

1.8.1

Name: 罗开诚***Student ID:** 3220103383 **Institution:** 信息与计算科学2201

2024 年 9 月 11 日

I

· $\frac{1}{2^{n-1}}$
· 1

II

define root as t.

error: $\frac{b_0 - a_0}{2^{n-1}}$

the supremum of relative error after iterate n times $error = \frac{b_0 - a_0}{2^{n-1} * r}$

as $a_0, b_0 > 0$

$error \in [0, \frac{b_0 - a_0}{2^{n-1} * a_0}]$

算了，还是用中文吧.

所以可以得到一个上界 $\frac{b_0 - a_0}{2^{n-1} * a_0} < \epsilon$

得 $n \geq \frac{\log(b_0 - a_0) - \log(\epsilon) - \log(a_0)}{\log 2} - 1$

III

* Email: 3220103383@zju.edu.com

表 1: iterations

iterations	1	2	3	4
$f'(x)$	16	11.1719	10.2129	10.1686
x_{n+1}	-0.8125	-0.770804	-0.768832	-0.768828

IV

由泰勒展开, $f(x_n) = f(x_0) + f'(x_0)(x_n - x_0) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}(x_n - x_0)^2$

$\xi_1 \in [\min(x_n, x_0), \max(x_n, x_0)]$

除以 $f'(x_0)$, 得 $x_0 - x_n + \frac{f(x_n) - f(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{f''(\xi_1)}{2!f'(x_0)}(x_n - x_0)^2$

左式又等于 $x_1 - x_{n+1} = e_1 - e_{n+1} = \frac{f''(\xi_1)}{2!f'(x_0)}(e_n - e_0)^2$

考虑到 $f \in C^2$, 且 $f'(x_0) \neq 0$, 故存在邻域, 使得 f' 与 f'' 在邻域内均不为 0。

V

是的喵。有 $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 时, 若 $x_0 = 0$, 则直接恒为 0。

若 $x_0 > 0$, 由数学归纳法 $x_n > 0, x_{n+1} = \tan^{-1}(x_n) > 0$, 故 $x_n > 0$ 恒成立。

$x_0 < 0$ 时同理这里以 $x_0 > 0$ 为例。 $|x_n| = |\tan(x_{n+1})| > |x_{n+1}|$

又 $x_n > 0, x_n$ 单调有界, 其必收敛。设其收敛于 α 对 $x_n = \tan(x_{n+1})$ 求极限,

得 $\alpha = \tan(\alpha), \alpha = 0$ 故收敛于 0。

VI

用数列极限的方式表示 x 。令 $x_0 = \frac{1}{p}, x_{n+1} = \frac{1}{p+x_n}$ 取不动点满足的方程,

$x_n^2 + px_n - 1 = 0$ 求得大于 0 得解为 $\alpha = \frac{-p + \sqrt{p^2 + 4}}{2}$

$|x_{n+1} - \alpha| = \left| \frac{1}{p+x_n} - \alpha \right| = \left| \frac{\alpha^2 + p\alpha}{p+x_n} - \alpha \right| = |x_n - \alpha| * \frac{\alpha}{p+x_n} < |x_n - \alpha| * \frac{\alpha}{p}$ (易

知 $x_n > 0$) $\frac{\alpha}{p} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4/p^2}}{2} < 1$ 故收敛于 α 。

VII

设根为 t 。

误差为 $\frac{b_0-a_0}{2^{n-1}}$

相对误差的一个上界为 $error = \frac{b_0-a_0}{2^{n-1} * r}$

$\frac{b_0-a_0}{2^{n-1} * t} < \epsilon$

得 $n \leq \frac{\log(b_0-a_0) - \log(\epsilon) - \log(t)}{\log 2} - 1$

是否是一个好的衡量标准:

不是一个好的衡量标准, 若跟在0的极小邻域内, 即使绝对误差很小, 相对误差依然很大。

VIII

.

可以考虑从高阶无穷小入手啊。

计算 $f(x+\Delta x)/(\Delta x)^p$, 令 Δx 趋于0的值, 若对 $p=0, 1, 2, 3, \dots, k-1$ 均近似为0, $p=k$ 时不收敛为0, 则为 k 重零点。

.

根为 r 有 $f(x_n) = f(r) + \sum_{t=1}^{k-1} \frac{f^{(t)}(r)}{t!} (x_n - r)^t + \frac{f^{(k)}(\xi_1)}{k!} (x_n - r)^k$

$\xi_1 \in [\min(r, x_n), \max(r, x_n)]$

和 $f'(x_n) = f'(r) + \sum_{t=1}^{k-2} \frac{f^{(t+1)}(r)}{t!} (x_n - r)^t + \frac{f^{(k)}(\xi_2)}{(k-1)!} (x_n - r)^{k-1}$

$\xi_2 \in [\min(r, x_n), \max(r, x_n)]$

因为 $f^{(k)}(r) \neq 0$, 所以可取一个极小邻域 δ , 使得

对 $x \in [r - \delta, r + \delta]$, $f^{(k)}(x) \neq 0$, 且均同号

故 $x_{n+1} = x_n - k \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\frac{f^{(k)}(\xi_1)}{k!} (x_n - r)^k}{\frac{f^{(k)}(\xi_2)}{(k-1)!} (x_n - r)^{k-1}}$

$= x_n - k \frac{x_n - r}{k}$

$|x_{n+1} - r| = |x_n - r| * |1 - \frac{f^{(k)}(\xi_1)}{f^{(k)}(\xi_2)}|$

Conclusion