Qubits
qubits.top

# 量子计算
## —基础篇

# Quantum Computer

网址：www.qubits.top

**Calvin Tang**

**179209347@qq.com**

# 介绍

**教程简介：**

- 面向对象：量子计算初学者
- 依赖课程：线性代数，解析几何，量子力学（非必需）

**知乎专栏：**

https://www.zhihu.com/column/c_1501138176371011584

**Github & Gitee 地址：**

https://github.com/mymagicpower/qubits
https://gitee.com/mymagicpower/qubits

*** 版权声明：**

- 仅限用于个人学习，或者大学授课使用
  （大学授课如需ppt 原件，请用学校邮箱联系我获取）
- 禁止用于任何商业用途

# 量子线路介绍

所谓量子线路，从本质上是一个量子逻辑门的执行序列，它是从左至右依次执行的。

量子线路，也称量子逻辑电路是最常用的通用量子计算模型，表示在抽象概念下，对于量子比特进行操作的线路。组成包括了量子比特、线路（时间线），以及各种逻辑门。最后常需要量子测量将结果读取出来。

不同于传统电路是用金属线所连接以传递电压讯号或电流讯号，在量子线路中，线路是由时间所连接，亦即量子比特的状态随着时间自然演化，过程中是按照哈密顿运算符的指示，一直到遇上逻辑门而被操作。

由于组成量子线路的每一个量子逻辑门都是一个酉算子 ，所以整个量子线路整体也是一个大的酉算子。

来源：本源量子

# 本源量子云

本节内容基于本源量子的量子云平台编写。可以免费在线测试使用。
https://qcloud.originqc.com.cn/quantumVm/0/0

# 单比特量子逻辑门

| | | |
|---|---|---|
| $I$ | `I` | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ |
| $H$ | `Hadamard` | $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ |
| $\mathrm{T}$ | `T` | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(i\pi/4) \end{bmatrix}$ |
| $\mathrm{S}$ | `S` | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1i \end{bmatrix}$ |
| $X$ | `Pauli-X` | $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ |
| $Y$ | `Pauli-Y` | $\begin{bmatrix} 0 & -1i \\ 1i & 0 \end{bmatrix}$ |
| $Z$ | `Pauli-Z` | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ |
| $\mathrm{X}_1$ | `X1` | $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1i/\sqrt{2} \\ -1i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ |
| $Y_1$ | `Y1` | $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ |

| | | |
|---|---|---|
| $Z_1$ | `Z1` | $\begin{bmatrix} \exp(-i\pi/4) & 0 \\ 0 & \exp(i\pi/4) \end{bmatrix}$ |
| $X_\theta$ | `RX` | $\begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -1i \times \sin(\theta/2) \\ -1i \times \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$ |
| $Y_\theta$ | `RY` | $\begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$ |
| $Z_\theta$ | `RZ` | $\begin{bmatrix} \exp(-i\theta/2) & 0 \\ 0 & \exp(i\theta/2) \end{bmatrix}$ |
| $U_1$ | `U1` | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(i\theta) \end{bmatrix}$ |
| $U_2$ | `U2` | $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -\exp(i\lambda)/\sqrt{2} \\ \exp(i\phi)/\sqrt{2} & \exp(i\lambda + i\phi)/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ |
| $U_3$ | `U3` | $\begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -\exp(i\lambda) \times \sin(\theta/2) \\ \exp(i\phi) \times \sin(\theta/2) & \exp(i\lambda + i\phi) \times \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$ |
| $U_4$ | `U4` | $\begin{bmatrix} u0 & u1 \\ u2 & u3 \end{bmatrix}$ |

# 多比特量子逻辑门

| | | |
|---|---|---|
| + | CNOT | $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ |
| CR | CR | $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp(i\theta) \end{bmatrix}$ |
| i | iSWAP | $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -i \times \sin(\theta) & 0 \\ 0 & -i \times \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ |
| SWAP | SWAP | $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ |
| CZ | CZ | $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ |
| CU | CU | $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u0 & u1 \\ 0 & 0 & u2 & u3 \end{bmatrix}$ |
| Toff | Toffoli | $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ |

# H (Hadamard) 门

Hadamard 门是一种可以将基态变为叠加态的量子逻辑门，简称H门。

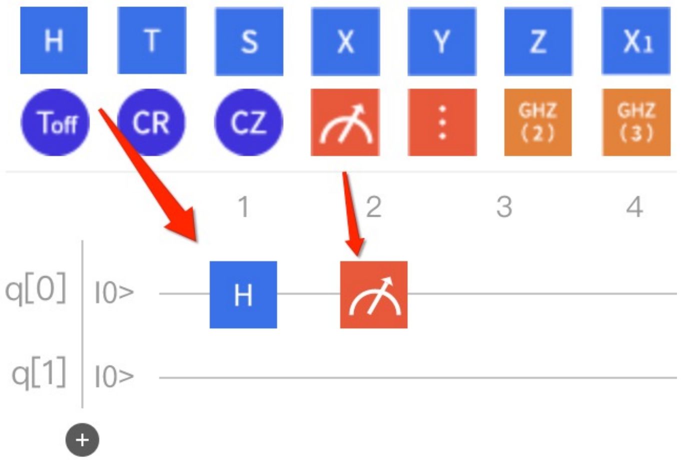
矩阵形式 $\mathrm{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\langle 0| + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}\langle 1|$

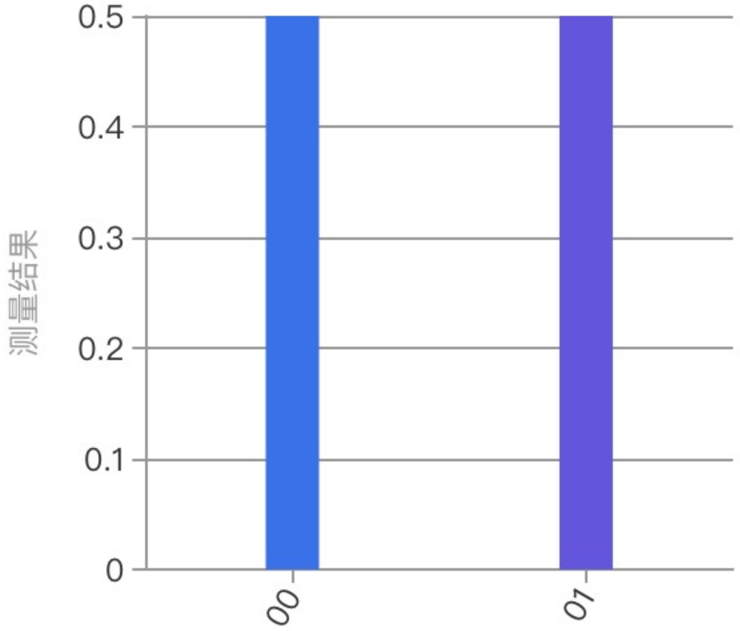
量子线路符号：


测量符号：

**H 门作用在基态：**

$$\mathrm{H}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left( |0\rangle + |1\rangle \right)$$



# Pauli-X 门

Pauli-X 作用在单量子比特上，跟经典计算机的NOT门的量子等价，将量子态翻转，量子态变换规律是：

$$|0\rangle \rightarrow |1\rangle$$
$$|1\rangle \rightarrow |0\rangle$$

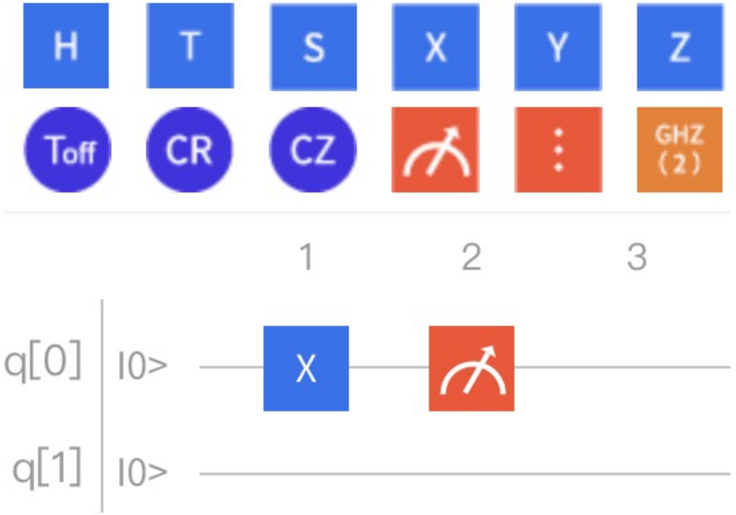
Pauli-X 门矩阵形式为泡利矩阵$\sigma_x$，即：

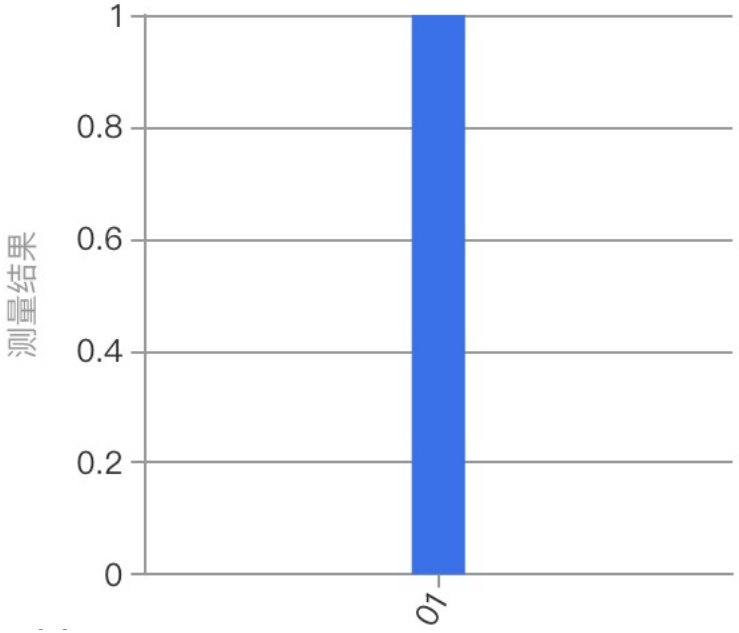
$$X = \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pauli-X 门矩阵又称为NOT门，其量子线路符号：


**X 门作用在基态：**

$$X|0\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |1\rangle$$



# Pauli-Y 门

Pauli-Y 作用在单量子比特上，作用相当于绕布洛赫球 Y 轴旋转角度π.

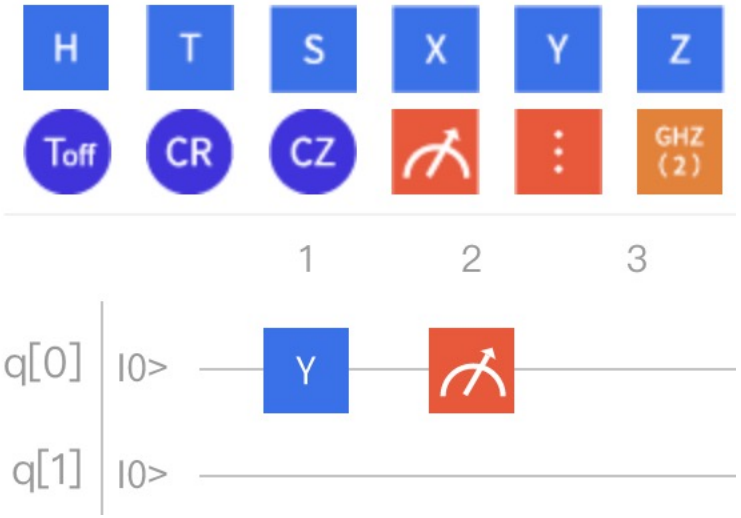
Pauli-Y 门矩阵形式为泡利矩阵$\sigma_y$，即：

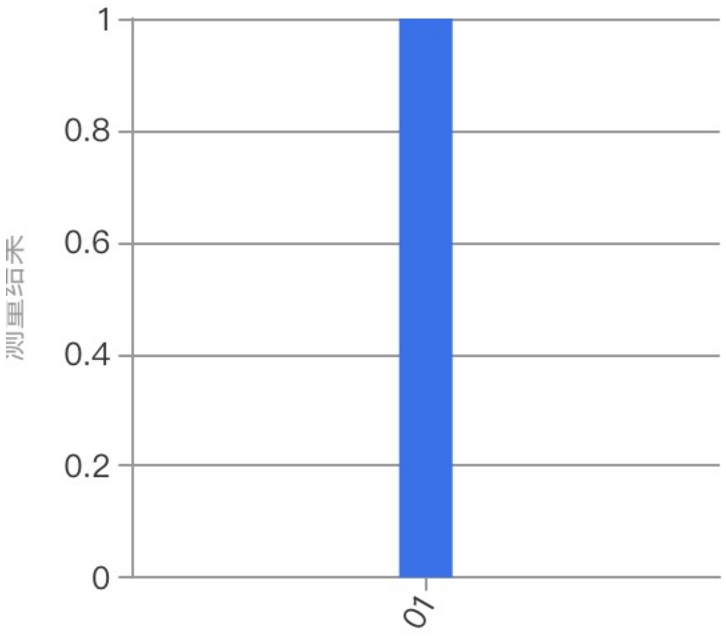
$$Y = \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

其量子线路符号：


**Y 门作用在基态：**

$$Y|0\rangle = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} = i\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = i|1\rangle$$



# Pauli-Z 门

Pauli-Z 作用在单量子比特上，作用相当于绕布洛赫球 Z 轴旋转角度π.

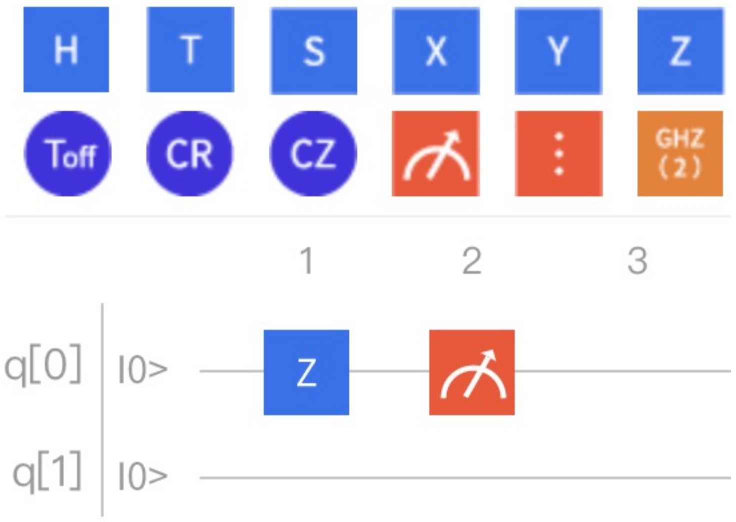
Pauli-Z 门矩阵形式为泡利矩阵$\sigma_z$，即：

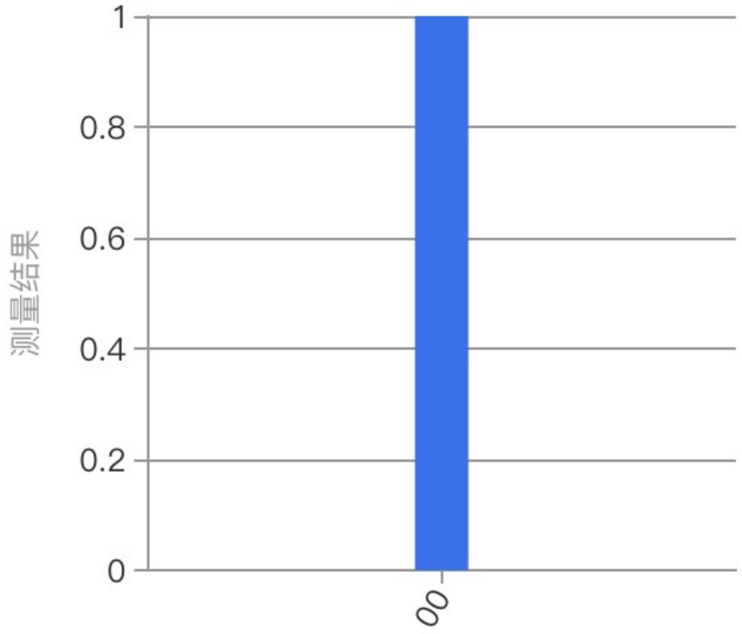
$$Z = \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

其量子线路符号：


**Z 门作用在基态：**

$$Z|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |0\rangle$$



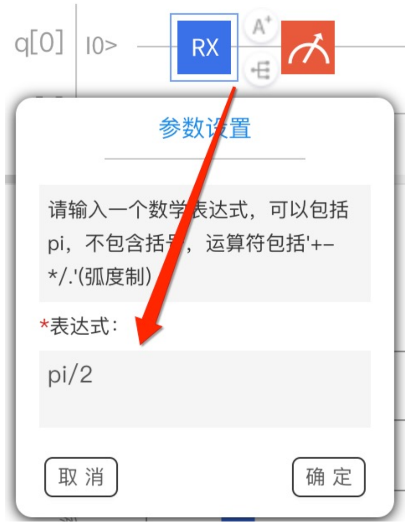
# RX(θ) 门

RX门由Pauli-X 矩阵作为生成元生成，其矩阵形式为：

$$R_x(\theta) = e^{-i\theta X/2} = \cos(\theta/2)\, I - i \sin(\theta/2) X$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -i\sin(\theta/2) \\ -i\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

设置参数 $\theta = \pi$ / 2：




其量子线路符号

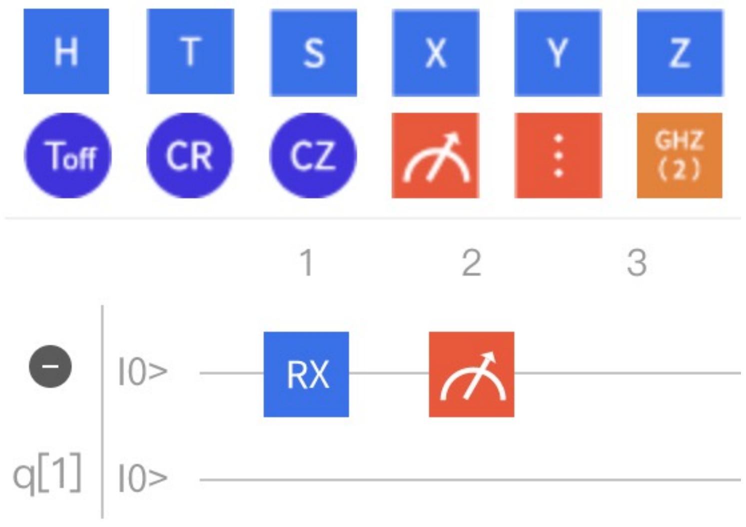

**RX(π/2)门作用在基态：**

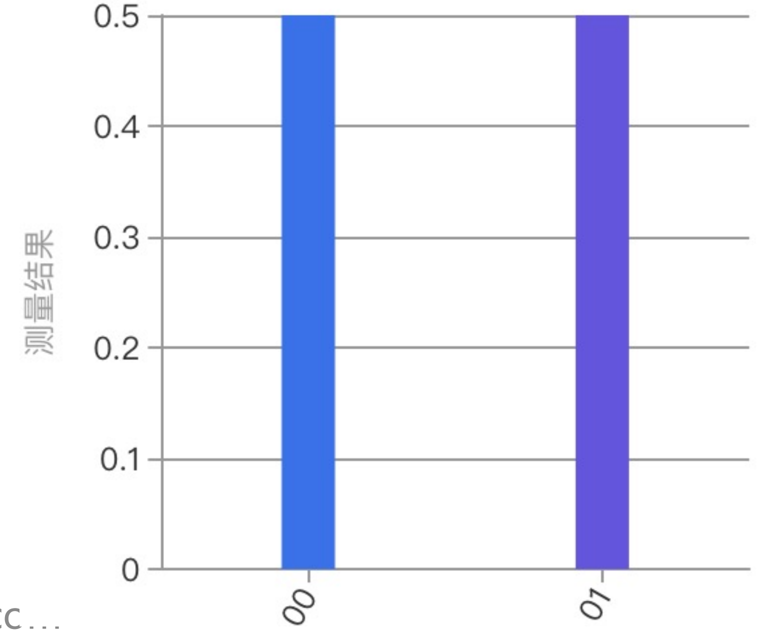
$$R_x(\theta)\,|0\rangle = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ -i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ -i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)|0\rangle - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)|1\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}i\,|1\rangle$$



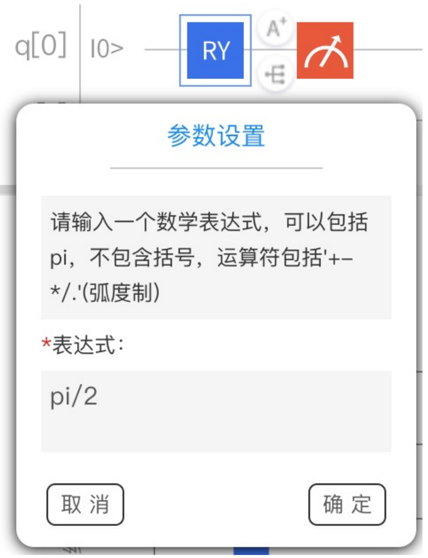
# RY(θ) 门

RY门由Pauli-Y 矩阵作为生成元生成，其矩阵形式为：

$$R_y(\theta) = e^{-i\theta Y/2} = \cos(\theta/2)\,\mathrm{I} - \mathrm{i}\sin(\theta/2)\mathrm{Y}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

设置参数 $\theta = \pi$ / 2：




其量子线路符号 

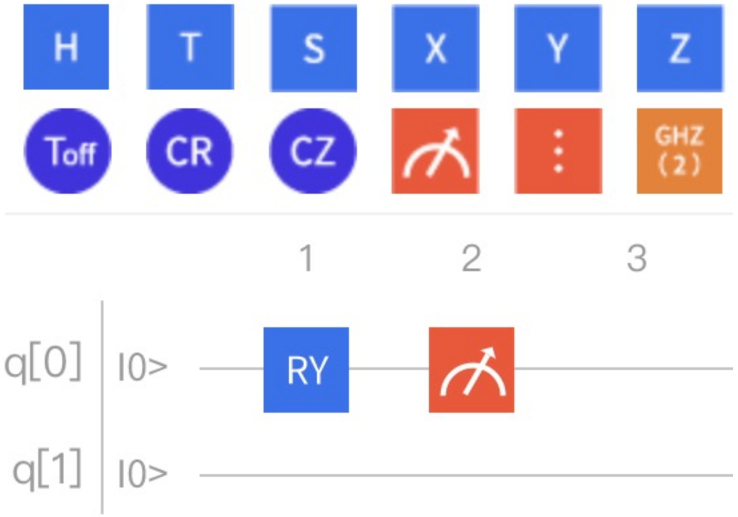

**RY(π/2) 门作用在基态：**

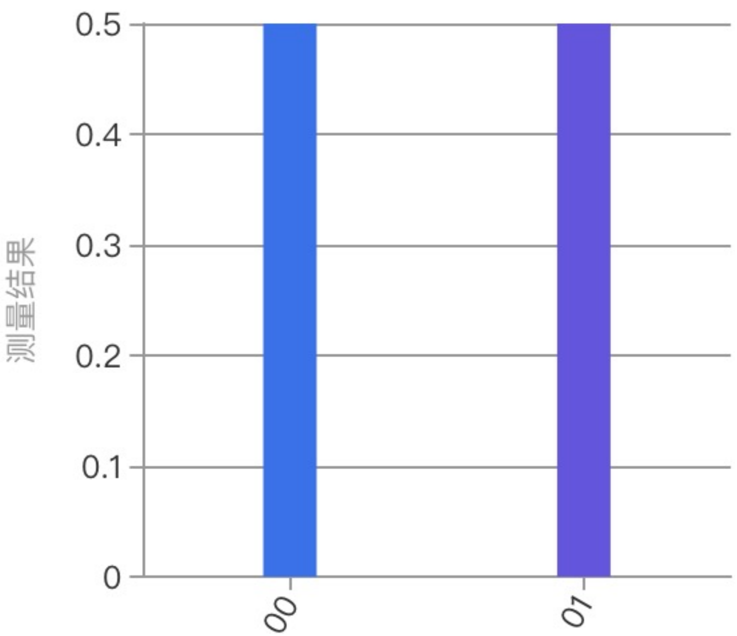
$$R_y(\theta)\,|0\rangle = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)|0\rangle + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)|1\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$



# RZ(θ) 门

RZ门又称为相位转化门(phase-shift gate)，由Pauli-Z 矩阵作为生成元生成，其矩阵形式为：

$$R_z(\theta) = e^{-i\theta Z/2} = \cos(\theta/2)\, I - i \sin(\theta/2) Z$$
$$= \begin{bmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{bmatrix} = e^{-i\theta/2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}$$

$e^{-i\theta/2}$ 并没有对计算基|0⟩ 和 |1⟩ 做任何改变，而只是在原来的态上绕Z轴逆时针旋转$\theta$角。

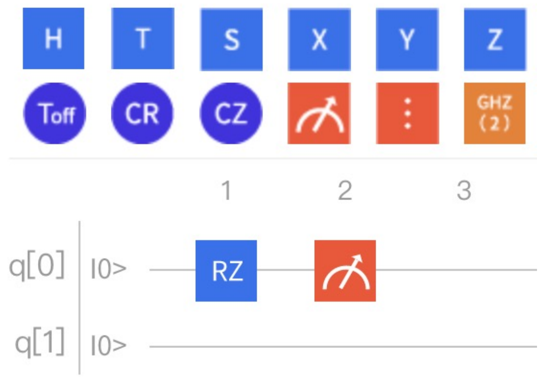
其量子线路符号：

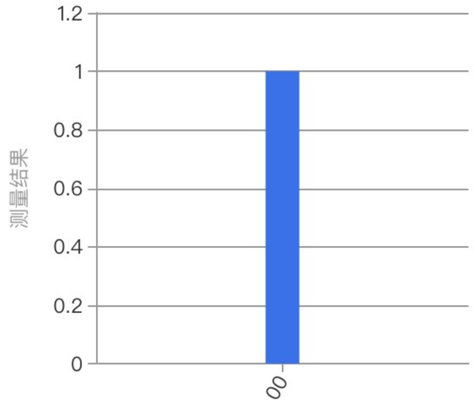

由于$e^{-i\theta/2}$是一个全局相位，其没有物理意义，只考虑单门，则可以省略该参数。于是，RZ门矩阵可简写为：

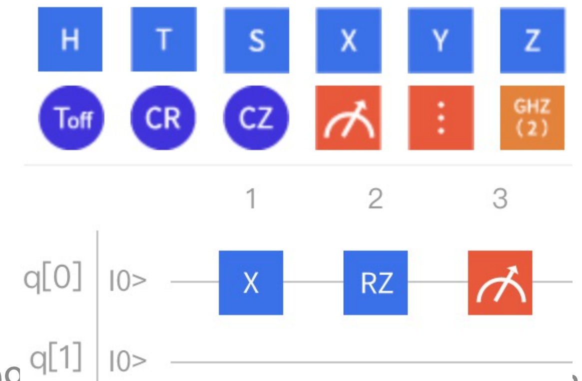
$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}$$

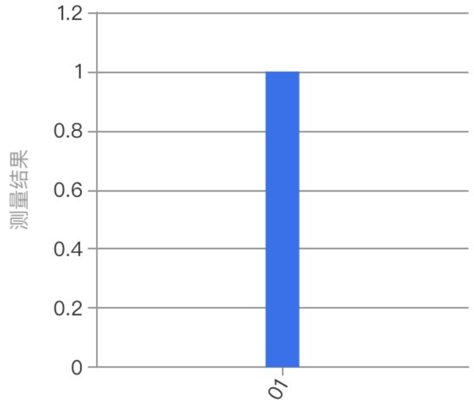
**RZ门作用在基态：**

$$R_z(\theta)\,|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |0\rangle$$
$$R_z(\theta)\,|1\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{i\theta} \end{bmatrix} = e^{i\theta}\,|1\rangle$$



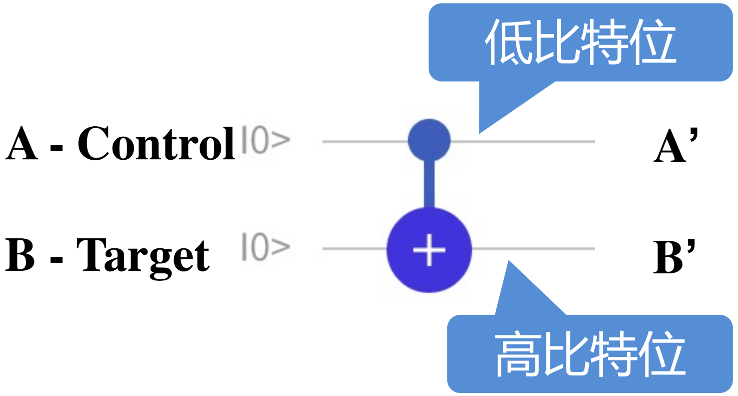



# CNOT 门

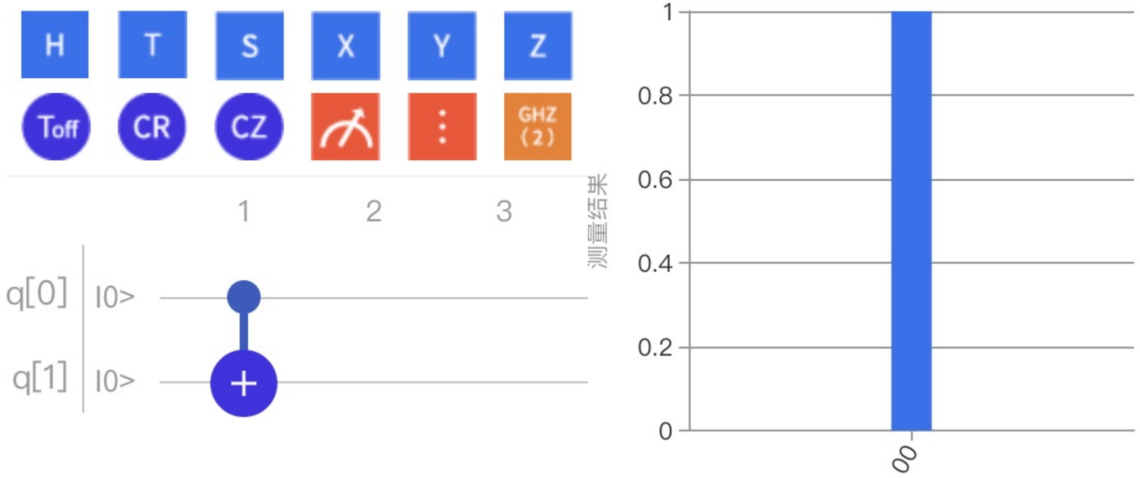
控制非门(Control - NOT)，通常用 CNOT 表示，是一种普遍使用的两量子比特门。
如果低位作为控制比特，则它的矩阵形式：

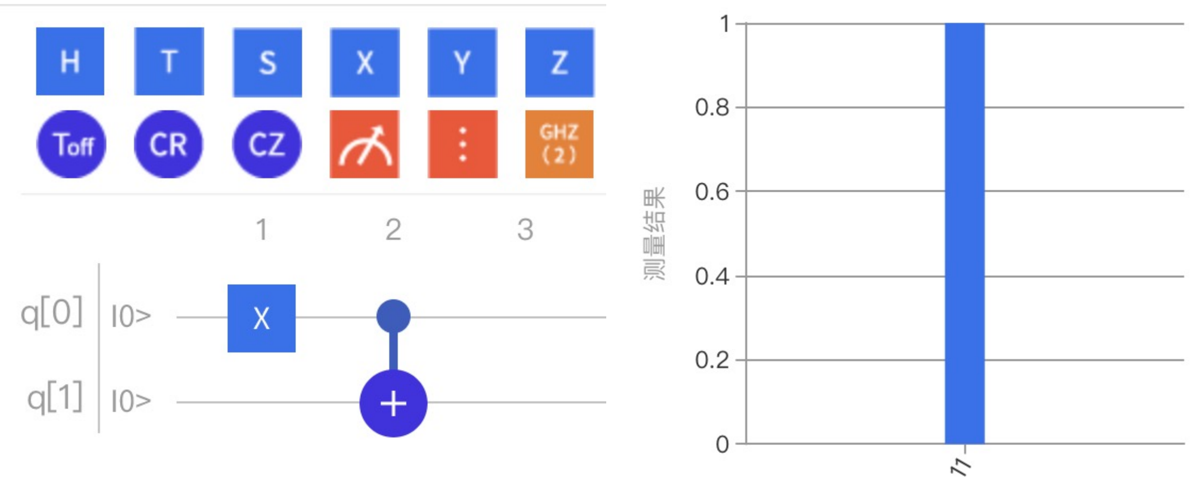
$$\mathrm{CNOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{CNOT}\ \mathrm{CNOT} = \mathrm{I}$$




| **Input** | | **Output** | |
|---|---|---|---|
| A | B | A' | B' |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

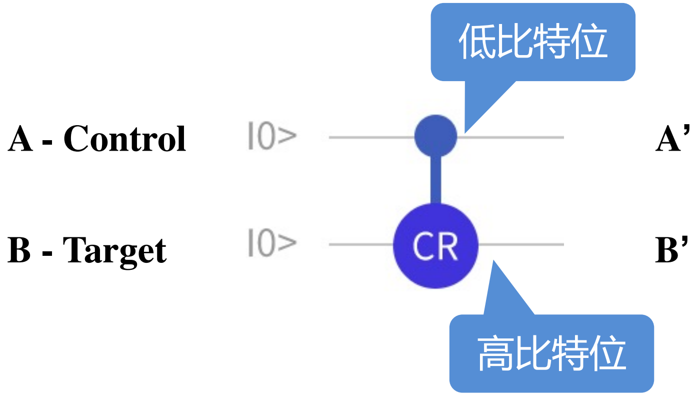


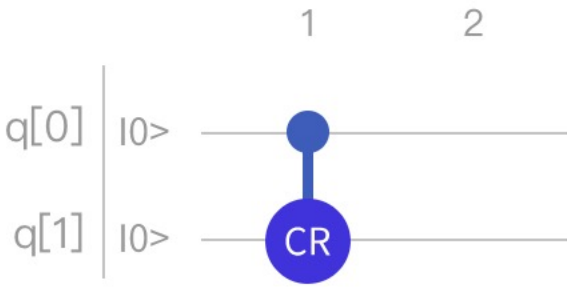



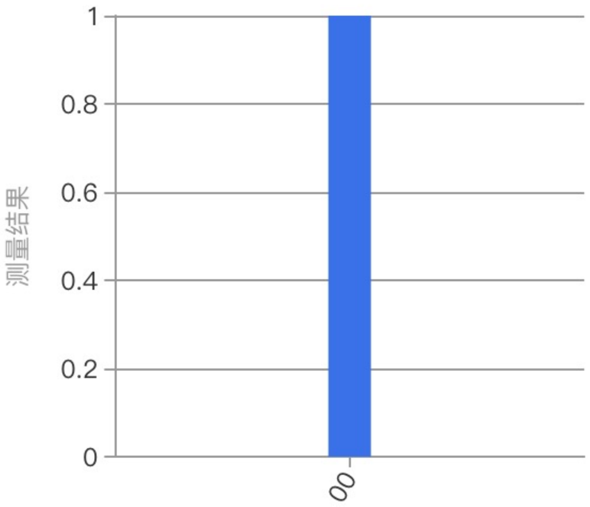
# CR 门

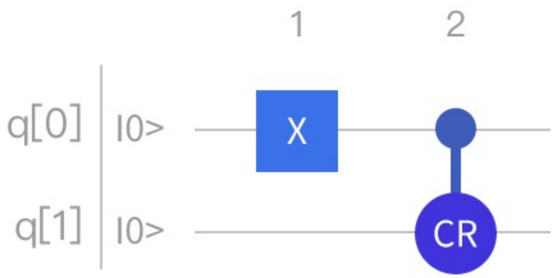
控制相位门(Control phase gate) 和控制非门类似，通常用 CR（CPhase） 表示，它的矩阵形式：

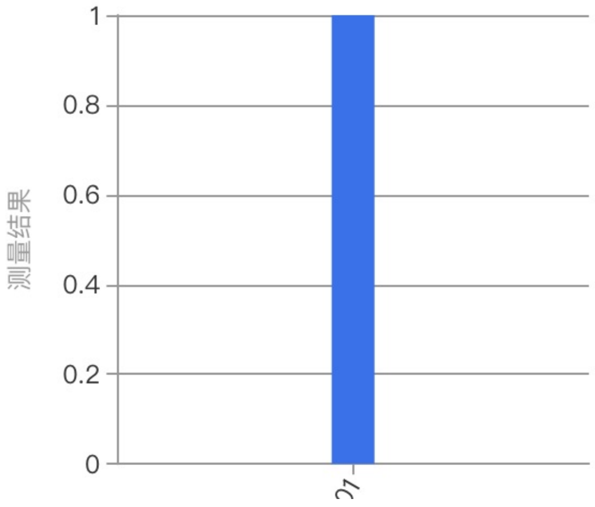
$$\mathrm{CR}\ (\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}$$



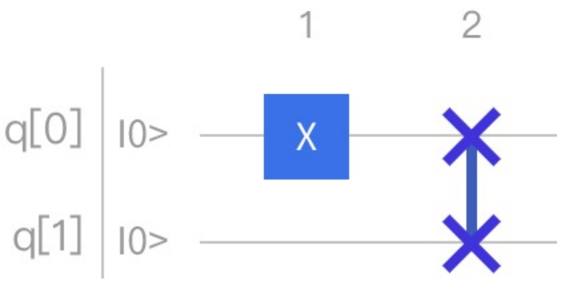



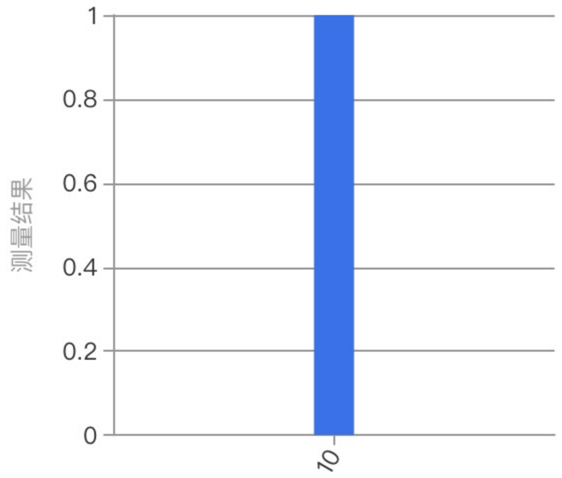
# SWAP 门

SWAP门可以将 $|01\rangle$ 态变为 $|10\rangle$ ， $|10\rangle$ 变为 $|01\rangle$，它的矩阵形式：

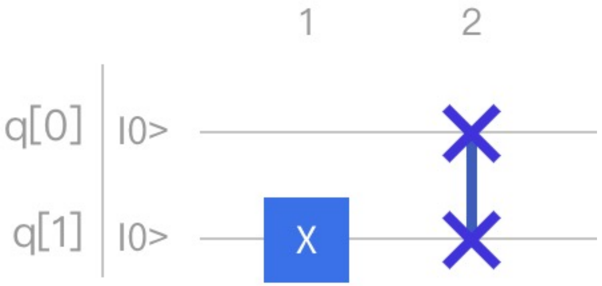
$$SWAP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

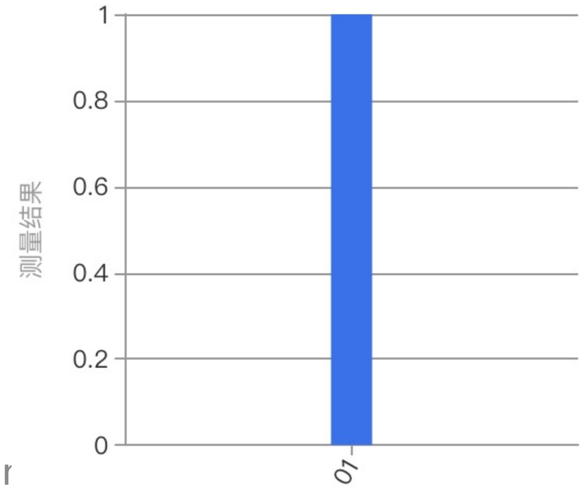
$$|\psi'\rangle = SWAP\,|01\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |10\rangle$$




$$|\psi'\rangle = SWAP\,|10\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |01\rangle$$



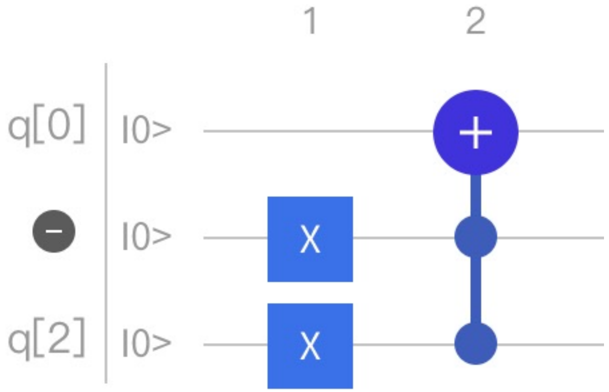
# Toffoli（CCNOT）

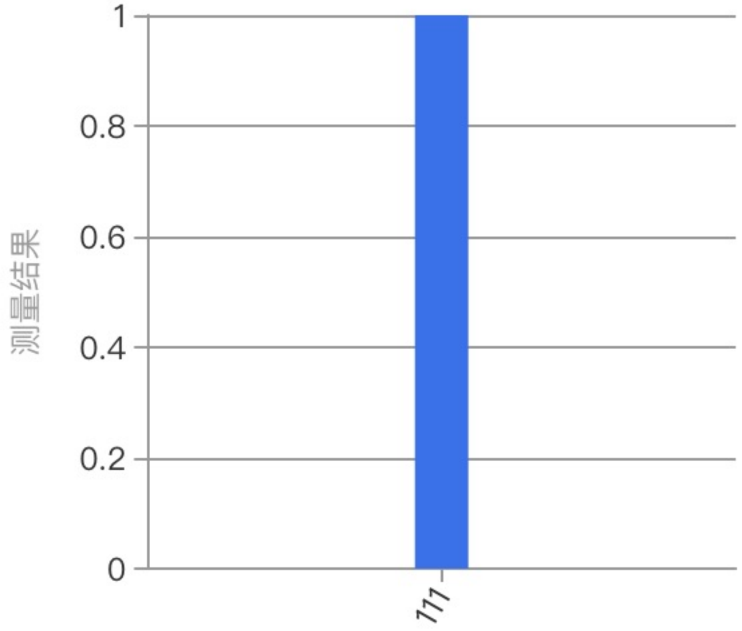
Toffoli门即CCNOT门，它涉及3个量子比特，两个控制比特，一个目标比特，它的矩阵形式：

$$\text{Toffoli} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Toffoli门作用于$|110\rangle$：

$$\text{CCNOT}\,|110\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |111\rangle$$



Thank

You