

# 量子计算 —基础篇

# Quantum Computer

网址: [www.qubits.top](http://www.qubits.top)

Calvin Tang

179209347@qq.com

# 介绍

## 教程简介：

- 面向对象：量子计算初学者
- 依赖课程：线性代数，解析几何，量子力学（非必需）

## 知乎专栏：

[https://www.zhihu.com/column/c\\_1501138176371011584](https://www.zhihu.com/column/c_1501138176371011584)

## Github & Gitee 地址：

[https://github.com/mymagicpower/quantum\\_quest](https://github.com/mymagicpower/quantum_quest)

[https://gitee.com/mymagicpower/quantum\\_quest](https://gitee.com/mymagicpower/quantum_quest)

## \* 版权声明：

- 仅限用于个人学习，或者大学授课使用  
（大学授课如需ppt原件，请用学校邮箱联系我获取）
- 禁止用于任何商业用途

# 张量积 ( tensor product )

张量积是两个或多个向量空间张成一个更大向量空间的运算。

在量子力学中，**量子的状态**由希尔伯特空间 (Hilbert spaces) 中的**单位向量**来描述。

本质上复合系统中量子态的演化也是矩阵的乘法，其与单个子系统相比，只是多了张量积的运算。

$$|00\rangle = |0, 0\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |01\rangle = |0, 1\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|10\rangle = |1, 0\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |11\rangle = |1, 1\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



## 张量积 – 重要公式

$$1. A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C, \quad |a\rangle \otimes (|b\rangle + |c\rangle) = |a\rangle \otimes |b\rangle + |a\rangle \otimes |c\rangle$$

$$2. (A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C, \quad (|a\rangle + |b\rangle) \otimes |c\rangle = |a\rangle \otimes |c\rangle + |b\rangle \otimes |c\rangle$$

$$3. z(|a\rangle \otimes |b\rangle) = (z|a\rangle) \otimes |b\rangle = |a\rangle \otimes (z|b\rangle) \quad z \text{ 为标量}$$

$$4. (A \otimes B)^\dagger = A^\dagger \otimes B^\dagger \quad (A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$$

$$5. (A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1} \quad (A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$$

$$6. \text{tr}(A \otimes B) = \text{tr}(A) \text{tr}(B)$$

$$7. \det(A \otimes B) = (\det A)^p (\det B)^m$$

量子计算不是数学，无需每个公式都去证明，对于证明过程无助于理解量子计算的公式，拿来即用即可。

## 张量积 – 重要公式

1. 不同子空间的张量积的矩阵乘，相当于各自子空间下的矩阵乘，再把结果张量积。

$$\textcircled{1} \quad (A \otimes B) (C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$$

$$\textcircled{2} \quad (A_1 \otimes B_1) (A_2 \otimes B_2) (A_3 \otimes B_3) = (A_1 A_2 A_3) \otimes (B_1 B_2 B_3)$$

$$\textcircled{3} \quad (|a\rangle\langle b|) \otimes (|c\rangle\langle d|) = (|a\rangle \otimes |c\rangle)(\langle b| \otimes \langle d|) = |ac\rangle\langle bd| \quad (\text{公式1逆向狄拉克符号写法})$$

$$\textcircled{4} \quad (A \otimes B) (|x\rangle \otimes |y\rangle) = A |x\rangle \otimes B |y\rangle$$

$$\textcircled{5} \quad (A \otimes B) (\sum_i c_i |x_i\rangle \otimes |y_i\rangle) = \sum_i c_i A |x_i\rangle \otimes B |y_i\rangle$$

$$\textcircled{6} \quad (\sum_i c_i A_i \otimes B_i) (|x\rangle \otimes |y\rangle) = \sum_i c_i A_i |x\rangle \otimes B_i |y\rangle$$

$$2. H^{\otimes n} = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x,y} (-1)^{x \cdot y} |x\rangle\langle y|$$

## 张量积 – 例子

例如，复合系统 H 由两能级系统 H1 和 H2 复合而成，

在 t1 时刻，两个系统的状态都为  $|0\rangle$ ，则复合系统的状态为  $|00\rangle$ ；

在 t2 时刻，第一个系统经过 X 门，状态变为  $|1\rangle$ ，第二个系统经过 Z 门，状态为  $|0\rangle$ ，那么复合系统的状态经过的变换用矩阵运算表示为：



因为：  $X = \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$      $Z = \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

所以：  $X \otimes Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & 0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

则有：  $X \otimes Z |00\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |10\rangle$

## 多量子比特逻辑门

不论是在经典计算还是量子计算中，两量子比特门无疑是建立量子比特之间联系的最重要桥梁。不同于经典计算中的与或非门及它们的组合，量子逻辑门要求所有的逻辑操作必须是酉变换，所以输入和输出的比特数量是相等的。

对于一个两量子比特的系统，其计算基分别为：

$$|00\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |01\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |10\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |11\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|00\rangle = |0, 0\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle$$

$$|01\rangle = |0, 1\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle$$

$$|10\rangle = |1, 0\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle$$

$$|11\rangle = |1, 1\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle$$

在本系列教程里约定：基态 $|00\rangle$ 中，左侧0对应的位为高位，右侧的0对应的位为低位。  
**(不同厂商定义可能相反，此为人为约定)**

## 两量子比特逻辑门

$|00\rangle$  变换后的量子态为  $|\varphi_0\rangle$  ,  $|01\rangle$  变换后的量子态为  $|\varphi_1\rangle$  ,  $|10\rangle$  变换后的量子态为  $|\varphi_2\rangle$  ,  $|11\rangle$  变换后的量子态为  $|\varphi_3\rangle$  , 则  $U$  变换的表达式为 :

$$U |00\rangle = |\varphi_0\rangle$$

$$U |01\rangle = |\varphi_1\rangle$$

$$U |10\rangle = |\varphi_2\rangle$$

$$U |11\rangle = |\varphi_3\rangle$$

两边分别同乘  $\langle 00|$  ,  $\langle 01|$  ,  $\langle 10|$  ,  $\langle 11|$  , 有 :

$$U |00\rangle \langle 00| = |\varphi_0\rangle \langle 00|$$

$$U |01\rangle \langle 01| = |\varphi_1\rangle \langle 01|$$

$$U |10\rangle \langle 10| = |\varphi_2\rangle \langle 10|$$

$$U |11\rangle \langle 11| = |\varphi_3\rangle \langle 11|$$

上述公式左侧相加 :

$$U |00\rangle \langle 00| + U |01\rangle \langle 01| + U |10\rangle \langle 10| + U |11\rangle \langle 11| = U I = U$$

上述公式右侧相加 :

$$|\varphi_0\rangle \langle 00| + |\varphi_1\rangle \langle 01| + |\varphi_2\rangle \langle 10| + |\varphi_3\rangle \langle 11|$$

可得 :

$$U = |\varphi_0\rangle \langle 00| + |\varphi_1\rangle \langle 01| + |\varphi_2\rangle \langle 10| + |\varphi_3\rangle \langle 11|$$

$$\textcircled{1} \quad |00\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |01\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |10\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |11\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{2} \quad |00\rangle \langle 00| + |01\rangle \langle 01| + |10\rangle \langle 10| + |11\rangle \langle 11| = I$$



## 两量子比特逻辑门 - 么正变换矩阵的计算方法

$|00\rangle$  变换后的量子态为  $|\varphi_0\rangle$  ,  $|01\rangle$  变换后的量子态为  $|\varphi_1\rangle$  ,  $|10\rangle$  变换后的量子态为  $|\varphi_2\rangle$  ,  $|11\rangle$  变换后的量子态为  $|\varphi_3\rangle$  :

$$\begin{aligned} |00\rangle &\rightarrow |\varphi_0\rangle \\ |01\rangle &\rightarrow |\varphi_1\rangle \\ |10\rangle &\rightarrow |\varphi_2\rangle \\ |11\rangle &\rightarrow |\varphi_3\rangle \end{aligned}$$

根据之前的计算 , 可得  $U$  变换的通用表达式为 :

$$U = |\varphi_0\rangle \langle 00| + |\varphi_1\rangle \langle 01| + |\varphi_2\rangle \langle 10| + |\varphi_3\rangle \langle 11|$$

两量子比特么正变换矩阵的计算方法 :

$$U = |\varphi_0\rangle \langle 00| + |\varphi_1\rangle \langle 01| + |\varphi_2\rangle \langle 10| + |\varphi_3\rangle \langle 11|$$

将每个量子态变换前的对偶向量 ( 如 :  $|00\rangle$  的对偶向量为  $\langle 00|$  ) 右乘变换后的量子态 , 然后相加。

# CNOT 门 - 矩阵计算 - 高位作为控制比特

CNOT 门作用在两量子比特上，高位为1时 (高位为控制比特)，将低位量子态翻转，量子态变换规律是：

Input		Output	
A	B	A'	B'
00⟩		00⟩	
01⟩		01⟩	
10⟩		11⟩	
11⟩		10⟩	

$$|00\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |01\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |10\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |11\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

两量子比特么正变换矩阵的计算方法：

$$U = |\varphi_0\rangle \langle 00| + |\varphi_1\rangle \langle 01| + |\varphi_2\rangle \langle 10| + |\varphi_3\rangle \langle 11|$$

根据变换矩阵计算公式，有：

$$\begin{aligned} U_{\text{CNOT}} &= |00\rangle \langle 00| + |01\rangle \langle 01| + |11\rangle \langle 10| + |10\rangle \langle 11| \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \langle 00| + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \langle 01| + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \langle 10| + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \langle 11| = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

# CNOT 门 - 矩阵计算 - 高位作为控制比特

根据公式 (倒过来看) :

$$(|a\rangle\langle b|) \otimes (|c\rangle\langle d|) = (|a\rangle \otimes |c\rangle)(\langle b| \otimes \langle d|) = |ac\rangle\langle bd|$$

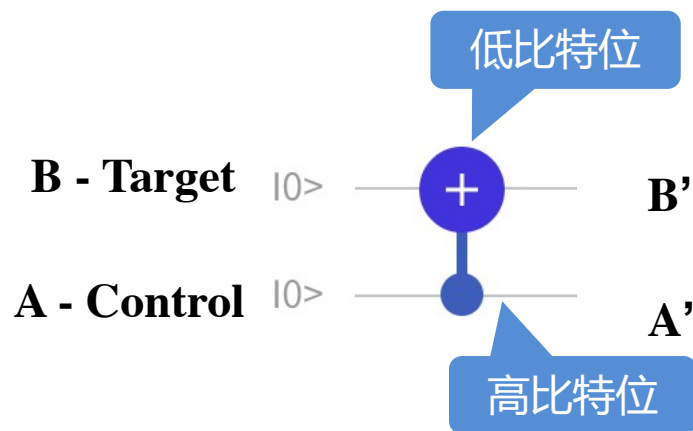
$$\begin{aligned} U_{\text{CNOT}} &= |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |11\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 11| \\ &= |0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \otimes |0\rangle\langle 1| \\ &= |0\rangle\langle 0| \otimes (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) + |1\rangle\langle 1| \otimes (|1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|) \\ &= |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes X \end{aligned}$$

## CNOT 门 - 高位作为控制比特

控制非门(Control - NOT), 通常用 CNOT 表示, 是一种普遍使用的两量子比特门。  
 如果高位作为控制比特, 则它的矩阵形式:

$$\text{CNOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

对应的 CNOT 门在线路中的显示:



约定: 量子线路从上到下为从低比特到高比特位。  
 含实点的线路对应的量子比特为控制比特 (control qubit), 含+号的线路对应的量子比特为目标比特 (target qubit)。

# CNOT 门 - 矩阵计算 - 低位作为控制比特

CNOT 门作用在两量子比特上，低位为1时 (高位为控制比特)，将高位量子态翻转，量子态变换规律是：

Input		Output	
B	A	B'	A'
00⟩		00⟩	
01⟩		11⟩	
10⟩		10⟩	
11⟩		01⟩	

$$|00\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |01\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |10\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |11\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

两量子比特么正变换矩阵的计算方法：

$$U = |\varphi_0\rangle \langle 00| + |\varphi_1\rangle \langle 01| + |\varphi_2\rangle \langle 10| + |\varphi_3\rangle \langle 11|$$

根据变换矩阵计算公式，有：

$$\begin{aligned} U_{\text{CNOT}} &= |00\rangle \langle 00| + |11\rangle \langle 01| + |10\rangle \langle 10| + |01\rangle \langle 11| \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \langle 00| + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \langle 01| + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \langle 10| + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \langle 11| = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

# CNOT 门 - 矩阵计算 - 低位作为控制比特

根据公式 (倒过来看) :

$$(|a\rangle\langle b|) \otimes (|c\rangle\langle d|) = (|a\rangle \otimes |c\rangle)(\langle b| \otimes \langle d|) = |ac\rangle\langle bd|$$

$$\begin{aligned} U_{\text{CNOT}} &= |00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10| + |01\rangle\langle 11| \\ &= |0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 1| \otimes |0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 1| \\ &= (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) \otimes |0\rangle\langle 0| + (|1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|) \otimes |1\rangle\langle 1| \\ &= I \otimes |0\rangle\langle 0| + X \otimes |1\rangle\langle 1| \end{aligned}$$

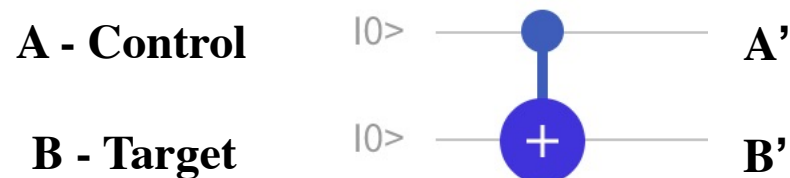


## CNOT 门 - 低位作为控制比特

如果低位作为控制比特，则它的矩阵形式：

$$\text{CNOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{CNOT CNOT} = I$$

对应的 CNOT 门在线路中的显示：



## CNOT 门 - 低位作为控制比特 - 计算例子

假设 CNOT 门分别作用于基态  $|\psi\rangle = |00\rangle$ 、 $|01\rangle$ 、 $|10\rangle$ 、 $|11\rangle$ ，得到新的量子态为：

$$|\psi'\rangle = \text{CNOT } |00\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = |00\rangle$$

$$|\psi'\rangle = \text{CNOT } |01\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |11\rangle$$

$$|\psi'\rangle = \text{CNOT } |10\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |10\rangle$$

$$|\psi'\rangle = \text{CNOT } |11\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = |01\rangle$$

$ 00\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$ 01\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
$ 10\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$ 11\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

# SWAP 门 - 矩阵计算

SWAP门可以将  $|01\rangle$  态变为  $|10\rangle$  ,  $|10\rangle$  变为  $|01\rangle$  , 量子态变换规律是 :

Input		Output	
A	B	A'	B'
$ 00\rangle$		$ 00\rangle$	
$ 01\rangle$		$ 10\rangle$	
$ 10\rangle$		$ 01\rangle$	
$ 11\rangle$		$ 11\rangle$	

$$|00\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |01\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |10\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |11\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

两量子比特么正变换矩阵的计算方法 :

$$U = |\varphi_0\rangle\langle 00| + |\varphi_1\rangle\langle 01| + |\varphi_2\rangle\langle 10| + |\varphi_3\rangle\langle 11|$$

根据变换矩阵计算公式 , 有 :

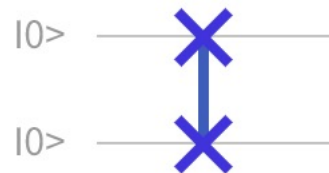
$$\begin{aligned} U_{\text{SWAP}} &= |00\rangle\langle 00| + |10\rangle\langle 01| + |01\rangle\langle 10| + |11\rangle\langle 11| \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \langle 00| + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \langle 01| + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \langle 10| + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \langle 11| = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

# SWAP 门

SWAP门的矩阵形式：

$$\text{SWAP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

对应的 CNOT 门在线路中的显示：



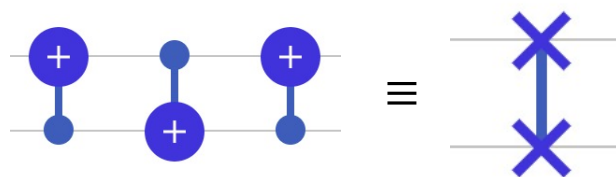
$$|\psi'\rangle = \text{SWAP} |01\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |10\rangle$$

$$|\psi'\rangle = \text{SWAP} |10\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |01\rangle$$

# SWAP 门

SWAP 门性质：

$$\text{SWAP}_{ij} = \text{CNOT}_{ij} \text{CNOT}_{ji} \text{CNOT}_{ij}$$



$$\begin{aligned} |00\rangle &\rightarrow |00\rangle \rightarrow |00\rangle \rightarrow |00\rangle \\ |01\rangle &\rightarrow |01\rangle \rightarrow |11\rangle \rightarrow |10\rangle \\ |10\rangle &\rightarrow |11\rangle \rightarrow |01\rangle \rightarrow |01\rangle \\ |11\rangle &\rightarrow |10\rangle \rightarrow |10\rangle \rightarrow |11\rangle \end{aligned}$$

低位为控制位  $\text{CNOT}_{ji} = I \otimes |0\rangle\langle 0| + X \otimes |1\rangle\langle 1|$   
 高位为控制位  $\text{CNOT}_{ij} = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes X$

$$\text{SWAP}_{ij} = (|0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes X)(I \otimes |0\rangle\langle 0| + X \otimes |1\rangle\langle 1|)(|0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes X)$$

# SWAP 门

$$\text{低位控制 CNOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{低位控制 CNOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{SWAP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

证明：

$$\begin{aligned} \text{CNOT}_{ij} \text{CNOT}_{ji} \text{CNOT}_{ij} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \text{SWAP} \end{aligned}$$



# iSWAP 门

iSWAP门的主要作用是交换两个比特的状态，并且赋予其  $\pi/2$  的相位。

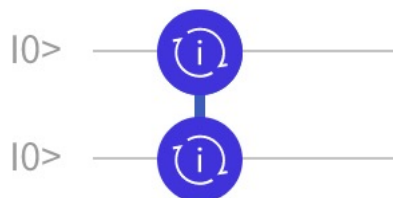
它是由  $\sigma_x \otimes \sigma_x + \sigma_y \otimes \sigma_y$  作为生成元生成，需要将矩阵  $\sigma_x \otimes \sigma_x + \sigma_y \otimes \sigma_y$  对角化，它的矩阵形式：

$$\text{iSWAP}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -i\sin(\theta) & 0 \\ 0 & i\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

通常会用一个完整的翻转，即  $\theta = \pi/2$  来指代iSWAP。当角度为iSWAP的一半，即  $\theta = \pi/4$ ，称之为SQISWAP。对于iSWAP门而言，两个比特之间的地位是对等的，不存在控制与被控制的关系。

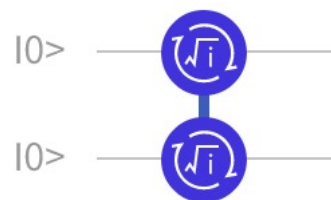
$$\text{iSWAP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

iSWAP门在线路中的显示：



$$\text{SQISWAP} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{bmatrix}$$

SQISWAP门在线路中的显示：

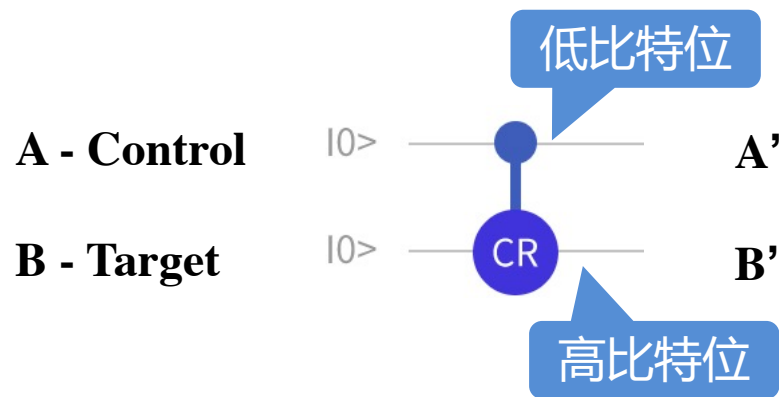


# CR 门

控制相位门(Control phase gate) 和控制非门类似，通常用 CR ( CPhase ) 表示，它的矩阵形式：

$$CR(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}$$

对应的 CR 门在线路中的显示：



含实点的线路对应的量子比特为控制比特 (control qubit)，含CR的线路对应的量子比特为目标比特 (target qubit)。

当控制比特为 $|0\rangle$ 态时，目标比特不发生改变，当控制比特为 $|1\rangle$ 态时，对目标比特执行相转变门(phase-shift gate)，其特殊之处在于，控制相位门里交换控制比特和目标比特的角色，矩阵形式不会发生任何改变。

## 三量子比特逻辑门

U变换的表达式为：

$$\begin{aligned}
 U|000\rangle &= |\varphi_0\rangle & U|001\rangle &= |\varphi_1\rangle \\
 U|010\rangle &= |\varphi_2\rangle & U|011\rangle &= |\varphi_3\rangle \\
 U|100\rangle &= |\varphi_4\rangle & U|101\rangle &= |\varphi_5\rangle \\
 U|110\rangle &= |\varphi_6\rangle & U|111\rangle &= |\varphi_7\rangle
 \end{aligned}$$

两边分别同乘  $\langle 000|, \langle 001|, \langle 010|, \langle 011|, \langle 100|, \langle 101|, \langle 110|, \langle 111|$  有：

$$\begin{aligned}
 U|000\rangle\langle 000| &= |\varphi_0\rangle\langle 000| & U|001\rangle\langle 001| &= |\varphi_0\rangle\langle 001| \\
 U|010\rangle\langle 010| &= |\varphi_2\rangle\langle 010| & U|011\rangle\langle 011| &= |\varphi_3\rangle\langle 011| \\
 U|100\rangle\langle 100| &= |\varphi_4\rangle\langle 100| & U|101\rangle\langle 101| &= |\varphi_5\rangle\langle 101| \\
 U|110\rangle\langle 110| &= |\varphi_6\rangle\langle 110| & U|111\rangle\langle 111| &= |\varphi_7\rangle\langle 111|
 \end{aligned}$$

上述公式左侧相加：

$$\begin{aligned}
 &U|000\rangle\langle 000| + U|001\rangle\langle 001| + U|010\rangle\langle 010| + U|011\rangle\langle 011| + U|100\rangle\langle 100| + U|101\rangle\langle 101| + U|110\rangle\langle 110| + U|111\rangle\langle 111| \\
 &= U(|000\rangle\langle 000| + |001\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 010| + |011\rangle\langle 011| + |100\rangle\langle 100| + |101\rangle\langle 101| + |110\rangle\langle 110| + |111\rangle\langle 111|)
 \end{aligned}$$

上述公式右侧相加：

$$|\varphi_0\rangle\langle 000| + |\varphi_1\rangle\langle 001| + |\varphi_2\rangle\langle 010| + |\varphi_3\rangle\langle 011| + |\varphi_4\rangle\langle 100| + |\varphi_5\rangle\langle 101| + |\varphi_6\rangle\langle 110| + |\varphi_7\rangle\langle 111|$$

# 三量子比特逻辑门

$$\textcircled{1} \begin{aligned} |000\rangle &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & |001\rangle &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & |010\rangle &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & |011\rangle &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & |100\rangle &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & |101\rangle &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & |110\rangle &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & |111\rangle &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} |000\rangle\langle 000| + |001\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 010| + |011\rangle\langle 011| + |100\rangle\langle 100| + |101\rangle\langle 101| + |110\rangle\langle 110| + |111\rangle\langle 111| = I$$

根据上面公式可得：

$$U = |\varphi_0\rangle\langle 000| + |\varphi_1\rangle\langle 001| + |\varphi_2\rangle\langle 010| + |\varphi_3\rangle\langle 011| + |\varphi_4\rangle\langle 100| + |\varphi_5\rangle\langle 101| + |\varphi_6\rangle\langle 110| + |\varphi_7\rangle\langle 111|$$

## 三量子比特逻辑门 - 么正变换矩阵的计算方法

量子态变换列表：

$$\begin{array}{ll}
 |000\rangle \rightarrow |\varphi_0\rangle & |001\rangle \rightarrow |\varphi_1\rangle \\
 |010\rangle \rightarrow |\varphi_2\rangle & |011\rangle \rightarrow |\varphi_3\rangle \\
 |100\rangle \rightarrow |\varphi_4\rangle & |101\rangle \rightarrow |\varphi_5\rangle \\
 |110\rangle \rightarrow |\varphi_6\rangle & |111\rangle \rightarrow |\varphi_7\rangle
 \end{array}$$

根据之前的计算，可得 U 变换的通用表达式为：

$$|\varphi_0\rangle \langle 000| + |\varphi_1\rangle \langle 001| + |\varphi_2\rangle \langle 010| + |\varphi_3\rangle \langle 011| + |\varphi_4\rangle \langle 100| + |\varphi_5\rangle \langle 101| + |\varphi_6\rangle \langle 110| + |\varphi_7\rangle \langle 111|$$

三量子比特么正变换矩阵的计算方法：

$$U = |\varphi_0\rangle \langle 000| + |\varphi_1\rangle \langle 001| + |\varphi_2\rangle \langle 010| + |\varphi_3\rangle \langle 011| + |\varphi_4\rangle \langle 100| + |\varphi_5\rangle \langle 101| + |\varphi_6\rangle \langle 110| + |\varphi_7\rangle \langle 111|$$

将每个量子态变换前的对偶向量（如： $|000\rangle$  的对偶向量为  $\langle 000|$ ）右乘变换后的量子态，然后相加。

## Toffoli ( CCNOT )- 矩阵计算

Toffoli门即CCNOT门，它涉及3个量子比特，两个控制比特，一个目标比特，两个高位都为1时 (高位为控制比特)，将低位量子态翻转，量子态变换规律是：

Input		Output	
A	B	A'	B'
000⟩		000⟩	
001⟩		001⟩	
010⟩		010⟩	
011⟩		011⟩	
100⟩		100⟩	
101⟩		101⟩	
110⟩		111⟩	
111⟩		110⟩	



# Toffoli ( CCNOT )- 矩阵计算

三量子比特么正变换矩阵的计算公式：

$$U = |\varphi_0\rangle\langle 000| + |\varphi_1\rangle\langle 001| + |\varphi_2\rangle\langle 010| + |\varphi_3\rangle\langle 011| + |\varphi_4\rangle\langle 100| + |\varphi_5\rangle\langle 101| + |\varphi_6\rangle\langle 110| + |\varphi_7\rangle\langle 111|$$

根据变换矩阵计算公式，有：

$$U_{\text{CCNOT}} = |000\rangle\langle 000| + |001\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 010| + |011\rangle\langle 011| \\ + |100\rangle\langle 100| + |101\rangle\langle 101| + |111\rangle\langle 110| + |110\rangle\langle 111|$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A	B	A'	B'
000>		000>	
001>		001>	
010>		010>	
011>		011>	
100>		100>	
101>		101>	
110>		111>	
111>		110>	

$$|000\rangle\langle 000| + |001\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 010| + |011\rangle\langle 011| + |100\rangle\langle 100| + |101\rangle\langle 101| + |110\rangle\langle 110| + |111\rangle\langle 111| = I$$

另有（证明略）：

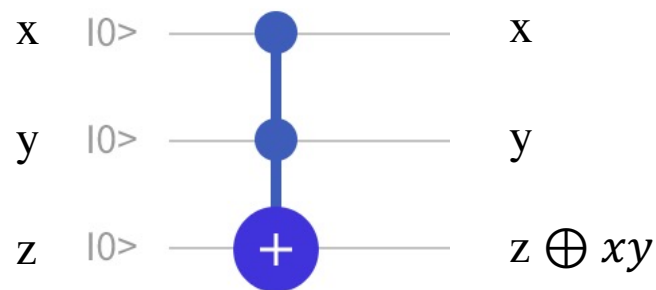
$$U_{\text{CCNOT}} = (|00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|) \otimes I + |11\rangle\langle 11| \otimes X$$

# Toffoli ( CCNOT )

Toffoli门，即CCNOT门的矩阵形式：

$$\text{Toffoli} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Toffoli门在线路中的显示：



$$(x, y, z) \rightarrow (x, y, (z \oplus xy))$$

## Toffoli ( CCNOT ) – 计算例子

假设 CCNOT 门分别作用于基态  $|\psi\rangle = |110\rangle$ 、 $|111\rangle$ ，得到新的量子态为：

$$\text{Toffoli } |110\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |111\rangle$$

$$\text{Toffoli } |111\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |110\rangle$$

## Fredkin (CSWAP) - 矩阵计算

Fredkin门即CSWAP门，它涉及3个量子比特，一个控制比特，两个目标比特，高位为1时（高位为控制比特），将两个低位量子态交换，量子态变换规律是：

Input		Output	
A	B	A'	B'
000⟩		000⟩	
001⟩		001⟩	
010⟩		010⟩	
011⟩		011⟩	
100⟩		100⟩	
101⟩		110⟩	
110⟩		101⟩	
111⟩		111⟩	

# Fredkin ( CSWAP ) - 矩阵计算

三量子比特么正变换矩阵的计算公式：

$$U = |\varphi_0\rangle\langle 000| + |\varphi_1\rangle\langle 001| + |\varphi_2\rangle\langle 010| + |\varphi_3\rangle\langle 011| + |\varphi_4\rangle\langle 100| + |\varphi_5\rangle\langle 101| + |\varphi_6\rangle\langle 110| + |\varphi_7\rangle\langle 111|$$

根据变换矩阵计算公式，有：

$$U_{\text{CSWAP}} = |000\rangle\langle 000| + |001\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 010| + |011\rangle\langle 011| \\ + |100\rangle\langle 100| + |101\rangle\langle 110| + |110\rangle\langle 101| + |111\rangle\langle 111|$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

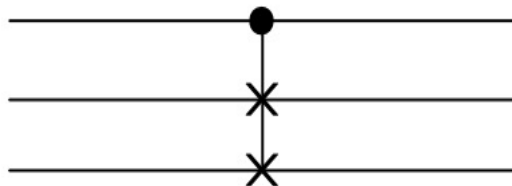
A	B	A'	B'
000>		000>	
001>		001>	
010>		010>	
011>		011>	
100>		100>	
101>		110>	
110>		101>	
111>		111>	

# Fredkin ( CSWAP )

Fredkin门的矩阵形式：

$$\text{Fredkin} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fredkin 门在线路中的显示：





## Fredkin (CSWAP) – 计算例子

假设 CSWAP 门分别作用于基态  $|\psi\rangle = |110\rangle$ 、 $|101\rangle$ ，得到新的量子态为：

$$\text{Fredkin } |110\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = |101\rangle$$

$$\text{Toffoli } |101\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |110\rangle$$



Thank

You