Qubits
qubits.top

量子计算

—数学基础

Quantum Computer

网址：www.qubits.top

Calvin Tang

179209347@qq.com

介绍

教程简介：

- 面向对象：量子计算初学者
- 依赖课程：线性代数，解析几何，量子力学（非必需）

知乎专栏：
https://www.zhihu.com/column/c_1501138176371011584

Github & Gitee 地址：
https://github.com/mymagicpower/qubits
https://gitee.com/mymagicpower/qubits

*** 版权声明：**

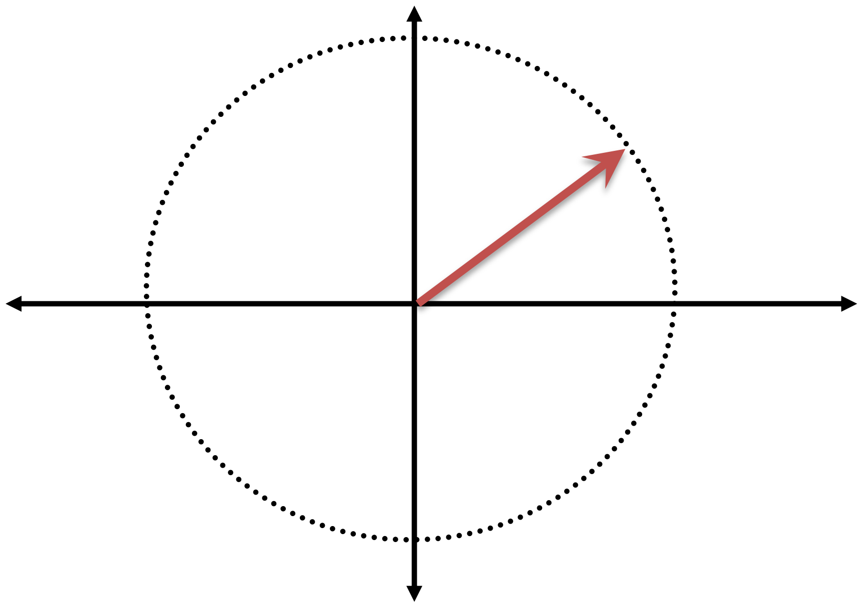
- 仅限用于个人学习，或者大学授课使用
（大学授课如需ppt 原件，请用学校邮箱联系我获取）
- 禁止用于任何商业用途

H (Hadamard) 门

Hadamard 门是一种可以将基态变为叠加态的量子逻辑门，简称H门。

$$\text{矩阵形式 } \mathrm{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

当 α 和 β都为实数时，且长度归一化，则量子态位于单位圆上：



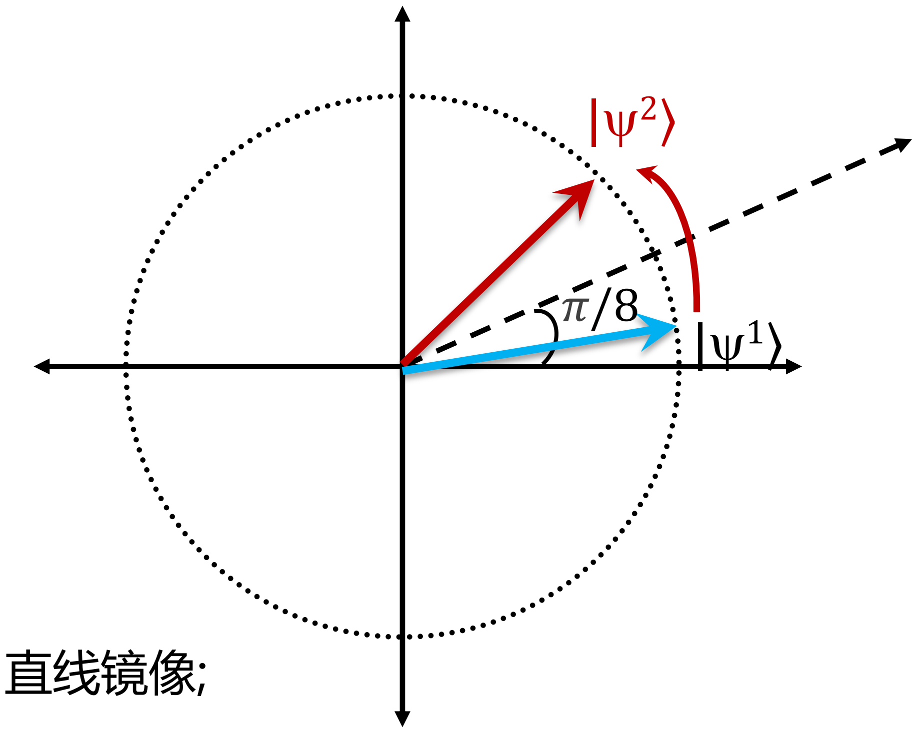
H (Hadamard) 门 – α 和 β都为实数

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos(\frac{\pi}{4}) & sin(\frac{\pi}{4})\\ \sin(\frac{\pi}{4}) & -\cos(\frac{\pi}{4})\end{bmatrix}$$

观察发现，符合镜像公式：

$$Q=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{bmatrix}$$

* 关于通过原点、方向和水平轴夹角为 $\theta/2$ 直线镜像;



可知：

H门操作，相当于关于通过原点、方向和水平轴夹角为 $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{8}$ 直线镜像;

H (Hadamard) 门 – α 和 β都为实数 - 举例

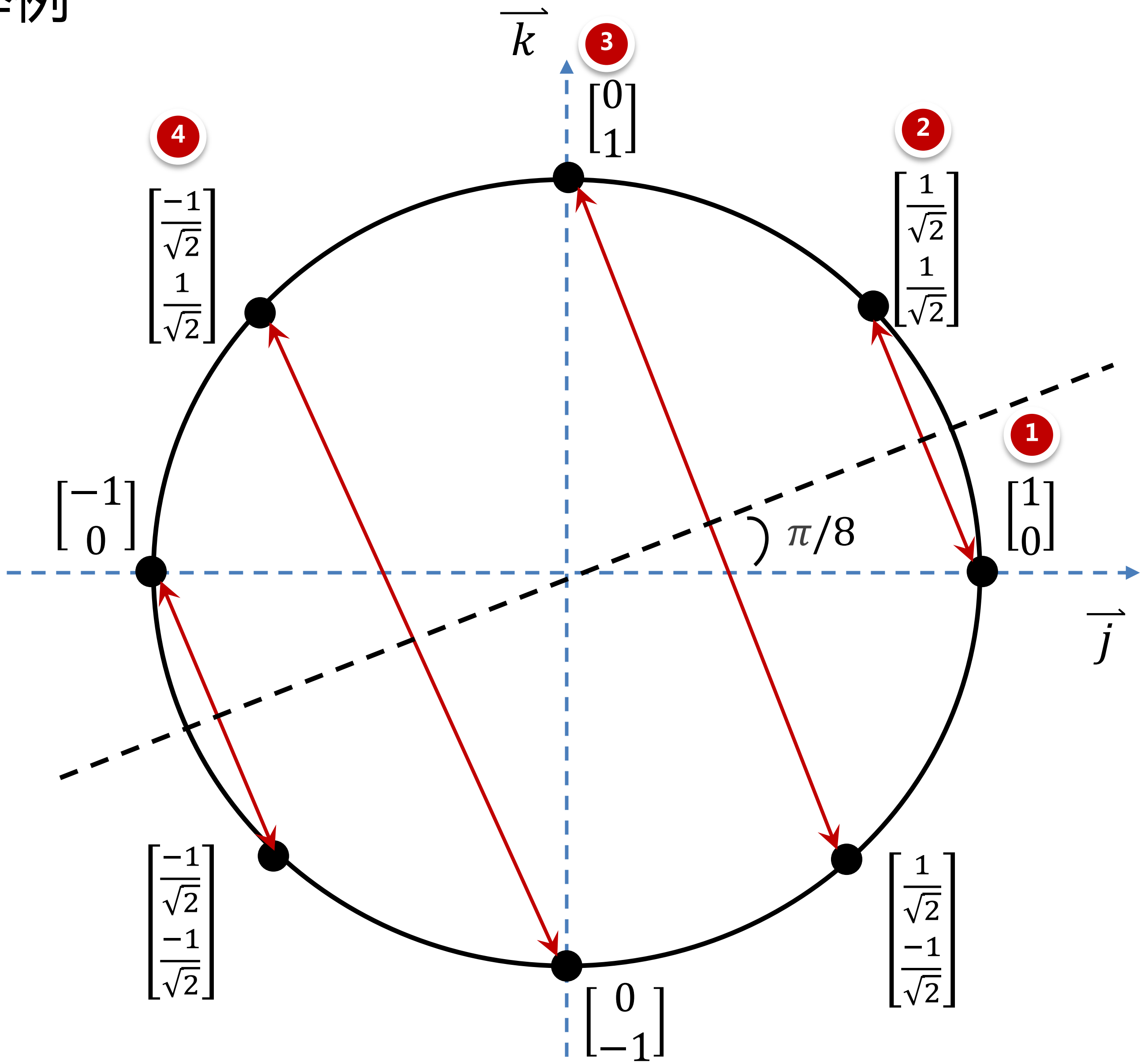
1 $H\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

2 $H\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

3 $H\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

4 $H\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$

…



参考来源： Quantum Computing for Computer Scientists

H (Hadamard) 门 – α 和 β都为复数

单量子比特的**复向量**表示：

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix}\alpha \\ \beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a + b\,i \\ c + d\,i\end{bmatrix}$$

（ α、β 都是复数）

单量子比特的**实向量**表示：

$$\begin{bmatrix}a \\ b \\ c \\ d\end{bmatrix}$$

所有的门，都是希尔伯特空间中的算子，即算子矩阵中所有的元素都是复数（其中的实数应理解为虚部为 0）。

那么$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1 \\ 1 & -1\end{bmatrix}$ **实向量空间**中的矩阵表示（看做 2 * 2 分块矩阵）：

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1\end{array}\right]$$

$a + b\,i$ 算子其矩阵表示：

$$\begin{bmatrix}a & -b \\ b & a\end{bmatrix}$$

H (Hadamard) 门 – α 和 β都为复数 - 举例

单量子比特的**复向量**表示：

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a + b\,i\\ c + d\,i\end{bmatrix}$$

H门作用于量子态：

$$H\,|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\alpha + \beta\\ \alpha - \beta\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}(a + c) + (b + d)i\\ (a - c) + (b - d)i\end{bmatrix}$$

单量子比特的**实向量**表示：

$$\begin{bmatrix}a + b\,i\\ c + d\,i\end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{bmatrix}$$

H门作用于量子态：

$$H\,|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}a + c\\ b + d\\ a - c\\ b - d\end{bmatrix} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}(a + c) + (b + d)i\\ (a - c) + (b - d)i\end{bmatrix}$$

Pauli-X 门

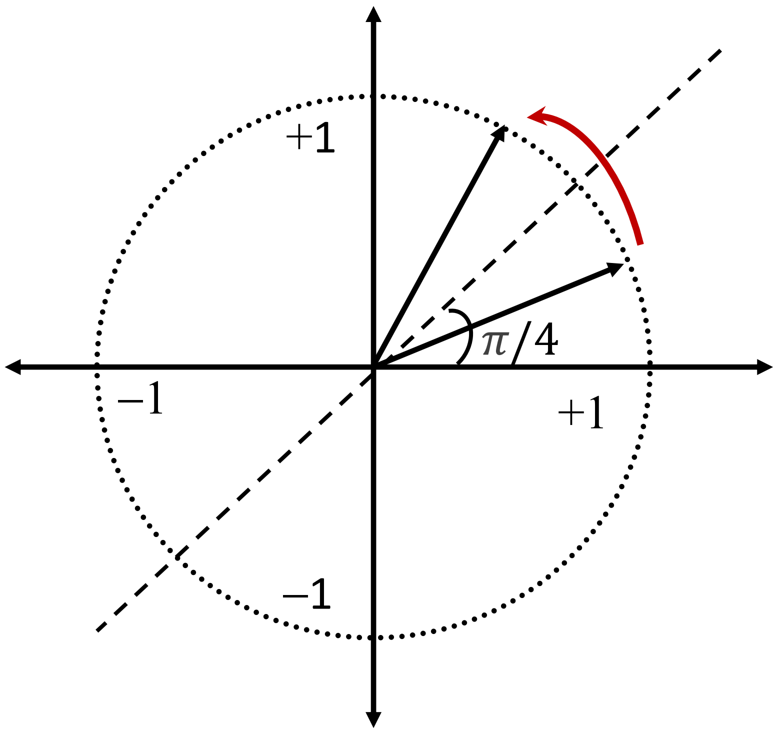
Pauli-X 门矩阵形式为泡利矩阵 σ_x，即：

$$X = \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix}$$

观察发现，符合镜像公式：

$$Q = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{bmatrix}$$

* 关于通过原点、方向和水平轴夹角为 $\theta/2$ 直线镜像;



可知：

X 门操作，相当于关于通过原点、方向和水平轴夹角为 $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4}$ 直线镜像;

Pauli-X 门 – α 和 β都为实数，且归一化 - 举例

X 门作用在基态：

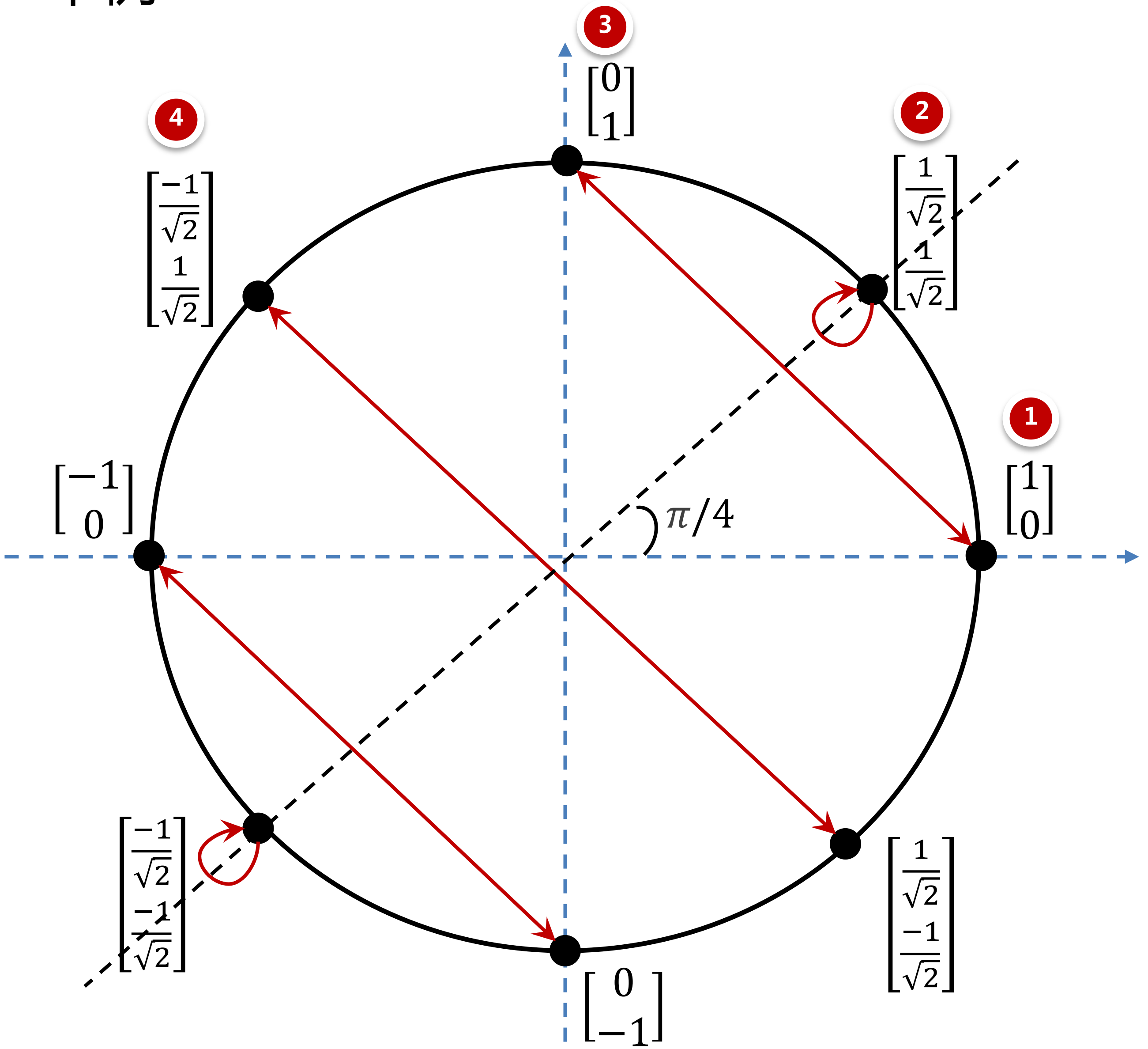
1 $X|0\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |1\rangle$

3 $X|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |0\rangle$

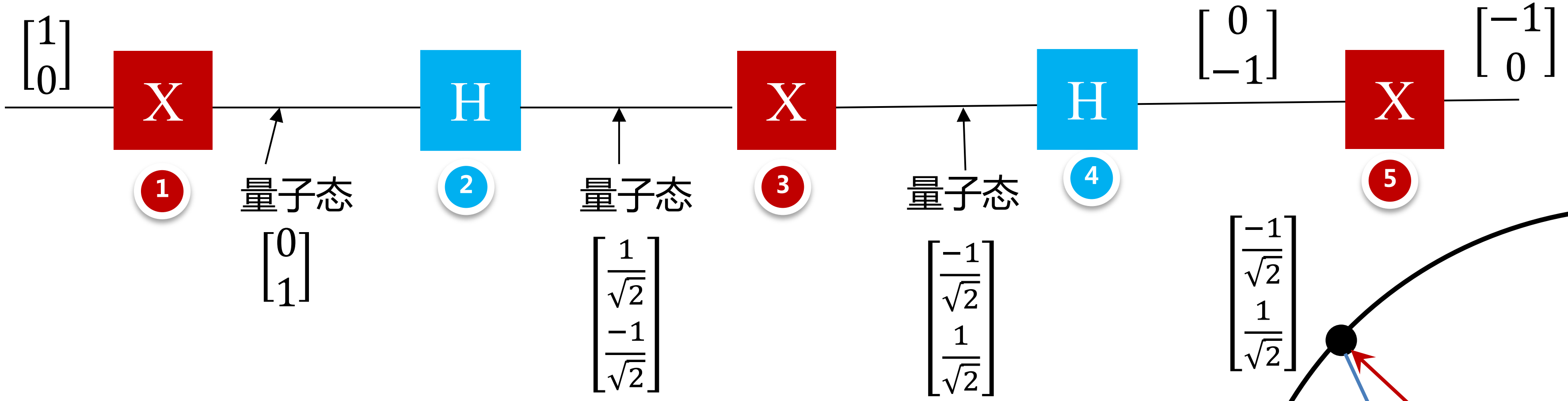
X 门作用在叠加态：

2 $X \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

4 $X \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$



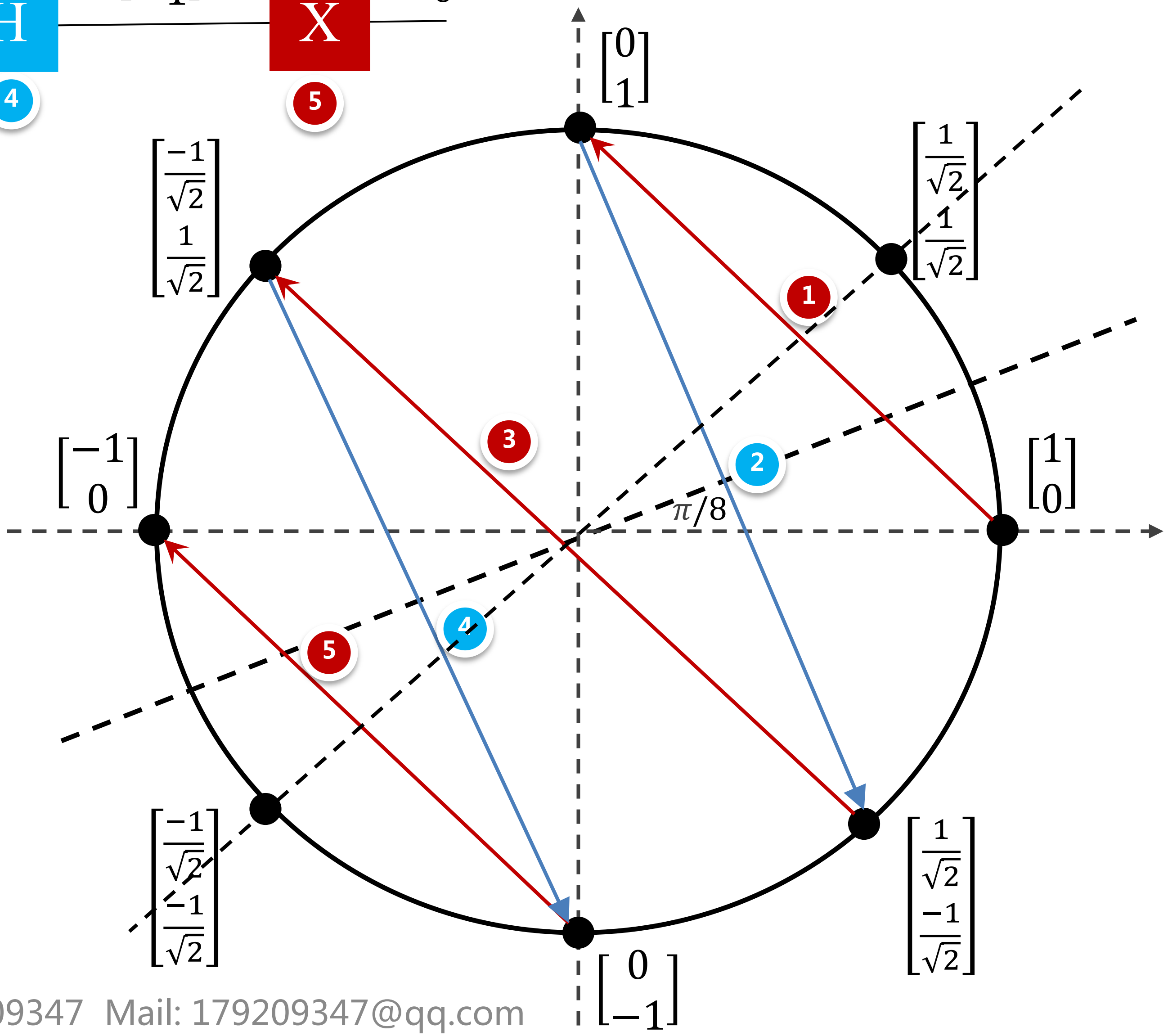
Pauli-X 门 – X H 门结合使用例子



连续两次 X门 或者连续两次 H门 都会恢复量子态。但是如果2次 X门 和2次 H门 交替操作，结果却会不同。

如图所示交替操作之后：

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$$



Pauli-X 门 – α 和 β都为复数

单量子比特的**复向量**表示：

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a + b\,i\\ c + d\,i\end{bmatrix}$$

（ α、β 都是复数）

单量子比特的**实向量**表示：

$$\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{bmatrix}$$

所有的门，都是希尔伯特空间中的算子，即算子矩阵中所有的元素都是复数（其中的实数应理解为虚部为 0）。

那么 $X = \sigma_x = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ **实向量空间**中的矩阵表示（看做 2 * 2 分块矩阵）：

$$\left[\begin{array}{cc|cc}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \hline 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{array}\right]$$

a + b i 算子其矩阵表示：

$$\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}$$

Pauli-X 门 – α 和 β都为复数 - 举例

单量子比特的**复向量**表示：

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta|1\rangle \; = \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a + b\; i\\ c + d\; i\end{bmatrix}$$

X 门作用于量子态：

$$X|\psi\rangle = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\beta\\ \alpha\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c + d\; i\\ a + b\; i\end{bmatrix}$$

单量子比特的**实向量**表示：

$$\begin{bmatrix}a + b\; i\\ c + d\; i\end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{bmatrix}$$

X 门作用于量子态：

$$X|\psi\rangle = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c\\ d\\ a\\ b\end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix}c + d\; i\\ a + b\; i\end{bmatrix}$$

Pauli-Y 门

Pauli-Y 门矩阵形式为泡利矩阵σ_y，即：

$$\mathrm{Y} = \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

其量子线路符号：

Y 门作用在基态：

$$\mathrm{Y}|0\rangle = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} = \mathrm{i}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathrm{i}|1\rangle$$

$$\mathrm{Y}|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \\ 0 \end{bmatrix} = -\mathrm{i}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -\mathrm{i}|0\rangle$$

Y 门作用在任意量子态 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$，得到的新的量子态为：

$$|\psi'\rangle = \mathrm{Y}|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathrm{i}\beta \\ \mathrm{i}\alpha \end{bmatrix} = -\mathrm{i}\beta|0\rangle + \mathrm{i}\alpha|1\rangle$$

Pauli-Y 门 – α 和 β都为复数

单量子比特的**复向量**表示：

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a + b\,i\\ c + d\,i\end{bmatrix}$$

（ α、β 都是复数）

单量子比特的**实向量**表示：

$$\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{bmatrix}$$

所有的门，都是希尔伯特空间中的算子，即算子矩阵中所有的元素都是复数（其中的实数应理解为虚部为 0）。

那么 $Y = \sigma_y = \begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix}$ **实向量空间**中的矩阵表示（看做 2 * 2 分块矩阵）：

$$\left[\begin{array}{cc|cc}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ \hline 0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

a + b i 算子其矩阵表示：

$$\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}$$

Pauli-Y 门 – α 和 β都为复数 - 举例

单量子比特的**复向量**表示：

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta|1\rangle \;=\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a + b\, i\\ c + d\, i\end{bmatrix}$$

Y 门作用于量子态：

$$Y|\psi\rangle = \begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-i\beta\\ i\alpha\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-i(c + d\, i)\\ i(a + b\, i)\end{bmatrix}$$

单量子比特的**实向量**表示：

$$\begin{bmatrix}a + b\, i\\ c + d\, i\end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{bmatrix}$$

Y 门作用于量子态：

$$Y|\psi\rangle = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}d\\ -c\\ -b\\ a\end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix}d - ci\\ -b+ai\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-i(c + d\, i)\\ i(a + b\, i)\end{bmatrix}$$

Pauli-Z 门

Pauli-Z 门矩阵形式为泡利矩阵σ_z，即：

$$Z = \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$$

Z 门作用在基态：

$$Z|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (-1)^0|0\rangle = |0\rangle$$

$$Z|1\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = (-1)^1|1\rangle = -|1\rangle$$

$$\Rightarrow \quad Z\,|\,j\,\rangle = (-1)^j|\,j\,\rangle$$

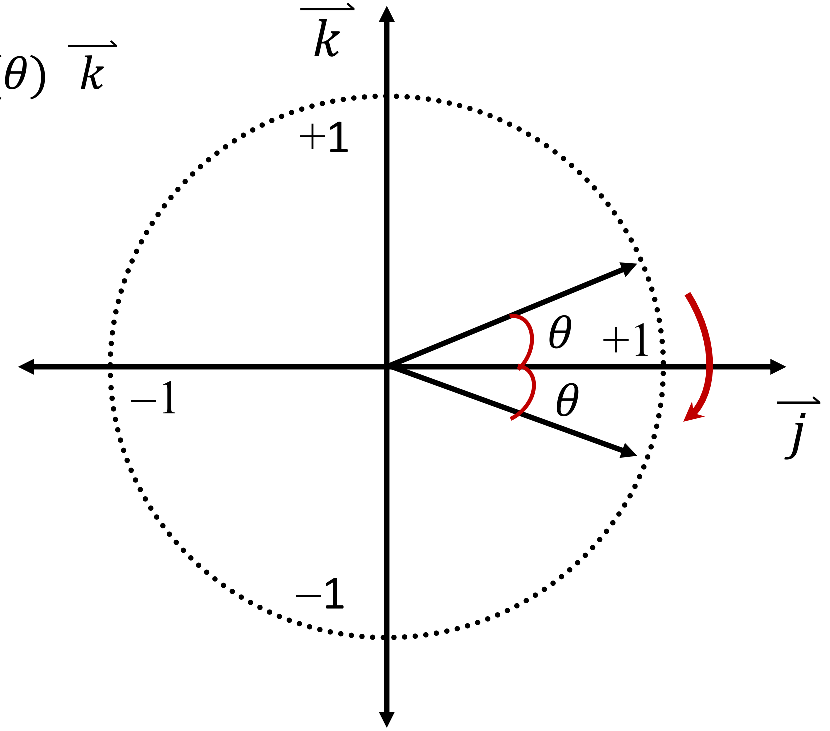
Z 门作用在任意量子态 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$，得到的新的量子态为：

$$|\psi'\rangle = Z|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\beta \end{bmatrix} = \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle$$

Pauli-Z 门 – α 和 β 都为实数，且归一化

$$Z = \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \cos(\theta)\,|0\rangle + \sin(\theta)\,|1\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} = \cos(\theta)\,\vec{j} + \sin(\theta)\,\vec{k}$$



Z 门作用在量子态 $|\psi\rangle$ ：

$$Z\,|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \end{bmatrix}$$

* 每次作用于量子态(向量)，相当于在j,k平面内相对 j 轴做镜像映射。

Pauli-Z 门 – α 和 β都为复数

单量子比特的**复向量**表示：

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta|1\rangle\ = \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a + b\ i\\ c + d\ i\end{bmatrix}$$

（ α、β 都是复数 ）

单量子比特的**实向量**表示：

$$\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{bmatrix}$$

所有的门，都是希尔伯特空间中的算子，即算子矩阵中所有的元素都是复数（其中的实数应理解为虚部为 0 ）。

那么 $Z = \sigma_z = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ **实向量空间**中的矩阵表示（看做 2 * 2 分块矩阵）：

$$\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{array}\right]$$

a + b i 算子其矩阵表示：

$$\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}$$

Pauli-Z 门 – α 和 β都为复数 - 举例

单量子比特的**复向量**表示：

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta|1\rangle \ = \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a + b\ i\\ c + d\ i\end{bmatrix}$$

Z 门作用于量子态：

$$Z|\psi\rangle = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha\\ -\beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a + b\ i\\ -(c + d\ i)\end{bmatrix}$$

单量子比特的**实向量**表示：

$$\begin{bmatrix}a + b\ i\\ c + d\ i\end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{bmatrix}$$

Z 门作用于量子态：

$$Z|\psi\rangle = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\ b\\ -c\\ -d\end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix}a + b\ i\\ -(c + d\ i)\end{bmatrix}$$

RX(θ) 门

RX门矩阵形式为：

$$R_x(\theta) = e^{-i\theta X/2} = \cos(\theta/2)\,I - i\sin(\theta/2)X$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -i\sin(\theta/2) \\ -i\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

$R_X(\pi/2)$ 门作用在任意量子态 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$，得到的新的量子态为：

$$|\psi'\rangle = R_X(\pi/2)\,|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \alpha - i\beta \\ \beta - i\alpha \end{bmatrix} = \frac{\alpha - i\beta}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{\beta - i\alpha}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

RX(θ) 门 - 重要性质

两角和与差的三角函数公式：

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$Q = R_x(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -i\sin(\theta/2) \\ -i\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

$$Q^2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -i\sin(\theta/2) \\ -i\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -i\sin(\theta/2) \\ -i\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2) & -2\,i\cos(\theta/2)\sin(\theta/2) \\ -2\,i\cos(\theta/2)\sin(\theta/2) & \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta/2 + \theta/2) & -i\sin(\theta/2 + \theta/2) \\ -i\sin(\theta/2 + \theta/2) & \cos(\theta/2 + \theta/2) \end{bmatrix}$$

$$Q^3 = \begin{bmatrix} \cos(3\theta/2) & -i\sin(3\theta/2) \\ -i\sin(3\theta/2) & \cos(3\theta/2) \end{bmatrix}$$

....

$$Q^n = \begin{bmatrix} \cos(n\theta/2) & -i\sin(n\theta/2) \\ -i\sin(n\theta/2) & \cos(n\theta/2) \end{bmatrix}$$

RX(θ) 门 – 复向量旋转

两角和与差的三角函数公式：

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

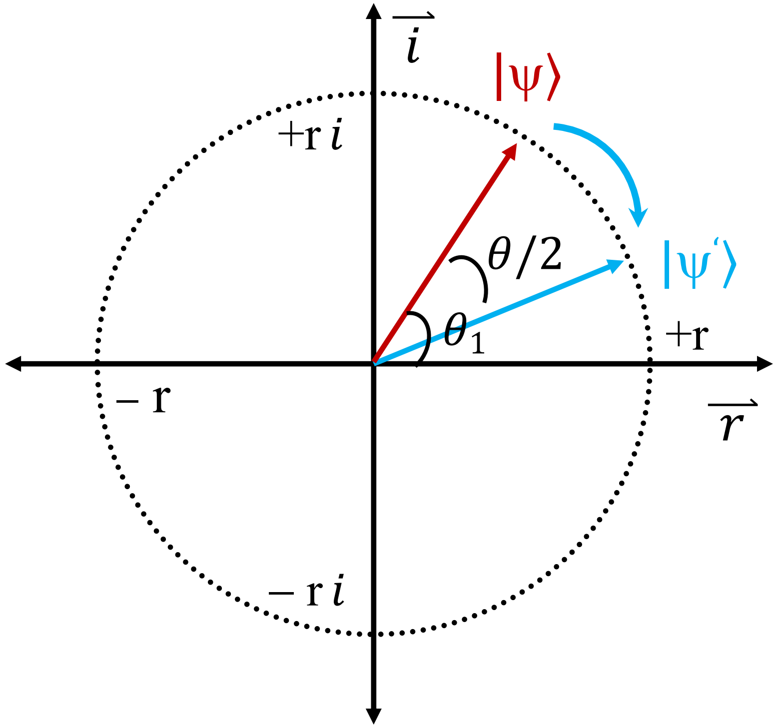
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$$|\psi\rangle = r(\cos(\theta_1) + i\ \sin(\theta_1)) = \begin{bmatrix} r\cos(\theta_1) \\ ri\sin(\theta_1) \end{bmatrix}$$

$$R_x(\theta)\,|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -i\sin(\theta/2) \\ -i\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r\cos(\theta_1) \\ ri\sin(\theta_1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} r\cos(\theta_1)\cos(\theta/2) + r\sin(\theta_1)\ \sin(\theta/2) \\ -ri\cos(\theta_1)\sin(\theta/2) + r\ i\sin(\theta_1)\cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} r\cos(\theta_1 - \theta/2) \\ r\ i\sin(\theta_1 - \theta/2) \end{bmatrix}$$



- $R_x(\theta)\,|\psi\rangle$ 相当于将复平面内的向量 $|\psi\rangle$ ，旋转 $\theta/2$ 角。

RX(θ) 门 - α 和 β都为实数

$$Q = R_x(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -isin(\theta/2) \\ -\mathrm{isin}(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)\ |0\rangle + \sin(\theta/2)\,|1\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{bmatrix}$$

$Q = R_x(\theta)$ 作用在量子态：

$$Q\,|\psi\rangle = Q\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -isin(\theta/2) \\ -\mathrm{isin}(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2)\cos(\theta/2) - i\,sin(\theta/2)\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2)\ \cos(\theta/2) - i\sin(\theta/2)\cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

$$Q^n\,|\psi\rangle = Q^n\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\mathrm{n}\theta/2) & -i\,sin(\mathrm{n}\theta/2) \\ -i\sin(\mathrm{n}\theta/2) & \cos(\mathrm{n}\theta/2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \cos(\mathrm{n}\theta/2)\cos(\theta/2) - i\,sin(\mathrm{n}\theta/2)\sin(\theta/2) \\ \cos(\mathrm{n}\theta/2)\ \sin(\theta/2) - i\sin(\mathrm{n}\theta/2)\cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

RX(θ) 门 - 布洛赫球 (Bloch Sphere) 几何表示

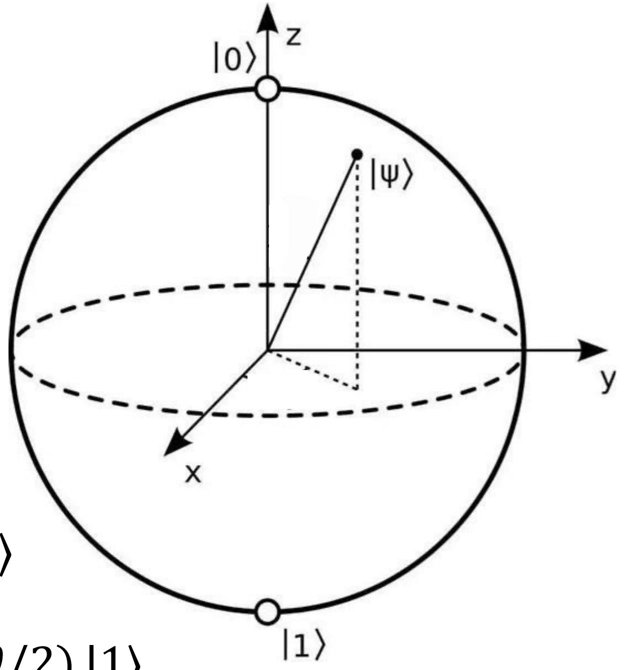
RX门由Pauli-X 矩阵作为生成元生成，其矩阵形式为：

$$R_x(\theta) = e^{-i\theta X/2} = \cos(\theta/2)\, I - i \sin(\theta/2) X$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -i\sin(\theta/2) \\ -i\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

其量子线路符号：X_θ

RX操作将原来的态上绕X轴逆时针旋转θ角。
能导致概率振幅的变化。



RX(θ) 门作用在基态：

$$R_x(\theta)|0\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -i\sin(\theta/2) \\ -i\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ -i\sin(\theta/2) \end{bmatrix} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle - i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$$

$$R_x(\theta)|1\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -i\sin(\theta/2) \\ -i\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i\sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{bmatrix} = -i\sin(\theta/2)|0\rangle + \cos(\theta/2)|1\rangle$$

$R_X(\pi/2)$ 门作用在任意量子态 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$，得到的新的量子态为：

$$|\psi'\rangle = R_X(\pi/2)|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \alpha - i\beta \\ \beta - i\alpha \end{bmatrix} = \frac{\alpha - i\beta}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{\beta - i\alpha}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

RY(θ) 门

RY门矩阵形式为：

$$R_y(\theta) = e^{-i\theta Y/2} = \cos(\theta/2)\,\mathrm{I} - \mathrm{i}\sin(\theta/2)\mathrm{Y}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

$R_y(\pi/2)$ 门作用在任意量子态 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$，得到的新的量子态为：

$$|\psi'\rangle = R_X(\pi/2)\,|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \alpha - \beta \\ \alpha + \beta \end{bmatrix} = \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

RY(θ) 门 - 重要性质

两角和与差的三角函数公式：

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$$Q = R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

$$Q^2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2) & -2\cos(\theta/2)\sin(\theta/2) \\ 2\cos(\theta/2)\sin(\theta/2) & \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta/2 + \theta/2) & -\sin(\theta/2 + \theta/2) \\ \sin(\theta/2 + \theta/2) & \cos(\theta/2 + \theta/2) \end{bmatrix}$$

$$Q^3 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta)\cos(\theta/2) - \sin(\theta)\sin(\theta/2) & -\cos(\theta)\sin(\theta/2) - \sin(\theta)\cos(\theta/2) \\ \sin(\theta)\cos(\theta/2) + \cos(\theta)\sin(\theta/2) & -\sin(\theta)\sin(\theta/2) + \cos(\theta)\cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(3\theta/2) & -\sin(3\theta/2) \\ \sin(3\theta/2) & \cos(3\theta/2) \end{bmatrix}$$

....

$$Q^n = \begin{bmatrix} \cos(n\theta/2) & -\sin(n\theta/2) \\ \sin(n\theta/2) & \cos(n\theta/2) \end{bmatrix}$$

矩阵几何意义：

每次作用于向量，相当于将向量逆时针旋转 $\frac{\theta}{2}$

RY(θ) 门 - α 和 β都为实数

$$Q = R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

* 每次作用于量子态(向量)，相当于逆时针旋转 $\frac{\theta}{2}$

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)\ |0\rangle + \sin(\theta/2)\ |1\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{bmatrix}$$

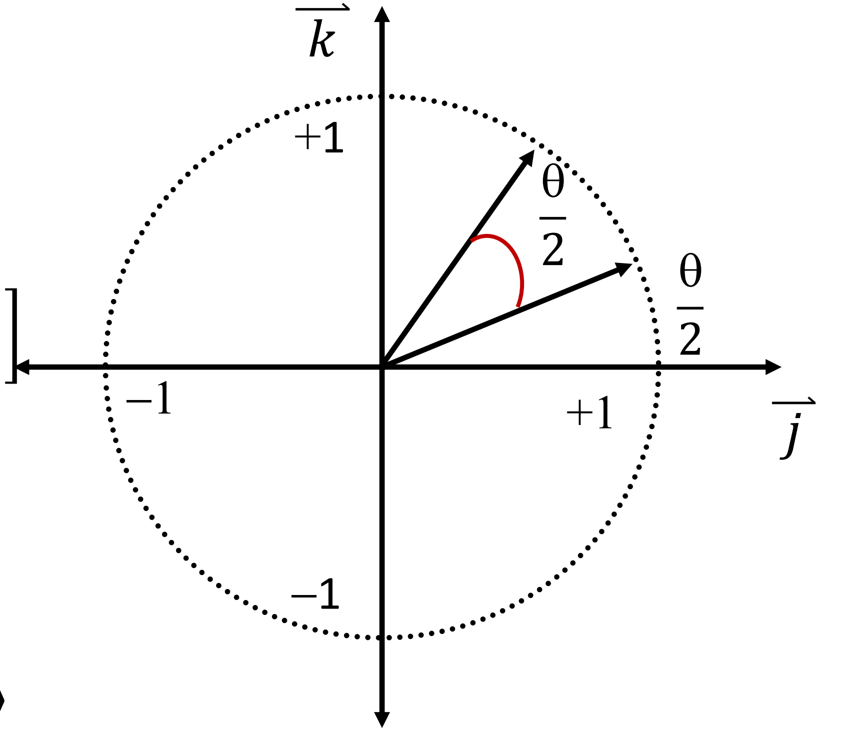
$Q = R_y(\theta)$ 作用在量子态：

$$Q^1|\psi\rangle = Q^1\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2+\theta/2) \\ \sin(\theta/2+\theta/2) \end{bmatrix}$$

$$Q^2|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \cos(2\theta/2+\theta/2) \\ \sin(2\theta/2+\theta/2) \end{bmatrix}$$

....

$$Q^n|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \cos((n+1)\theta/2) \\ \sin((n+1)\theta/2) \end{bmatrix} = \cos((n+1)\theta/2)|0\rangle + \sin((n+1)\theta/2)|1\rangle$$



选取合适的旋转次数 n 使得 $\sin^2((n+1)\theta/2)$ 最接近 1， 即可完成**振幅放大**量子线路。

RY(θ) 门 - 布洛赫球 (Bloch Sphere) 几何表示

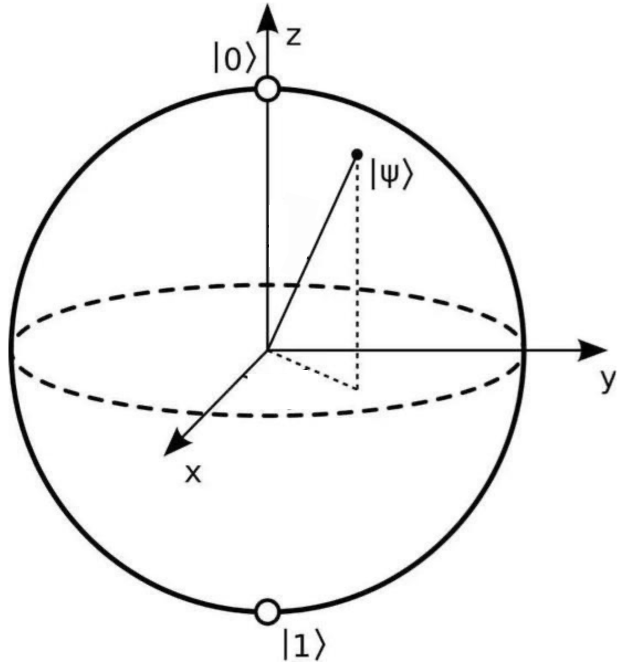
RY门由Pauli-Y 矩阵作为生成元生成，其矩阵形式为：

$$R_y(\theta) = e^{-i\theta Y/2} = \cos(\theta/2)\,\mathrm{I} - i\sin(\theta/2)\mathrm{Y}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

其量子线路符号：

RY操作将原来的态上绕Y轴逆时针旋转θ角。能导致概率振幅的变化。



RY(θ) 门作用在基态：

$$R_y(\theta)\,|0\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos(\theta/2)\\ \sin(\theta/2)\end{bmatrix} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$$

$$R_y(\theta)\,|1\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\sin(\theta/2)\\ \cos(\theta/2)\end{bmatrix} = -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$$

$R_y(\pi/2)$ 门作用在任意量子态 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}$，得到的新的量子态为：

$$|\psi'\rangle = R_X(\pi/2)\,|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\alpha-\beta\\ \alpha+\beta\end{bmatrix} = \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

RZ(θ) 门

RZ门又称为相位转化门(phase-shift gate)，由Pauli-Z 矩阵作为生成元生成，其矩阵形式为：

$$R_z(\theta) = e^{-i\theta Z/2} = \cos(\theta/2)\,I - i\sin(\theta/2)Z$$
$$= \begin{bmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{bmatrix} = e^{-i\theta/2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}$$

由于$e^{-i\theta/2}$是一个全局相位，其没有物理意义，只考虑单门，则可以省略该参数。于是，RZ门矩阵可简写为：

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}$$

$R_y(\pi/2)$ 门作用在任意量子态 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$，得到的新的量子态为：

$$|\psi'\rangle = R_z(\theta)\,|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ e^{i\theta}\beta \end{bmatrix} = \alpha|0\rangle + e^{i\theta}\beta|1\rangle$$

RZ(θ) 门 - 布洛赫球 (Bloch Sphere) 几何表示

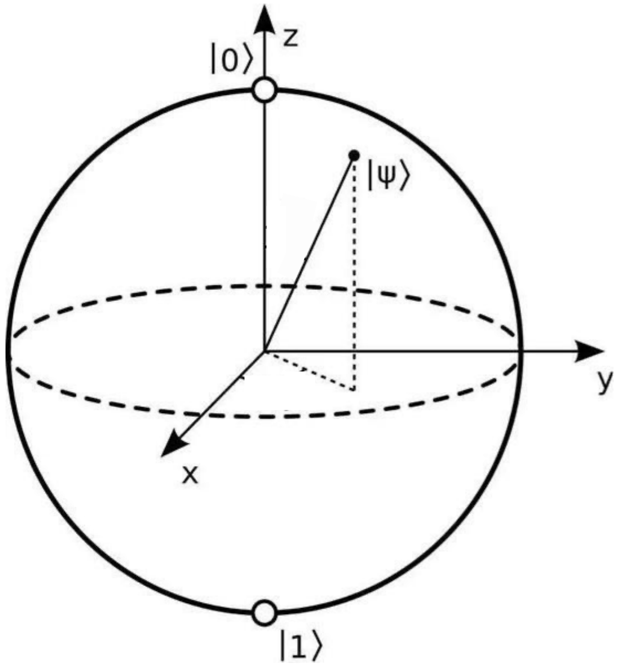
RZ门又称为相位转化门(phase-shift gate)，由Pauli-Z 矩阵作为生成元生成，其矩阵形式为：

$$R_z(\theta) = e^{-i\theta Z/2} = \cos(\theta/2)\,\mathrm{I} - \mathrm{i}\sin(\theta/2)\mathrm{Z}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{bmatrix} = e^{-i\theta/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}$$

RZ 操作将原来的态上绕 Z 轴逆时针旋转θ角。不会导致概率振幅的变化，只会改变相位。

其量子线路符号：Z_θ



RZ门作用在基态：

$$R_z(\theta)\,|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |0\rangle$$

$$R_z(\theta)\,|1\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{i\theta} \end{bmatrix} = e^{i\theta}\,|1\rangle$$

$R_y(\pi/2)$ 门作用在任意量子态 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta\,|1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$，得到的新的量子态为：

$$|\psi'\rangle = R_z(\pi/2)\,|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1+i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \frac{1+i}{\sqrt{2}}\beta \end{bmatrix} = \alpha|0\rangle + \frac{1+i}{\sqrt{2}}\beta|1\rangle$$

RZ(θ) 门 - 全局相位的几何意义

$$R_z(\theta) = e^{-i\theta Z/2} = \cos(\theta/2)\,I - i\sin(\theta/2)Z$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{bmatrix} = e^{-i\theta/2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}$$

由于$e^{-i\theta/2}$ 是一个全局相位，其没有物理意义，只考虑单门，则可以省略该参数，那么怎么理解几何意义呢？

令：$|\psi\rangle = r_1(\cos(\theta_1) + i\ \sin(\theta_1))|0\rangle + r_2(\cos(\theta_2) + i\ \sin(\theta_2))|1\rangle$

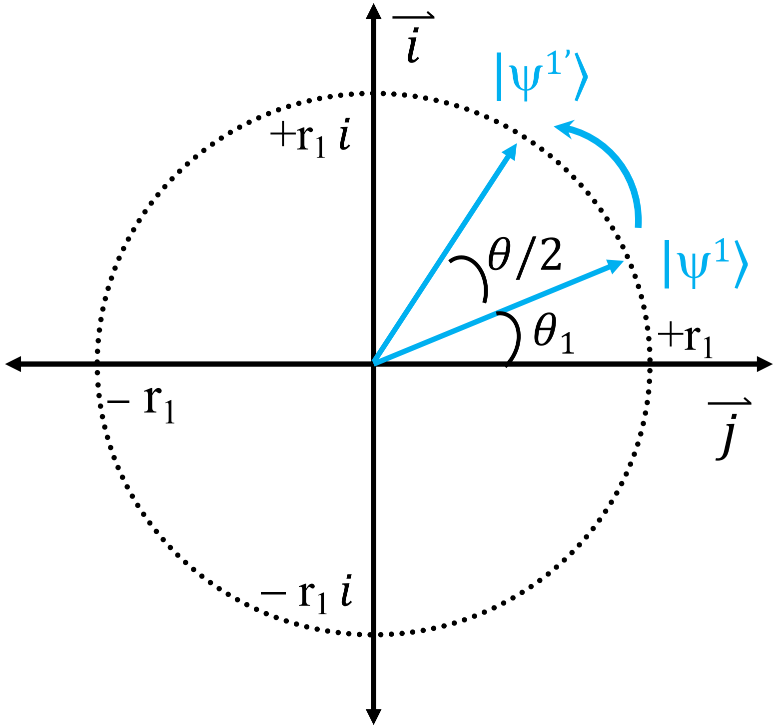
$e^{-i\theta/2} = \cos(\theta/2) + i\ \sin(\theta/2)$

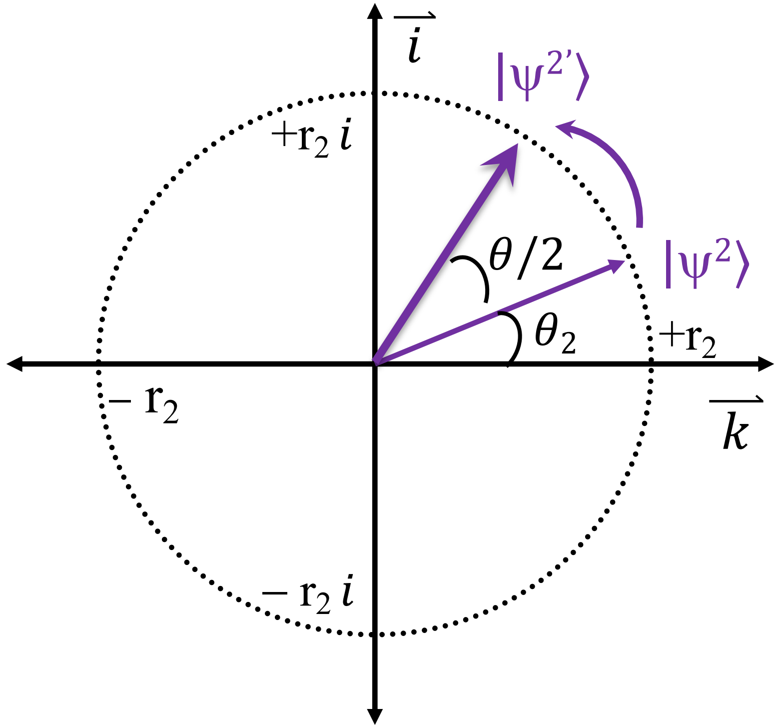
则 $e^{-i\theta/2}$ 作用在量子态 $|\psi\rangle$ ：

$$\begin{aligned} e^{-i\theta/2}|\psi\rangle &= r_1(\cos(\theta_1) + i\ \sin(\theta_1))(\cos(\theta/2) + i\ \sin(\theta/2))|0\rangle \\ &\quad + r_2(\cos(\theta_2) + i\ \sin(\theta_2))(\cos(\theta/2) + i\ \sin(\theta/2))|1\rangle \\ &= r_1(\cos(\theta_1 + \theta/2) + i\ \sin(\theta_1 + \theta/2))|0\rangle + r_2(\cos(\theta_2 + \theta/2) + i\ \sin(\theta_2 + \theta/2))|1\rangle \end{aligned}$$

RZ(θ) 门 – 全局相位

$$e^{-i\theta/2}\,|\psi\rangle = r_1(\cos(\theta_1+\theta/2)+i\ \sin(\theta_1+\theta/2))|0\rangle + r_2(\cos(\theta_2+\theta/2)+i\ \sin(\theta_2+\theta/2))|1\rangle$$





$|\psi^1\rangle$ 为 $|\psi\rangle$ 在 i-k 复平面的分量 $r_1(\cos(\theta_1)+i\ \sin(\theta_1))$

$|\psi^2\rangle$ 为 $|\psi\rangle$ 在 i-j 复平面的分量 $r_2(\cos(\theta_2)+i\ \sin(\theta_2))$

* 全局相位几何意义为：
所有复平面内向量同时旋转相同角度。
如果加上时间 t，则意味着有相同的角速度。
而周期旋转又可以理解为波。

Qubit
qubits.top

Thank You