1.8.1

Name: 罗开诚*[*] **Student ID:** 3220103383 **Institution:** 信息与计算科学2201

2024 年 9 月 11 日

I

· $\frac{1}{2^{n-1}}$
· 1

II

define root as t.
error: $\frac{b_0-a_0}{2^{n-1}}$
the supremum of relative error after iterate n times $error = \frac{b_0-a_0}{2^{n-1}*r}$
as $a_0, b_0 > 0$
$error \in [0, \frac{b_0-a_0}{2^{n-1}*a_0}]$
算了，还是用中文吧.
所以可以得到一个上界$\frac{b_0-a_0}{2^{n-1}*a_0} < \epsilon$
得 $n \geq \frac{log(b_0-a_0)-log(\epsilon)-log(a_0)}{log2} - 1$

III

[*]Email:3220103383@zju.edu.com

表 1: iterations

iterations	1	2	3	4
$f'(x)$	16	11.1719	10.2129	10.1686
x_{n+1}	-0.8125	-0.770804	-0.768832	-0.768828

IV

由泰勒展开， $x_{n+1} - \alpha = x_n - \alpha - \frac{f(x_n) - f(\alpha)}{f'(x_0)}$
$= (x_n - \alpha)(1 - \frac{f^{'}(\xi)}{f^{'}(x_0)})$ $\xi \in [min(x_n, \alpha), max(x_n, \alpha)]$
所以可取s=1,C=$(1 - \frac{f^{'}(\xi)}{f^{'}(x_0)})$ $\xi \in [min(x_n, \alpha), max(x_n, \alpha)]$

V

是的喵。有$x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$时，若$x_0 = 0$,则直接恒为0。
若$x_0 > 0$,由数学归纳法 $x_n > 0, x_{n+1} = tan^{-1}(x_n) > 0$,故$x_n > 0$恒成立。
$x_0 < 0$时同理这里以$x_0 > 0$为例。 $|x_n| = |tan(x_{n+1})| > |x_{n+1}|$
又$x_n > 0, x_n$单调有界，其必收敛。设其收敛于α 对$x_n = tan(x_{n+1})$求极限，得$\alpha = tan(\alpha), \alpha = 0$ 故收敛于0.

VI

用数列极限的方式表示x。令$x_0 = \frac{1}{p}$ $x_{n+1} = \frac{1}{p+x_n}$ 取不动点满足的方程，$x_n^2 + px_n - 1 = 0$ 求得大于0得解为$\alpha = \frac{-p+\sqrt{p^2+4}}{2}$
$|x_{n+1} - \alpha| = |\frac{1}{p+x_n} - \alpha| = |\frac{\alpha^2+p\alpha}{p+x_n} - \alpha| = |x_n - \alpha| * \frac{\alpha}{p+x_n} < |x_n - \alpha| * \frac{\alpha}{p}$(易知$x_n > 0$) $\frac{\alpha}{p} = \frac{-1+\sqrt{1+4/p^2}}{2} < 1$ 故收敛于α。

VII

设根为 t.
误差为 $\frac{b_0-a_0}{2^{n-1}}$
相对误差的一个上界为 $error = \frac{b_0-a_0}{2^{n-1}*r}$
$\frac{b_0-a_0}{2^{n-1}*t} < \epsilon$

得 $n \leq \frac{log(b_0-a_0)-log(\epsilon)-log(t)}{log2}-1$
是否是一个好的衡量标准：
不是一个好的衡量标准，若跟在0的极小邻域内，即使绝对误差很小，相对误差依然很大。

VIII

.
可以考虑从高阶无穷小入手啊。
计算$\frac{f(x_n+\Delta x)}{(\Delta x)^p}$，令$\Delta x$趋于0的值，若对p=0,1，2，3……k-1均近似为0，p=k时不收敛为0，则为k重零点。
.
根为r 有$f(x_n)=f(r)+\sum_{t=1}^{k-1}\frac{f^{(t)}(r)}{t!}(x_n-r)^t+\frac{f^{(k)}(\xi_1)}{k!}(x_n-r)^k$
$\xi_1 \in [min(r,x_n),max(r,x_n)]$
和$f^{'}(x_n)=f^{'}(r)+\sum_{t=1}^{k-2}\frac{f^{(t+1)}(r)}{t!}(x_n-r)^t+\frac{f^{(k)}(\xi_2)}{(k-1)!}(x_n-r)^{k-1}$
$\xi_2 \in [min(r,x_n),max(r,x_n)]$
因为$f^{(k)}(r)\neq 0$,所以可取一个极小邻域δ,使得
对$x\in[r-\delta,r+\delta],f^{(k)}(x)\neq 0$,且均同号
故$x_{n+1}=x_n-k\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{\frac{f^{(k)}(\xi_1)}{k!}(x_n-r)^k}{\frac{f^{(k)}(\xi_2)}{(k-1)!}(x_n-r)^{k-1}}$
$=x_n-k\frac{x_n-r}{k}$
$|x_{n+1}-r|=|x_n-r|*|1-\frac{f^{(k)}(\xi_1)}{f^{(k)}(\xi_2)}|$

Conclusion

暂无