量子计算
—算法篇

Quantum Computing

网址：www.qubits.top

作者：Calvin Tang

邮箱：179209347@qq.com

介绍

教程简介：
- 面向对象：量子计算初学者
- 依赖课程：线性代数，量子力学（非必需）

知乎专栏：
https://www.zhihu.com/column/c_1501138176371011584

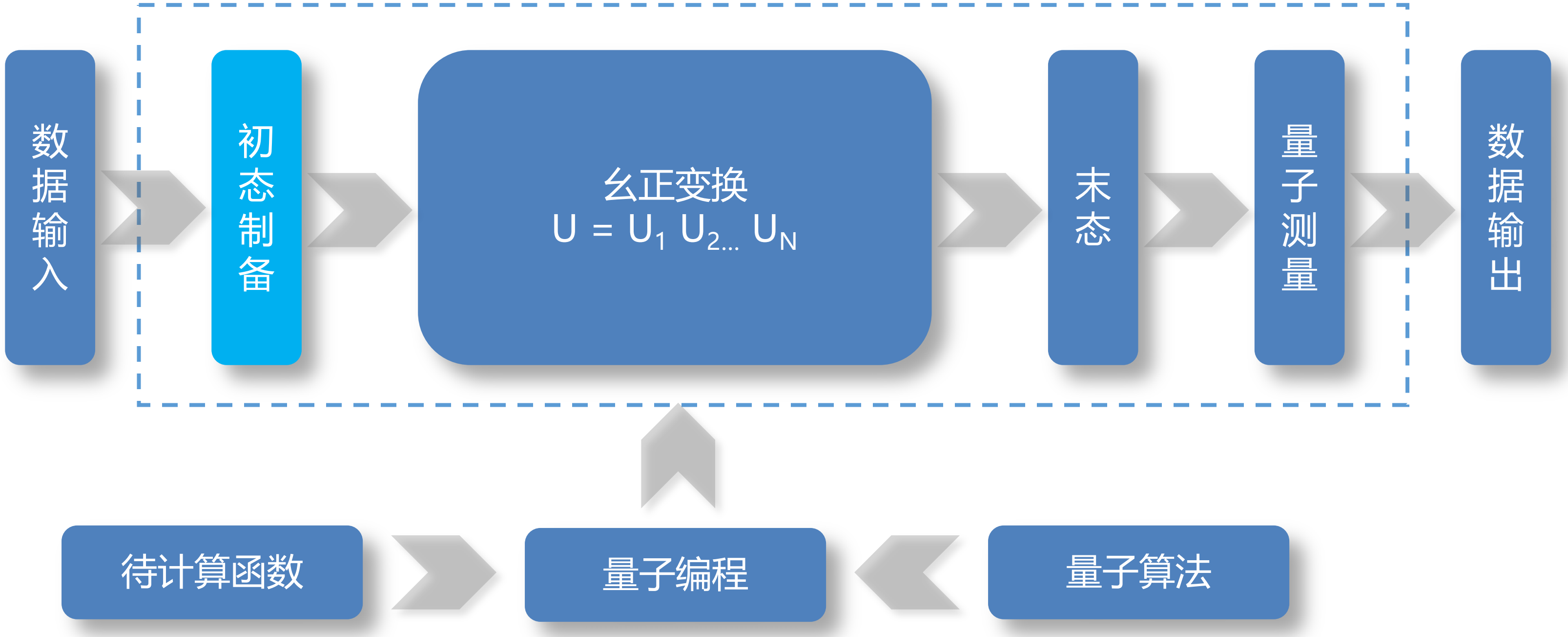
Github & Gitee 地址：
https://github.com/mymagicpower/qubits
https://gitee.com/mymagicpower/qubits

*** 版权声明：**
- 仅限用于个人学习
- 禁止用于任何商业用途

初态制备

初态制备
指的是量子计算中初始量子态的构造，是量子计算的初始步骤。

以单比特为例：
从基态 |0⟩ 出发制备任给目标叠加态的过程称为初态制备。
在实际量子运算中，我们可以直接得到的默认量子态是基态 |0⟩，通过 X 门可以得到基态 |1⟩。
对于任给的目标叠加量子态，我们则需要构造相应的量子门组合来得到。



Calvin，QQ: 179209347 Mail: 179209347@qq.com

最大叠加态

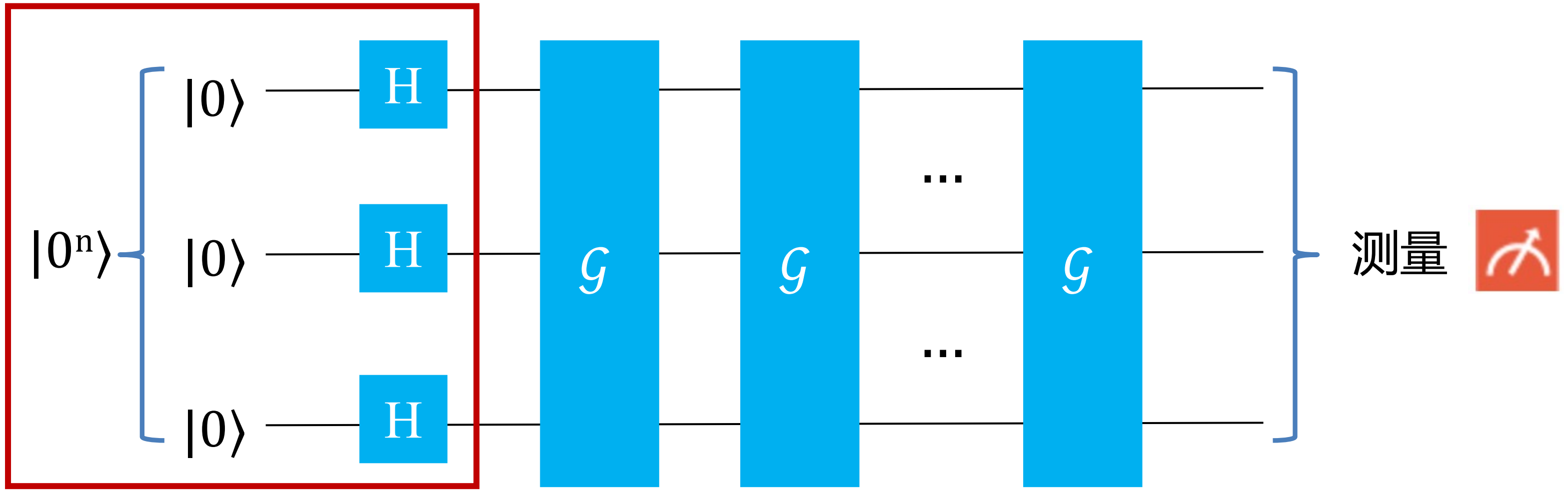
以两比特态空间为例，从 $|0\rangle^{\otimes 2}$ ($|0\rangle\otimes|0\rangle$) 出发，对每个量子比特进行 H 门操作可以得到两比特空间中所有基态的均匀叠加。

类似地，在任意维态空间中，均可以借助 H 门从多维的 $|0\rangle$ 基态出发，得到所有基态均匀线性组合的量子态。

这种量子态称为最大叠加态，很多初始状态要求为最大叠加态，量子计算的并行性也有赖于此。

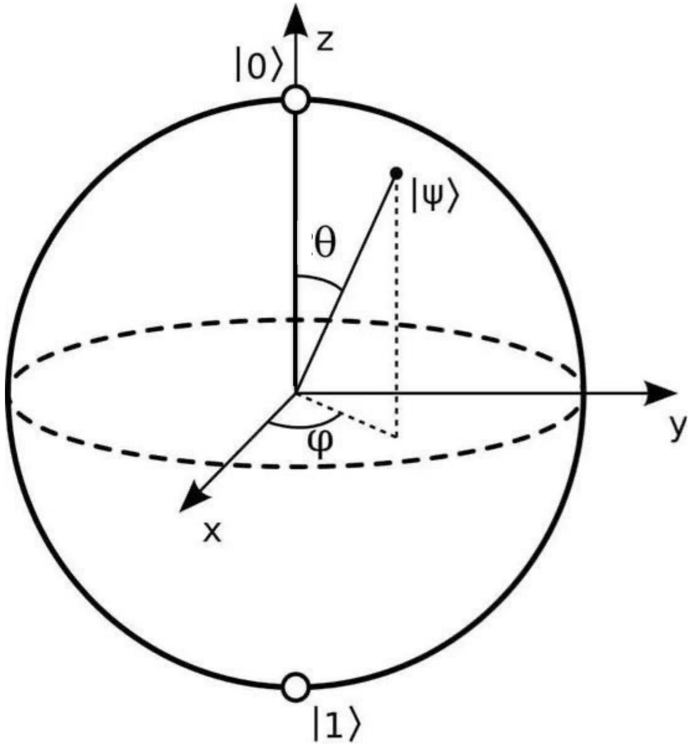
$$(H|0\rangle)^{\otimes n}=\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{x=0}^{2^n-1}|x\rangle$$

量子态准备 - 最大叠加态



纯态和混态

非基态的量子态都为叠加态。
叠加态又可以分为相干叠加和非相干叠加，分别称为纯态和混态。
如将态空间与Bloch球关联，球面上量子态为纯态，球体内的量子态为混态。另一种重要的区分方式为密度矩阵，混态的密度矩阵非对角元均为 0。



密度矩阵：

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{\alpha} & \overline{\beta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha\overline{\alpha} & \alpha\overline{\beta}\\ \beta\overline{\alpha} & \beta\overline{\beta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}|\alpha|^2 & \alpha\overline{\beta}\\ \beta\overline{\alpha} & |\beta|^2\end{bmatrix}$$

其中 $\langle\psi| = |\psi\rangle^\dagger$ ，且矩阵迹为：$\mathrm{tr}(\rho) = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

量子纠缠

对于一个量子系统的量子态 $|\psi\rangle$:

直积态：可以表示成形如 $|\psi\rangle = |\psi_0\rangle \otimes |\psi_1\rangle$ 的两个量子系统的张量积形式

纠缠态：不能进行这种直积分解的量子态

例如，对两比特的 Bell 态 $\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$ ：
它不能写成两个单比特量子态的直积（张量积）形式。

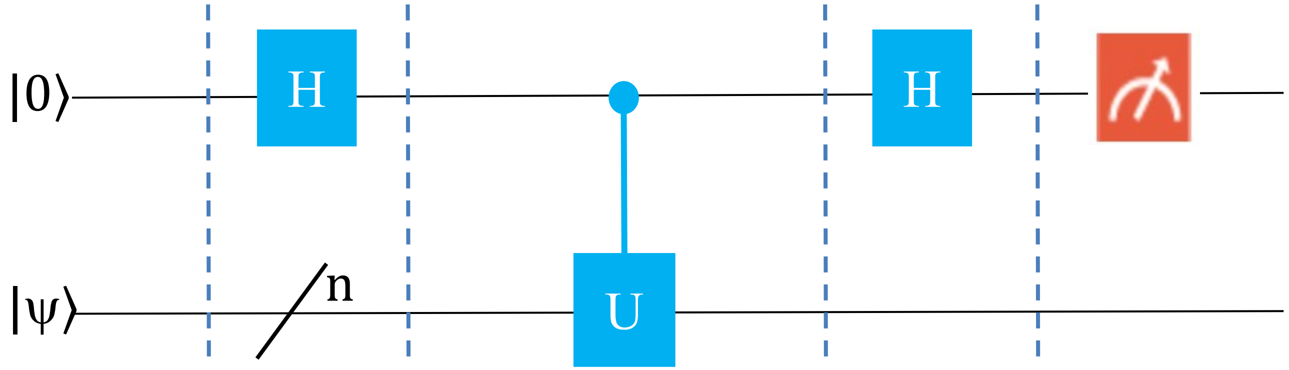
量子纠缠态有超越经典关联的量子关联。
为了发挥量子计算的并行性和高效性，量子计算的量子比特之间应当有着纠缠关联。

Hadamard Test

Hadamard Test量子线路的主要作用：
对任给的幺正变换 U 和量子态 $|\psi\rangle$ ，可以给出该**幺正算符 U 在量子态上的投影期望 $\langle\psi|U|\psi\rangle$** 。即可以通过测量一个辅助比特（ ancilla qubit ）来方便地得到一个**幺正算符 U 对于一个量子态 $|\psi\rangle$ 的平均值。**

$$\langle\psi|U|\psi\rangle = \underbrace{\mathrm{Re}\,\langle\psi|U|\psi\rangle}_{\text{实部}} + \underbrace{\mathrm{Im}\,\langle\psi|U|\psi\rangle}_{\text{虚部}}\,\mathrm{i}$$

其中的实部对应的量子线路图为：



整个量子线路可以视为，对两个寄存器中量子比特组成的一个n+1维量子态 $|0\rangle|\psi\rangle$ ，进行量子门操作组合：

$$Q=(H\otimes I^{\otimes n})(\mathrm{Ctrl}-U)(H\otimes I^{\otimes n})$$

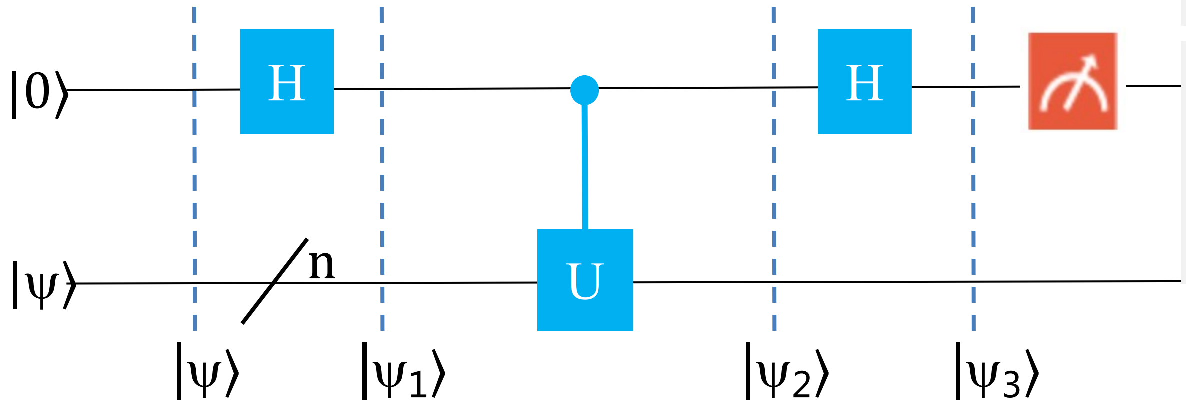
其中 $\mathrm{Ctrl}-U$ 表示基于幺正算符 U 的受控门

Calvin，QQ: 179209347 Mail: 179209347@qq.com

Hadamard Test – 测量前的状态（实部）

$$
\begin{aligned}
|\psi_1\rangle &= H|0\rangle \otimes |\psi\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |\psi\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|\psi\rangle + |1\rangle|\psi\rangle)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|\psi_2\rangle &= (\mathrm{Ctrl} - U)\ |\psi_1\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{Ctrl} - U)(|0\rangle|\psi\rangle + |1\rangle|\psi\rangle)
\end{aligned}
$$



$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

H 门作用在基态：

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\ (\ |0\rangle + |1\rangle\ )$$

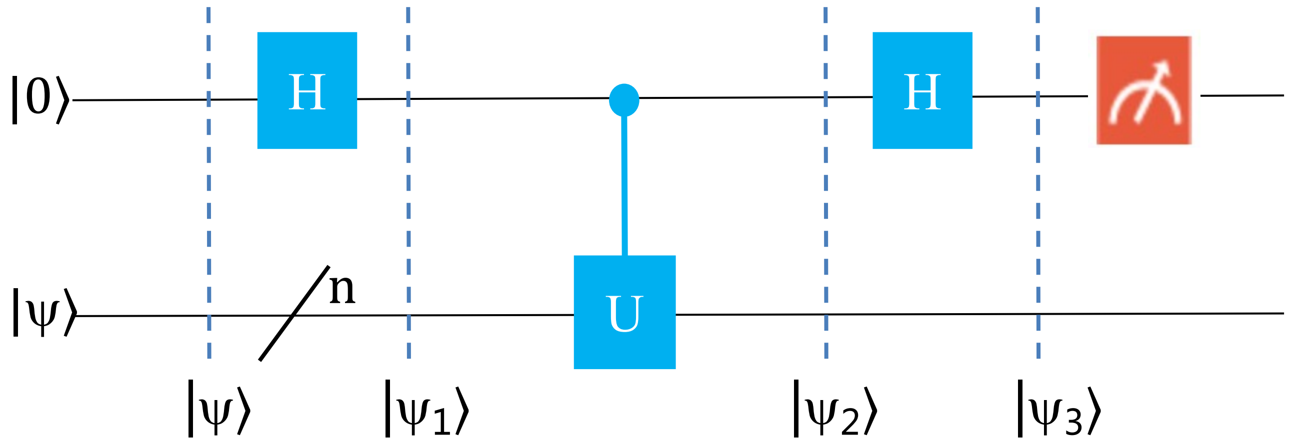
$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\ (\ |0\rangle - |1\rangle\ )$$

因为 $\mathrm{Ctrl}\ -U$ 表示基于幺正变换 U 的受控门，只有控制位为 $|1\rangle$ 时，才会作用于 $|\psi\rangle$，所以有：

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|\psi\rangle + |1\rangle U|\psi\rangle)$$

Calvin, QQ: 179209347 Mail: 179209347@qq.com

Hadamard Test – 测量前的状态（实部）



$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

H 门作用在基态：

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\,|0\rangle + |1\rangle\,)$$
$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\,|0\rangle - |1\rangle\,)$$

$$\begin{aligned}
|\psi_3\rangle &= H|\psi_2\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(H|0\rangle|\psi\rangle + H|1\rangle U|\psi\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|\psi\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)U|\psi\rangle) \\
&= |0\rangle\frac{|\psi\rangle + U|\psi\rangle}{2} + |1\rangle\frac{|\psi\rangle - U|\psi\rangle}{2} \\
&= |0\rangle\frac{I+U}{2}|\psi\rangle + |1\rangle\frac{I-U}{2}|\psi\rangle
\end{aligned}$$

Hadamard Test – 测量计算（实部）

Qubits
qubits.top

$$|\psi_3\rangle = |0\rangle \frac{I+U}{2}|\psi\rangle + |1\rangle \frac{I-U}{2}|\psi\rangle$$

测量 $|0\rangle$ ：

$$(|0\rangle\langle 0| \otimes I)\,|\psi_3\rangle = (|0\rangle\langle 0| \otimes I)(|0\rangle \frac{I+U}{2}|\psi\rangle + |1\rangle \frac{I-U}{2}|\psi\rangle)$$

$$= |0\rangle\langle 0|0\rangle \frac{I+U}{2}|\psi\rangle + |0\rangle\langle 0|1\rangle \frac{I-U}{2}|\psi\rangle$$

$$= \frac{1}{2}|0\rangle \otimes (I+U)|\psi\rangle$$

测量的概率：

$$\mathrm{Prob}(0) = ||\frac{1}{2}|0\rangle \otimes (I+U)|\psi\rangle||^2 = \frac{1}{4}|||0\rangle||^2\,||(I+U)|\psi\rangle||^2$$

$$= \frac{1}{4}\langle\psi|(I+U^\dagger)(I+U)|\psi\rangle = \frac{1}{4}(\langle\psi| + \langle\psi|U^\dagger)(|\psi\rangle + U|\psi\rangle)$$

$$= \frac{1}{4}(\langle\psi|\psi\rangle + \langle\psi|U|\psi\rangle + \langle\psi|U^\dagger|\psi\rangle + \langle\psi|U^\dagger U|\psi\rangle)$$

$$= \frac{1}{4}(2 + \langle\psi|U|\psi\rangle + \langle\psi|U^\dagger|\psi\rangle) = \frac{1}{4}(2 + \langle\psi|U|\psi\rangle + \langle\psi|U|\psi\rangle^*)$$

$$= \frac{1+Re(\langle\psi|U|\psi\rangle)}{2}$$

公式：

$\langle 0|0\rangle = 1 \quad \langle 0|1\rangle = 0$

$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$

$|\,|\psi\rangle\,|^2 = |\psi\rangle^\dagger|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle$

$(A \otimes B)^\dagger = A^\dagger \otimes B^\dagger$

$\langle e_j|A|e_k\rangle = \langle e_k|A^\dagger|e_j\rangle^*$

$\langle u|A|v\rangle = \langle A^\dagger u|v\rangle = \langle v|A^\dagger|u\rangle^*$

$$\langle\psi|U|\psi\rangle = \underbrace{\mathrm{Re}\,\langle\psi|U|\psi\rangle}_{实部} + \underbrace{\mathrm{Im}\,\langle\psi|U|\psi\rangle}_{虚部}\,\mathrm{i}$$

$Re(\langle\psi|U|\psi\rangle)$

幺正算符 U 在量子态 ψ 上投影期望的实部

令：

$\langle\psi|U|\psi\rangle = a + b\,i$

则：

$a = Re(\langle\psi|U|\psi\rangle)$

$\langle\psi|U|\psi\rangle^* = a - b\,i$

$\langle\psi|U|\psi\rangle + \langle\psi|U|\psi\rangle^* = 2a = 2Re(\langle\psi|U|\psi\rangle)$

Hadamard Test – 测量计算（实部）

那么：

$\mathrm{Prob}(1) = 1 - \mathrm{Prob}(0) = \frac{1 - Re(\langle\psi|U|\psi\rangle)}{2}$

经量子线路，如果测量结果为 $|0\rangle$，则让输出为1，如果测量结果为 $|1\rangle$，则让输出为 -1，那么期望值为：

$\mathrm{E(M)} = \sum_m m\mathrm{P}(m)$
$= 1 * \mathrm{Prob}(0) + (-1) * \mathrm{Prob}(1)$

$= \frac{1+Re(\langle\psi|U|\psi\rangle)}{2} - \frac{1-Re(\langle\psi|U|\psi\rangle)}{2}$
$= Re(\langle\psi|U|\psi\rangle)$

其为幺正算符 U 在量子态 ψ 上投影期望的实部。

Hadamard Test – 测量前的状态（虚部）

因为：

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

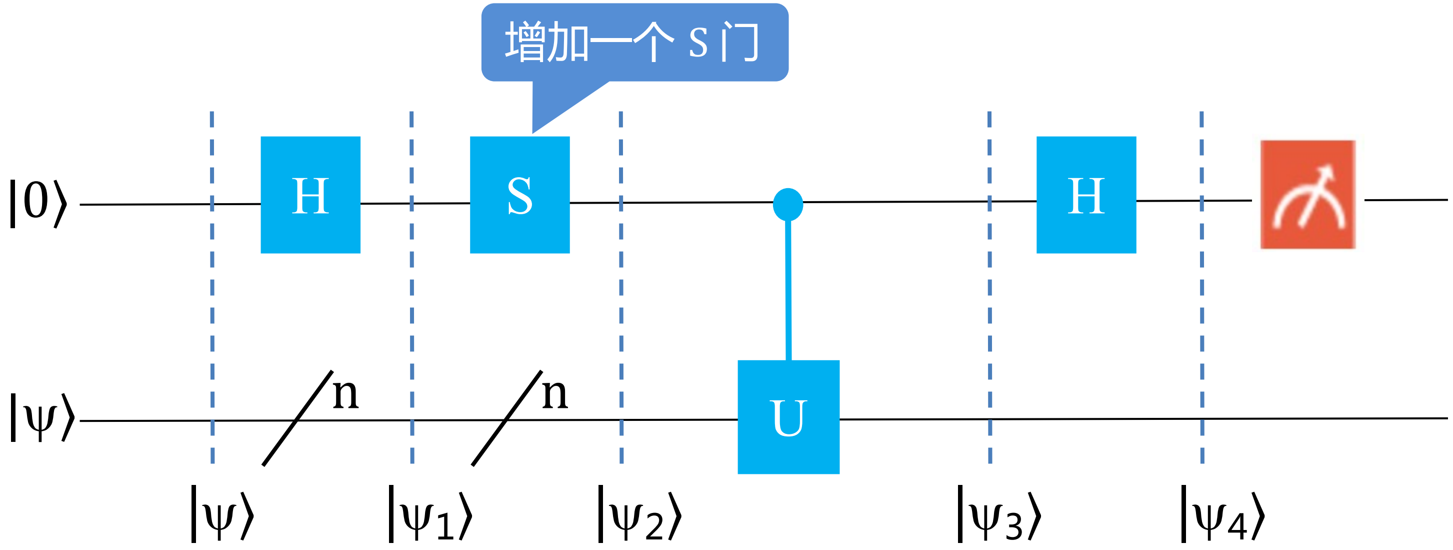
$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle + |1\rangle \right)$$
$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle - |1\rangle \right)$$

所以有：

$$|\psi_1\rangle = H|0\rangle \otimes |\psi\rangle$$

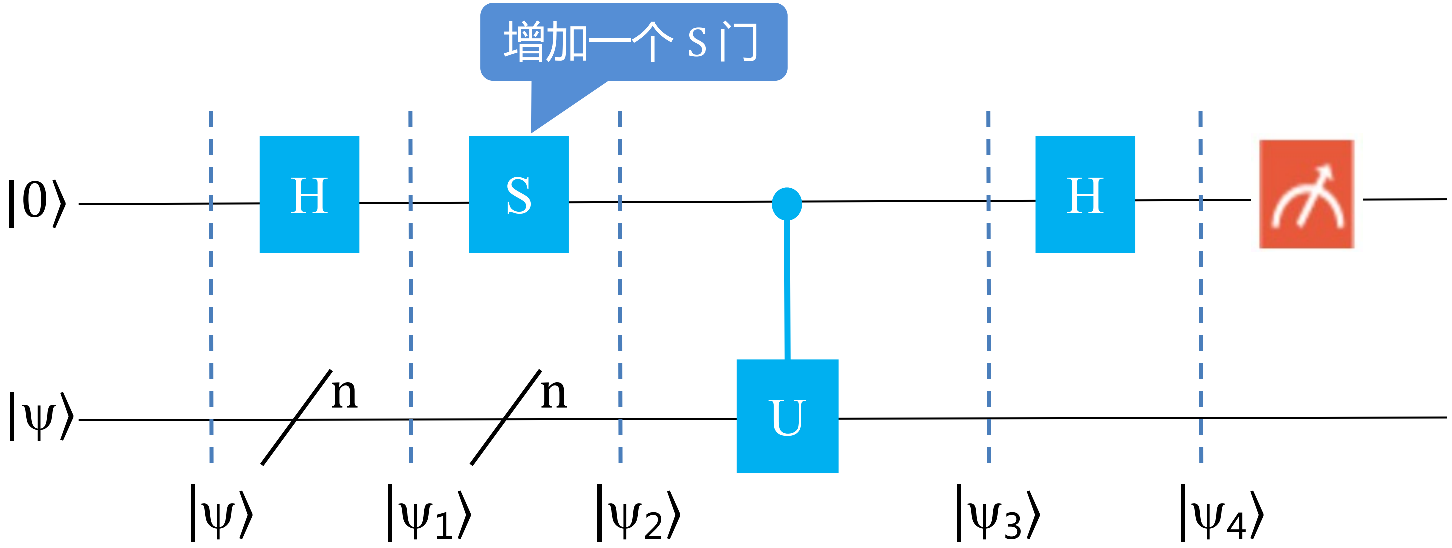
$$\begin{aligned} |\psi_2\rangle &= SH|0\rangle \otimes |\psi\rangle \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes |\psi\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \otimes |\psi\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle \otimes |\psi\rangle + i\,|1\rangle \otimes |\psi\rangle) \end{aligned}$$



Hadamard Test – 测量前的状态（虚部）

因为：

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |\psi\rangle + \ i\ |1\rangle \otimes |\psi\rangle)$$



所以有：

$$|\psi_3\rangle = (\mathrm{Ctrl} - U)\ |\psi_2\rangle$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{Ctrl} - U)(|0\rangle \otimes |\psi\rangle + i\ |1\rangle \otimes |\psi\rangle)$$

因为 $\mathrm{Ctrl} - U$ 表示基于幺正变换 U 的受控门，只有控制位为 $|1\rangle$ 时，才会作用于 $|\psi\rangle$，所以有：

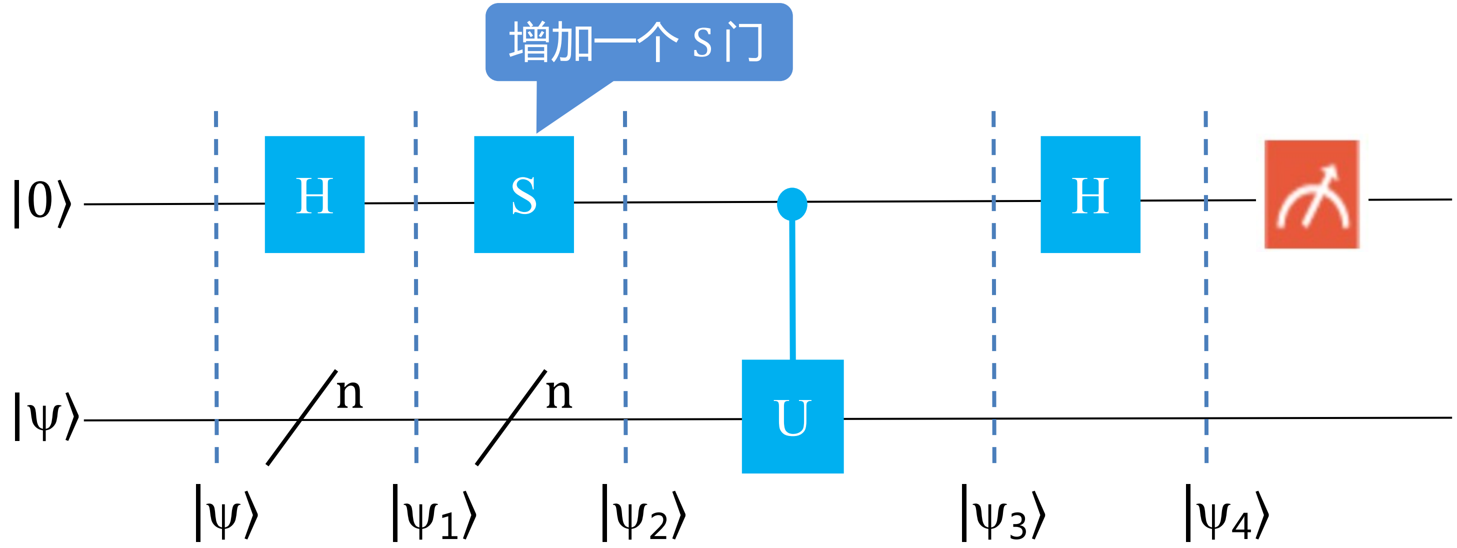
$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\ |0\rangle|\psi\rangle + i|1\rangle \otimes U|\psi\rangle\ )$$

Hadamard Test – 测量前的状态（虚部）

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

H 门作用在基态：

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\,|0\rangle + |1\rangle\,\right)$$
$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\,|0\rangle - |1\rangle\,\right)$$



$$\begin{aligned}
|\psi_4\rangle &= H|\psi_3\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\,H|0\rangle \otimes |\psi\rangle + iH|1\rangle \otimes U|\psi\rangle\,\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |\psi\rangle + i\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \otimes U|\psi\rangle\,\right) \\
&= \frac{1}{2}\left((|0\rangle + |1\rangle) \otimes |\psi\rangle + i\,(|0\rangle - |1\rangle) \otimes U|\psi\rangle\,\right)
\end{aligned}$$

Calvin，QQ: 179209347 Mail: 179209347@qq.com

Hadamard Test – 测量计算（虚部）

$|\psi_4\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |\psi\rangle + i\,(|0\rangle - |1\rangle) \otimes U|\psi\rangle\,)$

测量 $|0\rangle$ ：

$$(\,|0\rangle\langle 0| \otimes I\,)\,|\psi_4\rangle = (\,|0\rangle\langle 0| \otimes I\,)\,(\,\frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |\psi\rangle + i\,(|0\rangle - |1\rangle) \otimes U|\psi\rangle\,)\,)$$
$$= \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0|0\rangle + |0\rangle\langle 0|1\rangle) \otimes |\psi\rangle + i\,(|0\rangle\langle 0|0\rangle - |0\rangle\langle 0|1\rangle) \otimes U|\psi\rangle\,)$$
$$= \frac{1}{2}(|0\rangle \otimes |\psi\rangle + i|0\rangle \otimes U|\psi\rangle)$$

测量的概率：

$$\mathrm{Prob}(0) = ||\,\frac{1}{2}(|0\rangle \otimes |\psi\rangle + i|0\rangle \otimes U|\psi\rangle)\,||^2$$
$$= \frac{1}{4}(|0\rangle \otimes |\psi\rangle + i|0\rangle \otimes U|\psi\rangle)^\dagger\,(|0\rangle \otimes |\psi\rangle + i|0\rangle \otimes U|\psi\rangle)$$
$$= \frac{1}{4}(\langle 0| \otimes \langle\psi| - i\,\langle 0| \otimes \langle\psi|U^\dagger)\,(|0\rangle \otimes |\psi\rangle + i|0\rangle \otimes U|\psi\rangle)$$
$$= \frac{1}{4}(\,(\langle 0| \otimes \langle\psi|)(|0\rangle \otimes |\psi\rangle) + (\langle 0| \otimes \langle\psi|)(i|0\rangle \otimes U|\psi\rangle) + (-i\,\langle 0| \otimes \langle\psi|U^\dagger)(|0\rangle \otimes |\psi\rangle\,) + (-i\,\langle 0| \otimes \langle\psi|U^\dagger)(i|0\rangle \otimes U|\psi\rangle))$$
$$= \frac{1}{4}(\,\langle 0|0\rangle \otimes \langle\psi|\psi\rangle + i\,\langle 0|0\rangle \otimes \langle\psi|U|\psi\rangle - i\,\langle 0|0\rangle \otimes \langle\psi|U^\dagger|\psi\rangle + \langle 0|0\rangle \otimes \langle\psi|U^\dagger U|\psi\rangle\,)$$
$$= \frac{1}{4}(\,1 + i\,\langle\psi|U|\psi\rangle - i\,\langle\psi|U^\dagger|\psi\rangle + 1)$$
$$= \frac{1}{4}(\,2 + (\,\langle\psi|U|\psi\rangle - \langle\psi|U|\psi\rangle^*\,)\,i\,)$$
$$= \frac{1}{4}(\,2 - 2b\,)$$
$$= \frac{1 - \mathrm{Im}(\langle\psi|U|\psi\rangle)}{2}$$

公式：

- $\langle 0|0\rangle = 1 \quad \langle 0|1\rangle = 0$
- $(A \otimes B)\,(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$
- $|\,|\psi\rangle\,|^2 = |\psi\rangle^\dagger|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle$
- $(A \otimes B)^\dagger = A^\dagger \otimes B^\dagger$
- $(cA)^\dagger = c^* A^\dagger$
- $(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$
- $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$
- $\langle e_j|A|e_k\rangle = \langle e_k|A^\dagger|e_j\rangle^*$
- $\langle u|A|v\rangle = \langle A^\dagger u|v\rangle = \langle v|A^\dagger|u\rangle^*$

$Im(\langle\psi|U|\psi\rangle)$
幺正算符 U 在量子态 ψ 上投影期望的虚部

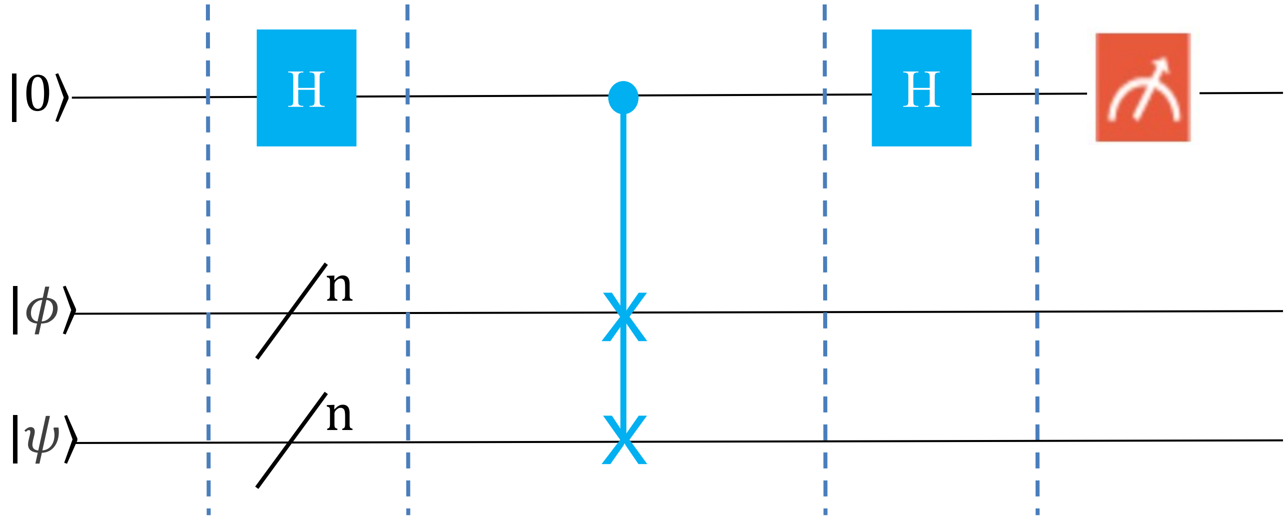
令：
$\langle\psi|U|\psi\rangle = a + b\,i$
则：
$b = Im(\langle\psi|U|\psi\rangle)$
$\langle\psi|U|\psi\rangle^* = a - b\,i$
$(\langle\psi|U|\psi\rangle - \langle\psi|U|\psi\rangle^*)\,i = 2b\,i * i = -2b$

Calvin，QQ: 179209347 Mail: 179209347@qq.com

SWAP Test

Hadamard Test有着多种形式和广泛用途，其中一种特殊形式是基本量子线路SWAP Test。
任给两个维数相同的量子态，通过SWAP Test线路，可以得到两个量子态的保真度，反应了它们的重叠情况。
两个量子态 $|\phi\rangle, |\psi\rangle$ 的保真度是指量子态内积范数的平方 $|\langle\phi|\psi\rangle|^2$

SWAP Test的量子线路图结构：



Calvin，QQ: 179209347 Mail: 179209347@qq.com

SWAP Test – 测量前的状态

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle + |1\rangle \right)$$
$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle - |1\rangle \right)$$

1. 输入态

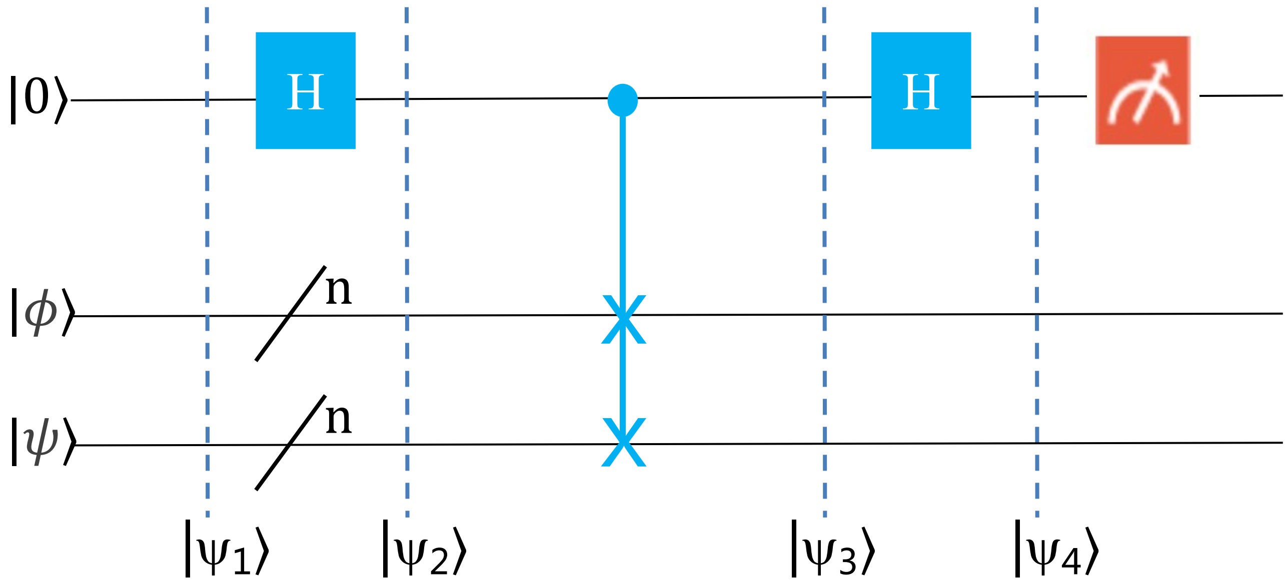
$$|\psi_1\rangle = |0\rangle \otimes |\phi\rangle \otimes |\psi\rangle$$

2. 输入态经过第一个 H 门

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\, |\phi\rangle|\psi\rangle$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|\phi\rangle|\psi\rangle + |1\rangle|\phi\rangle|\psi\rangle)$$

3. 再经过一个 swap 门 ($|1\rangle$ 时交换)

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|\phi\rangle|\psi\rangle + |1\rangle|\psi\rangle|\phi\rangle)$$

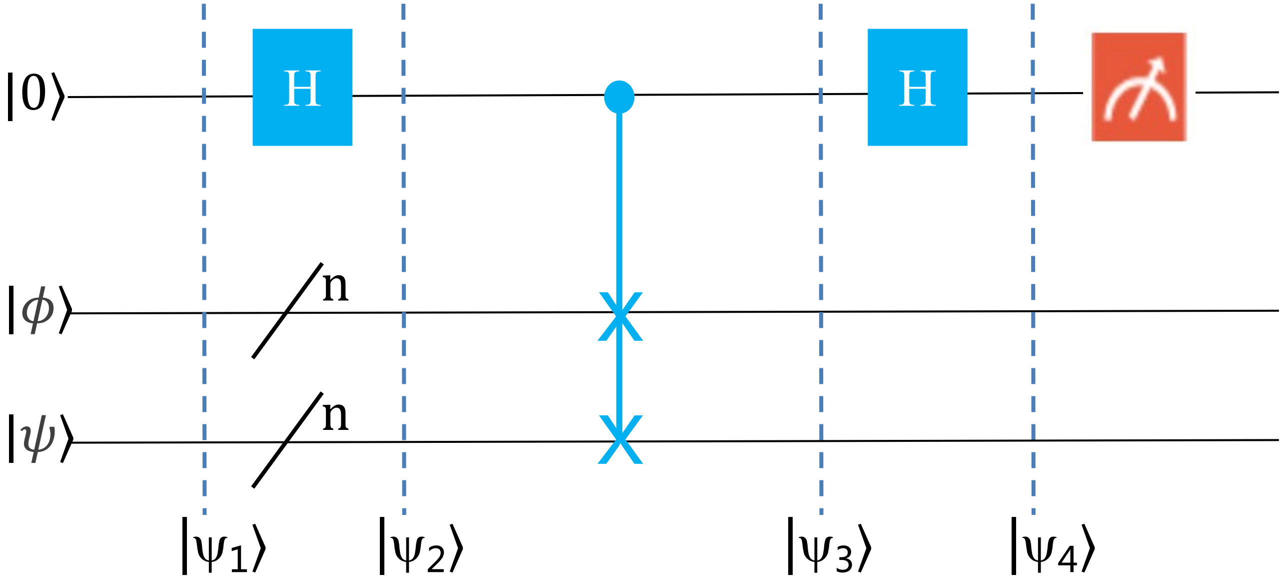


Calvin, QQ: 179209347 Mail: 179209347@qq.com

SWAP Test – 测量前的状态

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$$

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\,|0\rangle + |1\rangle\,\right)$$
$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\,|0\rangle - |1\rangle\,\right)$$



4. 再经过最后一个 H 门

$$|\psi_4\rangle = H|\psi_3\rangle$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(H|0\rangle|\phi\rangle|\psi\rangle + H|1\rangle|\psi\rangle|\phi\rangle)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|\phi\rangle|\psi\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)|\psi\rangle|\phi\rangle)$$
$$= \frac{1}{2}[|0\rangle\,(|\phi\rangle|\psi\rangle + |\psi\rangle|\phi\rangle) + |1\rangle\,(|\phi\rangle|\psi\rangle - |\psi\rangle|\phi\rangle)]$$

SWAP Test – 测量

$$|\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|\phi\rangle|\psi\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)|\psi\rangle|\phi\rangle\right)$$
$$= \frac{1}{2}[|0\rangle(|\phi\rangle|\psi\rangle + |\psi\rangle|\phi\rangle) + |1\rangle(|\phi\rangle|\psi\rangle - |\psi\rangle|\phi\rangle)]$$

测量 $|0\rangle$ ：

$$(|0\rangle\langle 0| \otimes I)|\psi_4\rangle = (|0\rangle\langle 0| \otimes I)\frac{1}{2}[|0\rangle(|\phi\rangle|\psi\rangle + |\psi\rangle|\phi\rangle) + |1\rangle(|\phi\rangle|\psi\rangle - |\psi\rangle|\phi\rangle)]$$
$$= \frac{1}{2}[|0\rangle\langle 0|0\rangle(|\phi\rangle|\psi\rangle + |\psi\rangle|\phi\rangle) + |0\rangle\langle 0|1\rangle(|\phi\rangle|\psi\rangle - |\psi\rangle|\phi\rangle)]$$
$$= \frac{1}{2}[|0\rangle \otimes (|\phi\rangle|\psi\rangle + |\psi\rangle|\phi\rangle)]$$

那么测量的概率：

$$\mathrm{Prob}(0) = \left\|\frac{1}{2}[|0\rangle \otimes (|\phi\rangle|\psi\rangle + |\psi\rangle|\phi\rangle)]\right\|^2 = \frac{1}{4}\||0\rangle\|^2 \,\|(|\phi\rangle|\psi\rangle + |\psi\rangle|\phi\rangle)\|^2$$
$$= \frac{1}{4}(|\phi\rangle|\psi\rangle + |\psi\rangle|\phi\rangle)^\dagger(|\phi\rangle|\psi\rangle + |\psi\rangle|\phi\rangle)$$
$$= \frac{1}{4}(\langle\psi|\langle\phi| + \langle\phi|\langle\psi|)(|\phi\rangle|\psi\rangle + |\psi\rangle|\phi\rangle)$$
$$= \frac{1}{4}(\langle\psi|\langle\phi|\phi\rangle|\psi\rangle + \langle\phi|\langle\psi|\phi\rangle|\psi\rangle + \langle\phi|\langle\psi|\phi\rangle|\psi\rangle + \langle\phi|\langle\psi|\psi\rangle|\phi\rangle)$$
$$= \frac{1}{4}(1 + \langle\phi|\langle\psi|\phi\rangle|\psi\rangle + \langle\phi|\langle\psi|\phi\rangle|\psi\rangle + 1)$$
$$= \frac{1}{2}(1 + \|\langle\psi|\phi\rangle\|^2)$$

公式：

- $\langle 0|1\rangle = 1 \quad \langle 0|1\rangle = 0$
- $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$
- $|\,|\psi\rangle\,|^2 = |\psi\rangle^\dagger|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle$
- $(A \otimes B)^\dagger = A^\dagger \otimes B^\dagger$
- $(cA)^\dagger = c^* A^\dagger$
- $(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$
- $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$
- $\langle e_j|A|e_k\rangle = \langle e_k|A^\dagger|e_j\rangle^*$
- $\langle u|A|v\rangle = \langle A^\dagger u|v\rangle = \langle v|A^\dagger|u\rangle^*$

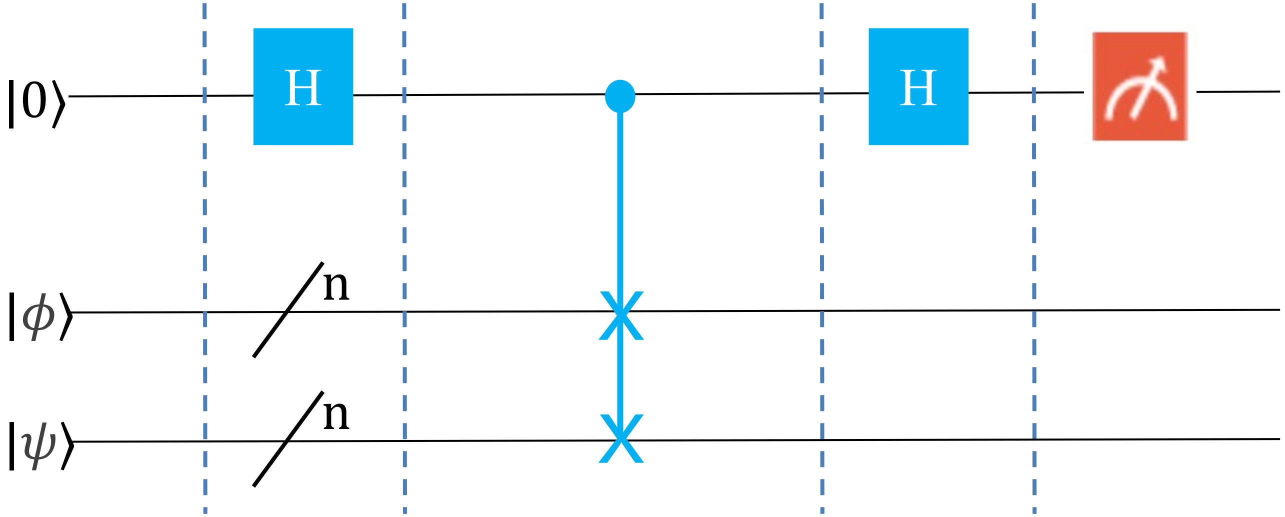
Calvin, QQ: 179209347 Mail: 179209347@qq.com

SWAP Test

对SWAP Test的公式推导验证过程完全类似于Hadamard Test，结果量子态的第一个寄存器测量得到$|0\rangle, |1\rangle$的概率均与给定的两个量子态的保真度相关。也就是可以多次测量，判断两个量子态 $|\phi\rangle, |\psi\rangle$ 具体区别有多大。

$$P_0 = \frac{1+|\langle\psi|\phi\rangle|^2}{2}, \ P_1 = 1 - P_0$$

SWAP Test作为Hadamard的一种特殊形式，它对两个给定量子态给出了其保真度相关的测量结果，具有重要应用意义。在量子态的内积相关研究中有着重要作用。



Thank You