量子计算

—基础篇

Quantum Computing

网址：www.qubits.top

Calvin Tang

179209347@qq.com

Qubits
qubits.top

介绍

教程简介：

- 面向对象：量子计算初学者
- 依赖课程：线性代数，量子力学（非必需）

知乎专栏：
https://www.zhihu.com/column/c_1501138176371011584

Github & Gitee 地址：
https://github.com/mymagicpower/qubits
https://gitee.com/mymagicpower/qubits

*** 版权声明：**

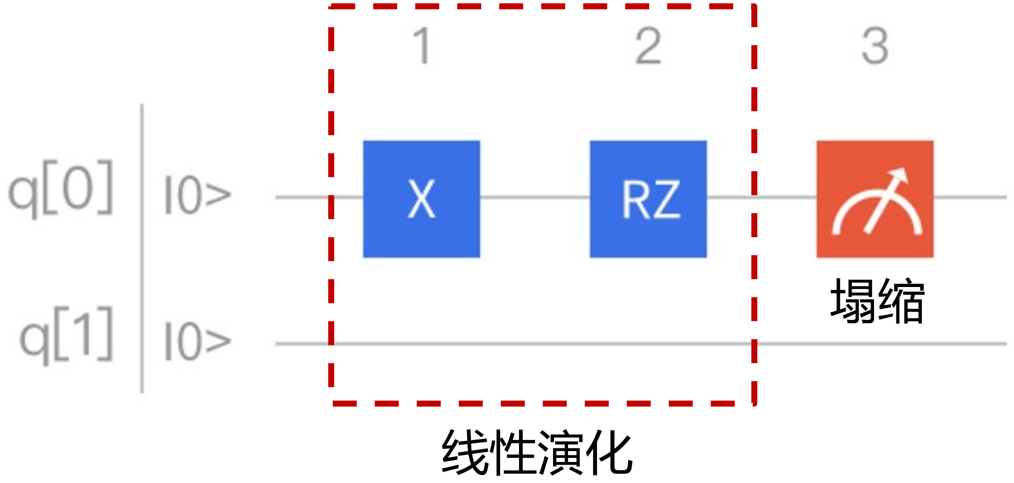
- 仅限用于个人学习
- 禁止用于任何商业用途

量子态演化过程

根据量子力学原理，量子态演化过程由两部分组成：

➢ 其一是**线性演化过程**：
如果一个物理系统没有被测量，它将按照薛定谔方程以一种确定的、线性的方式演化；

➢ 其二是**非线性的塌缩过程**：
如果对系统进行一个测量，系统将立即非线性地、随机地从初始的叠加态跃迁到正被测量的可观测量的一个本征态，这时，实验者就会感知到一个确定的观察值，即本征态相应的本征值。



测量与塌缩

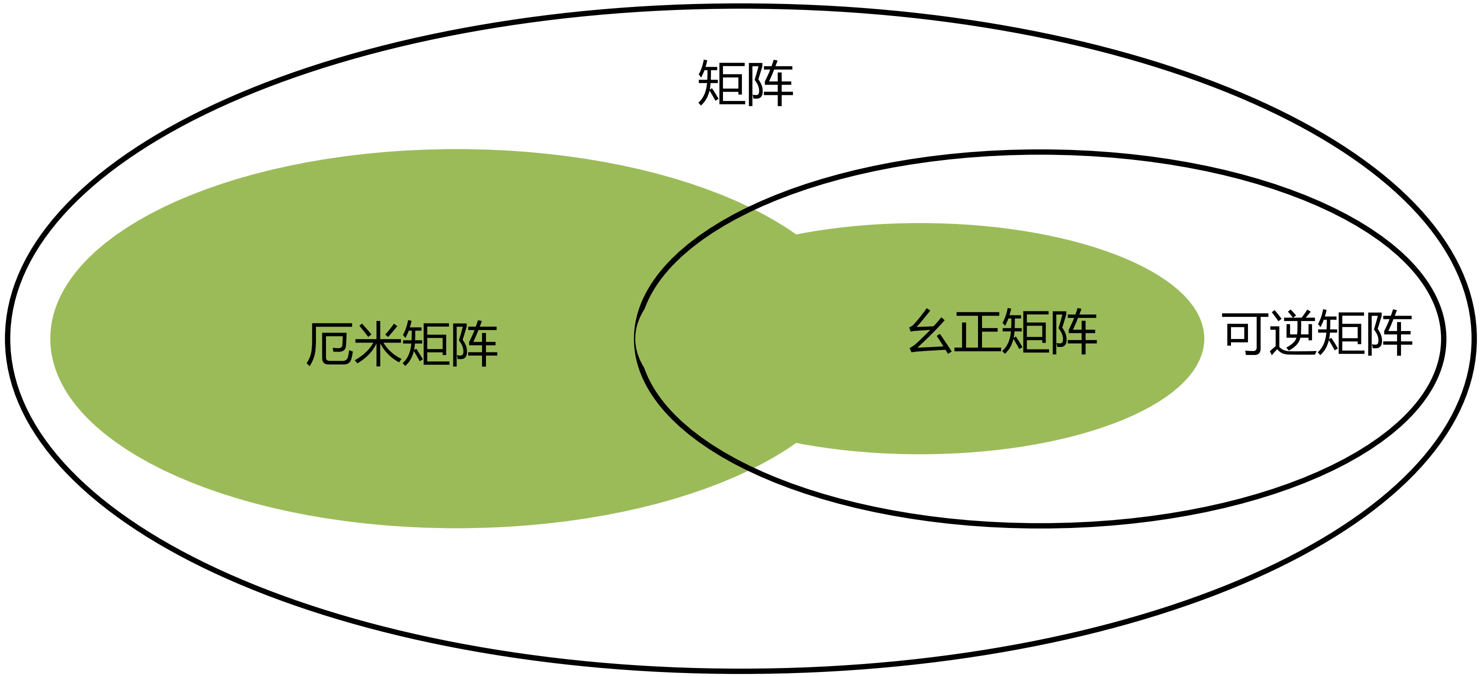
当对量子比特 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ 进行测量时，仅能得到该量子比特概率 $|\alpha|^2$ 处在 $|0\rangle$ 态，或概率 $|\beta|^2$ 处在 $|1\rangle$ 态。由于所有情况的概率总和为 1， 则有 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ 。

量子测量有很多种方式，如：

- 投影测量 (projective measurements)
- POVM 测量 (Positive Operator-Valued Measure)

当我们测量一个物理系统属性的时候，如：测量动量或者位置，我们需要指定一个实数。
每个可能的测量结果都对应一个特征值 λ，由可观测量 $|P|\psi\rangle|^2$ 描述， P 为特征值 λ 对应的特征空间上的投影。
由于向量做了归一化，测量的状态可以用特征值和特征向量来描述。

希尔伯特空间矩阵类型



* 在量子计算中，**厄米矩阵、幺正矩阵、对角阵** 都是 **正规矩阵**。

正规矩阵

在复数域上，A 是正规（ Normal ）矩阵定义：

一个复方阵是正规矩阵当且仅当它可酉相似于对角矩阵。

正规（ Normal ）矩阵重要性质，A 是C到C的线性变换，则：

- A 为正规矩阵，$AA^{\dagger} = A^{\dagger}A$；
- A 为正规矩阵，C有个单位正交基，这个基由 A 的特征向量组成；
- A 为正规矩阵，A 有个关于某个单位正交基的对角矩阵；
- 当正规矩阵 A 的全部特征值为实数时，是**厄米矩阵**；
- 当正规矩阵 A 的全部特征值的模为 1 时，是**酉矩阵(幺正矩阵)**。

《Linear Algebra Dong Right》

特征分解

特征分解（Eigen decomposition），**又称谱分解**（Spectral decomposition）是将矩阵分解为由其特征值 $\{\lambda_i\}$ 和特征向量 $\{v_i\}$ 表示的矩阵 $V = [v_1\ \ v_2\ \ \dots\ \ v_n]$ 之积的方法：

$$A = V\begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}V^{-1}$$

需要注意只有对可对角化矩阵才可以施以特征分解。特征值的集合 $\{\lambda_i\}$，也称为“谱”（Spectrum）。

因为**厄米矩阵（**表达自伴算子的矩阵是**厄米矩阵）**属于正规矩阵，根据正规矩阵的性质可知，其可以对角化。假设 A 是一个复数域正规矩阵，它的特征值为 $\{\lambda_i\}$，标准正交基为 $\{|e_i\rangle\}$，那么 A 可以分解为：

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |e_i\rangle\langle e_i|$$

标准正交基和完备性方程

标准正交基 $\{|\,e_i\rangle\}$ 满足如下条件（i, j 相同为 1，不同为0）：

$$\langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij}$$

完备性方程：

$$\sum_{i=1}^{n} |e_i\rangle\langle e_i| = I$$

令：

$$|x\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i|e_i\rangle$$

由于：

$$\langle e_j|x\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i\langle e_j|e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i\delta_{ji} = c_j \quad \text{即：} \quad c_j = \langle e_j|x\rangle$$

可得：

$$|x\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i|e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle e_i|x\rangle|e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} |e_i\rangle\langle e_i|x\rangle = \left(\sum_{i=1}^{n} |e_i\rangle\langle e_i|\right)|x\rangle$$

由于 $|x\rangle$ 是任意的，可得：

$$\sum_{i=1}^{n} |e_i\rangle\langle e_i| = I$$

标准正交基和完备性方程 — 简单验证一个特例

$|00\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$ $|01\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$ $|10\rangle = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$ $|11\rangle = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$ 是一组标准正交基

那么有：

$$|00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10| + |11\rangle\langle 11|$$

$$= \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}[1\ 0\ 0\ 0] + \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}[0\ 1\ 0\ 0] + \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}[0\ 0\ 1\ 0] + \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}[0\ 0\ 0\ 1]$$

$$= \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} = \mathrm{I}$$

投影算子

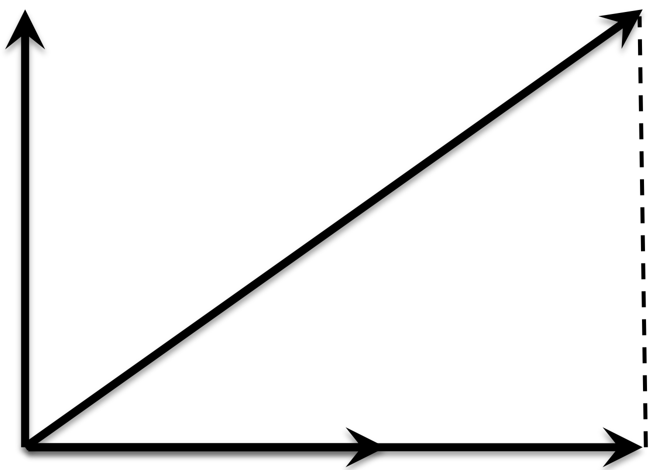
将一个向量 $|v\rangle$投影到特定方向，使用单位向量 $|\mathrm{e}_k\rangle$ 定义投影算子为：

$$P_k = |\mathrm{e}_k\rangle\langle e_k|$$

$\{ P_k = |\mathrm{e}_k\rangle\langle e_k| \}$ 满足如下性质：

- $P_k{}^2 = P_k$
- $P_k P_j = 0 \ (k \neq j)$
- $\sum_k P_k = \mathrm{I}$

投影算子



因为：$P_k|v\rangle = |e_k\rangle\langle e_k|v\rangle = c_k|e_k\rangle$

可得：　$\langle e_k|v\rangle$ 为向量内积，根据向量内积的几何意义，向量 v 在另一个向量 e_k 上的投影长度 c_k ，乘以 e_k 的长度，由于 e_k 长度为 1，所以可知，向量内积为 c_k。

也就是 $P_k|v\rangle$ 为 $|v\rangle$ 在 $|e_k\rangle$ 上的投影。

投影算子 – 例子

令：

$$①\ |e_1\rangle = H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$②\ |e_2\rangle = H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle - |1\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

则投影算子为：

$$P_1 = |e_1\rangle\langle e_1| = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}[1\ \ 1] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$$

$$P_2 = |e_2\rangle\langle e_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}[1 - 1] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}$$

完备性方程：

$$\sum_k P_k = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = I$$

正交条件：

$$P_1 P_2 = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

谱分解

假设 A 是一个正规矩阵，它的特征值为 $\{\lambda_i\}$，对应的特征向量为 $\{|e_i\rangle\}$，则 A 可以分解为：

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |e_i\rangle\langle e_i|$$

证明：

由于正规矩阵 A 存在一组特征向量标准且正交，根据完备性方程 $\sum_{i=1}^{n} |e_i\rangle\langle e_i| = \mathrm{I}$

$$A = AI = \sum_{\mathrm{i}} A|e_i\rangle\langle e_i| = \sum_{\mathrm{i}} \lambda_i |e_i\rangle\langle e_i|$$

此时，根据投影算子的定义 $P_k = |\mathrm{e}_k\rangle\langle e_k|$，复数域正规矩阵 A 可以表示为：

$$A = \sum_{i} \lambda_i P_i$$

A 作用于任何向量，其几何意义如下：

相当于该向量，投影到 A 的各特征向量上，然后再以特征值 $\{\lambda_i\}$ 为系数线性组合起来。

投影测量

投影测量(projective measurements)由一个可观测量(observable) A（矩阵）来描述。指标(index) i 表示在实验上可能发生的结果。可观测量 A 是一个待观测系统的状态空间上的自伴算子。可观测量 A 可以写成谱分解的形式：

$$A = \sum_{\mathrm{i}} \lambda_{\mathrm{i}} \boldsymbol{P}_{\mathrm{i}}$$

测量的可能结果与可观测量 A 的特征值 λ_i对应。在对状态$|\psi\rangle$ 测量之后，得到的结果 i 的概率为：

$$\mathrm{p_i} = \mathrm{p}(\lambda = \lambda_i) = \langle\psi|\boldsymbol{P}_{\mathrm{i}}|\psi\rangle$$

其中 $P_i = |\mathrm{e}_i\rangle\langle e_i|$

测量后，量子系统的最新状态为：

$$\frac{\boldsymbol{P}_{\mathrm{i}}|\psi\rangle}{\sqrt{\mathrm{p_i}}}$$

投影测量的平均值：

$$\mathrm{E}(A) = \sum_{\mathrm{i}} \lambda_{\mathrm{i}} \mathrm{p_i} = \sum_{\mathrm{i}} \lambda_{\mathrm{i}} \langle\psi|\boldsymbol{P}_{\mathrm{i}}|\psi\rangle = \langle\psi|(\sum_{\mathrm{i}} \lambda_{\mathrm{i}} \boldsymbol{P}_{\mathrm{i}})|\psi\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle$$

观测量 A 的平均值通常也记作 $\langle A\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle$

观测量 A 的标准差 $\Delta(A)$ 满足：$[\Delta(A)]^2 = \langle(A - \langle A\rangle)^2\rangle = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2$

厄米共轭算符及常用公式

给定一个线性算符 A，它的厄米共轭算符（转置复共轭）定义为：

$$A^\dagger = (A^*)^T$$

根据上述定义，可得如下常用公式：

- $(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$
- $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$
- $(c^\dagger)_{jk} = c^*{}_{kj}$
- $(cA)^\dagger = c^* A^\dagger$
- $(\sum_i a_i A_i)^\dagger = \sum_i a_i^* A_i^\dagger$
- $|x\rangle^\dagger = \langle x|$
- $\langle u|A|v\rangle = \langle A^\dagger u|v\rangle = \langle v|A^\dagger|u\rangle^*$
- $\langle e_j|A|e_k\rangle = \langle e_k|A^\dagger|e_j\rangle^*$　$\{|e_i\rangle\}$ 为标准正交基
- $(|u\rangle\langle v|)^\dagger = |v\rangle\langle u|$
- $(A|v\rangle)^\dagger = \langle v|A^\dagger$

投影测量

量子测量是由测量算子(measurement operators)的集合$\{M_i\}$来描述，这些算子可以作用在待测量系统的状态空间(state space)上。指标(index) i 表示在实验上可能发生的结果。如果测量前的量子系统处在最新状态 $|\psi\rangle$ ，那么结果发生的概率为：

$$p(i) = \langle\psi|M_i^\dagger M_i|\psi\rangle$$

测量就是将量子态 $|\psi\rangle$ 投影到另一个态 $|\alpha\rangle$ 上。获得这个态的概率是它们内积的平方 ：

$$P_\alpha = |\langle\psi|\alpha\rangle|^2$$

其它概率下会将量子态投影到它的正交态上去，即：

$$1 - P_\alpha$$

测量之后量子态就坍缩到测量到的态上。

投影测量

并且测量后的系统状态变为

$$\frac{M_i|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|M_i^\dagger M_i|\psi\rangle}}$$

由于所有可能情况的概率和为 1，即

$$\sum_i p(i) = \sum_i \langle\psi|M_i^\dagger M_i|\psi\rangle = 1$$

因此，测量算子需满足

$$\sum_i M_i^\dagger M_i = I$$

该方程被称为完备性方程(completeness equation)。

单量子比特的测量

单量子比特的测量，有两个测量算子 ：

$$M_0 = |0\rangle\langle 0|$$

$$M_1 = |1\rangle\langle 1|$$

两个测量算子都是自伴的（厄米矩阵），即：

$$M_0^\dagger = M_0 \quad M_1^\dagger = M_1$$

且 $M_0^2 = M_0 \quad M_1^2 = M_1$

因此该测量算子满足完备性方程：

$$M_0^\dagger M_0 + M_1^\dagger M_1 = M_0 + M_1 = I$$

设系统被测量前的状态是：

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

测量结果为 0 的概率为：

$$p(0) = \langle\psi|M_0^\dagger M_0|\psi\rangle = \langle\psi|M_0|\psi\rangle = |\alpha|^2$$

测量后的状态为：

$$\frac{M_0|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|M_0^\dagger M_0|\psi\rangle}} = \frac{M_0|\psi\rangle}{|\alpha|} = \frac{\alpha}{|\alpha|}|0\rangle$$

测量结果为 1 的概率为：

$$p(1) = \langle\psi|M_1^\dagger M_1|\psi\rangle = \langle\psi|M_1|\psi\rangle = |\beta|^2$$

测量后的状态为

$$\frac{M_1|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|M_1^\dagger M_1|\psi\rangle}} = \frac{M_1|\psi\rangle}{|\beta|} = \frac{\beta}{|\beta|}|1\rangle$$

单量子比特的测量

测量结果为 $|0\rangle$ 的概率，证明：

$$
\begin{aligned}
p(0) &= \langle\psi|M_0^\dagger M_0|\psi\rangle = \langle\psi|M_0|\psi\rangle = \langle\psi||0\rangle\langle 0||\psi\rangle \\
&= \langle\psi|0\rangle\langle 0|\psi\rangle \\
&= \begin{bmatrix}\overline{\alpha} & \overline{\beta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix} \\
&= \overline{\alpha}\,\alpha \\
&= |\alpha|^2
\end{aligned}
$$

测量结果为 $|1\rangle$ 的概率，证明：

$$
\begin{aligned}
p(1) &= \langle\psi|M_1^\dagger M_1|\psi\rangle = \langle\psi|M_1|\psi\rangle = \langle\psi||1\rangle\langle 1||\psi\rangle \\
&= \langle\psi|1\rangle\langle 1|\psi\rangle \\
&= \begin{bmatrix}\overline{\alpha} & \overline{\beta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix} \\
&= \overline{\beta}\,\beta \\
&= |\beta|^2
\end{aligned}
$$

量子线路与测量操作

在真实的量子计算机上，最后要对量子系统末态进行测量操作，才能得到末态的信息，因此也把测量操作作为量子线路的一部分，测量操作有时也称为测量门。测量背后的原理就是之前讲到的投影测量。

它表示对该量子线路代表的量子比特进行测量操作。

在计算基 $|0\rangle$ 、$|1\rangle$ 下，测量操作对应的矩阵形式为：

$$M_0 = |0\rangle\langle 0| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = |1\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

测量操作：单量子比特量子线路测量

一个简单的单量子比特量子线路：

初态为 $|0\rangle$ ，首先经过一个H门，演化的到新的态：

$$|\psi\rangle = H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right)$$

$$p(0) = \langle\psi|M_0^{\dagger} M_0|\psi\rangle = \langle\psi|M_0|\psi\rangle = |\alpha|^2$$

$$p(1) = \langle\psi|M_1^{\dagger} M_1|\psi\rangle = \langle\psi|M_1|\psi\rangle = |\beta|^2$$

测量结果为 0 的概率为：

$$p(0) = \langle\psi|M_0^{\dagger} M_0|\psi\rangle = \langle\psi|M_0|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}$$

测量后的状态为：

$$|\psi'\rangle = \frac{M_0|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|M_0^{\dagger} M_0|\psi\rangle}} = \frac{M_0|\psi\rangle}{|\alpha|} = \frac{\alpha}{|\alpha|}|0\rangle = |0\rangle$$

测量结果为 1 的概率为：

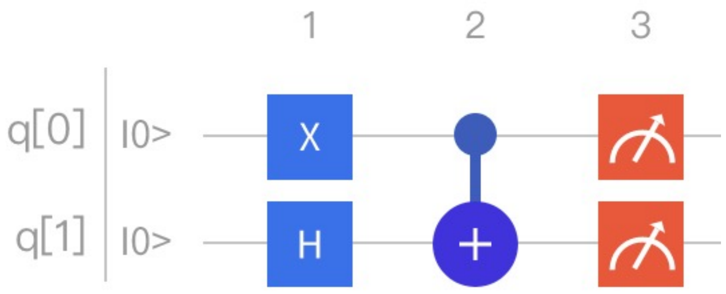
$$p(1) = \langle\psi|M_1^{\dagger} M_1|\psi\rangle = \langle\psi|M_1|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}$$

测量后的状态为：

$$|\psi'\rangle = \frac{M_1|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|M_1^{\dagger} M_1|\psi\rangle}} = \frac{M_1|\psi\rangle}{|\beta|} = \frac{\beta}{|\beta|}|1\rangle = |1\rangle$$

测量操作：两量子比特量子线路测量

两量子比特量子线路：



该系统的复合量子态为$|00\rangle$:

$$|0\rangle \otimes |0\rangle = |0\,,0\rangle = |00\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\\0\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

系统的演化过程：

T1时刻，同时分别经过 H门 和 X门

T2时刻，经过CNOT门

T3时刻，进行整体测量操作。

矩阵运算过程：

系统初始态： $|\psi_0\rangle = |00\rangle$

T1时刻，同时分别经过 H门 和 X门，演化为：

$$|\psi_1\rangle = [H \otimes X]\,|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}|00\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\1 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & -1\\1 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}$$

T2时刻，经过CNOT门，演化为：

$$|\psi_2\rangle = CNOT\,|\psi_1\rangle = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

测量操作：两量子比特量子线路测量

T3时刻，进行整体测量操作：

1. 测量操作$M_{00} = |00\rangle\langle 00|$ ，则得到投影到计算基 $|00\rangle$ 下的概率为：

$$p(00) = \langle\psi_2|M_{00}^{\dagger}\, M_{00}|\psi_2\rangle = \langle\psi_2|M_{00}|\psi_2\rangle$$
$$=\langle\psi_2|[|00\rangle\langle 00|]|\psi_2\rangle$$
$$= [0\ \tfrac{1}{\sqrt{2}}\ \ 0\ \tfrac{1}{\sqrt{2}}]\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$
$$= 0$$

根据测量，由于 $p(00) = 0$，可知测量后，量子态不可能塌缩在基态 $|00\rangle$ 上面。

2. 使用测量操作$M_{01} = |01\rangle\langle 01|$ ，则得到投影到计算基 $|01>$ 下的概率为：

$$p(01) = \langle\psi_2|M_{01}^{\dagger}\, M_{01}|\psi_2\rangle = \langle\psi_2|M_{01}|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}$$

得到新的量子态为：

$$|\psi_3\rangle = \frac{M_{01}|\psi_2\rangle}{\sqrt{p(01)}} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix} = |01\rangle$$

3. 使用测量操作$M_{10} = |10\rangle\langle 10|$，则得到投影到计算基 $|10>$ 下的概率为：

$$p(10) = \langle\psi_2|M_{10}^{\dagger}\, M_{10}|\psi_2\rangle = \langle\psi_2|M_{10}|\psi_2\rangle = 0$$

根据测量，由于 $p(10) = 0$，可知测量后，量子态不可能塌缩在基态 $|00\rangle$ 上面。

测量操作：两量子比特量子线路测量

4. 使用测量操作$M_{11} = |11\rangle\langle 11|$ ，则得到投影到计算基 $|11\rangle$ 下的概率为：

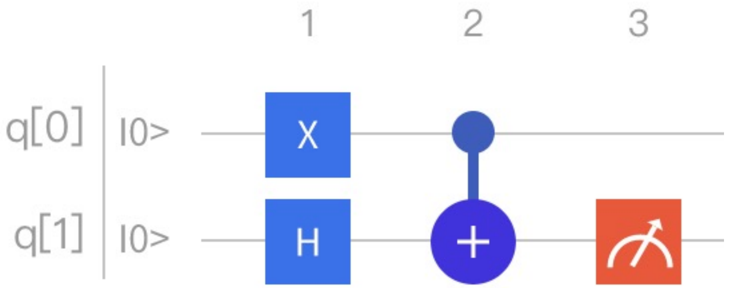
$$p(11) = \langle\psi_2|M_{11}^{\dagger}\ M_{11}|\psi_2\rangle = \langle\psi_2|M_{11}|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}$$

对量子态 $|\psi_2\rangle$ 测量后，得到新的量子态为：

$$|\psi_3\rangle = \frac{M_{11}|\psi_2\rangle}{\sqrt{p(11)}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |11\rangle$$

测量操作：两量子比特量子线路测量

对高比特位 q[1] 进行测量：



此时测量对应的测量操作矩阵为：

$M_1^0 = \sum_{i\in\{0,1\}} |0i\rangle\langle 0i|$ $M_1^1 = \sum_{i\in\{0,1\}} |1i\rangle\langle 1i|$

因此通过测量，得到测量结果 0 和 1 概率为：

$$p_1(0) = \langle\psi_2|M_1^0|\psi_2\rangle = [0\ \tfrac{1}{\sqrt{2}}\ 0\ \tfrac{1}{\sqrt{2}}]\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} = \frac{1}{2}$$

$$p_1(1) = \langle\psi_2|M_1^1|\psi_2\rangle = [0\ \tfrac{1}{\sqrt{2}}\ 0\ \tfrac{1}{\sqrt{2}}]\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} = \frac{1}{2}$$

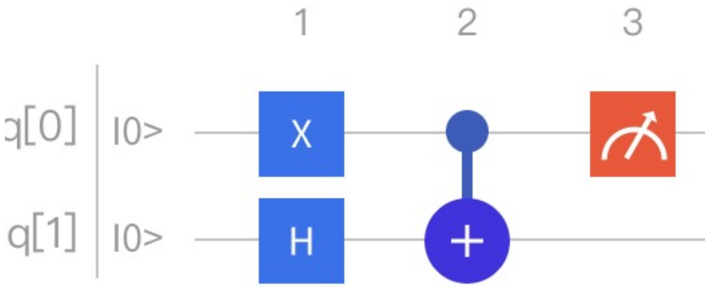
测量后，量子系统的状态分别变为：

$$|\psi_3\rangle = \frac{M_1^0|\psi_2\rangle}{\sqrt{p_1(0)}} = |01\rangle$$

$$|\psi_3\rangle = \frac{M_1^1|\psi_2\rangle}{\sqrt{p_1(1)}} = |11\rangle$$

测量操作：两量子比特量子线路测量

对低比特位 q[0] 进行测量：



此时测量对应的测量操作矩阵为：

$$M_0^0 = \sum_{i\in\{0,1\}} |i0\rangle\langle i0| \qquad M_0^1 = \sum_{i\in\{0,1\}} |i1\rangle\langle i1|$$

因此通过测量，得到测量结果 0 和 1 概率为：

$$p_0(0) = \langle\psi_2|M_0^0|\psi_2\rangle = \begin{bmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} = 0$$

$$p_0(1) = \langle\psi_2|M_0^1|\psi_2\rangle = \begin{bmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} = 1$$

测量后，量子系统的状态演化为量子状态：

$$|\psi_3\rangle = \frac{M_0^1|\psi_2\rangle}{\sqrt{p_0(1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

Qubits
qubits.top

Thank You