



中华人民共和国国家标准

GB/T 38635.1—2020

信息安全技术 SM9 标识密码算法 第 1 部分：总则

Information security technology—Identity-based cryptographic algorithms SM9—
Part 1: General

2020-04-28 发布

2020-11-01 实施

国家市场监督管理总局
国家标准化管理委员会 发布

目 次

前言	III
引言	IV
1 范围	1
2 规范性引用文件	1
3 术语和定义	1
4 符号	1
5 有限域和椭圆曲线	3
5.1 有限域	3
5.2 有限域上的椭圆曲线	4
5.3 椭圆曲线群	4
5.4 椭圆曲线多倍点运算	5
5.5 椭圆曲线子群上点的验证	5
5.6 离散对数问题	5
6 双线性对及安全曲线	5
6.1 双线性对	5
6.2 安全性	6
6.3 嵌入次数及安全曲线	6
7 数据类型及其转换	6
7.1 数据类型	6
7.2 数据类型转换	7
8 系统参数及其验证	10
8.1 系统参数	10
8.2 系统参数的验证	11
附录 A (规范性附录) 参数定义	12
附录 B (资料性附录) 关于椭圆曲线的背景知识	14
附录 C (资料性附录) 椭圆曲线上双线性对的计算	21
附录 D (资料性附录) 数论算法	28
参考文献	33

前 言

GB/T 38635《信息安全技术 SM9 标识密码算法》分为两个部分：

——第 1 部分：总则；

——第 2 部分：算法。

本部分为 GB/T 38635 的第 1 部分。

本部分按照 GB/T 1.1—2009 给出的规则起草。

请注意本文件的某些内容可能涉及专利。本文件的发布机构不承担识别这些专利的责任。

本部分由全国信息安全标准化技术委员会(SAC/TC 260)提出并归口。

本部分起草单位：国家信息安全工程技术研究中心、北京国脉信安科技有限公司、深圳奥联信息安全技术有限公司、中国科学院软件研究所、武汉大学、中科院信息工程研究所。

本部分主要起草人：陈晓、程朝辉、张振峰、叶顶峰、胡磊、陈建华、季庆光、袁文恭、刘平、马宁、袁峰、李增欣、王学进、杨恒亮、张青坡、马艳丽、浦雨三、唐英、孙移盛、安萱、封维端、张立圆。

引 言

A. Shamir 在 1984 年提出了标识密码 (Identity-based cryptography) 的概念, 在标识密码系统中, 用户的私钥由密钥生成中心 (KGC) 根据主密钥和用户标识计算得出, 用户的公钥由用户标识唯一确定, 由标识管理者保证标识的真实性。与基于证书的公钥密码系统相比, 标识密码系统中的密钥管理环节可以得到适当简化。

1999 年, K. Ohgishi, R. Sakai 和 M. Kasahara 在日本提出了用椭圆曲线对 (pairing) 构造基于标识的密钥共享方案; 2001 年, D. Boneh 和 M. Franklin, 以及 R. Sakai, K. Ohgishi 和 M. Kasahara 等人独立提出了用椭圆曲线对构造标识公钥加密算法。这些工作引发了标识密码的新发展, 出现了一批用椭圆曲线对实现的标识密码算法, 其中包括数字签名算法、密钥交换协议、密钥封装机制和公钥加密算法等。

椭圆曲线对具有双线性的性质, 它在椭圆曲线的循环子群与扩域的乘法循环子群之间建立联系, 构成了双线性 DH、双线性逆 DH、判定性双线性逆 DH、 τ -双线性逆 DH 和 τ -Gap-双线性逆 DH 等难题, 当椭圆曲线离散对数问题和扩域离散对数问题的求解难度相当时, 可用椭圆曲线对构造出安全性和实现效率兼顾的标识密码。

信息安全技术 SM9 标识密码算法

第 1 部分:总则

1 范围

GB/T 38635 的本部分规定了 SM9 标识密码算法涉及的必要相关数学基础知识、密码技术和具体参数。

本部分适用于 SM9 标识密码的实现和应用。

2 规范性引用文件

下列文件对于本文件的应用是必不可少的。凡是注日期的引用文件,仅注日期的版本适用于本文件。凡是不注日期的引用文件,其最新版本(包括所有的修改单)适用于本文件。

GB/T 32905 信息安全技术 SM3 密码杂凑算法

GB/T 32907 信息安全技术 SM4 分组密码算法

3 术语和定义

下列术语和定义适用于本文件。

3.1

标识 identity

由实体无法否认的信息组成,如实体的可识别名称、电子邮箱、身份证号、电话号码、街道地址等,可唯一确定一个实体的身份。

3.2

主密钥 master key

处于标识密码密钥分层结构最顶层的密钥,包括主私钥和主公钥,其中主公钥公开,主私钥由 KGC 秘密保存。KGC 用主私钥和用户的标识生成用户的私钥。在标识密码中,主私钥一般由 KGC 通过随机数发生器产生,主公钥由主私钥结合系统参数产生。

3.3

密钥生成中心 key generation center; KGC

在 SM9 标识密码中,负责选择系统参数、生成主密钥并产生用户私钥的可信机构。

3.4

SM3 算法 SM3 algorithm

由 GB/T 32905 定义的一种杂凑算法。

3.5

SM4 算法 SM4 algorithm

由 GB/T 32907 定义的一种分组加密算法。

4 符号

下列符号适用于本文件。

cf :椭圆曲线阶相对于 N 的余因子。

cid :用一个字节表示的曲线识别符,用以区分所用曲线的类型。

$\deg(f)$:多项式 $f(x)$ 的次数。

d_1, d_2 : k 的两个因子。

E :定义在有限域上的椭圆曲线。

$ECDLP$:椭圆曲线离散对数问题。

$E(F_q)$:有限域 F_q 上椭圆曲线 E 的所有有理点(包括无穷远点 O)组成的集合。

$E(F_q)[r]$: $E(F_q)$ 上 r -扭点的集合[即曲线 $E(F_q)$ 上的 r 阶扭子群]。

e :从 $G_1 \times G_2$ 到 G_T 的双线性对。

eid :用一个字节表示的双线性对 e 的识别符,用以区分所用双线性对的类型。

$FDLP$:有限域上离散对数问题。

F_p :包含 p 个元素的素域。

F_q :包含 q 个元素的有限域。

F_q^* :由 F_q 中所有非零元构成的乘法群。

F_{q^m} :有限域 F_q 的 m 次扩域。

G_T :阶为素数 N 的乘法循环群。

G_1 :阶为素数 N 的加法循环群。

G_2 :阶为素数 N 的加法循环群。

$\gcd(x, y)$: x 和 y 的最大公因子。

k :曲线 $E(F_q)$ 相对于 N 的嵌入次数,其中 N 是 $\#E(F_q)$ 的素因子。

m :有限域 F_{q^m} 关于 F_q 的扩张次数。

$\text{mod } f(x)$:模多项式 $f(x)$ 的运算。

$\text{mod } n$:模 n 运算。

示例: $23 \bmod 7 = 2$ 。

N :循环群 G_1, G_2 和 G_T 的阶,为大于 2^{191} 的素数。

O :椭圆曲线上的一个特殊点,称为无穷远点或零点,是椭圆曲线加法群的单位元。

P : $P = (x_P, y_P)$ 是椭圆曲线上除 O 之外的一个点,其坐标 x_P, y_P 满足椭圆曲线方程。

P_1 : G_1 的生成元。

P_2 : G_2 的生成元。

$P+Q$:椭圆曲线 E 上两个点 P 与 Q 的和。

p :大于 2^{191} 的素数。

q :有限域 F_q 中元素的数目。

x_P :点 P 的 x 坐标。

$x \parallel y$: x 与 y 的拼接,其中 x 和 y 是比特串或字节串。

$x \equiv y \pmod{q}$: x 与 y 模 q 同余。即, $x \bmod q = y \bmod q$ 。

y_P :点 P 的 y 坐标。

$\#E(K)$: $E(K)$ 上点的数目,称为椭圆曲线群 $E(K)$ 的阶,其中 K 为有限域(包括 F_q 和 F_{q^k})。

$\langle P \rangle$:由椭圆曲线上点 P 生成的循环群。

$[u]P$:椭圆曲线上点 P 的 u 倍点。

$[x, y]$:不小于 x 且不大于 y 的整数的集合。

$\lceil x \rceil$:顶函数,不小于 x 的最小整数。例如, $\lceil 7 \rceil = 7, \lceil 8.3 \rceil = 9$ 。

$\lfloor x \rfloor$:底函数,不大于 x 的最大整数。例如, $\lfloor 7 \rfloor = 7, \lfloor 8.3 \rfloor = 8$ 。

β :扭曲线参数。

$\psi: G_2$ 到 G_1 的同态映射, 满足 $P_1 = \psi(P_2)$ 。

\oplus : 长度相等的两个比特串按比特的模 2 加运算。

5 有限域和椭圆曲线

5.1 有限域

5.1.1 概述

域由一个非空集合 F 和两种运算共同组成, 这两种运算分别为加法(用“+”表示)和乘法(用“ \cdot ”表示), 并且满足下列算术特性:

- a) $(F, +)$ 对于加法运算构成加法交换群, 单位元用 0 表示;
- b) $(F \setminus \{0\}, \cdot)$ 对于乘法运算构成乘法交换群, 单位元用 1 表示;
- c) 分配律成立: 对于所有的 $a, b, c \in F$, 都有 $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ 。

若集合 F 是有限集合, 则称域为有限域。有限域的元素个数称为有限域的阶。

5.1.2 素域 F_p

阶为素数的有限域是素域。

设 p 是一个素数, 则整数模 p 的全体余数的集合 $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ 关于模 p 的加法和乘法构成一个 p 阶素域, 用符号 F_p 表示。

F_p 具有如下性质:

- a) 加法单位元是 0;
- b) 乘法单位元是 1;
- c) 域元素的加法是整数的模 p 加法, 即若 $a, b \in F_p$, 则 $a+b = (a+b) \bmod p$;
- d) 域元素的乘法是整数的模 p 乘法, 即若 $a, b \in F_p$, 则 $a \cdot b = (a \cdot b) \bmod p$ 。

5.1.3 有限域 F_q 的 m 次扩域 F_{q^m}

设 q 是一个素数或素数方幂, $f(x)$ 是多项式环 $F_q[x]$ 上的一个 $m(m>1)$ 次不可约多项式(称为约化多项式或域多项式), 商环 $F_q[x]/(f(x))$ 是含 q^m 个元素的有限域(记为 F_{q^m}), 称 F_{q^m} 是有限域 F_q 的扩域, 域 F_q 为域 F_{q^m} 的子域, m 为扩张次数。 F_{q^m} 可以看成 F_q 上的 m 维向量空间。 F_{q^m} 的每一个元可以唯一地写成 $a_0\beta_0 + a_1\beta_1 + \dots + a_{m-1}\beta_{m-1}$ 的形式, 其中 $a_i \in F_q$, 而 $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{m-1}$ 是向量空间 F_{q^m} 在 F_q 上的一组基。

F_{q^m} 中的元素可以用多项式基或正规基表示。在本部分中, 如果不作特别说明, F_{q^m} 中元素均采用多项式基表示。

不可约多项式 $f(x)$ 可取为首一的多项式 $f(x) = x^m + f_{m-1}x^{m-1} + \dots + f_2x^2 + f_1x + f_0$ (其中 $f_i \in F_q, i=0, 1, \dots, m-1$), F_{q^m} 中的元素由多项式环 $F_q[x]$ 中所有次数低于 m 的多项式构成。多项式集合 $\{x^{m-1}, x^{m-2}, \dots, x, 1\}$ 是 F_{q^m} 在 F_q 上的一组基, 称为多项式基。域 F_{q^m} 上的任意一个元素 $a(x) = a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + \dots + a_1x + a_0$ 在 F_q 上的系数恰好构成了一个 m 维向量, 用 $a = (a_{m-1}, a_{m-2}, \dots, a_1, a_0)$ 表示, 其中分量 $a_i \in F_q, i=0, 1, \dots, m-1$ 。

F_{q^m} 具有如下性质:

- a) 零元 0 用 m 维向量 $(0, \dots, 0, 0)$ 表示;
- b) 乘法单位元 1 用 m 维向量 $(0, \dots, 0, 1)$ 表示;
- c) 两个域元素的加法为向量加法, 各个分量用域 F_q 的加法;
- d) 域元素 a 和 b 的乘法定义如下: 设 a 和 b 对应的 F_q 上多项式为 $a(x)$ 和 $b(x)$, 则 $a \cdot b$ 定义为

多项式 $(a(x) \cdot b(x)) \bmod f(x)$ 对应的向量；

- e) 逆元: 设 a 对应的 F_q 上多项式为 $a(x)$, a 的逆元 a^{-1} 对应的 F_q 上多项式为 $a^{-1}(x)$, 那么有 $a(x) \cdot a^{-1}(x) \equiv 1 \bmod f(x)$ 。

本部分使用 F_q 上的 12 次扩域见附录 A。

关于有限域的扩域 F_{q^m} 更多细节, 参见附录 B 中的 B.1。

5.2 有限域上的椭圆曲线

有限域 F_{q^m} ($m \geq 1$) 上的椭圆曲线是由点组成的集合。在仿射坐标系下, 椭圆曲线上点 P (非无穷远点) 用满足一定方程的两个域元素 x_P 和 y_P 表示, x_P, y_P 分别称为点 P 的 x 坐标和 y 坐标, 并记 $P = (x_P, y_P)$ 。

本部分描述特征为大素数 p 的域上的曲线。

本部分如果不作特别说明, 椭圆曲线上的点均采用仿射坐标表示。

定义在 F_{p^m} 上的椭圆曲线方程见式(1):

$$y^2 = x^3 + ax + b, a, b \in F_{p^m}, \text{ 且 } 4a^3 + 27b^2 \neq 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

椭圆曲线 $E(F_{p^m})$ 定义为:

$E(F_{p^m}) = \{(x, y) | x, y \in F_{p^m}, \text{ 且满足式(1)}\} \cup \{O\}$, 其中 O 是无穷远点。

椭圆曲线 $E(F_{p^m})$ 上的点的数目用 $\#E(F_{p^m})$ 表示, 称为椭圆曲线 $E(F_{p^m})$ 的阶。

本部分规定素数 $p > 2^{191}$ 。

设 E 和 E' 是定义在 F_q 上的椭圆曲线, 如果存在一个同构映射 $\phi_d: E'(F_{q^d}) \rightarrow E(F_{q^d})$, 其中 d 是使映射存在的最小整数, 则称 E' 为 E 的 d 次扭曲线。当 $p \geq 5$ 时, d 的取值有三种情况:

- 若 $a=0, b \neq 0$, 那么 $d=6, E': y^2 = x^3 + \beta b, \phi_6: E' \rightarrow E: (x, y) \mapsto (\beta^{-1/3}x, \beta^{-1/2}y)$;
- 若 $b=0, a \neq 0$, 那么 $d=4, E': y^2 = x^3 + \beta ax, \phi_4: E' \rightarrow E: (x, y) \mapsto (\beta^{-1/2}x, \beta^{-3/4}y)$;
- 若 $a \neq 0, b \neq 0$, 那么 $d=2, E': y^2 = x^3 + \beta^2 ax + \beta^3 b, \phi_2: E' \rightarrow E: (x, y) \mapsto (\beta^{-1}x, \beta^{-3/2}y)$ 。

5.3 椭圆曲线群

椭圆曲线 $E(F_{p^m})$ ($m \geq 1$) 上的点按照下面的加法运算规则, 构成一个交换群:

- $O + O = O$ 。
- $\forall P = (x, y) \in E(F_{p^m}) \setminus \{O\}, P + O = O + P = P$ 。
- $\forall P = (x, y) \in E(F_{p^m}) \setminus \{O\}, P$ 的逆元素 $-P = (x, -y), P + (-P) = O$ 。
- 两个非互逆的不同点相加的规则:

设 $P_1 = (x_1, y_1) \in E(F_{p^m}) \setminus \{O\}, P_2 = (x_2, y_2) \in E(F_{p^m}) \setminus \{O\}$, 且 $x_1 \neq x_2$,

设 $P_3 = (x_3, y_3) = P_1 + P_2$, 则:

$$\begin{cases} x_3 = \lambda^2 - x_1 - x_2 \\ y_3 = \lambda(x_1 - x_3) - y_1 \end{cases}$$

其中:

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}。$$

- 倍点规则:

设 $P_1 = (x_1, y_1) \in E(F_{p^m}) \setminus \{O\}$, 且 $y_1 \neq 0, P_3 = (x_3, y_3) = P_1 + P_1$,

则:

$$\begin{cases} x_3 = \lambda^2 - 2x_1 \\ y_3 = \lambda(x_1 - x_3) - y_1 \end{cases}$$

其中:

$$\lambda = \frac{3x_1^2 + a}{2y_1}。$$

5.4 椭圆曲线多倍点运算

椭圆曲线上同一个点的重复相加称为该点的多倍点运算。设 u 是一个正整数, P 是椭圆曲线上的点, 其 u 倍点 $Q = [u]P = \underbrace{P + P + \cdots + P}_{u \uparrow}$ 。

多倍点运算可以扩展到 0 倍点运算和负数倍点运算: $[0]P = O, [-u]P = [u](-P)$ 。

多倍点运算可以通过一些技巧有效地实现, 参见 B.2。

5.5 椭圆曲线子群上点的验证

输入: 定义 F_{q^m} 上 (q 为奇素数, $m \geq 1$) 椭圆曲线方程的参数 a, b , 椭圆曲线 $E(F_{q^m})$ 上子群 G 的阶 N , F_{q^m} 上的一对元素 (x, y) 。

输出: 若 (x, y) 是群 G 中的元素, 则输出“有效”; 否则输出“无效”。

计算步骤为:

- 在 F_{q^m} 上验证 (x, y) 是否满足椭圆曲线方程 $y^2 = x^3 + ax + b$;
- 令 $Q = (x, y)$, 验证 $[N]Q = O$ 。

若以上任何一项验证失败, 则输出“无效”; 否则, 输出“有效”。

5.6 离散对数问题

5.6.1 有限域上离散对数问题(FDLP)

有限域 F_{q^m} (q 为奇素数, $m \geq 1$) 的全体非零元素构成一个乘法循环群, 记为 $F_{q^m}^*$ 。 $F_{q^m}^*$ 中存在元素 g , 使得 $F_{q^m}^* = \{g^i \mid 0 \leq i \leq q^m - 2\}$, 称 g 为生成元。 $F_{q^m}^*$ 中元素 a 的阶是满足 $a^t = 1$ 的最小正整数 t 。群 $F_{q^m}^*$ 的阶为 $q^m - 1$, 因此 $t \mid q^m - 1$ 。

设乘法循环群 $F_{q^m}^*$ 的生成元为 g , $y \in F_{q^m}^*$, 有限域上离散对数问题是指确定整数 $x \in [0, q^m - 2]$, 使得 $y = g^x$ 在 $F_{q^m}^*$ 上成立。

5.6.2 椭圆曲线离散对数问题(ECDLP)

已知椭圆曲线 $E(F_{q^m})$ ($m \geq 1$), 阶为 n 的点 $P \in E(F_{q^m})$ 及 $Q \in \langle P \rangle$, 椭圆曲线离散对数问题是指确定整数 $l \in [0, n - 1]$, 使得 $Q = [l]P$ 成立。

6 双线性对及安全曲线



6.1 双线性对

设 $(G_1, +)$, $(G_2, +)$ 和 (G_T, \cdot) 是三个循环群, G_1, G_2 和 G_T 的阶均为素数 N , P_1 是 G_1 的生成元, P_2 是 G_2 的生成元, 存在 G_2 到 G_1 的同态映射 ψ 使得 $\psi(P_2) = P_1$ 。

双线性对 e 是 $G_1 \times G_2 \rightarrow G_T$ 的映射, 满足以下条件:

- 双线性性: 对任意的 $P \in G_1, Q \in G_2, a, b \in \mathbb{Z}_N$, 有 $e([a]P, [b]Q) = e(P, Q)^{ab}$;
- 非退化性: $e(P_1, P_2) \neq 1_{G_T}$;
- 可计算性: 对任意的 $P \in G_1, Q \in G_2$, 存在有效的算法计算 $e(P, Q)$ 。

所用的双线性对定义在椭圆曲线群上, 主要有 Weil 对、Tate 对、Ate 对、R-ate 对等, 相关描述参见

附录 C。

6.2 安全性

双线性对的安全性主要建立在以下几个问题的难解性基础之上：

问题 1 [双线性逆 DH(BIDH)]对 $a, b \in [1, N-1]$, 给定 $([a]P_1, [b]P_2)$, 计算 $e(P_1, P_2)^{b/a}$ 是困难的。

问题 2 [判定性双线性逆 DH(DBIDH)]对 $a, b, r \in [1, N-1]$, 区分 $(P_1, P_2, [a]P_1, [b]P_2, e(P_1, P_2)^{b/a})$ 和 $(P_1, P_2, [a]P_1, [b]P_2, e(P_1, P_2)^r)$ 是困难的。

问题 3 [τ -双线性逆 DH(τ -BDHI)]对正整数 τ 和 $x \in [1, N-1]$, 给定 $(P_1, [x]P_1, P_2, [x]P_2, [x^2]P_2, \dots, [x^\tau]P_2)$, 计算 $e(P_1, P_2)^{1/x}$ 是困难的。

问题 4 [τ -Gap-双线性逆 DH(τ -Gap-BDHI)]对正整数 τ 和 $x \in [1, N-1]$, 给定 $(P_1, [x]P_1, P_2, [x]P_2, [x^2]P_2, \dots, [x^\tau]P_2)$ 和 DBIDH 确定算法, 计算 $e(P_1, P_2)^{1/x}$ 是困难的。

上述问题的难解性是 SM9 标识密码的安全性的重要基础, 这些问题的难解性都意味着 G_1, G_2 和 G_T 上的离散对数问题难解, 选取的椭圆曲线应首先使得离散对数问题难解。

6.3 嵌入次数及安全曲线

设 G 是椭圆曲线 $E(F_q)$ 的 N 阶子群, 使 $N \mid q^k - 1$ 成立的最小正整数 k 称为子群 G 相对于 N 的嵌入次数, 也称为曲线 $E(F_q)$ 相对于 N 的嵌入次数。

设 G_1 是 $E(F_{q^{d_1}})$ (d_1 整除 k) 的 N 阶子群, G_2 是 $E(F_{q^{d_2}})$ (d_2 整除 k) 的 N 阶子群, 则椭圆曲线双线性对的值域 G_T 是 $F_{q^k}^*$ 的子群, 因此椭圆曲线双线性对可将椭圆曲线离散对数问题转化为有限域 $F_{q^k}^*$ 上离散对数问题。嵌入次数越大安全性越高, 但双线性对的计算越困难, 因而需要采用嵌入次数适中且达到安全性标准的椭圆曲线。本部分规定 $q^k > 2^{1536}$ 。

本部分规定选用如下的曲线：

- a) 基域 q 为大于 2^{191} 的素数、嵌入次数 $k = 2^i 3^j$ 的常曲线, 其中 $i > 0, j \geq 0$;
- b) 基域 q 为大于 2^{768} 的素数、嵌入次数 $k = 2$ 的超奇异曲线。

对小于 2^{360} 的 N , 建议：

- a) $N-1$ 含有大于 2^{190} 的素因子;
- b) $N+1$ 含有大于 2^{120} 的素因子。

7 数据类型及其转换

7.1 数据类型

本部分规定的数据类型包括比特串、字节串、域元素、椭圆曲线上的点和整数。

比特串: 有序的 0 和 1 的序列。

字节串: 有序的字节序列, 其中 8 比特为 1 个字节, 最左边的比特为最高位。

域元素: 有限域 F_{q^m} ($m \geq 1$) 中的元素。

椭圆曲线上的点: 椭圆曲线 $E(F_{q^m})$ ($m \geq 1$) 上的点 P 或者是无穷远点 O , 或者是一对域元素 (x_P, y_P) , 其中域元素 x_P 和 y_P 满足椭圆曲线方程。

点的字节串表示有多种形式, 用一个字节 PC 加以标识。无穷远点 O 的字节串表示是单一的零字节 $PC=00$ 。非无穷远点 $P=(x_P, y_P)$ 有以下三种字节串表示形式：

- a) 压缩表示形式, $PC=02$ 或 03 ;
- b) 未压缩表示形式, $PC=04$;

c) 混合表示形式, $PC=06$ 或 07 。

注：混合表示形式既包含压缩表示形式又包含未压缩表示形式。在实现中,它允许转换到压缩表示形式或者未压缩表示形式。对于椭圆曲线上点的压缩表示形式和混合表示形式,本部分定为可选形式。椭圆曲线上点的压缩表示形式参见 B.4。

7.2 数据类型转换

7.2.1 数据类型转换关系

图 1 表示了各种数据类型之间的转换关系,线上的标志是相应数据转换方法所在的条号。

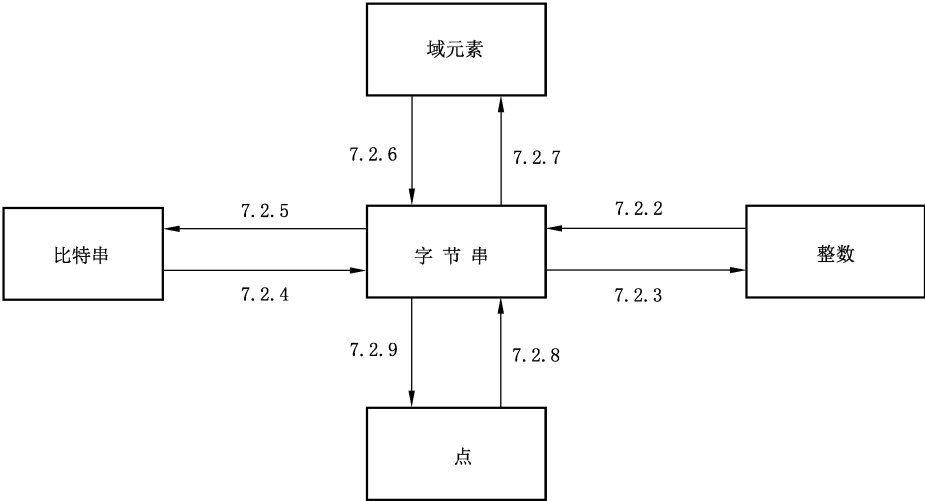


图 1 数据类型和转换约定示意图

7.2.2 整数到字节串转换

输入:非负整数 x ,以及字节串的目标长度 l (其中 l 满足 $2^{8l} > x$)。

输出:长度为 l 的字节串 M 。

计算步骤为:

- a) 设 $M_{l-1}, M_{l-2}, \dots, M_0$ 是 M 从最左边到最右边的字节;
- b) M 的字节满足:

$$x = \sum_{i=0}^{l-1} 2^{8i} M_i。$$

7.2.3 字节串到整数的转换

输入:长度为 l 的字节串 M 。

输出:整数 x 。

计算步骤为:

- a) 设 $M_{l-1}, M_{l-2}, \dots, M_0$ 是 M 从最左边到最右边的字节;
- b) 将 M 转换为整数 x :

$$x = \sum_{i=0}^{l-1} 2^{8i} M_i。$$

7.2.4 比特串到字节串转换

输入:长度为 n 的比特串 s 。

输出:长度为 l 的字节串 M ,其中 $l=\lceil n/8 \rceil$ 。

计算步骤为:

- a) 设 $s_{n-1}, s_{n-2}, \dots, s_0$ 是 s 从最左边到最右边的比特;
- b) 设 $M_{l-1}, M_{l-2}, \dots, M_0$ 是 M 从最左边到最右边的字节,则:

$$M_i = s_{8i+7} s_{8i+6} \cdots s_{8i+1} s_{8i}, \text{其中 } 0 \leq i < l, \text{当 } 8i+j \geq n, 0 < j \leq 7 \text{ 时, } s_{8i+j} = 0。$$

7.2.5 字节串到比特串的转变

输入:长度为 l 的字节串 M 。

输出:长度为 n 的比特串 s ,其中 $n=8l$ 。

计算步骤为:

- a) 设 $M_{l-1}, M_{l-2}, \dots, M_0$ 是 M 从最左边到最右边的字节;
- b) 设 $s_{n-1}, s_{n-2}, \dots, s_0$ 是 s 从最左边到最右边的比特,则 s_i 是 M_j 右起第 $i-8j+1$ 比特,其中 $j=\lfloor i/8 \rfloor$ 。

7.2.6 域元素到字节串的转变

输入: F_{q^m} ($m \geq 1$)中的元素 $\alpha = (a_{m-1}, a_{m-2}, \dots, a_1, a_0)$, $q=p$ 。

输出:长度 l 的字节串 S ,其中 $l=\lceil \log_2 q/8 \rceil \times m$ 。

计算步骤为:

- a) 若 $m=1$,则 $\alpha = a_0$ ($q=p$), α 必为区间 $[0, q-1]$ 中的整数,按7.2.2的细节把 α 转换成长度为 l 的字节串 S ;
- b) 若 $m>1$,则 $\alpha = (a_{m-1}, a_{m-2}, \dots, a_1, a_0)$ ($q=p$), 其中 $a_i \in F_q, i=0, 1, \dots, m-1$;
 - 1) 置 $r=\lceil \log_2 q/8 \rceil$;
 - 2) 对 i 从 $m-1$ 到0执行:
按7.2.2的细节把 a_i ($q=p$)转换成长度为 r 的字节串 s_i ;
 - 3) $S = s_{m-1} \parallel s_{m-2} \parallel \cdots \parallel s_0$ 。

7.2.7 字节串到域元素的转换

情形 1:转换为基域中元素

输入:域 $F_q, q=p$, 长度为 l 的字节串 $S, l=\lceil \log_2 q/8 \rceil$ 。

输出: F_q 中的元素 α 。

若 $q=p$,则按7.2.3的细节将 S 转换为整数 α ,若 $\alpha \notin [0, q-1]$,则报错。

情形 2:转换为扩域中元素

输入:域 F_{q^m} ($m \geq 2$), $q=p$, 长度为 l 的字节串 S , 其中 $l=\lceil \log_2 q/8 \rceil \times m$ 。

输出: F_{q^m} 中的元素 α 。

计算步骤为:

- a) 将字节串 S 平均分成 m 段,每段长度为 l/m ,记作 $S=(S_{m-1}, S_{m-2}, \dots, S_1, S_0)$;
- b) 对 i 从 $m-1$ 到0执行:
按7.2.3的细节将 S_i 转换为整数 a_i ,若 $a_i \notin [0, q-1]$,则报错;
- c) 若 $q=p$,输出 $\alpha = (a_{m-1}, a_{m-2}, \dots, a_1, a_0)$ 。

7.2.8 点到字节串的转变

点到字节串的转变分为两种情形:一种是在计算过程中,将椭圆曲线点转换为字节串后才能作为某个函数(如杂凑函数)的输入,这种情况下只需直接将点转换为字节串;一种是在传输或存储椭圆曲线点

时,为了减少传输的量或存储空间,可采用点的压缩或混合压缩表示形式,这种情况下需要加入一个字节的识别符 PC 来指示点的表示形式。下面分两种情况说明详细的转换过程。

情形 1:直接转换

输入:椭圆曲线 $E(F_{q^m})$ ($m \geq 1$) 上的点 $P = (x_p, y_p)$, 且 $P \neq O$ 。

输出:长度为 $2l$ 的字节串 $X_1 \parallel Y_1$ 。(当 $m=1$ 时, $l = \lceil \log_2 q / 8 \rceil$; 当 $m > 1$ 时, $l = \lceil \log_2 q / 8 \rceil \times m$ 。)

计算步骤为:

- a) 按 7.2.6 中的细节把域元素 x_p 转换成长度为 l 的字节串 X_1 ;
- b) 按 7.2.6 中的细节把域元素 y_p 转换成长度为 l 的字节串 Y_1 ;
- c) 输出字节串 $X_1 \parallel Y_1$ 。

情形 2:添加一字节识别符 PC 的转换

输入:椭圆曲线 $E(F_{q^m})$ ($m \geq 1$) 上的点 $P = (x_p, y_p)$, 且 $P \neq O$ 。

输出:字节串 PO 。若选用未压缩表示形式或混合表示形式,则输出字节串长度为 $2l+1$;若选用压缩表示形式,则输出字节串长度为 $l+1$ 。(当 $m=1$ 时, $l = \lceil \log_2 q / 8 \rceil$; 当 $m > 1$ 时, $l = \lceil \log_2 q / 8 \rceil \times m$ 。)

计算步骤为:

- a) 按 7.2.6 中的细节把域元素 x_p 转换成长度为 l 的字节串 X_1 。
- b) 若选用压缩表示形式,则:
 - 1) 计算比特 \tilde{y}_p (参见 B.4);
 - 2) 若 $\tilde{y}_p = 0$, 则令 $PC = 02$; 若 $\tilde{y}_p = 1$, 则令 $PC = 03$;
 - 3) 字节串 $PO = PC \parallel X_1$ 。
- c) 若选用未压缩表示形式,则:
 - 1) 按 7.2.6 的细节把域元素 y_p 转换成长度为 l 的字节串 Y_1 ;
 - 2) 令 $PC = 04$;
 - 3) 字节串 $PO = PC \parallel X_1 \parallel Y_1$ 。
- d) 若选用混合表示形式,则:
 - 1) 按 7.2.6 的细节把域元素 y_p 转换成长度为 l 的字节串 Y_1 ;
 - 2) 计算比特 \tilde{y}_p (参见 B.4);
 - 3) 若 $\tilde{y}_p = 0$, 则令 $PC = 06$; 若 $\tilde{y}_p = 1$, 则令 $PC = 07$;
 - 4) 字节串 $PO = PC \parallel X_1 \parallel Y_1$ 。

7.2.9 字节串到点的转换

字节串到点的转换是 7.2.8 的逆过程。下面也分两种情况加以说明。

情形 1:直接转换

输入:定义 F_{q^m} ($m \geq 1$) 上椭圆曲线的域元素 a, b , 长度为 $2l$ 的字节串 $X_1 \parallel Y_1$, X_1, Y_1 的长度均为 l (当 $m=1$ 时, $l = \lceil \log_2 q / 8 \rceil$; 当 $m > 1$ 时, $l = \lceil \log_2 q / 8 \rceil \times m$)。

输出:椭圆曲线上的点 $P = (x_p, y_p)$, 且 $P \neq O$ 。

计算步骤为:

- a) 按 7.2.7 的细节把字节串 X_1 转换成域元素 x_p ;
- b) 按 7.2.7 的细节把字节串 Y_1 转换成域元素 y_p 。

情形 2:包含一字节识别符 PC 的字节串的转换

输入:定义 F_{q^m} ($m \geq 1$) 上椭圆曲线的域元素 a, b , 字节串 PO 。若选用未压缩表示形式或混合表示形式,则字节串 PO 长度为 $2l+1$;若选用压缩表示形式,则字节串 PO 长度为 $l+1$ (当 $m=1$ 时, $l = \lceil \log_2 q / 8 \rceil$; 当 $m > 1$ 时, $l = \lceil \log_2 q / 8 \rceil \times m$)。

输出:椭圆曲线上的点 $P=(x_p, y_p)$, 且 $P \neq O$ 。

计算步骤为:

- a) 若选用压缩表示形式, 则 $PO=PC \parallel X_1$; 若选用未压缩表示形式或混合表示形式, 则 $PO=PC \parallel X_1 \parallel Y_1$, 其中 PC 是单一字节, X_1 和 Y_1 都是长度为 l 的字节串。
- b) 按 7.2.7 的细节把字节串 X_1 转换成域元素 x_p 。
- c) 若选用压缩表示形式, 则:
 - 1) 检验 $PC=02$ 或者是 $PC=03$, 若不是这种情形, 则报错;
 - 2) 若 $PC=02$, 则令 $\tilde{y}_p=0$; 若 $PC=03$, 则令 $\tilde{y}_p=1$;
 - 3) 将 (x_p, \tilde{y}_p) 转换为椭圆曲线上的一个点 (x_p, y_p) (参见 B.4)。
- d) 若选用未压缩表示形式, 则:
 - 1) 检验 $PC=04$, 若不是这种情形, 则报错;
 - 2) 按 7.2.7 的细节把字节串 Y_1 转换成域元素 y_p 。
- e) 若选用混合表示形式, 则:
 - 1) 检验 $PC=06$ 或者 $PC=07$, 若不是这种情形, 则报错;
 - 2) 执行以下步骤:
 - 按 7.2.7 的细节把字节串 Y_1 转换成域元素 y_p ;
 - 若 $PC=06$, 则令 $\tilde{y}_p=0$, 否则令 $\tilde{y}_p=1$;
 将 (x_p, \tilde{y}_p) 转换为椭圆曲线上的一个点 (x_p, y_p) (参见 B.4)。
- f) 验证 (x_p, y_p) 是否满足曲线方程, 若不满足, 则报错。
- g) $P=(x_p, y_p)$ 。

8 系统参数及其验证

8.1 系统参数

系统参数包括:

- a) 曲线的识别符 cid , 用一个字节表示: $0x10$ 表示 F_q (素数 $q>3$) 上常曲线, $0x11$ 表示 F_q 上超奇异曲线, $0x12$ 表示 F_q 上常曲线及其扭曲线。
- b) 椭圆曲线基域 F_q 的参数: 基域参数为大于 3 的素数 q 。
- c) F_q 中的两个元素 a 和 b , 它们定义椭圆曲线 E 的方程: $y^2=x^3+ax+b$; 扭曲线参数 β (若 cid 的低 4 位为 2)。
- d) 余因子 cf 和素数 N , 其中 $cf \times N = \#E(F_q)$, $N > 2^{191}$ 且 N 不整除 cf , 如果 N 小于 2^{360} , 建议 $N-1$ 含有大于 2^{190} 的素因子, $N+1$ 含有大于 2^{120} 的素因子。
- e) 曲线 $E(F_q)$ 相对于 N 的嵌入次数 k (N 阶循环群 $(G_T, \cdot) \subset F_{q^k}^*$), 规定 $q^k > 2^{1536}$ 。
- f) N 阶循环群 $(G_1, +)$ 的生成元 $P_1=(x_{P_1}, y_{P_1})$, $P_1 \neq O$ 。
- g) N 阶循环群 $(G_2, +)$ 的生成元 $P_2=(x_{P_2}, y_{P_2})$, $P_2 \neq O$ 。
- h) 双线性对用一个字节的识别符 eid 表示: $0x01$ 表示 Tate 对, $0x02$ 表示 Weil 对, $0x03$ 表示 Ate 对, $0x04$ 表示 R-ate 对。本部分采用 R-ate 对。
- i) (选项) 参数 d_1, d_2 , 其中 d_1, d_2 整除 k 。
- j) (选项) G_2 到 G_1 的同态映射 ψ , 使得 $P_1=\psi(P_2)$ 。
- k) (选项) BN 曲线的基域特征 q , 曲线阶 r , Frobenius 映射的迹 tr 可通过参数 t 来确定, t 至少达到 63 比特。

具体参数, 见附录 A。

8.2 系统参数的验证

下面的条件应由系统参数的生成者加以验证。这些条件也能由系统参数的用户验证。

输入：系统参数集合。

输出：若所有参数有效，则输出“有效”；否则输出“无效”。

计算步骤为：

- a) 验证 q 是大于 3 的素数(参见附录 D 中的 D.1.5)；
- b) 验证 a, b 是区间 $[0, q-1]$ 中的整数；
- c) 验证在 F_q 上 $4a^3 + 27b^2 \neq 0$ ；若 cid 的低 4 位为 2，验证 β 是非平方元(参见 D.1.4.3.1)；
- d) 验证 N 为大于 2^{191} 的素数且 N 不整除 cf ，如果 N 小于 2^{360} ，验证 $N-1$ 含有大于 2^{190} 的素因子， $N+1$ 含有大于 2^{120} 的素因子；
- e) 验证 $|q+1-cf \times N| < 2q^{1/2}$ ；
- f) 验证 $q^k > 2^{1\,536}$ ，且 k 为使 $N|(q^m-1)$ 成立的最小正整数 m ；
- g) 验证 (x_{P_1}, y_{P_1}) 是群 G_1 中的元素；
- h) 验证 (x_{P_2}, y_{P_2}) 是群 G_2 中的元素；
- i) 验证 $e(P_1, P_2) \in F_{q^k}^* \setminus \{1\}$ ，且 $e(P_1, P_2)^N = 1$ ；
- j) (选项)验证 d_1, d_2 整除 k ；
- k) (选项)验证 $P_1 = \psi(P_2)$ ；
- l) (选项)验证 t 至少达到 63 比特。

若以上任何一项验证失败，则输出“无效”；否则，输出“有效”。



附 录 A

(规范性附录)

参数定义

A.1 系统参数

本部分使用 256 位的 BN 曲线。

椭圆曲线方程： $y^2 = x^3 + b$ 。

曲线参数：

参数 t : 60000000 0058F98A

迹 $\text{tr}(t) = 6t^2 + 1$: D8000000 019062ED 0000B98B 0CB27659

基域特征 $q(t) = 36t^4 + 36t^3 + 24t^2 + 6t + 1$:

B6400000 02A3A6F1 D603AB4F F58EC745 21F2934B 1A7AEEDB E56F9B27 E351457D

方程参数 b : 05

群的阶 $N(t) = 36t^4 + 36t^3 + 18t^2 + 6t + 1$:

B6400000 02A3A6F1 D603AB4F F58EC744 49F2934B 18EA8BEE E56EE19C D69ECF25

余因子 cf : 1

嵌入次数 k : 12

扭曲线的参数 β : $\sqrt{-2}$

k 的因子 $d_1 = 1, d_2 = 2$

曲线识别符 cid : 0x12

群 G_1 的生成元 $P_1 = (x_{P_1}, y_{P_1})$:

坐标 x_{P_1} : 93DE051D 62BF718F F5ED0704 487D01D6 E1E40869 09DC3280 E8C4E481 7C66DDDD

坐标 y_{P_1} : 21FE8DDA 4F21E607 63106512 5C395BBC 1C1C00CB FA602435 0C464CD7 0A3EA616

群 G_2 的生成元 $P_2 = (x_{P_2}, y_{P_2})$:

坐标 x_{P_2} : (85AEF3D0 78640C98 597B6027 B441A01F F1DD2C19 0F5E93C4 54806C11 D8806141,

37227552 92130B08 D2AAB97F D34EC120 EE265948 D19C17AB F9B7213B AF82D65B)

坐标 y_{P_2} : (17509B09 2E845C12 66BA0D26 2CBEE6ED 0736A96F A347C8BD 856DC76B 84EBEB96 ,

A7CF28D5 19BE3DA6 5F317015 3D278FF2 47EFBA98 A71A0811 6215BBA5 C999A7C7)

双线性对的识别符 eid : 0x04

A.2 扩域元素的表示

$F_{q^{12}}$ 的 1-2-4-12 塔式扩张:

$$(1) F_{q^2}[u] = F_q[u]/(u^2 - \alpha), \alpha = -2$$

$$(2) F_{q^4}[v] = F_{q^2}[v]/(v^2 - \xi), \xi = u$$

$$(3) F_{q^{12}}[w] = F_{q^4}[w]/(w^3 - v), v^2 = \xi$$

其中:

第(1)进行二次扩张的约化多项式为: $x^2 - \alpha, \alpha = -2$;

第(2)进行二次扩张的约化多项式为: $x^2 - u, u^2 = \alpha, u = \sqrt{-2}$;

第(3)进行三次扩张的约化多项式为： $x^3 - v, v^2 = u, v = \sqrt{\sqrt{-2}}$ ；

u 属于 F_{q^2} ，表示为 $(1, 0)$ ，左边是第 1 维(高维)，右边是第 0 维(低维)。

v 属于 F_{q^4} ，表示为 $(0, 1, 0, 0)$ ，其中左边 $(0, 1)$ 是 F_{q^4} 中元素以 F_{q^2} 表示的第 1 维(高维)，右边 $(0, 0)$ 是 F_{q^4} 中元素以 F_{q^2} 表示的第 0 维(低维)。

$F_{q^{12}}$ 中元素有三种表示方法：

a) $F_{q^{12}}$ 中元素 A 用 F_{q^4} 中元素表示：

$$A = aw^2 + bw + c = (a, b, c)$$

a, b, c 用 F_{q^2} 中元素表示：

$$a = a_1v + a_0 = (a_1, a_0)$$

$$b = b_1v + b_0 = (b_1, b_0)$$

$$c = c_1v + c_0 = (c_1, c_0)$$

其中： $a_1, a_0, b_1, b_0, c_1, c_0 \in F_{q^2}$ 。

b) $F_{q^{12}}$ 中元素 A 用 F_{q^2} 中的元素表示：

$$A = (a_1, a_0, b_1, b_0, c_1, c_0)$$

$a_1, a_0, b_1, b_0, c_1, c_0$ 用基域 F_q 中的元素表示：

$$a_0 = a_{0,1}u + a_{0,0} = (a_{0,1}, a_{0,0})$$

$$a_1 = a_{1,1}u + a_{1,0} = (a_{1,1}, a_{1,0})$$

$$b_0 = b_{0,1}u + b_{0,0} = (b_{0,1}, b_{0,0})$$

$$b_1 = b_{1,1}u + b_{1,0} = (b_{1,1}, b_{1,0})$$

$$c_0 = c_{0,1}u + c_{0,0} = (c_{0,1}, c_{0,0})$$

$$c_1 = c_{1,1}u + c_{1,0} = (c_{1,1}, c_{1,0})$$

其中： $a_{0,1}, a_{0,0}, a_{1,1}, a_{1,0}, b_{0,1}, b_{0,0}, b_{1,1}, b_{1,0}, c_{0,1}, c_{0,0}, c_{1,1}, c_{1,0} \in F_q$ 。

c) $F_{q^{12}}$ 中元素 A 用基域 F_q 中的元素表示：

$$A = (a_{0,1}, a_{0,0}, a_{1,1}, a_{1,0}, b_{0,1}, b_{0,0}, b_{1,1}, b_{1,0}, c_{0,1}, c_{0,0}, c_{1,1}, c_{1,0})$$

其中： $a_{0,1}, a_{0,0}, a_{1,1}, a_{1,0}, b_{0,1}, b_{0,0}, b_{1,1}, b_{1,0}, c_{0,1}, c_{0,0}, c_{1,1}, c_{1,0} \in F_q$ 。

F_{q^2} 中单位元的表示为 $(0, 1)$ 。

F_{q^4} 中单位元的表示为 $(0, 0, 0, 1)$ 。

$F_{q^{12}}$ 中单位元的表示为 $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$ 。

各种扩域中分量序为：左边是高维，右边是低维。

示例数据中，扩域中的元素均用基域中的元素表示。

附录 B

(资料性附录)

关于椭圆曲线的背景知识

B.1 有限域

B.1.1 素域 F_p

设 p 是一个素数, 整数模 p 的全体余数的集合 $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ 关于模 p 的加法和乘法构成一个 p 阶素域, 用符号 F_p 表示。加法单位元是 0, 乘法单位元是 1, F_p 的元素满足如下运算法则:

——加法: 设 $a, b \in F_p$, 则 $a + b = r$, 其中 $r = (a + b) \bmod p, r \in [0, p-1]$ 。

——乘法: 设 $a, b \in F_p$, 则 $a \cdot b = s$, 其中 $s = (a \cdot b) \bmod p, s \in [0, p-1]$ 。

记 F_p^* 是由 F_p 中所有非零元构成的乘法群, 由于 F_p^* 是循环群, 所以在 F_p 中至少存在一个元素 g , 使得 F_p 中任一非零元都可以由 g 的一个方幂表示, 称 g 为 F_p^* 的生成元(或本原元), 即 $F_p^* = \{g^i \mid 0 \leq i \leq p-2\}$ 。设 $a = g^i \in F_p^*$, 其中 $0 \leq i \leq p-2$, 则 a 的乘法逆元为: $a^{-1} = g^{p-1-i}$ 。

示例: 素域 $F_{19}, F_{19} = \{0, 1, 2, \dots, 18\}$ 。

F_{19} 中加法的示例: $10, 14 \in F_{19}, 10 + 14 = 24, 24 \bmod 19 = 5$, 则 $10 + 14 = 5$ 。

F_{19} 中乘法的示例: $7, 8 \in F_{19}, 7 \times 8 = 56, 56 \bmod 19 = 18$, 则 $7 \cdot 8 = 18$ 。

13 是 F_{19}^* 的一个生成元, 则 F_{19}^* 中元素可由 13 的方幂表示出来:

$13^0 = 1, 13^1 = 13, 13^2 = 17, 13^3 = 12, 13^4 = 4, 13^5 = 14, 13^6 = 11, 13^7 = 10, 13^8 = 16, 13^9 = 18,$

$13^{10} = 6, 13^{11} = 2, 13^{12} = 7, 13^{13} = 15, 13^{14} = 5, 13^{15} = 8, 13^{16} = 9, 13^{17} = 3, 13^{18} = 1$ 。

B.1.2 有限域 F_{q^m}

设 q 是一个素数或素数方幂, $f(x)$ 是多项式环 $F_q[x]$ 上的一个 $m (m > 1)$ 次不可约多项式(称为约化多项式或域多项式), 商环 $F_q[x]/(f(x))$ 是含 q^m 个元素的有限域(记为 F_{q^m}), 称 F_{q^m} 是有限域 F_q 的扩域, 域 F_q 为域 F_{q^m} 的子域, m 为扩张次数。 F_{q^m} 可以看成 F_q 上的 m 维向量空间, 也就是说, 在 F_{q^m} 中存在 m 个元素 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$, 使得 $\forall a \in F_{q^m}, a$ 可以唯一表示为: $a = a_{m-1}\alpha_{m-1} + \dots + a_1\alpha_1 + a_0\alpha_0$, 其中 $a_i \in F_q$, 称 $\{\alpha_{m-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0\}$ 为 F_{q^m} 在 F_q 上的一组基。给定这样一组基, 就可以由向量 $(a_{m-1}, a_{m-2}, \dots, a_1, a_0)$ 来表示域元素 a 。

F_{q^m} 在 F_q 上的基有多种选择: 多项式基和正规基等。

不可约多项式 $f(x)$ 可取为首一的多项式 $f(x) = x^m + f_{m-1}x^{m-1} + \dots + f_2x^2 + f_1x + f_0$ (其中 $f_i \in F_q, i = 0, 1, \dots, m-1$), F_{q^m} 中的元素由多项式环 $F_q[x]$ 中所有次数低于 m 的多项式构成, 即 $F_{q^m} = \{a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + \dots + a_1x + a_0 \mid a_i \in F_q, i = 0, 1, \dots, m-1\}$ 。多项式集合 $\{x^{m-1}, x^{m-2}, \dots, x, 1\}$ 是 F_{q^m} 作为向量空间在 F_q 上的一组基, 称为多项式基。当 m 含有因子 $d (1 < d < m)$ 时, F_{q^m} 可以由 F_{q^d} 扩张生成, 从 $F_{q^d}[x]$ 中选取一个合适的 m/d 次不可约多项式作为 F_{q^m} 在 F_{q^d} 上的约化多项式, F_{q^m} 可以由塔式扩张方法(towering method)得到, 这种扩张的基本形式仍是由 F_q 中元素组成的向量。例如当 $m = 6$ 时, 可以先由 F_q 经过 3 次扩张得扩域 F_{q^3} , 再由 F_{q^3} 经过 2 次扩张得到扩域 F_{q^6} ; 也可以先由 F_q 经过 2 次扩张得扩域 F_{q^2} , 再由 F_{q^2} 经过 3 次扩张得到扩域 F_{q^6} 。

F_{q^m} 在 F_q 上形如 $\{\beta, \beta^q, \beta^{q^2}, \dots, \beta^{q^{m-1}}\}$ 的一组基称为正规基, 其中 $\beta \in F_{q^m}$ 。 $\forall a \in F_{q^m}, a$ 可以唯一表示为: $a = a_0\beta + a_1\beta^q + \dots + a_{m-1}\beta^{q^{m-1}}$, 其中 $a_i \in F_q, i = 0, 1, \dots, m-1$ 。对于任意有限域 F_q 及其扩域 F_{q^m} , 这样的基总是存在的。

如果不作特别说明, F_{q^m} 中元素均采用多项式基表示。

域元素 $a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + \cdots + a_1x + a_0$ 相对于多项式基可以由向量 $(a_{m-1}, a_{m-2}, \cdots, a_1, a_0)$ 表示, 所以 $F_{q^m} = \{(a_{m-1}, a_{m-2}, \cdots, a_1, a_0) \mid a_i \in F_q, i=0, 1, \cdots, m-1\}$ 。

乘法单位元 1 由 $(0, \cdots, 0, 1)$ 表示, 零元由 $(0, \cdots, 0, 0)$ 表示。域元素的加法和乘法定义如下:

——加法运算: $\forall (a_{m-1}, a_{m-2}, \cdots, a_1, a_0), (b_{m-1}, b_{m-2}, \cdots, b_1, b_0) \in F_{q^m}$, 则 $(a_{m-1}, a_{m-2}, \cdots, a_1, a_0) + (b_{m-1}, b_{m-2}, \cdots, b_1, b_0) = (c_{m-1}, c_{m-2}, \cdots, c_1, c_0)$, 其中 $c_i = a_i + b_i \in F_q, i=0, 1, \cdots, m-1$, 即加法运算按分量执行域 F_q 的加法运算。

——乘法运算: $\forall (a_{m-1}, a_{m-2}, \cdots, a_1, a_0), (b_{m-1}, b_{m-2}, \cdots, b_1, b_0) \in F_{q^m}$, 则 $(a_{m-1}, a_{m-2}, \cdots, a_1, a_0) \cdot (b_{m-1}, b_{m-2}, \cdots, b_1, b_0) = (r_{m-1}, r_{m-2}, \cdots, r_1, r_0)$, 其中多项式 $(r_{m-1}x^{m-1} + r_{m-2}x^{m-2} + \cdots + r_1x + r_0)$ 是 $(a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + \cdots + a_1x + a_0) \cdot (b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \cdots + b_1x + b_0)$ 在 $F_q[x]$ 中模 $f(x)$ 的余式。

F_{q^m} 恰包含 q^m 个元素。记 $F_{q^m}^*$ 是由 F_{q^m} 中所有非零元构成的乘法群, $F_{q^m}^*$ 是循环群, 在 F_{q^m} 中至少存在一个元素 g , 使得 F_{q^m} 中任一非零元都可以由 g 的一个方幂表示, 称 g 为 $F_{q^m}^*$ 的生成元(或本原元), 即: $F_{q^m}^* = \{g^i \mid 0 \leq i \leq q^m - 2\}$ 。设 $a = g^i \in F_{q^m}^*$, 其中 $0 \leq i \leq q^m - 2$, 则 a 的乘法逆元为: $a^{-1} = g^{q^m - 1 - i}$ 。

示例: F_{3^2} 的多项式基表示

取 F_3 上的一个不可约多项式 $f(x) = x^2 + 1$, 则 F_{3^2} 中的元素是:

$(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)$

加法: $(2, 1) + (2, 0) = (1, 1)$

乘法: $(2, 1) \cdot (2, 0) = (2, 2)$

$$\begin{aligned}(2x+1) \cdot 2x &= 4x^2 + 2x \\ &= x^2 + 2x \\ &\equiv 2x + 2 \pmod{f(x)}\end{aligned}$$

即 $2x+2$ 是 $(2x+1) \cdot 2x$ 除以 $f(x)$ 的余式。

乘法单位元是 $(0, 1)$, $\alpha = x + 1$ 是 $F_{3^2}^*$ 的一个生成元, 则 α 的方幂为:

$\alpha^0 = (0, 1), \alpha^1 = (1, 1), \alpha^2 = (2, 0), \alpha^3 = (2, 1), \alpha^4 = (0, 2), \alpha^5 = (2, 2), \alpha^6 = (1, 0), \alpha^7 = (1, 2), \alpha^8 = (0, 1)$ 。

B.1.3 有限域上的椭圆曲线

B.1.3.1 概述

有限域上椭圆曲线常用的表示形式有两种: 仿射坐标表示和射影坐标表示。

B.1.3.2 仿射坐标表示

设 p 是大于 3 的素数, F_{p^m} 上椭圆曲线方程在仿射坐标系下可以简化为 $y^2 = x^3 + ax + b$, 其中 $a, b \in F_{p^m}$, 且使得 $4a^3 + 27b^2 \neq 0$ 。椭圆曲线上的点集记为 $E(F_{p^m}) = \{(x, y) \mid x, y \in F_{p^m}, \text{且满足曲线方程 } y^2 = x^3 + ax + b\} \cup \{O\}$, 其中 O 是椭圆曲线的无穷远点, 又称为零点。

$E(F_{p^m})$ ($m \geq 1$) 上的点按照下面的加法运算规则, 构成一个交换群:

- $O + O = O$;
- $\forall P = (x, y) \in E(F_{p^m}) \setminus \{O\}, P + O = O + P = P$;
- $\forall P = (x, y) \in E(F_{p^m}) \setminus \{O\}, P$ 的逆元素 $-P = (x, -y), P + (-P) = O$;
- 点 $P_1 = (x_1, y_1) \in E(F_{p^m}) \setminus \{O\}, P_2 = (x_2, y_2) \in E(F_{p^m}) \setminus \{O\}, P_3 = (x_3, y_3) = P_1 + P_2 \neq O$, 则:

$$\begin{cases} x_3 = \lambda^2 - x_1 - x_2, \\ y_3 = \lambda(x_1 - x_3) - y_1 \end{cases}$$

其中:

$$\lambda = \begin{cases} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, & \text{若 } x_1 \neq x_2, \\ \frac{3x_1^2 + a}{2y_1}, & \text{若 } x_1 = x_2 \text{ 且 } P_2 \neq -P_1 \end{cases}$$

示例:有限域 F_{19} 上一条椭圆曲线

F_{19} 上方程: $y^2 = x^3 + x + 1$, 其中 $a=1, b=1$ 。则 F_{19} 上曲线的点为:

$(0, 1), (0, 18), (2, 7), (2, 12), (5, 6), (5, 13), (7, 3), (7, 16), (9, 6), (9, 13), (10, 2), (10, 17), (13, 8), (13, 11), (14, 2), (14, 17), (15, 3), (15, 16), (16, 3), (16, 16)$

则 $E(F_{19})$ 有 21 个点(包括无穷远点 O)。

a) 取 $P_1 = (10, 2), P_2 = (9, 6)$, 计算 $P_3 = P_1 + P_2$:

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 2}{9 - 10} = \frac{4}{-1} = -4 \equiv 15 \pmod{19},$$

$$x_3 = 15^2 - 10 - 9 = 225 - 10 - 9 \equiv 16 - 10 - 9 = -3 \equiv 16 \pmod{19},$$

$$y_3 = 15 \times (10 - 16) - 2 = 15 \times (-6) - 2 \equiv 3 \pmod{19},$$

所以 $P_3 = (16, 3)$ 。

b) 取 $P_1 = (10, 2)$, 计算 $[2]P_1$:

$$\lambda = \frac{3x_1^2 + a}{2y_1} = \frac{3 \times 10^2 + 1}{2 \times 2} = \frac{3 \times 5 + 1}{4} = \frac{16}{4} = 4 \pmod{19},$$

$$x_3 = 4^2 - 10 - 10 = -4 \equiv 15 \pmod{19},$$

$$y_3 = 4 \times (10 - 15) - 2 = -22 \equiv 16 \pmod{19},$$

所以 $[2]P_1 = (15, 16)$ 。

B.1.3.3 射影坐标表示

设 p 是大于 3 的素数, F_{p^m} 上椭圆曲线方程在标准射影坐标系下可以简化为 $y^2 z = x^3 + axz^2 + bz^3$, 其中 $a, b \in F_{p^m}$, 且 $4a^3 + 27b^2 \neq 0$ 。椭圆曲线上的点集记为 $E(F_{p^m}) = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in F_{p^m} \text{ 且满足曲线方程 } y^2 z = x^3 + axz^2 + bz^3\}$ 。对于 (x_1, y_1, z_1) 和 (x_2, y_2, z_2) , 若存在某个 $u \in F_{p^m}$ 且 $u \neq 0$, 使得: $x_1 = ux_2, y_1 = uy_2, z_1 = uz_2$, 则称这两个三元组等价, 表示同一个点。

若 $z \neq 0$, 记 $X = x/z, Y = y/z$, 则可从标准射影坐标表示转化为仿射坐标表示: $Y^2 = X^3 + aX + b$;

若 $z = 0, (0, 1, 0)$ 对应的仿射坐标系下的点即无穷远点 O 。

标准射影坐标系下, $E(F_{p^m})$ 上点的加法运算定义如下:

a) $O + O = O$;

b) $\forall P = (x, y, z) \in E(F_{p^m}) \setminus \{O\}, P + O = O + P = P$;

c) $\forall P = (x, y, z) \in E(F_{p^m}) \setminus \{O\}, P$ 的逆元素 $-P = (ux, -uy, uz), u \in F_{p^m}$ 且 $u \neq 0, P + (-P) = O$;

d) 设点 $P_1 = (x_1, y_1, z_1) \in E(F_{p^m}) \setminus \{O\}, P_2 = (x_2, y_2, z_2) \in E(F_{p^m}) \setminus \{O\}, P_3 = P_1 + P_2 = (x_3, y_3, z_3) \neq O$,

若 $P_1 \neq P_2$, 则:

$$\lambda_1 = x_1 z_2, \lambda_2 = x_2 z_1, \lambda_3 = \lambda_1 - \lambda_2, \lambda_4 = y_1 z_2, \lambda_5 = y_2 z_1, \lambda_6 = \lambda_4 - \lambda_5, \lambda_7 = \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_8 = z_1 z_2,$$

$$\lambda_9 = \lambda_3^2, \lambda_{10} = \lambda_3 \lambda_9, \lambda_{11} = \lambda_8 \lambda_6^2 - \lambda_7 \lambda_9, x_3 = \lambda_3 \lambda_{11}, y_3 = \lambda_6 (\lambda_9 \lambda_1 - \lambda_{11}) - \lambda_4 \lambda_{10}, z_3 = \lambda_{10} \lambda_8;$$

若 $P_1 = P_2$, 则:

$$\lambda_1 = 3x_1^2 + az_1^2, \lambda_2 = 2y_1 z_1, \lambda_3 = y_1^2, \lambda_4 = \lambda_3 x_1 z_1, \lambda_5 = \lambda_2^2, \lambda_6 = \lambda_1^2 - 8\lambda_4,$$

$$x_3 = \lambda_2 \lambda_6, y_3 = \lambda_1 (4\lambda_4 - \lambda_6) - 2\lambda_5 \lambda_3, z_3 = \lambda_2 \lambda_5。$$

B.1.3.4 Jacobian 加重射影坐标系

设 p 是大于 3 的素数, F_{p^m} 上椭圆曲线方程在 Jacobian 加重射影坐标系下可以简化为 $y^2 = x^3 + axz^4 + bz^6$ 。其中 $a, b \in F_{p^m}$, 且 $4a^3 + 27b^2 \neq 0$ 。椭圆曲线上的点集记为 $E(F_{p^m}) = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in F_{p^m} \text{ 且满足曲线方程 } y^2 = x^3 + axz^4 + bz^6\}$ 。对于 (x_1, y_1, z_1) 和 (x_2, y_2, z_2) , 若存在某个 $u \in F_{p^m}$ 且 $u \neq 0$, 使得: $x_1 = u^2 x_2, y_1 = u^3 y_2, z_1 = u z_2$, 则称这两个三元组等价, 表示同一个点。

若 $z \neq 0$, 记 $X = x/z^2, Y = y/z^3$, 则可从 Jacobian 加重射影坐标表示转化为仿射坐标表示: $Y^2 = X^3 + aX + b$ 。

若 $z = 0, (1, 1, 0)$ 对应的仿射坐标系下的点即无穷远点 O 。

Jacobian 加重射影坐标系下, $E(F_{p^m})$ 上点的加法运算定义如下:

- $O + O = O$;
- $\forall P = (x, y, z) \in E(F_{p^m}) \setminus \{O\}, P + O = O + P = P$;
- $\forall P = (x, y, z) \in E(F_{p^m}) \setminus \{O\}, P$ 的逆元素 $-P = (u^2 x, -u^3 y, uz), u \in F_{p^m}$ 且 $u \neq 0, P + (-P) = O$;
- 设点 $P_1 = (x_1, y_1, z_1) \in E(F_{p^m}) \setminus \{O\}, P_2 = (x_2, y_2, z_2) \in E(F_{p^m}) \setminus \{O\}, P_3 = P_1 + P_2 = (x_3, y_3, z_3) \neq O$,

若 $P_1 \neq P_2$, 则:

$$\lambda_1 = x_1 z_2^2, \lambda_2 = x_2 z_1^2, \lambda_3 = \lambda_1 - \lambda_2, \lambda_4 = y_1 z_2^3, \lambda_5 = y_2 z_1^3, \lambda_6 = \lambda_4 - \lambda_5, \lambda_7 = \lambda_1 + \lambda_2, \\ \lambda_8 = \lambda_4 + \lambda_5, \lambda_9 = \lambda_7 \lambda_3^2, x_3 = \lambda_6^2 - \lambda_9, \lambda_{10} = \lambda_9^2 - 2x_3, y_3 = (\lambda_{10} \lambda_6 - \lambda_8 \lambda_3^3) / 2, z_3 = z_1 z_2 \lambda_3;$$

若 $P_1 = P_2$, 则:

$$\lambda_1 = 3x_1^2 + az_1^4, \lambda_2 = 4x_1 y_1^2, \lambda_3 = 8y_1^4, x_3 = \lambda_1^2 - 2\lambda_2, y_3 = \lambda_1(\lambda_2 - x_3) - \lambda_3, z_3 = 2y_1 z_1。$$

B.1.4 有限域上椭圆曲线的阶

有限域 F_{q^m} 上一条椭圆曲线的阶是指点集 $E(F_{q^m})$ 中元素的个数, 记为 $\#E(F_{q^m})$ 。由 Hasse 定理知: $q^m + 1 - 2q^{m/2} \leq \#E(F_{q^m}) \leq q^m + 1 + 2q^{m/2}$, 即 $\#E(F_{q^m}) = q^m + 1 - t$, 其中 t 称为 Frobenius 迹且 $|t| \leq 2q^{m/2}$ 。

若 F_{q^m} 的特征整除 Frobenius 迹 t , 则称此曲线为超奇异的, 否则为非超奇异的。

设 $E(F_{q^m})$ 是 F_{q^m} 上的椭圆曲线, r 是与 q^m 互素的整数, 则 $E(F_{q^m})$ 的 r 阶扭子群 $E(F_{q^m})[r] = \{P \in E(F_{q^m}) \mid [r]P = O\}$, $E(F_{q^m})[r]$ 中的点称为 r -扭点。

B.2 椭圆曲线多倍点运算



椭圆曲线上同一个点的重复相加称为该点的多倍点运算。设 u 是一个正整数, P 是椭圆曲线上的点, 其 u 倍点 $Q = [u]P = \underbrace{P + P + \cdots + P}_{u \uparrow}$ 。

多倍点运算可以扩展到 0 倍点运算和负数倍点运算: $[0]P = O, [-u]P = [u](-P)$ 。

椭圆曲线多倍点运算的实现有多种方法, 这里只介绍最基本的三种方法, 以下都假设 $1 \leq u < N$ 。

算法一: 二进制展开法

输入: 点 P, l 比特的整数 $u = \sum_{j=0}^{l-1} u_j 2^j, u_j \in \{0, 1\}$ 。

输出: $Q = [u]P$ 。

a) 置 $Q = O$ 。

b) 对 j 从 $l-1$ 降至 0 执行:

- 1) $Q = [2]Q$;
- 2) 若 $u_j = 1$, 则 $Q = Q + P$ 。
- c) 输出 Q 。

算法二: 加减法

输入: 点 P , l 比特的整数 $u = \sum_{j=0}^{l-1} u_j 2^j$, $u_j \in \{0, 1\}$ 。

输出: $Q = [u]P$ 。

- a) 设 $3u$ 的二进制表示是 $h_r h_{r-1} \cdots h_1 h_0$, 其中最高位 h_r 为 1, 显然 $r = l$ 或 $l+1$ 。
- b) 设 u 的二进制表示是 $u_r u_{r-1} \cdots u_1 u_0$ 。
- c) 置 $Q = P$ 。
- d) 对 i 从 $r-1$ 降至 1 执行:
 - 1) $Q = [2]Q$;
 - 2) 若 $h_i = 1$, 且 $u_i = 0$, 则 $Q = Q + P$;
 - 3) 若 $h_i = 0$, 且 $u_i = 1$, 则 $Q = Q - P$ 。
- e) 输出 Q 。

注: 减去点 (x, y) , 只要加上 $(x, -y)$ 。有多种不同的变种可以加速这一运算。

算法三: 滑动窗法

输入: 点 P , l 比特的整数 $u = \sum_{j=0}^{l-1} u_j 2^j$, $u_j \in \{0, 1\}$ 。

输出: $Q = [u]P$ 。

设窗口长度 $r > 1$ 。

预计算

- a) $P_1 = P, P_2 = [2]P$ 。
- b) i 从 $1 \sim (2^{r-1} - 1)$ 计算 $P_{2i+1} = P_{2i-1} + P_2$ 。
- c) 置 $j = l-1, Q = O$ 。

主循环

- d) 当 $j \geq 0$ 执行:
 - 1) 若 $u_j = 0$, 则 $Q = [2]Q, j = j-1$;
 - 2) 否则:
 - 令 t 是使 $j-t+1 \leq r$ 且 $u_t = 1$ 的最小整数;
 - $h_j = \sum_{i=0}^{j-t} u_{t+i} 2^i$;
 - $Q = [2^{j-t+1}]Q + P_{h_j}$;
 - 置 $j = t-1$ 。
- e) 输出 Q 。

B.3 离散对数问题

B.3.1 求解有限域上离散对数问题的方法

有限域 F_q 的全体非零元素构成一个乘法循环群, 记为 F_{q^*} 。 F_{q^*} 中存在一个元素 g , g 称为生成元, 使得 $F_{q^*} = \{g^i \mid 0 \leq i \leq q-2\}$ 。 $a \in F_q$ 的阶是满足 $a^t = 1$ 的最小正整数 t 。循环群 F_{q^*} 的阶为 $q-1$, 因此 $t \mid q-1$ 。

设乘法循环群 F_{q^*} 的生成元为 $g, y \in F_{q^*}$, 有限域上离散对数问题是指确定整数 $x \in [0, q-2]$, 使

得 $y = g^x \bmod q$ 成立。

有限域上离散对数问题现有攻击方法有：

- a) Pohlig-Hellman 方法：设 l 是 $q-1$ 的最大素因子，则时间复杂度为 $O(l^{1/2})$ ；
- b) BSGS 方法：时间复杂度与空间复杂度均为 $(\pi q/2)^{1/2}$ ；
- c) Pollard 方法：时间复杂度为 $(\pi q/2)^{1/2}$ ；
- d) 并行 Pollard 方法：设 s 为并行处理器个数，时间复杂度为 $(\pi q/2)^{1/2}/s$ ；
- e) 线性筛法（对素域 F_q ）：时间复杂度为 $\exp((1+o(1))(\log q)^{1/2}(\log \log q)^{1/2})$ ；
- f) Gauss 整数法（对素域 F_q ）：时间复杂度为 $\exp((1+o(1))(\log q)^{1/2}(\log \log q)^{1/2})$ ；
- g) 剩余列举筛法（对素域 F_q ）：时间复杂度为 $\exp((1+o(1))(\log q)^{1/2}(\log \log q)^{1/2})$ ；
- h) 数域筛法（对素域 F_q ）：时间复杂度为 $\exp(((64/9)^{1/3} + o(1))(\log q)(\log \log q)^2)^{1/3}$ ；
- i) 函数域筛法（对小特征域）：时间复杂度为 $\exp(c(\log q)(\log \log q)^2)^{1/4+o(1)}$ 和拟多项式时间。

从以上列举的求解离散对数问题的方法及其时间复杂度可知：对于一般的大特征域上的离散对数问题，存在亚指数级计算复杂度的攻击方法，对小特征域上的离散对数问题，目前已经有拟多项式时间的攻击方法。

B.3.2 求解椭圆曲线离散对数问题的方法

已知椭圆曲线 $E(F_q)$ ，阶为 n 的点 $P \in E(F_q)$ 及 $Q \in \langle P \rangle$ ，椭圆曲线离散对数问题是指确定整数 $u \in [0, n-1]$ ，使得 $Q = [u]P$ 成立。

ECDLP 现有攻击方法有：

- a) Pohlig-Hellman 方法：设 l 是 n 的最大素因子，则时间复杂度为 $O(l^{1/2})$ ；
- b) BSGS 方法：时间复杂度与空间复杂度均为 $(\pi n/2)^{1/2}$ ；
- c) Pollard 方法：时间复杂度为 $(\pi n/2)^{1/2}$ ；
- d) 并行 Pollard 方法：设 r 为并行处理器个数，时间复杂度为 $(\pi n/2)^{1/2}/r$ ；
- e) MOV-方法：把超奇异椭圆曲线及具有相似性质的曲线的 ECDLP 降到 F_q 的小扩域上的离散对数问题（亚指数级计算复杂度算法）；
- f) Anomalous 方法：对 Anomalous 曲线（ $\#E(F_q) = q$ 的曲线）的有效攻击方法（多项式级计算复杂度算法）；
- g) GHS-方法：利用 Weil 下降技术求解扩张次数为合数的二元扩域上椭圆曲线离散对数问题，将 ECDLP 转化为超椭圆曲线离散对数问题，而求解高亏格的超椭圆曲线离散对数存在亚指数级计算复杂度算法；
- h) DGS-点分解方法：对低次扩域上的椭圆曲线离散对数利用的指标计算方法，在某些特殊情况下，其求解复杂度低于平方根时间复杂度。

从上述对椭圆曲线离散对数问题解法的描述与分析可知：对于一般曲线的离散对数问题，目前的求解方法都为指数级计算复杂度，未发现亚指数级计算复杂度的一般攻击方法；而对于某些特殊曲线的离散对数问题，存在多项式级或者亚指数级计算复杂度算法。

B.4 点的压缩

B.4.1 概述

对于椭圆曲线 $E(F_q)$ 上的任意非无穷远点 $P = (x_P, y_P)$ ，该点能由坐标 x_P 及由 x_P 和 y_P 导出的一个特定比特简洁地表示，称为点的压缩表示。

B.4.2 F_p 上椭圆曲线点的压缩与解压缩方法

设 $P=(x_P, y_P)$ 是定义在 F_p 上椭圆曲线 $E: y^2 = x^3 + ax + b$ 上的一个点, \tilde{y}_P 为 y_P 的最右边的一个比特, 则点 P 可由 x_P 和比特 \tilde{y}_P 表示。

由 x_P 和 \tilde{y}_P 恢复 y_P 的方法如下:

- a) 在 F_p 上计算域元素 $\alpha = x_P^3 + ax_P + b$;
- b) 计算 α 在 F_p 上的平方根 β (参见 D.1.4), 若输出是“不存在平方根”, 则报错;
- c) 若 β 的最右边比特等于 \tilde{y}_P , 则置 $y_P = \beta$; 否则置 $y_P = p - \beta$ 。

B.4.3 F_{q^m} (q 为奇素数, $m \geq 2$) 上椭圆曲线点的压缩与解压缩方法

设 $P=(x_P, y_P)$ 是定义在 F_{q^m} 上椭圆曲线 $E: y^2 = x^3 + ax + b$ 上的一个点, 则 y_P 可表示为 $(y_{m-1}, y_{m-2}, \dots, y_1, y_0)$, \tilde{y}_P 为 y_0 的最右边的一个比特, 则点 P 可由 x_P 和比特 \tilde{y}_P 表示。

由 x_P 和 \tilde{y}_P 恢复 y_P 的方法如下:

- a) 在 F_{q^m} 上计算域元素 $\alpha = x_P^3 + ax_P + b$;
- b) 计算 α 在 F_{q^m} 上的平方根 β (参见 D.1.4), 若输出是“不存在平方根”, 则报错。

若 β 的表示 $(\beta_{m-1}, \beta_{m-2}, \dots, \beta_1, \beta_0)$ 中 β_0 的最右边比特等于 \tilde{y}_P , 则置 $y_P = \beta$; 否则置 $y_P = (\beta'_{m-1}, \beta'_{m-2}, \dots, \beta'_1, \beta'_0)$, 其中 $\beta'_i = (q - \beta_i) \in F_q, i = 0, 1, \dots, m-1$ 。



附录 C

(资料性附录)

椭圆曲线上双线性对的计算

C.1 概述

设有限域 F_q 上椭圆曲线为 $E(F_q)$, 若 $\#E(F_q) = cf \times r$, r 是素数且 $\gcd(r, q) = 1$, cf 为余因子, 则使 $r \mid q^k - 1$ 的最小正整数 k 称为椭圆曲线相对于 r 的嵌入次数。若 G 是 $E(F_q)$ 的 r 阶子群, 则 G 的嵌入次数也是 k 。

设 \overline{F}_q 是有限域 F_q 的代数闭包, $E[r]$ 表示 $E(\overline{F}_q)$ 中所有 r 阶点的集合。

C.2 Miller 算法

设 F_{q^k} 上椭圆曲线 $E(F_{q^k})$ 的方程为 $y^2 = x^3 + ax + b$, 定义过 $E(F_{q^k})$ 上点 U 和 V 的直线为 $g_{U,V}: E(F_{q^k}) \rightarrow F_{q^k}$, 若过 U, V 两点的直线方程为 $\lambda x + \delta y + \tau = 0$, 则令函数 $g_{U,V}(Q) = \lambda x_Q + \delta y_Q + \tau$, 其中 $Q = (x_Q, y_Q)$ 。当 $U = V$ 时, $g_{U,V}$ 定义为过点 U 的切线; 若 U 和 V 中有一个点为无穷远点 O , $g_{U,V}$ 就是过另一个点且垂直于 x 轴的直线。一般用 g_U 作为 $g_{U,-U}$ 的简写。

记 $U = (x_U, y_U), V = (x_V, y_V), Q = (x_Q, y_Q), \lambda_1 = (3x_V^2 + a)/(2y_V), \lambda_2 = (y_U - y_V)/(x_U - x_V)$, 则有以下性质:

- $g_{U,V}(O) = g_{U,O}(Q) = g_{O,V}(Q) = 1$;
- $g_{V,V}(Q) = \lambda_1(x_Q - x_V) - y_Q + y_V, Q \neq O$;
- $g_{U,V}(Q) = \lambda_2(x_Q - x_V) - y_Q + y_V, Q \neq O, U \neq \pm V$;
- $g_{V,-V}(Q) = x_Q - x_V, Q \neq O$ 。

Miller 算法是计算双线性对的有效算法。

输入: 曲线 E , E 上两点 P 和 Q , 整数 c 。

输出: $f_{P,c}(Q)$ 。

- 设 c 的二进制表示是 $c_j \cdots c_1 c_0$, 其最高位 c_j 为 1。
- 置 $f = 1, V = P$ 。
- 对 i 从 $j-1$ 降至 0, 执行:
 - 计算 $f = f^2 \cdot g_{V,V}(Q)/g_{2V}(Q), V = [2]V$;
 - 若 $c_i = 1$, 令 $f = f \cdot g_{V,P}(Q)/g_{V+P}(Q), V = V + P$ 。
- 输出 f 。

一般, 称 $f_{P,c}(Q)$ 为 Miller 函数。

C.3 Weil 对的计算

设 E 是 F_q 上的椭圆曲线, r 是与 q 互素的正整数, 设 μ_r 是 r 次单位根集合, k 是相对于 r 的嵌入次数, 即 $r \mid q^k - 1$, 则 $\mu_r \subset F_{q^k}$ 。

令 $G_1 = E[r], G_2 = E[r], G_T = \mu_r$, 则 Weil 对是从 $G_1 \times G_2$ 到 G_T 的双线性映射, 记为 e_r 。

设 $P \in G_1, Q \in G_2$, 若 $P = O$ 或 $Q = O$, 则 $e_r(P, Q) = 1$; 如果 $P \neq O$ 且 $Q \neq O$, 随机选取非无穷远点 $T \in G_1, U \in G_2$, 使得 $P + T$ 和 T 均不等于 U 或 $U + Q$, 则 Weil 对为:

$$e_r(P, Q) = \frac{f_{P+T,r}(Q+U)f_{T,r}(U)f_{U,r}(P+T)f_{Q+U,r}(T)}{f_{T,r}(Q+U)f_{P+T,r}(U)f_{Q+U,r}(P+T)f_{U,r}(T)}$$

$f_{P+T,r}(Q+U), f_{T,r}(Q+U), f_{P+T,r}(U), f_{T,r}(U), f_{Q+U,r}(P+T), f_{Q+U,r}(T), f_{U,r}(P+T)$ 和 $f_{U,r}(T)$ 均可用 Miller 算法计算。在计算过程中,若出现分母为 0 的情况,则更换点 T 或 U 重新计算。

C.4 Tate 对的计算

设 E 是 F_q 上的椭圆曲线, r 是与 q 互素的正整数, k 是相对于 r 的嵌入次数。设 Q 是 $E(F_{q^k})[r]$ 上的 r 阶点, 由 Q 生成的循环群记为 $\langle Q \rangle$ 。 $(F_{q^k}^*)^r$ 为 $F_{q^k}^*$ 中每一个元素的 r 次幂构成的集合, $(F_{q^k}^*)^r$ 是 $F_{q^k}^*$ 的子群, $F_{q^k}^*$ 关于 $(F_{q^k}^*)^r$ 的商群记为 $F_{q^k}^*/(F_{q^k}^*)^r$ 。

令 $G_1 = E(F_q)[r], G_2 = \langle Q \rangle, G_T = F_{q^k}^*/(F_{q^k}^*)^r$, 则 Tate 对是从 $G_1 \times G_2$ 到 G_T 的双线性映射, 记为 t_r 。

设 $P \in G_1, Q \in G_2$, 若 $P = O$ 或 $Q = O$, 则 $t_r = 1$; 若 $P \neq O$ 且 $Q \neq O$, 随机选择非无穷远点 $U \in E(F_{q^k})$, 使得 $P \neq U, P \neq Q+U, U \neq -Q$, 则 Tate 对为:

$$t_r(P, Q) = \frac{f_{P,r}(Q+U)}{f_{P,r}(U)}$$

$f_{P,r}(Q+U)$ 和 $f_{P,r}(U)$ 可通过 Miller 算法计算。在计算过程中,若出现分母为 0 的情况,则更换点 U 重新计算。

在实际应用中,一般使用约化 Tate 对:

$$t_r(P, Q) = \begin{cases} f_{P,r}(Q)^{(q^k-1)/r}, & Q \neq O, \\ 1, & Q = O \end{cases}$$

约化 Tate 对比一般 Tate 对的计算量减少了一半。若相对于 r 的嵌入次数 k 是偶数时,约化 Tate 对的计算方法可以进一步优化。算法 1 描述的是一般约化 Tate 对的计算方法,算法 2、3、4 均指 $k=2d$ 的情况。

算法 1

输入: 与 q 互素的整数 $r, P \in E(F_q)[r], Q \in E(F_{q^k})[r]$ 。

输出: $t_r(P, Q)$ 。

- 设 r 的二进制表示是 $r_j \cdots r_1 r_0$, 其最高位 r_j 为 1。
- 置 $f=1, V=P$ 。
- 对 $i=j-1$ 降至 0, 执行:
 - 计算 $f = f^2 \cdot g_{V,V}(Q)/g_{2V}(Q), V=[2]V$;
 - 若 $r_i=1$, 则计算 $f = f \cdot g_{V,P}(Q)/g_{V+P}(Q), V=V+P$ 。
- 计算 $f = f^{(q^k-1)/r}$ 。
- 输出 f 。

算法 2

输入: 与 q 互素的整数 $r, P \in E(F_q)[r], Q \in E(F_{q^k})[r]$ 。

输出: $t_r(P, Q)$ 。

- 设 r 的二进制表示是 $r_j \cdots r_1 r_0$, 其最高位 r_j 为 1。
- 置 $f=1, V=P$ 。
- 对 $i=j-1$ 降至 0, 执行:
 - 计算 $f = f^2 \cdot g_{V,V}(Q)/g_{2V}(Q), V=[2]V$;
 - 若 $r_i=1$, 则计算 $f = f \cdot g_{V,P}(Q)/g_{V+P}(Q), V=V+P$ 。

- d) 计算 $f = f^{q^d - 1}$ 。
- e) 计算 $f = f^{(q^d + 1)/r}$ 。
- f) 输出 f 。

算法 3

如果将 F_{q^k} ($k=2d$) 看成 F_{q^d} 的二次扩域, 则 F_{q^k} 上元素可表示成 $w = w_0 + iw_1$ 的形式, 其中 $w_0, w_1 \in F_{q^d}$, 则 w 的共轭 $\bar{w} = w_0 - iw_1$, 此时算法 1 中的求逆运算可用共轭代替。

输入: 与 q 互素的整数 $r, P \in E(F_q)[r], Q \in E(F_{q^k})[r]$ 。

输出: $t_r(P, Q)$ 。

- a) 设 r 的二进制表示是 $r_j \cdots r_1 r_0$, 其最高位 r_j 为 1。
- b) 置 $f = 1, V = P$ 。
- c) 对 i 从 $j-1$ 降至 0, 执行:
 - 1) 计算 $f = f^2 \cdot g_{V,V}(Q) \cdot \bar{g}_{2V}(Q), V = [2]V$;
 - 2) 若 $r_i = 1$, 令 $f = f \cdot g_{V,P}(Q) \cdot \bar{g}_{V+P}(Q), V = V + P$ 。
- d) 计算 $f = f^{q^d - 1}$ 。
- e) 计算 $f = f^{(q^d + 1)/r}$ 。
- f) 输出 f 。

算法 4

当 q 为大于 3 的素数时, 点 $Q \in E', E'$ 是 E 的扭曲线, 此时算法可进一步优化。

输入: $P \in E(F_q)[r], Q \in E'(F_{q^d})[r]$, 整数 r 。

输出: $t_r(P, Q)$ 。

- a) 设 r 的二进制表示是 $r_j \cdots r_1 r_0$, 其最高位 r_j 为 1。
- b) 置 $f = 1, V = P$ 。
- c) 对 i 从 $j-1$ 降至 0, 执行:
 - 1) 计算 $f = f^2 \cdot g_{V,V}(Q), V = [2]V$;
 - 2) 若 $r_i = 1$, 则计算 $f = f \cdot g_{V,P}(Q), V = V + P$ 。
- d) 计算 $f = f^{q^d - 1}$ 。
- e) 计算 $f = f^{(q^d + 1)/r}$ 。
- f) 输出 f 。

C.5 Ate 对的计算

C.5.1 概述

设 π_q 为 Frobenius 自同态, 即 $\pi_q: E \rightarrow E, (x, y) \mapsto (x^q, y^q)$; $[q]$ 为映射: $E \rightarrow E, Q \mapsto [q]Q$; $[1]$ 为单位映射; π_q 的对偶为 π_q' , 满足 $\pi_q \cdot \pi_q' = [q]$; $\text{Ker}(\cdot)$ 表示映射的核; 设椭圆曲线 $E(F_q)$ 的 Frobenius 迹为 t , 令 $T = t - 1$ 。

下面给出不同结构下的 Ate 对的计算方法。

C.5.2 定义在 $G_2 \times G_1$ 上 Ate 对的计算

设 $G_1 = E[r] \cap \text{Ker}(\pi_q - [1]), G_2 = E[r] \cap \text{Ker}(\pi_q - [q]), P \in G_1, Q \in G_2$ 。定义 $G_2 \times G_1$ 上 Ate 对:



$$\begin{aligned} \text{Ate}: G_2 \times G_1 &\rightarrow F_{q^k}^* / (F_{q^k}^*)^r \\ (Q, P) &\mapsto f_{Q, T}(P)^{(q^k - 1)/r} \end{aligned}$$

下面给出 $G_2 \times G_1$ 上 Ate 对的计算方法:

输入: $G_1 = E[r] \cap \text{Ker}(\pi_q - [1])$, $G_2 = E[r] \cap \text{Ker}(\pi_q - [q])$, $P \in G_1$, $Q \in G_2$, 整数 $T = t - 1$ 。

输出: $\text{Ate}(Q, P)$ 。

- a) 设 T 的二进制表示是 $t_j \cdots t_1 t_0$, 其最高位 t_j 为 1。
- b) 置 $f = 1, V = Q$ 。
- c) 对 i 从 $j-1$ 降至 0, 执行:
 - 1) 计算 $f = f^2 \cdot g_{V,V}(P), V = [2]V$;
 - 2) 若 $t_i = 1$, 计算 $f = f \cdot g_{V,Q}(P) / g_{V+Q}(P), V = V + Q$ 。
- d) 计算 $f = f^{(q^k-1)/r}$ 。
- e) 输出 f 。

C.5.3 定义在 $G_1 \times G_2$ 上 Ate 对的计算

对于超奇异椭圆曲线来说, 以上 Ate 对的定义与技术可以直接应用; 而对于常曲线来说, 需要把 G_2 转换到扭曲线上才可以定义 Ate 对。

超奇异椭圆曲线上 Ate 对:

设 E 为定义在 F_q 上的超奇异椭圆曲线, $G_1 = E[r] \cap \text{Ker}(\pi_q' - [q])$, $G_2 = E[r] \cap \text{Ker}(\pi_q' - [1])$, $G_T = F_{q^k}^* / (F_{q^k}^*)^r$, $P \in G_1, Q \in G_2$ 。定义 $G_1 \times G_2$ 上的 Ate 对:

$$\begin{aligned} \text{Ate}: G_1 \times G_2 &\rightarrow F_{q^k}^* / (F_{q^k}^*)^r \\ (P, Q) &\mapsto f_{P, T}(Q)^{(q^k-1)/r} \end{aligned}$$

下面给出 $G_1 \times G_2$ 上 Ate 对的计算方法:

输入: $G_1 = E[r] \cap \text{Ker}(\pi_q' - [q])$, $G_2 = E[r] \cap \text{Ker}(\pi_q' - [1])$, $P \in G_1, Q \in G_2$, 整数 $T = t - 1$ 。

输出: $\text{Ate}(P, Q)$ 。

- a) 设 T 的二进制表示是 $t_j \cdots t_1 t_0$, 其最高位 t_j 为 1。
- b) 置 $f = 1, V = P$ 。
- c) 对 i 从 $j-1$ 降至 0, 执行:
 - 1) 计算 $f = f^2 \cdot g_{V,V}(Q), V = [2]V$;
 - 2) 若 $t_i = 1$, 计算 $f = f \cdot g_{V,P}(Q) / g_{V+P}(Q), V = V + P$ 。
- d) 计算 $f = f^{(q^k-1)/r}$ 。
- e) 输出 f 。

常曲线上的 Ate 对:

对于常曲线来说, 存在一个整数 e , 使得 $(\pi_q')^e$ 成为 G_1 上的自同构, 这样可以用扭曲线理论在 $\text{Ate}(P, Q)$ 和 $f_{P, T^e}(Q)$ 之间建立起联系, 其中 $T = t - 1, t$ 为迹。

设 E 是定义在 F_q 上的椭圆曲线, E' 为 E 的 d 次扭曲线。 k 为嵌入次数, $m = \gcd(k, d)$, $e = k/m$, ζ_m 是 m 次本原单位根, 当 $p \geq 5$ 时, d 的取值有三种情况:

- a) $d = 6, \beta = \zeta_m^{-6}, E': y^2 = x^3 + \beta b, \phi_6: E' \rightarrow E: (x, y) \mapsto (\beta^{-1/3}x, \beta^{-1/2}y), G_1 = E[r] \cap \text{Ker}(\pi_q - [1]), G_2 = E'[r] \cap \text{Ker}([\beta^{-1/6}]\pi_q^e - [1]);$
- b) $d = 4, \beta = \zeta_m^{-4}, E': y^2 = x^3 + \beta ax, \phi_4: E' \rightarrow E: (x, y) \mapsto (\beta^{-1/2}x, \beta^{-3/4}y), G_1 = E[r] \cap \text{Ker}(\pi_q - [1]), G_2 = E'[r] \cap \text{Ker}([\beta^{-1/4}]\pi_q^e - [1]);$
- c) $d = 2, \beta = \zeta_m^{-2}, E': y^2 = x^3 + \beta^2 ax + \beta^3 b, \phi_2: E' \rightarrow E: (x, y) \mapsto (\beta^{-1}x, \beta^{-3/2}y), G_1 = E[r] \cap \text{Ker}(\pi_q - [1]), G_2 = E'[r] \cap \text{Ker}([\beta^{-1/2}]\pi_q^e - [1])。$

设 $P \in G_1, Q \in G_2$ 。定义 $G_1 \times G_2$ 上 Ate 对:

$$\text{Ate}: G_1 \times G_2 \rightarrow F_{q^k}^* / (F_{q^k}^*)^r$$

$$(P, Q) \mapsto f_{P, T^e}(Q)^{(q^k-1)/r}$$

下面给出具体算法描述：

输入： $G_1, G_2, P \in G_1, Q \in G_2$, 整数 $T=t-1$ 。

输出： $\text{Ate}(P, Q)$ 。

- a) 计算 $u = T^e$ 。
- b) 设 u 的二进制表示是 $t_j \cdots t_1 t_0$, 其最高位 t_j 为 1。
- c) 置 $f=1, V=P$ 。
- d) 对 i 从 $j-1$ 降至 0, 执行:
 - 1) 计算 $f = f^2 \cdot g_{V,V}(Q), V = [2]V$;
 - 2) 若 $t_i=1$, 计算 $f = f \cdot g_{V,P}(Q)/g_{V+P}(Q), V = V + P$ 。
- e) 计算 $f = f^{(q^k-1)/r}$ 。
- f) 输出 f 。

如果定义在 $G_1 \times G_2$ 上的 Ate 对所基于的椭圆曲线是超奇异的, 则容易看出它比 Tate 对有更高的效率。但对于常曲线来说, 只有当 $|T^e| \leq r$ 时它的运算效率才会比 Tate 对高, 所以只有在 t 值较小时才推荐使用 Ate 对。

C.6 R-ate 对的计算

C.6.1 R-ate 对的定义

R-ate 对中的“R”可视为两个对的比值, 也可以看成是 Tate 对的某固定幂次。

令 $A, B, a, b \in Z, A=aB+b$ 。Miller 函数 $f_{Q,A}(P)$ 有如下性质:

$$\begin{aligned} f_{Q,A}(P) &= f_{Q,aB+b}(P) = f_{Q,aB}(P) \cdot f_{Q,b}(P) \cdot g_{[aB]Q, [b]Q}(P) / g_{[A]Q}(P) \\ &= f_{Q,B}^a(P) \cdot f_{[B]Q,a}(P) \cdot f_{Q,b}(P) \cdot \frac{g_{[aB]Q, [b]Q}(P)}{g_{[A]Q}(P)} \end{aligned}$$

定义 R-ate 对为

$$\begin{aligned} R_{A,B}(Q, P) &= (f_{[B]Q,a}(P) \cdot f_{Q,b}(P) \cdot \frac{g_{[aB]Q, [b]Q}(P)}{g_{[A]Q}(P)})^{(q^k-1)/n} \\ &= \left(\frac{f_{Q,A}(P)}{f_{Q,B}^a(P)} \right)^{(q^k-1)/n} \end{aligned}$$

如果 $f_{Q,A}(P)$ 和 $f_{Q,B}(P)$ 是非退化对的 Miller 函数, 则 $R_{A,B}(Q, P)$ 也是非退化对。

令 $L_1, L_2, M_1, M_2 \in Z$, 使得 $e_n^{L_1}(Q, P) = (f_{Q,A}(P))^{M_1 \cdot (q^k-1)/n}$

$$e_n^{L_2}(Q, P) = (f_{Q,B}(P))^{M_2 \cdot (q^k-1)/n}$$

令 $M = \text{lcm}(M_1, M_2), m = (M/M_1) \cdot L_1 - a \cdot (M/M_2) \cdot L_2$ 。

为了非退化, n 不能整除 m , 有:

$$e_n^m(Q, P) = e_n^{\frac{M}{M_1} L_1 - a \frac{M}{M_2} L_2}(Q, P) = \frac{e_n(Q, P)^{L_1 \frac{M}{M_1}}}{e_n(Q, P)^{a L_2 \frac{M}{M_2}}} = \left(\frac{f_{Q,A}(P)}{f_{Q,B}(P)^a} \right)^{M \cdot (q^k-1)/n}$$

易见 $e_n^m(Q, P) = R_{A,B}(Q, P)^M$ 。

一般来说, 不是任意整数对 $(A; B)$ 都能给出非退化对, $(A; B)$ 有四种选择:

- a) $(A; B) = (q^i; n)$;
- b) $(A; B) = (q; T_1)$;
- c) $(A; B) = (T_i; T_j)$;
- d) $(A; B) = (n; T_i)$ 。

其中 $T_i \equiv q^i \pmod{n}$, $i \in \mathbb{Z}$, $0 < i < k$ 。

情形 1: $(A; B) = (q^i; n)$, 由于 $A = aB + b$, 即 $q^i = an + b$. 因此 $b \equiv q^i \pmod{n}$,

$$\left(\frac{f_{Q,q^i}(P)}{f_{Q,n}^a(P)} \right)^{(q^k-1)/n} = R_{A,B}(Q, P) = (f_{[n]Q,a}(P) f_{Q,b}(P) \frac{g_{[an]Q,[b]Q}(P)}{g_{[q^i]Q}(P)})^{(q^k-1)/n}$$

因为 $b \equiv q^i \pmod{n}$, 所以 $g_{[an]Q,[b]Q}(P) = g_{[q^i]Q}(P)$ 。更进一步, $f_{[n]Q,a}(P) = 1$, 因此:

$$R_{A,B}(Q, P) = f_{Q,q^i}(P)^{(q^k-1)/n}$$

情形 2: $(A; B) = (q; T_1)$, 即 $q = aT_1 + b$, 则:

$$\left(\frac{f_{Q,q}(P)}{f_{Q,T_1}^a(P)} \right)^{(q^k-1)/n} = R_{A,B}(Q, P) = (f_{[T_1]Q,a}(P) f_{Q,b}(P) \frac{g_{[aT_1]Q,[b]Q}(P)}{g_{[q]Q}(P)})^{(q^k-1)/n}$$

由于 $f_{[T_1]Q,a}(P) = f_{Q,a}^q(P)$, 因此:

$$R_{A,B}(Q, P) = (f_{Q,a}^q(P) f_{Q,b}(P) \frac{g_{[aT_1]Q,[b]Q}(P)}{g_{[q]Q}(P)})^{(q^k-1)/n}$$

情形 3: $(A; B) = (T_i; T_j)$, 即 $T_i = aT_j + b$, 有:

$$\left(\frac{f_{Q,T_i}(P)}{f_{Q,T_j}^a(P)} \right)^{(q^k-1)/n} = R_{A,B}(Q, P) = (f_{[T_j]Q,a}(P) f_{Q,b}(P) \frac{g_{[aT_j]Q,[b]Q}(P)}{g_{[q^i]Q}(P)})^{(q^k-1)/n}$$

同样, 因为 $f_{[T_j]Q,a}(P) = f_{Q,a}^{q_j}(P)$, 因此:

$$R_{A,B}(Q, P) = (f_{Q,a}^{q_j}(P) f_{Q,b}(P) \frac{g_{[aT_j]Q,[b]Q}(P)}{g_{[q^i]Q}(P)})^{(q^k-1)/n}$$

情形 4: $(A; B) = (n; T_i)$, 即 $n = aT_i + b$, 因此:

$$\left(\frac{f_{Q,n}(P)}{f_{Q,T_i}^a(P)} \right)^{(q^k-1)/n} = R_{A,B}(Q, P) = (f_{[T_i]Q,a}(P) f_{Q,b}(P) \frac{g_{[aT_i]Q,[b]Q}(P)}{g_{[n]Q}(P)})^{(q^k-1)/n}$$

同样, 由 $f_{[T_i]Q,a}(P) = f_{Q,a}^{q_i}(P)$ 得:

$$R_{A,B}(Q, P) = (f_{Q,a}^{q_i}(P) f_{Q,b}(P) \frac{g_{[aT_i]Q,[b]Q}(P)}{g_{[n]Q}(P)})^{(q^k-1)/n}$$

情形 1 的 R-ate 对也称 Ate_i 对。情形 2、情形 3、情形 4 的对计算需要两个长度为 $\log a$ 和 $\log b$ 的 Miller 循环。情形 2 和情形 4 只能改变一个参数 i 来获得有效对, 情形 3 可以改变两个参数。因此, 一般都选择情形 3 的 R-ate 对, 这时 $(A; B) = (T_i; T_j)$ 。

为了降低 Miller 循环次数, 可以尝试不同的 i 和 j , 使整数 a 和 b 足够小, 从而使 Miller 循环次数减至 $\log(r^{1/\phi(k)})$ 。

C.6.2 BN 曲线上 R-ate 对的计算

Barreto 和 Naehrig 提出了一种构造素域 F_q 上适合对的常曲线的方法, 通过此方法构造的曲线称为 BN 曲线。BN 曲线方程为 $E: y^2 = x^3 + b$, 其中 $b \neq 0$ 。嵌入次数 $k=12$, 曲线阶 r 也是素数。

基域特征 q , 曲线阶 r , Frobenius 映射的迹 tr 可通过参数 t 来确定:

$$q(t) = 36t^4 + 36t^3 + 24t^2 + 6t + 1$$

$$r(t) = 36t^4 + 36t^3 + 18t^2 + 6t + 1$$

$$tr(t) = 6t^2 + 1$$

其中 $t \in \mathbb{Z}$ 是任意使得 $q = q(t)$ 和 $r = r(t)$ 均为素数的整数, 为了达到一定的安全级别, t 应足够大, 至少达到 63 比特。

BN 曲线存在定义在 F_{q^2} 上的 6 次扭曲线 $E': y^2 = x^3 + \beta b$, 其中 $\beta \in F_{q^2}$, 并且在 F_{q^2} 上既不是二次元也不是三次元, 选择 β 使得 $r \nmid \#E'(F_{q^2})$, G_2 中点可用扭曲线 E' 上的点来表示, $\phi_6: E' \rightarrow E: (x, y) \mapsto (\beta^{-1/3}x, \beta^{-1/2}y)$ 。因此对的计算限制在 $E(F_q)$ 上点 P 和 $E'(F_{q^2})$ 上点 Q' 。

π_q 为 Frobenius 自同态, $\pi_q: E \rightarrow E, \pi_q(x, y) = (x^q, y^q)$ 。

$\pi_{q^2}: E \rightarrow E, \pi_{q^2}(x, y) = (x^{q^2}, y^{q^2})$ 。

R-ate 对的计算:

输入: $P \in E(F_q)[r], Q \in E'(F_{q^2})[r], a = 6t + 2$ 。

输出: $R_a(Q, P)$ 。

a) 设 $a = \sum_{i=0}^{L-1} a_i 2^i, a_{L-1} = 1$ 。

b) 置 $T = Q, f = 1$ 。

c) 对 i 从 $L-2$ 降至 0, 执行:

1) 计算 $f = f^2 \cdot g_{T,T}(P), T = [2]T$;

2) 若 $a_i = 1$, 计算 $f = f \cdot g_{T,Q}(P), T = T + Q$ 。

d) 计算 $Q_1 = \pi_q(Q), Q_2 = \pi_{q^2}(Q)$ 。

e) 计算 $f = f \cdot g_{T,Q_1}(P), T = T + Q_1$ 。

f) 计算 $f = f \cdot g_{T,-Q_2}(P), T = T - Q_2$ 。

g) 计算 $f = f^{(q^{12}-1)/r}$ 。

h) 输出 f 。

关于 Weil 对、Tate 对、Ate 对、R-ate 对的更多计算方法参见参考文献[18]、[21]、[32]、[37]、[45]、[47]、[50]、[56]、[57]和[58]。

C.7 适合对的椭圆曲线

对于超奇异曲线, 双线性对的构造相对容易, 但对于随机生成的曲线, 构造可计算的双线性对比较困难, 因此采用常曲线时, 需要构造适合对的曲线。

假设 E 是定义在 F_q 上的椭圆曲线, 如果以下三个条件成立, 则称 E 是适合对的曲线:

a) $\#E(F_q)$ 有一个不小于 \sqrt{q} 的素因子 r ;

b) E 相对于 r 的嵌入次数小于 $\log_2(r)/8$;

c) $r \pm 1$ 的最大素因子的规模与 r 相当。

构造适合对的椭圆曲线的步骤如下:

步骤 1: 选定 k , 计算整数 t, r, q , 使得存在一条椭圆曲线 $E(F_q)$, 其迹为 t , 具有一个素数阶 r 的子群且嵌入次数为 k ;

步骤 2: 利用复乘方法在 F_q 上计算该曲线的方程参数。

构造适合对的椭圆曲线的方法参见参考文献[16]、[20]、[21]、[22]、[24]、[30]、[31]、[33]、[34]、[48]、[51]、[52]、[57]和[64]。

附 录 D
(资料性附录)
数论算法

D.1 有限域中的运算

D.1.1 有限域中的指数运算

设 a 是正整数, g 是域 F_q 上的元素, 指数运算是计算 g^a 的运算过程。通过以下的二进制方法可以有效地执行指数运算。

输入: 正整数 a , 域 F_q , 域元素 g 。

输出: g^a 。

- a) 置 $e = a \bmod (q-1)$, 若 $e=0$, 则输出 1。
- b) 设 e 的二进制表示是 $e_r e_{r-1} \dots e_1 e_0$, 其最高位 e_r 为 1。
- c) 置 $x = g$ 。
- d) 对 i 从 $r-1$ 降至 0 执行:
 - 1) 置 $x = x^2$;
 - 2) 若 $e_i = 1$, 则置 $x = g \cdot x$ 。
- e) 输出 x 。

其他加速算法参见参考文献[25]和[44]。

D.1.2 有限域中的逆运算

设 g 是域 F_q 上的非零元素, 则逆元素 g^{-1} 是使得 $g \cdot c = 1$ 成立的域元素 c 。由于 $c = g^{q-2}$, 因此求逆可通过指数运算实现。若 q 是素数, g 是满足 $1 \leq g \leq q-1$ 的整数, 则 g^{-1} 是整数 c , $1 \leq c \leq q-1$, 且 $g \cdot c \equiv 1 \pmod{q}$ 。

输入: 域 F_q , F_q 中的非零元素 g 。

输出: 逆元素 g^{-1} 。

- a) 计算 $c = g^{q-2}$ (参见 D.1.1);
- b) 输出 c 。

更为有效的方法是扩展的欧几里德(Euclid)算法, 参见参考文献[44]。

D.1.3 Lucas 序列的生成

令 X 和 Y 是非零整数, X 和 Y 的 Lucas 序列 U_k, V_k 的定义如下:

$U_0 = 0, U_1 = 1$, 当 $k \geq 2$ 时, $U_k = X \cdot U_{k-1} - Y \cdot U_{k-2}$;

$V_0 = 2, V_1 = X$, 当 $k \geq 2$ 时, $V_k = X \cdot V_{k-1} - Y \cdot V_{k-2}$ 。

上述递归式适于计算 k 值较小的 U_k 和 V_k 。对大整数 k , 下面的算法可有效地计算 $U_k \bmod q$ 和 $V_k \bmod q$ 。

输入: 奇素数 q , 整数 X 和 Y , 正整数 k 。

输出: $U_k \bmod q$ 和 $V_k \bmod q$ 。

- a) 置 $\Delta = X^2 - 4Y$ 。
- b) 设 k 的二进制表示是 $k = k_r k_{r-1} \dots k_1 k_0$, 其中最高位 k_r 为 1。

- c) 置 $U=1, V=X$ 。
- d) 对 i 从 $r-1$ 降至 0 执行:
 - 1) 置 $(U, V) = ((U \cdot V) \bmod q, ((V^2 + \Delta \cdot U^2)/2) \bmod q)$;
 - 2) 若 $k_i=1$, 则置 $(U, V) = (((X \cdot U + V)/2) \bmod q, ((X \cdot V + \Delta \cdot U)/2) \bmod q)$ 。
- e) 输出 U 和 V 。

D.1.4 平方根的求解

D.1.4.1 F_q 上平方根的求解

设 q 是奇素数, g 是满足 $0 \leq g < q$ 的整数, g 的平方根 $(\bmod q)$ 是整数 y , 即 $y^2 \bmod q = g, 0 \leq y < p$ 。

若 $g=0$, 则只有一个平方根, 即 $y=0$; 若 $g \neq 0$, 则 g 有零个或两个平方根, 若 y 是其中一个平方根, 则另一个平方根就是 $q-y$ 。

下面的算法可以确定 g 是否有平方根, 若有, 就计算其中一个根。

输入: 奇素数 q , 整数 $g, 0 < g < q$ 。

输出: 若存在 g 的平方根, 则输出一个平方根, 否则输出“不存在平方根”。

算法 1: 对 $q \equiv 3 \pmod{4}$, 即存在正整数 u , 使得 $q=4u+3$ 。

- a) 计算 $y = g^{u+1} \bmod q$ (参见 D.1.1);
- b) 计算 $z = y^2 \bmod q$;
- c) 若 $z=g$, 则输出 y ; 否则输出“不存在平方根”。

算法 2: 对 $q \equiv 5 \pmod{8}$, 即存在正整数 u , 使得 $q=8u+5$ 。

- a) 计算 $z = g^{2u+1} \bmod q$ (参见 D.1.1);
- b) 若 $z \equiv 1 \pmod{q}$, 计算 $y = g^{u+1} \bmod q$, 输出 y , 终止算法;
- c) 若 $z \equiv -1 \pmod{q}$, 计算 $y = (2g \cdot (4g)^u) \bmod q$, 输出 y , 终止算法;
- d) 输出“不存在平方根”。

算法 3: 对 $q \equiv 1 \pmod{8}$, 即存在正整数 u , 使得 $q=8u+1$ 。

- a) 置 $Y=g$;
- b) 生成随机数 $X, 0 < X < q$;
- c) 计算 Lucas 序列元素 (参见 D.1.3): $U=U_{4u+1} \bmod q, V=V_{4u+1} \bmod q$;
- d) 若 $V^2 \equiv 4Y \pmod{q}$, 则输出 $y = (V/2) \bmod q$, 并终止;
- e) 若 $U \bmod q \neq 1$ 且 $U \bmod q \neq q-1$, 则输出“不存在平方根”, 并终止;
- f) 返回步骤 b)。

D.1.4.2 F_{q^2} 上平方根的求解

设 q 是奇素数, 对于二次扩域 F_{q^2} , 假设约化多项式为 $f(x) = x^2 - n, n \in F_q$, 则 F_{q^2} 中元素 β 可表示成 $a+bx$ 的形式, $a, b \in F_q$, 则 β 的平方根为:

$$\begin{aligned} \sqrt{\beta} = \sqrt{a+bx} = & \pm \left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - nb^2}}{2}} + \frac{xb}{2\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - nb^2}}{2}}} \right) \text{ 或} \\ & \pm \left(\sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - nb^2}}{2}} + \frac{xb}{2\sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - nb^2}}{2}}} \right) \end{aligned}$$

下面的算法可以确定 β 是否有平方根, 若有, 就计算其中一个根。

输入: F_{q^2} 中元素 $\beta = a + bx$ 且 $\beta \neq 0$, q 为奇素数。

输出: 若存在 β 的平方根, 则输出一个平方根 z , 否则输出“不存在平方根”。

- a) 计算 $U = a^2 - nb^2$ 。
- b) 利用 D.1.4.1 的方法求 $U \bmod q$ 的平方根, 若 $U \bmod q$ 的平方根存在, 记作 w_i , 即 $w_i^2 = U \bmod q, i = 1, 2$, 转步骤 c); 否则输出“不存在平方根”, 并终止。
- c) 对 i 从 1)~2) 执行:
 - 1) 计算 $V = (a + w_i)/2$;
 - 2) 利用 D.1.4.1 的方法求 $V \bmod q$ 的平方根, 若 $V \bmod q$ 的平方根存在, 任取一个根 y , 即 $y^2 = V \bmod q$, 转步骤 d); 若 $V \bmod q$ 的平方根不存在且 $i = 2$, 输出“不存在平方根”, 并终止算法。
- d) 计算 $z_1 = b/2y \pmod{q}$, 令 $z_0 = y$ 。
- e) 输出 $z = z_0 + z_1x$ 。

D.1.4.3 F_{q^m} 上平方根的求解

D.1.4.3.1 F_{q^m} 上平方元检测

设 q 是奇素数, 且 $m \geq 2$, g 是域 F_{q^m} 中非零元素, 下面算法给出 g 是否为一个平方元的检测。

输入: 域元素 g 。

输出: 若 g 是平方元则输出“是平方元”, 否则输出“不是平方元”。

- a) 计算 $B = g^{(q^m-1)/2}$ (参见 D.1.1);
- b) 若 $B = 1$, 则输出“是平方元”;
- c) 若 $B = -1$, 则输出“不是平方元”。

D.1.4.3.2 F_{q^m} 上平方根的求解

设 q 是奇素数, 且 $m \geq 2$ 。

输入: 域元素 g 。

输出: 若 g 是平方元则输出平方根 B , 否则输出“没有平方根”。

- a) 随机选取非平方元 Y 。
- b) 计算 $q^m - 1 = 2^u \times k$ (其中 k 为奇数)。
- c) 计算 $Y = Y^k$ 。
- d) 计算 $C = g^k$ 。
- e) 计算 $B = g^{(k+1)/2}$ 。
- f) 若 $C^{2^{u-1}} \neq 1$, 则输出“没有平方根”, 终止算法。
- g) 当 $C \neq 1$ 执行:
 - 1) 设 i 是使 $C^{2^i} = 1$ 成立的最小正整数;
 - 2) 计算 $C = C \times Y^{2^{u-i}}$;
 - 3) 计算 $B = B \times Y^{2^{u-i-1}}$ 。
- h) 输出 B 。



D.1.5 概率素性检测

设 u 是一个大的正整数, 下面的概率算法 (Miller-Rabin 检测) 将确定 u 是素数还是合数。

输入: 一个大的奇数 u 和一个大的正整数 T 。

输出: “概率素数”或“合数”。

- a) 计算 v 和奇数 w , 使得 $u-1=2^v \cdot w$ 。
- b) 对 j 从 $1 \sim T$ 执行:
 - 1) 在区间 $[2, u-1]$ 中选取随机数 a 。
 - 2) 置 $b=a^w \bmod u$ 。
 - 3) 若 $b=1$ 或 $u-1$, 转到步骤 6)。
 - 4) 对 i 从 $1 \sim (v-1)$ 执行:
 - 置 $b=b^2 \bmod u$;
 - 若 $b=u-1$, 转到步骤 6);
 - 若 $b=1$, 输出“合数”并终止;
 - 下一个 i 。
 - 5) 输出“合数”, 并终止。
 - 6) 下一个 j 。
- c) 输出“概率素数”。

若算法输出“合数”, 则 u 是一个合数。若算法输出“概率素数”, 则 u 是合数的概率小于 2^{-2T} 。这样, 通过选取足够大的 T , 误差可以忽略。

D.2 有限域上的多项式

D.2.1 最大公因式

若 $f(x) \neq 0$ 和 $g(x) \neq 0$ 是系数在域 F_q 中的两个多项式, 则唯一地存在次数最高的首一多项式 $d(x)$, 其系数在域 F_q 中且同时整除 $f(x)$ 和 $g(x)$ 。多项式 $d(x)$ 称为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最大公因子, 记为 $\gcd(f(x), g(x))$ 。利用下面的算法(欧几里德算法)可计算出两个多项式的最大公因子。

输入: 有限域 F_q , F_q 上的两个非零多项式 $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ 。

输出: $d(x) = \gcd(f(x), g(x))$ 。

- a) 置 $a(x) = f(x)$, $b(x) = g(x)$ 。
- b) 当 $b(x) \neq 0$ 时, 循环执行:
 - 1) 置 $c(x) = a(x) \bmod b(x)$;
 - 2) 置 $a(x) = b(x)$;
 - 3) 置 $b(x) = c(x)$ 。

设 α 是 $a(x)$ 的首项系数并输出 $\alpha^{-1}a(x)$ 。

D.2.2 F_q 上多项式不可约性的检测

设 $f(x)$ 是 F_q 上的多项式, 利用下面的算法可以有效地检测 $f(x)$ 的不可约性。

输入: F_q 上的首一多项式 $f(x)$, 素数 q 。

输出: 若 $f(x)$ 在 F_q 上不可约, 则输出“正确”; 否则, 输出“错误”。

- a) 置 $u(x) = x$, $m = \deg(f(x))$ 。
- b) 对 i 从 $1 \sim \lfloor m/2 \rfloor$ 执行:
 - 1) 计算 $u(x) = u^q(x) \bmod f(x)$;
 - 2) 计算 $d(x) = \gcd(f(x), u(x) - x)$;
 - 3) 若 $d(x) \neq 1$, 则输出“错误”, 并终止算法。
- c) 输出“正确”。

D.3 椭圆曲线算法

D.3.1 椭圆曲线点的寻找

给定有限域上的椭圆曲线,利用下面的算法可有效地找出曲线上任意一个非无穷远点。

a) $E(F_p)$ 上点的寻找

输入:素数 p , F_p 上一条椭圆曲线 E 的参数 a, b 。

输出: $E(F_p)$ 上一个非无穷远点。

- 1) 选取随机整数 $x, 0 \leq x < p$;
- 2) 置 $\alpha = (x^3 + ax + b) \bmod p$;
- 3) 若 $\alpha = 0$, 则输出 $(x, 0)$ 并终止算法;
- 4) 求 $\alpha \bmod p$ 的平方根 y (参见 D.1.4.1);
- 5) 若步骤 4) 的输出是“不存在平方根”, 则返回步骤 1);
- 6) 输出 (x, y) 。

b) $E(F_{q^m})$ ($m \geq 2$) 上点的寻找

输入:有限域 F_{q^m} (q 为奇素数), F_{q^m} 上的椭圆曲线 E 的参数 a, b 。

输出: E 上一个非无穷远点。

- 1) 随机选取 F_{q^m} 上元素 x ;
- 2) 在 F_{q^m} 上计算 $\alpha = x^3 + ax + b$;
- 3) 若 $\alpha = 0$, 则输出 $(x, 0)$ 并终止算法;
- 4) 在 F_{q^m} 上求 α 的平方根 y (参见 D.1.4.3);
- 5) 若步骤 4) 的输出是“不存在平方根”, 则返回步骤 1);
- 6) 输出 (x, y) 。

D.3.2 椭圆曲线上 l 阶点的寻找

本算法可用于椭圆曲线 l 阶子群生成元的求取。

输入:椭圆曲线 $E(F_q)$ 的参数 a, b , 曲线阶 $\#E(F_q) = n = l \cdot r$, 其中 l 为素数。

输出: $E(F_q)$ 上一个 l 阶点。

- a) 用 D.3.1 的方法随机选取曲线上点 Q ;
- b) 计算 $P = [r]Q$;
- c) 若 $P = O$, 返回步骤 a);
- d) 输出 P 。

D.3.3 扭曲线上 l 阶点的寻找

设 F_{q^m} 上椭圆曲线 E 的方程: $y^2 = x^3 + ax + b$, 其阶 $\#E(F_{q^m}) = q^m + 1 - t$, 设其扭曲线 E' 的方程: $y^2 = x^3 + \beta^2 \cdot ax + \beta^3 \cdot b$, β 为 F_{q^m} 上非平方元, $E'(F_{q^m})$ 的阶 $\#E'(F_{q^m}) = q^m + 1 + t$ 。

输入:椭圆曲线 $E(F_{q^m})$ 的扭曲线 $E'(F_{q^m})$ 的参数 a, b 和 β , 扭曲线阶 $\#E'(F_{q^m}) = n' = l \cdot r$, 其中 l 为素数。

输出: $E'(F_{q^m})$ 上一个 l 阶点。

- a) 用 D.3.1 的方法随机选取 $E'(F_{q^m})$ 上点 Q 。
- b) 计算 $P = [r]Q$ 。
- c) 若 $P = O$, 返回步骤 a)。
否则, P 是 l 阶点。
- d) 输出 P 。

参 考 文 献

- [1] ISO/IEC 14888-3:2004 Information technology—Security techniques—Digital signatures with appendix—Part 3: Discrete logarithm based mechanisms
- [2] ISO/IEC 15946-1:2002 Information technology—Security techniques—Cryptographic techniques based on elliptic curves—Part 1: General
- [3] ISO/IEC 15946-2:2002 Information technology—Security techniques—Cryptographic techniques based on elliptic curves—Part 2: Digital signatures
- [4] ISO/IEC 15946-3:2002 Information technology—Security techniques—Cryptographic techniques based on elliptic curves—Part 3: Key establishment
- [5] ISO/IEC 15946-4:2003 Information technology—Security techniques—Cryptographic techniques based on elliptic curves—Part 4: Digital signatures giving message recovery
- [6] ITU-T Recommendation X.680 Information technology—Abstract Syntax Notation One (ASN.1): Specification of basic notation
- [7] ITU-T Recommendation X.681 Information technology—Abstract Syntax Notation One (ASN.1): Information object specification
- [8] ITU-T Recommendation X.682 Information technology—Abstract Syntax Notation One (ASN.1): Constraint specification
- [9] ITU-T Recommendation X.683 Information technology—Abstract Syntax Notation One (ASN.1): Parametrization of ASN.1 specifications
- [10] ITU-T Recommendation X.690 Information technology—ASN.1 encoding rules: Specification of Basic Encoding Rules (BER), Canonical Encoding Rules (CER) and Distinguished Encoding Rules (DER)
- [11] ITU-T Recommendation X.691 Information technology—ASN.1 encoding rules: Specification of Packed Encoding Rules (PER)
- [12] IEEE P1363:2000 Standard for Public Key Cryptography
- [13] ANSI X9.62-1999 Public Key Cryptography for the Financial Services Industry: The Elliptic Curve Digital Signature Algorithm (ECDSA)
- [14] ANSI X9.63-2001 Public Key Cryptography for the Financial Services Industry: Key Agreement and Key Transport Using Elliptic Curve Cryptography
- [15] Abdalla M, Lange T, Eds. 2012. Pairing-Based Cryptography-Pairing 2012. Proceedings (2012), vol. 7708 of Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag.
- [16] Atkin A, Morain F. 1993. Elliptic Curves and Primality Proving, Mathematics of Computation 61(203):29-68.
- [17] Barbulescu R, Gaudry P, Joux A, Thome E. 2014. A Heuristic Quasi-polynomial Algorithm for Discrete Logarithm in Finite Fields of Small Characteristic. In P. Q. Nguyen and E. Oswald, editors, Advances in Cryptology: Proceedings of EUROCRYPT'14, volume 8441 of LNCS, Springer-Verlag, 1-16.
- [18] Barreto P, Galbraith S, et al. 2004. Efficient Pairing Computation on Supersingular Abelian Varieties. Cryptology ePrint Archive, Report 2004/375.
- [19] Barreto P, Kim H, Lynn B, et al. 2002. Efficient Algorithms for Pairing-based Cryptosystems, Proceedings of CRYPTO 2002, LNCS 2442. Springer-Verlag, 354-369.

- [20] Barreto P, Lynn B, Scott M. 2002. Constructing Elliptic Curves with Prescribed Embedding Degrees. In: Security in Communication Networks-SCN' 2002, LNCS 2576. Springer-Verlag, 263-273.
- [21] Barreto P, Lynn B, Scott M. 2003. On the Selection of Pairing-friendly Groups. In: Selected Areas in Cryptography-SAC'2003, LNCS 3006. Ottawa, Canada: Springer-Verlag, 17-25.
- [22] Barreto P, Naehrig M. 2005. Pairing-friendly Elliptic Curves of Prime Order. Cryptology ePrint Archive, Report 2005/133.
- [23] Boneh D, Franklin M. 2001. Identity Based Encryption from the Weil-pairing, Proceedings of CRYPTO 2001, LNCS 2139. Springer-Verlag, 213-229.
- [24] Brezing F, Weng A. 2005. Elliptic Curves Suitable for Pairing Based Cryptography, Designs, Codes and Cryptography, 37:133-141.
- [25] Brickell E, Gordon D, McCurley K, et al. 1993. Fast Exponentiation with Precomputation. In: Advances in Cryptology-EUROCRYPT'92, LNCS 658. Berlin: Springer-Verlag, 200-207.
- [26] Cao Zhenfu, Zhang Fanggou, Eds. 2013. Pairing-Based Cryptography-Pairing 2013. Proceedings (2013), vol. 8365 of Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag.
- [27] Cha J C, Cheon J H. 2002. An Identity-based Signature from Gap Diffie-Hellman Groups, Proceedings of PKC 2002, LNCS 2567. Springer-Verlag, 18-30.
- [28] Cheng Qi, Wan Daqing and Zhuang Jincheng. 2014. Traps to the BGJT-Algorithm for Discrete Logarithms. ePrint 2014.
- [29] Cheon, J. H. 2006. Security Analysis of the Strong Diffie-hellman Problem. In EUROCRYPT (2006), S. Vaudenay, Ed., vol. 4004 of Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, 1-11.
- [30] Duan P, Cui S, Wah Chan C. 2005. Special Polynomial Families for Generating More Suitable Elliptic Curves for Pairing-based Cryptosystems. Cryptology ePrint Archive, Report 2005/342.
- [31] Dupont R, Enge A, Morain F. 2005. Building Curves with Arbitrary Small MOV Degree over Finite Prime Fields, Journal of Cryptology, 18(2):79-89.
- [32] Eisentrager K, Lauter K, Montgomery P. 2003. Fast Elliptic Curve Arithmetic and Improved Weil-pairing Evaluation. In: Topics in Cryptology, CT-RSA03, LNCS 2612. Springer-Verlag, 343-354.
- [33] Freeman D. 2006. Constructing Pairing-friendly Elliptic Curves with Embedding Degree 10. In: Algorithmic Number Theory Symposium-ANTS-VII, LNCS 4076. Springer-Verlag, 452-465.
- [34] Freeman D, Scott M, Teske E. 2006. A Taxonomy of Pairing-friendly Elliptic Curves, Cryptology ePrint Archive Report 2006/372.
- [35] Frey G, Müller M, Rück H. 1999. The Tate-pairing and the Discrete Logarithm Applied to Elliptic Curve Cryptosystems, IEEE Transactions on Information Theory, 45(5):1717-1719.
- [36] Galbraith S. 2001. Supersingular Curves in Cryptography, Proceedings of Asiacrypt 2001, LNCS 2248. Springer-Verlag, 495-513.
- [37] Galbraith S, Harrison K, Soldera D. 2002. Implementing the Tate-pairing, Proceedings of ANTSV, LNCS 2369. Springer-Verlag, 324-337.
- [38] Galbraith S, Paterson K, Eds. 2008. Pairing-Based Cryptography-Pairing 2008. Proceedings (2008), vol. 5209 of Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag.
- [39] Googlu F, Granger R, McGuire G, and Zumbrael J. 2013. On the Function Field Sieve and the Impact of Higher Splitting Probabilities: Application to discrete logarithms in F_2^{1971} . Cryptology

ePrint Archive, Report 2013/074.

[40] Hess F, Smart N, Vercauteren F. 2006. The Eta-pairing Revisited. Cryptology ePrint Archive, Report 2006/110.

[41] Joux A. 2013. Faster Index Calculus for the Medium Prime Case Application to 1175-bit and 1425-bit Finite Fields. In Advances in Cryptology EUROCRYPT 2013. Springer-Verlag, 177-193.

[42] Joux A. 2013. A New Index Calculus Algorithm with Complexity $L(1/4 + o(1))$ in Very Small characteristic. In Selected Areas in Cryptography-SAC 2013, volume 8282 of Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, 355-382.

[43] Joye M, Miyaji A, Otsuka A, Eds. 2010. Pairing-Based Cryptography-Pairing 2010. Proceedings (2010), vol. 6487 of Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag.

[44] Knuth D. 1981. The Art of Computer Programming (Vol 2). 2nd ed. Reading (MA): Addison-Wesley.

[45] Kobayashi T, Aoki K, Imai H. 2006. Efficient Algorithms for Tate-pairing. IEICE Trans. Fundamentals, E89-A.

[46] Koblitz N. 1987. Elliptic Curve Cryptosystems. Mathematics of Computation, 48:203-209.

[47] Lauter K, Montgomery P, Naehrig M. 2010. An Analysis of Affine Coordinates for Pairing Computation. Pairing-Based Cryptography-Pairing 2010. Proceedings (2010), vol. 6487 of Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag.

[48] Lay G, Zimmer H. 1994. Constructing Elliptic Curves with Given Group Order over Large Finite Fields, In: Algorithmic Number Theory Symposium-ANTS-1, LNCS 877. Springer-Verlag, 250-263 Menezes A. 1993. Elliptic Curve Public Key Cryptosystems. Boston: Kluwer Academic Publishers.

[49] Lidl R, Niederreiter H. 1983. Finite Fields. Reading (MA): Addison-Wesley Menezes A, Okamoto T, Vanstone S. 1993. Reducing Elliptic Curve Logarithms to Logarithms in a Finite Field. IEEE Transactions on Information Theory, 39:1639-1646.

[50] Miller V. 2004. The Weil-pairing and its Efficient Calculation, Journal of Cryptology, 17: 235-261.

[51] Milne J. 2006. Complex Multiplication, <http://www.jmilne.org/math>.

[52] Miyaji A, Nakabayashi M, Takano S. 2001. New Explicit Conditions of Elliptic Curve Traces for FR-reduction, IEICE Transactions on Fundamentals, E84-A(5):1234-1243.

[53] Müller V. 1995. Counting the Number of Points on Elliptic Curves over Finite Fields of Characteristic Greater than Three: [Doctorate Dissertation]. Saarlandes: University of Saarlandes.

[54] Pollard J. 1978. Monte Carlo Methods for Index Computation mod p . Mathematics of Computation, 32:918-924.

[55] Schoof R. 1985. Elliptic Curves over Finite Fields and the Computation of Square Roots mod p . Mathematics of Computation, 44(170):483-494.

[56] Scott M. 2005. Computing the Tate-pairing. In: CT-RSA, LNCS 3376. Springer-Verlag, 293-304.

[57] Scott M. 2006, Implementing Cryptographic Pairings, ECC 2006.

[58] Scott M, Barreto P. 2004. Compressed Pairings. In: Advances in Cryptology Crypto' 2004, LNCS 3152. Springer-Verlag, 140-156.

[59] Scott M, Barreto P. 2006. Generating More MNT Elliptic Curves, Designs, Codes and Cryptography, 38:209-217.

- [60] Shacham H, Waters B, Eds. 2009. Pairing-Based Cryptography-Pairing 2009. Proceedings (2009), vol. 5671 of Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag.
- [61] Silverman J. 1986. The Arithmetic of Elliptic Curves. Berlin: Springer-Verlag, GTM 106
- [62] Smart N. 1999. The Discrete Logarithm Problem on Elliptic Curves of Trace One. Journal of Cryptology, 12(3):193-196.
- [63] Takagi T, Okamoto T, Okamoto E, and Okamoto T, Eds. 2007. Pairing-Based Cryptography-Pairing 2007. Proceedings (2007), vol. 4575 of Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag.
- [64] Thuen Ø. 2006. Constructing Elliptic Curves over Finite Fields Using Complex Multiplication, Master of Science in Physics and Mathematics.
-