1.8.1

Name: 罗开诚[*]**Student ID:** 3220103383 **Institution:** 信息与计算科学2201

2024 年 9 月 11 日

I

· $\frac{1}{2^{n-1}}$
· 1

II

define root as t.
error: $\frac{b_0-a_0}{2^{n-1}}$
the supremum of relative error after iterate n times $error = \frac{b_0-a_0}{2^{n-1}*r}$
as $a_0, b_0 > 0$
$error \in [0, \frac{b_0-a_0}{2^{n-1}*a_0}]$
算了，还是用中文吧.
所以可以得到一个上界$\frac{b_0-a_0}{2^{n-1}*a_0} < \epsilon$
得 $n \geq \frac{log(b_0-a_0)-log(\epsilon)-log(a_0)}{log2} - 1$

III

[*]Email:3220103383@zju.edu.com

表 1: iterations

iterations	1	2	3	4
$f'(x)$	16	11.1719	10.2129	10.1686
x_{n+1}	-0.8125	-0.770804	-0.768832	-0.768828

IV

由拉格朗日， $x_{n+1}-\alpha = x_n - \alpha - \frac{f(x_n)-f(\alpha)}{f'(x_0)}$
$= (x_n-\alpha)(1-\frac{f^{'}(\xi)}{f^{'}(x_0)})\ \xi \in [min(x_n,\alpha), max(x_n,\alpha)]$
所以可取s=1,C=$(1-\frac{f^{'}(\xi)}{f^{'}(x_0)})\ \xi \in [min(x_n,\alpha), max(x_n,\alpha)]$

V

是的喵。有$x \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$时，若$x_0=0$,则直接恒为0。
若$x_0>0$,由数学归纳法 $x_n>0, x_{n+1}=tan^{-1}(x_n)>0$,故$x_n>0$恒成立。
$x_0<0$时同理这里以$x_0>0$为例。 $|x_n|=|tan(x_{n+1})|>|x_{n+1}|$
又$x_n>0, x_n$单调有界，其必收敛。设其收敛于α 对$x_n=tan(x_{n+1})$求极限，得$\alpha=tan(\alpha), \alpha=0$ 故收敛于0.

VI

用数列极限的方式表示x。令$x_0=\frac{1}{p}$ $x_{n+1}=\frac{1}{p+x_n}$ 取不动点满足的方程，
$x_n^2+px_n-1=0$ 求得大于0得解为$\alpha=\frac{-p+\sqrt{p^2+4}}{2}$
$|x_{n+1}-\alpha|=|\frac{1}{p+x_n}-\alpha|=|\frac{\alpha^2+p\alpha}{p+x_n}-\alpha|=|x_n-\alpha|*\frac{\alpha}{p+x_n}<|x_n-\alpha|*\frac{\alpha}{p}$(易知$x_n>0$) $\frac{\alpha}{p}=\frac{-1+\sqrt{1+4/p^2}}{2}<1$ 故收敛于α。

VII

设根为 t.
误差为 $\frac{b_0-a_0}{2^{n-1}}$
相对误差的一个上界为 $error=\frac{b_0-a_0}{2^{n-1}*r}$
$\frac{b_0-a_0}{2^{n-1}*t}<\epsilon$

得 $n \leq \frac{log(b_0-a_0)-log(\epsilon)-log(t)}{log2}-1$

是否是一个好的衡量标准：

不是一个好的衡量标准，若跟在0的极小邻域内，即使绝对误差很小，相对误差依然很大。

VIII

.

可以考虑从高阶无穷小入手啊。

计算$\frac{f(x_n+\Delta x)}{(\Delta x)^p}$，令$\Delta x$趋于0的值，若对p=0,1，2，3……k-1均近似为0，p=k时不收敛为0，则为k重零点。

.

根为r 有$f(x_n)=f(r)+\sum_{t=1}^{k-1}\frac{f^{(t)}(r)}{t!}(x_n-r)^t+\frac{f^{(k)}(\xi_1)}{k!}(x_n-r)^k$

$\xi_1 \in [min(r,x_n),max(r,x_n)]$

和$f^{'}(x_n)=f^{'}(r)+\sum_{t=1}^{k-2}\frac{f^{(t+1)}(r)}{t!}(x_n-r)^t+\frac{f^{(k)}(\xi_2)}{(k-1)!}(x_n-r)^{k-1}$

$\xi_2 \in [min(r,x_n),max(r,x_n)]$

因为$f^{(k)}(r)\neq 0$,所以可取一个极小邻域δ,使得

对$x \in [r-\delta,r+\delta], f^{(k)}(x)\neq 0$,且均同号 (1)

故$x_{n+1}=x_n-k\frac{f(x_n)}{f^{'}(x_n)}=x_n-k\frac{\frac{f^{(k)}(\xi_1)}{k!}(x_n-r)^k}{\frac{f^{(k)}(\xi_2)}{(k-1)!}(x_n-r)^{k-1}}$

$=x_n-k\frac{x_n-r}{k}\frac{f^{(k)}(\xi_1)}{f^{(k)}(\xi_2)}=x_n-\frac{f^k(\xi_1)-f^k(\xi_2)+f^k(\xi_2)}{f^k(\xi_2)}(x_n-r)$

$=r-\frac{f^k(\xi_1)-f^k(\xi_2)}{f^k(\xi_2)}(x_n-r)$

$|x_{n+1}-r|=|\frac{f^k(\xi_1)-f^k(\xi_2)}{f^k(\xi_2)}|*|x_n-r|=|\frac{f^{k+1}(\xi_3)}{f^k(\xi_2)}|*|x_n-r|*|\xi_1-\xi_2|$

(由拉格朗日中值定理，$\xi_3 \in [min(\xi_1,\xi_2),max(\xi_1,\xi_2)]$)

$\leq |\frac{f^{k+1}(\xi_3)}{f^k(\xi_2)}|*|x_n-r|^2$(因为$\xi_1,\xi_2\ in[min(r,x_n),max(r,x_n)]$)

令M=$\frac{max_{x\in[r-\delta,r+\delta]f^{k+1}(x)}}{min_{x\in[r-\delta,r+\delta]f^k(x)}}$，存在性可由(1)得

再取$\delta_2<\delta$使得$\delta_2*M<1$，令初值在区间$[r-\delta_2,r+\delta_2]$ 此时满足$|x_{n+1}-r|\leq M*|x_n-r|^2$ 且$|x_n-r|\leq M^{2^n-1}|x_0-r|^{2^n}$

Conclusion

暂无