量子计算

—基础篇

Quantum Computing

网址：www.qubits.top

Calvin Tang

179209347@qq.com

介绍

教程简介：

- 面向对象：量子计算初学者
- 依赖课程：线性代数，量子力学（非必需）

知乎专栏：
https://www.zhihu.com/column/c_1501138176371011584

Github & Gitee 地址：
https://github.com/mymagicpower/qubits
https://gitee.com/mymagicpower/qubits

*** 版权声明：**

- 仅限用于个人学习
- 禁止用于任何商业用途

希尔伯特空间与实数空间转换 – 向量

单量子态复向量表示：

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{a} + \mathrm{b}\ i \\ \mathrm{c} + \mathrm{d}\ i \end{bmatrix}$$

（ α、β 都是复数 ）

单量子态实向量表示：

$$\begin{bmatrix} \mathrm{a} \\ \mathrm{b} \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

希尔伯特空间与实数空间转换 – 矩阵

由于：

a + b i 作为算子其矩阵表示：

$$\begin{bmatrix} \mathrm{a} & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

可得：

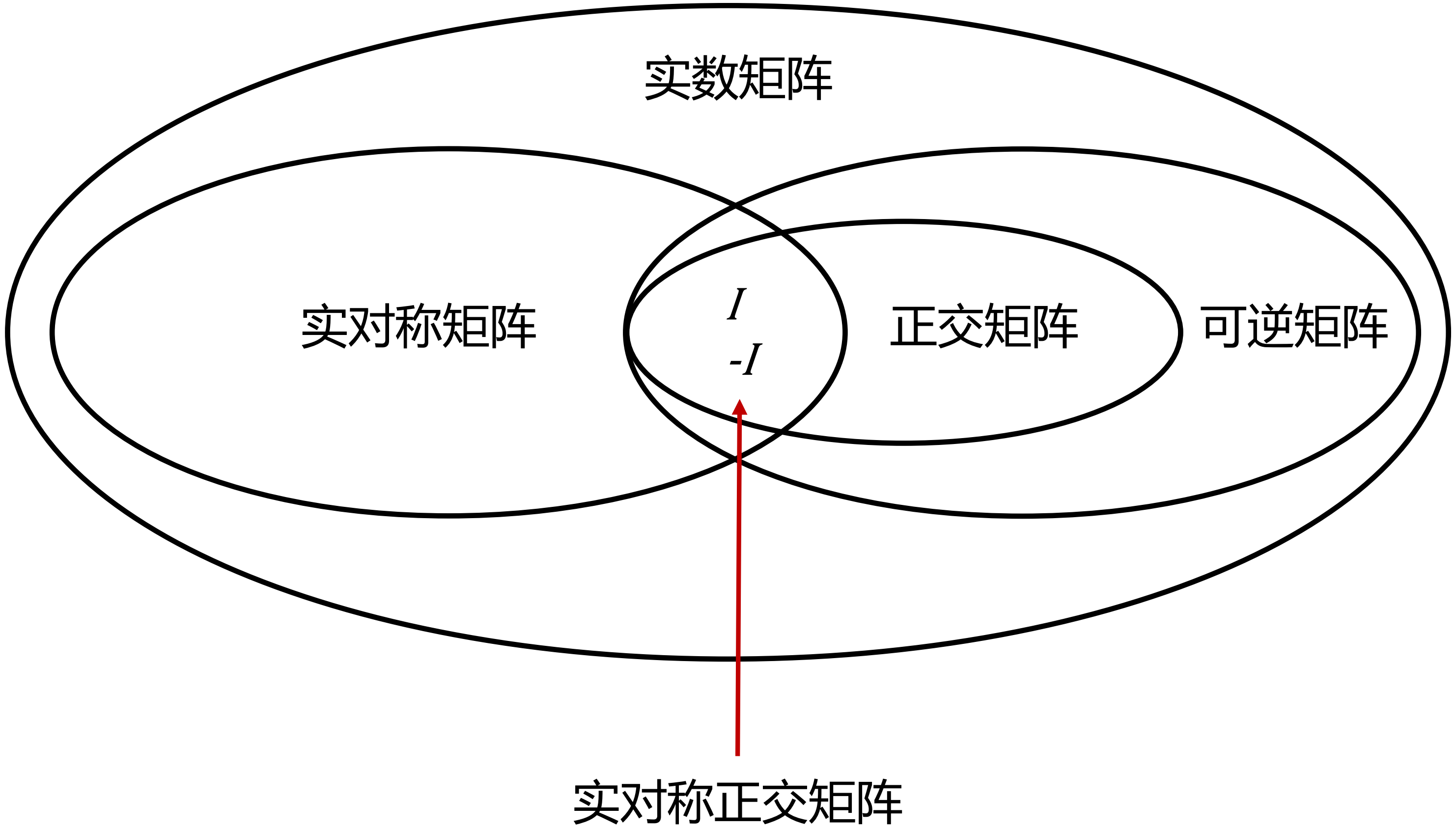
$$0 \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad -i \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad i \equiv \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

那么 $\mathrm{Y} = \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ **实向量空间**中的矩阵表示（看做 2 * 2 分块矩阵）：

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

如此，我们就可以实现复数矩阵与实数矩阵的转换。

矩阵类型



实对称矩阵 $A^T = A$

实对称矩阵是所有元素均为实数的对称矩阵，矩阵的转置与自身相同：

$A^T = A$ A^T 的意思是转置

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

N 阶实对称方阵具有以下重要性质：

性质 1：所有特征值均为实数
性质 2：所有特征向量均为实向量
性质 3：具有 n 个互不相同的特征值
性质 4：具有 n 个线性无关的特征向量
性质 5：不同特征值对应的特征向量之间是正交的

厄米矩阵 $A^{\dagger} = A$

希尔伯特空间中的厄米矩阵： $A^{\dagger} = A$ $A^{\dagger}$ 的意思是转置共轭

$A^{\dagger} = A = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ **实向量空间**中的矩阵表示：

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$A^{T} = A = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ **实向量空间**中的矩阵表示：

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

没有没有共轭条件，其等价的实数矩阵并不对称！

结论：1、厄米矩阵 $A^{\dagger}$ 其等价的实数矩阵是实对称矩阵。
2、所以厄米矩阵具有实对称矩阵同样性质。
3、唯独性质 2不满足，即所有特征向量均为实向量不成立，有可能是复向量。

实正交矩阵

正交矩阵： $A^TA = A A^T = I$，其中 $A^T = A^{-1}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

实正交矩阵具有以下重要性质：

1、行向量和列向量组皆为正交的单位向量。
2、任意两行或列正交就是两行或列点乘结果为0，而因为是单位向量，所以任意行或列点乘自己结果为1。
3、行列式的绝对值为1， 也就意味着对任何向量变换，**只旋转，不缩放。**

幺正矩阵（酉矩阵）

幺正矩阵： $U U^{\dagger} = U^{\dagger} U = I$ ，其中 $U^{\dagger} = U^{-1}$

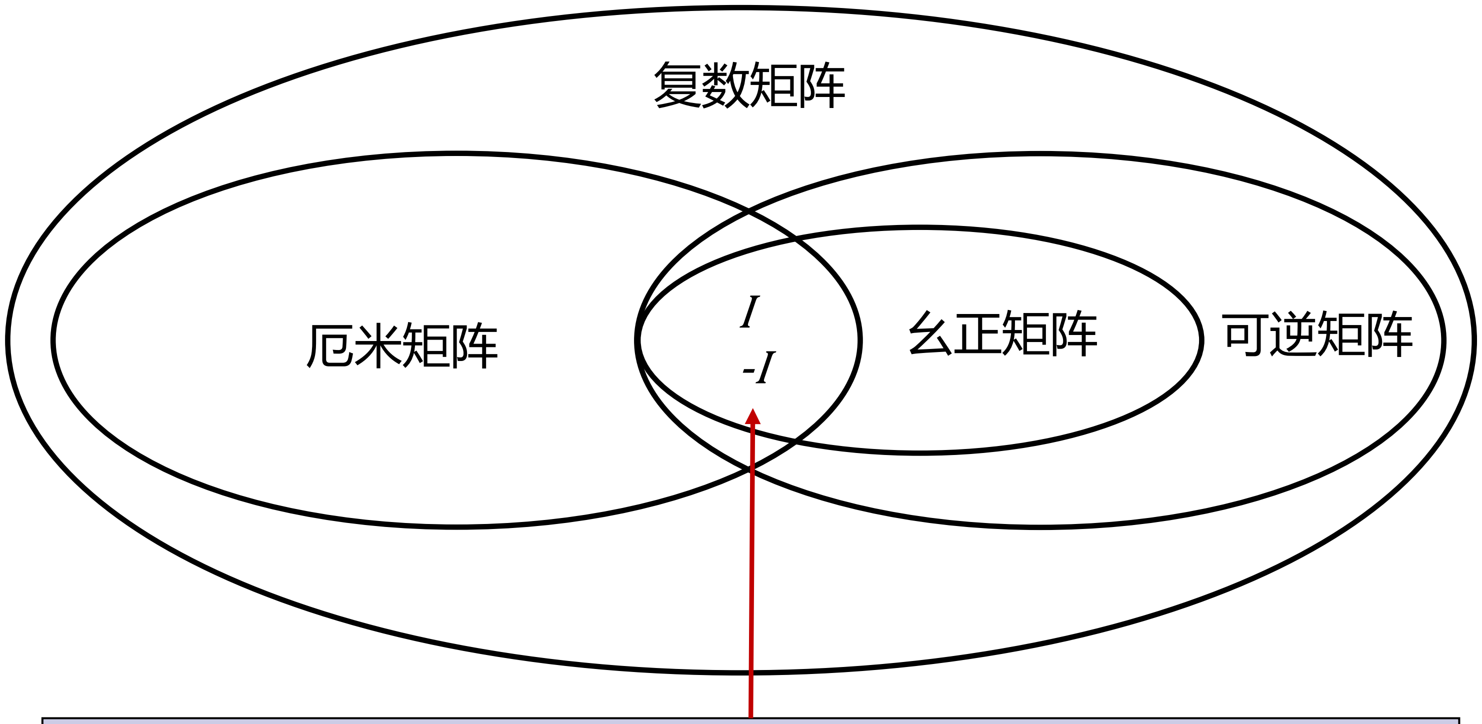
$Y = \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ **实向量空间**中的矩阵表示（看做 2 * 2 分块矩阵）：

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

转换成实数矩阵后，就很清晰的发现，其**等价的实数矩阵是实正交矩阵。**

幺正矩阵的行（列）向量组是酉空间的标准正交向量组。具备实正交矩阵的所有性质。

希尔伯特空间矩阵类型

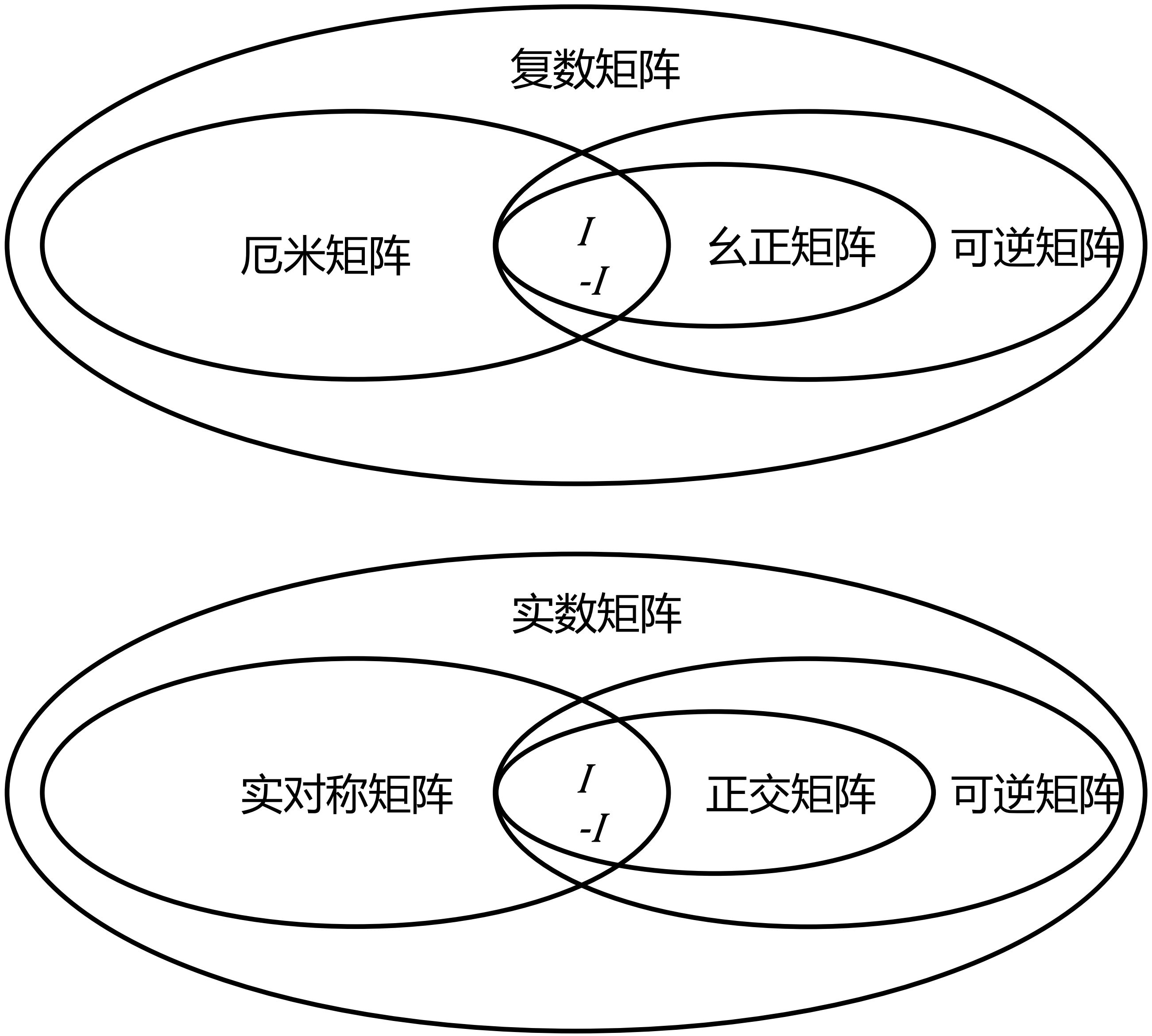


Pauli 矩阵

$$X = \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{Y} = \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \qquad Z = \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Pauli 矩阵即是厄米矩阵也是幺正矩阵。

矩阵类型对比



Qubits
qubits.top

Thank You