

量子计算

—数学基础

Quantum Computing

网址: www.qubits.top

作者: Calvin Tang

邮箱: 179209347@qq.com

介绍

教程简介：

- 面向对象：量子计算初学者
- 依赖课程：线性代数，解析几何，量子力学（非必需）

知乎专栏：

https://www.zhihu.com/column/c_1501138176371011584

Github & Gitee 地址：

<https://github.com/mymagicpower/qubits>

<https://gitee.com/mymagicpower/qubits>

* 版权声明：

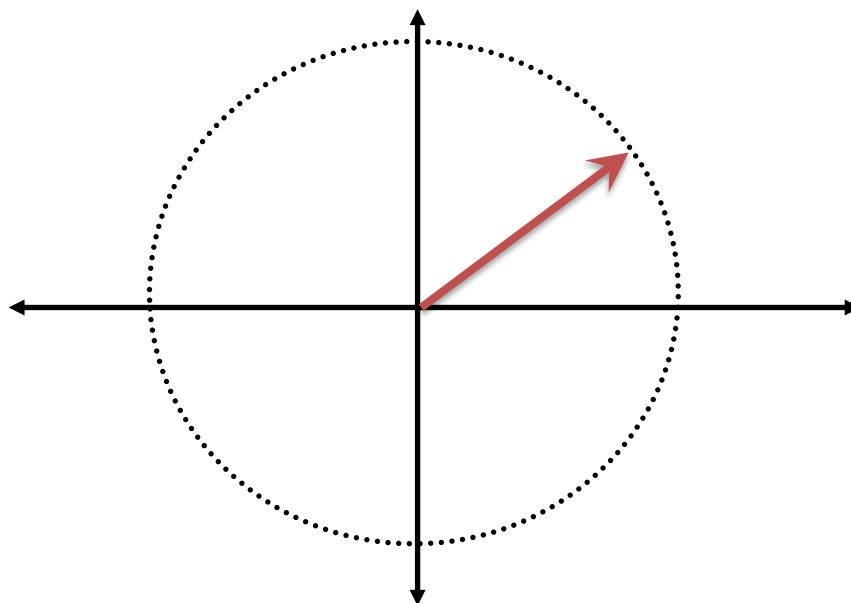
- 仅限用于个人学习，或者大学授课使用
- 禁止用于任何商业用途

H (Hadamard) 门

Hadamard 门是一种可以将基态变为叠加态的量子逻辑门，简称H门。

$$\text{矩阵形式 } H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

当 α 和 β 都为实数时，且长度归一化，则量子态位于单位圆上：



H (Hadamard) 门 – α 和 β 都为实数

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & \sin(\frac{\pi}{4}) \\ \sin(\frac{\pi}{4}) & -\cos(\frac{\pi}{4}) \end{bmatrix}$$

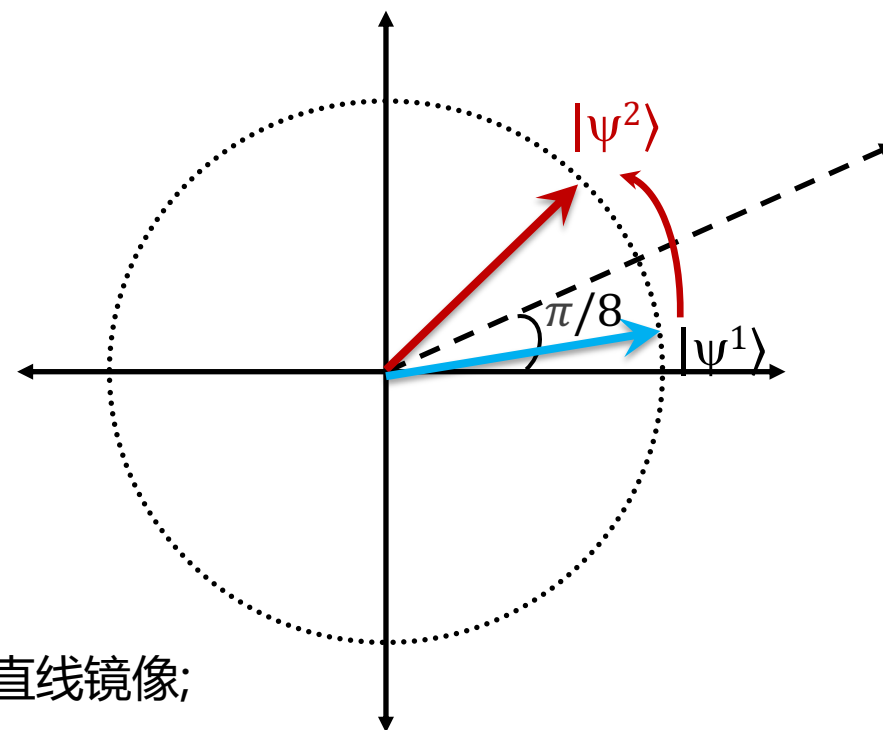
观察发现，符合镜像公式：

$$Q = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{bmatrix}$$

* 关于通过原点、方向和水平轴夹角为 $\theta/2$ 直线镜像;

可知：

H门操作，相当于关于通过原点、方向和水平轴夹角为 $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{8}$ 直线镜像;



H (Hadamard) 门 - α 和 β 都为实数 - 举例

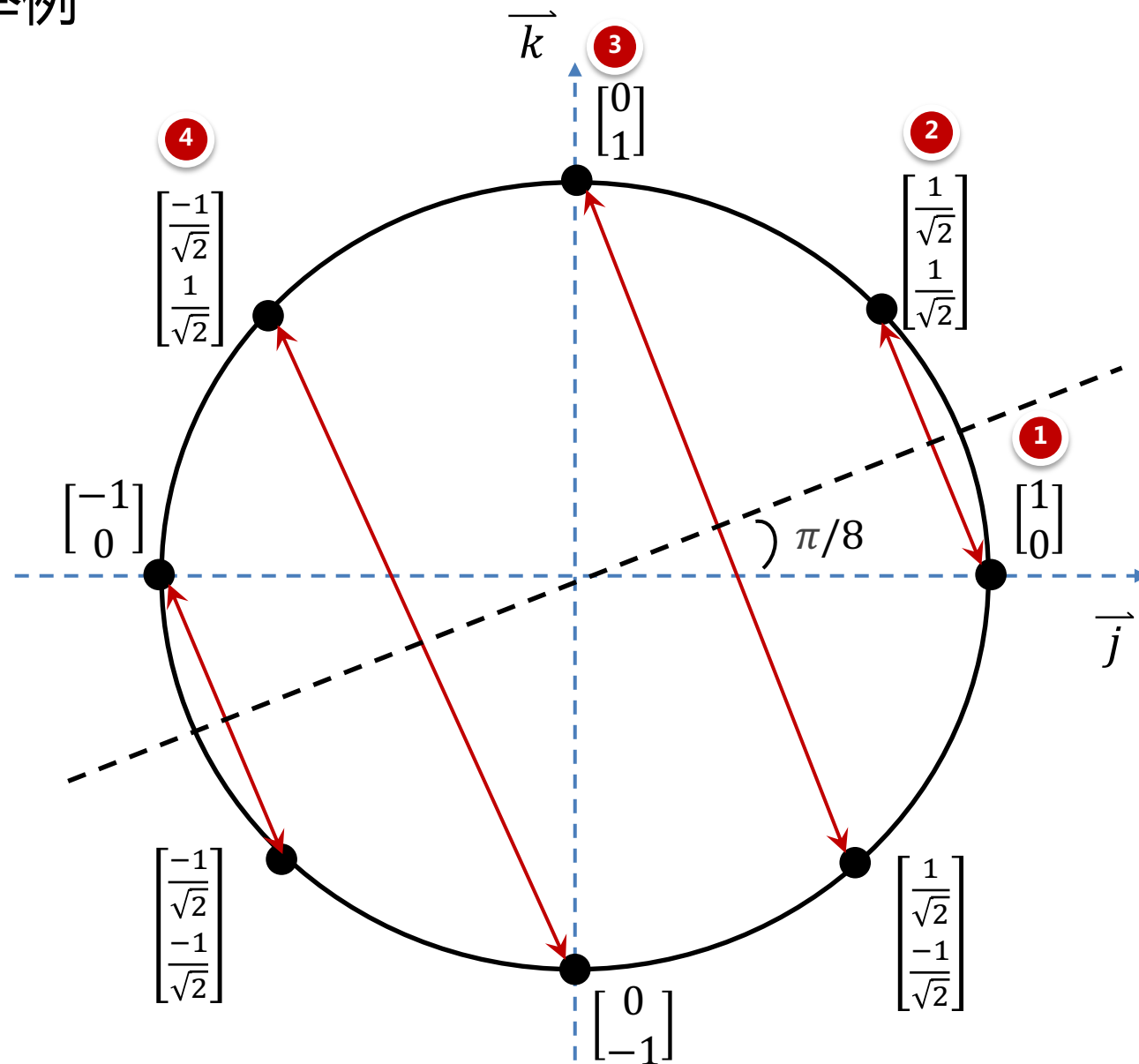
$$\textcircled{1} \quad H \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{2} \quad H \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{3} \quad H \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{4} \quad H \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

...



参考来源: Quantum Computing for Computer Scientists

H (Hadamard) 门 - α 和 β 都为复数

单量子比特的**复向量**表示：

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + b i \\ c + d i \end{bmatrix}$$

(α 、 β 都是复数)

单量子比特的**实向量**表示：

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

所有的门，都是希尔伯特空间中的算子，即算子矩阵中所有的元素都是复数（其中的实数应理解为虚部为 0）。

那么 $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ **实向量空间**中的矩阵表示（看做 2 * 2 分块矩阵）：

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$a + b i$ 算子其矩阵表示：

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

H (Hadamard) 门 - α 和 β 都为复数 - 举例

单量子比特的**复向量**表示：

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + b i \\ c + d i \end{bmatrix}$$

H门作用于量子态：

$$H |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha - \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (a + c) + (b + d)i \\ (a - c) + (b - d)i \end{bmatrix}$$

单量子比特的**实向量**表示：

$$\begin{bmatrix} a + b i \\ c + d i \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

H门作用于量子态：

$$H |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} a + c \\ b + d \\ a - c \\ b - d \end{bmatrix} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (a + c) + (b + d)i \\ (a - c) + (b - d)i \end{bmatrix}$$

Pauli-X 门

Pauli-X 门矩阵形式为泡利矩阵 σ_x , 即 :

$$X = \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & \sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & -\cos(\frac{\pi}{2}) \end{bmatrix}$$

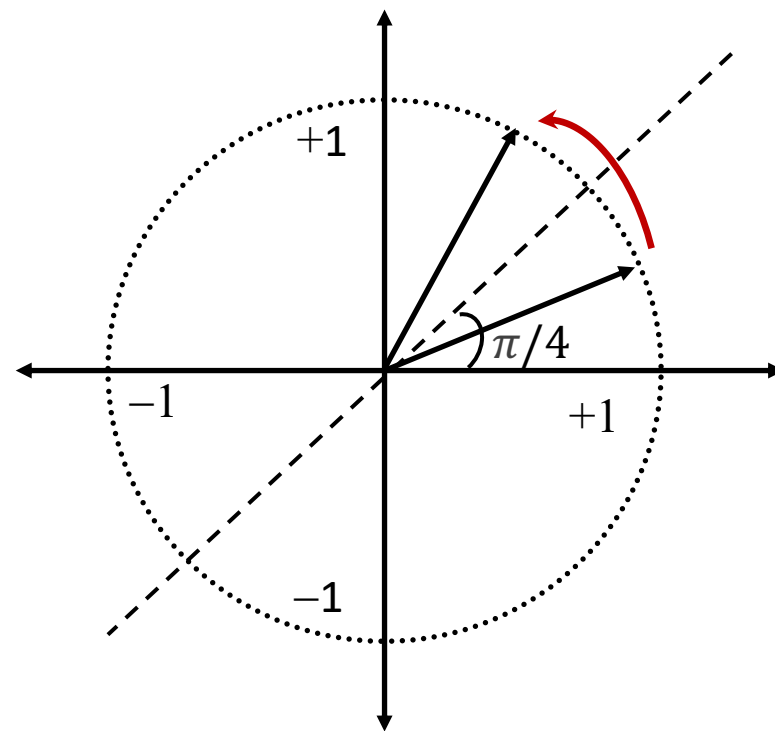
观察发现 , 符合镜像公式 :

$$Q = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{bmatrix}$$

* 关于通过原点、方向和水平轴夹角为 $\theta/2$ 直线镜像;

可知 :

X 门操作 , 相当于关于通过原点、方向和水平轴夹角为 $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4}$ 直线镜像;



Pauli-X 门 - α 和 β 都为实数，且归一化 - 举例

X 门作用在基态：

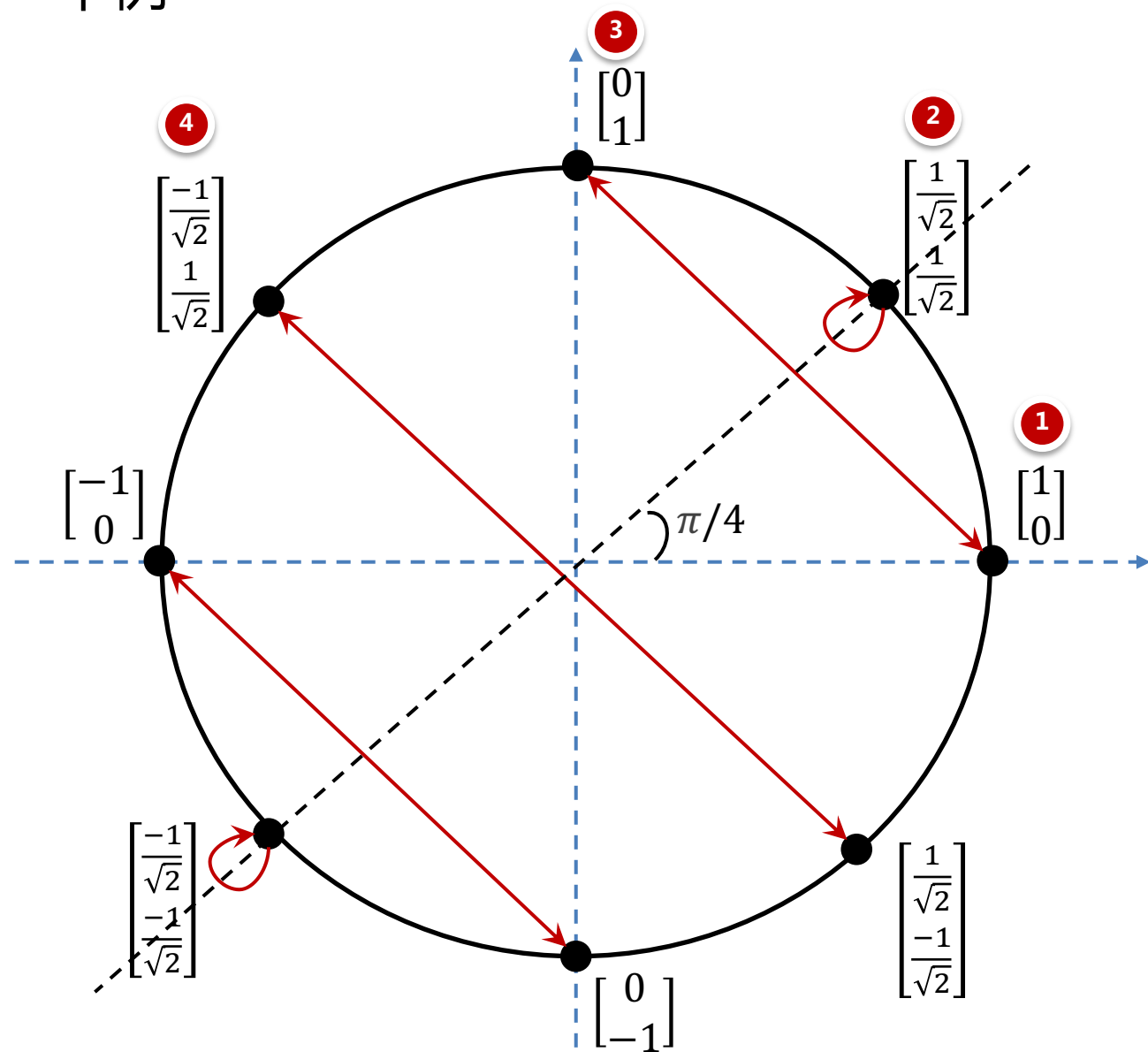
$$\textcircled{1} \quad X|0\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |1\rangle$$

$$\textcircled{3} \quad X|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |0\rangle$$

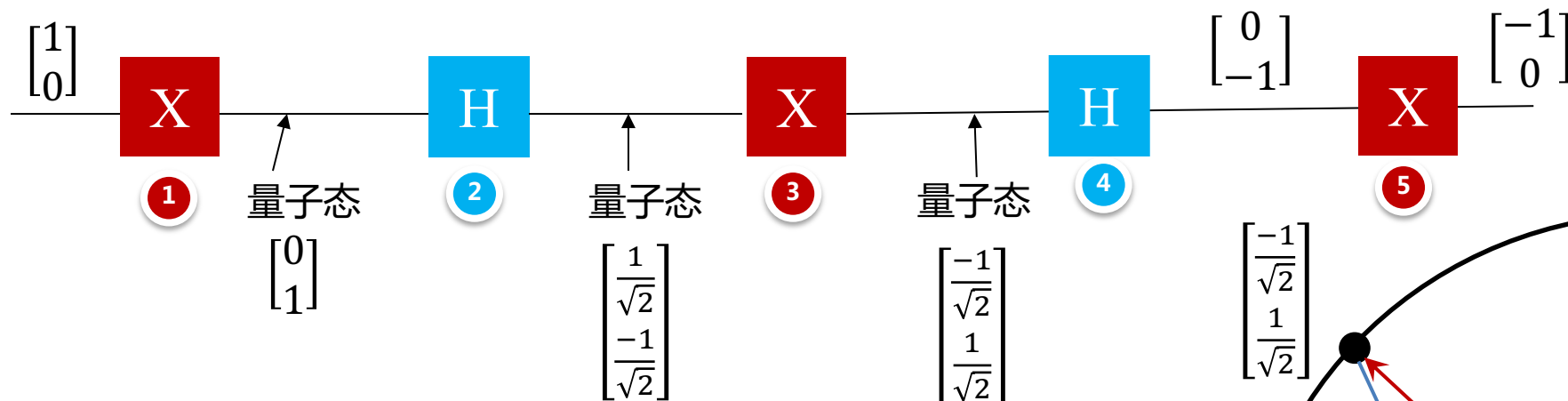
X 门作用在叠加态：

$$\textcircled{2} \quad X \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{4} \quad X \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$



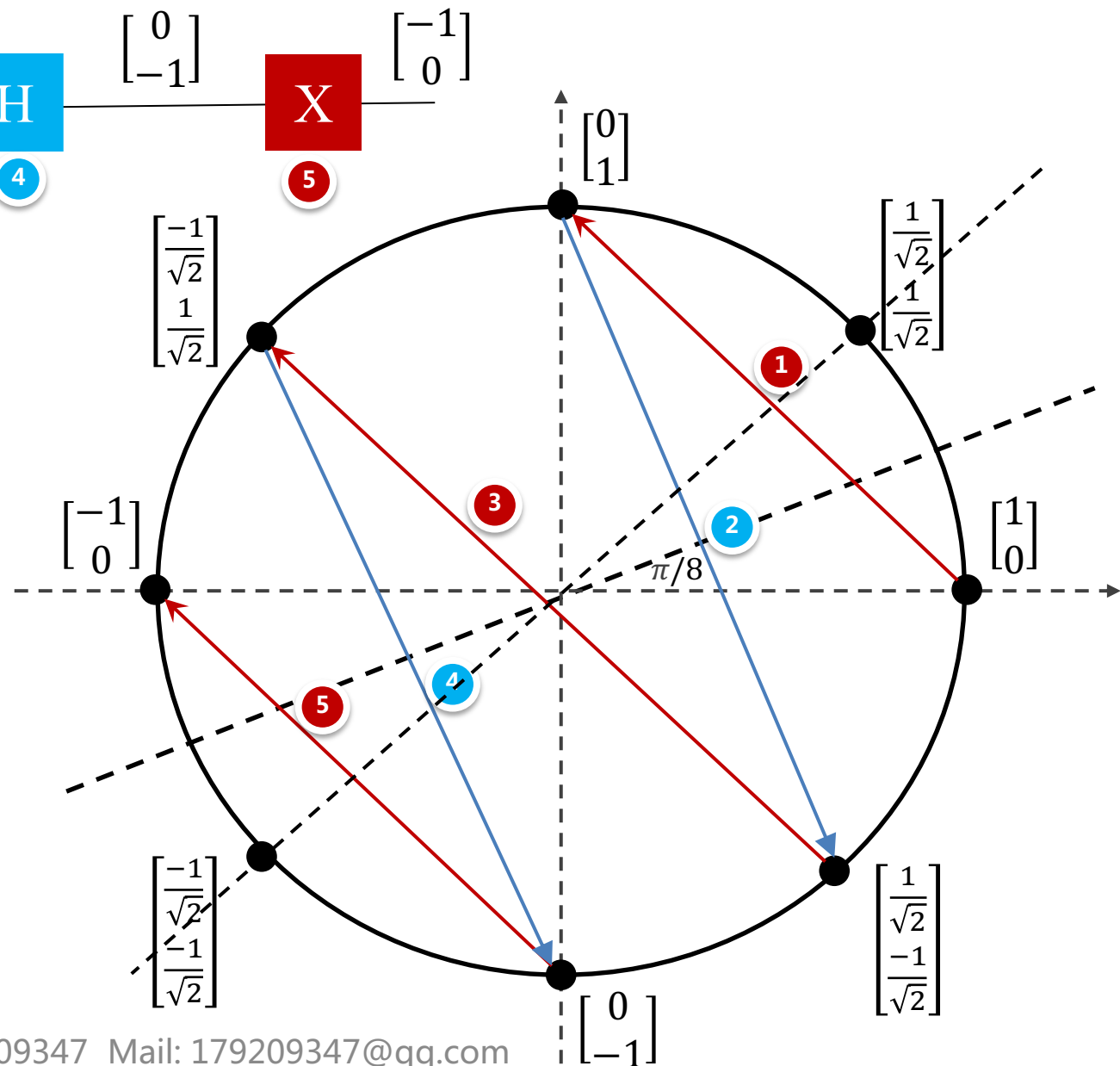
Pauli-X 门 – X H 门结合使用例子



连续两次 X 门 或者连续两次 H 门 都会恢复量子态。
 但是如果 2 次 X 门 和 2 次 H 门 交替操作，结果却会不同。

如图所示交替操作之后：

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Pauli-X 门 – α 和 β 都为复数

单量子比特的**复向量**表示：

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + b i \\ c + d i \end{bmatrix}$$

(α 、 β 都是复数)

单量子比特的**实向量**表示：

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

所有的门，都是希尔伯特空间中的算子，即算子矩阵中所有的元素都是复数（其中的实数应理解为虚部为 0）。

那么 $X = \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **实向量空间**中的矩阵表示（看做 2 * 2 分块矩阵）：

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \end{array}$$

$a + b i$ 算子其矩阵表示：

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

Pauli-X 门 – α 和 β 都为复数 - 举例

单量子比特的**复向量**表示：

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + b i \\ c + d i \end{bmatrix}$$

X 门作用于量子态：

$$X|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c + d i \\ a + b i \end{bmatrix}$$

单量子比特的**实向量**表示：

$$\begin{bmatrix} a + b i \\ c + d i \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

X 门作用于量子态：

$$X|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \\ a \\ b \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} c + d i \\ a + b i \end{bmatrix}$$

Pauli-Y 门

Pauli-Y 门矩阵形式为泡利矩阵 σ_y ，即：

$$Y = \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

其量子线路符号：



Y 门作用在基态：

$$Y|0\rangle = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = i|1\rangle$$

$$Y|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \\ 0 \end{bmatrix} = -i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -i|0\rangle$$

Y 门作用在任意量子态 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ ，得到的新的量子态为：

$$|\psi'\rangle = Y|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i\beta \\ i\alpha \end{bmatrix} = -i\beta|0\rangle + i\alpha|1\rangle$$

Pauli-Y 门 – α 和 β 都为复数

单量子比特的**复向量**表示：

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + b i \\ c + d i \end{bmatrix}$$

(α 、 β 都是复数)

单量子比特的**实向量**表示：

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

所有的门，都是希尔伯特空间中的算子，即算子矩阵中所有的元素都是复数（其中的实数应理解为虚部为 0）。

那么 $Y = \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ **实向量空间**中的矩阵表示（看做 2 * 2 分块矩阵）：

$$\begin{array}{c|cc} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$a + b i$ 算子其矩阵表示：

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

Pauli-Y 门 – α 和 β 都为复数 - 举例

单量子比特的**复向量**表示：

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + b i \\ c + d i \end{bmatrix}$$

Y 门作用于量子态：

$$Y|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i\beta \\ i\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i(c + d i) \\ i(a + b i) \end{bmatrix}$$

单量子比特的**实向量**表示：

$$\begin{bmatrix} a + b i \\ c + d i \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

Y 门作用于量子态：

$$Y|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ -c \\ -b \\ a \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} d - ci \\ -b + ai \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i(c + d i) \\ i(a + b i) \end{bmatrix}$$

Pauli-Z 门

Pauli-Z 门矩阵形式为泡利矩阵 σ_z ，即：

$$Z = \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$$

Z 门作用在基态：

$$\begin{aligned} Z|0\rangle &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (-1)^0|0\rangle = |0\rangle \\ Z|1\rangle &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = (-1)^1|1\rangle = -|1\rangle \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad Z|j\rangle = (-1)^j|j\rangle$$

Z 门作用在任意量子态 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ ，得到的新的量子态为：

$$|\psi'\rangle = Z|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\beta \end{bmatrix} = \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle$$

Pauli-Z 门 – α 和 β 都为实数，且归一化

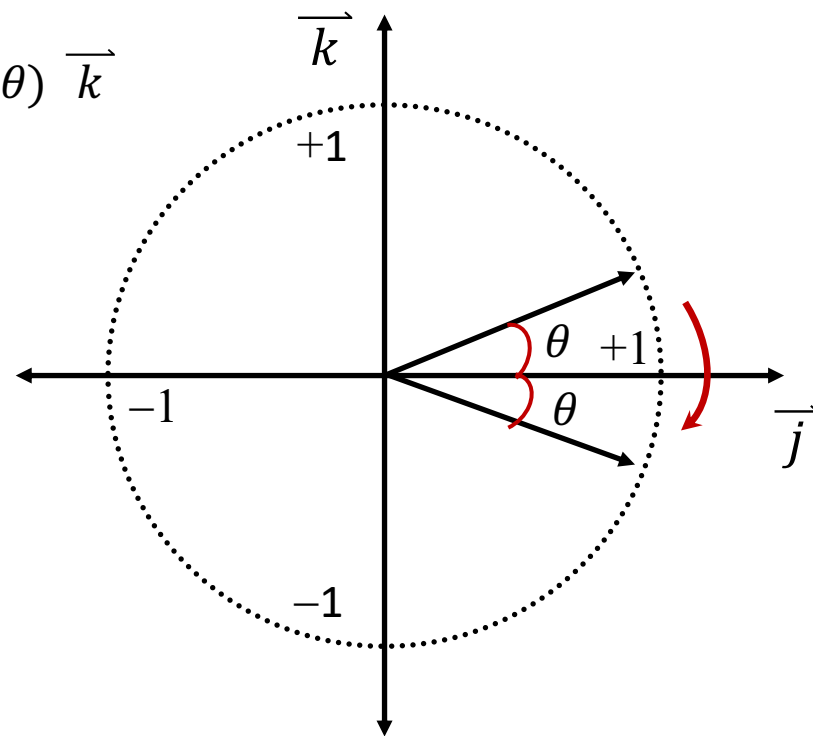
$$Z = \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)|1\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} = \cos(\theta) \vec{j} + \sin(\theta) \vec{k}$$

Z 门作用在量子态 $|\psi\rangle$ ：

$$Z|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \end{bmatrix}$$

* 每次作用于量子态(向量)，相当于在 j, k 平面内相对 j 轴做镜像映射。



Pauli-Z 门 – α 和 β 都为复数

单量子比特的**复向量**表示：

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + b i \\ c + d i \end{bmatrix}$$

(α 、 β 都是复数)

单量子比特的**实向量**表示：

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

所有的门，都是希尔伯特空间中的算子，即算子矩阵中所有的元素都是复数（其中的实数应理解为虚部为 0）。

那么 $Z = \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ **实向量空间**中的矩阵表示（看做 2 * 2 分块矩阵）：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$a + b i$ 算子其矩阵表示：

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

Pauli-Z 门 – α 和 β 都为复数 - 举例

单量子比特的**复向量**表示：

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + b i \\ c + d i \end{bmatrix}$$

Z 门作用于量子态：

$$Z|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + b i \\ -(c + d i) \end{bmatrix}$$

单量子比特的**实向量**表示：

$$\begin{bmatrix} a + b i \\ c + d i \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

Z 门作用于量子态：

$$Z|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ -c \\ -d \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} a + b i \\ -(c + d i) \end{bmatrix}$$

RX(θ) 门

RX门矩阵形式为：

$$\begin{aligned} R_x(\theta) &= e^{-i\theta X/2} = \cos(\theta/2) I - i \sin(\theta/2) X \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -i \sin(\theta/2) \\ -i \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$R_x(\pi/2)$ 门作用在任意量子态 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ ，得到的新的量子态为：

$$|\psi'\rangle = R_x(\pi/2) |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \alpha - i\beta \\ \beta - i\alpha \end{bmatrix} = \frac{\alpha - i\beta}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{\beta - i\alpha}{\sqrt{2}} |1\rangle$$

RX(θ) 门 - 重要性质

两角和与差的三角函数公式：

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$Q = R_x(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -i \sin(\theta/2) \\ -i \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} Q^2 &= \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -i \sin(\theta/2) \\ -i \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -i \sin(\theta/2) \\ -i \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2) & -2i \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) \\ -2i \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) & \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta/2 + \theta/2) & -i \sin(\theta/2 + \theta/2) \\ -i \sin(\theta/2 + \theta/2) & \cos(\theta/2 + \theta/2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$Q^3 = \begin{bmatrix} \cos(3\theta/2) & -i \sin(3\theta/2) \\ -i \sin(3\theta/2) & \cos(3\theta/2) \end{bmatrix}$$

....

$$Q^n = \begin{bmatrix} \cos(n\theta/2) & -i \sin(n\theta/2) \\ -i \sin(n\theta/2) & \cos(n\theta/2) \end{bmatrix}$$

RX(θ) 门 – 复向量旋转

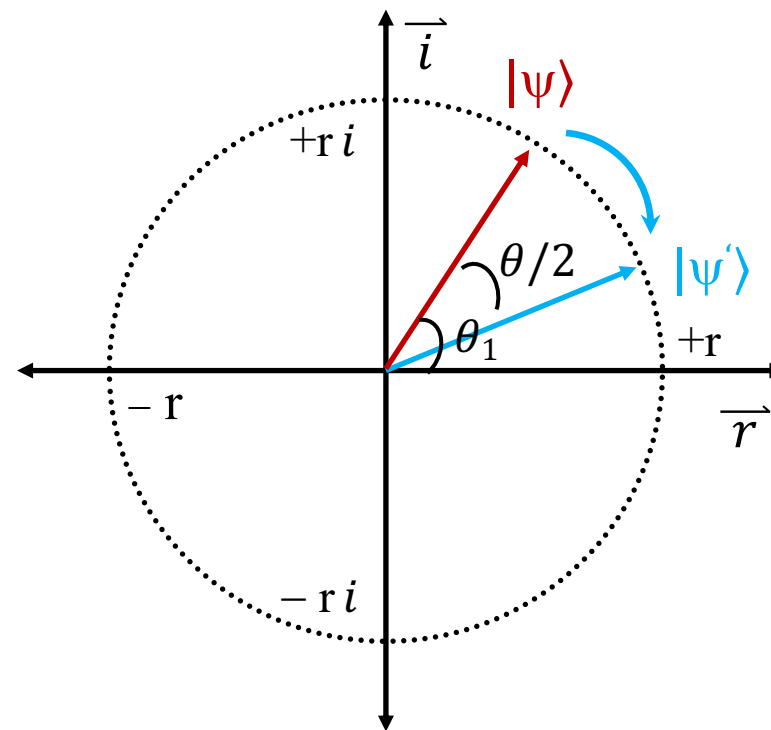
两角和与差的三角函数公式：

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= r(\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1)) \\ &= \begin{bmatrix} r \cos(\theta_1) \\ r i \sin(\theta_1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_x(\theta) |\psi\rangle &= \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -i \sin(\theta/2) \\ -i \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \cos(\theta_1) \\ r i \sin(\theta_1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r \cos(\theta_1) \cos(\theta/2) + r \sin(\theta_1) \sin(\theta/2) \\ -r i \cos(\theta_1) \sin(\theta/2) + r i \sin(\theta_1) \cos(\theta/2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r \cos(\theta_1 - \theta/2) \\ r i \sin(\theta_1 - \theta/2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$



- $R_x(\theta) |\psi\rangle$ 相当于将复平面内的向量 $|\psi\rangle$ ，旋转 $\theta/2$ 角。

RX(θ) 门 - α 和 β 都为实数

$$Q = R_x(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -i\sin(\theta/2) \\ -i\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2) |0\rangle + \sin(\theta/2) |1\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{bmatrix}$$

$Q = R_x(\theta)$ 作用在量子态：

$$Q|\psi\rangle = Q \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -i\sin(\theta/2) \\ -i\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2)\cos(\theta/2) - i\sin(\theta/2)\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2)\cos(\theta/2) - i\sin(\theta/2)\cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} Q^n |\psi\rangle &= Q^n \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(n\theta/2) & -i\sin(n\theta/2) \\ -i\sin(n\theta/2) & \cos(n\theta/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(n\theta/2)\cos(\theta/2) - i\sin(n\theta/2)\sin(\theta/2) \\ \cos(n\theta/2)\sin(\theta/2) - i\sin(n\theta/2)\cos(\theta/2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

RX(θ) 门 - 布洛赫球 (Bloch Sphere) 几何表示

RX门由Pauli-X 矩阵作为生成元生成，其矩阵形式为：

$$R_x(\theta) = e^{-i\theta X/2} = \cos(\theta/2) I - i \sin(\theta/2) X$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -i \sin(\theta/2) \\ -i \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

RX操作将原来的态上绕X轴逆时针旋转 θ 角。能导致概率振幅的变化。

其量子线路符号：



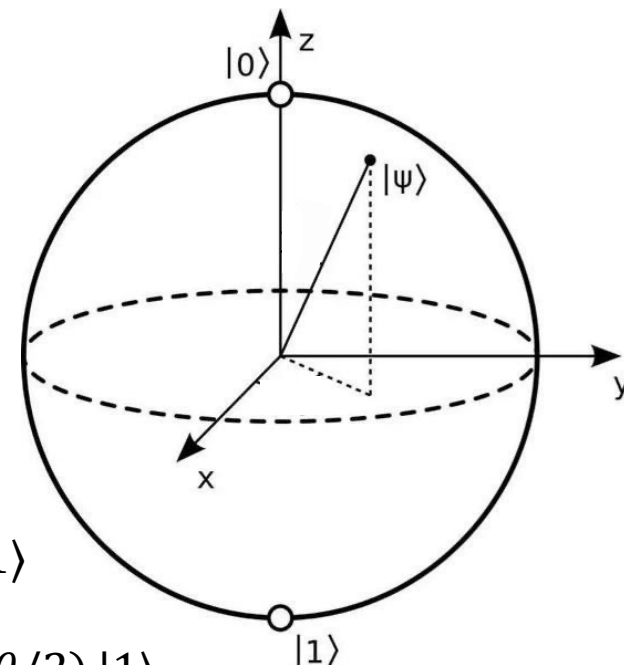
RX(θ) 门作用在基态：

$$R_x(\theta) |0\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -i \sin(\theta/2) \\ -i \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ -i \sin(\theta/2) \end{bmatrix} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle - i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle$$

$$R_x(\theta) |1\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -i \sin(\theta/2) \\ -i \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{bmatrix} = -i \sin(\theta/2) |0\rangle + \cos(\theta/2) |1\rangle$$

$R_x(\pi/2)$ 门作用在任意量子态 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ ，得到的新的量子态为：

$$|\psi'\rangle = R_x(\pi/2) |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \alpha - i\beta \\ \beta - i\alpha \end{bmatrix} = \frac{\alpha - i\beta}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{\beta - i\alpha}{\sqrt{2}} |1\rangle$$



RY(θ) 门

RY门矩阵形式为：

$$\begin{aligned} R_y(\theta) &= e^{-i\theta Y/2} = \cos(\theta/2) I - i \sin(\theta/2) Y \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$R_y(\pi/2)$ 门作用在任意量子态 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ ，得到的新的量子态为：

$$|\psi'\rangle = R_x(\pi/2) |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \alpha - \beta \\ \alpha + \beta \end{bmatrix} = \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2}} |1\rangle$$

RY(θ) 门 - 重要性质

两角和与差的三角函数公式：

$$\begin{aligned}\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

$$Q = R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}Q^2 &= \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2) & -2 \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) \\ 2 \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) & \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta/2 + \theta/2) & -\sin(\theta/2 + \theta/2) \\ \sin(\theta/2 + \theta/2) & \cos(\theta/2 + \theta/2) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q^3 &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) \cos(\theta/2) - \sin(\theta) \sin(\theta/2) & -\cos(\theta) \sin(\theta/2) - \sin(\theta) \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta) \cos(\theta/2) + \cos(\theta) \sin(\theta/2) & -\sin(\theta) \sin(\theta/2) + \cos(\theta) \cos(\theta/2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(3\theta/2) & -\sin(3\theta/2) \\ \sin(3\theta/2) & \cos(3\theta/2) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

....

$$Q^n = \begin{bmatrix} \cos(n\theta/2) & -\sin(n\theta/2) \\ \sin(n\theta/2) & \cos(n\theta/2) \end{bmatrix}$$

矩阵几何意义：

每次作用于向量，相当于将向量逆时针旋转 $\frac{\theta}{2}$

RY(θ) 门 - α 和 β 都为实数

$$Q = R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

* 每次作用于量子态(向量), 相当于逆时针旋转 $\frac{\theta}{2}$

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2) |0\rangle + \sin(\theta/2) |1\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{bmatrix}$$

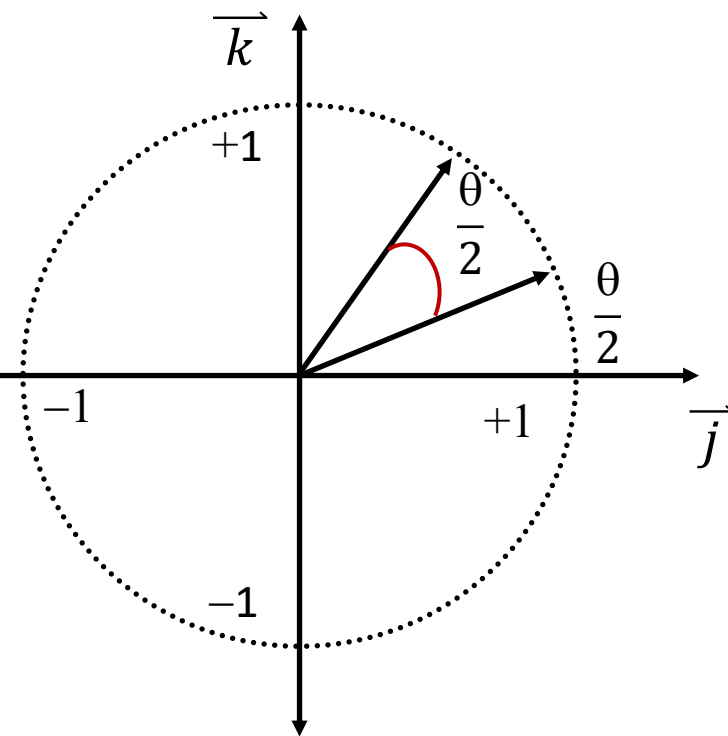
$Q = R_y(\theta)$ 作用在量子态:

$$Q^1 |\psi\rangle = Q^1 \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2 + \theta/2) \\ \sin(\theta/2 + \theta/2) \end{bmatrix}$$

$$Q^2 |\psi\rangle = \begin{bmatrix} \cos(2\theta/2 + \theta/2) \\ \sin(2\theta/2 + \theta/2) \end{bmatrix}$$

....

$$Q^n |\psi\rangle = \begin{bmatrix} \cos((n+1)\theta/2) \\ \sin((n+1)\theta/2) \end{bmatrix} = \cos((n+1)\theta/2) |0\rangle + \sin((n+1)\theta/2) |1\rangle$$



选取合适的旋转次数 n 使得 $\sin^2((n+1)\theta/2)$ 最接近 1, 即可完成**振幅放大**量子线路。

RY(θ) 门 - 布洛赫球 (Bloch Sphere) 几何表示

RY门由Pauli-Y 矩阵作为生成元生成，其矩阵形式为：

$$R_y(\theta) = e^{-i\theta Y/2} = \cos(\theta/2) I - i \sin(\theta/2) Y$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

RY操作将原来的态上绕Y轴逆时针旋转 θ 角。
能导致概率振幅的变化。

其量子线路符号：



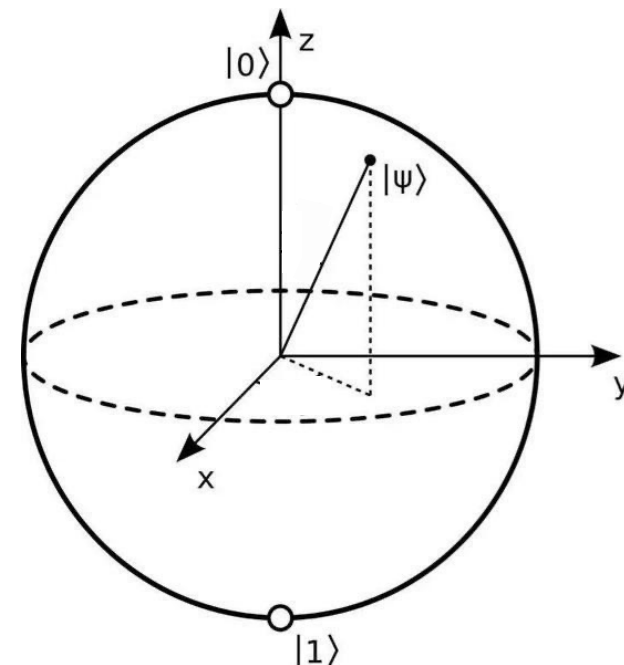
RY(θ) 门作用在基态：

$$R_y(\theta) |0\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{bmatrix} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle$$

$$R_y(\theta) |1\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{bmatrix} = -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle$$

$R_y(\pi/2)$ 门作用在任意量子态 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ ，得到的新的量子态为：

$$|\psi'\rangle = R_x(\pi/2) |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \alpha - \beta \\ \alpha + \beta \end{bmatrix} = \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2}} |1\rangle$$



RZ(θ) 门

RZ门又称为相位转化门(phase-shift gate)，由Pauli-Z 矩阵作为生成元生成，其矩阵形式为：

$$\begin{aligned} R_z(\theta) &= e^{-i\theta Z/2} = \cos(\theta/2) I - i \sin(\theta/2) Z \\ &= \begin{bmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{bmatrix} = e^{-i\theta/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

由于 $e^{-i\theta/2}$ 是一个全局相位，其没有物理意义，只考虑单门，则可以省略该参数。于是，RZ门矩阵可简写为：

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}$$

$R_y(\pi/2)$ 门作用在任意量子态 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ ，得到的新的量子态为：

$$|\psi'\rangle = R_z(\theta) |\psi\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ e^{i\theta} \beta \end{bmatrix} = \alpha|0\rangle + e^{i\theta} \beta|1\rangle$$

RZ(θ) 门 - 布洛赫球 (Bloch Sphere) 几何表示

RZ门又称为相位转化门(phase-shift gate)，由Pauli-Z 矩阵作为生成元生成，其矩阵形式为：

$$\begin{aligned} R_z(\theta) &= e^{-i\theta Z/2} = \cos(\theta/2) I - i \sin(\theta/2) Z \\ &= \begin{bmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{bmatrix} = e^{-i\theta/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

RZ 操作将原来的态上绕 Z 轴逆时针旋转 θ 角。不会导致概率振幅的变化，只会改变相位。

其量子线路符号：



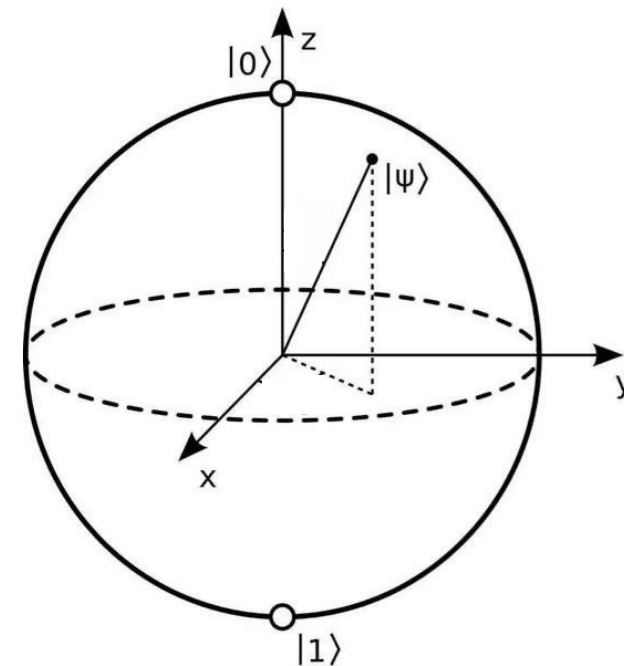
RZ门作用在基态：

$$R_z(\theta) |0\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |0\rangle$$

$$R_z(\theta) |1\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{i\theta} \end{bmatrix} = e^{i\theta} |1\rangle$$

$R_y(\pi/2)$ 门作用在任意量子态 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ ，得到的新的量子态为：

$$|\psi'\rangle = R_z(\pi/2) |\psi\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1+i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \frac{1+i}{\sqrt{2}} \beta \end{bmatrix} = \alpha|0\rangle + \frac{1+i}{\sqrt{2}} \beta|1\rangle$$



RZ(θ) 门 - 全局相位的几何意义

$$\begin{aligned} R_z(\theta) &= e^{-i\theta Z/2} = \cos(\theta/2) I - i \sin(\theta/2) Z \\ &= \begin{bmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{bmatrix} = e^{-i\theta/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

由于 $e^{-i\theta/2}$ 是一个全局相位，其没有物理意义，只考虑单门，则可以省略该参数，那么怎么理解几何意义呢？

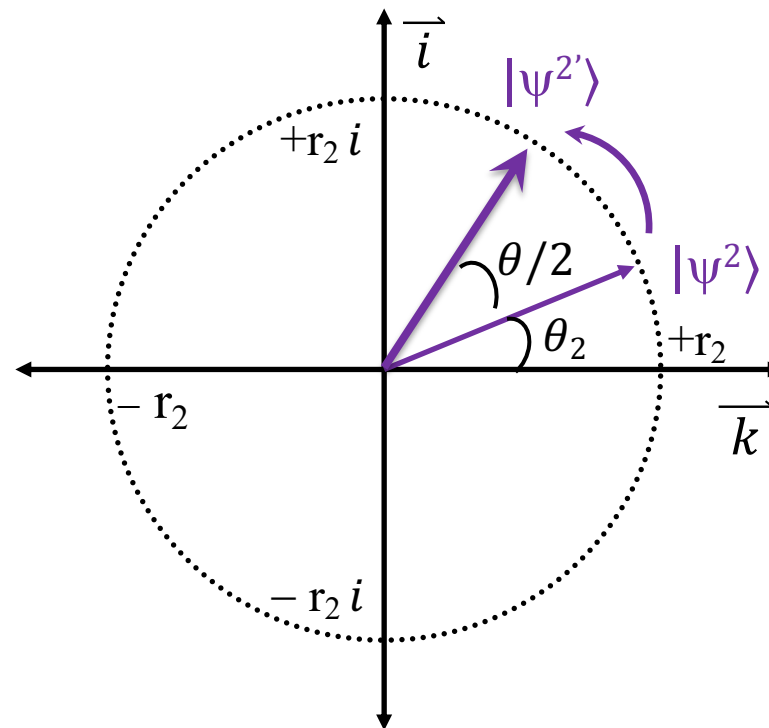
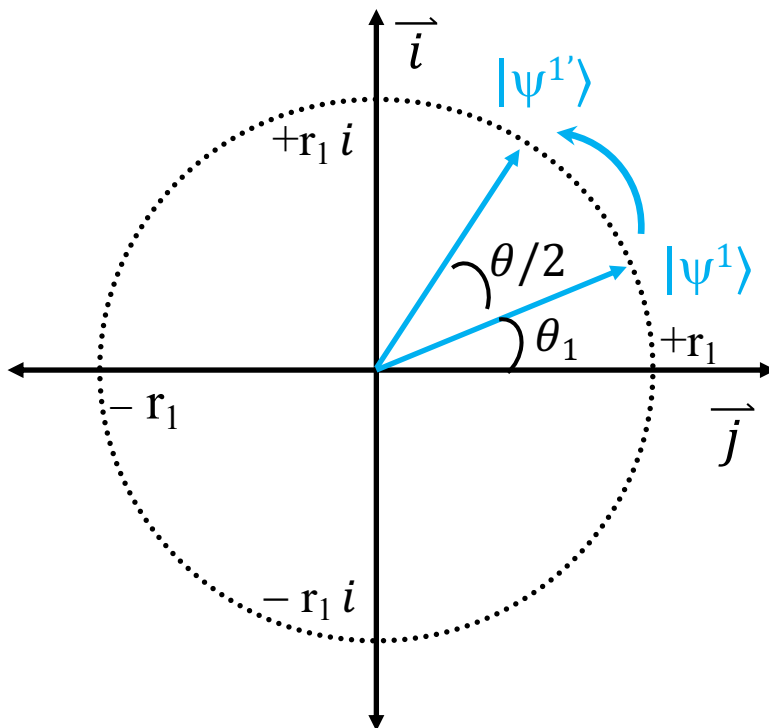
令： $|\psi\rangle = r_1(\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1))|0\rangle + r_2(\cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2))|1\rangle$
 $e^{-i\theta/2} = \cos(\theta/2) + i \sin(\theta/2)$

则 $e^{-i\theta/2}$ 作用在量子态 $|\psi\rangle$ ：

$$\begin{aligned} e^{-i\theta/2} |\psi\rangle &= r_1(\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1))(\cos(\theta/2) + i \sin(\theta/2))|0\rangle \\ &\quad + r_2(\cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2))(\cos(\theta/2) + i \sin(\theta/2))|1\rangle \\ &= r_1(\cos(\theta_1 + \theta/2) + i \sin(\theta_1 + \theta/2))|0\rangle + r_2(\cos(\theta_2 + \theta/2) + i \sin(\theta_2 + \theta/2))|1\rangle \end{aligned}$$

RZ(θ) 门 – 全局相位

$$e^{-i\theta/2} |\psi\rangle = r_1(\cos(\theta_1 + \theta/2) + i \sin(\theta_1 + \theta/2))|0\rangle + r_2(\cos(\theta_2 + \theta/2) + i \sin(\theta_2 + \theta/2))|1\rangle$$



$|\psi^1\rangle$ 为 $|\psi\rangle$ 在 i - k 复平面的分量 $r_1(\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1))$

$|\psi^2\rangle$ 为 $|\psi\rangle$ 在 i - j 复平面的分量 $r_2(\cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2))$

* 全局相位几何意义为：
 所有复平面内向量同时旋转相同角度。
 如果加上时间 t ，则意味着有相同的角速度。
 而周期旋转又可以理解为波。



Thank

You