量子计算
—基础篇

Quantum Computer

网址：www.qubits.top

作者：Calvin Tang

邮箱：179209347@qq.com

介绍

教程简介：

- 面向对象：量子计算初学者
- 依赖课程：线性代数，解析几何，量子力学（非必需）

知乎专栏：

https://www.zhihu.com/column/c_1501138176371011584

Github & Gitee 地址：

https://github.com/mymagicpower/qubits
https://gitee.com/mymagicpower/qubits

*** 版权声明：**

酉（幺正）变换性质

1. $UU^\dagger = U^\dagger U = I \Rightarrow U^\dagger = U^{-1}$

2. 如果： $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是幺正矩阵，对于所有的 $v, w \in \mathbb{C}^n$

$< Uv, Uw > \; = \; < v, w >$ $\quad < Uv, w > \; = \; < v, U^\dagger w >$

证明：$< Uv, Uw > = (U\,v)^\dagger\,(U\,w) = v^\dagger U^\dagger U w == v^\dagger I w = < v, w >$

3. 如果： $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是幺正矩阵，对于所有的 $v \in \mathbb{C}^n$

$||Uv|| = ||v||$

证明：$||Uv|| = \sqrt{<Uv, Uv>} = \sqrt{< v, v>} = ||v||$

4. 如果： $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是幺正矩阵，对于所有的 $v, w \in \mathbb{C}^n$

$d(U\,v, Uw) \; = \; d(\,v, w)$

证明：$d(Uv, Uw) = |U\,v - Uw| = |U(v - w)| = |v - w| = d(v, w)$

Calvin, QQ: 179209347 Mail: 179209347@qq.com

酉（幺正）变换性质

5. $< Uv, Uv > = < v, U^{\dagger} U v > = < v, v > = ||v||^2$

6. 如果： $U \in \mathbb{C}^{nxn}$ 是幺正矩阵，存在另一个幺正矩阵 V,和幺正对角阵 $D \in \mathbb{C}^{nxn}$

$U = V^{\dagger}DV$
$D = VUV^{\dagger}$

Calvin, QQ: 179209347 Mail: 179209347@qq.com

狄拉克符号

$$\langle v| = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix}^\dagger = [\overline{v_1} \;\; \overline{v_2} \;\; \dots \;\; \overline{v_n}]$$

$$|w\rangle = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_m \end{bmatrix}$$

$$|w\rangle\langle v| = \begin{bmatrix} w_1\overline{v_1} & \cdots & w_1\overline{v_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_m\overline{v_1} & \cdots & w_m\overline{v_n} \end{bmatrix}$$

$$\langle v|w\rangle = \langle v||w\rangle = (\langle v|)(|w\rangle)$$

当 $n = m$ 时：

$$\langle v|w\rangle = \langle v\, ,\, w\rangle = \overline{v_1}w_1 + \overline{v_2}w_2 + \dots + \overline{v_n}w_n$$

ν的长度为：

$$\|\nu\| = \sqrt{<\nu, \nu>}$$

Calvin, QQ: 179209347 Mail: 179209347@qq.com

共轭

$$[v_1 \ \ v_2 \ \ \ldots \ \ v_n]^{\dagger} = \begin{bmatrix} \overline{v_1} \\ \overline{v_2} \\ \ldots \\ \overline{v_n} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \ldots \\ v_n \end{bmatrix}^{\dagger} = [\overline{v_1} \ \ \overline{v_2} \ \ \ldots \ \ \overline{v_n}]$$

$(vu)^* = u^* v$

$(u + v)^* = u^* + v^*$

$(\lambda u)^* = \bar{\lambda} u^*$

$(\mathrm{y}|ux) = (u^* \mathrm{y}|x)$

$||u|| = ||u^*||$

$||u||^2 = ||u^* u|| = ||u u^*||$

厄米共轭算符公式

给定一个线性算符 A，它的厄米共轭算符（转置共轭）定义为：

$$\langle u|A|v\rangle = \langle A^{\dagger}u|v\rangle = \langle v|A^{\dagger}|u\rangle^{*} \qquad A^{\dagger} = (A^{*})^{T}$$

由上述定义可得：

$$\langle e_j|A|e_k\rangle = \langle e_k|A^{\dagger}|e_j\rangle^{*}$$

于是有：

$$(c^{\dagger})_{jk} = c^{*}{}_{kj}$$

根据上述定义，可得：

$$|x\rangle^{\dagger} = (x_1^{*}, \ldots, x_n^{*}) = \langle x|$$

$$\left(\sum_i a_i A_i\right)^{\dagger} = \sum_i a_i^{*} A_i^{\dagger} \qquad (cA)^{\dagger} = c^{*}A^{\dagger} \qquad (\mathrm{A} + \mathrm{B})^{\dagger} = \mathrm{A}^{\dagger} + \mathrm{B}^{\dagger} \qquad (\mathrm{AB})^{\dagger} = \mathrm{B}^{\dagger}\mathrm{A}^{\dagger}$$

$$(A|v\rangle)^{\dagger} = \langle v|A^{\dagger} \qquad (|u\rangle\langle v|)^{\dagger} = |v\rangle\langle u|$$

$$||\,\langle u|A|v\rangle\,||^{2} = \langle u|A|v\rangle\,\langle v|A^{\dagger}|u\rangle$$

厄米共轭算符公式

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(A-B)^T = A^T - B^T$$

$$(-A)^T = -A^T$$

$$(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

$$(A-B)^\dagger = A^\dagger - B^\dagger$$

$$(-A)^\dagger = -A^\dagger$$

矩阵的迹

$$tr(A+B) = tr\ (A) + tr\ (B)$$

$$tr(dA) = d\ tr\ (A)$$

$$tr(-A) = -\ tr\ (A)$$

$$tr(AB) = tr\ (BA)$$

$$tr(ABC) = tr\ (CAB) = tr\ (BCA)$$

对于方阵：

$$tr(A) = \ tr\ (A^T)$$

$$tr(\bar{A}) = \ tr\ (A^\dagger) = \overline{tr(A)}$$

矩阵的直和

$v = [v_1 \ \ v_2 \ \ldots \ \ v_n]$

$w = [w_1 \ w_2 \ \ldots \ \ w_n]$

$v \oplus w = [v_1 \ \ v_2 \ \ldots \ \ v_{n,} w_1 \ w_2 \ \ldots \ \ w_n]$

张量积（tensor product）

张量积是两个或多个向量空间张成一个更大向量空间的运算。
在量子力学中，**量子的状态**由希尔伯特空间 (Hilbert spaces) 中的**单位向量**来描述。
本质上复合系统中量子态的演化也是矩阵的乘法，其与单个子系统相比，只是多了张量积的运算。

$$|00\rangle = |0,0\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\\0\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$|01\rangle = |0,1\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\\0\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$|10\rangle = |1,0\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\\1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$|11\rangle = |1,1\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\\1\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

张量积 – 重要公式

1. $A\otimes(B+C)=A\otimes B+A\otimes C$ ， $|a\rangle\otimes(|b\rangle+|c\rangle)=|a\rangle\otimes|b\rangle+|a\rangle\otimes|c\rangle$

2. $(A+B)\otimes C=A\otimes C+\mathrm{B}\otimes C$ ， $(|a\rangle+|b\rangle)\otimes|c\rangle=|a\rangle\otimes|c\rangle+|b\rangle\otimes|c\rangle$

3. $z(|a\rangle\otimes|\mathrm{b}\rangle)=(z|a\rangle)\otimes|\mathrm{b}\rangle=|a\rangle\otimes(z|b\rangle)$ z 为标量

4. $(A\otimes B)^{\dagger}=A^{\dagger}\otimes B^{\dagger}$ $\quad(A\otimes B)^{*}=A^{*}\otimes B^{*}$

5. $(A\otimes B)^{-1}=A^{-1}\otimes B^{-1}$ $\quad(A\otimes B)^{T}=A^{T}\otimes B^{T}$

6. $tr(A\otimes B)=tr(A)\,tr(B)$

7. $det(A\otimes B)=(detA)^{p}\,(detB)^{m}$

张量积 – 重要公式

1. 不同子空间的张量积的矩阵乘，相当于各自子空间下的矩阵乘，再把结果张量积。

① $(A \otimes B)\,(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$

② $(A_1 \otimes B_1)\,(A_2 \otimes B_2)\,(A_3 \otimes B_3) = (A_1\,A_2\,A_3) \otimes (B_1\,B_2\,B_3)$

③ $(|a\rangle\langle b|) \otimes (|c\rangle\langle d|) = (|a\rangle \otimes |c\rangle)(\langle b| \otimes \langle d|) = |ac\rangle\langle bd|$ (公式1逆向狄拉克符号写法)

④ $(A \otimes B)\,(|x\rangle \otimes |y\rangle) = A\,|x\rangle \otimes B\,|y\rangle$

⑤ $(A \otimes B)\,(\sum_i c_i|x_i\rangle \otimes |y_i\rangle) = \sum_i c_i A|x_i\rangle \otimes B\,|y_i\rangle$

⑥ $(\sum_i c_i A_i \otimes B_i)\,(|x\rangle \otimes |y\rangle) = \sum_i c_i A_i|\mathrm{x}\rangle \otimes B_i|\mathrm{y}\rangle$

2. $H^{\otimes n} = \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{x,y}(-1)^{x\cdot y}|x\rangle\langle y|$ $\quad (H|0\rangle)^{\otimes n} = \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{x=0}^{2^{\mathrm{n}}-1}|x\rangle$

Calvin, QQ: 179209347 Mail: 179209347@qq.com

张量积 – 例子

例如，复合系统 H 由两能级系统 H1 和 H2 复合而成，
在 t1 时刻，两个系统的状态都为 $|0\rangle$ ，则复合系统的状态为 $|00\rangle$；
在 t2 时刻，第一个系统经过 X 门，状态变 为 $|1\rangle$，第二个系统经过 Z 门，状态为 $|0\rangle$，那么复合系统的状态经过的变换用矩阵运算表示为 ：

因为： $X = \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad Z = \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

所以：$X \otimes Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & 1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ 1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

则有：$X \otimes Z\,|00\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |10\rangle$

三角函数公式

两角和与差的三角函数公式：

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp sin\,\alpha\sin\beta$

$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$

$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$

复数 - 从线性运算说起

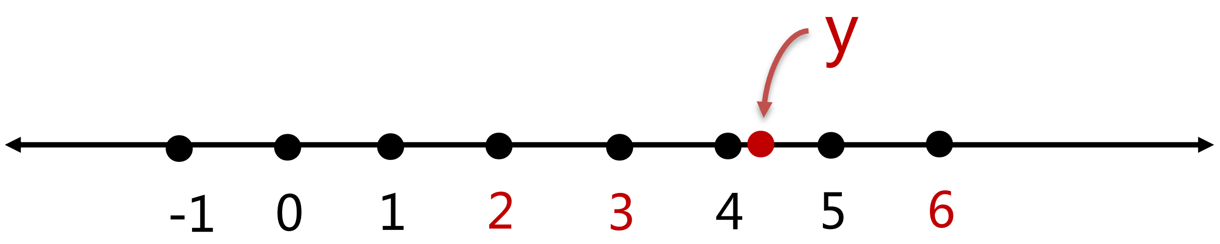
线性运算是**加法**和**数量乘法**， 在实数域像只包含加法和数量乘法二元一次方程就属于线性运算，如：

$$y = ax+b$$

矩阵的线性运算：矩阵的加法和数乘运算
向量的线性运算：向量的加法和数乘运算
它们满足交换律、结合律、分配律等。

对于一个实数轴而言，任意多个实数的线性组合仍然是实数，即其仍在实数轴上，如：

$y = a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$



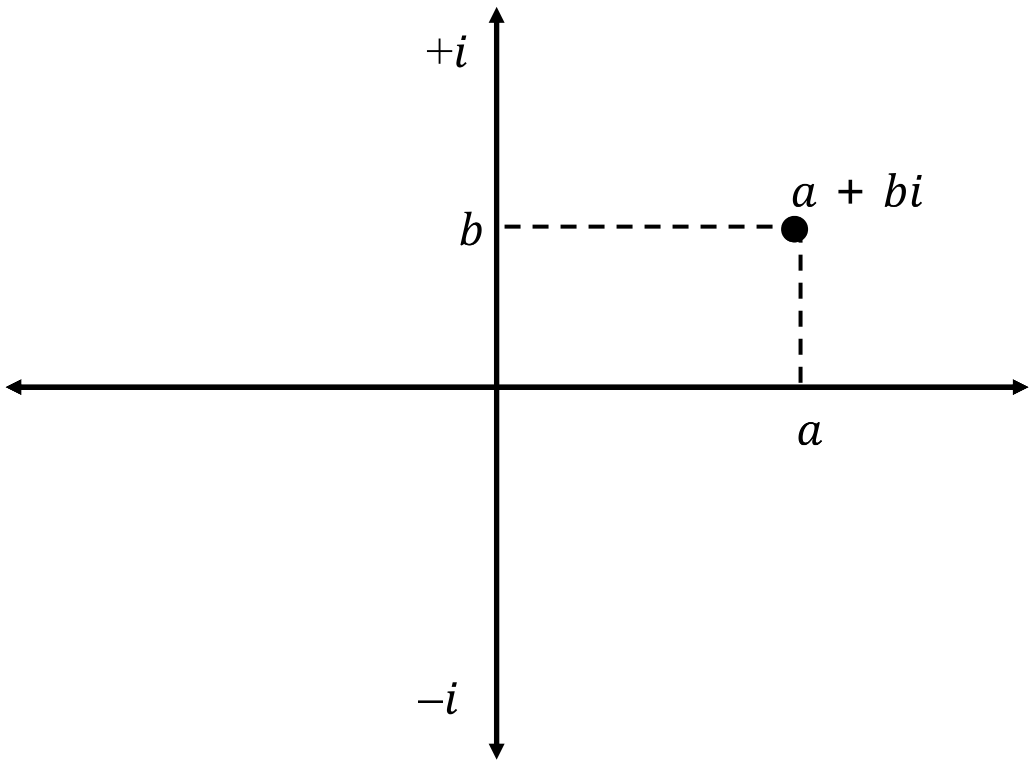
$y = 1 * 2 + 0.5 * 3 + 0.1 * 6 = 2 + 1.5 + 0.6 = 4.1$

Calvin, QQ: 179209347 Mail: 179209347@qq.com

复数 - 复平面

对于虚数 i ，我们无法在实数轴上线性运算获得，也就是说**与实数线性无关。**而线性无关意味着虚数 i 在与实数轴垂直的一个数轴上：

对于复数 $a + bi$，其在复平面里的坐标表示如下：

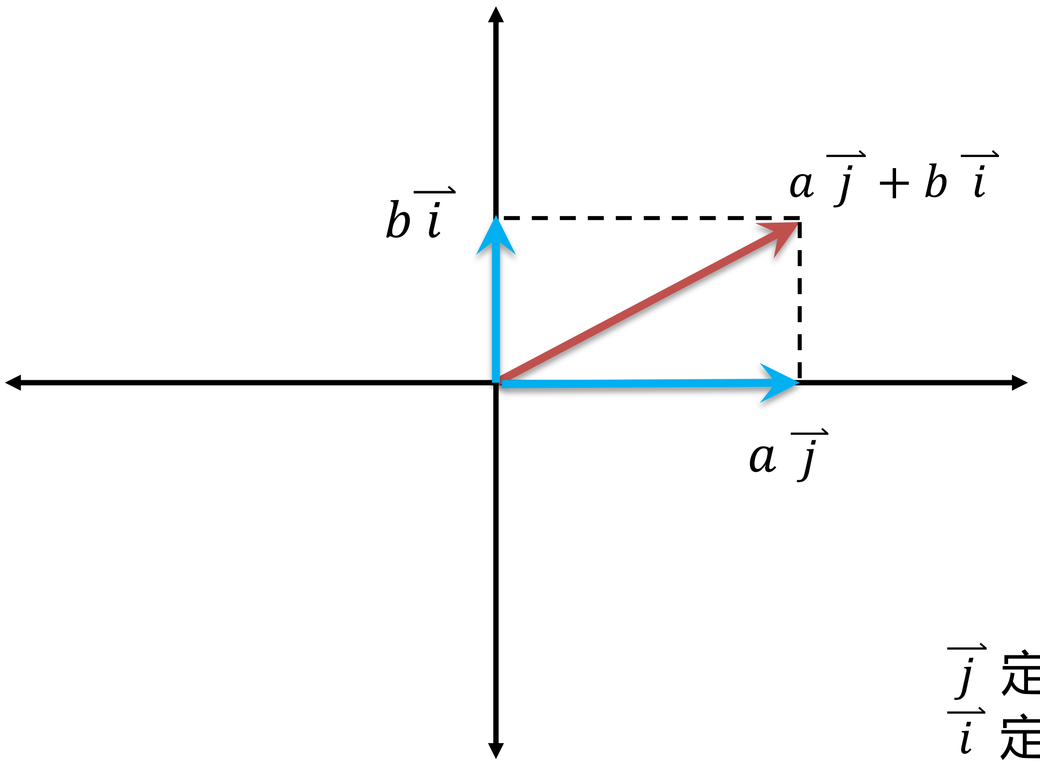


Calvin，QQ: 179209347 Mail: 179209347@qq.com

复数 - 向量表示

如果我们用向量来理解的话，复数 $a + bi$ 可以表示为，向量 $a\vec{j}$ 和 $b\vec{i}$ 的线性组合：

$$a\vec{j} + b\vec{i}$$



$\vec{j}$ 定义为实数轴单位向量，单位长度为 1

$\vec{i}$ 定义为虚数轴单位向量，单位长度为 i

Calvin, QQ: 179209347 Mail: 179209347@qq.com

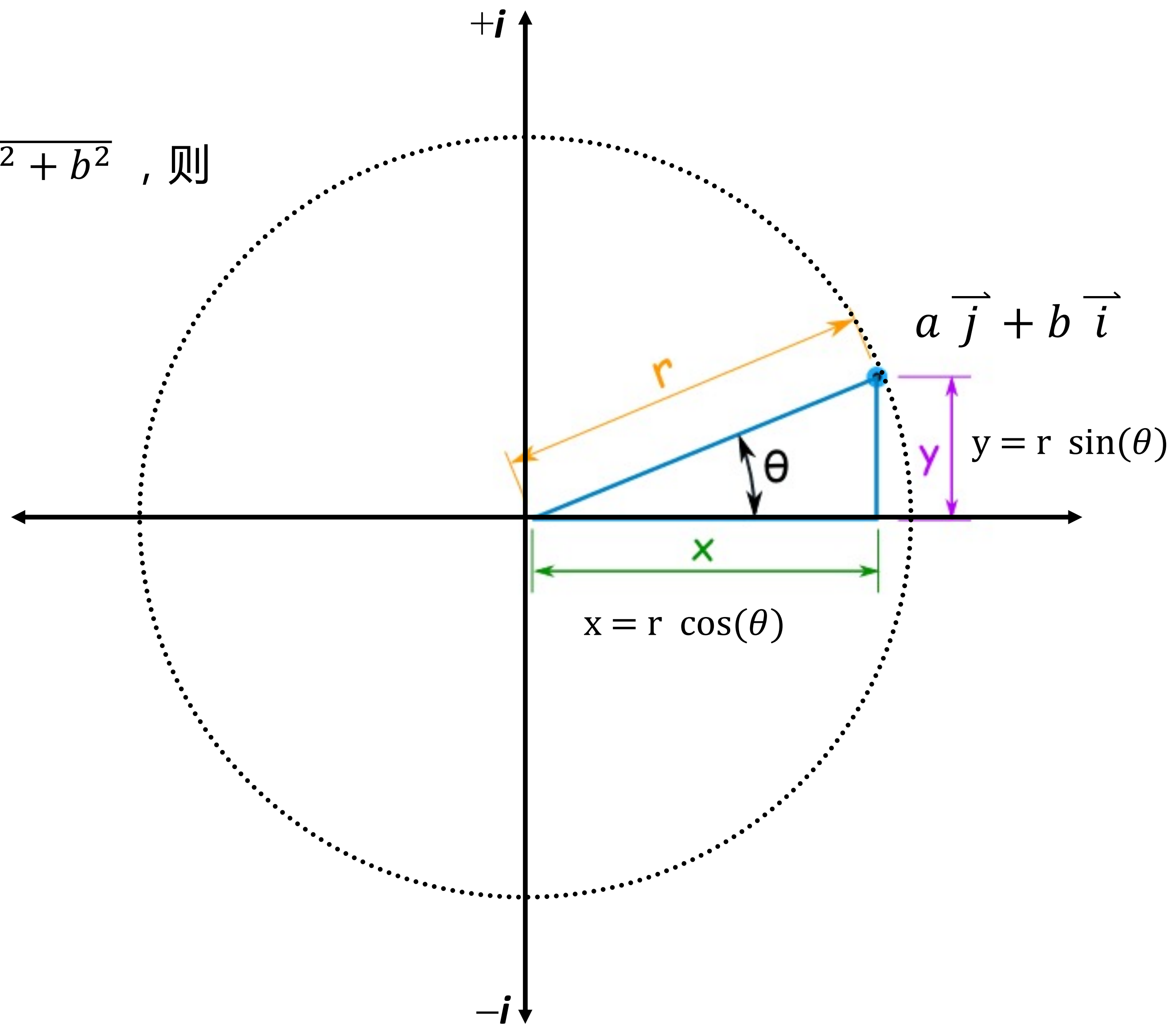
复数 - 向量三角函数表示

如右图所示，如果将向量长度定义为 r，且 $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ ，则根据三角函数有：

- $a = r\cos(\theta)$
- $b = r\sin(\theta)\, i$

那么复数 $c = a + b\, i$ 可以表示为：
$r(\cos(\theta) + i\ \sin(\theta))$

向量 $a\,\vec{j} + b\,\vec{i}$ 可以表示为：
$r\cos(\theta)\,\vec{j} + r\sin(\theta)\,\vec{i}$



Calvin, QQ: 179209347 Mail: 179209347@qq.com

复数 - 欧拉公式证明（1/2）

泰勒公式：

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$ 公式1

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$ 公式2

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$ 公式3

由公式3，用 ix 代入 x

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \cdots + \frac{(ix)^n}{n!}$$

Calvin，QQ: 179209347 Mail: 179209347@qq.com

复数 - 欧拉公式证明（2/2）

代入虚数 i： $i^0 = 1$, $i^1 = \mathrm{i}$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ ... $i^{2\mathrm{n}} = (-1)^{\mathrm{n}}$, $i^{2\mathrm{n}+1} = (-1)^{\mathrm{n}}\, i$

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{ix^7}{7!} + \cdots + \frac{i^{2n}x^{2n}}{(2n)!} + \frac{i^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^{\mathrm{n}}\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{i}(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!})$$

$$= \cos(x) + i\ \sin(x)$$

由此可得欧拉公式：

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\ \sin(\theta)$$

θ取 π 时，可得欧拉恒等式：

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$$

复数 - 虚数 i 与实数关系 – 复数加法的几何意义

复数：

$c_1 = a + b\,i = a\,\vec{j} + b\,\vec{i}$

$c_2 = \mathrm{c} + d\,i = c\,\vec{j} + d\,\vec{i}$

令：

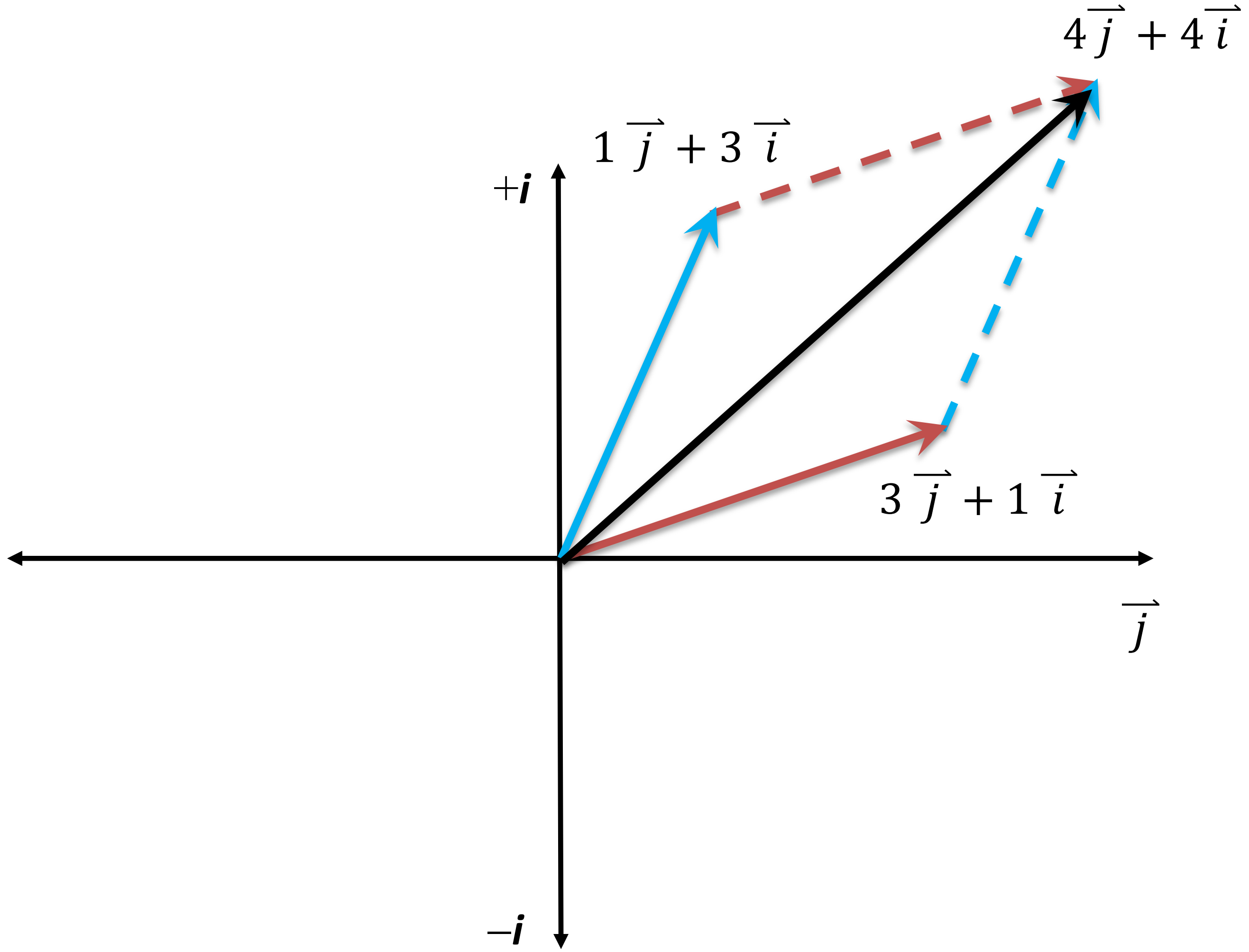
$c_1 = 1 + 3\,i = 1\,\vec{j} + 3\,\vec{i}$

$c_2 = 3 +\ i = 3\,\vec{j} + 1\,\vec{i}$

则 $c_3 = c_1 + c_2$

$\quad = (a+c)\,\vec{j} + (b+d)\,\vec{i}$

$\quad = 4\,\vec{j} + 4\,\vec{i}$



复数加法的几何意义可以概括为：

平行四边形法则

结果为两个复数向量形成的平行四边形的对角线

Calvin, QQ: 179209347 Mail: 179209347@qq.com

复数 - 虚数 i 与实数关系 – 向量旋转

根据欧拉公式：

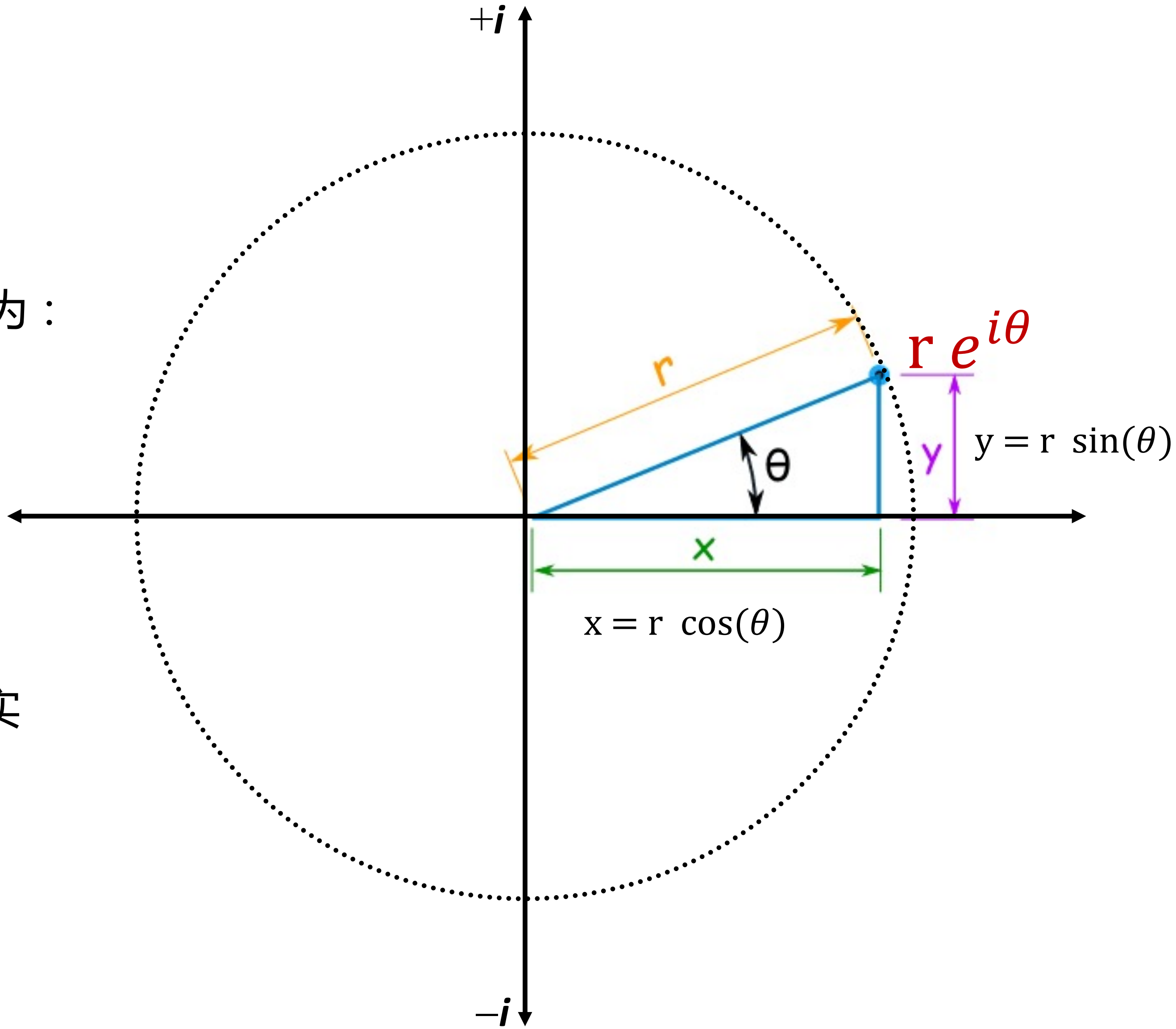
$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\ \sin(\theta)$$

复数 $c = a + b\ i$ 即 $r(\cos(\theta) + i\ \sin(\theta))$ 可以表示为：

$$c = r\ e^{i\theta}$$

$\theta = 0$ 时，$c = r\ e^{i\theta} = r\ \mathrm{e}^0 = r$

根据图形可知：
复数 $c = a + b\ i$ 即 $r(\cos(\theta) + i\ \sin(\theta))$可以理解为实数轴上长度为 r 的向量逆时针旋转 θ 角得到。



复数 - 虚数 i 与实数关系 – 复数乘法的几何意义

复数 $c_1 = a + b\,i$ ：

- $c_1 = r_1(\cos(\theta_1) + i\ \sin(\theta_1))$
- $c_1 = r_1\, e^{i\theta 1}$

复数 $c_2 = c + d\,i$ ：

- $c_2 = r_2(\cos(\theta_2) + i\ \sin(\theta_2))$
- $c_2 = r_2\, e^{i\theta 2}$

复数 $c_1 * c_2 = r_1\, e^{i\theta 1} * \ r_2\, e^{i\theta 2}$

$$= r_1\, r_2\, e^{i(\theta 1 + \theta 2)}$$

$$= r_3\, e^{i\theta 3}$$

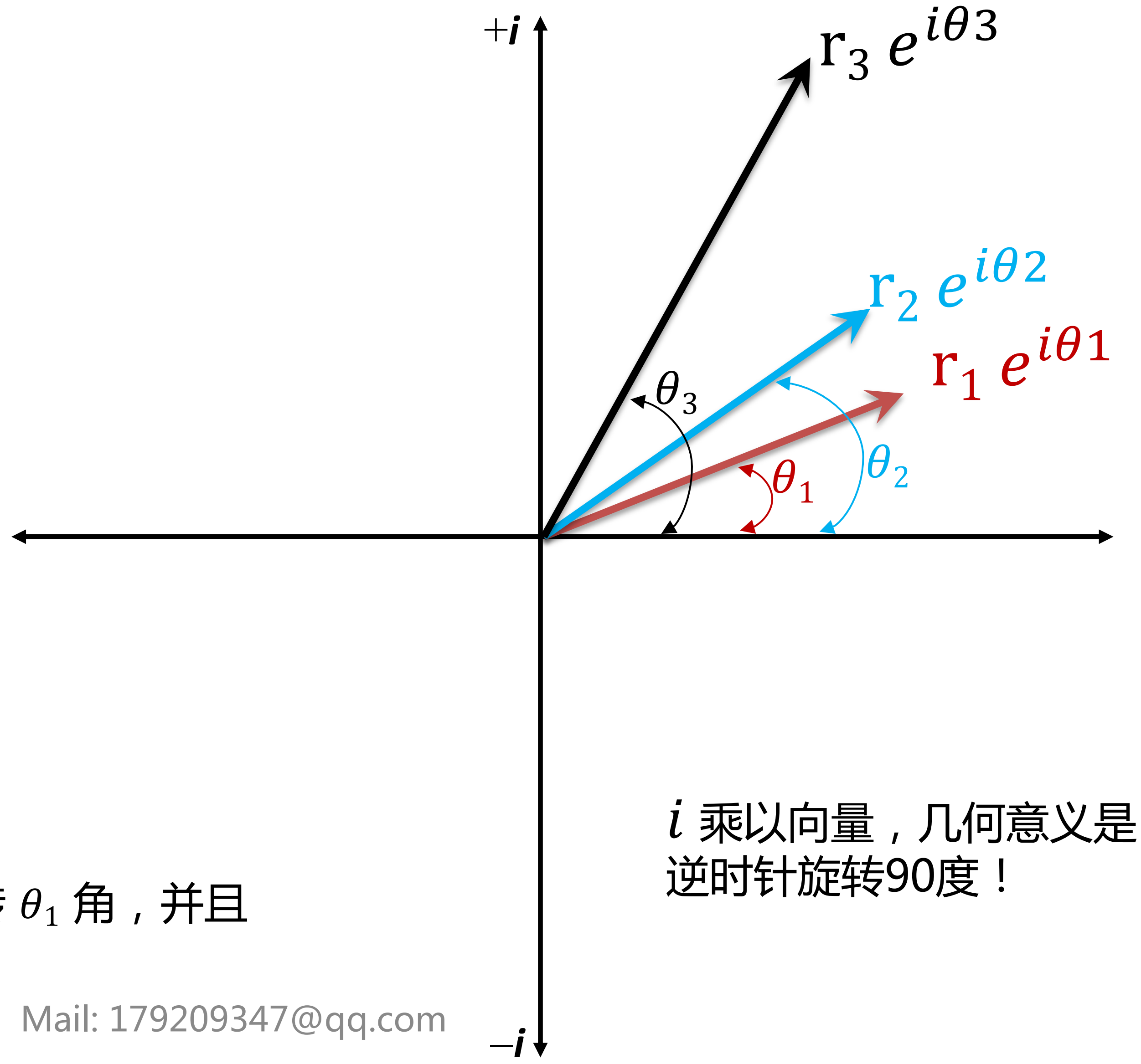
根据上面的计算过程可知**复数乘法几何意义** ：

旋转缩放

$$c_3 = c_1 * c_2 = r_1\, r_2\, e^{i(\theta 1 + \theta 2)}$$

$$= r_1\, r_2\,(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\ \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

可以理解为 c_1 作用于 c_2， 将复数 c_2 向量逆时针旋转 θ_1 角，并且长度进行缩放，缩放系数为 r_1 。

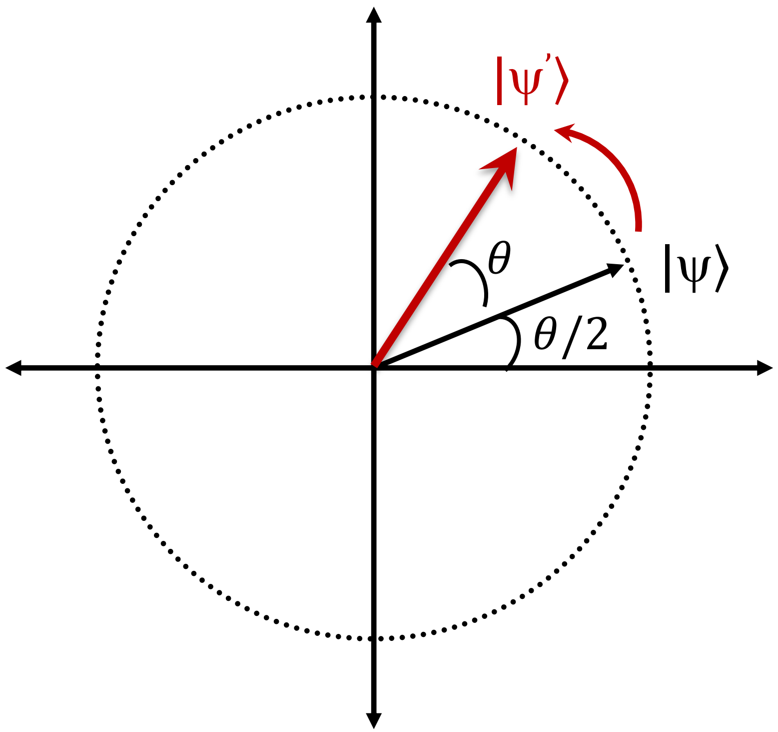


i 乘以向量，几何意义是逆时针旋转90度！

常用几何变换 - 逆时针旋转 θ

$$Q=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & -sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{bmatrix}$$

* 每次作用于向量，相当于逆时针旋转 θ



$$|\psi\rangle=\cos(\theta/2)\ |0\rangle+\sin(\theta/2)\,|1\rangle=\begin{bmatrix}\cos(\theta/2)\\ \sin(\theta/2)\end{bmatrix}$$

证明：

两角和与差的三角函数公式：

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

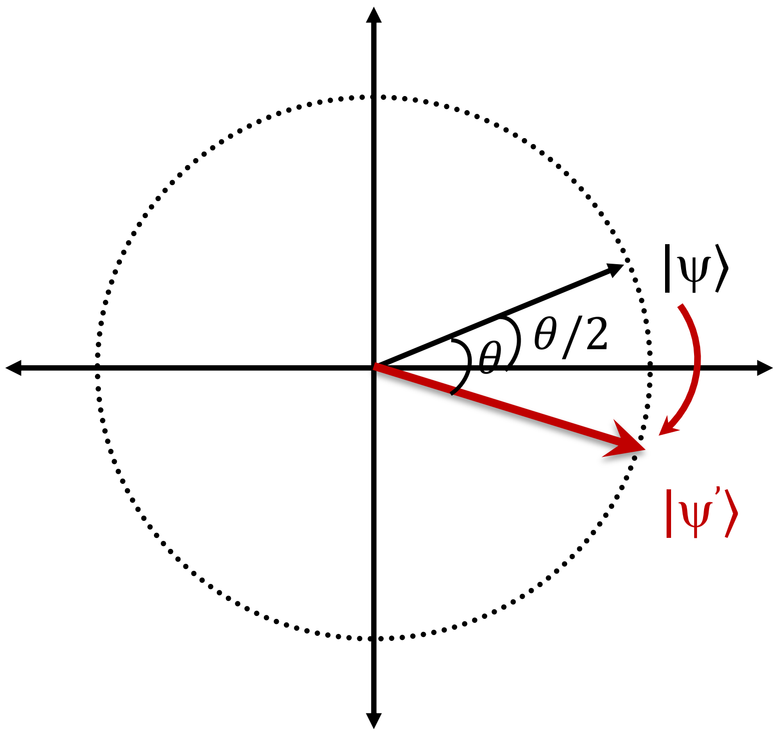
$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp sin\,\alpha\sin\beta$

$$\begin{aligned}|\psi'\rangle&=Q\,|\psi\rangle\\ &=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & -sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(\theta/2)\\ \sin(\theta/2)\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\cos(\theta)\cos(\theta/2)-sin(\theta)\sin(\theta/2)\\ \sin(\theta)\ \cos(\theta/2)\ +\cos(\theta)\sin(\theta/2)\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\cos(\theta/2+\theta)\\ \sin(\theta/2+\theta)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

常用几何变换 - 顺时针旋转 θ

$$Q=\begin{bmatrix} \cos(\theta) & sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

* 每次作用于向量，相当于顺时针旋转 θ



$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)\ |0\rangle + \sin(\theta/2)\ |1\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{bmatrix}$$

证明：

两角和与差的三角函数公式：

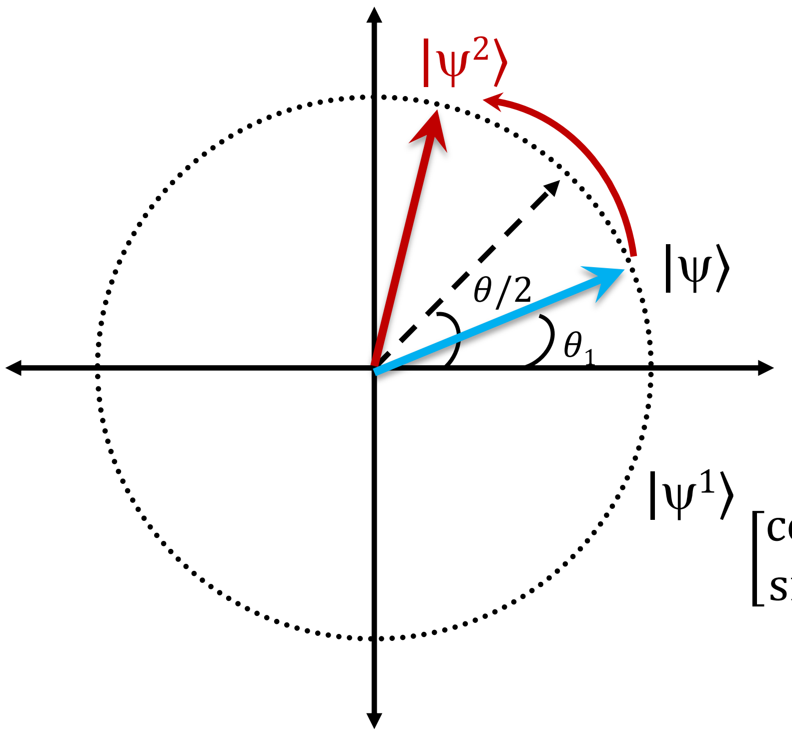
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp sin\,\alpha\sin\beta$

$$\begin{aligned} |\psi'\rangle &= Q\,|\psi\rangle \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta)\cos(\theta/2) + sin(\theta)\sin(\theta/2) \\ -\sin(\theta)\ \cos(\theta/2)\ + \cos(\theta)\sin(\theta/2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta/2-\theta) \\ \sin(\theta/2-\theta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

常用几何变换 – 镜像

$$Q=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix}\cos(\theta_1)\\ \sin(\theta_1)\end{bmatrix}$$

$$|\psi\rangle=\cos(\theta/2)\ |0\rangle+\sin(\theta/2)\ |1\rangle=\begin{bmatrix}\cos(\theta/2)\\ \sin(\theta/2)\end{bmatrix}$$

* 关于通过原点、方向和水平轴夹角为 $\theta/2$ 直线镜像;

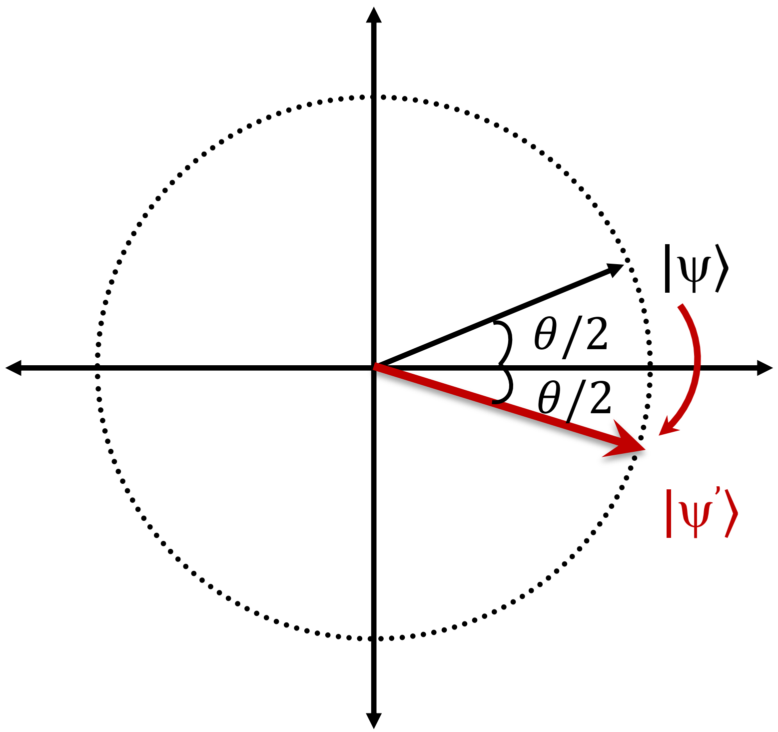
证明：

$$\begin{aligned}|\psi^2\rangle &= Q\ |\psi^1\rangle\\ &=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(\theta_1)\\ \sin(\theta_1)\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\cos(\theta)\cos(\theta_1)+sin(\theta)\sin(\theta_1)\\ \sin(\theta)\ \cos(\theta_1)\ -\cos(\theta)\sin(\theta_1)\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\cos(\theta-\theta_1)\\ \sin(\theta-\theta_1)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

关于通过原点、方向和水平轴夹角为 $\theta/2$ 直线镜像，可以理解为逆时针旋转 $2\left(\frac{\theta}{2}-\theta_1\right)$，则：

$$|\psi^2\rangle=\begin{bmatrix}\cos\left(\theta_1+2\left(\frac{\theta}{2}-\theta_1\right)\right)\\ \sin\left(\theta_1+2\left(\frac{\theta}{2}-\theta_1\right)\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\theta-\theta_1)\\ \sin(\theta-\theta_1)\end{bmatrix}$$

常用几何变换 -关于横轴镜像对称



$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)\ |0\rangle + \sin(\theta/2)\ |1\rangle = \begin{bmatrix}\cos(\theta/2)\\ \sin(\theta/2)\end{bmatrix}$$

$$Q=\begin{bmatrix}\cos(0) & sin(0)\\ \sin(0) & -\cos(0)\end{bmatrix}$$

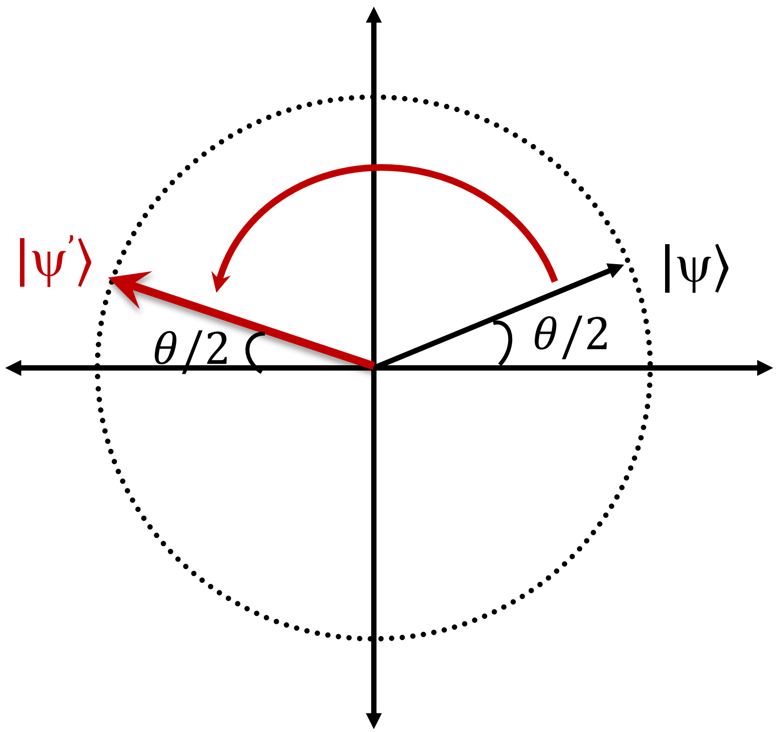
$$Q=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

* 作用于向量，相当于关于横轴镜像

证明：

$$|\psi'\rangle = Q\ |\psi\rangle$$
$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(\theta/2)\\ \sin(\theta/2)\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\cos(\theta/2)\\ -\sin(\theta/2)\end{bmatrix}$$

常用几何变换 -关于纵轴镜像对称



$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)\ |0\rangle + \sin(\theta/2)\ |1\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{bmatrix}$$

$$Q=\begin{bmatrix} \cos(2\frac{\pi}{2}) & sin(2\frac{\pi}{2}) \\ \sin(2\frac{\pi}{2}) & -\cos(2\frac{\pi}{2}) \end{bmatrix}$$

$$Q=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

* 作用于向量，相当于关于纵轴镜像

证明：

$$\begin{aligned} |\psi'\rangle &= Q\,|\psi\rangle \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

常用几何变换 – 镜像

令 $|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{bmatrix}$

则 $|\psi\rangle\langle\psi| = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta/2) & \cos(\theta/2)\,sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2)\,sin(\theta/2) & sin^2(\theta/2) \end{bmatrix}$

则 $2|\psi\rangle\langle\psi| - I = \begin{bmatrix} 2\cos^2(\theta/2) - 1 & 2\cos(\theta/2)\,sin(\theta/2) \\ 2\cos(\theta/2)\,sin(\theta/2) & 2\,sin^2(\theta/2) - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{bmatrix}$

- $2|\psi\rangle\langle\psi| - I$ ，相当于关于 $|\psi\rangle$ 镜像
- $|\psi\rangle$ 为镜像轴

Thank You