Qubits
qubits.top

# 量子计算

## —数学基础

# Quantum Computing

网址：www.qubits.top

作者：Calvin Tang

邮箱：179209347@qq.com

# 介绍

**教程简介：**

- 面向对象：量子计算初学者
- 依赖课程：线性代数，解析几何，量子力学（非必需）

**知乎专栏：**
https://www.zhihu.com/column/c_1501138176371011584

**Github & Gitee 地址：**
https://github.com/mymagicpower/qubits
https://gitee.com/mymagicpower/qubits

*** 版权声明：**

- 仅限用于个人学习，或者大学授课使用
- 禁止用于任何商业用途

# 酉（幺正）变换性质

1. $UU^{\dagger} = U^{\dagger}U = I \Rightarrow U^{\dagger} = U^{-1}$

2. 如果： $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是幺正矩阵，对于所有的 $v, w \in \mathbb{C}^{n}$

$< Uv, Uw > = < v, w > \quad < Uv, w > = < v, U^{\dagger} w >$

证明：$< Uv, Uw > = (U\, v)^{\dagger}\, (U\, w) = v^{\dagger}U^{\dagger}Uw == v^{\dagger}Iw = < v, w >$

3. 如果： $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是幺正矩阵，对于所有的 $v \in \mathbb{C}^{n}$

$||Uv|| = ||v||$

证明：$||Uv|| = \sqrt{< Uv, Uv >} = \sqrt{< v, v >} = ||v||$

4. 如果： $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是幺正矩阵，对于所有的 $v, w \in \mathbb{C}^{n}$

$d(U\, v, Uw) = d(\, v, w)$

证明：$d(Uv, Uw) = |U\, v - Uw| = |U(v - w)| = |\, v - w| = d(v, w)$

# 酉（幺正）变换性质

5. $< Uv, Uv > = < v, U^{\dagger} U v > = < v, v > = ||v||^2$

6. 如果： $U \in \mathbb{C}^{nxn}$ 是幺正矩阵，存在另一个幺正矩阵 $V$,和幺正对角阵 $D \in \mathbb{C}^{nxn}$

$$U = V^{\dagger}DV$$
$$D = VUV^{\dagger}$$

# 狄拉克符号

$$\langle v| = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix}^\dagger = [\overline{v_1} \;\; \overline{v_2} \;\; \dots \;\; \overline{v_n}]$$

$$|w\rangle = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_m \end{bmatrix}$$

$$|w\rangle\langle v| = \begin{bmatrix} w_1\overline{v_1} & \cdots & w_1\overline{v_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_m\overline{v_1} & \cdots & w_m\overline{v_n} \end{bmatrix}$$

$$\langle v|w\rangle = \langle v||w\rangle = (\langle v|)(|w\rangle)$$

当 $n = m$ 时：

$$\langle v|w\rangle = \langle v\,,w\rangle = \overline{v_1}w_1 + \overline{v_2}w_2 + \dots + \overline{v_n}w_n$$

$\nu$的长度为：

$$||\nu|| \;= \sqrt{< \nu, \nu>}$$

# 共轭

$$[v_1 \ \ v_2 \ \ \ldots \ \ v_n]^{\dagger} = \begin{bmatrix} \overline{v_1} \\ \overline{v_2} \\ \ldots \\ \overline{v_n} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \ldots \\ v_n \end{bmatrix}^{\dagger} = [\overline{v_1} \ \ \overline{v_2} \ \ \ldots \ \ \overline{v_n}]$$

$(vu)^* = u^* v$

$(u + v)^* = u^* + v^*$

$(\lambda u)^* = \bar{\lambda} u^*$

$(\mathrm{y}|ux) = (u^*\mathrm{y}|x)$

$||u|| = ||u^*||$

$||u||^2 = ||u^* u|| = ||u u^*||$

# 厄米共轭算符公式

给定一个线性算符 $A$，它的厄米共轭算符（转置共轭）定义为：

$$\langle u|A|v\rangle = \langle A^\dagger u|v\rangle = \langle v|A^\dagger|u\rangle^* \qquad A^\dagger = (A^*)^T$$

由上述定义可得：

$$\langle e_j|A|e_k\rangle = \langle e_k|A^\dagger|e_j\rangle^*$$

于是有：

$$(c^\dagger)_{jk} = c^*{}_{kj}$$

根据上述定义，可得：

$$|x\rangle^\dagger = (x_1^*, \dots, x_n^*) = \langle x|$$

$$\left(\sum_i a_i A_i\right)^\dagger = \sum_i a_i^* A_i^\dagger \qquad (cA)^\dagger = c^* A^\dagger \quad (\mathrm{A} + \mathrm{B})^\dagger = \mathrm{A}^\dagger + \mathrm{B}^\dagger \qquad (\mathrm{AB})^\dagger = \mathrm{B}^\dagger \mathrm{A}^\dagger$$

$$(A|v\rangle)^\dagger = \langle v|A^\dagger \qquad (|u\rangle\langle v|)^\dagger = |v\rangle\langle u|$$

$$||\langle u|A|v\rangle||^2 = \langle u|A|v\rangle\langle v|A^\dagger|u\rangle$$

# 厄米共轭算符公式

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(A-B)^T = A^T - B^T$$

$$(-A)^T = -A^T$$

$$(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

$$(A-B)^\dagger = A^\dagger - B^\dagger$$

$$(-A)^\dagger = -A^\dagger$$

# 矩阵的迹

$$tr(A+B) = tr\,(A) + tr\,(B)$$

$$tr(dA) = d\ tr\,(A)$$

$$tr(-A) = -\ tr\,(A)$$

$$tr(AB) = tr\,(BA)$$

$$tr(ABC) = tr\,(CAB) = tr\,(BCA)$$

对于方阵：

$$tr(A) = \ tr\,(A^T)$$

$$tr(\bar{A}) = \ tr\,(A^\dagger) = \overline{tr(A)}$$

# 矩阵的直和

$$v = [v_1 \ \ v_2 \ \dots \ \ v_n]$$

$$w = [w_1 \ w_2 \ \dots \ \ w_n]$$

$$v \oplus w = [v_1 \ \ v_2 \ \dots \ \ v_{n,} w_1 \ w_2 \ \dots \ \ w_n]$$

# 张量积（tensor product）

张量积是两个或多个向量空间张成一个更大向量空间的运算。
在量子力学中，**量子的状态**由希尔伯特空间 (Hilbert spaces) 中的**单位向量**来描述。
本质上复合系统中量子态的演化也是矩阵的乘法，其与单个子系统相比，只是多了张量积的运算。

$$|00\rangle = |0\,,0\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\\0\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$|01\rangle = |0\,,1\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\\0\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$|10\rangle = |1\,,0\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\\1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$|11\rangle = |1\,,1\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\\1\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

# 张量积 – 重要公式

1. $A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$， $|a\rangle \otimes (|b\rangle + |c\rangle) = |a\rangle \otimes |b\rangle + |a\rangle \otimes |c\rangle$

2. $(A + B) \otimes C = A \otimes C + \mathrm{B} \otimes C$， $(|a\rangle + |b\rangle) \otimes |c\rangle = |a\rangle \otimes |c\rangle + |b\rangle \otimes |c\rangle$

3. $z(|a\rangle \otimes |\mathrm{b}\rangle) = (z|a\rangle) \otimes |\mathrm{b}\rangle = |a\rangle \otimes (z|b\rangle)$ $z$ 为标量

4. $(A \otimes B)^\dagger = A^\dagger \otimes B^\dagger \quad (A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$

5. $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1} \quad (A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$

6. $tr(A \otimes B) = tr(A)\, tr(B)$

7. $det(A \otimes B) = (detA)^p\, (detB)^m$

# 张量积 – 重要公式

1. 不同子空间的张量积的矩阵乘，相当于各自子空间下的矩阵乘，再把结果张量积。

① $(A \otimes B)\,(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$

② $(A_1 \otimes B_1)\,(A_2 \otimes B_2)\,(A_3 \otimes B_3) = (A_1\,A_2\,A_3) \otimes (B_1\,B_2\,B_3)$

③ $(|a\rangle\langle b|) \otimes (|c\rangle\langle d|) = (|a\rangle \otimes |c\rangle)(\langle b| \otimes \langle d|) = |ac\rangle\langle bd|$ (公式1逆向狄拉克符号写法)

④ $(A \otimes B)\,(|x\rangle \otimes |y\rangle) = A\,|x\rangle \otimes B\,|y\rangle$

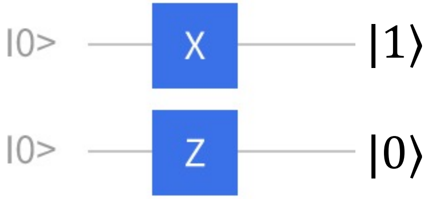
⑤ $(A \otimes B)\,(\sum_i c_i|x_i\rangle \otimes |y_i\rangle) = \sum_i c_i A|x_i\rangle \otimes B\,|y_i\rangle$

⑥ $(\sum_i c_i A_i \otimes B_i)\,(|x\rangle \otimes |y\rangle) = \sum_i c_i A_i|\mathrm{x}\rangle \otimes B_i|\mathrm{y}\rangle$

2. $H^{\otimes n} = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x,y}(-1)^{x \cdot y}|x\rangle\langle y|$ $\quad (H|0\rangle)^{\otimes n} = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^{\mathrm{n}}-1} |x\rangle$

# 张量积 – 例子

例如，复合系统 H 由两能级系统 H1 和 H2 复合而成，
在 t1 时刻，两个系统的状态都为 $|0\rangle$ ，则复合系统的状态为 $|00\rangle$；
在 t2 时刻，第一个系统经过 X 门，状态变 为 $|1\rangle$，第二个系统经过 Z 门，状态为 $|0\rangle$，那么复合系统的状态经过的变换用矩阵运算表示为 ：




因为： $X = \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad Z = \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

所以：$X \otimes Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & 1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ 1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

则有：$X \otimes Z\,|00\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |10\rangle$

# 三角函数公式

两角和与差的三角函数公式：

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp sin\,\alpha\sin\beta$

$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$

$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$

Qubit
qubits.top

# Thank You