

量子计算 —基础篇

Quantum Computer

网址: www.qubits.top

Calvin Tang

179209347@qq.com

介绍

教程简介：

- 面向对象：量子计算初学者
- 依赖课程：线性代数，解析几何，量子力学（非必需）

知乎专栏：

https://www.zhihu.com/column/c_1501138176371011584

Github & Gitee 地址：

<https://github.com/mymagicpower/quantum>

<https://gitee.com/mymagicpower/quantum>

* 版权声明：

- 仅限用于个人学习，或者大学授课使用
（大学授课如需ppt原件，请用学校邮箱联系我获取）
- 禁止用于任何商业用途

量子线路介绍

所谓量子线路，从本质上是一个量子逻辑门的执行序列，它是从左至右依次执行的。

量子线路，也称量子逻辑电路是最常用的通用量子计算模型，表示在抽象概念下，对于量子比特进行操作的线路。组成包括了量子比特、线路（时间线），以及各种逻辑门。最后常需要量子测量将结果读取出来。

不同于传统电路是用金属线所连接以传递电压讯号或电流讯号，在量子线路中，线路是由时间所连接，亦即量子比特的状态随着时间自然演化，过程中是按照哈密顿运算符的指示，一直到遇上逻辑门而被操作。

由于组成量子线路的每一个量子逻辑门都是一个酉算子，所以整个量子线路整体也是一个大的酉算子。

来源：本源量子


本源量子云


本节内容基于本源量子的量子云平台编写。可以免费在线测试使用。

<https://qcloud.originqc.com.cn/quantumVm/0/0>


本源量子云
真实量子计算云
仿真开发训练云
应用推广云
科普教育云
量子社区云
中 | En

文件 编辑 布局

Untitled Experiment 
全振幅量子虚拟机 ▾
运行
保存

H	T	S	X	Y	Z	X ₁	Y ₁	Z ₁	U ₁	U ₂	U ₃	U ₄	RX	RY	RZ	CNOT			
Toff	CR	CZ			GHZ (2)	GHZ (3)	GHZ (6)	QFT (3)	QFT (4)	Z-CNOT	H(6)								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14					








q[0] |0> —————
 q[1] |0> —————
 q[2] |0> —————
 q[3] |0> —————
 +

单比特量子逻辑门

I	I	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
H	Hadamard	$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$
T	T	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(i\pi/4) \end{bmatrix}$
S	S	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$
X	Pauli-X	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
Y	Pauli-Y	$\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$
Z	Pauli-Z	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
X_1	$X1$	$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$
Y_1	$Y1$	$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

Z_1	$Z1$	$\begin{bmatrix} \exp(-i\pi/4) & 0 \\ 0 & \exp(i\pi/4) \end{bmatrix}$
X_θ	RX	$\begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -i \times \sin(\theta/2) \\ -i \times \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$
Y_θ	RY	$\begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$
Z_θ	RZ	$\begin{bmatrix} \exp(-i\theta/2) & 0 \\ 0 & \exp(i\theta/2) \end{bmatrix}$
U_1	$U1$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(i\theta) \end{bmatrix}$
U_2	$U2$	$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -\exp(i\lambda)/\sqrt{2} \\ \exp(i\phi)/\sqrt{2} & \exp(i\lambda + i\phi)/\sqrt{2} \end{bmatrix}$
U_3	$U3$	$\begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -\exp(i\lambda) \times \sin(\theta/2) \\ \exp(i\phi) \times \sin(\theta/2) & \exp(i\lambda + i\phi) \times \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$
U_4	$U4$	$\begin{bmatrix} u0 & u1 \\ u2 & u3 \end{bmatrix}$

多比特量子逻辑门

	CNOT	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$		CZ	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
	CR	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp(i\theta) \end{bmatrix}$		CU	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u0 & u1 \\ 0 & 0 & u2 & u3 \end{bmatrix}$
	iSWAP	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -i \times \sin(\theta) & 0 \\ 0 & -i \times \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		Toffoli	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
	SWAP	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$			

H (Hadamard) 门

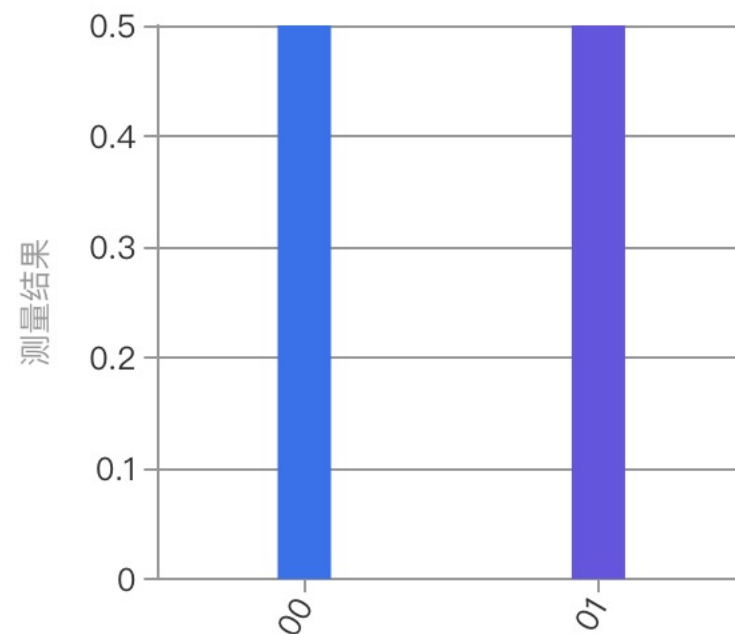
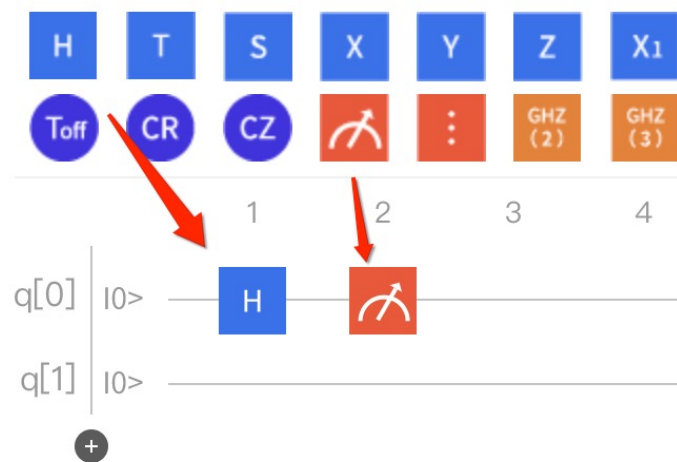
Hadamard 门是一种可以将基态变为叠加态的量子逻辑门，简称H门。

$$\text{矩阵形式 } H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \langle 0| + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \langle 1|$$

量子线路符号： 测量符号：

H 门作用在基态：

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$$



Pauli-X 门

Pauli-X 作用在单量子比特上，跟经典计算机的NOT门的量子等价，将量子态翻转，量子态变换规律是：

Pauli-X 门矩阵形式为泡利矩阵 σ_x ，即：

$$\begin{aligned} |0\rangle &\rightarrow |1\rangle \\ |1\rangle &\rightarrow |0\rangle \end{aligned}$$

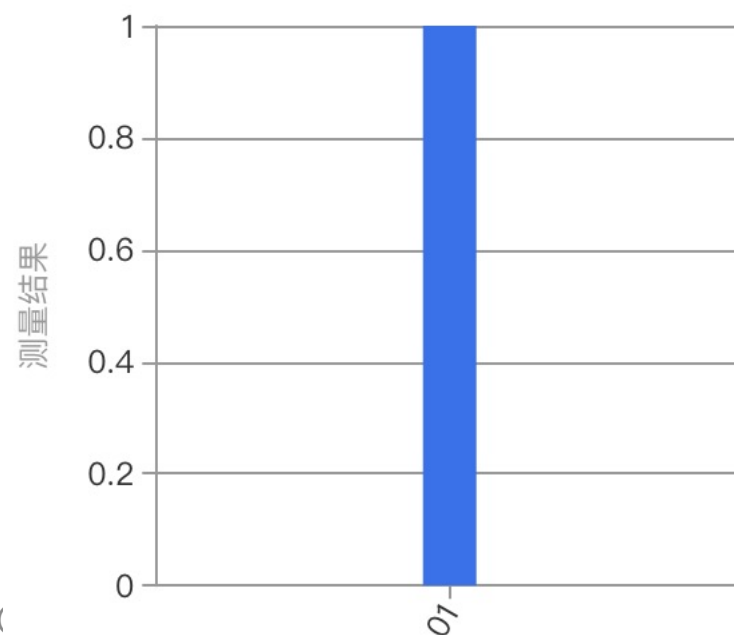
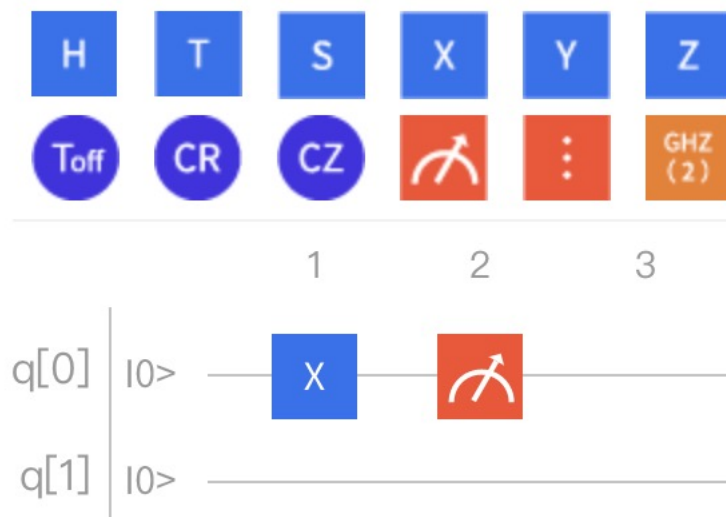
$$X = \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pauli-X 门矩阵又称为NOT门，其量子线路符号：



X 门作用在基态：

$$X|0\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |1\rangle$$



Pauli-Y 门

Pauli-Y 作用在单量子比特上，作用相当于绕布洛赫球 Y 轴旋转角度 π 。

Pauli-Y 门矩阵形式为泡利矩阵 σ_y ，即：

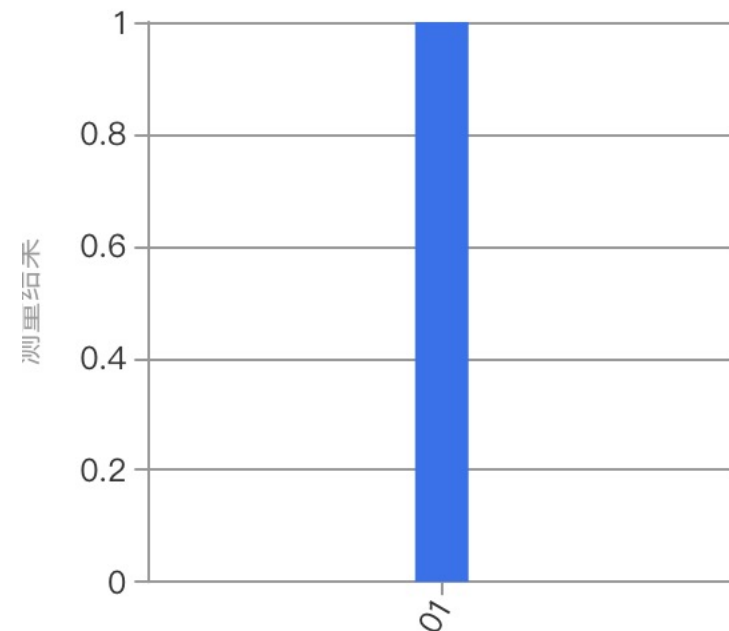
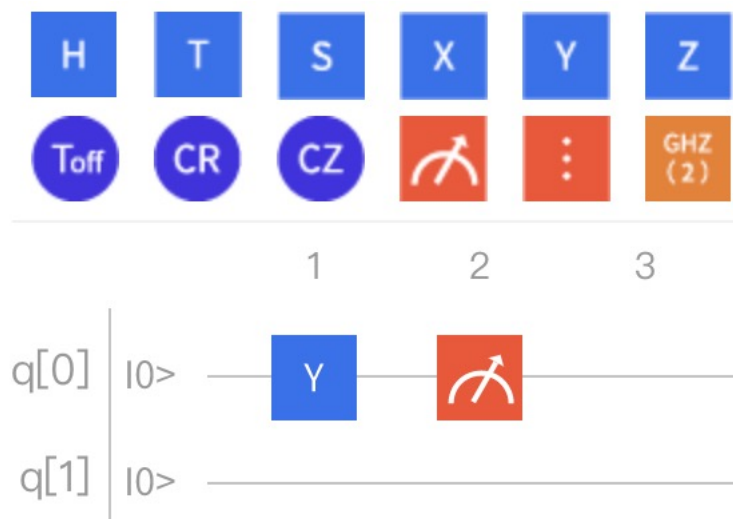
$$Y = \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

其量子线路符号：



Y 门作用在基态：

$$Y|0\rangle = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = i|1\rangle$$



Pauli-Z 门

Pauli-Z 作用在单量子比特上，作用相当于绕布洛赫球 Z 轴旋转角度 π .

Pauli-Z 门矩阵形式为泡利矩阵 σ_z ，即：

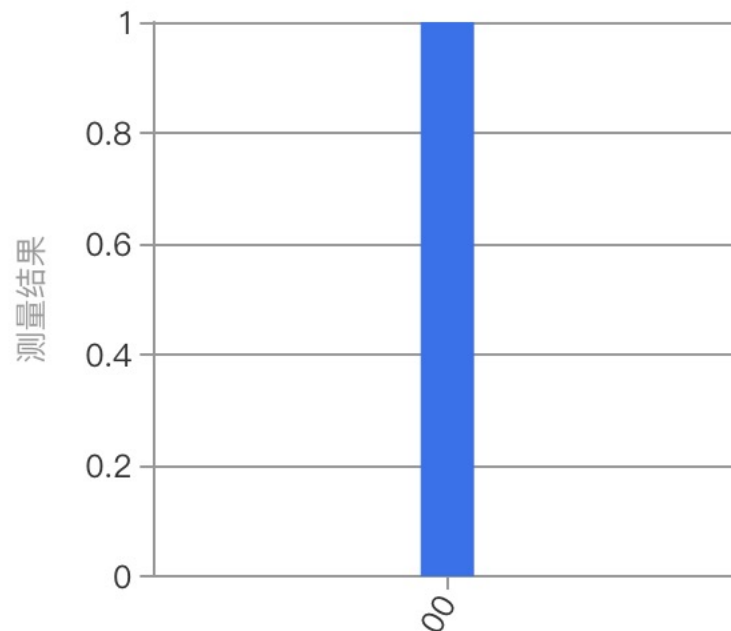
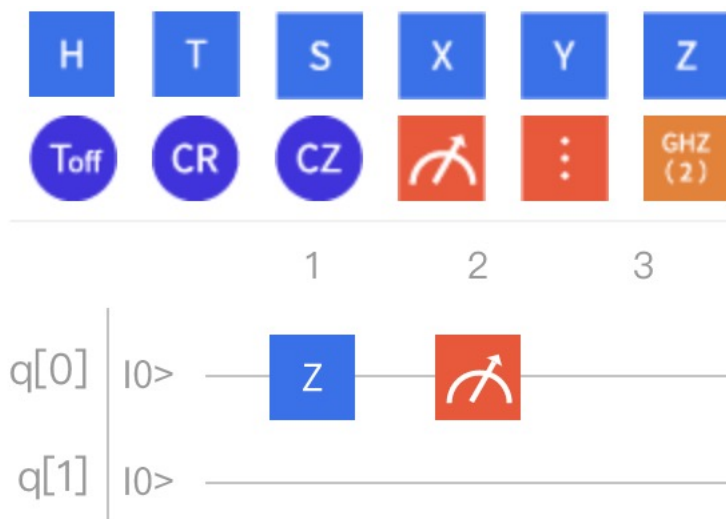
$$Z = \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

其量子线路符号：



Z 门作用在基态：

$$Z|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |0\rangle$$




RX(θ) 门

RX门由Pauli-X 矩阵作为生成元生成，其矩阵形式为：

$$R_x(\theta) = e^{-i\theta X/2} = \cos(\theta/2) I - i \sin(\theta/2) X$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -i \sin(\theta/2) \\ -i \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

设置参数 $\theta = \pi / 2$ ：

其量子线路符号 

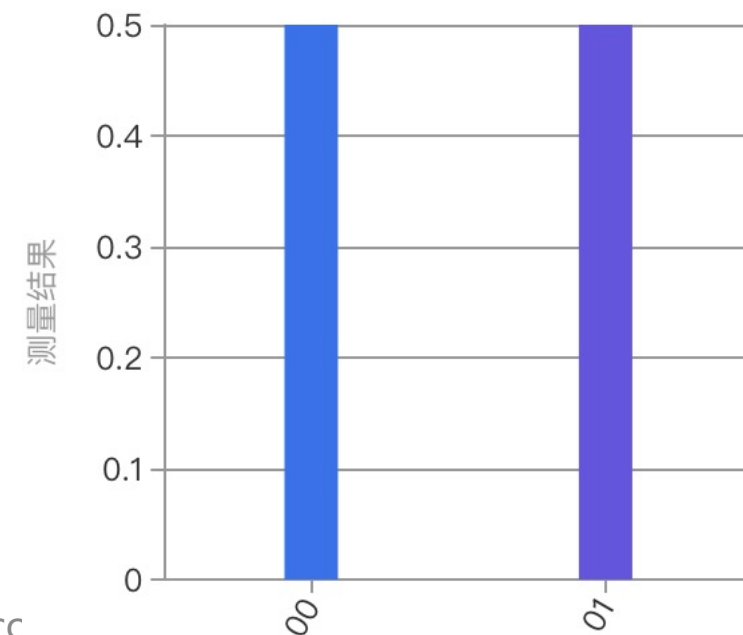
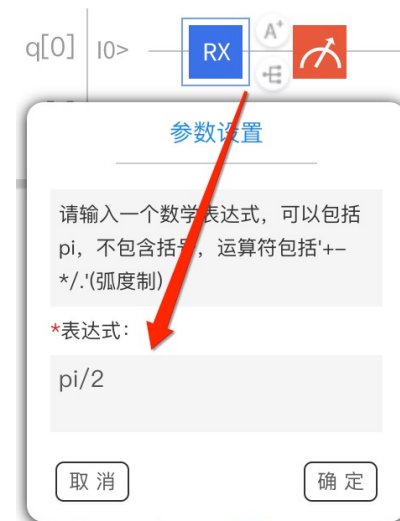
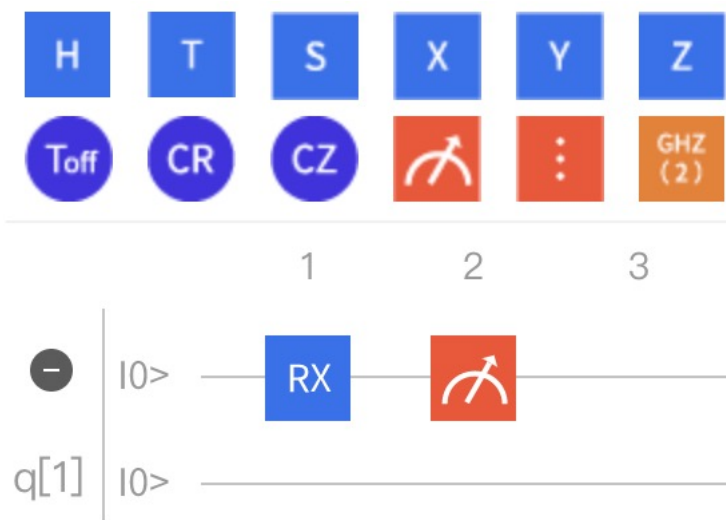
RX($\pi/2$)门作用在基态：

$$R_x(\theta) |0\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & -i \sin(\frac{\pi}{4}) \\ -i \sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) \\ -i \sin(\frac{\pi}{4}) \end{bmatrix}$$

$$= \cos(\frac{\pi}{4}) |0\rangle - i \sin(\frac{\pi}{4}) |1\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} i |1\rangle$$




RY(θ) 门

RY门由Pauli-Y 矩阵作为生成元生成，其矩阵形式为：

$$R_y(\theta) = e^{-i\theta Y/2} = \cos(\theta/2) I - i \sin(\theta/2) Y$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

设置参数 $\theta = \pi / 2$ ：

其量子线路符号 

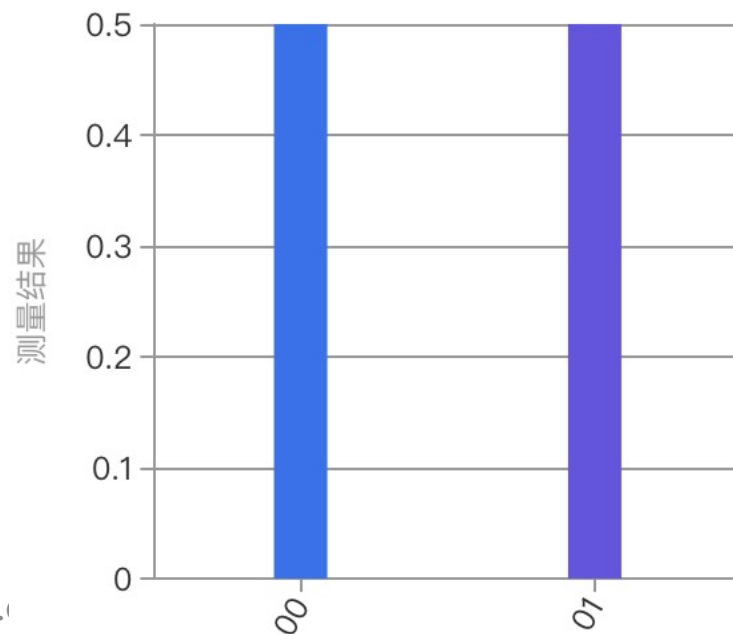
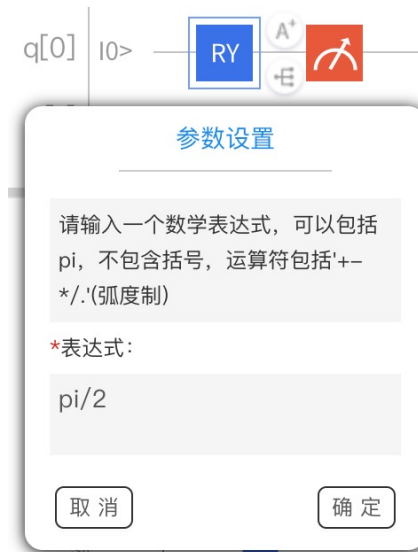
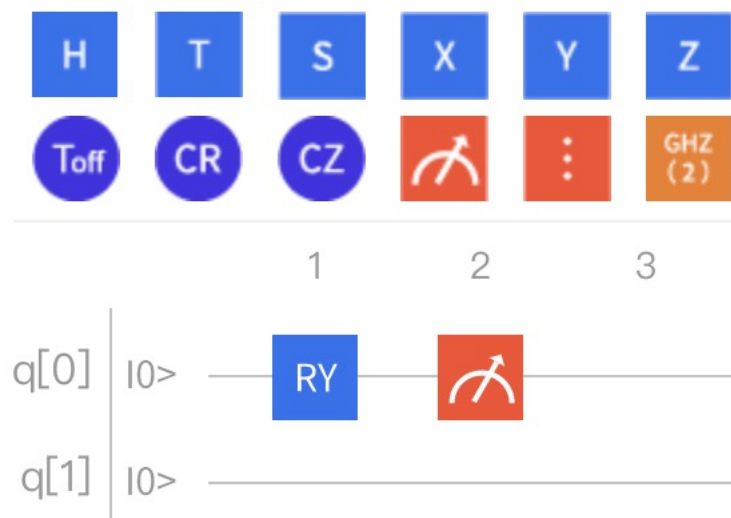
RY($\pi/2$) 门作用在基态：

$$R_y(\theta) |0\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & -\sin(\frac{\pi}{4}) \\ \sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) \\ \sin(\frac{\pi}{4}) \end{bmatrix}$$

$$= \cos(\frac{\pi}{4}) |0\rangle + \sin(\frac{\pi}{4}) |1\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle$$



RZ(θ) 门

RZ门又称为相位转化门(phase-shift gate)，由Pauli-Z 矩阵作为生成元生成，其矩阵形式为：

$$R_z(\theta) = e^{-i\theta Z/2} = \cos(\theta/2) I - i \sin(\theta/2) Z$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{bmatrix} = e^{-i\theta/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}$$

$e^{-i\theta/2}$ 并没有对计算基 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 做任何改变，而只是在原来的态上绕Z轴逆时针旋转 θ 角。

其量子线路符号：



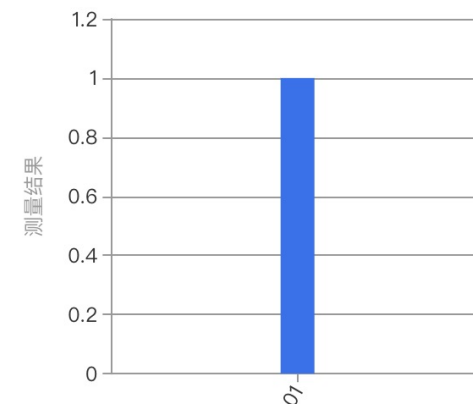
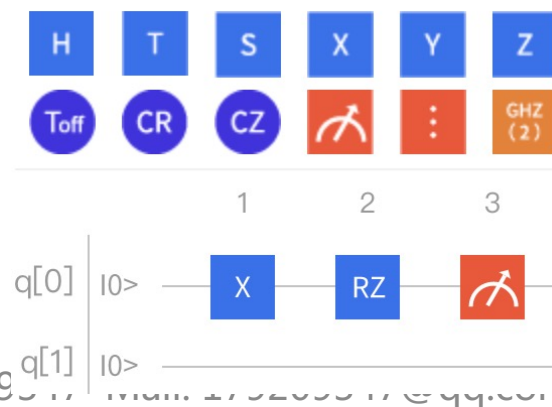
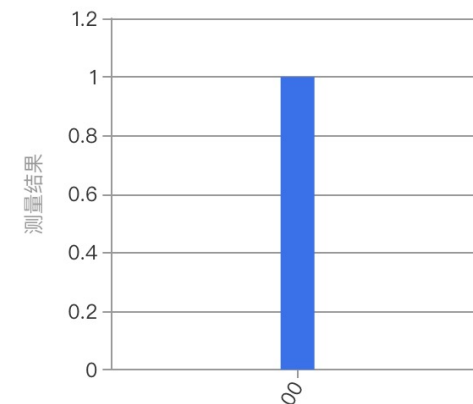
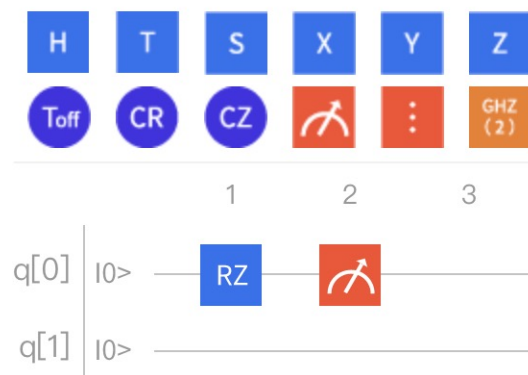
由于 $e^{-i\theta/2}$ 是一个全局相位，其没有物理意义，只考虑单门，则可以省略该参数。于是，RZ门矩阵可简写为：

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}$$

RZ门作用在基态：

$$R_z(\theta) |0\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |0\rangle$$

$$R_z(\theta) |1\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{i\theta} \end{bmatrix} = e^{i\theta} |1\rangle$$

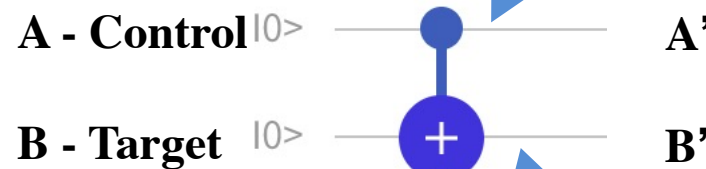


CNOT 门

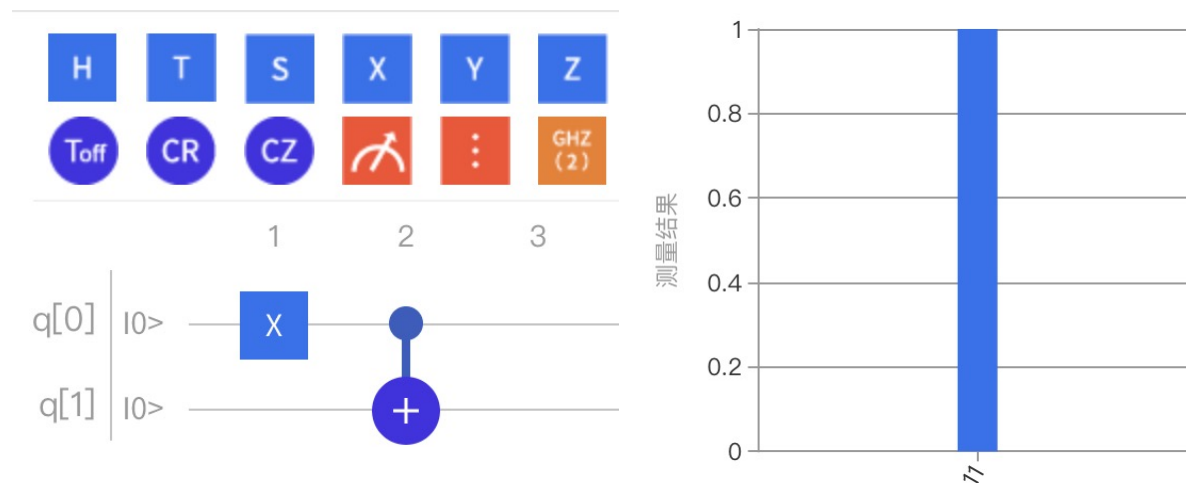
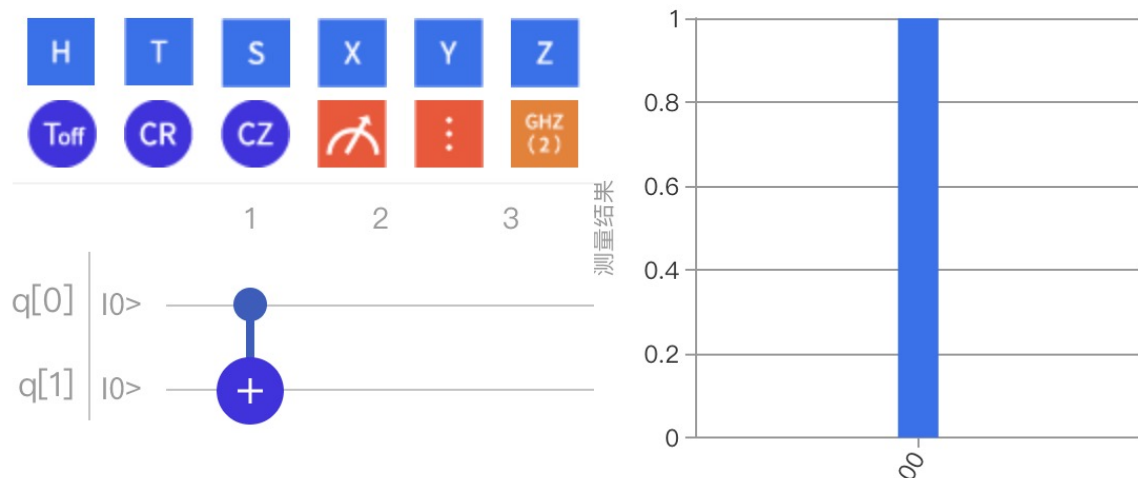
控制非门(Control - NOT), 通常用 CNOT 表示, 是一种普遍使用的两量子比特门。如果低位作为控制比特, 则它的矩阵形式:

$$\text{CNOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{CNOT CNOT} = I$$



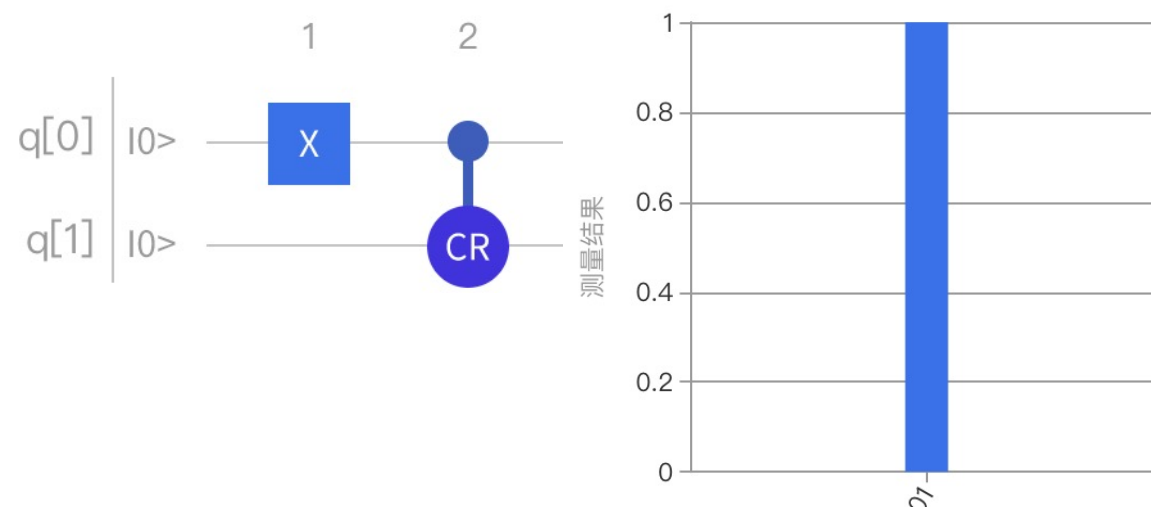
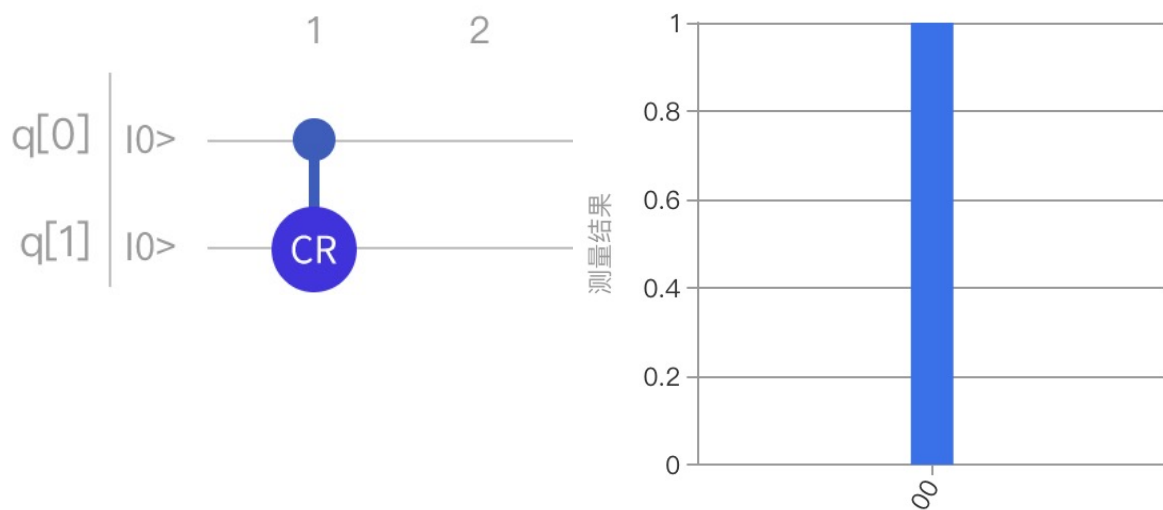
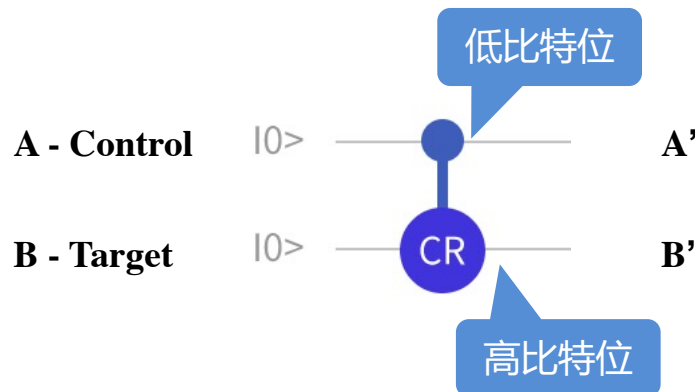
Input		Output	
A	B	A'	B'
0	0	0	0
1	0	1	1
0	1	0	1
1	1	1	0



CR 门

控制相位门(Control phase gate) 和控制非门类似，通常用 CR (CPhase) 表示，它的矩阵形式：

$$CR(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}$$

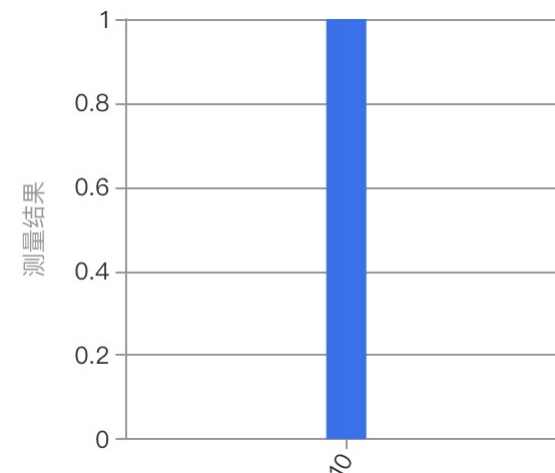
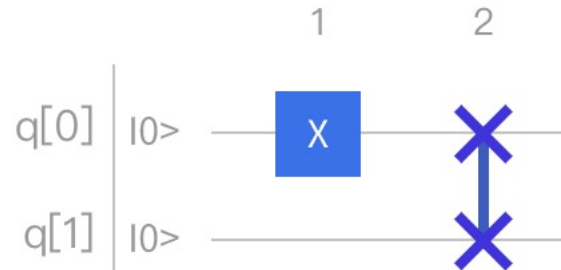


SWAP 门

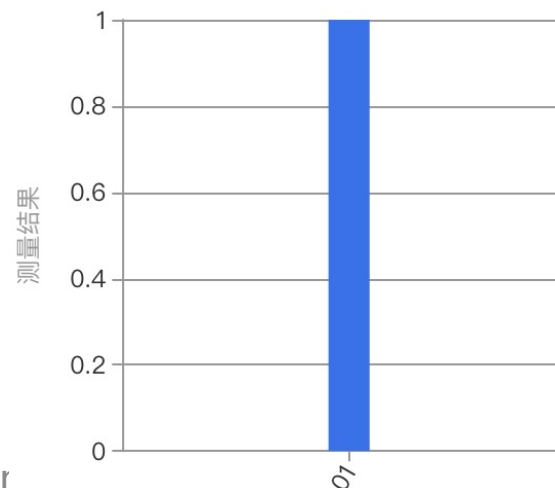
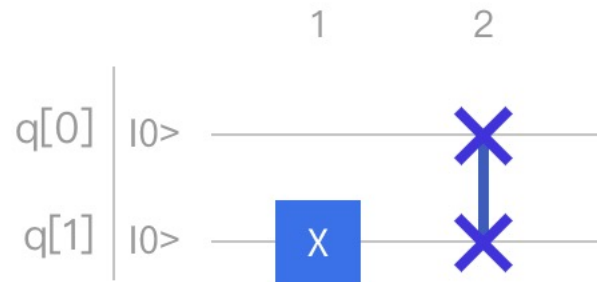
SWAP门可以将 $|01\rangle$ 态变为 $|10\rangle$ ， $|10\rangle$ 变为 $|01\rangle$ ，它的矩阵形式：

$$\text{SWAP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|\psi'\rangle = \text{SWAP} |01\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |10\rangle$$



$$|\psi'\rangle = \text{SWAP} |10\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |01\rangle$$



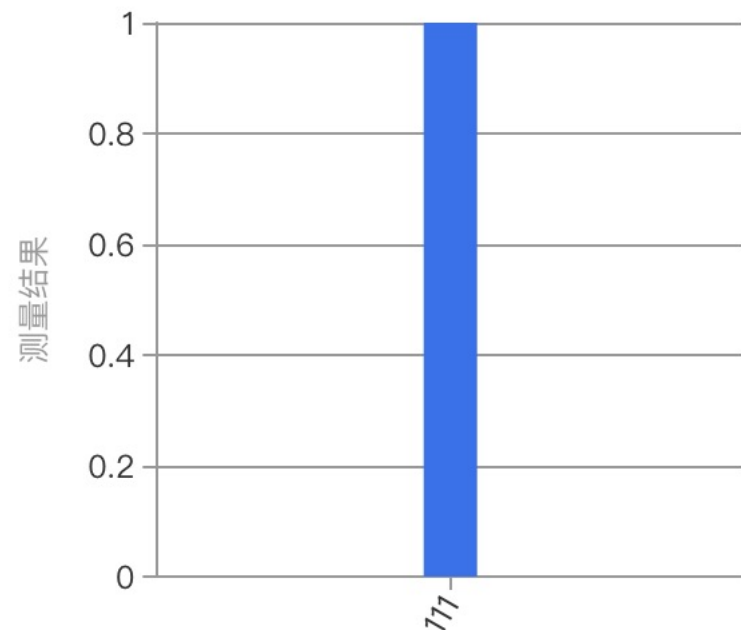
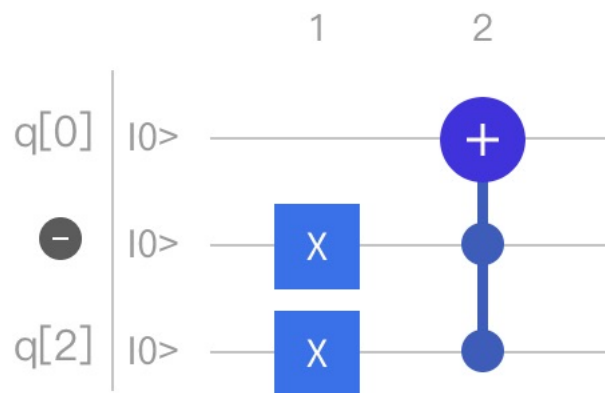
Toffoli (CCNOT)

Toffoli门即CCNOT门，它涉及3个量子比特，两个控制比特，一个目标比特，它的矩阵形式：

$$\text{Toffoli} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Toffoli门作用于 $|110\rangle$ ：

$$\text{CCNOT } |110\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |111\rangle$$





Thank

You