilde{v}_i \quad \bar{\rho} \bar{v}''_i = 0 \quad \bar{v}''_i \neq 0 \quad (4.15)$$

### 4.1.3 Media alla Favre e Reynolds delle equazioni di Navier Stokes

Applicando le media descritte sopra alle equazioni di Navier-Stokes nel campo incompribile si ottengono per bilancio di massa e quantità di moto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} &= 0 \\ \rho \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \rho \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} &= - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\tau}_{ij} - \rho v'_i v'_j) \end{aligned} \quad (4.16)$$

queste sono le equazioni chiamate RANS (Reynolds Averaged Navier Stokes) dove possiamo notare che abbiamo la comprarsa del termine aggiuntivo:

$$\tau_{ij}^R = -\rho v'_i \bar{v}'_j = -\rho (b_i \bar{b}_j - \bar{v}_i \bar{v}_j) \quad (4.17)$$

Questo termine si chiama **tensore degli sforzi di Reynolds**, rappresenta il trasporto di quantità di moto dovuto alle fluttuazioni turbolente. Le componenti delle fluttuazioni di velocità  $\rho v'_i \bar{v}'_j$  sono espresse attraverso un tensore di nove componenti di cui sei sono tra loro indipendenti per via della correlazione tra  $v'_i e v'_j$

$$\rho v'_i \bar{v}'_j = \rho v'_j \bar{v}'_i \quad (4.18)$$

Si può introdurre l'energia cinetica turbolenta come:

$$K = \frac{1}{2} v'_i \bar{v}'_i = \frac{1}{2} [(v'_1)^2'' + (v'_2)^2'' + (v'_3)^2''] \quad (4.19)$$

Per risolvere il sistema delle equazioni RANS bisogna introdurre sei relazioni per risolvere le nuove sei variabili introdotte con il tensore degli sforzi di Reynolds.

In questo lavoro di tesi si considerano clussi supersonici con grandi variazioni di densità e quindi le fluttuazioni di densità non sono più trascurabili e devono essere tenute in considerazione dato che non vale più  $\rho' \ll r \bar{\rho}$ . Si effettua una media alla Reynolds su pressione e densità, invece sulle altre variabili si effettua una

media alla Favre. Partendo dalle 4.1 si ottengono:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \tilde{v}_i) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{v}_j \tilde{v}_i) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\widetilde{\tau_{ij}} - \bar{\rho} \widetilde{v''_i v''_j}) \\ \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{E}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{v}_j \tilde{H}) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} - \bar{\rho} \widetilde{v''_j h''} + \widetilde{\tau_{ij} v''_i} - \bar{\rho} \widetilde{v''_j K} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} [\tilde{v}_i (\widetilde{\tau_{ij}} - \bar{\rho} \widetilde{v''_i v''_j})] \end{aligned} \quad (4.20)$$

Questa relazione si chiama **Favre and Reynolds Averaged Navier-Stokes** che presenta un termine aggiuntivo (come le RANS) che rappresenta un tensore degli sforzi di Reynolds mediato alla Favre:

$$\tau_{ij}^F = -\bar{\rho} \widetilde{v''_i v''_j} \quad (4.21)$$

Anche in questo caso come scritto sopra per il tensore mediato alla Reynolds bisogna introdurre sei relazioni per le sei nuove componenti del tensore. Inoltre bisogna introdurre delle relazioni per definire le tre componenti del vettore di flusso di calore turbolento dato che compare anche l'equazione di equilibrio dell'energia. Possiamo scrivere l'energia cinetica turbolenta mediata alla Favre come:

$$\bar{\rho} \tilde{K} = \frac{1}{2} \bar{\rho} \widetilde{v''_i v''_j} \quad (4.22)$$

Si può esprimere l'energia totale come :

$$\bar{\rho} \tilde{E} = \bar{\rho} \tilde{e} + \frac{1}{2} \bar{\rho} \tilde{v}_i \tilde{v}_i + \bar{\rho} \tilde{K} \quad (4.23)$$

L'entalpia totale invece è definita come:

$$\bar{\rho} \tilde{H} = \bar{\rho} \tilde{h} + \frac{1}{2} \bar{\rho} \tilde{v}_i \tilde{v}_i + \bar{\rho} \tilde{K} \quad (4.24)$$

#### 4.1.4 Eddy-viscosity, ipotesi di Boussinesq

L'ipotesi di Boussinesq si basa sull'idea che il trasferimento di quantità di moto in un flusso turbolento è dominato dal mescolamento causato da grandi vortici energetici turbolenti e venne introdotta al fine di rendere chiusi i sistemi scritti precedentemente. Quest'ipotesi dice che lo sforzo di taglio turbolento dipende linearmente dalla velocità di deformazione media, come per flussi laminari e quindi

in questo caso il fattore di proporzionalità corrisponde all'eddy-viscosity che si indica con  $\mu_T$ . Per flussi incomprimibili applicando l'ipotesi di Boussinesq mediando alla Reynolds si ottiene:

$$\tau_{ij}^R = -\rho \bar{v}_i' \bar{v}_j' = 2\mu_T \bar{S}_{ij} - \frac{2}{3}\rho K \delta_{ij} \quad (4.25)$$

Il tensore di sforzo i taglio mediato alla Reynolds  $\bar{S}_{ij}$ :

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.26)$$

La viscosità turbolenta è in funzione delle condizioni locali del flusso ed è molto influenzato dalla storia del flusso a differenza della viscosità molecolare che è una caratteristica fisica del fluido. Per flussi comprimibili vale l'ipotesi di media alla Favre-Reynolds e l'ipotesi di Boussinesq per l'eddy-viscosity esprime:

$$\tau_{ij}^F = -\bar{\rho} \widetilde{v}_i'' \widetilde{v}_j'' = 2\mu_T \tilde{S}_{ij} - \left( \frac{2\mu_T}{3} \right) \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} - \frac{2}{3} \bar{\rho} \tilde{K} \delta_{ij} \quad (4.27)$$

Visto che questa relazione vale sia per Favre che per Reynold si esprime il coefficiente di viscosità dinamica come la somma di una parte laminare e una turbolenta:

$$\mu = \mu_L + \mu_T \quad (4.28)$$

Comunemente per simulazioni di flussi turbolenti per modelli di turbolenza (con chiusura a primo ordine) vengono utilizzate le equazioni mediate con l'aggiunta del termine di viscosità dinamica.

#### 4.1.5 Equazioni di trasporto dello sforzo di Reynolds

Per i modelli di turbolenza con chiusura a secondo ordine, questi si basano sulla risoluzione dell'equazione di trasporto dello sforzo di Reynolds (detti anche Reynolds-stress). L'equazioni si può derivare applicando la media temporale:

$$v'_i N(v_j) + v'_j N(v_i) = 0 \quad (4.29)$$

dove  $N(v_i)$  indica l'operatore di Navier-Stokes ed è espresso come:

$$N(v_i) = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \mu \nabla^2 v_i \quad (4.30)$$

Esplicitando le equazioni si ottiene l'equazione di trasporto dello sforzo di Reynolds:

$$\frac{\partial \tau_{ij}^R}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial \tau_{ij}^R}{\partial x_k} = P_{ij} + \Pi_{ij} - \varepsilon_{ij} - \frac{\partial C_{ijk}}{\partial x_k} + \mu \nabla^2 \tau_{ij}^R \quad (4.31)$$

L'equazione 4.31 vale per flussi comprimibili e all'interno compaiono diversi termini come:  $P_{ij}$  indica la produzione di energia cinetica turbolenta;  $\Pi_{ij}$  termine che indica pressione-deformazione;  $\varepsilon_{ij}$  rateo di dissipazione;  $C_{ijk}$  indica la diffusione del terzo ordine. L'equazione di Navier Stokes 4.31 richiede modelli empirici di chiusura.

## 4.2 Modelli di turbolenza con chiusura al primo ordine

I modelli di turbolenza servono per approssimare gli sforzi di Reynolds all'interno delle equazioni di Navier-Stokes mediate alla Favre o alla Reynolds. I modelli a primo ordine si usano per calcolare  $\mu_T$  basandosi sull'ipotesi di Boussinesq. Esistono diversi modelli di turbolenza con chiusura del primo ordine, ognuno utilizzato a seconda della tipologia di flusso in esame o a seconda dello studio che si vuole fare, in questo sottocapitolo andiamo a descrivere in dettaglio i diversi modelli.

### 4.2.1 Spalart-Allmaras modello a un equazione

Questo modello è a un equazione, cioè l'equazione di trasporto per la variabile  $\tilde{v}$  che attraverso la densità  $\rho$  è legata all'eddy-viscosity. È un modello basato su dati empirici, studi dimensionali e permette di ottenere, per flussi che presentano gradienti di pressione avversi o che hanno un graduale transizione da strato limite laminare a turbolenta, buoni risultati. È un modello che può essere usato sia per griglie strutturate che non strutturate con il vantaggio che non richiede una griglia molto fitta a parete ed è un modello locale cioè la soluzione in un punto non dipende dalle soluzioni nei altri punti del dominio di calcolo. Solitamente per questo modello di turbolenza come condizione iniziale si impone  $\tilde{v} = 0.1v_L$ , invece sulle pareti si impone  $\tilde{v} = 0$  che equivale  $\mu_T = 0$ . In forma tensoriale l'equazione che caratterizza il modello di turbolenza Spalart-Allmaras si scrive come:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{v} v_j) &= C_{b1}(1 - f_{t2}) \tilde{S} \tilde{v} \\ &+ \frac{1}{\sigma} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (v_L + \tilde{v}) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \right] + C_{b2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \right\} \\ &- \left[ C_{w1} f_w - \frac{C_{b1}}{k^2} f_{t2} \right] \left( \frac{\tilde{v}}{d^2} \right)^2 + f_{t1} \|\Delta \vec{v}\|_2^2 \quad (4.32) \end{aligned}$$

I termini a destra dell'equazione rappresentano: la produzione dell'eddy-viscosity  $\tilde{S}$ ; la diffusione conservativa e non conservativa; la distribuzione della turbolenza vicino a parete ( $f_w$ ); lo smorzamento e la sorgente di produzione della turbolenza dovuto alla transizione ( $f_{t1}, f_{t2}$ ). Una volta nota  $\tilde{v}$  si può determinare l'eddy-viscosity:

$$\mu_T = f_{v1} \rho \tilde{v} \quad (4.33)$$

da cui:

$$\chi = \frac{\tilde{v}}{v_L} \quad (4.34)$$

si riesce a trovare  $f_{v1}$  come:

$$f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3} \quad (4.35)$$

Dove  $d$  è la distanza della parete, invece  $C_{b1}, C_{b2}, C_{v1}, C_{v2}, C_{w1}, C_{w2}, C_{w3}, \sigma, k, C_{t1}, C_{t2}, C_{t3}, C_{t4}$  sono costanti del modello.

#### 4.2.2 Modello $K - \varepsilon$

Questo modello di turbolenza è a due equazioni, cioè si basa sulla risoluzione dell'equazione dell'energia cinetica turbolenta  $K$  e l'equazione della velocità di dissipazione di energia turbolenta  $\varepsilon$ . Il modello  $K - \varepsilon$  necessita di aggiungere la *damping function* alle appena citate equazioni con lo scopo di approssimare in maniera corretta il flusso nel sotto-strato viscoso. Lo scopo dell'equazione damping equation è quello di smorzare la  $K$  e la  $\varepsilon$  nei pressi della parete con lo scopo di ottenere:

$$K \sim y^2 \quad \frac{\varepsilon}{K} \sim \frac{2\nu}{y^2} \quad \text{per } y \rightarrow 0 \quad (4.36)$$

dove  $y$  rappresenta la coordinata normale alla parete. Si può anche dimostrare che lo sforzo di taglio di Reynolds:

$$\tau_{ij}^R \sim y^3 \quad \text{per } y \rightarrow 0, \quad i \neq j \quad (4.37)$$

Il modello  $K - \varepsilon$  a differenza del Spalart-Allmaras richiede una griglia molto più sottile vicino a parete per risolvere il sotto-strato viscoso, questo metodo è molto sensibile ai gradienti di pressione avversi che possono influire negativamente nell'approssimazione della soluzione. Le condizioni iniziali da impostare in questo modello sono  $K$  e  $\varepsilon^*$  nel flusso libero ( $*$  = rateo di dissipazione freestream). Un modo più efficace per ottenere i due parametri consiste nell'impostare un profilo di energia cinetica turbolenta e un rateo di dissipazione a parete, ed è più preciso però più complessa. A parete come condizione al contorno si imposta  $K = 0$  e  $\varepsilon^* = 0$  ma questo implica anche  $\mu_T = 0$ . Si può scrivere :

$$\varepsilon = \varepsilon_w + \varepsilon^* \quad (4.38)$$

dove  $\varepsilon_w$  corrisponde al rateo di dissipazione a parete. Come condizione al contorno in ingresso,  $K$  e  $\varepsilon^*$  sono determinati grazie alle relazioni che legano queste due grandezze all'intensità di turbolenza e alla scala di lunghezza della turbolenza come:

$$(Tu)_\infty = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}K_\infty}}{\|\vec{v}_\infty\|_2} \quad (l_T)_\infty = \frac{C_\mu K_\infty^{3/2}}{\varepsilon^*} \quad (4.39)$$

Mentre come condizione al contorno in uscita l'energia cinetica turbolenta e il rateo di dissipazioni sono estrapolati dalla soluzione interna. Le equazioni che caratterizzano il modello  $K - \varepsilon$  sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho K}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j K) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu_L + \frac{\mu_T}{\sigma_K} \frac{\partial K}{\partial x_j} \right) \right] + \tau_{ij}^F S_{ij} - \rho \varepsilon \\ \frac{\partial \rho \varepsilon^*}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j \varepsilon^*) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu_L + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x_j} \right) \right] + C_{\varepsilon 1} f_{\varepsilon 1} \tau_{ij}^F S_{ij} \frac{\varepsilon^*}{K} \\ &\quad - C_{\varepsilon 2} f_{\varepsilon 2} \frac{(\varepsilon^*)^2}{K} + \phi_\varepsilon \end{aligned} \quad (4.40)$$

I termini a destra dell'equazione appena scritta rappresentano rispettivamente la diffusione conservativa, la produzione e la dissipazione di eddy-viscosity.

L'eddy-viscosity è legata alle due grandezze di riferimento attraverso la legge:

$$\mu_T = C_\mu f_\mu \rho \frac{K^2}{\varepsilon^*} \quad (4.41)$$

E come ho riportato prima, imponendo  $K = 0$  significa che  $\mu_T$ . All'interno dell'equazione 4.40 compaiono le costanti  $C_\mu, C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}, \sigma_K, \sigma_\varepsilon, Pr_T$ ; le costanti di smorzamenti  $f_\mu, f_{\varepsilon 1}, f_{\varepsilon 2}$ ; termine di parete esplicito  $\phi_\varepsilon$ .

## Wall Function

Il modello  $K - \varepsilon$  richiede a parete una griglia molto fine, deve soddisfare la condizione di avere il primo prisma a parete pari a  $y^+ < 1$ .

Numero di Reynolds:

$$Re_x = \frac{\rho U_\infty D}{\mu} \quad (4.42)$$

Coefficiente di sforzo d'attrito (skin friction coefficient):

$$C_f = \frac{2 \cdot \tau_{wall}}{\rho U_\infty^2} \quad (4.43)$$

Sforzo d'attrito a parete (wall shear stress):

$$\tau_{wall} = \frac{1}{2} C_f \rho U_\infty^2 \quad (4.44)$$

Friction velocity:

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_{wall}}{\rho}} \quad (4.45)$$

Conoscendo la definizione di  $y^+$  come:

$$y^+ = \frac{u_\tau h}{\nu} < 1 \quad (4.46)$$

Invertendo l'equazione appena scritta si può ricavare l'altezza del primo prisma a parete  $h$  come:

$$h = \frac{y^+ \nu}{u_\tau} \quad (4.47)$$

Per far fronte a questa difficoltà, ovvero griglia molto fine, si può però ridurre il costo computazionale della simulazione imponendo un  $10 < y^+ < 100$  per il modello  $K - \varepsilon$  in modo da avere il primo prisma a pare ad un'altezza maggiore così da avere una griglia meno fine. Questo fa sì che le funzioni di smorzamento vengono eliminate, in questo caso parliamo di modelli di turbolenza ad alto numero di Reynolds. In questo caso bisogna introdurre delle funzioni chiamate *wall function* al fine di determinare  $K$  e  $\varepsilon^*$  nel nodo (o nella cella) adiacente alla parete. Queste sono solitamente basate sulla legge logaritmica a parete e risultano particolarmente efficaci per flussi con stato limite attaccato, invece si hanno risultati poco accurati quando è presente separazione. Riportiamo la legge logaritmica che vale nella regione logaritmica dell'inner layer:

$$u^+ = \frac{1}{k} \ln(y^+) + C \quad 30 < y^+ < 1000 \quad (4.48)$$

dove  $k = 0.41$  è la costante di Von Karman e  $C = 5.1$  è la costante di Coles.

### 4.2.3 SST $K - \omega$ , modello a due equazioni

Wilcox ha proposto il modello  $K - \omega$ , il quale sostituisce l'equazione della velocità di dissipazione con la velocità specifica di dissipazione, di energia cinetica turbolenta,  $\omega$ . Questo metodo viene pensato ed è utilizzato per lo studio del sottostrato viscoso. Infatti con il modello  $k - \omega$  si ottiene un'accuratezza simile al  $K - \varepsilon$  nel sottostrato viscoso con elevata stabilità numerica e non si ha necessità di funzioni di smorzamento. Questo permette di utilizzare questo modello dove ci sono gradienti di pressione avverso, però il modello  $k - \varepsilon$  si utilizza per lo studio di getti o flussi di mescolamento (strato limite di scia) dove il modello  $K - \omega$  è meno accurato. Per sfruttare le caratteristiche di entrambi i modelli Mentre ha trovato il compromesso con l'SST (Shear stress transport) che combina i due modelli appena sopra citati. Viene modificata la funzione per l'eddy viscosity per tener conto della

proporzionalità tra l'energia cinetica turbolenta e lo sforzo di taglio tenendo conto di quest'ultimo il trasporto turbolento.

Il modello SST richiede di conoscere l'altezza del primo prisma a parete  $d_1$  perché questa viene usata per determinare una condizione al contorno. Le condizioni al contorno a parete per il modello SST  $K - \omega$  sono:

$$K = 0 \quad \omega = 10 \cdot \frac{6\mu_L}{\rho\beta_1(d_1)^2} \quad (4.49)$$

dove il parametro  $d_1$  rappresenta la distanza dalla parete del primo prisma (centro cella) e  $\beta_1$  è una costante tipica del modello, la griglia deve essere talmente fitta che deve soddisfare la condizione di  $y^+ < 3$ . Come condizione al contorno di inflow si raccomandano:

$$\omega_\infty = C_1 \frac{\|\vec{v}_\infty\|_2}{L} \quad (\mu_T)_\infty = (\mu_L)_\infty 10^{-C_2} \quad K_\infty = \frac{(\mu_T)_\infty}{\rho_\infty} \omega_\infty \quad (4.50)$$

Dove le costanti  $1 \leq C_1 \leq 10$   $2 \leq C_2 \leq 5$  ed  $L$  è la lunghezza del dominio. Le equazioni per  $K$  ed  $\omega$  sono:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho K}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j K) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu_L + \mu_T \sigma_K \right) \frac{\partial K}{\partial x_j} \right] + \tau_{ij}^F S_{ij} - \rho \beta^* \omega K \\ \frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j \omega) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu_L + (\mu_T \sigma_\omega) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) \frac{C_\omega \rho}{\mu_T} \tau_{ij}^F S_{ij} \right. \\ &\quad \left. - \beta \rho \omega^2 + 2(1-f_1) \frac{\rho \sigma_\omega}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \frac{\partial K}{\partial x_j} \right] \end{aligned} \quad (4.51)$$

I termini a destra rappresentano la diffusione conservativa, la produzione di eddy-viscosity e la dissipazione dell'eddy-viscosity.

La dissipazione di eddy-viscosity viene calcolata con la seguente relazione:

$$\mu_T = \frac{a_1 \rho K}{\max(a_1 \omega, f_2 \|\vec{curl} v\|_2)} \quad (4.52)$$

In presenza di gradiente avversi di pressione dove si ha maggiore produzione di energia cinetica turbolenza rispetto alla dissipazione ( $\omega$ ) nello strato limite viene mantenuta la proporzionalità tra sforzo di taglio ed energia cinetica turbolenta. La funzione  $f_1$  permette di utilizzare il modello  $K - \omega$  all'interno dello strato limite e di cambiare nel modello  $K - \varepsilon$  nei free-shear layer o nelle zone di flusso libero. Si scrivono le seguenti relazioni

$$f_1 = \tanh(\arg_1^4)$$

$$arg_1 = \min \left[ \max \left( \frac{\sqrt{K}}{0.09\omega d} \frac{500\mu_L}{\rho\omega d^2} \right), \frac{4\rho\sigma_{\omega 2}K}{CD_{K\omega}d^2} \right]$$

La distanza dalla parete è  $d$ , invece  $CD_{K\omega}$  è la parte positiva del termine di cross-diffusione dell'equazione 4.51. Per quanto riguarda le costanti all'interno dell'equazione, a seconda del coefficiente di blending assumeranno valori del modello  $K - \varepsilon$  modificato o  $K - \omega$ .

Per il coefficiente  $\phi$  vale la legge :

$$\phi = f_1\phi_1 + (1 - f_1)\phi_2 \quad (4.53)$$

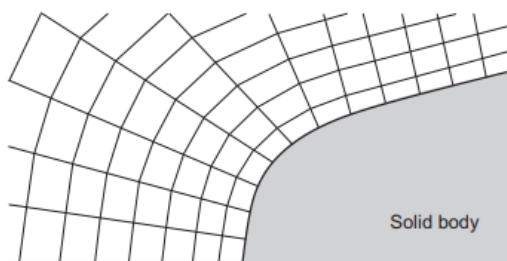
Che per il modello  $K - \varepsilon$  assumerà il valore di  $\phi_2$  e invece per il modello  $K - \omega$  assumerà  $\phi_1$ .

# Capitolo 5

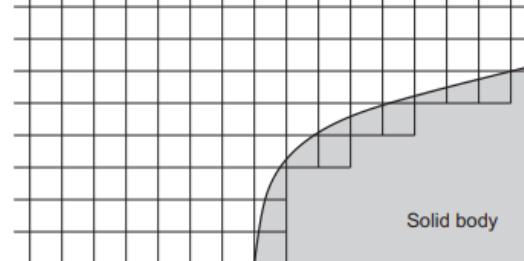
## Discretizzazione spaziale

Per risolvere numericamente le equazioni di Navier-Stokes bisogna andare a discretizzarle in tempo e spazio. Per discretizzare le equazioni di N-S in spazio è necessario costruire una griglia di calcolo (o comunemente chiamata *mesh*) suddividendo il dominio fluido, dove si muove il flusso, in tanti elementi geometrici di diverso tipo. Ci sono diverse tipologie di griglie:

- Griglia *body – fitted*: la griglia segue la geometria dei contorni dello spazio fisico in cui il flusso si muove. È adatta a risolvere flussi di strato limite ma è complicato l'utilizzo per geometrie complesse.
- Griglia cartesiana: la griglia non segue la geometria fisica del problema ma i bordi delle celle sono paralleli alle coordinate cartesiane. È adatta allo studio dell'evoluzione di flussi ed ha un implementazione più facile (rispetto al *body – fitted*) ma di contro in ambito ingegneristico lo studio dello strato limite è molto importante e quindi il suo utilizzo è secondario.



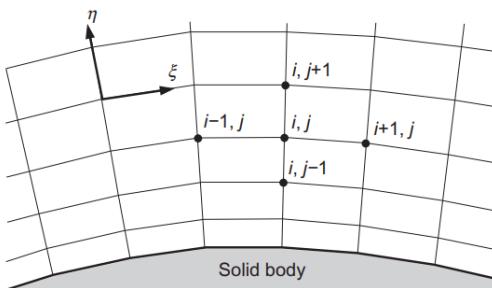
(a) 2-D griglia body-fitted



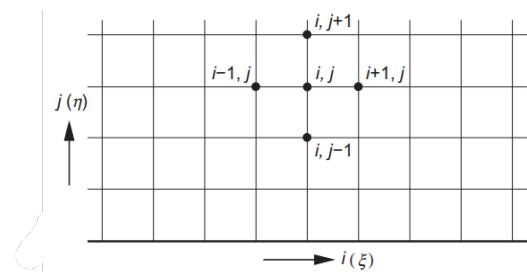
(b) griglia cartesiana

**Figura 5.1:** Tipologie di griglie [2]

- Griglia strutturata: ogni punto della griglia viene identificato attraverso degli indici  $i, j, k$  e attraverso una coordinata cartesiana  $x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk}$ . Le celle per il 2D sono quadrangolari e per il 3D sono esaedrica, il vantaggio principale consiste nella linearità dello spazio computazionale in quanto ogni variabile fluidodinamica corrisponde direttamente a come verrà memorizzata all'interno della macchina e questa proprietà facilita le operazioni di calcolo in cui è necessario valutare i valori assunti dalle variabili nei nodi adiacenti. Lo svantaggio di questa tipologia di griglia è che più la geometria del problema è complessa e più complicato sarà il suo utilizzo, per ovviare a questo problema si utilizzano le griglie *multiblocco* però questo comporta a un maggior costo computazionale dovendo utilizzare così solutori più complessi per colpa delle interfacce tra i blocchi caratterizzati da celle di diverse dimensioni. Per ovviare a quest'altre problematiche si utilizzano delle griglie modificate chiamate *chimera* e *hanging nodes* che però perdono la linearità del dominio che permette alle griglie strutturate il vantaggio in fase di calcolo.



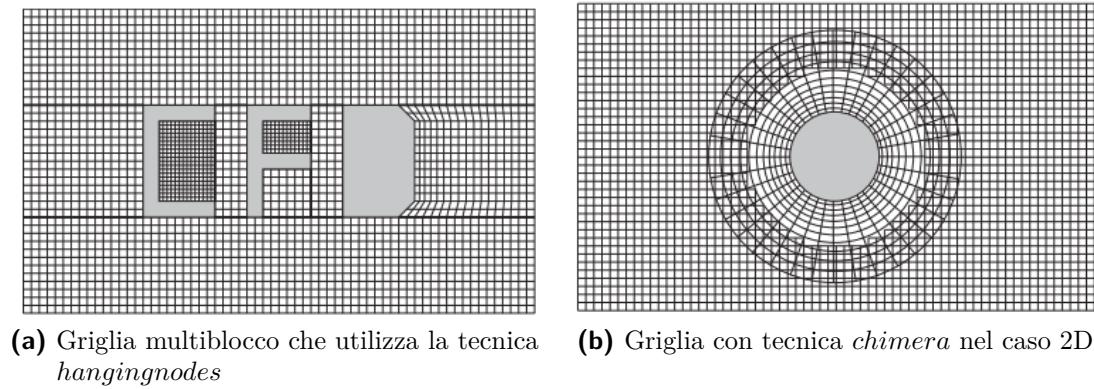
(a) Griglia strutturata curvilinea body-fitted



(b) Griglia strutturata

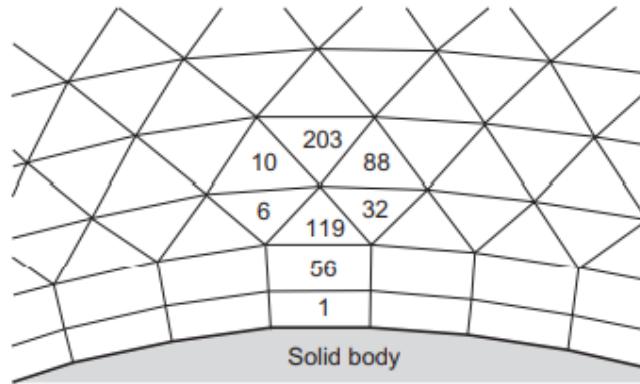
**Figura 5.2:** Esempi di griglie strutturate body-fitted nel caso 2D [2]

- Griglie non strutturate: in queste tipologie di griglie le celle, come i punti, non hanno un ordine ben preciso e non possono essere identificate direttamente con dei indici. Si possono numerare le celle ma non sfruttare l'indicizzazione per spostarsi all'interno della griglia, perdendo così la linearità delle griglie strutturate e quindi il vantaggio nell'immagazzinare i dati nella macchina di calcolo. Le celle nelle griglie *unstructured* hanno una forma più complessa perché utilizzano una combinazione di celle quadrangolari e triangolari nel caso 2D e per il 3D invece celle esaedriche, tetraedriche, piramidali o prismatiche per quanto riguarda il 3D. In questo caso parliamo di griglie *ibride* o *grigliemiste*. Questa tipologia di griglie ha il vantaggio di essere molto precise nel descrivere il dominio fisico, ma allo stesso tempo mantengono un costo computazionale più basso rispetto alle soluzioni multiblocco



**Figura 5.3:** Esempi di griglie strutturate body-fitted nel caso 2D [2]

oppure chimera. Hanno anche il vantaggio di ridurre il numero di punti di griglia, per fare questo però si ha necessità di un solutore molto complesso e una memoria computazionale maggiore rispetto alla tecnica struttura.



**Figura 5.4:** Griglia mista non strutturata nel caso 2D [2]

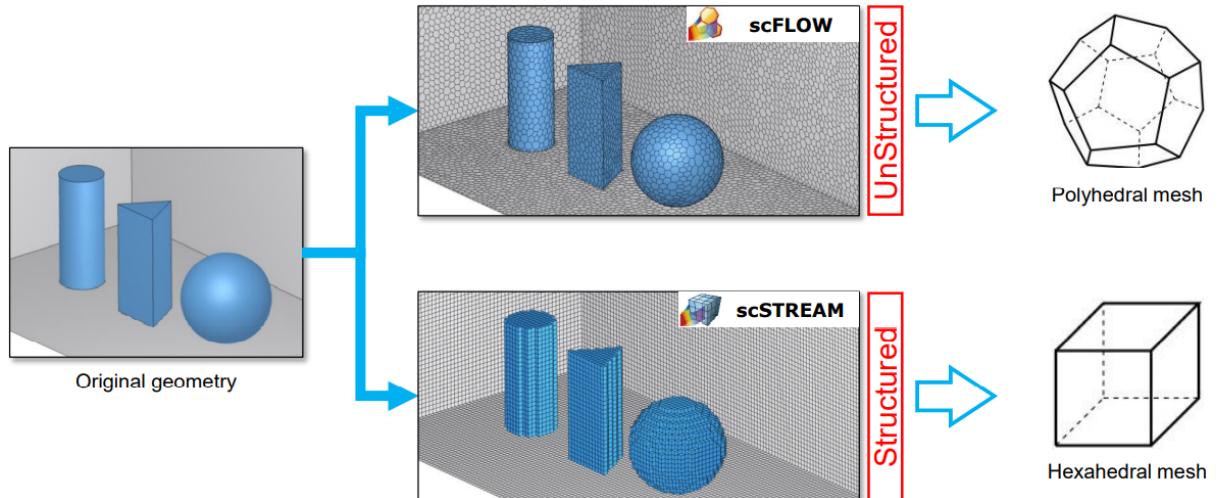
## 5.1 Metodo ai volumi finiti

I principali metodi per discretizzare in spazio le equazioni di Navier-Stoke sono:

- Schemi ai elementi finiti
- Schermi ai volumi finiti

- Schermi alle differenze finite

In questo sottocapitolo andiamo descrivere in dettaglio il metodo ai volumi finiti in questo è quello utilizzato per le analisi CFD nel presente lavoro di tesi. Il metodo



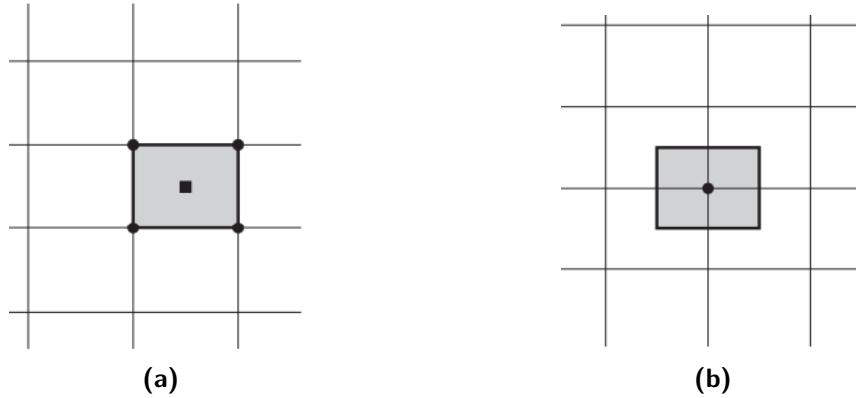
**Figura 5.5:** Visualizzazione di griglia strutturata e non strutturata 3D su Cradle CFD [3]

ai volumi finiti discretizza le equazioni di governo e suddivide il dominio fisico in un numero arbitrario di volumi di controllo poliedrici, con i quali approssima gli integrali di superficie come somma dei flussi che attraversano le singole superfici dei diversi volumi di controllo. Per effettuare la suddivisione dello spazio fisico in volumi di controllo ci sono due categorie principali, gli schemi a cella-centrati e gli schemi a cella vertice, caratterizzati da diversa accuratezza.

- Schemi cella-centrati: In questa tipologia di schemi le quantità delle grandezze di flusso sono assegnati ai centroidi delle celle, in questo modo i volumi di controllo utilizzati per suddividere il volume fisico coincidono esattamente con i baricentri delle.
- Schemi cella-vertice: In questa tipologia di schemi le quantità delle grandezze di flusso sono assegnate ai punti griglia.

Si può distinguere due tipologie di volumi di controllo:

- *Overlapping*: volume di controllo definito da tutte le celle caratterizzate dallo stesso punto di griglia.
- *Dual*: Volume di controllo centrato intorno ad un nodo della griglia.



**Figura 5.6:** (a) Volume di controllo cella centrato. (b) Volume di controllo cella vertice (dual control). [2]

Gli schemi ai volumi finiti sono capaci di adattarsi senza problema sia a griglie strutturate che non strutturate, peculiarità che permette di adattarsi a geometrie complesse senza grosse difficoltà e dato che la discretizzazione spaziale è fatta nello spazio fisico questo fa sì che questo metodo non necessita di trasformazioni del sistema di coordinate da quello fisico a quello numerico.

## 5.2 Metodo ai volumi finiti per griglia non strutturata

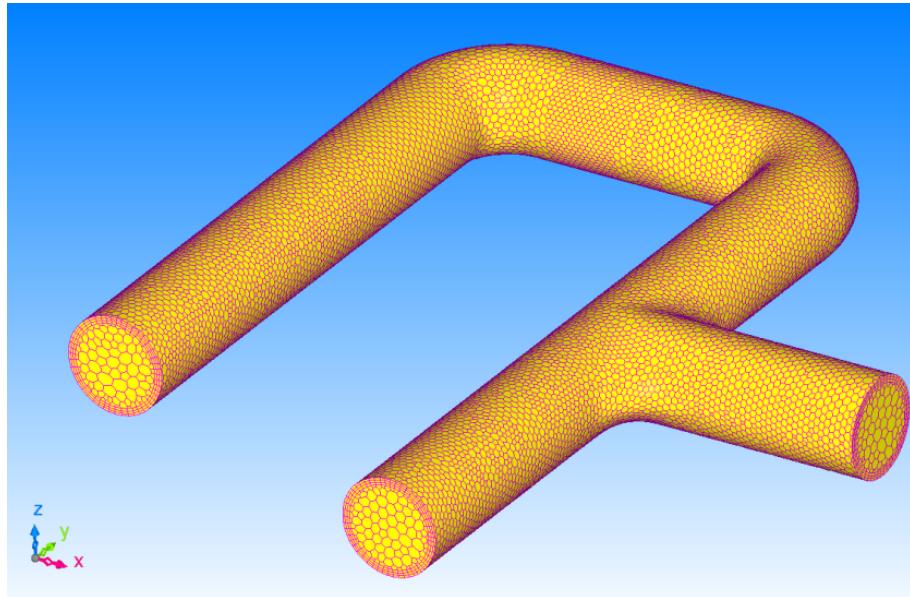
Descriviamo ora le caratteristiche che deve soddisfare una griglia non strutturata (descritte precedentemente). La griglia deve essere curata in modo tale da conservare tale caratteristica delle leggi di governo, questo avviene attraverso: completa copertura del dominio fisico da parte della griglia; mancanza di buchi e sovrapposizione tra gli elementi; le dimensioni degli elementi devono essere tali da non avere grandi variazioni tra elementi adiacenti. Riprendendo la generica legge di conservazione in forma integrale 3.22 a pagina 29, assumendo che il volume di controllo non cambi nel tempo, si può allora ricavare la derivata delle variabili  $\vec{W}$  come:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \vec{W} d\omega = \Omega \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} \quad (5.1)$$

Sostituendo nell'equazione di conservazione 3.22 a pagina 29 si ottiene:

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = -\frac{1}{\Omega} \left[ \oint_{\partial\Omega} (\vec{F}_c - \vec{F}_v) dS - \int_{\Omega} \vec{Q} d\omega \right] \quad (5.2)$$

Facendo le seguenti supposizioni ovvero: approssimare l'integrale di superficie a



**Figura 5.7:** Esempio di mesh mista 3D non strutturata [3]

destra dell'equazione come sommatoria dei contributi di tutti i flussi che attraversano la superficie dell'elemento fluido; supporre che il flusso sia costante lungo la singola faccia e quindi si può calcolare sul punto medio della stessa; termine di sorgente costante all'interno del volume di controllo, oppure valutarlo partendo dai valori assunti da  $\vec{Q}$  nei dintorni del volume di controllo facendone una media. Si può riscrivere l'equazione precedente come:

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = -\frac{1}{\Omega_I} \left[ \sum_{m=1}^{N_F} (\vec{F}_c - \vec{F}_v)_m \Delta S_m - (\vec{Q}\Omega)_I \right] \quad (5.3)$$

Il termine  $\Omega_I$  è uno specifico volume di controllo,  $N_F$  è il numero delle facce del volume di controllo e  $\Delta S_m$  è la specifica sezione, tutto quello dentro la parentesi quadra è chiamato residuo. In questo modo otteniamo un'approssimazione del secondo ordine dei flussi e l'equazione 5.3 si può riscrivere come:

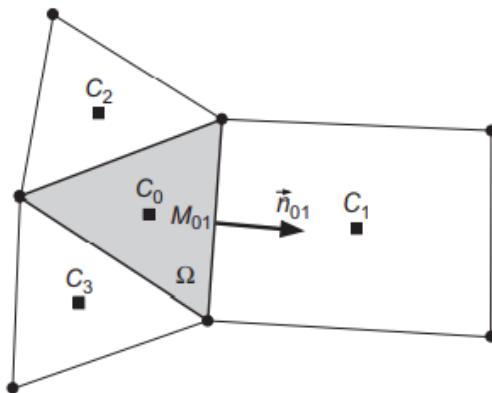
$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = -\frac{1}{\Omega_I} \vec{R}_I \quad (5.4)$$

Sviluppando 5.4 si ottiene un sistema di equazioni differenziali ordinario al primo ordine, iperboliche nel tempo quindi bisogna impostare le corrette condizioni iniziali. Gli schemi descritti prima cella centrata, cella vertice overlapping, cella vertice median-dual, sono tutti schemi *co – collocati* cioè presentano sia le variabili indipendenti conservative  $\vec{W}$ , sia quelle dipendenti ( $p, T, \dots$ ) poste nello stesso punto. Gli schemi più utilizzati sono quelli a cella centrata e median-dual.

### 5.2.1 Schema cella centrata

Si parla di uno schema centrato sulle celle se i volumi di controllo sono identici alle celle della griglia e se le variabili di flusso sono associate ai loro centroidi, come in figura 5.8. Nel sottocapitolo precedente viene riportato che per risolvere 5.3 è necessario valutare il valore dei flussi, convettivi e viscosi, nel punto medio della faccia compresa tra due celle. Per fare questo sono possibili tre metodi. Il primo consiste nell'approssimare i flussi partendo dalla media dei flussi calcolati nei centroidi delle celle che si trovano a sinistra e a destra della faccia che si sta valutando, utilizzando un solo versore normale alla parete. Nello specifico, riferendosi a 5.4, considerando l'interfaccia tra la cella  $C_0$  e  $C_1$  si prende come unico versore normale alla parete  $n_{01}$  e si valuta il flusso come:

$$(\vec{F}_c \Delta S)_{01} \approx \frac{1}{2} [\vec{F}_c(\vec{W}_0, n_{01}) + \vec{F}_c(\vec{W}_1, n_{01})] \Delta S_{01} \quad (5.5)$$



**Figura 5.8:** Schema cella centrato in un volume di controllo 2D [2]

I flussi presenti nell'equazione 5.5 sono solo quelli convettivi, perché questo tipo di approccio è stato sviluppato solo per questi. Il secondo metodo approssima i flussi utilizzando la media delle variabili allocate nei centroidi a destra e a sinistra della faccia:

$$(\vec{F}_c \Delta S)_{01} \approx \vec{F}(\vec{W}_{01}, n_{01}) \Delta S_{01} \quad (5.6)$$

La variabile  $\vec{W}_{01}$  viene determinato come media delle variabili dei centroidi adiacenti. Nel caso che segue possiamo notare che l'equazione si riferisce sia flussi convettivi che flussi viscosi:

$$\vec{W}_{01} = \frac{1}{2} (\vec{W}_0 + \vec{W}_1) \quad (5.7)$$

Il terzo ed ultimo metodo calcola i flussi partendo da quantità ricostruite separatamente sui due lati dell'interfaccia partendo dai valori delle celle adiacenti. Le quantità di fluido interpolate sui due lati della faccia sono le componenti di velocità, densità ed entalpia totale. I valori a destra e sinistra della faccia sono diversi e il flusso viene calcolato grazie a una differenza tra questi due, attraverso una funzione non lineare.

$$(\vec{F}_c \Delta S)_{01} \approx f_{Flux}(\vec{U}_L, \vec{U}_R, \Delta S_{01}) \quad (5.8)$$

Le quantità ricostruite sono derivate dai valori dei centroidi delle celle vicine:

$$\begin{aligned} \vec{U}_L &= f_{Rec}(\dots, \vec{U}_2, \vec{U}_0, \dots) \\ \vec{U}_R &= f_{Rec}(\dots, \vec{U}_1, \vec{U}_0, \dots) \end{aligned} \quad (5.9)$$

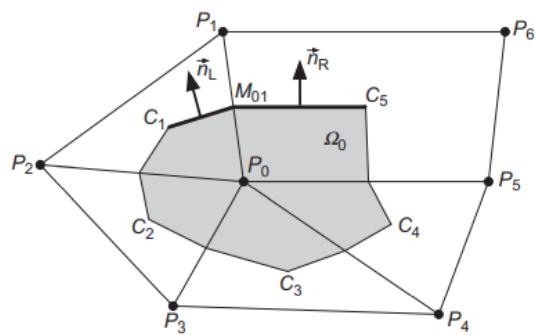
Questo metodo è utilizzato soprattutto per flussi convettivi  $\vec{F}_c$ , questo appena descritto vale per griglia 2D ma si può derivare le stesse relazioni anche per il caso tridimensionale.

### 5.2.2 Schema cella vertice median-dual

Gli schemi cella vertice sono quelli più diffusi e i valori in questi schemi sono associati ai vertici delle griglie. In questo caso i volumi di controllo sono costruiti collegando i centroidi, le facce e i punti medi dei contorni delle celle che condividono quel particolare nodo.

Viene riportato un volume di controllo per uno schema cella vertice median-dual [5.9](#).

Con questo schema si risolvono i flussi, nell'[eq. 5.3](#), singolarmente su ogni faccia



**Figura 5.9:** Volume di controllo di uno schema median-dual 2D [2]

del volume di controllo, è un approccio complicato e dispendioso tale che si ottiene

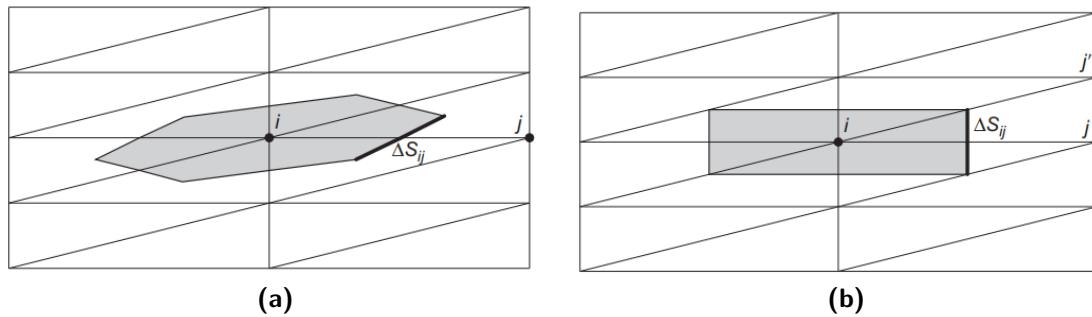
una discretizzazione del terzo ordine per i flussi. Si può passare ad una discretizzazione del second ordine dove si assume che il valore delle variabili del flusso sia costante lungo tutte le facce che si trovano intorno ad un nodo, questo al fine di valutare i flussi nella mezzeria del bordo del volume, partendo dalle variabili e dai gradienti di entrambi i nodi.

Si definisce un versore normale unico per le facce condividono il bordo 5.9.

$$\vec{n}_{01} = \vec{n}_L + \vec{n}_R \quad \Delta S_{01} = \Delta S_L + \Delta S_R \quad (5.10)$$

che corrispondono rispettivamente al versore normale e la superficie totale per i nodi  $P_0$  e  $P_1$ . Per approssimare i flussi si possono utilizzare tre opzioni, simili a quelle descritte per gli schemi a celle-centrati:

1. Dalla media dei flussi calcolati su entrambi i nodi e utilizzando un solo versore normale.
2. Utilizzare una media delle variabili valutate sui due nodi di bordo.
3. Ricostruire separatamente per ogni lato della faccia del volume di controllo, le quantità fluidodinamiche attraverso i valori presenti sulle celle adiacenti.



**Figura 5.10:** Confronto tra volumi di controllo (a) schema median-dual (b) contrainment-dual con griglia triangolare stirata [2]

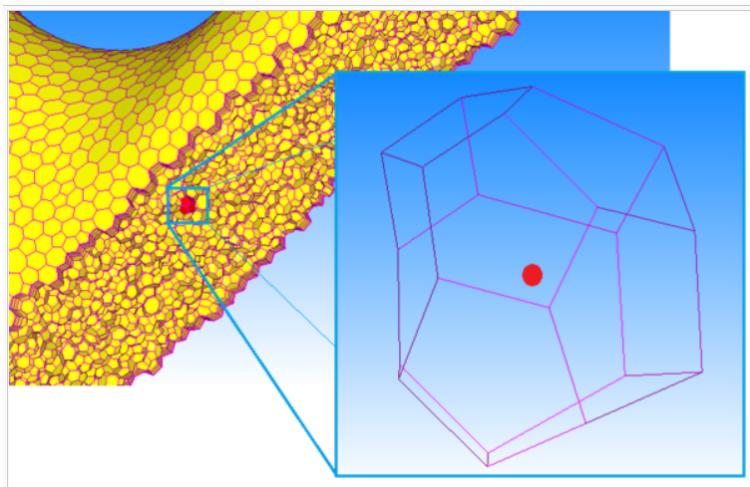
Facendo attenzione che per il primo e per il terzo metodo ci si riferisce ai solo flussi convettivi, si possono utilizzare le leggi viste per gli schemi centrati anche per gli schemi median-dual cell-vertex.

### 5.2.3 Confronto tra schema cella-centrato e cella-vertice

Confrontando i due schemi descritti nei due sottocapitoli precedenti, possiamo valutare alcuni aspetti caratteristici che interessano la fluidodinamica.

Il primo aspetto che interessa è l'accuratezza dello schema, uno schema cella-centrato è caratterizzato da un numero di gradi di libertà (volumi di controllo) che va dalle due alle sei volte più grande rispetto allo schema cella-vertice e questo si traduce a un numero maggiore di variabili quindi anche un'accuratezza maggiore per lo schema cella-centrato. Il residuo 5.4 è dato da un numero minore di flussi per lo schema cella-centrato rispetto a quello cella-vertice, quindi a parità di griglia è difficile dire quale sia più preciso.

Gli schemi cella-vertice median-dual sono sensibili ad alcune tipo di griglia, come per le griglie triangolari stirate 5.10a. Si nota che la superficie su cui si vuole valutare il flusso sia inclinata rispetto ai due vertici  $i$  e  $j$ , questo può comportare un errore di approssimazione significativo, infatti negli schemi di discretizzazione è necessario valutare i flussi normalmente alla superficie. Un altro problema che



**Figura 5.11:** Posizione del centroide in una generica mesh 3D poliedrica [3]

può introdurre errori di approssimazione è dovuto alla valutazione dei flussi lungo il bordo del dominio fluido, perché solo metà del volume di controllo generato si trova all'interno del dominio di calcolo con conseguenza che il residuo valutato è all'interno del volume di controllo, quando il metodo richiede che questo si trovi sul nodo della griglia il quale a sua volta si trova lungo il bordo del dominio. Un problema ancora più evidente risulta quando si applica come condizione al contorno sulle pareti la periodicità, dove i flussi su entrambe le pareti associate devono essere sommati correttamente.

Gli schemi cella-vertice sono molto sensibili a griglie poco regolari, questo ci permette di dire che il loro utilizzo risulta complicando quando si studiano problemi con geometrie particolarmente complesse (per esempio i bordi di un profilo). La poca flessibilità nell'adattarsi ai contorni della geometria può anche portare a problematiche nella valutazione dei flussi vicino a parete. I costi computazionali sono

## *Metodo ai volumi finiti per griglia non strutturata*

---

legati all'integrazione dei flussi, che di conseguenza è legato al numero di celle e vertici presenti nel dominio di calcolo. Gli schemi a cella centrata sono più onerosi in termini computazionali rispetto agli schemi cella-vertice perché utilizzano codici basati su cicli sulle facce delle celle (per griglia tetraedrica numero di facce delle celle due volte quello dei vertici), rispetto ai codici basati su cicli sui vertici delle stesse.

# Capitolo 6

## Analisi CFD e risultati

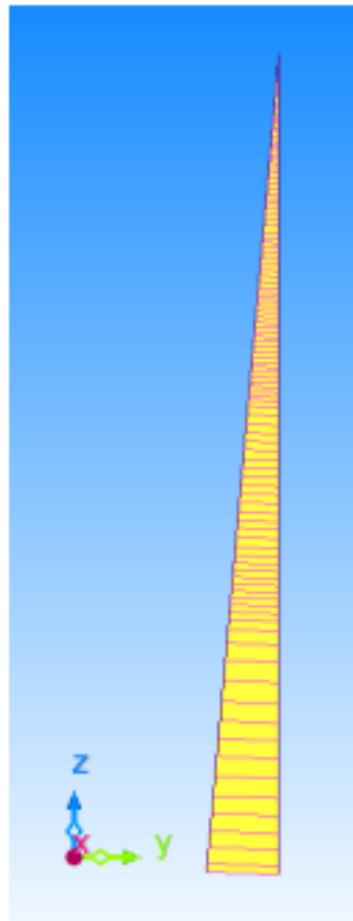
### 6.1 Descrizione di sc-Flow

Sc-Flow è il codice CFD utilizzato nel mio lavoro di tesi ed è un prodotto di Software Cradle Co, sviluppato e aggiornato da MSC Software Corporation, e applicato ai calcoli CFD di flussi stazionari e non stazionari.

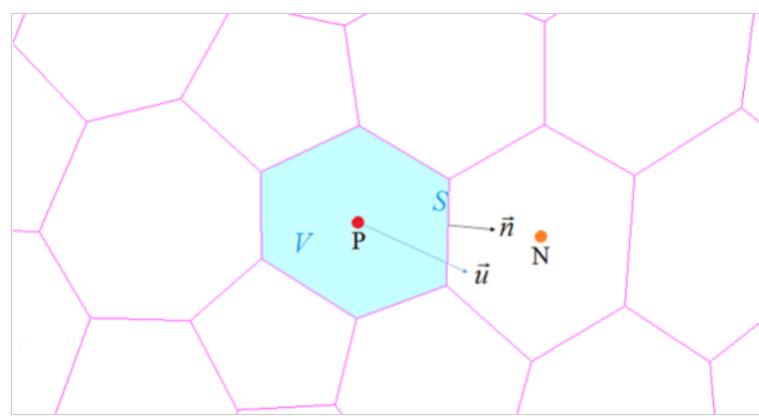
Il codice risolve in 3D, le equazioni di conservazione di dissipazione turbolenta, e la conservazione delle specie diffuse. Le equazioni sono come descritto nel terzo capitolo. Il codice prende anche in considerazione le reazioni chimiche di diverse specie, ed è possibile aggiungere qualsiasi tipo di elemento attraverso il pannello di controllo. Il software inizia il calcolo del flusso numerico basato su equazioni di governo discretizzate, come già descritto nel capitolo della discretizzazione spaziale. Vengono sviluppate maglie multi-cellulari, tetraedriche e piramidali. Gli elementi di calcolo necessari per l'analisi di sc-Flow sono chiamati *griglie* oppure *mesh* e sono visualizzati per definire la posizione dei dati nella regione di calcolo. La forma degli elementi è mostrato in figura 5.11 ed è formato come poliedri arbitrari dove il dato è al centroide di ogni elemento mostrato come un punto rosso (tutto questo è descritto in maniera specifica nel quinto capitolo). Una volta terminata la discretizzazione, il programma costruisce le matrici e determina gli elementi delle matrici dei coefficienti per risolvere il problema. A valle di questo processo c'è un controllo di convergenza per l'analisi dello stato stazionario che, se superato, determina la fine del calcolo.

### 6.2 Geometria e dominio

In questa prima parte del lavoro si è utilizzato il pre-processor di sc-Flow. La geometria è stata creata attraverso attraverso il software di CAD CATIA V5 ed è stata poi importata su sc-Flow per lo studio CFD. Il dominio è stato riportato



**Figura 6.1:** Spicchio del dominio di  $5^\circ$  con mesh



**Figura 6.2:** Dati e elementi in una vista schematica 2D in sc-Flow [3]

in figura 6.4, inizialmente si è valutato di suddividere in due parti il dominio per avere un maggiore controllo sulle regioni di infittimento della mesh, però in seguito si è constatato che la soluzione discostava da quella riportata in letteratura e questo probabilmente era dovuto a un problema di matching tra i due sotto-domini ma comunque ho valutato di effettuare lo studio non utilizzando la geometria modificata inizialmente pensata.

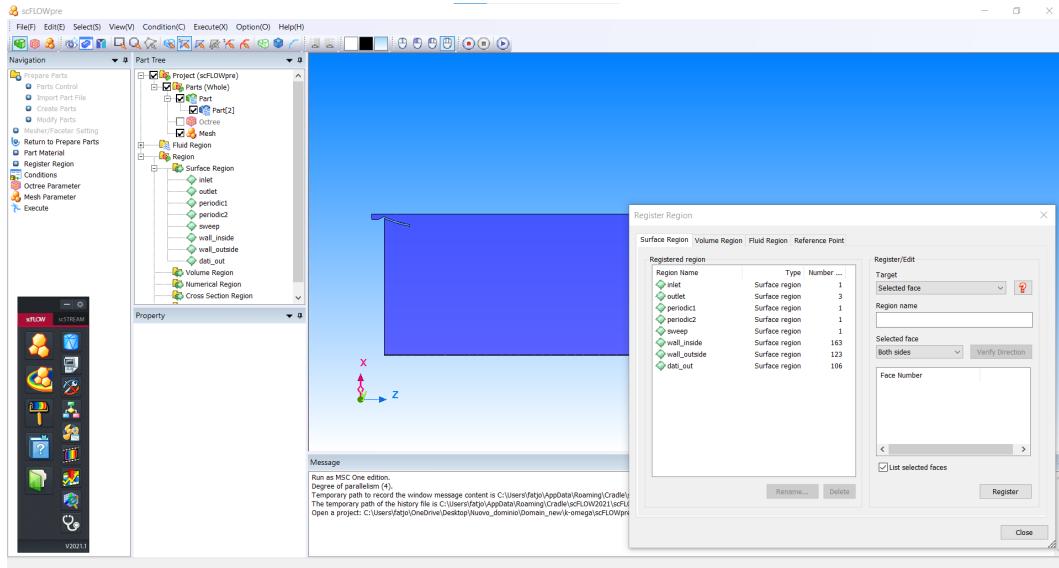


**Figura 6.3:** Dominio completo utilizzato per lo studio

Una volta importato il dominio si sono fatte delle verifiche attraverso il codice sulla bontà della geometria e che non si presentassero imperfezioni, dopo questo controllo si è andato a dichiarare il materiale nella sezione *part material*. Si è applicato su tutto il dominio aria fredda come gas compressibile tenendo conto della variazione della viscosità attraverso formula di Sutherlands. A questo punto bisognava definire delle regioni che allo scopo dello studio sono molto importanti. Queste regioni servono per impostare in maniera corretta le boundary condition e per estrapolare il valore della distribuzione di pressione a parete per confrontare i risultati ottenuti con quelli sperimentali. Per la condizione di flusso compressibile, l'equazione dell'energia risulta accoppiata con quella della massa e quantità di moto e si è dovuto impostare come condizione di analisi di flusso l'opzione *density-based solver*. Si è impostato come condizione iniziale su tutto il dominio l'equazione di Poisson per la pressione per rendere stabili le simulazioni. Si sono impostati come parametri per analisi di fluidi compressibili la pressione assoluta e *stady-state analysis*.

### 6.2.1 Condizioni al contorno

Le regioni precedentemente dichiarate in questa fase sono fondamentali, infatti grazie a loro si riesce a imporre le condizioni al contorno in maniera corretta. Per questo studio si sono definite tre condizioni al contorno come riportato in figura 6.5: *Flow Boundary*; *Wall Boundary*; *Periodic Boundary*.



**Figura 6.4:** Rappresentazione della scelta delle regioni

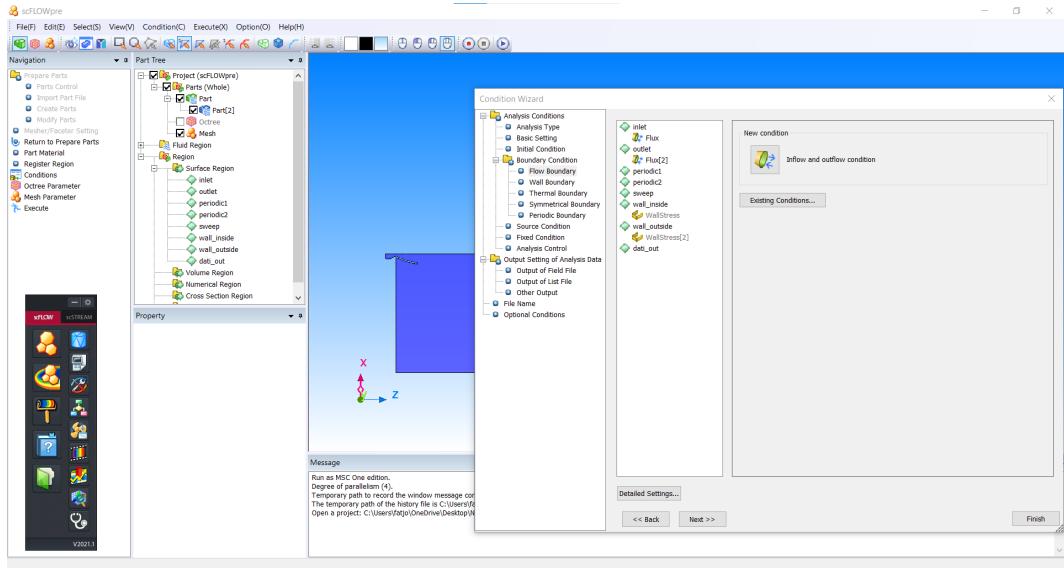
Come condizione di flusso si è impostato in ingresso dell'ugello pressione totale  $p_0 = 2.5 \cdot 10^6 Pa$ , temperatura  $T_0 = 283.5 K$  e in uscita del dominio la condizione ambiente che nel caso in esame è di  $p_a = 99009.9 Pa$ . Nelle pareti dell'ugello si è impostata la condizione di *no – slip* ed infine sulle facce laterali si è definito la condizione di periodicità visto che il dominio è uno spicchio di  $5^\circ$  del 3D come si può notare in figura 6.1.

### 6.3 Generazione della mesh e della struttura Octree

Al fine di effettuare l'analisi bisogna creare la mesh, sc-Flow lavora con mesh non strutturata però prima di fare questo passaggio bisogna creare un modello octree. La funzione octree è una peculiarità di questo solutore che ha lo scopo di creare una pseudo mesh strutturata in modo da avere un'anteprima di come si distribuirà e che dimensione avrà la vera mesh effettiva andando così a controllare le regioni dove si vuole infittire maggiormente. Questa funzione permette di risparmiare tempo nel caso in cui la mesh risultasse troppo grezza visivamente, anche se poi bisogna fare un controllo sui risultati finali. A questo punto si è proceduto a generare la mesh vera e propria. Per studiare la turbolenza con i modelli RANS bisogna soddisfare la condizione di:

$$y^+ = \frac{u_\tau h}{\mu} < 1 \quad (6.1)$$

## Generazione della mesh e della struttura Octree



**Figura 6.5:** Scheda condizioni al contorno

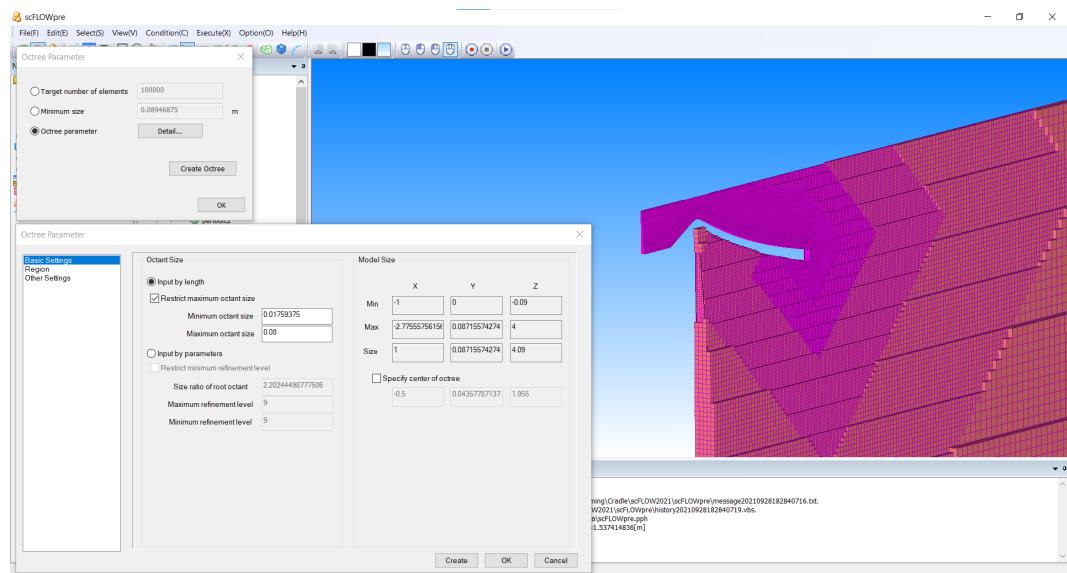
come descritto nel capitolo 4.

A fronte di questo si è trovato che l'altezza del primo prisma per cercare di rispettare questa condizione è di  $h = 2 \cdot 10^{-7}$ . Per costruire la mesh in questo caso di studio si è imposto 1 elemento nello spessore, ovvero nello spicchio, come riportato in figura 6.1.

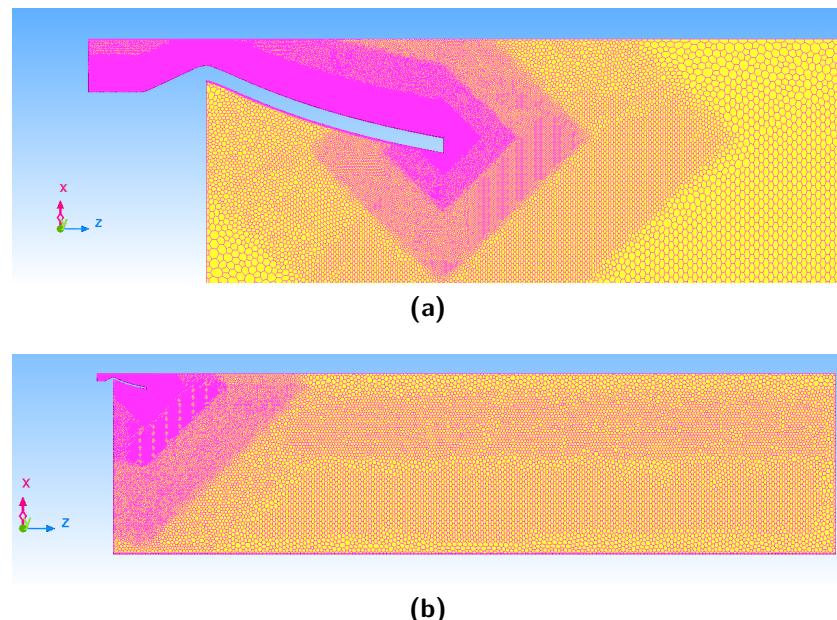
A questo punto conoscendo l'altezza del primo prisma si è costruita la mesh come riportato in figura 6.7.

Il numero di prismi a parete è un parametro fondamentale nello studio della separazione perché in base al modello di turbolenza RANS, al altezza del primo prisma a parete e del numero di prismi a parete varia il punto di separazione. Si è fatto uno studio di convergenza per i prismi a parete e si è notato che maggiore era il numero dei prismi e più la soluzione convergeva verso i risultati sperimentali. Questo studio viene riportato in figura 6.8, a fronte di questo studio si è ritenuto opportuno posizionare 90 prismi a parete e come vedremo più avanti questo numero è quello ottimale.

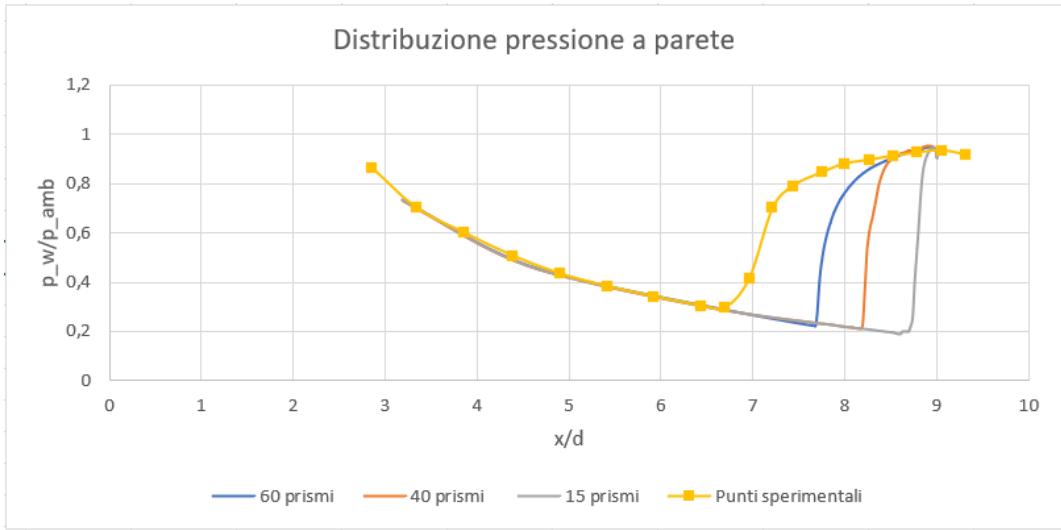
## Generazione della mesh e della struttura Octree



**Figura 6.6:** Scheda Octree con dominio

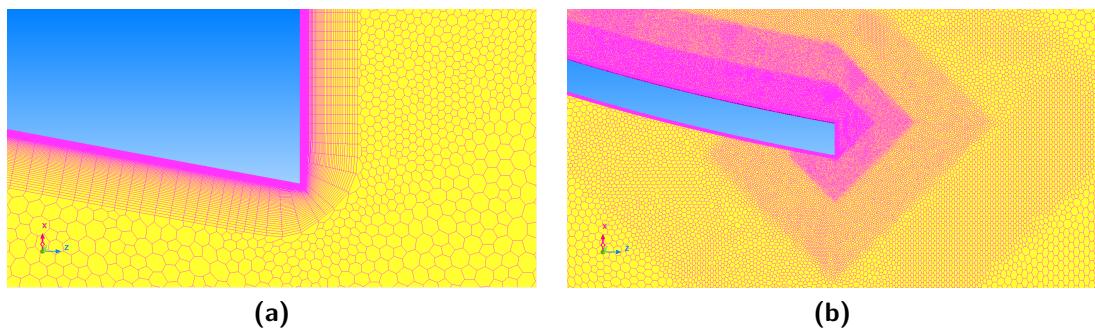


**Figura 6.7:** Dominio con Mesh



**Figura 6.8:** Confronto tra punti sperimentali e soluzioni all'aumentare dei prismi a parete.

Di seguito viene riportato la mesh a parete in uno dei due spigoli vivi dell'ugello e possiamo notare come la crescita dei prism layer è ottima perché la dimensione del ultimo prisma è della stessa dimensione del primo poliedro. La regione a parete è molto fitta e questo permette di cogliere alla perfezione anche questo tipo strato limite che risulta essere molto spesso.

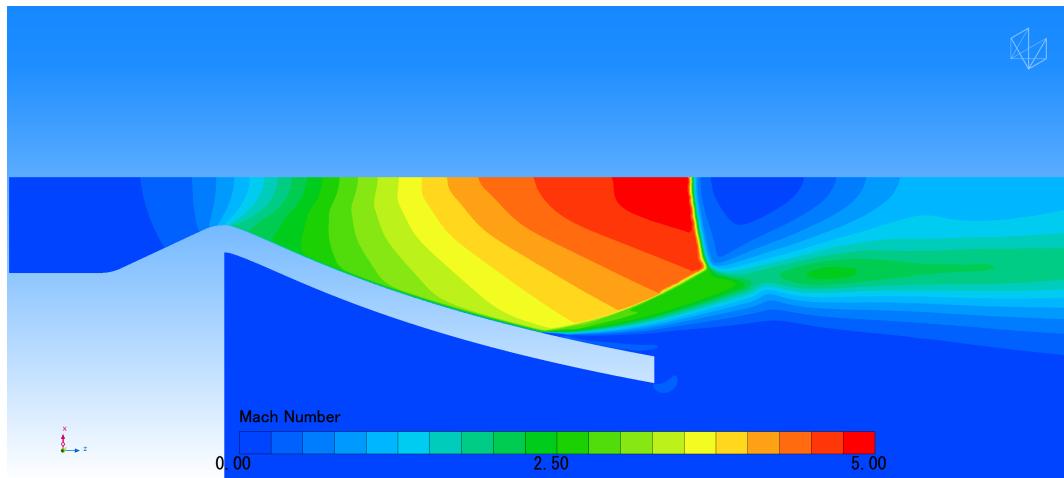


**Figura 6.9:** Prism layer e mesh vicino a parete nella sezione d'uscita

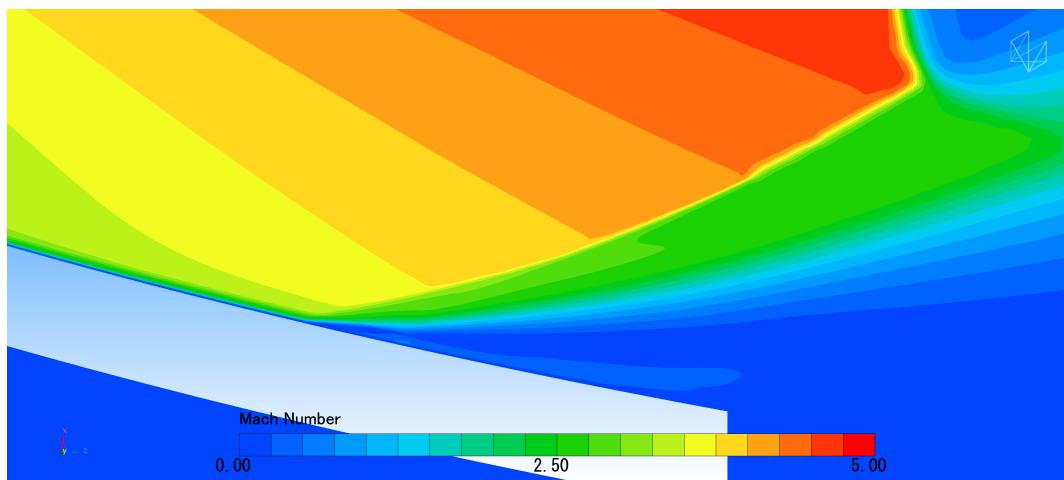
A questo punto si sono lanciate le simulazioni attraverso il solutore ottenendo così i risultati riportati di seguito.

## 6.4 Risultati modello $K - \omega$

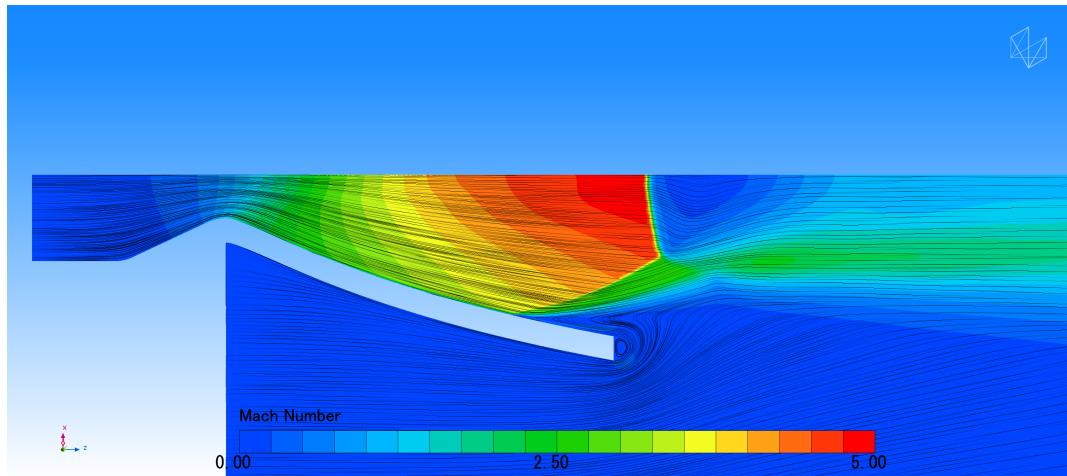
I risultati riportati in questo sottocapitolo sono quelli ottenuti col modello di turbolenza RANS  $k - \omega$



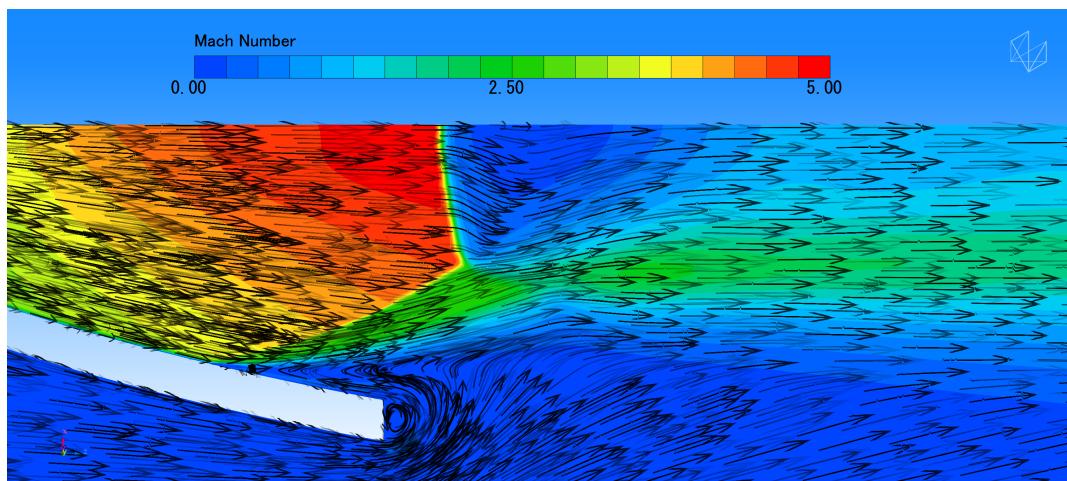
**Figura 6.10:** Campo di Mach



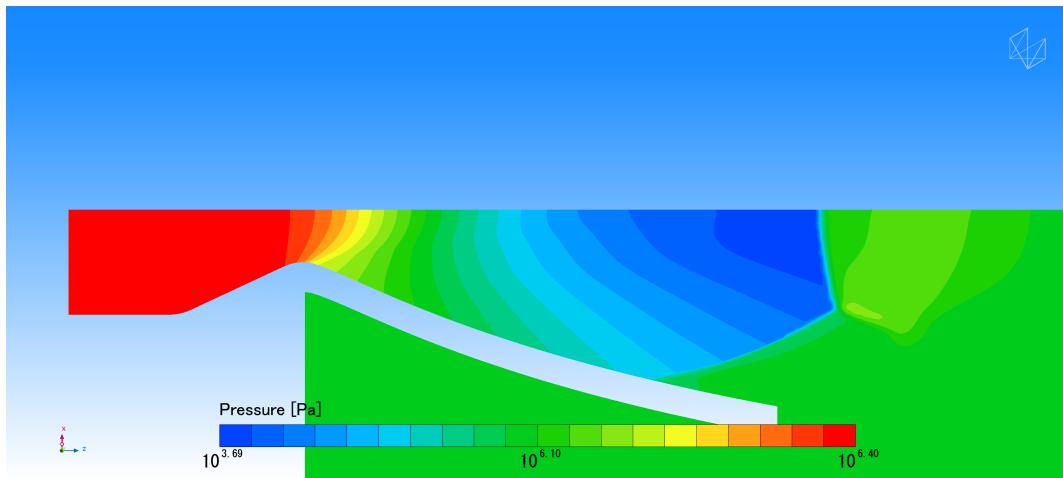
**Figura 6.11:** Punto di separazione nel campo di Mach



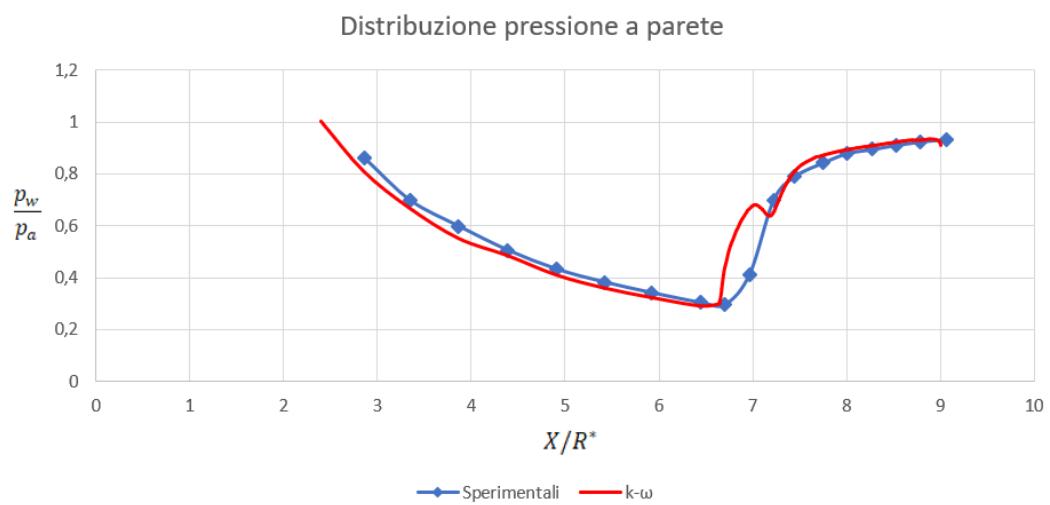
**Figura 6.12:** Linee di corrente



**Figura 6.13:** Linee di corrente disco di Mach



**Figura 6.14:** Campo di pressione in scala logaritmica



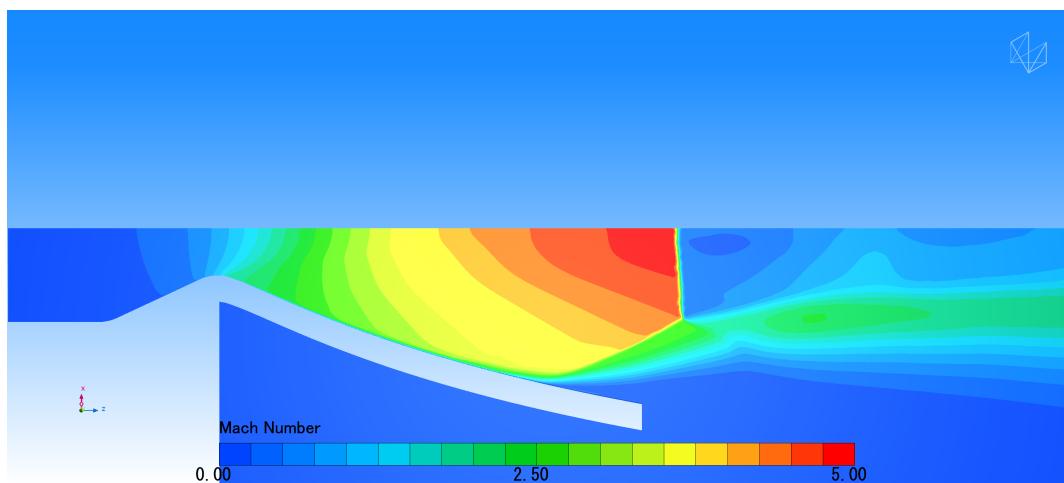
**Figura 6.15:** Confronto tra dati sperimentali e modello  $k - \omega$

#### 6.4.1 Commento

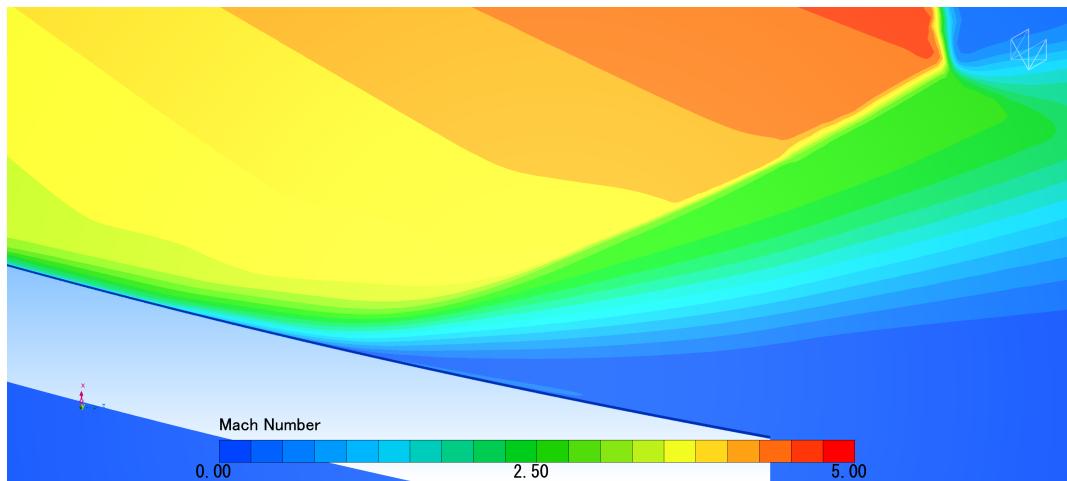
Nel grafico 6.15 si è riportato il confronto tra dati sperimentali e pressione a parete ottenuta col modello numerico, da questo confronto possiamo notare come l'andamento parabolico decrescente è lo stesso per le due soluzioni e come il punto di separazione avviene per entrambi a  $X/R^* = 6.6$ . Si può notare come però la soluzione numerica ha un andamento oscillante dopo il punto di separazione, questo perché si forma una bolla di ricircolo come si nota nella figura 6.23.

### 6.5 Risultati modello $K - \varepsilon$

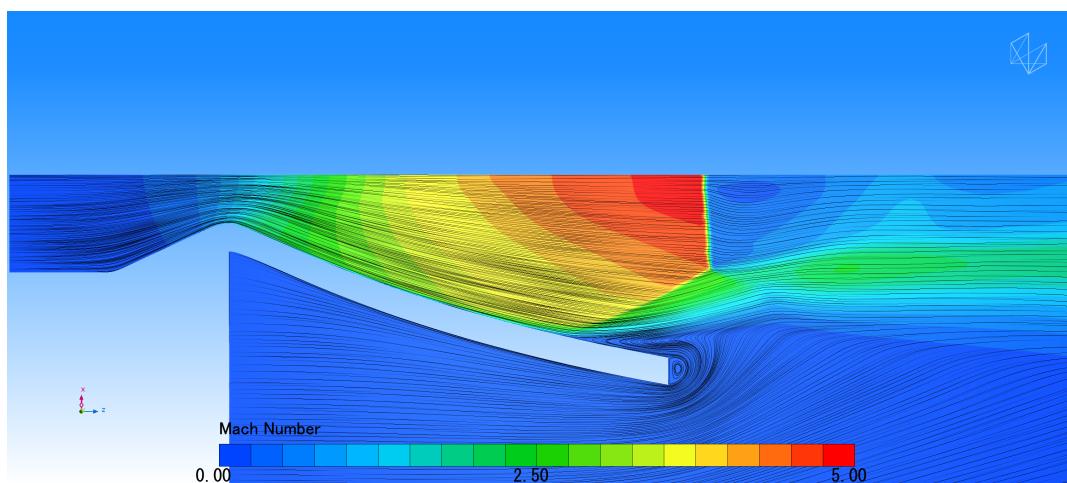
I risultati riportati in questo sottocapitolo sono quelli ottenuti col modello di turbolenza RANS  $k - \varepsilon$



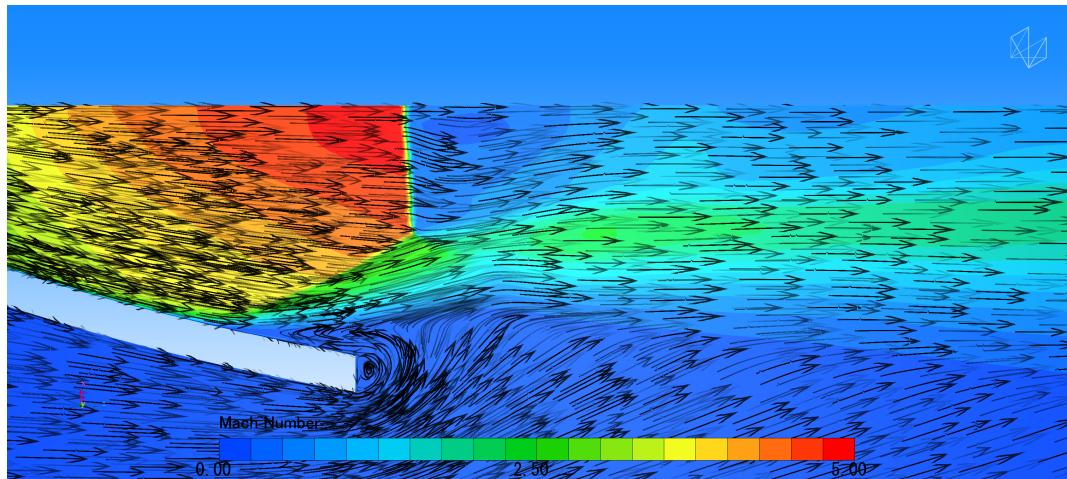
**Figura 6.16:** Campo di Mach



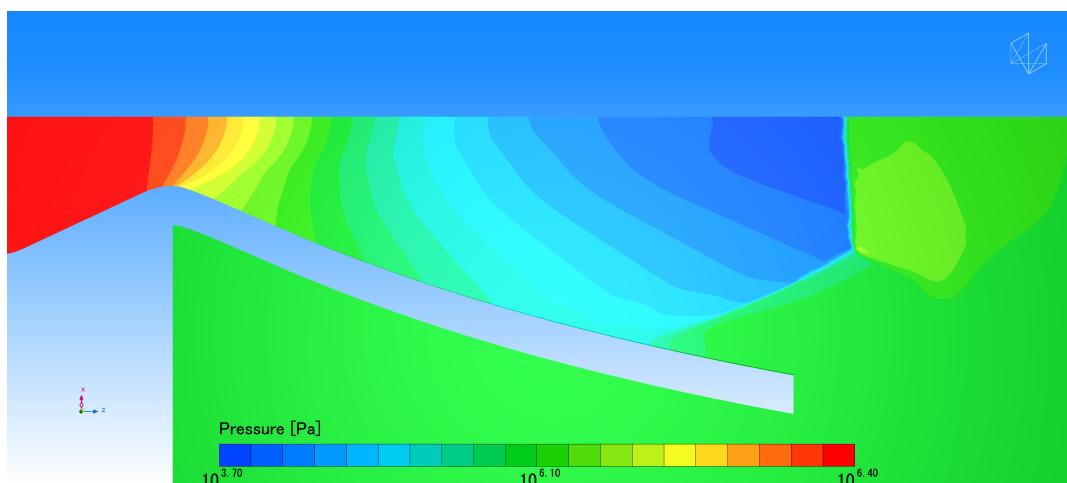
**Figura 6.17:** Punto di separazione nel campo di Mach



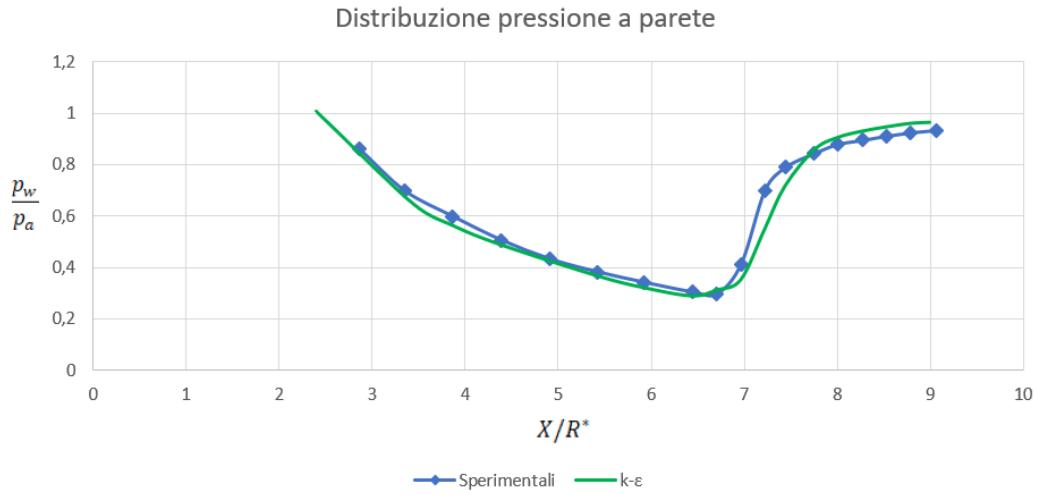
**Figura 6.18:** Linee di corrente



**Figura 6.19:** Linee di corrente disco di Mach



**Figura 6.20:** Campo di pressione in scala logaritmica



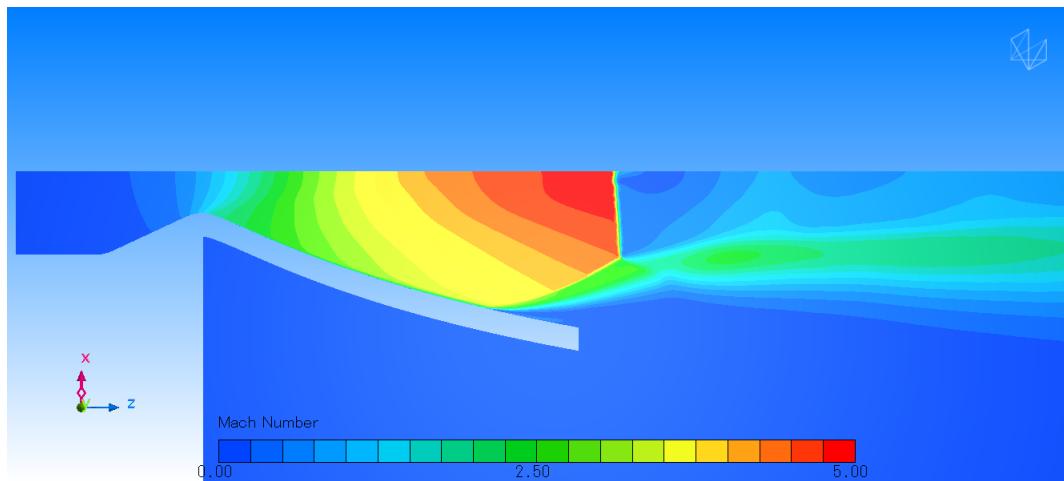
**Figura 6.21:** Confronto tra dati sperimentali e modello  $k - \varepsilon$

### 6.5.1 Commento

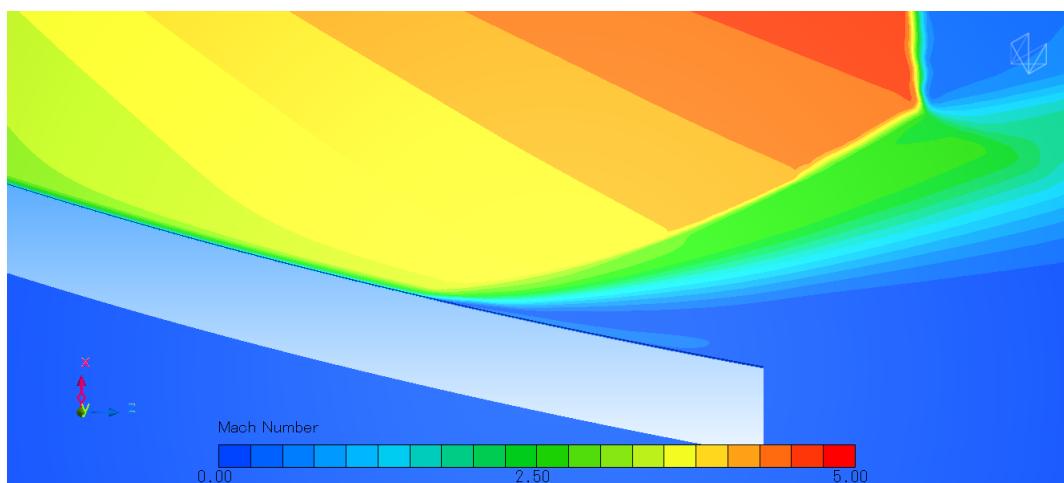
Nel grafico 6.21 si è riportato il confronto tra dati sperimentali e pressione a parete ottenuta con questo modello numerico, da questo confronto possiamo notare come il modello di turbolenza  $k - \varepsilon$  abbia un andamento molto simile ai risultati sperimentali ma con un punto di separazione posticipato, infatti il punto di separazione in questo modello si trova a  $X/R^* = 6.9$ , non abbiamo la presenza di bolla di ricircolo come nel modello  $k - \omega$ .

## 6.6 Risultati modello Spalart – Allmaras

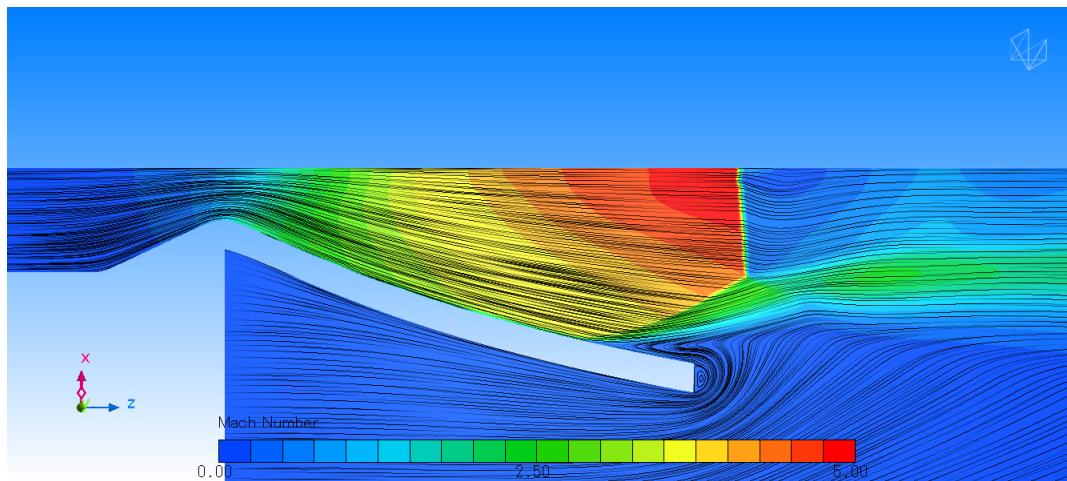
I risultati riportati in questo sottocapitolo sono quelli ottenuti col modello di turbolenza RANS Spalart – Allmaras



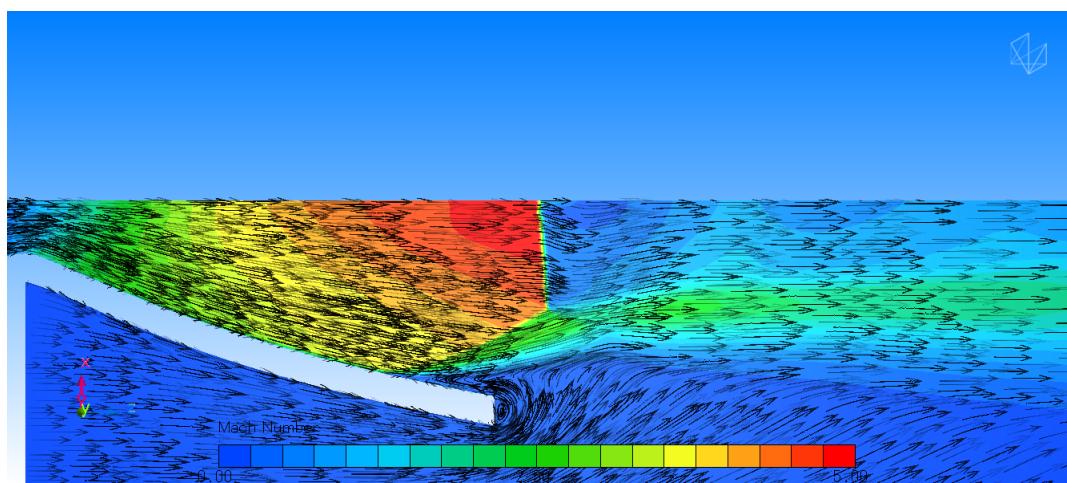
**Figura 6.22:** Campo di Mach



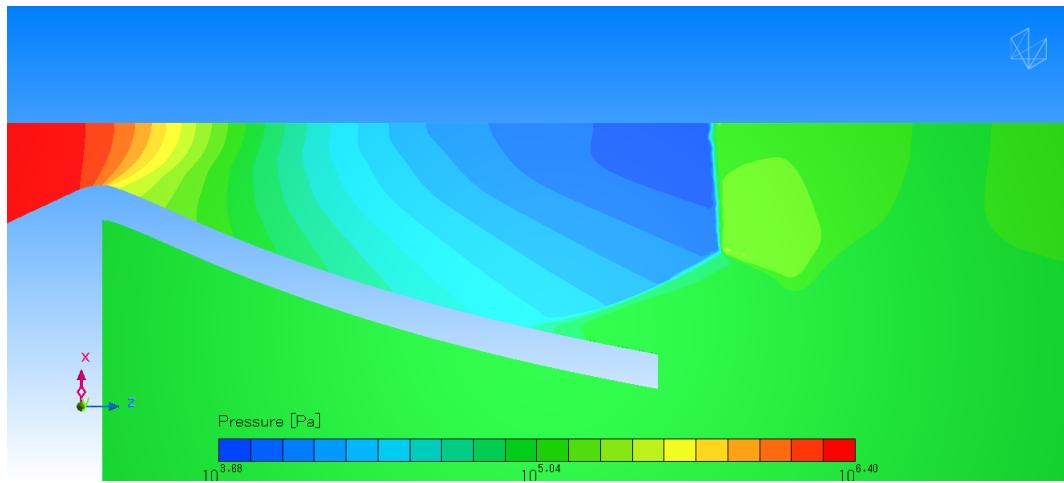
**Figura 6.23:** Punto di separazione nel campo di Mach



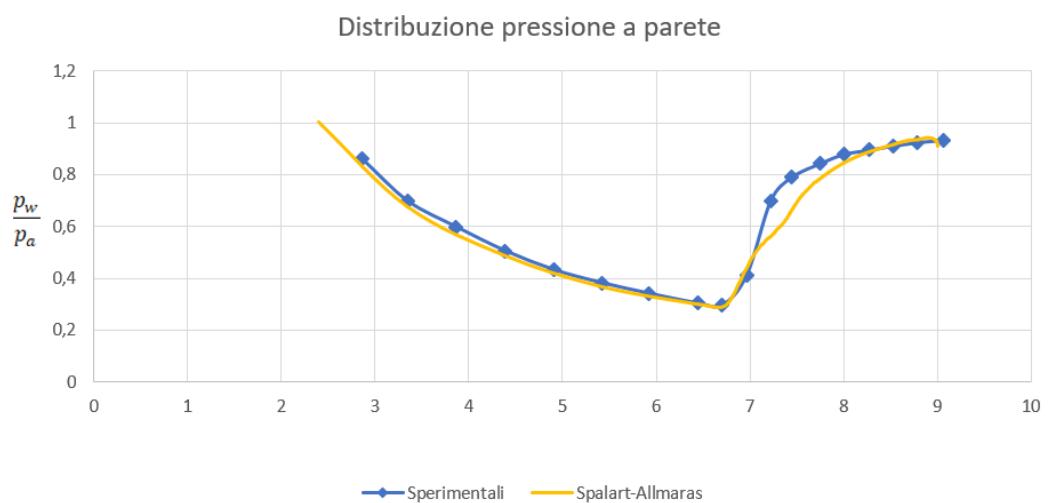
**Figura 6.24:** Linee di corrente



**Figura 6.25:** Linee di corrente disco di Mach



**Figura 6.26:** Campo di pressione in scala logaritmica



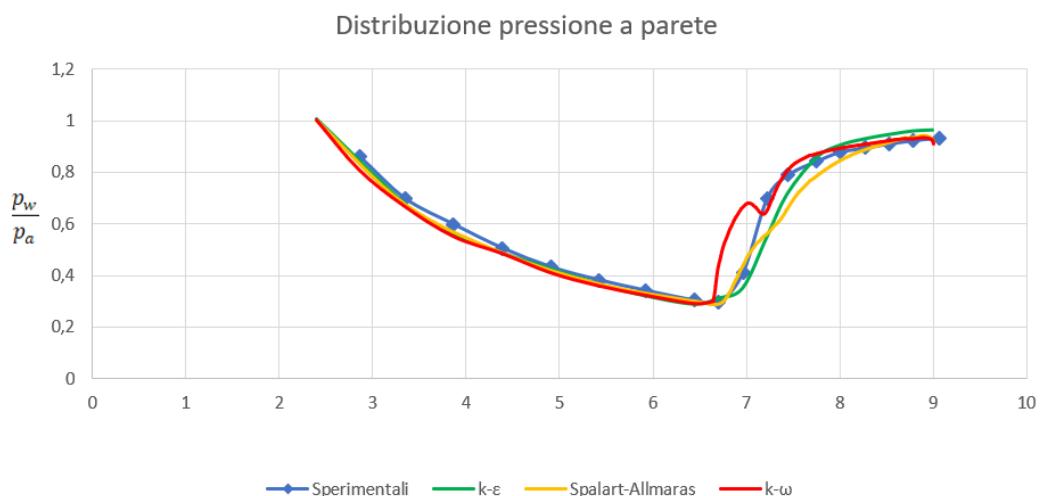
**Figura 6.27:** Confronto tra dati sperimentali e modello  $k - \varepsilon$

### 6.6.1 Commento

Nel grafico 6.27 si è riportato il confronto tra dati sperimentali e pressione a parete ottenuta con questo modello numerico, da questo confronto possiamo notare come il modello di turbolenza RANS *Spalart – Allmaras* ha un punto di separazione coincidente con quello sperimentale ma subito dopo presenta un andamento discorde dovuto alla zona di ricircolo. Non si è formata la bolla come nel modello  $k - \omega$  dove la discontinuità è molto più marcata.

# Capitolo 7

## Conclusioni



**Figura 7.1:** Confronto tra dati sperimentali e modelli di turbolenza RANS

Dal grafico 7.1 possiamo notare come tutti e tre i modelli RANS danno risultati molto buoni. Possiamo notare come il modello di turbolenza  $k - \varepsilon$  posticipi di circa +1% il fenomeno della separazione rispetto ai risultati sperimentali ma con un andamento analogo. Visualizzando i campi di moto di Mach e pressione per i tre modelli di turbolenza riportati nel capitolo precedente si può notare come essi rispettino l'evoluzione prevista dalla letteratura, infatti abbiamo l'urto obliquio che parte dove si ha la separazione, il disco di Mach vicino alla sezione d'uscita e la slip-line. Il disco di Mach è un urto retto infatti il campo di velocità passa da supersonica a monte a subsonica a valle del urto. Nella sezione d'uscita dell'ugello a parete, per tutti e tre i modelli di turbolenza, si trova un vortice intrappolato dovuto al risucchio di portata dal flusso esterno. Un altro vortice intrappolato si

---

avrebbe subito dopo l’urto retto per una griglia sotto risolta, ma in questo studio quella regione è stata adeguatamente infittita e quindi il vortice non si nota. Infatti le linee di corrente deflettono in presenza del disco di Mach per poi riassettarsi in direzione normale all’ingresso e non rimangono intrappolate all’interno della regione subsonica. I fenomeni appena descritti si possono notare nella figura 6.25 ma valgono per tutti e tre i modelli di turbolenza.

# Bibliografia

- [1] J. H. AHLBERG et al. “Truncated Perfect Nozzles in Optimum Nozzle Design”. In: *ARS Journal* 31.5 (1961), pp. 614–620. DOI: [10.2514/8.5577](https://doi.org/10.2514/8.5577). eprint: <https://doi.org/10.2514/8.5577>. URL: <https://doi.org/10.2514/8.5577>.
- [2] Jiri Blazek. *Computational fluid dynamics : principles and applications*. eng. Butterworth-Heinemann, 2015. ISBN: 0-12-801172-6.
- [3] MSC Software Corporation. *Cradle guida utente*. 2021.
- [4] Lorenzo Casalino Dario Pastrone. “Appunti del Corso: Endoreattori”. In: (2018).
- [5] Manuel Frey. “Behandlung von Strömungsproblemen in Raketendüsen bei Überexpansion, Investigation of flow problems in rocket nozzles at overexpansion”. In: (2001). DOI: <http://dx.doi.org/10.18419/opus-3650>.
- [6] Manuel Frey, Konrad Makowka e Thomas Aichner. “The TICTOP nozzle — a new nozzle contouring concept”. In: mag. 2016.
- [7] Gaetano Iuso. “Appunti del Corso: Aerodinamica Sperimentale”. In: (2019).
- [8] Jan Ostlund. *Supersonic Flow Separation With Application To Rocket Engine Nozzle*. Royal Institute of Technology Department of Mechanics, S-100 44 Stockholm, Sweden, giu. 2004.
- [9] Jan Östlund. “Flow Processes in Rocket Engine Nozzles with Focus on Flow Separation and Side-Loads”. In: 2002.
- [10] Robert H. Schmucker e United States. *Flow processes in overexpanded chemical rocket nozzles. Part 2, Side loads due to asymmetric separation [microform]* / Robert H. Schmucker. English. National Aeronautics e Space Administration Washington, D.C, 1984, p. 1 v. URL: <http://purl.access.gpo.gov/GPO/LPS98675>.

## *Bibliografia*

---

- [11] R. Stark e B. Wagner. “Mach disk shape in truncated ideal contour nozzles”. In: *Shock Waves*. A cura di Klaus Hannemann e Friedrich Seiler. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009, pp. 967–972. ISBN: 978-3-540-85181-3.