Qubits
qubits.top

量子计算

—数学基础

Quantum Computing

网址：www.qubits.top

作者：Calvin Tang

邮箱：179209347@qq.com

介绍

教程简介：

- 面向对象：量子计算初学者
- 依赖课程：线性代数，量子力学（非必需）

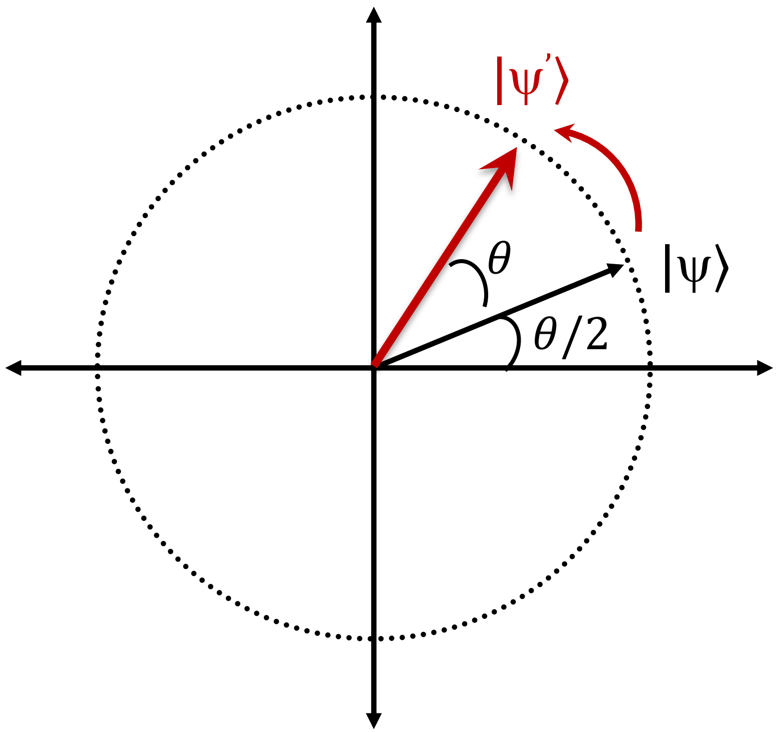
知乎专栏：
https://www.zhihu.com/column/c_1501138176371011584

Github & Gitee 地址：
https://github.com/mymagicpower/qubits
https://gitee.com/mymagicpower/qubits

*** 版权声明：**

- 仅限用于个人学习
- 禁止用于任何商业用途

二维常用几何变换 - 逆时针旋转 θ



$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)\ |0\rangle + \sin(\theta/2)\,|1\rangle = \begin{bmatrix}\cos(\theta/2)\\ \sin(\theta/2)\end{bmatrix}$$

* 量子态为实系数特例

$$Q=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & -sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{bmatrix}$$

* 每次作用于向量，相当于逆时针旋转 θ

证明：

两角和与差的三角函数公式：

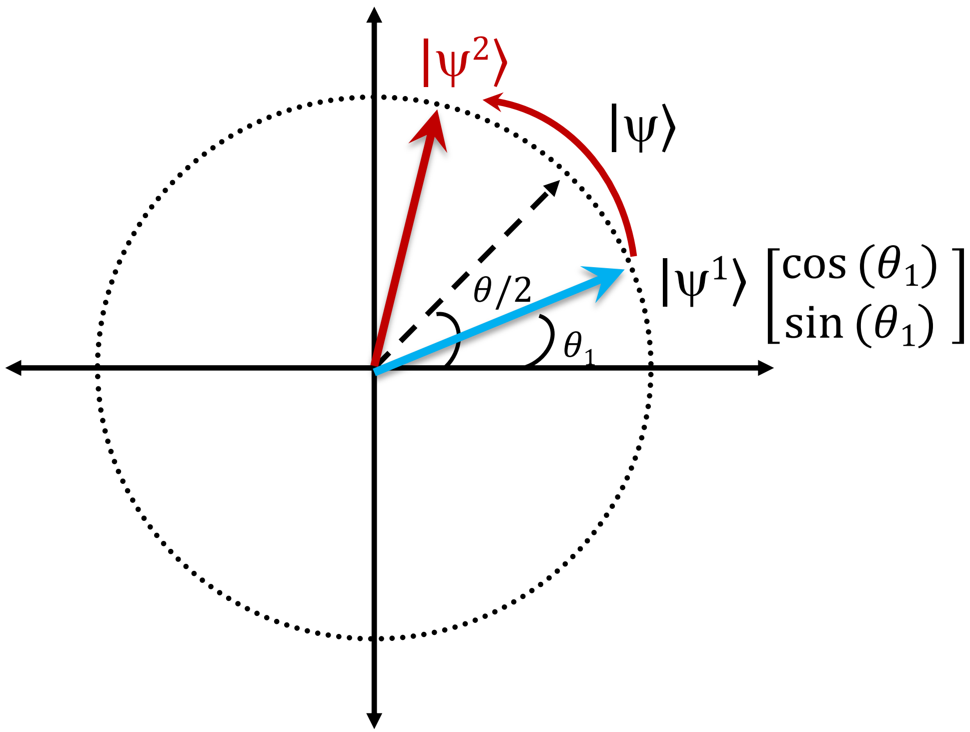
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp sin\,\alpha\sin\beta$$

$$\begin{aligned}|\psi'\rangle &= Q\,|\psi\rangle\\ &= \begin{bmatrix}\cos(\theta) & -sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(\theta/2)\\ \sin(\theta/2)\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\cos(\theta)\cos(\theta/2) - sin(\theta)\sin(\theta/2)\\ \sin(\theta)\ \cos(\theta/2)\ + \cos(\theta)\sin(\theta/2)\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\cos(\theta/2+\theta)\\ \sin(\theta/2+\theta)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

二维常用几何变换 – 镜像

$$Q=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{bmatrix}$$

* 关于通过原点、方向和水平轴夹角为 $\theta/2$ 直线镜像;



$$|\psi\rangle=\cos(\theta/2)\ |0\rangle+\sin(\theta/2)\ |1\rangle=\begin{bmatrix}\cos(\theta/2)\\ \sin(\theta/2)\end{bmatrix}$$

* 量子态为实系数特例

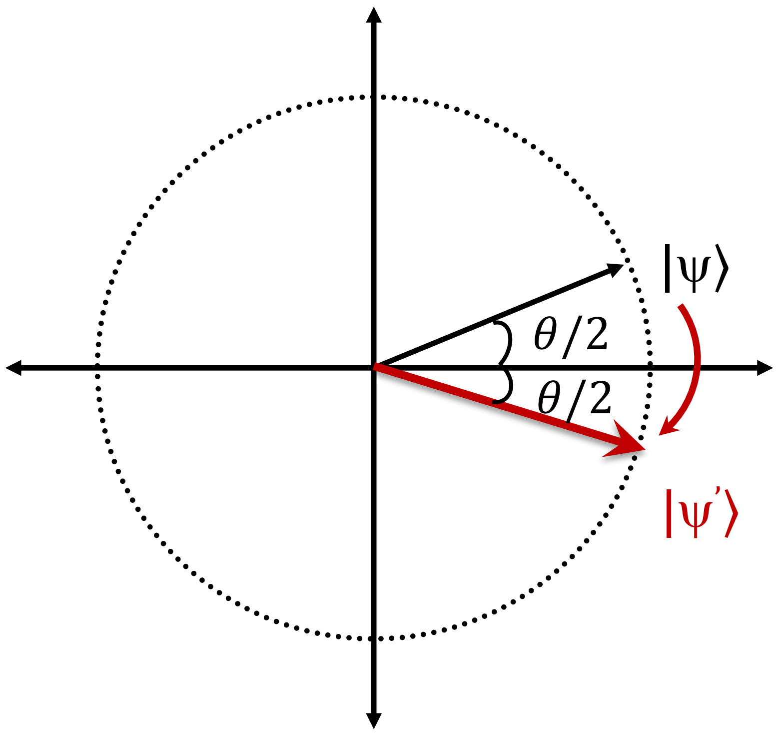
证明：

$$\begin{aligned}|\psi^2\rangle &= Q\ |\psi^1\rangle\\ &=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(\theta_1)\\ \sin(\theta_1)\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\cos(\theta)\cos(\theta_1)+sin(\theta)\sin(\theta_1)\\ \sin(\theta)\ \cos(\theta_1)\ -\cos(\theta)\sin(\theta_1)\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\cos(\theta-\theta_1)\\ \sin(\theta-\theta_1)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

关于通过原点、方向和水平轴夹角为 $\theta/2$ 直线镜像，可以理解为逆时针旋转 $2\left(\frac{\theta}{2}-\theta_1\right)$，则：

$$|\psi^2\rangle=\begin{bmatrix}\cos\left(\theta_1+2\left(\frac{\theta}{2}-\theta_1\right)\right)\\ \sin\left(\theta_1+2\left(\frac{\theta}{2}-\theta_1\right)\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\theta-\theta_1)\\ \sin(\theta-\theta_1)\end{bmatrix}$$

二维常用几何变换 -关于横轴镜像对称



$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)\ |0\rangle + \sin(\theta/2)\ |1\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{bmatrix}$$

* 量子态为实系数特例

$$Q = \begin{bmatrix} \cos(0) & \mathit{sin}(0) \\ \sin(0) & -\cos(0) \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

* 作用于向量，相当于关于横轴镜像

证明：

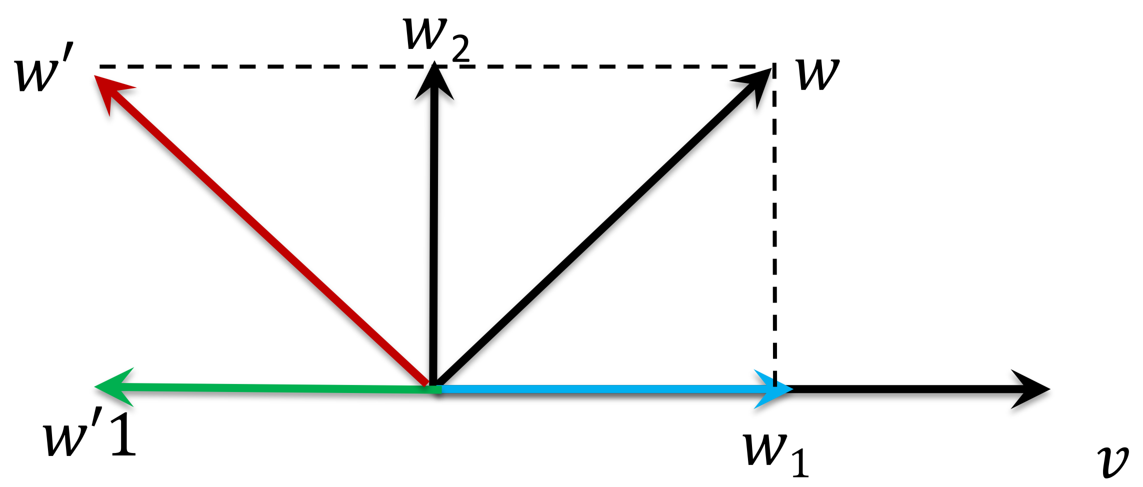
$$\begin{aligned} |\psi'\rangle &= Q\,|\psi\rangle \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

任意维度反射变换 – 实向量空间

线性代数，在任意维度空间中，有如下反射变换，对应的矩阵为：

$$R_n = I_n - 2vv^T$$

在公式中， I_n 为 nxn 的单位矩阵，v为长度为 1 的 n 维列向量， vv^T为 nxn 的矩阵。
R_n 可以实现**反射变换**：把任意向量 w 与 v 平行的分量 w_1 反向为 $w'1$，而与 v 垂直的分量 w_2保持不变。

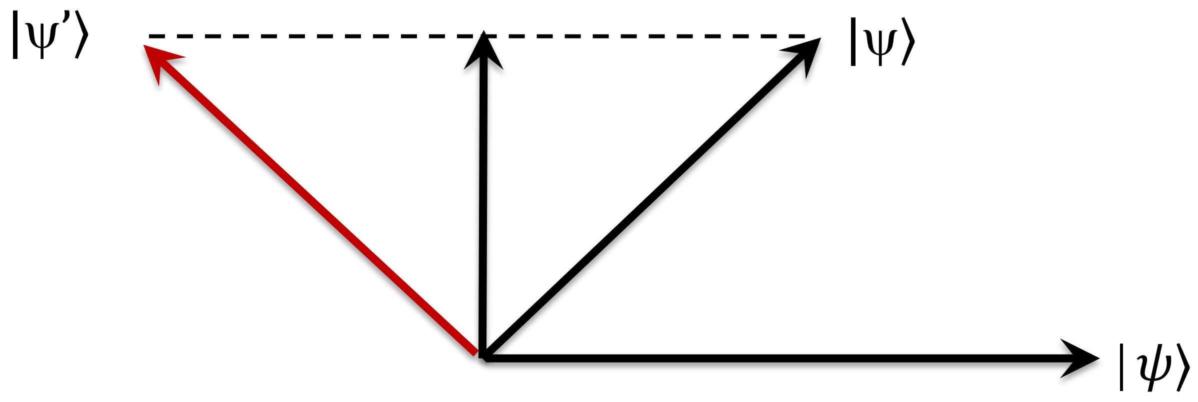


R_n 作用于任何向量，相当于关于 v 的垂直分量 w_2（法线）做镜像映射。

任意维度反射变换 – 复向量空间

根据我们之前总结的实向量与复向量的变换关系，我们可以得到下面等价的公式：

$$R_n = I_n - 2|\psi\rangle\langle\psi|$$



R_n 作用于任何量子态向量 |ψ⟩ ，相当于关于 $|\psi\rangle$垂直方向（法线）做镜像映射。

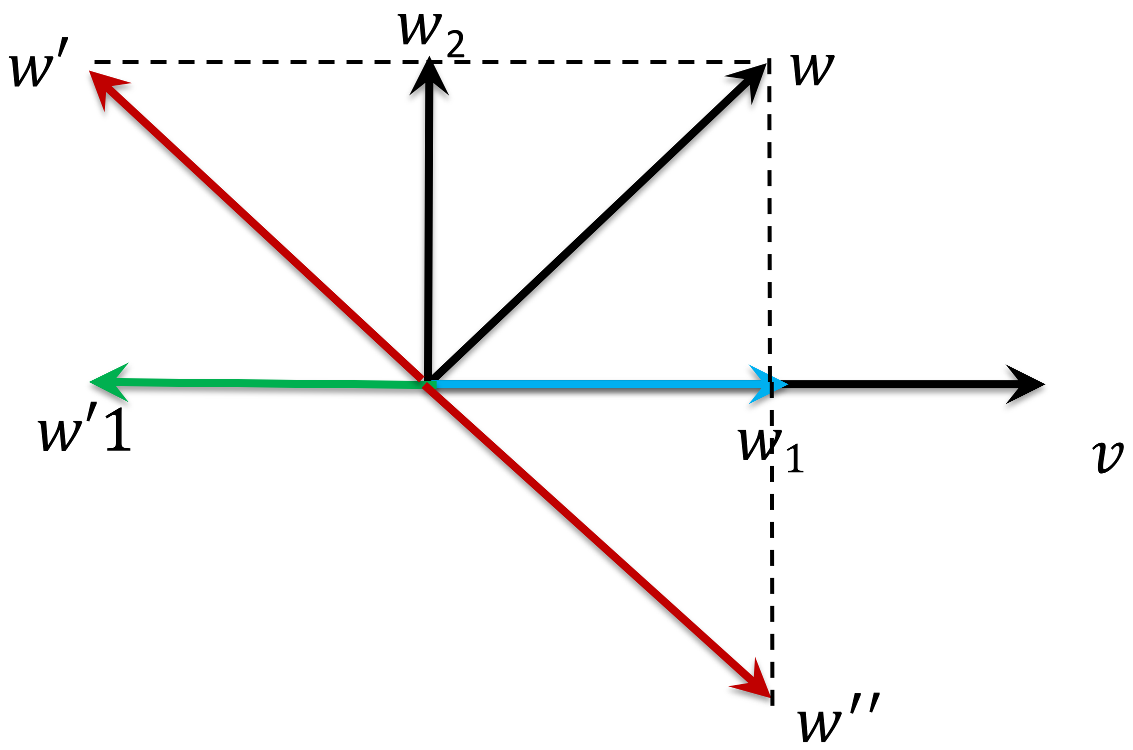
$$R_n = I_n - 2|\psi\rangle\langle\psi|$$

任意维度镜像变换 – 实向量空间

如果我们将公式改为下面的写法，也就是增加一个负号，我们看看它的几何性质：

$$R_n = 2vv^T - I_n$$

增加一个负号，相当于在任意维空间中，将 w' 翻转反向，至 w'' 的位置，显然，其与原向量关于 v 形成镜像映射关系。

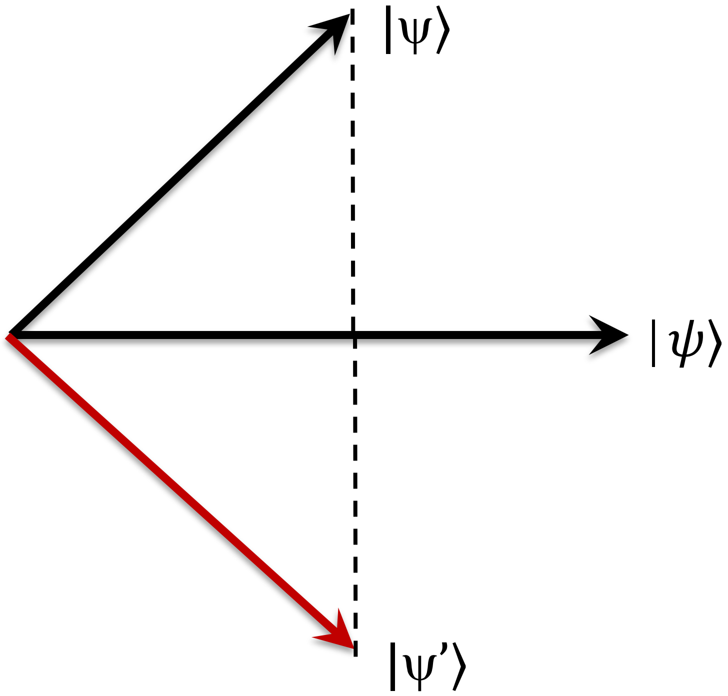


R_n 作用于任何向量，相当于关于 v 做镜像映射。

任意维度镜像变换 – 复向量空间

根据我们之前总结的实向量与复向量的变换关系，我们可以得到下面等价的公式：

$$R_n = 2|\psi\rangle\langle\psi| - I_n$$

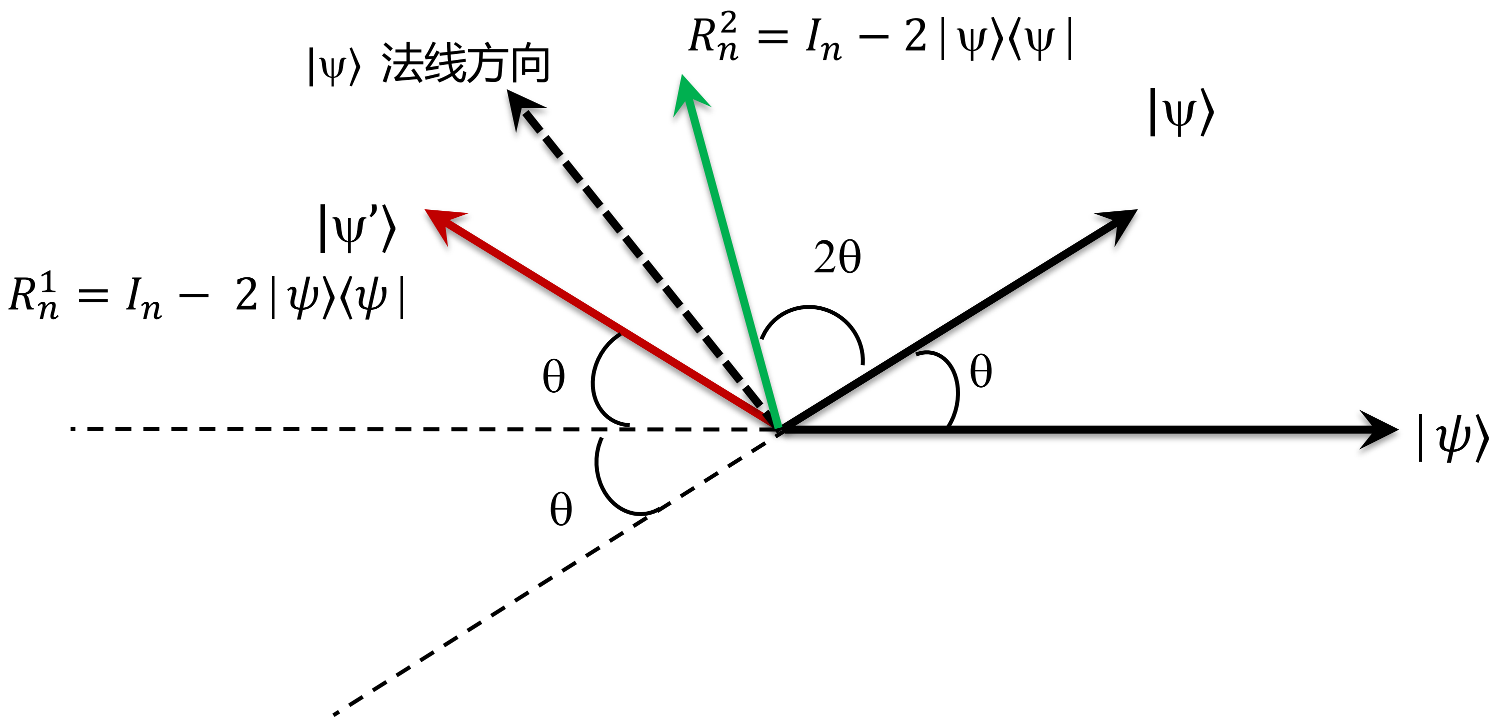


R_n 作用于任何量子态向量 $|\psi\rangle$ ，相当于关于 $|\psi\rangle$ 做镜像映射。

$$R_n = 2|\psi\rangle\langle\psi| - I_n$$

两次反射变换定义旋转

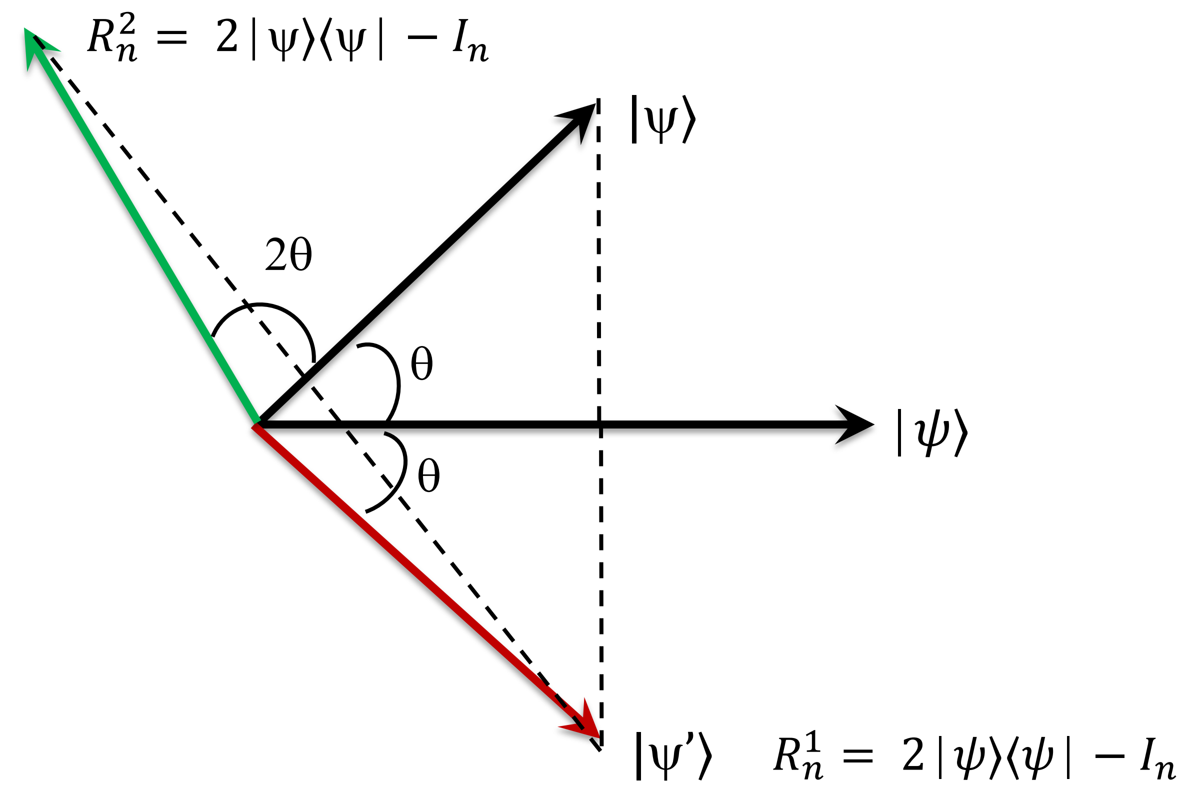
连续两次反射变换：



相当于逆时针旋转 2θ 角。

两次镜像变换定义旋转

连续两次镜像映射：



相当于逆时针旋转 2θ 角。

Qubits
qubits.top

Thank You