

# Einführung in die Algebra

Wintersemester 2017/18

Luise Puhlmann

30. Oktober 2017

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Gruppen</b>	<b>2</b>
1.1	Grundlegendes . . . . .	2
1.2	Satz von Lagrange und Normalteiler . . . . .	7
1.3	Zyklische Gruppen . . . . .	11
1.4	Auflösbare Gruppen . . . . .	13
1.5	title . . . . .	15
1.6	$p$ -Gruppen und Sylow-Sätze . . . . .	15

<http://www.math.uni-bonn.de/people/palmer/A1.html>

## Organisatorisches

- Assistent: Martin Palmer
- Abgabe der Übungsblätter Donnerstag vor der Vorlesung
- Übungsgruppen Beginn nächste Woche
- Literatur siehe Homepage

# 1 Gruppen

## 1.1 Grundlegendes

**Definition 1.** Eine Gruppe ist eine Menge  $G$  zusammen mit einer Abbildung

$$\begin{aligned}\circ: G \times G &\rightarrow G \\ (g, h) &\mapsto g \circ h\end{aligned}$$

(genannt Gruppenoperation), sodass gilt:

(G1)  $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \quad \forall a, b, c \in G$  (Assoziativität)

(G2)  $\exists e \in G$  mit  $g \circ e = g = e \circ g \quad \forall g \in G$  (Neutrales Element)

(G3)  $\forall g \in G \exists g^{-1}$  sodass  $g \circ g^{-1} = e = g^{-1} \circ g$  (Inverse Elemente)

*Bemerkung.*

- Neutrales Element  $e$  ist eindeutig
- Inverse Elemente  $g^{-1}$  sind eindeutig
- Es reicht sogar zu fordern: Existenz von Linksneutralem und Linksinversem oder Existenz von Rechtsneutralem und Rechtsinversem.
- Es gelten die Kürzungsregeln:

$$\begin{aligned}a \circ c = b \circ c &\Leftrightarrow a = b & \forall a, b, c \in G \\ c \circ a = c \circ b &\Leftrightarrow a = b & \forall a, b, c \in G\end{aligned}$$

**Definition 2.**  $(G, \circ)$  heißt abelsch, falls  $g \circ h = h \circ g$  für alle  $g, h \in G$ .

**Beispiel.**

- $(\mathbb{Z}, +)$
- $(K, +, \cdot)$  Körper  $\Rightarrow (K, +)$  und  $(K^* = K \setminus \{0\}, \cdot)$  sind Gruppen
- $(V, +, \cdot)$   $K$ -Vektorraum, dann ist  $(V, +)$  eine Gruppe
- $K$  Körper,  $n \in \mathbb{N}$ ;  $G = \text{GL}_n(K)$  ist Gruppe mit Matrixmultiplikation
- $M$  nichtleere Menge;  $S_M := \{f: M \rightarrow M | f \text{ invertierbar}\}$  mit  $\circ =$  Komposition von Abbildungen ist eine Gruppe; Spezialfall:  $M = \{1, \dots, n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  ergibt die symmetrische Gruppe  $S_n$  der Ordnung  $n!$ .
- Sei  $(G, \circ)$  eine Gruppe und  $a \in G$  fest gewählt. Dann ist  $(G, \circ_a)$  eine Gruppe, wobei  $g \circ_a h = g \circ a \circ h$ .

**Definition 3.**  $(G, \circ)$  Gruppe. Dann ist die Anzahl  $|G|$  der Elemente von  $G$  die Ordnung von  $G$ .

**Definition 4.** Sei  $(G, \circ)$  Gruppe. Eine Teilmenge  $H \subseteq G$  heißt Untergruppe (kurz UG), falls  $H \neq \emptyset$  und  $h_1, h_2 \in H \Rightarrow h_1 \circ h_2^{-1} \in H$ . Wir schreiben dann:  $H < (G, \circ)$  oder  $H < G$ .

*Bemerkung.*  $H < (G, \circ)$  gilt genau dann, wenn gilt:

$$(UG0) \quad e \in H$$

$$(UG1) \quad h_1, h_2 \in H \Rightarrow h_1 \circ h_2 \in H$$

$$(UG2) \quad h \in H \Rightarrow h^{-1} \in H$$

Klar: Untergruppen sind Gruppen

**Beispiel** (selber nachprüfen!!!).

- $2\mathbb{Z} < (\mathbb{Z}, +)$
- $n \in \mathbb{N}$ ;  $O(n) = \{A \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) | AA^T = \mathbb{1}_n\} < \text{GL}_n(\mathbb{R})$  die orthogonale Gruppe
- $n \in \mathbb{N}$ ;  $U(n) = \{A \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) | A\bar{A}^T = \mathbb{1}_n\} < \text{GL}_n(\mathbb{C})$  die unitäre Gruppe
- $SL_n(K) = \{A \in \text{GL}_n(K) | \det(A) = 1\} < \text{GL}_n(K)$
- $SO(n) = O(n) \cap SL_n(\mathbb{R}) < O(n)$
- Spezielle Unitäre Gruppe
- $H(3, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ : Obere Dreiecksmatrizen, nur 1en auf der Diagonalen  
(Heisenberggruppe)

**Definition 5.** Sei  $(G, \circ)$  eine Gruppe. Sei  $\emptyset \neq N \subseteq G$ . Dann ist  $\langle N \rangle$  die kleinste (bzgl. Inklusion) Untergruppe von  $G$ , die  $N$  enthält (also:  $H < G$  mit  $N \subseteq H \Rightarrow \langle N \rangle \subseteq H$ ). Wir nennen  $\langle N \rangle$  die von  $N$  erzeugte Untergruppe von  $(G, \circ)$ .

*Bemerkung.*  $\langle N \rangle$  ist wohldefiniert, denn seien  $H_1, H_2 < G$  mit  $N \subseteq H_1, N \subseteq H_2$ , dann  $N \subseteq H_1 \cap H_2$  und  $H_1 \cap H_2 < G$ . Also existiert kleinste Untergruppe, die  $N$  enthält;  $\langle N \rangle$  ist wohldefiniert.

**Definition 6.**  $G$  Gruppe,  $N \subseteq G$

1.  $N$  erzeugt die Gruppe  $G$ , falls  $\langle N \rangle = G$ . In diesem Fall heißt  $N$  Erzeugendensystem der Gruppe  $G$
2.  $(G, \circ)$  heißt endlich erzeugt als Gruppe, falls  $\exists N \subseteq G$  mit  $|N|$  endlich und  $G = \langle N \rangle$ .

*Bemerkung.*  $(G, \circ)$  Gruppe, sei  $N \subseteq G$ . Dann gilt:  $N$  erzeugt  $G$  (also  $G = \langle N \rangle$ ) genau dann, wenn  $\forall g \in G : \exists n_1, \dots, n_r \in N$  (mit  $r \in \mathbb{N}_0$ ), sodass  $g = n_1 \circ \dots \circ n_r$  (mit  $g = e$ , falls  $r = 0$ ) und  $n_i \in N$  oder  $n_i^{-1} \in N$  für alle  $1 \leq i \leq r$  (\*).

*Beweis.* „ $\Leftarrow$ “: Sei  $g \in G$  und  $g = n_1 \circ \dots \circ n_r$  wie in (\*). Daraus folgt  $g \in \langle N \rangle$ , da  $n_1, \dots, n_r \in \langle N \rangle$  und dann auch  $g$ , weil  $\langle N \rangle$  Gruppe. Dadurch ist  $G \subseteq \langle N \rangle$ , also  $G = \langle N \rangle$ . „ $\Rightarrow$ “: Sei  $G = \langle N \rangle$ . Behauptung:  $H := \{g \in G \mid g \text{ von der Form } (*)\} < G$ . (dkddiermsü)

Da  $\langle N \rangle \subseteq H$  nach Definition von  $\langle N \rangle$  gilt und  $\langle N \rangle$  eine Gruppe ist, muss also  $\langle N \rangle = H$  wegen Minimalität gelten, da  $N \subseteq H$  gilt. Nach Voraussetzung folgt  $G = H$ . Also hat jedes  $g \in G$  die Form (\*).  $\square$

**Beispiel.**

- $\{\text{Transpositionen}\} \subseteq S_n$ , d.h.  $(i, j)$  mit  $1 \leq i < j \leq n$  erzeugen die Gruppe  $S_n$
- $\{\text{Einfache Transpositionen}\} \subseteq S_n$ , d.h.  $(i, j)$  mit  $1 \leq i < j = i + 1 \leq n$  erzeugt  $S_n$

**Definition 7.** Eine Gruppe  $G$  heißt zyklisch, falls  $\exists g \in G$ , sodass  $\langle \{g\} \rangle = G$  (d.h. falls  $G$  von einem Element erzeugt wird).

Beachte:  $\langle \{g\} \rangle = \{e, g, g^{-1}, g^2, g^{-2}, \dots\} = \{g^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$

**Beispiel.**  $(\mathbb{Z}, +)$  ist zyklisch mit  $\mathbb{Z} = \langle \{1\} \rangle = \langle \{-1\} \rangle$

**Definition 8.**  $(G, \circ)$  und  $(G', \circ')$  seien Gruppen. Ein Gruppenhomomorphismus (kurz: Gruppenhomo) von  $G$  nach  $G'$  ist eine Abbildung  $f: G \rightarrow G'$  mit  $f(g \circ h) = f(g) \circ' f(h) \quad \forall g, h \in G$ .

Er ist ein Gruppenisomorphismus (kurz: Gruppeniso), falls zusätzlich  $f$  invertierbar ist. Wir schreiben  $(G, \circ) \simeq (G', \circ')$ , falls ein Gruppenisomorphismus von  $G$  nach  $G'$  existiert und nennen die Gruppen isomorph.

**Eigenschaften von Gruppenhomomorphismen**  $f: G \rightarrow G'$  von  $G$  nach  $G'$  sei ein Gruppenhomomorphismus. Dann gilt:

- (E1)  $f$  Gruppeniso  $\Leftrightarrow f^{-1}$  Gruppeniso: Nach Definition existiert  $f^{-1}$ . Zu zeigen:  $f^{-1}(g' \circ' h') = f^{-1}(g') \circ f^{-1}(h')$  für alle  $g', h' \in G'$ . Sei  $g', h' \in G'$ . Daraus folgt  $\exists g, h \in G : f(g) = g', f(h) = h'$ . Also:

$$f^{-1}(g' \circ' h') = f^{-1}(f(g) \circ' f(h)) = f^{-1}(f(g \circ h)) = g \circ h = f^{-1}(g') \circ f^{-1}(h')$$

- (E2)  $f$  bildet Neutrales auf Neutrales ab

[9. Oktober 2017]

[12. Oktober 2017]

- (E3)  $f$  bildet Inverse auf Inverse ab

- (E4) Sei  $(G'', \circ'')$  eine weitere Gruppe;  $f': G' \rightarrow G''$  Gruppenhomo von  $(G', \circ')$  nach  $(G'', \circ'')$ , dann ist  $f' \circ f$  Gruppenhomo. Denn:

$$(f' \circ f)(g \circ h) = f'(f(g \circ h)) = f'(f(g) \circ' f(h)) = (f' \circ f)(g) \circ'' (f' \circ f)(h)$$

**Beispiel** (Gruppenhomos).

1.  $(G, \circ)$  mit  $\text{id}: G \rightarrow G, g \mapsto g$  Gruppenhomo von  $(G, \circ)$  nach  $(G, \circ)$   
**Achtung**  $\text{id}: G \rightarrow G, g \mapsto g$  ist kein Gruppenhomo von  $(G, \circ)$  nach  $(G, \circ_a)$ , falls  $a \neq e$
2.  $\det: GL_n(K) \rightarrow K^*$  für einen Körper  $K$  ist ein Gruppenhomo
3.  $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto |x|$  Gruppenhomo von  $(\mathbb{R}^*, \cdot)$  nach  $(\mathbb{R}_{\geq 0}, \cdot)$
4.  $x \mapsto \exp(x)$  Gruppenhomo von  $(\mathbb{Z}, +)$  nach  $(\mathbb{R}^*, \cdot)$
5. Betrachte  $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Z} \right\} < GL_n(\mathbb{R}, \cdot)$  und  $f: \mathbb{Z} \rightarrow G, a \mapsto \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$   
Gruppenhomo von  $(\mathbb{Z}, +)$  nach  $(G, \text{Matrixmultiplikation})$ . Sogar Gruppeniso mit  
Inversen:  $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto a$
6. **Trivialer Gruppenhomo:** Schicke alles auf das neutrale Element
7. Gegeben  $(G, \circ)$  Gruppe,  $a \in G$ . Dann ist  $f: G \rightarrow G, g \mapsto g \circ a^{-1}$  ein Gruppenhomo von  $(G, \circ)$  nach  $(G, \circ_a)$

**Lemma 1.** Sei  $n \in \mathbb{Z}$ .

1. Dann  $\exists!$  Gruppenhomo  $\text{can}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  von  $(\mathbb{Z}, +)$  nach  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$  mit  $\text{can}(1) = \bar{1}$

2. Falls  $n \neq 0$ , existiert kein nichttrivialer Gruppenhomo  $f: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$

*Beweis.*

1. **Eindeutigkeit:** Sei  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  Gruppenhomo. Dann  $f(0) = \bar{0}$  nach (E2) und falls  $f(1) = \bar{1}$ , dann gilt  $f(n) = f(1 + \dots + 1) = n \cdot f(1)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und damit auch  $f(-n) = -nf(1)$  nach (E5)  $\Rightarrow f$  eindeutig.

**Gruppenhomo:** Es gilt dann  $\text{can}(x) = \bar{x}$  für alle  $x \in \mathbb{Z}$  und da  $\text{can}(x+y) = \overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y} = \text{can}(x) + \text{can}(y)$  ist das auch ein Gruppenhomomorphismus

2. Sei  $n \neq 0$ . Sei  $f: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  Gruppenhomo. Sei  $f(\bar{1}) = x$ . Dann: (ObdA  $n \in \mathbb{N}$ )  $0 = f(0) = f(\bar{n}) = f(\bar{1} + \dots + \bar{1}) = nf(\bar{1}) = nx \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f$  trivialer Gruppenhomomorphismus

□

**Lemma 2.** Sei  $(G, \circ)$  eine Gruppe.

1. Sei  $\text{Aut}(G) = \{f: G \rightarrow G \mid f \text{ Gruppeniso von } (G, \circ) \text{ nach } (G, \circ)\}$ . Dann ist  $\text{Aut}(G)$  Gruppe, die Automorphismengruppen von  $G$
2. Betrachte die Abbildung  $\text{Konj}: G \rightarrow \text{Aut}(G)$ ,  $g \mapsto \text{Konj}(g)$ , wobei  $\text{Konj}(g)(h) = g \circ h \circ g^{-1}$  für alle  $h \in G$ . Dann ist  $\text{Konj}$  ein Gruppenhomo von  $G$  nach  $\text{Aut}(G)$ . (Im Allgemeinen nicht injektiv.)

*Beweis.* einfach nachrechnen

□

*Bemerkung.*

1. Falls  $(G, \circ)$  abelsch, dann ist jede Konjugation die Identität
2.  $\text{Konj}(g) = \text{id}_G \Leftrightarrow g \in Z(G) := \{x \in G \mid x \circ y = y \circ x \ \forall y \in G\}$

**Konvention:** Von jetzt an schreiben wir meist  $gh$  statt  $g \circ h$  und  $G$  statt  $(G, \circ)$ .

**Satz 3.** Sei  $f: G \rightarrow G'$  Gruppenhomo. Dann gilt:

$$\begin{array}{lll} \ker(f) & := \{g \in G \mid f(g) = e\} & < G \quad \text{Kern von } f \\ \text{Im}(f) & := \{g' \in G' \mid \exists g \in G \ f(g) = g'\} & < G' \quad \text{Bild von } f \end{array}$$

*Beweis.* einfach nachrechnen

□

**Beispiel.**

1.  $\text{Ker}(\text{can}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = n\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$
2.  $\text{Ker}(\text{Konj}: G \rightarrow \text{Aut}(G)) = Z(G) < G$
3.  $\text{Ker}(\det: GL_n(K) \rightarrow K^*) = SL_n(K)$

**Übung:**  $f$  Gruppenhomo;  $f$  ist injektiv genau dann, wenn  $\text{Ker}(f) = \{e\}$

**Satz 4** (Satz von Cayley). Sei  $G$  eine Gruppe. Dann ist

$$\begin{aligned}\Phi: G &\rightarrow S_G \\ g &\mapsto \Phi(g)\end{aligned}$$

mit  $\Phi(g)(h) = gh$  für alle  $h \in G$  ein injektiver Gruppenhomomorphismus. (Damit kann man  $G$  als Untergruppe einer Permutationsgruppe „realisieren“.)

*Beweis.*

Wohldefiniert:  $\Phi(g)$  ist invertierbar mit Inversem  $h \mapsto g^{-1}h$ .

Zu zeigen:  $\Phi(g_1g_2) = \Phi(g_1) \circ \Phi(g_2)$ , also  $\Phi(g_1g_2)(h) = \Phi(g_1)(\Phi(g_2)(h))$  für alle  $h \in G$ .  
Es gilt aber  $\Phi(g_1g_2)(h) = g_1g_2h$  und  $\Phi(g_1)(\Phi(g_2)(h)) = \Phi(g_1)(g_2h) = g_1g_2h$  ✓

Injektiv: es reicht zu zeigen, dass der Kern trivial ist. Sei  $g \in \text{Ker}\Phi \Leftrightarrow \Phi(g) = e = \text{id}_G \Leftrightarrow \Phi(g)(h) = h \ \forall h \in G \Leftrightarrow gh = h \ \forall h \in G \Leftrightarrow g = e$  ✓ □

## 1.2 Satz von Lagrange und Normalteiler

**Definition 1.**  $G$  Gruppe,  $H < G$ ,  $a \in G$ . Dann ist:

$$aH = \{ah | h \in H\} \subseteq G \text{ Linksnebenklasse von } H \text{ zu } a$$

$$Ha = \{ha | h \in H\} \subseteq G \text{ Rechtsnebenklasse von } H \text{ zu } a$$

Meist arbeiten wir mit Linksnebenklassen und nennen sie einfach Nebenklassen.

Aus der Linearen Algebra wissen wir folgendes:

1. Zwei Nebenklassen sind gleich oder disjunkt d.h.  $aH \cap bH \neq \emptyset \Leftrightarrow aH = bH \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$
2. Die Abbildung  $aH \rightarrow H$ ,  $ah \mapsto h$  ist bijektiv  $\Rightarrow$  alle Nebenklassen haben dieselbe Kardinalität
- 3.

$$G = \bigcup_{g \in G} gH = \bigcup_{b \in R} bH$$

, wobei  $R \subseteq G$ , sodass die  $bH$  mit  $b \in R$  genau ein Repräsentantensystem für die verschiedenen Nebenklassen bilden.

4.  $g \in aH \Leftrightarrow g^{-1} \in Ha^{-1}$  (dadurch ergibt sich eine Bijektion zwischen Links- und Rechtsnebenklassen)

**Definition 2.** Bezeichne mit  $G/H$  die Menge der Nebenklassen von  $G$  bezüglich  $H$  und mit  $H \backslash G$  die Menge der Rechtsnebenklassen. Dann gilt  $|G/H| = |H \backslash G|$  (nach (4)). Wir nennen diese Zahl den Index, auch  $(G : H)$ , von  $H$  in  $G$

**Satz 1** (Satz von Lagrange).  $G$  Gruppe,  $H < G$ ,  $|G| < \infty$ . Dann gilt

$$|G| = |H| \cdot (G : H).$$

Insbesondere:  $|G| = p$  Primzahl  $\Rightarrow H = \{e\}$  oder  $H = G$ .

*Beweis.* Formel folgt direkt aus (3), (2) und Definition von Index. Falls nun  $|G| = p \Rightarrow |H| = 1$  oder  $|H| = p \Rightarrow H = \{e\}$  oder  $H = G$ .  $\square$

Noch mehr Wissen aus der Linearen Algebra: Falls  $G$  abelsch ist, dann ist  $G/H$  wieder eine Gruppe mit Gruppenoperation

$$\begin{aligned} \circ: G/H \times G/H &\rightarrow G/H \\ (aH, bH) &\mapsto abH \end{aligned}$$

Im Allgemeinen (falls  $G$  nicht abelsch ist) ist  $\circ$  nicht wohldefiniert (siehe Übungsblatt 2).

**Definition 3.**  $G$  Gruppe,  $H < G$  heißt Normalteiler falls gilt:  $\forall g \in G, h \in H : g \circ h \circ g^{-1} \in H$ . Wir schreiben dann:  $H \triangleleft G$ .

*Bemerkung.* Falls  $G$  abelsch, dann ist jede Untergruppe Normalteiler.

**Lemma 2.** Sei  $f: G \rightarrow G'$  Gruppenhomomorphismus. Dann:  $\text{Ker}(f) \triangleleft G$ .

*Beweis.* Sei  $g \in G$  und  $h \in \text{Ker} f$ .  $\Rightarrow f(ghg^{-1}) = f(g)f(h)f(g)^{-1} = f(g)f(g)^{-1} = e \Rightarrow ghg^{-1} \in \text{Ker} f \Rightarrow \text{Ker} f \triangleleft G$ .  $\square$

---

[9. Oktober 2017]

[16. Oktober 2017]

**Satz 3.** Sei  $G$  Gruppe,  $N \triangleleft G$ . Dann gilt:

1.  $G/N$  bilden Gruppe mit  $\circ: G/N \times G/N \rightarrow G/N$ ,  $(aN, bN) \mapsto abN$ .
2. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \text{can}: G &\rightarrow G/N \\ g &\mapsto gN \end{aligned}$$

ist ein surjektiver Gruppenhomo.

*Beweis.*

1. Es gilt  $(aN \circ bN) \circ cN = abN \circ cN = abcN = aN \circ (bN \circ cN) \Rightarrow$  (G1) Offensichtlich  $eN = N$  ist neutrales Element. (G2).  $a^{-1}N$  ist offensichtlich Inverses zu  $aN$  (G3). noch zu zeigen: Das ist wohldefiniert. Sei also  $a_1N = a_2N$  und  $b_1N = b_2N$ . Daraus sollte  $a_1b_1N = a_2b_2N$  folgen.

Tatsächlich gilt  $a_1^{-1}a_2 \in N$  und  $b_1^{-1}b_2 \in N$ . Dann  $(a_1b_1)^{-1}(a_2b_2) = b_1^{-1}a_1^{-1}a_2b_2$ , wobei  $a_1^{-1}a_2 \in N$  und  $b_1^{-1}a_1^{-1}a_2b_2 = b_1^{-1}b_2(b_2a_1^{-1}a_2b_2) \in N \Rightarrow (a_1b_1)^{-1}a_2b_2 \in N \Rightarrow a_1b_1N = a_2b_2N$ .



2. surjektiv klar nach (3); um zu zeigen, dass das ein Gruppenhomomorphismus ist, muss man das einfach nachrechnen

□

*Bemerkung.* Somit gilt: Normalteiler sind genau die Kerne von Gruppenhomomorphismen.

**Satz 4** (Homomorphiesatz). Sei  $f: G \rightarrow H$  Gruppenhomo. Sei  $N \triangleleft G$ . Dann:  $N \subseteq \text{Ker}(f) \Leftrightarrow \exists! \text{ Gruppenhomo } \bar{f}: G/N \rightarrow H$ , sodass  $\bar{f} \circ \text{can} = f$ . Also

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ & \searrow \text{can} & \uparrow \exists! \bar{f} \text{ Gruppenhomo} \\ & & G/N \end{array}$$

*Beweis.* „ $\Leftarrow$ “:  $\text{Ker}(\text{can}) = \{g \in G | gN = N\} = \{g \in G | g \in N\} = N \Rightarrow f(N) = \bar{f}(\text{can}(N)) = \bar{f}(e) = e \Rightarrow N \subseteq \text{Ker}(f)$ .

„ $\Rightarrow$ “: **Eindeutigkeit:** Es muss für  $\bar{f}$  gelten:  $\bar{f}(aN) = \bar{f}(\text{can}(a)) = f(a) \quad \forall aN \in G/N \Rightarrow \bar{f}$  eindeutig bestimmt durch  $f$ .

**Existenz:** Setzen  $\bar{f}(aN) := f(a) \quad \forall aN \in G/N$ . Das ist wohldefiniert (klar). Zu zeigen: Das ist ein Gruppenhomo. (nachrechnen) □

**Korollar 5.**  $f: G \rightarrow H$  Gruppenhomo. Dann gilt  $G/\text{ker } f \cong \text{Im } f$ .

*Beweis.*  $\text{Ker } f \triangleleft G$  nach Lemma 2.2.  $\Rightarrow G/\text{Ker } f$  ist eine Gruppe nach Satz 2.3.  $\text{im } f$  ist eine Gruppe nach 1.3. Setze  $N := \text{Ker } f$ . Klar:  $N \subseteq \text{Ker } f$ . Also existiert nach Satz 2.4 ein  $\bar{f}$ , sodass

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ & \searrow \text{can} & \uparrow \exists! \bar{f} \text{ Gruppenhomo} \\ & & G/\text{Ker } f \end{array}.$$

Also haben wir  $\bar{f}: G/\text{Ker } f \rightarrow \text{im } f$  ein Gruppenhomomorphismus. Er ist surjektiv, weil  $\text{can}$  surjektiv ist.

Behauptung:  $\bar{f}$  ist injektiv.

Es gilt  $\bar{f}(aN) = f(a) = e \Leftrightarrow a \in \text{Ker } f = N$ . Also  $\text{Ker } \bar{f} = \{N\} = \{\text{neutrales Element in } G/\text{Ker } f\}$ . Also ist  $\bar{f}$  injektiv.  $\Rightarrow \bar{f}$  ist Gruppenisomorphismus. □

**Satz 6** (1. Isomorphiesatz). Sei  $G$  eine Gruppe,  $H < G$ ,  $N \triangleleft G$ .

1.  $HN := \{hn | h \in H, n \in N\} < G$
2.  $N \triangleleft HN$ ,  $(H \cap N) \triangleleft H$
3. Es gilt  $H/(H \cap N) \cong HN/N$  mit dem Gruppenisomorphismus  $h(H \cap N) \mapsto hN$ .

*Beweis.*

1.  $HN \neq \emptyset$ , da  $e = ee \in HN$ . Seien  $h_1n_1, h_2n_2 \in HN$  ( $h_i \in H, n_i \in N$ ). Dann ist  $h_1n_1(h_2n_2)^{-1} = h_1n_1n_2^{-1}h_2^{-1} = h_1h_2^{-1}h_2n_1n_2^{-1}h_2^{-1}$ , wobei  $n_1n_2^{-1} \in N, h_2n_1n_2^{-1}h_2^{-1} \in N$ , da  $N \triangleleft G$  und  $h_1h_2^{-1} \in H$ , also ist der gesamte Ausdruck Element von  $HN$ .
2. Zunächst zeigen wir, dass  $N \triangleleft HN$ :  $N \subseteq HN$  (Klar, denn  $n = en$ ).  $\Rightarrow N < HN$ , weil  $N < G$ ; genauso  $N \triangleleft HN$ , weil  $N \triangleleft G$ .  
Noch zu zeigen:  $(H \cap N) \triangleleft H$ . Klar:  $(H \cap N) \subseteq H, (H \cap N) < H$ , weil  $(H \cap N) < G$ . Sei  $x \in H \cap N, h \in H$ . Dann  $h x h^{-1} \in H$ , weil  $H < G$ ; und  $\in N$ , weil  $N \triangleleft G$ . Also  $h x h^{-1} \in (H \cap N) \Rightarrow H \cap N \triangleleft H$ .
3. Betrachte

$$\begin{aligned} f: H &\rightarrow HN \xrightarrow{\text{can}} HN/N \\ h &\mapsto he \end{aligned}$$

Nachprüfen:  $f$  ist ein Gruppenhomo. Für  $x \in H$  gilt  $x \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow xeN = N \Leftrightarrow x = xe \in \text{Ker}(\text{can}) = N \Leftrightarrow x \in (H \cap N)$ . Also existiert nach dem Homomorphiesatz ein Gruppenhomo  $\bar{f}$ :

$$\bar{f}: H/(H \cap N) \rightarrow (HN)/N$$

ist nach Konstruktion injektiv.

Surjektiv: Sei  $hnN \in (HN)/N$  mit  $h \in H, n \in N$ . Dann gilt aber:  $hnN = hN$  und dann  $f(h) = hN$  und damit  $\bar{f} \circ \text{can}(h) = \bar{f}(\text{can}(h)) = hN \Rightarrow hN \in \text{im } \bar{f} \Rightarrow \bar{f}$  surjektiv.  $\Rightarrow \bar{f}$  Gruppenisomorphismus.

□

Anmerkung zu Beweis des Homomorphiesatzes: Wo wird in „ $\Rightarrow$ “ verwendet, dass  $N \subseteq \text{Ker } f$ ? Es wird benötigt für die Wohldefiniertheit von  $\bar{f}$ .

**Satz 7** (2. Isomorphiesatz). Sei  $G$  eine Gruppe;  $N_1 \triangleleft G, N_2 \triangleleft G, N_1 \subseteq N_2$ . Dann gilt  $N_1 \triangleleft N_2$  und  $N_2/N_1 \triangleleft G/N_1$  und es gilt:

$$(G/N_1)/(N_2/N_1) \cong G/N_2$$

durch den Isomorphismus  $(gN_1)N_2/N_1 \mapsto gN_2$ .

*Beweis.*  $G/N_1$  ist Gruppe, weil  $N_1 \triangleleft G$ .  $N_2/N_1 \subseteq G/N_1$  (Klar!);  $G/N_2$  Gruppe, weil  $N_2 \triangleleft G$ .  $N_1 \subseteq N_2$  und damit  $N_1 \triangleleft N_2$ , weil  $N_1 \triangleleft G$ . Sei

$$\begin{aligned} f: G/N_1 &\rightarrow G/N_2 \\ gN_1 &\mapsto gN_2 \end{aligned}$$

Das ist wohldefiniert: Seien  $g, h \in G, gN_1 = hN_1 \Rightarrow g^{-1}h \in N_1 \subseteq N_2 \Rightarrow gN_2 = hN_2 \Rightarrow$  wohldefiniert.

Klar:  $f$  ist surjektiv und  $gN_1 \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow gN_2 = N_2 \Leftrightarrow g \in N_2$ . Also  $\text{Ker}(f) = \{gN_1 \mid g \in N_2\} = N_2/N_1$ . Also insbesondere  $N_2/N_1 \triangleleft G/N_1$ . Nach dem Korollar des Homomorphiesatzes erhalten wir einen Gruppenhomo

$$\bar{f}: (G/N_1)/\text{Ker}f(= N_2/N_1) \rightarrow \text{im}f = G/N_2 \text{ (da } f \text{ surjektiv)}$$

Nach Konstruktion ist  $\bar{f}$  injektiv, also erhalten wir den gewünschten Gruppenisomorphismus mit  $\bar{f}(gN_1 \cdot (N_2/N_1)) = f(gN_1) = gN_2$ .  $\square$

## Anwendungen

1. **Anzahlformel:**  $G$  endliche Gruppe,  $H < G$ ,  $N \triangleleft G$ . Dann  $|HN| = \frac{|H||N|}{|H \cap N|}$ . Denn nach Lagrange ist  $|H| = |H \cap N|(H : H \cap N)$  und  $|HN| = |N|(HN : N)$ . Nach dem 1. Isomorphiesatz ist  $(H : H \cap N) = (HN : N)$ . Also  $|HN| = \frac{|N||H|}{|H \cap N|}$  ✓
2.  $(G, \circ) = (\mathbb{Z}, +)$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$  und  $m|n$ . Wir wissen:  $m\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$  und  $n\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$  (sogar Normalteiler, weil  $G$  abelsch ist). Klar ist:  $n\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z}$  (insbesondere auch  $n\mathbb{Z} \triangleleft m\mathbb{Z}$ ). Dann gilt

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/(m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$

## 1.3 Zyklische Gruppen

Wir schreiben kurz  $\langle g \rangle$  statt  $\langle \{g\} \rangle$ .

**Satz 1.** Untergruppen von zyklischen Gruppen sind zyklisch.

*Beweis.* Sei  $G$  eine zyklische Gruppe;  $G = \langle g \rangle$  mit  $g \in G$ . Sei  $H < G$ .

Fall 1  $H = \{e\} = \langle e \rangle$ , also zyklisch

Fall 2  $H \neq \{e\} \Rightarrow \exists m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : e \neq g^m \in H \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : e \neq g^n \in H$  (weil  $H < G$ ). Wähle  $n := \min\{j \in \mathbb{N} \mid e \neq g^j \in H\}$ . Behauptung:  $H = \langle g^n \rangle$ .

„ $\supseteq$ “: Klar, da  $g^n \in H$

„ $=$ “: Angenommen, Gleichheit gilt nicht. Also  $\exists s \in \mathbb{Z} : g^s \in H \setminus \langle g^n \rangle$  (beachte  $G = \langle g \rangle$ ). Schreibe  $s = an + r$  für  $a, r \in \mathbb{Z}$  und  $0 \leq r < n$ . Falls  $r = 0$ , dann  $s = an$  und  $g^s = g^{an} = (g^n)^a \in \langle g^n \rangle$  Widerspruch!

Falls  $r > 0$ : Dann  $g^r = (g^{an})^{-1} g^{an} g^r = ((g^n)^a)^{-1} g^s \in H$  (Widerspruch zur Minimalität)

Somit war die Annahme falsch und  $H$  ist zyklisch.  $\square$

[16. Oktober 2017]

[19. Oktober 2017]

**Lemma 2.** *Bilder von zyklischen Gruppen und Gruppenhomomorphismen sind zyklisch.*

*Beweis.* Sei  $f : G \rightarrow G'$  ein Gruppenhomomorphismus und sei  $G$  zyklisch, also  $G = \langle g \rangle$  für ein  $g \in G \Rightarrow G = \{g^i | i \in \mathbb{Z}\}$  also  $f(G) = \{f(g^i) | i \in \mathbb{Z}\} = \{(f(g))^i | i \in \mathbb{Z}\} = \langle f(g) \rangle \Rightarrow \text{Im } f = \langle f(g) \rangle$  zyklisch.  $\square$

**Lemma 3.** *Sei  $G$  endliche Gruppe  $|G| = n < \infty$ . Sei  $g \in G$  mit  $G = \langle g \rangle$  (also  $G$  zyklisch). Sei  $\text{ord}(g) = \min \{j \in \mathbb{N} | g^j = e\}$ . Dann gilt:  $\text{ord}(g) = n$ .*

**Definition 1.** Allgemeiner: Sei  $G$  irgendeine Gruppe,  $g \in G$ . Dann definiere

$$\text{ord}(g) := \begin{cases} \min \{j \in \mathbb{N} | g^j = e\} & \text{falls das existiert} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir nennen  $\text{ord}(g)$  die Ordnung von  $g \in G$ .

*Beweis von Lemma 3.* 1. Behauptung:  $\text{ord}(g)$  existiert. Angenommen es existiert nicht, also  $g^j \neq g \ \forall j \in \mathbb{N} \Rightarrow g^i \neq g^j$  falls  $i \neq j$ ,  $i, j \in \mathbb{N}$  (denn sonst gilt  $g^{i-j} = e = g^{j-i}$  mit  $i-j \in \mathbb{N}$  oder  $j-i \in \mathbb{N}$ ). Also  $|G| = \infty \Rightarrow$  Widerspruch.

Jetzt ist noch zu zeigen, dass  $n = \text{ord}(g)$  gilt. Dazu sei  $S := \{g, g^2, \dots, g^{\text{ord}(g)} = e\} \subset G$ .

2. Behauptung:  $S < G$ . Klar:  $e \in S$ . Sei  $g^a, g^b \in S$ . Schreibe  $a - b = k \cdot \text{ord}(g) + r$ , wobei  $k, r \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < \text{ord}(g)$ . Daraus folgt

$$g^a (g^b)^{-1} = g^{a-b} = g^{k \cdot \text{ord}(g) + r} = (g^{\text{ord}(g)})^k g^r = e^k g^r = e g^r = g^r \in S$$

weil  $0 \leq r < \text{ord}(g)$ . Da  $g \in S$ , gilt  $\langle g \rangle \subset S$ . Weil  $S < G$  ist klar, dass  $S \subset \langle g \rangle$ , also  $\langle g \rangle = S$ .

3. Behauptung:  $|S| = \text{ord}(g)$ . Seien  $g^i, g^j \in S$  mit  $1 \leq i, j \leq \text{ord}(g)$  und  $g^i = g^j$ . Also  $g^{i-j} = e = g^{j-i}$ , was ein Widerspruch zur Minimalität von  $\text{ord}(g)$  ist außer  $i = j$ . Folglich sind die  $g^i (1 \leq i \leq \text{ord}(g))$  paarweise verschieden, was die Behauptung zeigt.  $\square$

*Bemerkung.* Sei  $G$  irgendeine Gruppe,  $g \in G$ . Dann gilt:  $\text{ord}(g) = |\langle g \rangle|$  und nach Satz von Lagrange dann  $\text{ord}(g)$  teilt  $|G|$ , falls  $|G|$  endlich.

**Satz 4** (Zyklische Gruppen). Je zwei zyklische Gruppen der selben Ordnung sind isomorph. Genauer gilt für  $G$  zyklische Gruppe:

$$G \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } |G| = \infty \\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \text{falls } |G| = n \end{cases}$$

*Beweis.* Sei  $G = \langle g \rangle$  mit  $g \in G$ . Sei  $f : \mathbb{Z} \rightarrow G : j \mapsto g^j$ . Dann ist  $f$  ein Gruppenhomomorphismus (nachrechnen) und surjektiv, da  $G = \langle g \rangle$ .

Fall 1  $|G| = \infty$ . Dann muss  $f$  injektiv sein, damit  $f$  ein Isomorphismus ist und damit  $\mathbb{Z} \cong G$ . Falls  $f$  nicht injektiv ist, dann  $\exists i, j \in \mathbb{Z}, i \neq j$  mit  $g^i = g^j$ , als  $g^{i-j} = e = g^{j-i}$ . Folglich ist  $\text{ord}(g) < \infty$ . Damit wäre  $G$  nach 3 endlich, was ein Widerspruch ist.

Fall 2  $|G| = n$  endlich. Dann folgt aus 3:

$$\text{ord}(g) = n \Rightarrow g^n = e \Rightarrow g^{nk} = (g^n)^k = e^k = e \quad \forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow n\mathbb{Z} \subset \ker f$$

Nach dem Homotopiesatz gilt dann: TODO Diagramm. Also  $\bar{f} : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow G$ . Da  $|\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}| = n = |G|$  muss diese surjektive Abbildung schon ein Isomorphismus sein.

□

## 1.4 Auflösbare Gruppen

**Definition 1.** Eine Normalreihe einer Gruppe  $G$  ist eine Kette von Untergruppen der Form  $\{e\} = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G$ . Man nennt die Quotientengruppe  $G_i/G_{i-1}$  die Faktoren der Normalreihe.

**Definition 2.** Eine Gruppe heißt auflösbar, falls eine Normalreihe mit abelschen Faktoren existiert.

**Beispiel.**

1. Abelsche Gruppen sind auflösbar:  $\{e\} \triangleleft G$  und  $G/\{e\} \cong G$ , also abelsch
2. Sei  $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(K) \right\} < \text{GL}_2(K)$ . Behauptung:  $G$  ist auflösbar. Dazu betrachtet man  $G' = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(K) \right\} < \text{GL}_2(K)$ , wobei  $G'$  insbesondere eine Gruppe ist.

$$f : G \rightarrow G' : \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

was ein Gruppenepimorphismus ist (nachrechnen). Es gilt:

$$\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in K \right\} \triangleleft G$$

Folglich gilt  $\ker f \cong (K, +)$ , sodass  $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto b$ , weil  $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b+b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  als Gruppenhomomorphismus offensichtlich bijektiv ist. Damit ist  $\ker f$  abelsch und  $G'$  somit auch.

$$\Rightarrow \{e\} = G_0 \triangleleft \ker f = G_1 \triangleleft G_2 = G$$

und  $\ker f / \{e\}$  abelsch, sowie auch  $G/\ker f \cong \text{Im } f = G'$  abelsch. Somit ist  $G$  auflösbar.

3.  $S_4$  ist auflösbar. Betrachte

$$S_4 > A_4 := \{\pi \in S_4 \mid \text{sgn}(\pi) = 1\}$$

Nach LA 1 ist  $\text{sgn}$  ein Gruppenhomomorphismus und damit  $A_4 = \ker(\text{sgn}) < S_4$ . Es gilt  $S_4 \triangleleft A_4$ , weil  $A_4 = \ker(\text{sgn})$  oder weil  $(S_4 - A_4) = 2$ , was dann nach Blatt 2 folgt. Betrachte nun

$$A_4 > V_4 := \left\{ e, \underbrace{(1, 2)(3, 4)}_a, \underbrace{(1, 3)(2, 4)}_b, \underbrace{(1, 4)(2, 3)}_c \right\}$$

Gruppentafel:

	a	b	c
a	e	c	b
b	c	e	a
c	b	a	e

Dann gilt  $A_4 \triangleleft V_4$ , da folgendes gilt:

$$\forall \pi \in S_4 : \pi \circ \underbrace{(a_1, a_2)(a_3, a_4)}_{\tau} \circ \pi^{-1} = (\pi(a_1), \pi(a_2))(\pi(a_3), \pi(a_4))$$

weil

$$\begin{aligned} \pi(a_1) &\xrightarrow{\pi^{-1}} a_1 \xrightarrow{\tau} a_2 \xrightarrow{\pi} \pi(a_2) \\ \pi(a_2) &\mapsto a_2 \mapsto a_1 \mapsto \pi(a_1) \\ \pi(a_3) &\mapsto a_3 \mapsto a_4 \mapsto \pi(a_4) \\ \pi(a_4) &\mapsto a_4 \mapsto a_3 \mapsto \pi(a_3) \end{aligned}$$

also  $V_4 \triangleleft A_4$ . Folglich haben wir

$$\{e\} = G_0 \triangleleft V_4 = G_1 \triangleleft A_4 = G_2 \triangleleft S_4 = G_3 \quad (1)$$

$G_1/G_0 \cong V_4$  abelsch

$G_2/G_1 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  also abelsch, da jede Gruppe  $H$  der Ordnung 2 zyklisch mit  $H = \langle g \rangle (g \neq e)$  ist und dann nach Klassifikationssatz  $H \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$G_3/G_2$  Wir wissen, dass  $|G_3/G_2| = 3$ . Dann behaupten wir, dass  $G_3/G_2 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ . Jede Gruppe  $H$  mit  $|H| = 3$  ist zyklisch, denn  $\langle g \rangle < H (g \neq e)$ . Nach dem Satz von Lagrange gilt  $\langle g \rangle = H$ , weil  $\langle g \rangle \neq e$  und 3 prim ist. Also folgt die Aussage aus dem Klassifikationssatz.

Daraus folgt, dass  $S_4$  auflösbar ist.

**Satz 1.** Untergruppen und Bilder unter Gruppenhomomorphismen von auflösbaren Gruppen sind auflösbar.

*Beweis.* Sei  $G$  auflösbare Gruppe. Dann existiert eine Auflösung

$$\{e\} = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G \quad G_i/G_{i-1} \text{ abelsch}$$

1. Sei  $U < G$ . Behauptung:  $\{e\} = G_0 \cap U \triangleleft (G_1 \cap U) \triangleleft \dots \triangleleft (G_n \cap U) = U$ . Es ist klar, dass  $(G_{i-1} \cap U) \subset (G_1 \cap U)$ . Auch klar ist, dass  $G_i \cap U$  eine Gruppe ist und  $(G_{i-1}) < (G_1 \cap U)$ . Jetzt ist noch zu zeigen, dass  $(G_{i-1} \cap U) \triangleleft (G_i \cap U)$ . Sei  $x \in G_{i-1} \cap U$  und sei  $y \in G_i \cap U$ . Dann folgt, dass  $\underbrace{yxy^{-1}}_{\in G_{i-1}} \in U$ , weil  $x, y \in U, U < G$ ,  
weil  $x \in G_{i-1}, y \in G_i$  und  $G_{i-1} \triangleleft G_i$ . Daraus folgt, dass  $yxy^{-1} \in U \cap G_{i-1}$ , was zu zeigen war.
2. Behauptung:  $G_i \cap U / G_{i-1} \cap U$  abelsch. Es gilt  $G_i \cap U / G_{i-1} \cap U \stackrel{1. \text{ Iso}}{\cong} (U \cap G_i) G_i / G_i \triangleleft G_i / G_{i-1}$  abelsch. Daraus folgt die Behauptung.

□

---

[19. Oktober 2017]

[23. Oktober 2017]

## 1.5 title

---

[23. Oktober 2017]

[26. Oktober 2017]

**Satz 1** (Satz 5.2).  $G$  irgendein weildes Zeichen  $X$ ;  $X$  endlich:  $|X| = \sum_{i \in I} (G : G_{x_i}) = |X^G| + \sum_{x_i \notin X^G} (G : G_{x_i})$

**Satz 2** (Satz 5.3).  $G$  endliche Gruppe,  $G$  weildes Zeichen  $G$  durch Konjugation;  $|G| = |Z(G)| + \sum_{i \in I, x_i \notin Z(G)} (G : C_G(x_i))$ .

## 1.6 $p$ -Gruppen und Sylow-Sätze

**Definition 1.** Sei  $p$  Primzahl (insbesondere  $\geq 2$ ). Eine  $p$ -Gruppe ist eine Gruppe  $G$  mit  $|G| = p^r$  für ein  $r \in \mathbb{N}_0$ . Insbesondere ist  $|G|$  endlich.

**Satz 1.**  $G \neq \{e\}$   $p$ -Gruppe  $\Rightarrow Z(G) \neq \{e\}$

*Beweis.* Nach 5.3 (mit Notation von dort)  $|G| = |Z(G)| + \sum_{i \in I, x_i \notin Z(G)} (G : G_{x_i})$ . Nach Lagrange ist das durch  $p$  teilbar oder  $= 1$ . (Weil  $G$  eine  $p$ -Gruppe ist).  $(G : G_{x_i}) = 1 \Leftrightarrow G = G_{x_i} \Leftrightarrow x_i \in Z(G)$ . Das ist ein Widerspruch. Also sind die Summanden  $(G : G_{x_i})$  durch  $p$  teilbar. Damit teilt  $p$  auch  $|Z(G)| \Rightarrow |Z(G)| \geq 2 \Rightarrow Z(G) \neq \{e\}$ . □

**Satz 2.**  $G$   $p$ -Gruppe. Dann existiert Normalreihe der Form

$$\{e\} \triangleleft G_0 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G$$

für ein  $n \in \mathbb{N}$ , sodass  $G : i/G_{i-1} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  ( $1 \neq i \neq n$ ). Insbesondere ist  $G$  auflösbar.

*Beweis.* Übungsblatt 3. □

**Definition 2.**  $G$  endliche Gruppe,  $p$  Primzahl. Sei  $|G| = p^r m$  mit  $p \nmid m$ .  $H < G$  heißt  $p$ -Sylowgruppe, falls  $|H| = p^r$ . Wir definieren  $Syl_p(G) := \{H < G \mid H \text{ ist Sylowgruppe}\}$

**Satz 3** (Sylowsätze).  $p$  Primzahl,  $G$  endliche Gruppe,  $|G| = p^r m$  mit  $p \nmid m$ .

1.  $\forall 0 \neq k \leq r \exists H < G$  mit  $|H| = p^k$
2. Sei  $U < G$   $p$ -Gruppe. Dann  $\exists g \in G$  und  $S \in Syl_p(G)$ , sodass  $U < gSg^{-1}$ .
3. Sei  $n_p = |Syl_p(G)|$ . Dann gilt
  - $n_p \equiv 1 \pmod{p}$
  - $n_p \mid m$

*Beweis.*

1. Sei  $1 \leq k \leq r$ . Fall  $k = 0$  klar mit  $H = \{e\}$ . Sei  $X = \{A \subseteq G \mid |A| = p^k\}$ , wobei  $\frac{|X| = p^r m}{p^k}$ ; Übungsblatt 3:  $p^{r-k+1} \nmid |X|$ .

Nun  $G$  weides Zeichen  $X$  durch  $gA = gA := \{ga \mid a \in A\}$  für  $g \in G, A \in X$ . (klar:  $|gA| = p^k$  also  $gA \in X$ ). Nachrechnen: (O1), (O2) gilt (offensichtlich).

Nach Satz 5.2 folgt  $|X| = \sum_{i \in I} (G : G_{x_i})$ , wobei  $\exists i \in I$ , sodass  $p^{r-k+1} \nmid (G : G_{x_i})$ , weil  $p^{r-k+1} \nmid |X|$ . Wähle solch ein  $x_i =: A' \in X$ .

Behauptung:  $G_{A'} < G$  mit  $|G_{A'}| = p^k$ . Dann folgt 1) mit  $H = G_{A'}$ . Klar:  $G_{A'} < G$ . Nach Lagrange:  $|G| = |G_{A'}|(G : G_{A'})$ , wobei  $p^r$  die linke Seite der Gleichung teilt, und im Index auf der rechten Seite  $p$  höchstens  $r - k$ -mal vorkommt.

$\Rightarrow p^k$  teilt  $|G_{A'}| \Rightarrow p^k \leq |G_{A'}|$ . Sei  $a \in A'$ . Dann  $G_{A'}.a := \{g.a \mid g \in G_{A'}\} \subseteq G_{A'}.A' \subseteq A'$  nach Definition von  $G_{A'}$ .

Also:  $|G_{A'}| = |G_{A'}.a| \leq |A'| = p^k$ . (Def. von  $G_{A'}.a$  und  $A' \in X$ ). Also:  $|G_{A'}| = p^k \Rightarrow$  Behauptung  $\Rightarrow$  1).

2. Sei  $U < G$  mit  $|U| = p^s$  für ein  $s \in \mathbb{N}$ . Sei  $S \in Syl_p(G)$ .  $U$  weides Zeichen  $G/S$  nach (B3) durch Linksmultiplikation.

$$u.(gS) = ugS \quad u \in U, g \in G$$

$m = |G/S| = \sum_{i \in I} (U : U_{x_i})$  (nach Definition ist  $S \in Syl_p(G)$ ; wende Lagrange an; die zweite Gleichheit folgt aus Satz 5.2).

Weil  $p \nmid m$ , existiert ein  $i \in I$  sodass  $p \nmid (U : U_{x_i})$ . Wähle ein solches  $x_i =: aS$ . Nach Lagrange ist

$$p^s = |U| = |U_{aS}|(U : U_{aS})$$

. Also  $(U : U_{aS}) = 1$ . Also  $U = U_{aS}$ . Damit



$$\begin{aligned}
 u.aS &= aS & \forall a \in U \\
 \Leftrightarrow (ua)S &= as & \forall u \in U \\
 \Leftrightarrow a^{-1}uaS &= S & \forall u \in U \\
 \Leftrightarrow a^{-1}ua &\in S & \forall u \in U \\
 \Leftrightarrow u &\in aSa^{-1} & \forall u \in U
 \end{aligned}$$

Setze  $g := a$  und erhalte  $U < gSg^{-1}$ .

### 3. Übungsaufgabe

□

**Konsequenzen**  $G$  endliche Gruppe,  $p$  Primzahl.

1. Je zwei  $p$ -Sylowuntergruppen in  $G$  sind zueinander konjugiert (d.h.  $S, S' \in Syl_p(G) \Rightarrow \exists g \in G : S' = gSg^{-1}$ )

*Beweis.* Nach Sylowsatz 2 folgt  $\exists g \in G$  mit  $S' < gSg^{-1}$ . Da  $|S'| = |gSg^{-1}|$  nach Definition von  $p$ -Sylow gilt  $S' = gSg^{-1}$ . □

Beachte: Falls  $n_p = |Syl_p(G)| = 1$ , also  $\exists!$   $p$ -Sylowgruppe  $S$ , dann ist  $S \triangleleft G$ . Denn  $\forall g \in G$  ist  $gSg^{-1}$  wieder  $p$ -Sylow, also  $gSg^{-1} = S$ .

2. (Cauchy)  $p \mid |G| \Rightarrow \exists g \in G$  mit  $ord(g) = p$ .

*Beweis.* Nach Sylowsatz 1 existiert  $H < G$  mit  $|H| = p$ . Wähle  $g \in H$ ,  $g \neq e$ . Dann ist  $\langle g \rangle < H$  und  $\langle g \rangle \neq \{e\}$ , also  $\langle g \rangle = H$  nach Lagrange. Aus Kapitel 3 folgt  $ord(g) = |H| = p$ . □

3.  $G$  ist  $p$ -Gruppe  $\Leftrightarrow$  Jedes Element  $g \in G$  hat Ordnung  $p^s$  für geeignetes  $s \in \mathbb{N}_0$  (abhängig von  $g$ ).

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “: Sei  $g \in G$ . Sei  $ord(g) = n$ . Aus Satz 3.3 folgt  $|\langle g \rangle| = n \Rightarrow n \mid |G|$  nach Lagrange.  $\Rightarrow$  (da  $G$   $p$ -Gruppe)  $n = p^s$  für ein  $s$ .

“ $\Leftarrow$ “: zu zeigen:  $|G| = p^r$  für ein  $r \in \mathbb{N}_0$ .

Annahme:  $q \mid |G|$  für  $q$  Primzahl  $p \neq q$ . Nach dem Satz von Cauchy existiert  $g \in G$  mit  $ord(g) = q$ . Das ist ein Widerspruch. □

*Bemerkung.*  $p$ -Gruppen mit unendlicher Ordnung kann man definieren als Gruppen mit  $ord(g) = \text{Potenz von } p$  für alle  $g \in G$ .

**Anwendungen** Vorbemerkung:  $G$  Gruppe,  $|G| = p$  Primzahl  $\Rightarrow G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . (Denn wähle  $g \in G$ ,  $g \neq e$ . Dann  $\langle g \rangle < G$  und nach Lagrange ist  $|\langle g \rangle| = p = |G|$ , also  $G = \langle g \rangle$  zyklisch, also  $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  nach Klassifikation von zyklischen Gruppen.)

**Satz 4.**  $G$  Gruppe,  $|G| = pq$  mit  $p \neq q$  Primzahl. Dann ist  $G$  auflösbar.

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $p > q$ . Nach Sylowsatz 3 gilt:  $n_p | q$ , also  $n_p \in \{1, q\}$  und  $n_p \equiv 1 \pmod{p}$ .

$\Rightarrow n_p = 1$ , weil  $p > q$ . Nach Bemerkung in 1 gilt  $\exists!$   $p$ -Sylowgruppe  $S$  und  $S \triangleleft G$ . Nach Definition von  $p$ -Sylow und weil  $|G| = pq$  gilt  $|S| = p$ . Also erhalten wir eine Normalreihe

$$\{e\} \triangleleft S \triangleleft G$$

mit  $S/\{e\} \cong S \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  und  $|G/S| = q$ , also  $G/S \cong \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ .

$\Rightarrow$  Faktoren sind abelsch  $\Rightarrow G$  ist auflösbar.  $\square$

**Satz 5.**  $G$  Gruppe,  $|G| = pq$ ,  $p, q$  Primzahlen,  $p < q$  und  $p \nmid q-1$ . Dann  $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$

*Beweis.* Nach Sylowsatz 3 gilt  $n_p \in \{1, q\}$ ,  $n_q \in \{1, p\}$  und  $n_p \equiv 1 \pmod{p}$ ,  $n_q \equiv 1 \pmod{q}$ . Da  $p < q$  ist, gilt  $n_q = 1$ . Also existiert genau eine  $q$ -Sylowgruppe  $Q \triangleleft G$ . Falls  $n_p = q \Rightarrow q \equiv 1 \pmod{p}$ . Daraus folgt  $p | (q-1)$  im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist  $n_p = 1 \Rightarrow \exists!$   $p$ -Sylowgruppe  $P \triangleleft G$ .

1. Behauptung:  $x \in P, y \in Q$ . Dann  $xy = yx$ . Denn  $xyx^{-1}y^{-1} \in Q$ , da  $xyx^{-1} \in Q$  ( $Q$  Normalteiler) und  $y^{-1} \in Q$ ,  $xyx^{-1}y^{-1} \in P$ , da  $x \in P$  und  $yx^{-1}y^{-1} \in P$  ( $P$  Normalteiler).

$\Rightarrow xyx^{-1}y^{-1} \in P \cap Q$ . Aber  $P \cap Q = \{e\}$ , da  $|P \cap Q| |p| = |P|$  und  $|P \cap Q| |q| = |Q|$ .

$\Rightarrow$  1. Behauptung.

Betrachte nun  $\Phi: P \times Q \rightarrow G, (x, y) \mapsto xy$ .  $\Phi$  ist ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus. Denn  $\Phi((x, y) \circ (x', y')) = \Phi((xx', yy')) = xx'yy'$ ;  $\Phi((x, y)) \circ \Phi((x', y')) = xyx'y' = xx'yy'$  (nach der 1. Behauptung).

Außerdem ist  $\Phi$  injektiv, denn  $\Phi((x, y)) = e \Leftrightarrow xy = e \Leftrightarrow x = y^{-1} = e$ , weil  $P \cap Q = \{e\}$ .

$\Phi$  ist surjektiv, weil  $|P \times Q| = |P||Q| = pq = |G|$ .  $\Rightarrow \Phi$  liefert Gruppenisomorphismus  $P \times Q \cong G$ , also  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \cong G$   $\square$

**Korollar 6.**  $G$  Gruppe,  $|G| = 15$ . Dann  $G \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  und  $G$  ist zyklisch.

*Beweis.* Wir wissen  $G \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ . Behauptung:  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ . Sei nämlich  $g = (\bar{1}, \bar{1}) \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ . Dann gilt:  $\text{ord}(g) = \min\{j | (\bar{1}, \bar{1}) + \dots + (\bar{1}, \bar{1}) = (\bar{0}, \bar{0}) \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\} = 15$

$\Rightarrow |\langle g \rangle| = 15 \Rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  ist zyklisch.

$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}, g \mapsto \bar{1}$  gibt den Isomorphismus.  $\square$