量子计算
—基础篇

Quantum Computer

网址：www.qubits.top

Calvin Tang

179209347@qq.com

介绍

教程简介：

- 面向对象：量子计算初学者
- 依赖课程：线性代数，解析几何，量子力学（非必需）

知乎专栏：
https://www.zhihu.com/column/c_1501138176371011584

Github & Gitee 地址：
https://github.com/mymagicpower/qubits
https://gitee.com/mymagicpower/qubits

*** 版权声明：**

- 仅限用于个人学习，或者大学授课使用
  （大学授课如需ppt 原件，请用学校邮箱联系我获取）
- 禁止用于任何商业用途

单量子比特

一个量子比特$|\psi\rangle$可以同时处于 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 两个状态，可用线性代数中的线性组合(linear combination)来表示为：

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta|1\rangle$$

$|\psi\rangle$ 狄拉克符号 ket

在量在此处键入公式。子力学中常称量子比特$|\psi\rangle$处于 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 的叠加态(superpositions)，其中α、β都是复数(complex number)，满足归一化条件 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$。
两维复向量空间的一组标准正交基(orthonormal basis) $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 组成一组计算基(computational basis)。

$$|0\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \qquad |1\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

量子比特的信息不能直接获取，而是通过测量来获取量子比特的可观测的信息。可观测量在量子理论中由自伴算子(self-adjoint operators)来表征，自伴的有时也称 Hermitian。量子理论中的可观测量与经典力学中的动力学量，如位置、动量和角动量等对应，而系统的其他特征，如质量或电荷，并不在可观测量的类别之中，它是作为参数被引入到系统的哈密顿量(Hamiltonian)。

狄拉克符号

$$\langle v| = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix}^{\dagger} = [\overline{v_1} \;\; \overline{v_2} \;\; \dots \;\; \overline{v_n}]$$

$$|w\rangle = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_m \end{bmatrix}$$

$$|w\rangle\langle v| = \begin{bmatrix} w_1\overline{v_1} & \cdots & w_1\overline{v_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_m\overline{v_1} & \cdots & w_m\overline{v_n} \end{bmatrix}$$

$$\langle v|w\rangle = \langle v||w\rangle = (\langle v|)(|w\rangle)$$

当 $n = m$ 时：

$$\langle v|w\rangle = \langle v\,,w\rangle = \overline{v_1}w_1 + \overline{v_2}w_2 + \dots + \overline{v_n}w_n$$

ν的长度为：

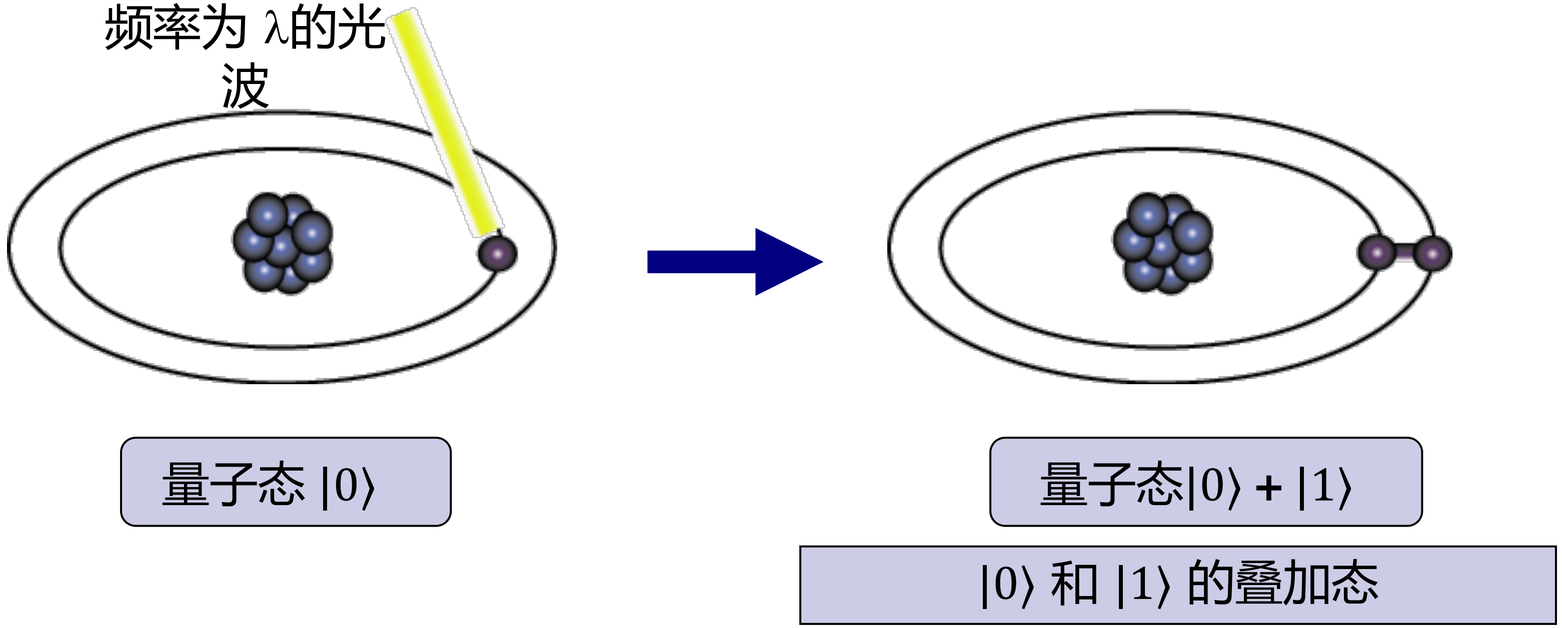
$$\|\nu\| = \sqrt{<\nu,\nu>}$$

叠加态

单量子比特可以制备成叠加态：

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta|1\rangle$$

其中的 α 和 β 是复数，并且 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$。
α ，β分别代表了从叠加态塌缩到 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 态的概率。 α， β被称为概率振幅。



单量子比特

由于一个量子比特 $|\psi\rangle$ 线性代数中的线性组合来表示为：

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta|1\rangle \qquad |0\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \quad |1\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

且 α、β 都是复数，那么有：

$\alpha = \mathrm{a} + \mathrm{b}\,i = r_1(\cos(\theta_1) + i\ \sin(\theta_1))$
$\beta = \mathrm{c} + \mathrm{d}\,i = r_2(\cos(\theta_2) + i\ \sin(\theta_2))$

由于 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 两个状态正交（线性无关），那么我们可以定义两个垂直关系的坐标轴 j, k 分别表示$|0\rangle$ 和 $|1\rangle$。

那么有：

$$\begin{aligned}|\psi\rangle &= \alpha\,|0\rangle + \beta|1\rangle \\ &= \alpha\,\overrightarrow{j} + \beta\,\overrightarrow{k} \\ &= (\mathrm{a} + \mathrm{b}\,i)\,\overrightarrow{j} + (\mathrm{c} + \mathrm{d}\,i)\,\overrightarrow{k}\end{aligned}$$

单量子态布洛赫球 (Bloch Sphere) 几何表示

- 单量子态的几何（两个基向量的线性组合）表示：

$$|\psi\rangle = c_0\,|0\rangle + c_1\,|1\rangle$$

$$c_0 = r_0(\cos(\varphi_0) + i\ \sin(\varphi_0)) = r_0\, e^{i\varphi_0}$$

$$c_1 = r_1(\cos(\varphi_1) + i\ \sin(\varphi_1)) = r_1\, e^{i\varphi_1}$$

$|0\rangle$ 代表 $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ $|1\rangle$ 代表 $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

- 4个实数（两个实质上的自由度）：

$$|\psi\rangle = r_0 e^{i\varphi_0}|0\rangle + r_1 e^{i\varphi_1}|1\rangle$$

- 为什么实质上只有2个自由度呢？

$$|\psi\rangle = r_0 e^{i\varphi_0}|0\rangle + r_1 e^{i\varphi_1}|1\rangle = e^{i\varphi_0}\left(r_0|0\rangle + r_1 e^{i(\varphi_1-\varphi_0)}|1\rangle \right)$$

由于$e^{i\varphi_0}$（共同相位）对 $|0\rangle$、 $|1\rangle$影响都一样，即不改变量子态，且在实验上无法测量，所以公式简化为：

$$|\psi\rangle = r_0|0\rangle + r_1 e^{i(\varphi_1-\varphi_0)}|1\rangle = r_0|0\rangle + r_1 e^{i\varphi}|1\rangle$$

并且由于 $|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$

$r_0 = \cos(\theta)$

$r_1 = \sin(\theta)$

* 注意 $|e^{i\varphi_1}|^2$是复数模运算

$$|r_0 e^{i\varphi_0}|^2 + |r_1 e^{i\varphi_1}|^2 = r_0^2\,|e^{i\varphi_0}|^2 + r_0^2\,|e^{i\varphi_1}|^2 = r_0^2 + r_1^2 = 1$$

最终可得： $|\psi\rangle = r_0|0\rangle + r_1 e^{i\varphi}|1\rangle = \cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)\, e^{i\varphi}\,|1\rangle$

* 即得到布洛赫球公式

单量子态布洛赫球 (Bloch Sphere) 几何表示

$|\psi\rangle = \cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)\, e^{i\varphi}\, |1\rangle$

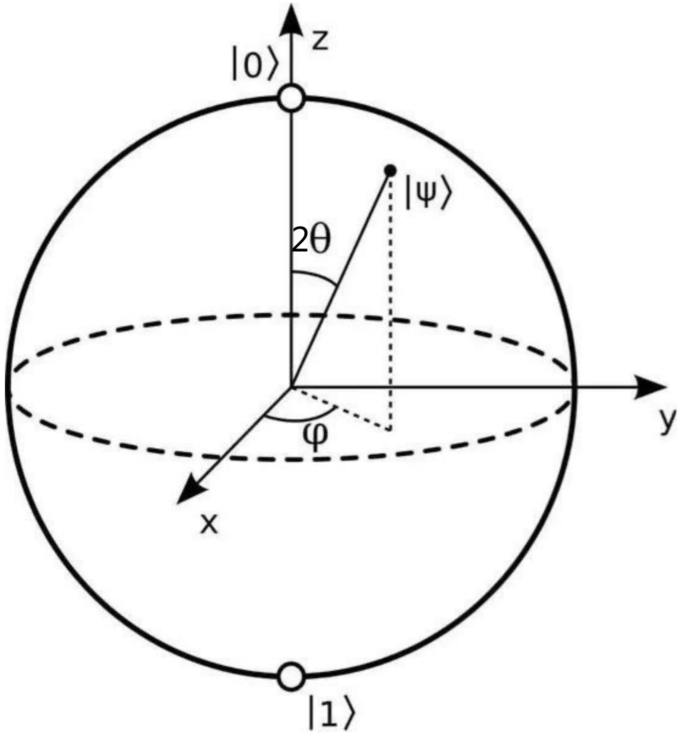
用2θ代替θ， 且$0 \le \theta \le \pi/2$, $0 \le \varphi < 2\pi$

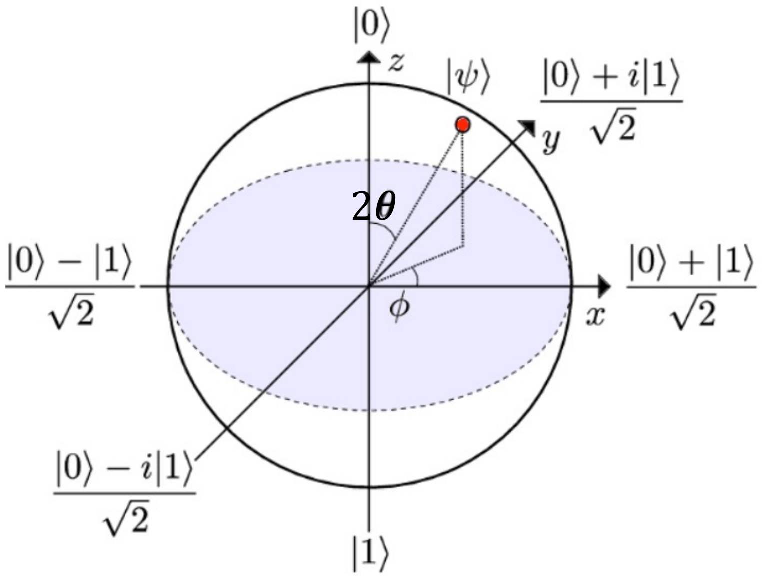
可得：

$x = \sin 2\theta \cos\varphi$

$y = \sin 2\theta \sin\varphi$

$z = \cos 2\theta$





多量子比特

以两个量子比特为例，对比两个经典比特的四个可能状态：00、01、10、11，相应的两个量子比特，有四个基： $|00\rangle$ 、 $|01\rangle$ 、$|10\rangle$、$|11\rangle$。于是一个双量子比特可以处于如下态：

$$|\psi> \ = \alpha_{00}\,|00\rangle + \alpha_{01}\,|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle$$

归一化条件为： $\sum_{x\in\{0,1\}^2} |\alpha_x|^2 = 1$

对于更多的量子比特(n量子比特)，可以看出，其基态可以表示为$|x_1\ x_2\ \ldots\ x_n>$，其量子状态由2^n个幅度来确定。

塌缩

根据量子力学标准的塌缩形式，运动定律由两部分组成：

- 其一是线性动力学：
  如果一个物理系统没有被测量，它将按照薛定谔方程以一种确定的、线性的方式演化；
- 其二是非线性的塌缩动力学：
  如果对系统进行一个测量，系统将立即非线性地、随机地从初始的叠加态跃迁到正被测量的可观察量的一个本征态，这时，实验者就会感知到一个确定的观察值，即本征态相应的本征值，这也就是20世纪30年代初狄拉克（P.Dirac） - 冯·诺依曼（John von Neumann）为了统一海森堡（W.Heisenberg）和薛定谔（W.Schrodinger）的理论工作与玻恩（M.Born）的几率解释而首先提出的本征态 - 本征值关联。

在量子力学中测量(measure)会导致坍塌，即是说测量会影响到原来的量子状态， 因此量子状态的全部信息不可能通过一次测量得到。当对量子比特$|\psi\rangle$进行测量时，仅能得到该量子比特概率 $|\alpha|^2$ 处在$|0\rangle$ 态，或概率$|\beta|^2$处在 $|1\rangle$ 态。由于所有情况的概率和为 1， 则有 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 =1$ 。

测量

量子测量是由测量算子(measurement operators)的集合{M_i}来描述，这些算子可以作用在待测量系统的状态空间(state space)上。指标(index) i 表示在实验上可能发生的结果。如果测量前的量子系统处在最新状态|ψ⟩，那么结果发生的概率为：

$$p(i) = <\psi|M_i^\dagger M_i|\psi>$$

测量就是将量子态 |ψ⟩ 投影到另一个态 |α⟩ 上。
获得这个态的概率是它们内积的平方 ：

$$P_\alpha = |\langle\psi|\alpha\rangle|^2$$

其它概率下会将量子态投影到它的正交态上去，即：

$$P_{\alpha\perp} = 1 - P_\alpha$$

测量之后量子态就坍缩到测量到的态上。

并且测量后的系统状态变为

$$\frac{M_i|\psi>}{\sqrt{<\psi|M_i^\dagger M_i|\psi>}}$$

由于所有可能情况的概率和为 1，即

$$\sum_i p(i) = \sum_i <\psi|M_i^\dagger M_i|\psi> \ = 1$$

因此，测量算子需满足

$$\sum_i M_i^\dagger M_i = I$$

该方程被称为完备性方程(completeness equation)。

密度矩阵

对于一个纯态而言，密度矩阵的形式是:

$$\rho = |\psi><\psi|$$

而对于一个混合态而言，密度矩阵的形式是:

$$\rho = \sum_i P_i |\psi_i><\psi_i|$$

对于每一个纯态分量，连接球心和球面上的点，可以形成一个矢量。根据概率列表，对所有的纯态矢量进行加权平均，即可得到混合态的矢量，即得到了混合态对应的点。
混合态是布洛赫球内部的点，根据混合的程度不同，矢量的长度也不同。最大混合态是球心，它意味着这里不存在任何量子叠加性。

密度矩阵有以下的性质:

- ✓ 对于一个两能级体系表述的态，不论是纯的还是混合的，都可以用密度矩阵 ρ 表示 。ρ = ρ2当且仅当量子态时纯态时成立。
- ✓ ρ 对角线上的分量表示整个系统如果经历一次测量，那么可以得到这个态的概率。

密度矩阵

1. 对于量子态：

$|\psi> \ = \alpha\,|0> + \beta\,|1>$

其密度矩阵为：

$$\rho = |\,\psi >< \psi| = \begin{bmatrix}\alpha \\ \beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\alpha} & \bar{\beta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha\bar{\alpha} & \alpha\bar{\beta} \\ \beta\bar{\alpha} & \beta\bar{\beta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}|\alpha|^2 & \alpha\bar{\beta} \\ \beta\bar{\alpha} & |\beta|^2\end{bmatrix}$$

矩阵迹为：$\mathrm{tr}(\rho) = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

2. 而对于如下量子态表达式：

$$|\psi > \ = r_0|0 > \ + r_1 e^{i\varphi}|1 > = \cos(\theta)\,|0 > + \sin(\theta)\,e^{i\varphi}|1 >$$

其密度矩阵为：

$$\rho = |\,\psi >< \psi| = \begin{bmatrix} r_0^2 & r_0 r_1 e^{-i\varphi} \\ r_0 r_1 e^{i\varphi} & r_1^2 \end{bmatrix}$$

Qubit
qubits.top

Thank You