Qubits
qubits.top

量子计算
—基础篇

Quantum Computing

网址：www.qubits.top

Calvin Tang

179209347@qq.com

介绍

教程简介：

- 面向对象：量子计算初学者
- 依赖课程：线性代数，量子力学（非必需）

知乎专栏：
https://www.zhihu.com/column/c_1501138176371011584

Github & Gitee 地址：
https://github.com/mymagicpower/qubits
https://gitee.com/mymagicpower/qubits

*** 版权声明：**

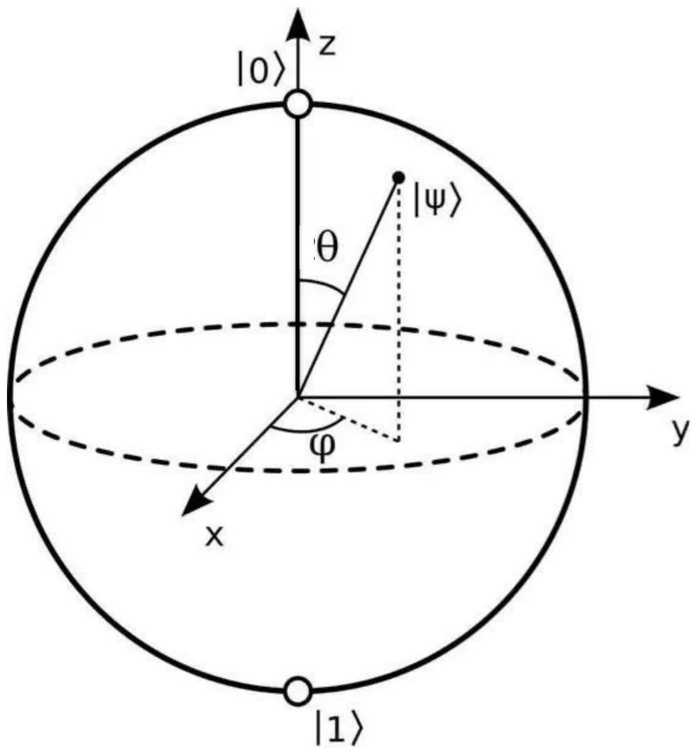
- 仅限用于个人学习
- 禁止用于任何商业用途

介绍

布洛赫球是一种用于描述量子比特（quantum bit，或简称 qubit）状态的图形化工具。在布洛赫球上，一个单量子比特的状态可以用一个点表示，这个点的位置和方向对应着量子比特的状态。

量子比特状态的操作和变化可以在布洛赫球上用旋转和移动的方式进行描述。

布洛赫球是量子计算和量子通信中非常有用的工具，可以帮助人们更好地理解和分析量子比特的状态和操作。



单量子态

- 单量子态 $|\psi\rangle$ 线性代数中的线性组合来表示为：

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

$$|0\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \qquad |1\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

- 由于 α、β 都是复数，那么有：

$$\alpha = a + bi = r_0(\cos(\varphi_0) + i\ \sin(\varphi_0)) = r_0\, e^{i\varphi_0}$$
$$\beta = c + di = r_1(\cos(\varphi_1) + i\ \sin(\varphi_1)) = r_1\, e^{i\varphi_1}$$

- 那么有：

$$|\psi\rangle = r_0(\cos(\varphi_0) + i\ \sin(\varphi_0))|0\rangle + r_1(\cos(\varphi_1) + i\ \sin(\varphi_1))|1\rangle$$
$$= r_0\, e^{i\varphi_0}|0\rangle + r_1\, e^{i\varphi_1}|1\rangle$$

单量子态 - 全局相位

- 因为：

$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle &= r_0 e^{i\varphi_0}|0\rangle + r_1 e^{i\varphi_1}|1\rangle \\
&= e^{i\varphi_0}\,(\,r_0|0\rangle + r_1 e^{i(\varphi_1-\varphi_0)}|1\rangle\,)
\end{aligned}
$$

- 且全局相位 $e^{i\varphi_0}$ 对 $|0\rangle$ 、 $|1\rangle$ 影响都一样，即不改变量子态，且在实验上无法测量，所以公式简化为：

$$|\psi\rangle = r_0|0\rangle + r_1 e^{i(\varphi_1-\varphi_0)}|1\rangle = r_0|0\rangle + r_1 e^{i\varphi}|1\rangle$$

其中 $\varphi = (\varphi_1 - \varphi_0)$

单量子态 - 全局相位

- 因为：

$$|\psi\rangle = r_0|0\rangle + r_1 e^{i(\varphi_1-\varphi_0)}|1\rangle = r_0|0\rangle + r_1 e^{i\varphi}|1\rangle$$

其中 $\varphi = (\varphi_1 - \varphi_0)$

- 由于：

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

- 有:

$$|r_0|^2 + |r_1 e^{i\varphi}|^2 = r_0^2 + r_1^2 |e^{i\varphi}|^2 = r_0^2 + r_1^2 = 1$$

$$* |e^{i\varphi}|^2 = 1$$

- 令 $r_0 = \cos(\theta)$ ，$r_1 = \sin(\theta)$：
- 可得：

$$|\psi\rangle = \cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta) e^{i\varphi} |1\rangle$$

单量子态 – 降维

因为：

$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle &= r_0|0\rangle + r_1 e^{i\varphi}|1\rangle \\
&= \cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)\, e^{i\varphi}\, |1\rangle \\
&= \cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)\,(\cos(\varphi) + i\ \sin(\varphi))|1\rangle \\
&= \cos(\theta)|0\rangle + (\sin(\theta)\cos(\varphi) + i\ \sin(\theta)\sin(\varphi))\,|1\rangle
\end{aligned}
$$

单量子态的**复向量**表示：

$$
|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix}\alpha \\ \beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\varphi) + i\ \sin(\theta)\sin(\varphi)\end{bmatrix}
$$

单量子态的**实向量**表示：

$$
\begin{bmatrix}\cos(\theta) \\ 0 \\ \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi)\end{bmatrix}
$$

单量子态 – 降维

由于其中一个维度为 0，那么可以用三维空间来表示单量子比特：

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) \end{bmatrix}$$

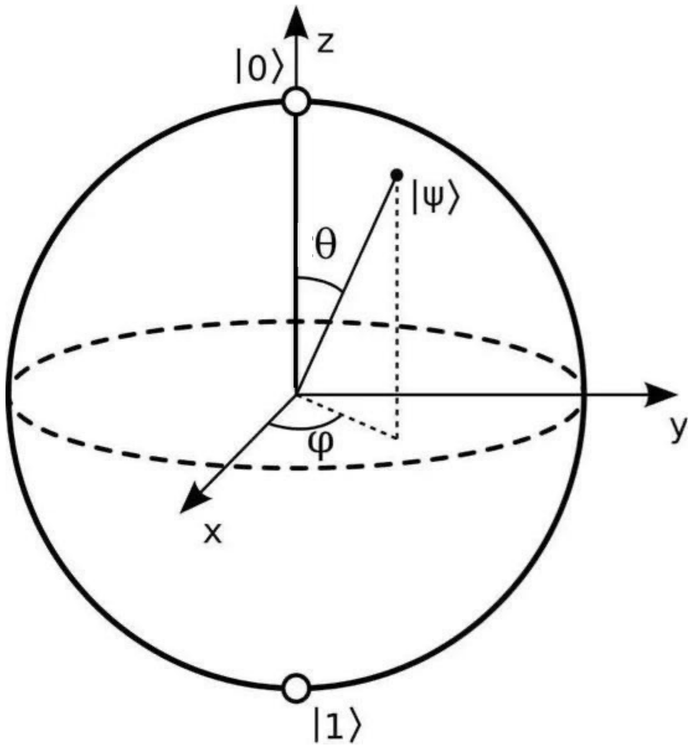
可得：

$0 \le \theta \le \pi$ ，$0 \le \varphi \le 2\pi$

$$x = \sin\theta\cos\varphi$$
$$y = \sin\theta\sin\varphi$$
$$z = \cos\theta$$

$0 \le \theta \le \pi$ ，$0 \le \varphi \le 2\pi$

但是，这仍不是布洛赫球！



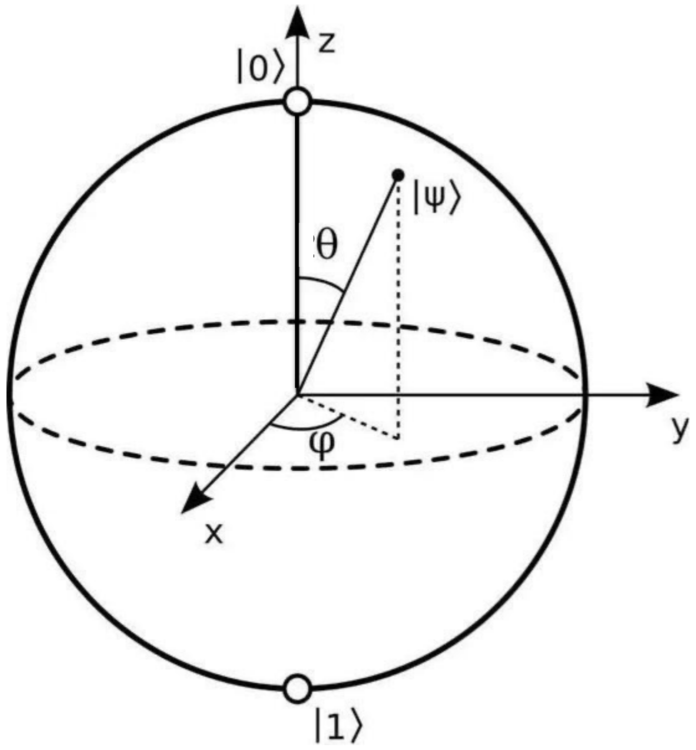
布洛赫球半角问题（ Half Angles ）

单量子态: $|\psi\rangle = \cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)\, e^{i\varphi}\, |1\rangle$

当 $\theta = 0$ 时， $|\psi\rangle = |0\rangle$

当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时， $|\psi\rangle = e^{i\varphi}\, |1\rangle \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$

分析发现， $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ 就可以获得布洛赫球上所有的点！



布洛赫球半角问题（ Half Angles ）

Qubits
qubits.top

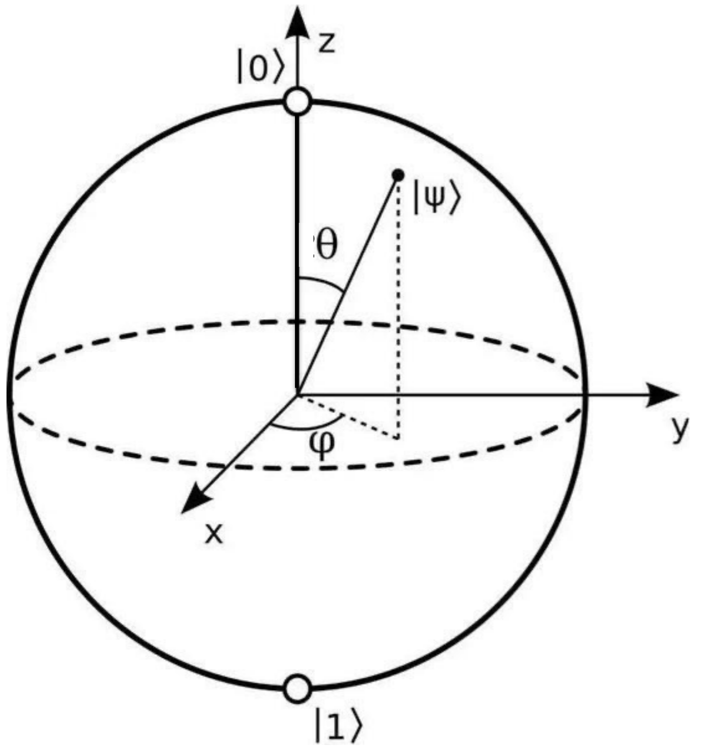
单量子态: $|\psi\rangle = \cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)\, e^{i\varphi}\, |1\rangle$

极坐标形式：（1，θ，φ）

其在布洛赫球上对称的点 $|\psi'\rangle$ ，极坐标为：

$$(1, \pi - \theta, \varphi + \pi)$$

$$\begin{aligned} |\psi'\rangle &= \cos(\pi - \theta)|0\rangle + \sin(\pi - \theta)\, e^{i(\varphi+\pi)}\, |1\rangle \\ &= -\cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)\, e^{i\varphi} e^{i\pi} |1\rangle \\ &= -\cos(\theta)|0\rangle - \sin(\theta)\, e^{i\varphi} |1\rangle \\ &= -|\psi\rangle \end{aligned}$$



上半球的点在下半球上的对称点的差别是一个全局相位系数 -1！
这意味着量子态是等价的。

所以，我们只需要考虑上半球的点，即：$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

布洛赫球 (Bloch Sphere)

单量子态:

$$|\psi\rangle = \cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)\, e^{i\varphi}\, |1\rangle$$

由于半角问题，上述单量子态公式调整为：

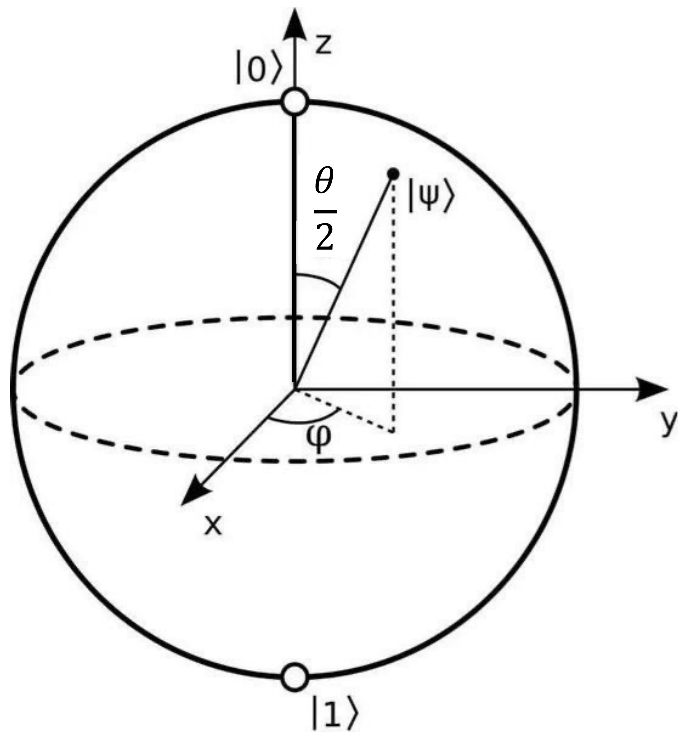
$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\varphi}\, |1\rangle$$

其中：

$$0 \le \theta \le \pi \ \ ,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$x = \sin\frac{\theta}{2}\cos\varphi$$
$$y = \sin\frac{\theta}{2}\sin\varphi$$
$$z = \cos\frac{\theta}{2}$$

如此，得到布洛赫球！



Qubits
qubits.top

Thank You