Qubits
qubits.top

量子计算

—基础篇

Quantum Computing

网址：www.qubits.top

Calvin Tang

179209347@qq.com

介绍

教程简介：
- 面向对象：量子计算初学者
- 依赖课程：线性代数，量子力学（非必需）

知乎专栏：
https://www.zhihu.com/column/c_1501138176371011584

Github & Gitee 地址：
https://github.com/mymagicpower/qubits
https://gitee.com/mymagicpower/qubits

*** 版权声明：**
- 仅限用于个人学习
- 禁止用于任何商业用途

从线性运算说起

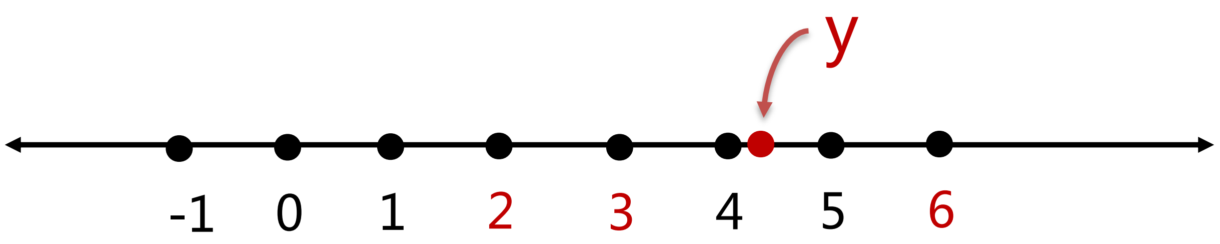
线性运算是**加法**和**数量乘法**， 在实数域，像只包含加法和数量乘法二元一次方程就属于线性运算，如：

$$y=ax+b$$

矩阵的线性运算：矩阵的加法和数乘运算
向量的线性运算：向量的加法和数乘运算

对于一个实数轴而言，任意多个实数的线性组合仍然是实数，即其仍在实数轴上，如：

$y = a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$

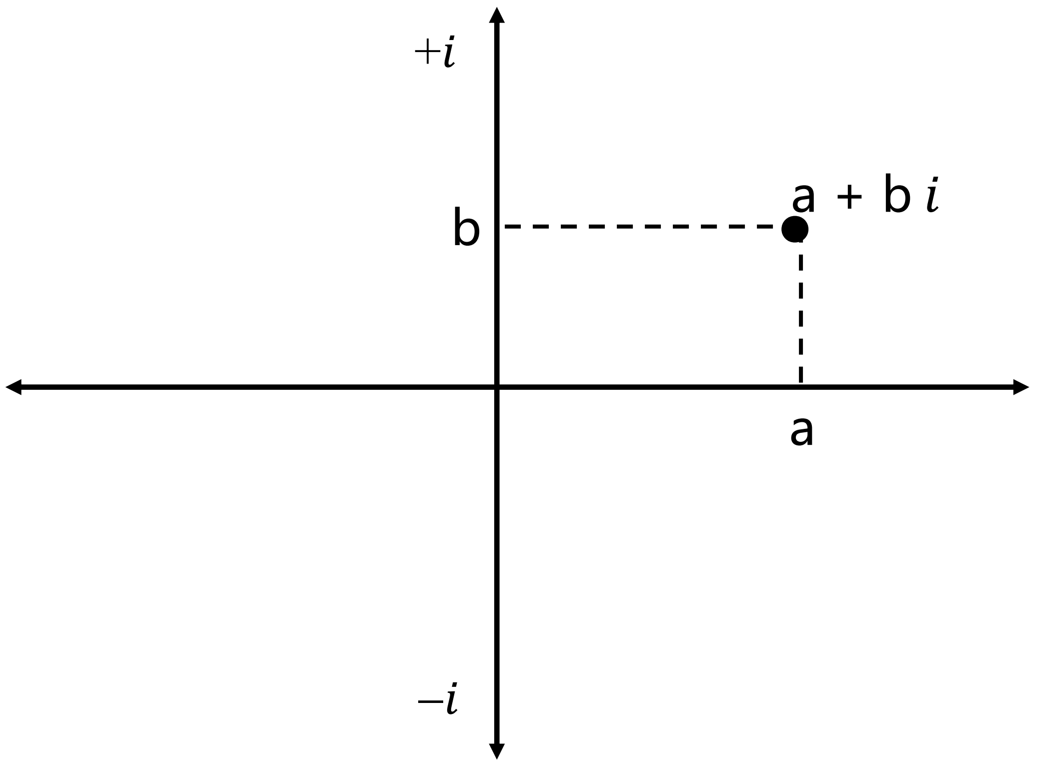


$y = 1 * 2 + 0.5 * 3 + 0.1 * 6 = 2 + 1.5 + 0.6 = 4.1$

复平面

对于虚数 i ，我们无法在实数轴上线性运算获得，也就是说**与实数线性无关。**而线性无关意味着虚数 i 在与实数轴垂直的一个数轴上：

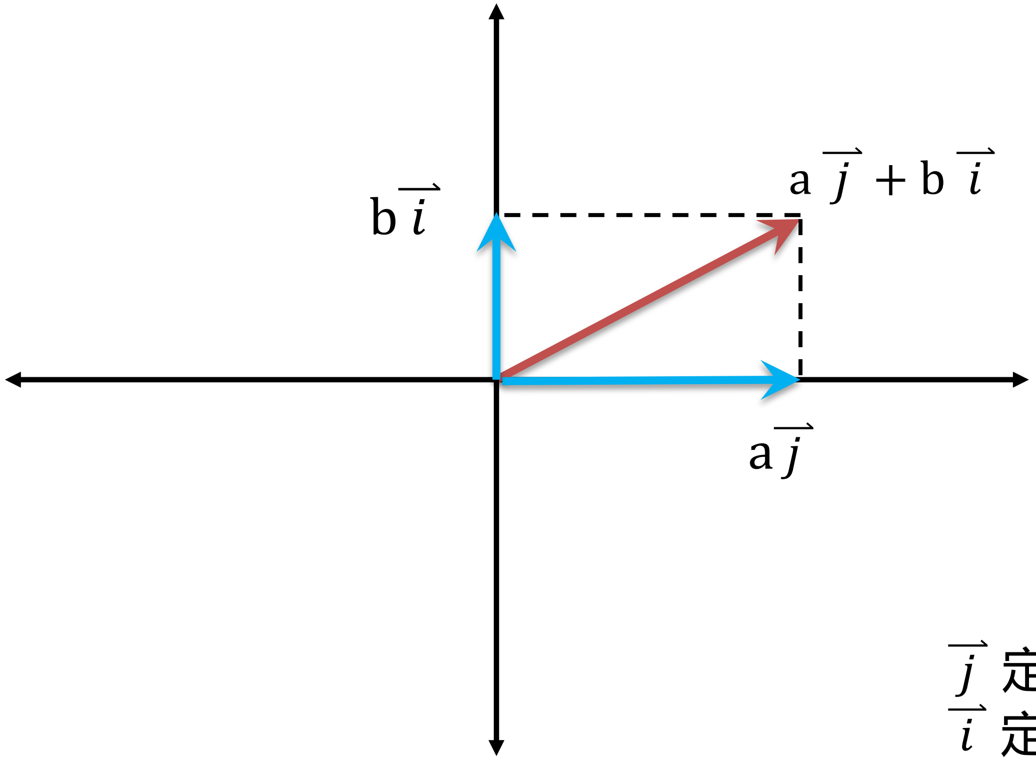
对于复数 a + b i，其在复平面里的坐标表示如下：



复数向量表示

如果我们用向量来理解的话，复数 a + b i可以表示为，单位向量 $\vec{j}$ 和 $\vec{i}$ 的线性组合：

$$a\vec{j} + b\vec{i} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$



$\vec{j}$ 定义为实数轴单位向量，单位长度为 1

$\vec{i}$ 定义为虚数轴单位向量，单位长度为 i

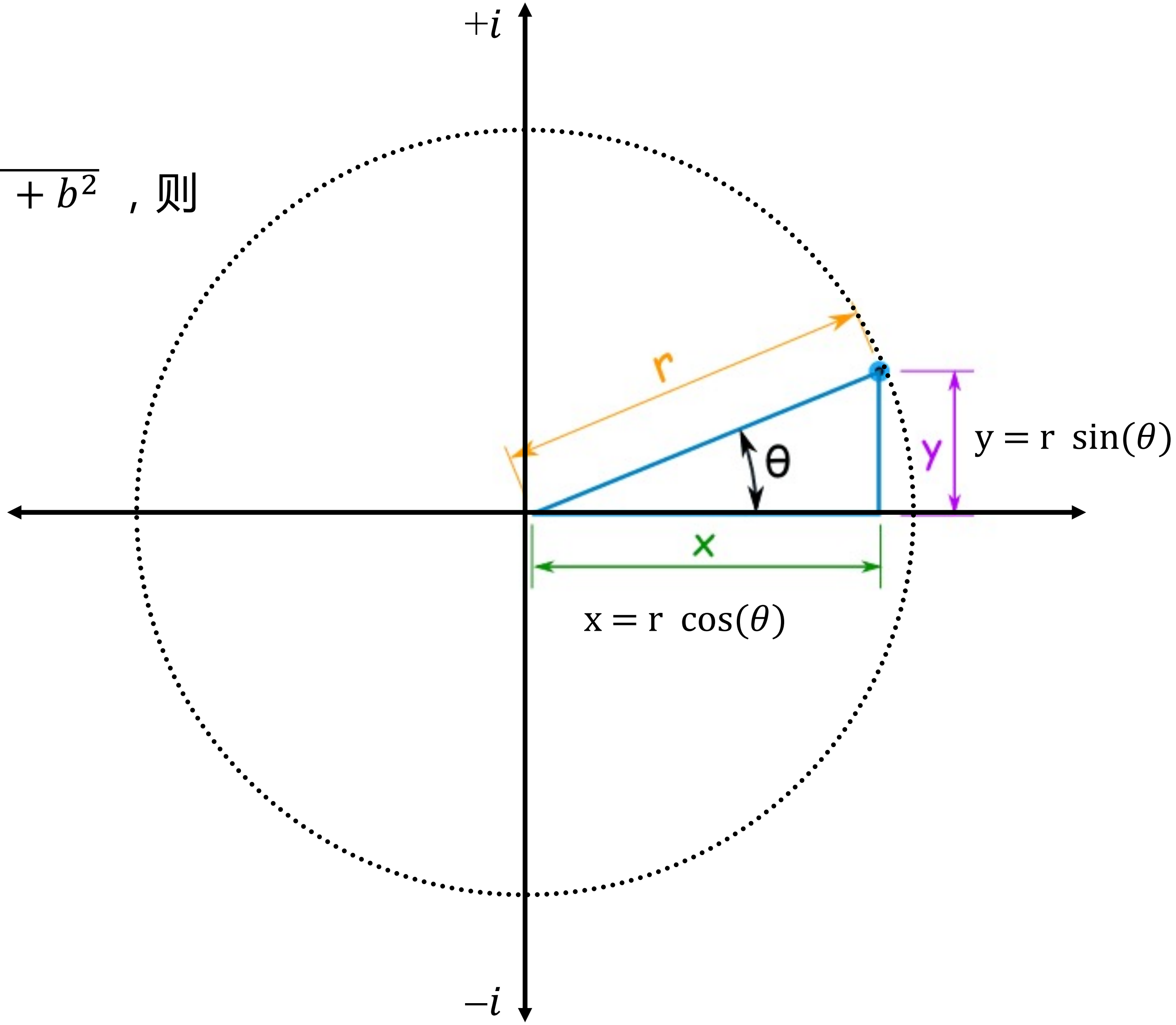
复数三角函数表示

如右图所示，如果将向量长度定义为 r，且 r = $\sqrt{a^2+b^2}$ ，则根据三角函数有：

- a = $r\cos(\theta)$
- b = $r\sin(\theta)$

那么复数 c = a + b i 可以表示为：

$r(\cos(\theta)+i\ \sin(\theta))$



欧拉公式（1/2）

泰勒公式：

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{公式1}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{公式2}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \quad \text{公式3}$$

由公式3，用 ix 代入 x

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \cdots + \frac{(ix)^n}{n!}$$

欧拉公式 (2/2)

代入虚数 i： $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ ... $i^{2n} = (-1)^n$, $i^{2n+1} = (-1)^n i$

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{ix^7}{7!} + \cdots + \frac{i^{2n}x^{2n}}{(2n)!} + \frac{i^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$$

$$= \cos(x) + i \sin(x)$$

由此可得欧拉公式：

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

θ取 π 时，可得欧拉恒等式：

$$e^{i\pi} = -1$$

复数加法的几何意义

复数：

$c_1 = a + b\,i = a\,\vec{j} + b\,\vec{i}$

$c_2 = c + d\,i = c\,\vec{j} + d\,\vec{i}$

令：

$c_1 = 1 + 3\,i = 1\,\vec{j} + 3\,\vec{i}$

$c_2 = 3 + \,i = 3\,\vec{j} + 1\,\vec{i}$

则 $c_3 = c_1 + c_2$

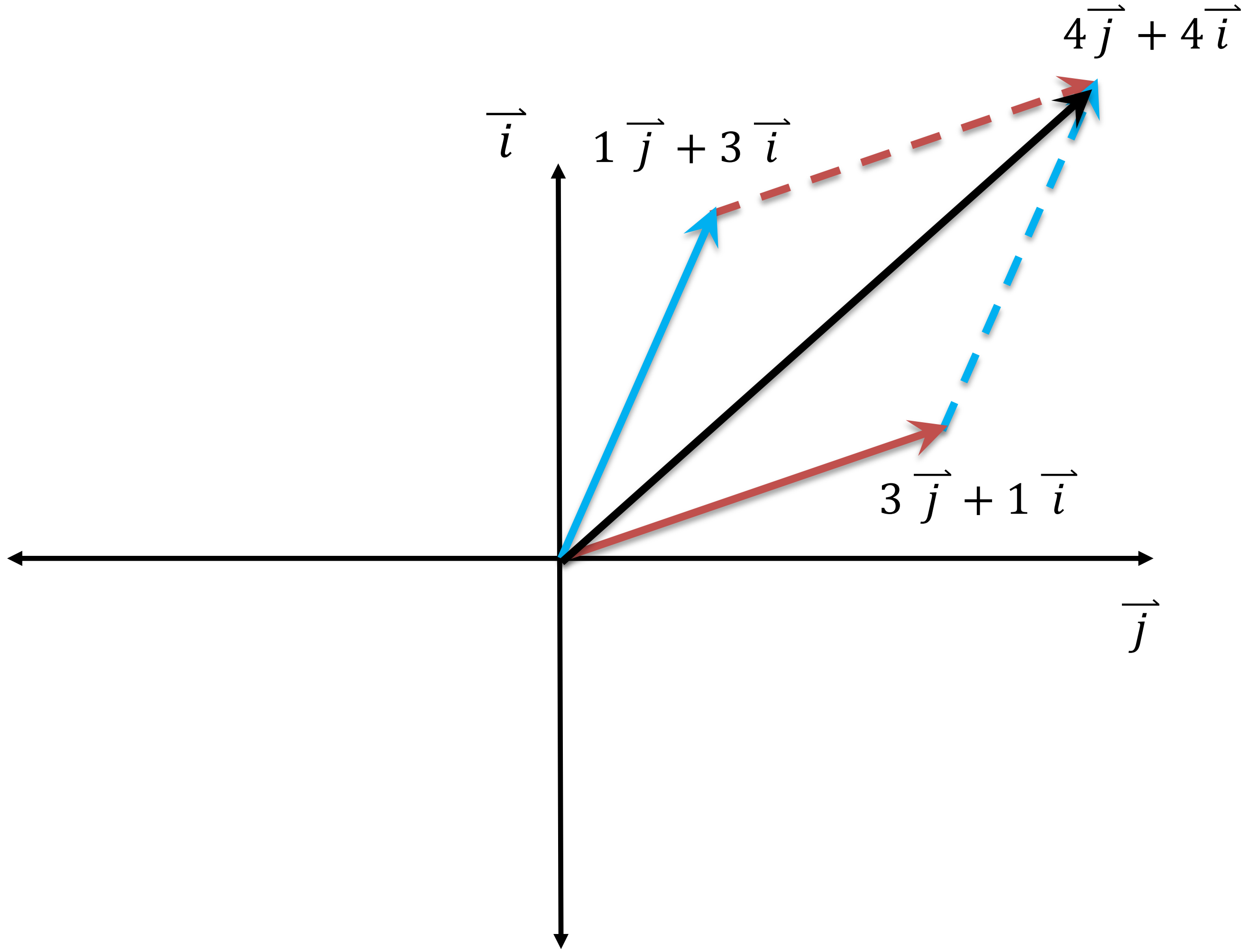
$= (a+c)\,\vec{j} + (b+d)\,\vec{i}$

$= 4\,\vec{j} + 4\,\vec{i}$

复数加法的几何意义可以概括为：

平行四边形法则

结果为两个复数向量形成的平行四边形的对角线。



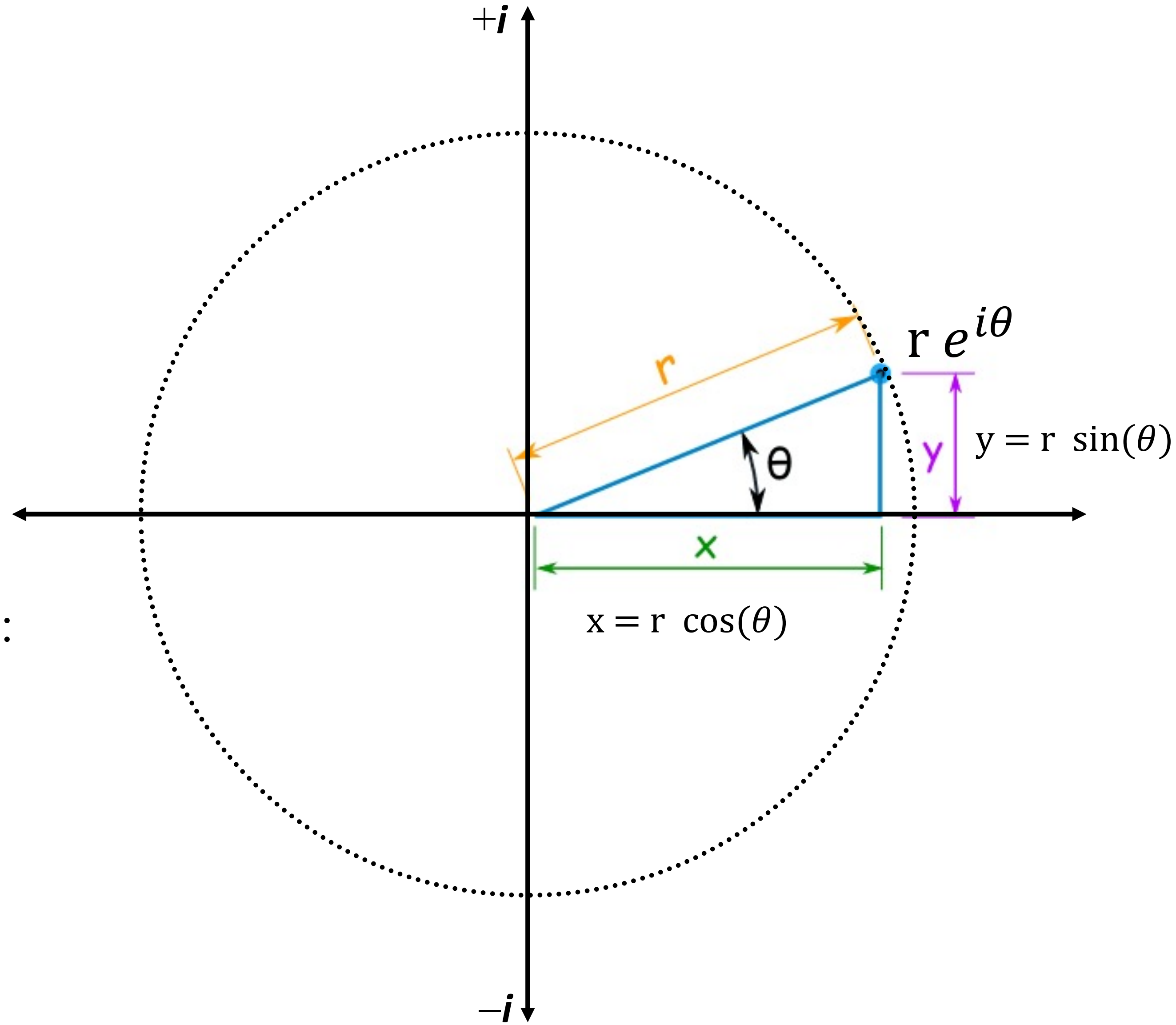
复数极坐标表示

根据欧拉公式：

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\ \sin(\theta)$$

复数 $c = a + bi$ 即 $r(\cos(\theta) + i\ \sin(\theta))$ 可以表示为：

$$c = r\ e^{i\theta}$$



复数乘法的几何意义

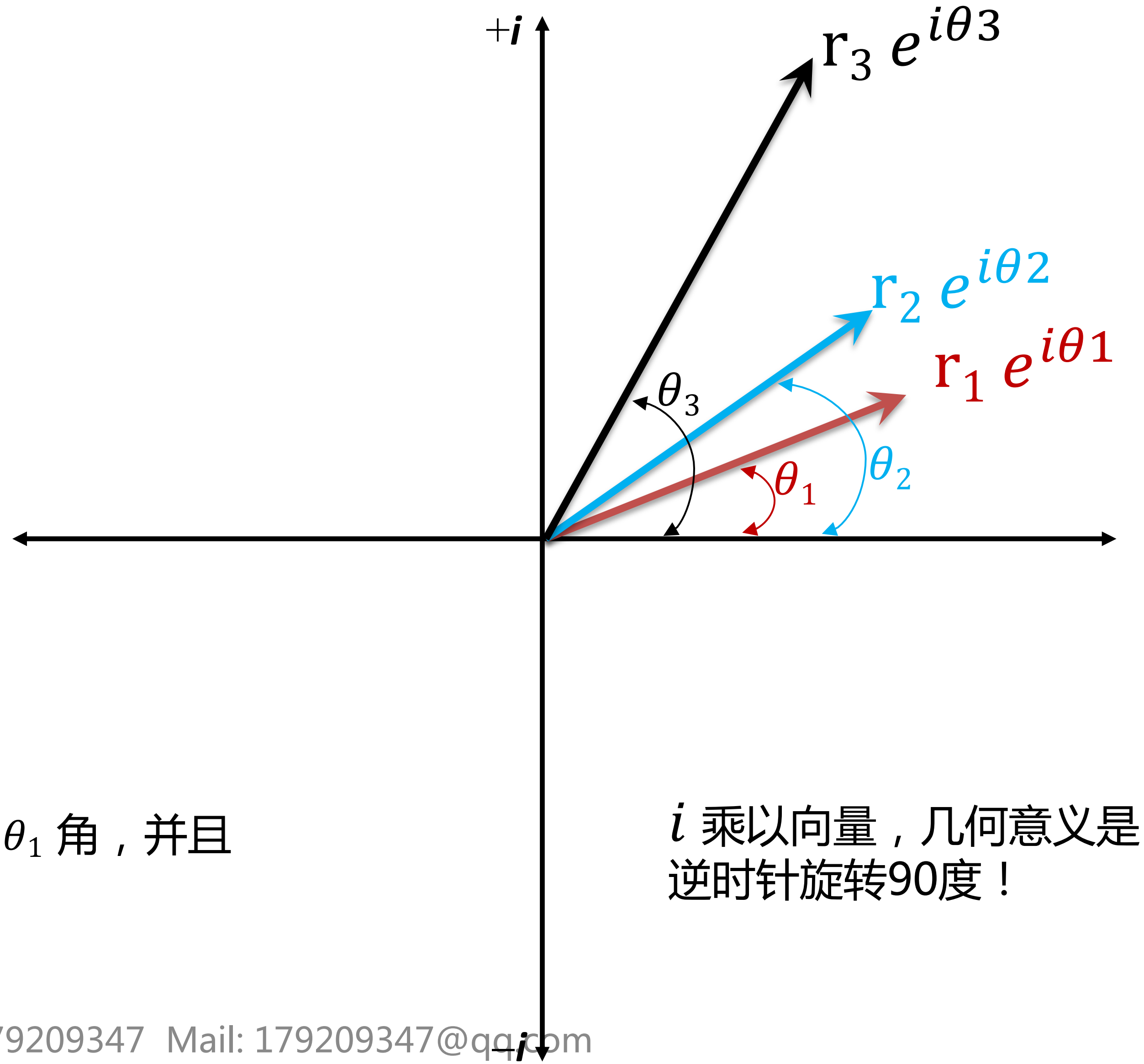
复数 $c_1 = a + b\,i$ ：

- $c_1 = r_1(\cos(\theta_1) + i\ \sin(\theta_1))$
- $c_1 = r_1\, e^{i\theta 1}$

复数 $c_2 = c + d\,i$ ：

- $c_2 = r_2(\cos(\theta_2) + i\ \sin(\theta_2))$
- $c_2 = r_2\, e^{i\theta 2}$

复数 $c_1 * c_2 = r_1\, e^{i\theta 1} * r_2\, e^{i\theta 2}$
$= r_1\, r_2\, e^{i(\theta 1 + \theta 2)}$



根据上面的计算过程可知复数乘法几何意义 ：

旋转缩放

可以理解为 c_1 作用于 c_2， 将复数 c_2 向量逆时针旋转 θ_1 角，并且长度进行缩放，缩放系数为 r_1 。

i 乘以向量，几何意义是逆时针旋转90度！

复数加法与向量加法

结合线性代数的知识，复数的几何性质与二维向量。

$a + bi$ 等价的向量表示：

$$\begin{bmatrix} \mathrm{a} \\ \mathrm{b} \end{bmatrix}$$

于是复数 c_1， c_2 的向量形式为：

$$c_1 = a + bi = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \qquad c_2 = c + d\,i = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

复数加法向量形式：

$$c_1 + c_2 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + \mathrm{c} \\ b + d \end{bmatrix}$$

复数乘法与矩阵乘法

复数的乘法：

$$(a + b\, i)(c + d\, i) = ac - bd + (ad+bc)\, i$$

则有 $ac - bd + (ad+bc)\, i$ 的向量形式：

$$\begin{bmatrix} ac - bd \\ ad+bc \end{bmatrix}$$

$c + di$ 的向量表示：

$$\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

$a + b\, i$ 作为旋转缩放操作算子时，等价的矩阵为：

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

复数的乘法 $(a + b\, i)(c + d\, i)$ 等价为：

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac - bd \\ ad+bc \end{bmatrix}$$

复数乘法与矩阵乘法

因为：$(a+b\,i)(c+d\,i)=ac\ -bd+(bc+ad)\,i$

$ac\ -bd+(bc+ad)\,i$ 等价矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} ac\ -bd & -bc-ad \\ -bc-ad & ac\ -bd \end{bmatrix}$$

并且：

$a+b\,i$ 作为算子其等价矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

$c+di$ 作为算子其等价矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}$$

复数的乘法等价为：$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ac\ -bd & -bc-ad \\ -bc-ad & ac\ -bd \end{bmatrix}$

与复数 $ac\ -bd+(bc+ad)\,i$ 等价矩阵形式一致。

结论

矩阵表示或者二元组表示，更能体现复数的本质：

虚数不虚，复数是矩阵在2维上的特例！

$a + bi$ 等价的向量表示：

$$\begin{bmatrix} \mathrm{a} \\ \mathrm{b} \end{bmatrix}$$

$a + bi$等价的矩阵表示：

$$\begin{bmatrix} \mathrm{a} & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

i 向量表示：

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

i 矩阵表示：

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix}$$

欧拉公式 – 矩阵证明法 (1/4)

1. 泰勒公式： $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$

2. i 矩阵表示： $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix}$

3. 用 x $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 代入 e^x 中的 x：

4. $$\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \\ &= x^0 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \\ &= (\mathrm{x} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix})^0 + \frac{1}{1!}(\mathrm{x} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix})^1 + \frac{1}{2!}(\mathrm{x} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix})^2 + \frac{1}{3!}(\mathrm{x} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix})^3 + \ldots + \frac{1}{n!}(\mathrm{x} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix})^n \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^0 + \frac{1}{1!}\mathrm{x} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^1 + \frac{x^2}{2!} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 + \frac{x^3}{3!} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^3 + \ldots + \frac{x^n}{n!} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \end{aligned}$$

欧拉公式 – 矩阵证明法 (2/4)

$$\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos(\frac{\pi}{2}) & -sin(\frac{\pi}{2})\\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2})\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix}\cos(\frac{3\pi}{2}) & -sin(\frac{3\pi}{2})\\ \sin(\frac{3\pi}{2}) & \cos(\frac{3\pi}{2})\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

…

$$\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}^{2n+1} = \begin{bmatrix}\cos(\frac{(2n+1)\pi}{2}) & -sin(\frac{(2n+1)\pi}{2})\\ \sin(\frac{(2n+1)\pi}{2}) & \cos(\frac{(2n+1)\pi}{2})\end{bmatrix}$$

$$= (-1)^n \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}^0 = \begin{bmatrix}\cos(\frac{0\pi}{2}) & -sin(\frac{0\pi}{2})\\ \sin(\frac{0\pi}{2}) & \cos(\frac{0\pi}{2})\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix}\cos(\frac{2\pi}{2}) & -sin(\frac{2\pi}{2})\\ \sin(\frac{2\pi}{2}) & \cos(\frac{2\pi}{2})\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

…

$$\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}^{2n} = \begin{bmatrix}\cos(\frac{(2n)\pi}{2}) & -sin(\frac{(2n+1)\pi}{2})\\ \sin(\frac{(2n)\pi}{2}) & \cos(\frac{(2n+1)\pi}{2})\end{bmatrix}$$

$$= (-1)^n \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

欧拉公式 – 矩阵证明法（3/4）

泰勒公式：

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$e^{x\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}} = \begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^0 + \frac{1}{1!}\mathrm{x}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^1 + \frac{x^2}{2!}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^2 + \frac{x^3}{3!}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^3 + \ldots + \frac{x^n}{n!}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^n$$

$$= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} - \frac{x^2}{2!}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + \frac{x^4}{4!}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} - \frac{x^6}{6!}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + \cdots + (-1)^{\mathrm{n}}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$+ x\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix} - \frac{x^3}{3!}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix} + \frac{x^5}{5!}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix} - \frac{x^7}{7!}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} & 0\\ 0 & 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix}0 & -(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!})\\ x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} & 0\end{bmatrix}$$

欧拉公式 – 矩阵证明法（4/4）

$$e^{ix} = \cos x + i\ \sin x$$

$$e^{\,i\pi} = -1$$

欧拉公式：

$$e^{x\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}} = \begin{bmatrix}\cos x & 0\\ 0 & \cos x\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & -\sin x\\ \sin x & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{bmatrix}$$

欧拉恒等式：

$$e^{\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\pi} = \begin{bmatrix}\cos\pi & -\sin\pi\\ \sin\pi & \cos\pi\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Qubits
qubits.top

Thank You