量子计算

—基础篇

Quantum Computing

网址：www.qubits.top

Calvin Tang

179209347@qq.com

介绍

教程简介：

- 面向对象：量子计算初学者
- 依赖课程：线性代数，量子力学（非必需）

知乎专栏：
https://www.zhihu.com/column/c_1501138176371011584

Github & Gitee 地址：
https://github.com/mymagicpower/qubits
https://gitee.com/mymagicpower/qubits

*** 版权声明：**

- 仅限用于个人学习
- 禁止用于任何商业用途

酉（幺正）变换

酉（幺正）变换 U 是一种矩阵，满足运算关系 $U^\dagger U = UU^\dagger = I$。

向量内积为归一化条件：

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \rightarrow \langle\psi| = \alpha^*\langle 0| + \beta^*\langle 1|$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

酉（幺正）变换后得到：

$$|\psi\rangle \rightarrow U|\psi\rangle$$

在对偶空间，我们可得到下面的变换：

$$\langle\psi| \rightarrow \langle\psi|U^\dagger \text{，} U^\dagger = (U^T)^*$$

此时，我们需要两个矢量的内积经过同一个酉变换之后保持不变，保持前后的归一化：

$$\langle\psi|U^\dagger U|\psi\rangle = 1$$

意味着：$UU^\dagger = I \Rightarrow U^\dagger = U^{-1}$

酉（幺正）变换性质

1. $UU^\dagger = U^\dagger U = I => U^\dagger = U^{-1}$

2. 如果： $U \in \mathbb{C}^{nxn}$ 是幺正矩阵，对于所有的 $v, w \in \mathbb{C}^{n}$

$$< Uv, Uw> = < v, w > \quad < Uv, w > = < v, U^\dagger w >$$

证明： $< Uv, Uw> = (U\ v)^\dagger\ (U\ w) = v^\dagger U^\dagger Uw == v^\dagger Iw = < v, w>$

3. 如果： $U \in \mathbb{C}^{nxn}$ 是幺正矩阵，对于所有的 $v \in \mathbb{C}^{n}$

$$||Uv|| = ||v||$$

证明： $||Uv|| = \sqrt{<Uv, Uv>} = \sqrt{< v, v>} = ||v||$

厄米共轭算符 – 常用公式

给定一个线性算符 A，它的厄米共轭算符（转置共轭）定义为：

$$\langle u|A|v\rangle = \langle A^\dagger u|v\rangle = \langle v|A^\dagger|u\rangle^* \qquad A^\dagger = (A^*)^T$$

由上述定义可得：

$$\langle e_j|A|e_k\rangle = \langle e_k|A^\dagger|e_j\rangle^* \qquad |x\rangle^\dagger = (x_1^*,\ldots,x_n^*) = \langle x| \qquad \left(\sum_i a_i A_i\right)^\dagger = \sum_i a_i^* A_i^\dagger$$

$$(cA)^\dagger = c^* A^\dagger \qquad (\mathrm{A}+\mathrm{B})^\dagger = \mathrm{A}^\dagger + \mathrm{B}^\dagger \qquad (\mathrm{AB})^\dagger = \mathrm{B}^\dagger \mathrm{A}^\dagger$$

$$(A|v\rangle)^\dagger = \langle v|A^\dagger \qquad (|u\rangle\langle v|)^\dagger = |v\rangle\langle u| \qquad ||\langle u|A|v\rangle||^2 = \langle u|A|v\rangle\langle v|A^\dagger|u\rangle$$

单量子比特逻辑门

经典计算线路由连线和门组成，量子线路也同样如此。
单量子比特门是一个二阶的酉矩阵 U，满足：

$$UU^\dagger = U^\dagger U = I$$

作用在量子比特 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix}\alpha \\ \beta\end{bmatrix}$ 上， 相当于将 $|\psi\rangle$ 左乘上 U 矩阵，变换为：

$$|\psi'\rangle = U\begin{bmatrix}\alpha \\ \beta\end{bmatrix}$$

每一个酉矩阵 U 都对应着一个有效的量子门，即对于量子门来说唯一表示就是酉性(unitary)。
量子门的作用都是线性的。

单量子比特逻辑门

$|0\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ $|1\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

$|0\rangle$ 变换后的量子态为$|\varphi_0\rangle$ ，$|1\rangle$ 变换后的量子态为$|\varphi_1\rangle$ ，则 U 变换的表达式为：

$$U|0\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix} = |\varphi_0\rangle$$
$$U|1\rangle = \alpha'|0\rangle + \beta'|1\rangle = \begin{bmatrix}\alpha'\\\beta'\end{bmatrix} = |\varphi_1\rangle$$

两边分别同乘 $\langle 0|$, $\langle 1|$,有：

① $U|0\rangle\langle 0| = |\varphi_0\rangle\langle 0|$
② $U|1\rangle\langle 1| = |\varphi_1\rangle\langle 1|$

单量子比特逻辑门

$$|0\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \quad |1\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

1, 2 两式相加：

$$\mathrm{U}\,|0\rangle\langle 0| + \mathrm{U}\,|1\rangle\langle 1| = |\varphi_0\rangle\langle 0| + |\varphi_1\rangle\langle 1|$$

由于：

$$|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \mathrm{I}$$

可得：

$$\mathrm{U}(\,|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|\,) = \mathrm{U}\,\mathrm{I} = \mathrm{U} = |\varphi_0\rangle\langle 0| + |\varphi_1\rangle\langle 1|$$

单量子比特逻辑门 - 幺正变换矩阵的计算方法

$|0\rangle$ 变换后的量子态为$|\varphi_0\rangle$ ，$|1\rangle$ 变换后的量子态为$|\varphi_1\rangle$ ：

$$|0\rangle \rightarrow |\varphi_0\rangle$$
$$|1\rangle \rightarrow |\varphi_1\rangle$$

根据之前的就算，可得 U 变换的通用表达式为：

$$U = |\varphi_0\rangle\langle 0| + |\varphi_1\rangle\langle 1|$$

单量子比特幺正变换矩阵的计算方法：

$$U = |\varphi_0\rangle\langle 0| + |\varphi_1\rangle\langle 1|$$

将每个量子态变换前的对偶向量（如：$|0\rangle$ 的对偶向量为 $\langle 0|$ ）右乘变换后的量子态，然后相加。

H (Hadamard) 门 - 矩阵计算

$|0\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \quad |1\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

Hadamard 门是一种可以将基态变为叠加态的量子逻辑门，简称 H 门。

- H 门作用在基态：

① $H|0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

② $H|1\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle - |1\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

- 根据公式：

$$U = |\varphi_0\rangle\langle 0| + |\varphi_1\rangle\langle 1|$$

- 可得 H 门的矩阵：

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\langle 0| + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\langle 1| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix} \end{aligned}$$

H (Hadamard) 门

Hadamard 门，简称 H 门：

$$矩阵形式\ \mathrm{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

量子线路符号：

H 门作用在任意量子态 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$，得到的新的量子态为：

$$|\psi'\rangle = \mathrm{H}|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha-\beta \end{bmatrix} = \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

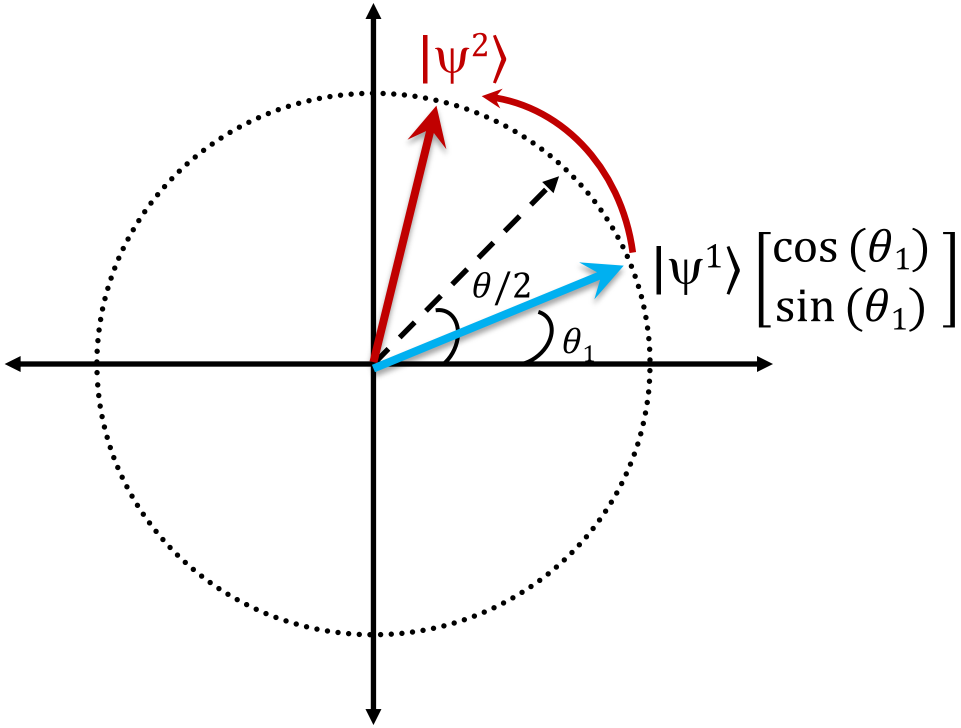
H 门其它性质：

$\mathrm{H}^2 = \mathrm{I}$ $\mathrm{H}^+ = \mathrm{H}$ $\mathrm{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{X}+\mathrm{Z})$

$\mathrm{HXH} = \mathrm{Z}$ $\mathrm{HZH} = \mathrm{X}$ $\mathrm{HYH} = -\mathrm{Y}$

$\mathrm{HR_x}(\theta)\mathrm{H} = \cos(\theta/2)\,\mathrm{HIH} - i\sin(\theta/2)\mathrm{HXH} = \cos(\theta/2)\,\mathrm{I} - i\sin(\theta/2)\mathrm{Z} = \mathrm{R_z}(\theta)$

常用几何变换 – 镜像（量子态 α 和 β 都为实数）



$$Q = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{bmatrix}$$

* 关于通过原点、方向和水平轴夹角为 $\theta/2$ 直线镜像;

证明：

$$|\psi^2\rangle = Q\,|\psi^1\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta)\cos(\theta_1) + \sin(\theta)\sin(\theta_1) \\ \sin(\theta)\cos(\theta_1) - \cos(\theta)\sin(\theta_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta - \theta_1) \\ \sin(\theta - \theta_1) \end{bmatrix}$$

关于通过原点、方向和水平轴夹角为 $\theta/2$ 直线镜像，可以理解为逆时针旋转 $2\left(\frac{\theta}{2} - \theta_1\right)$，则：

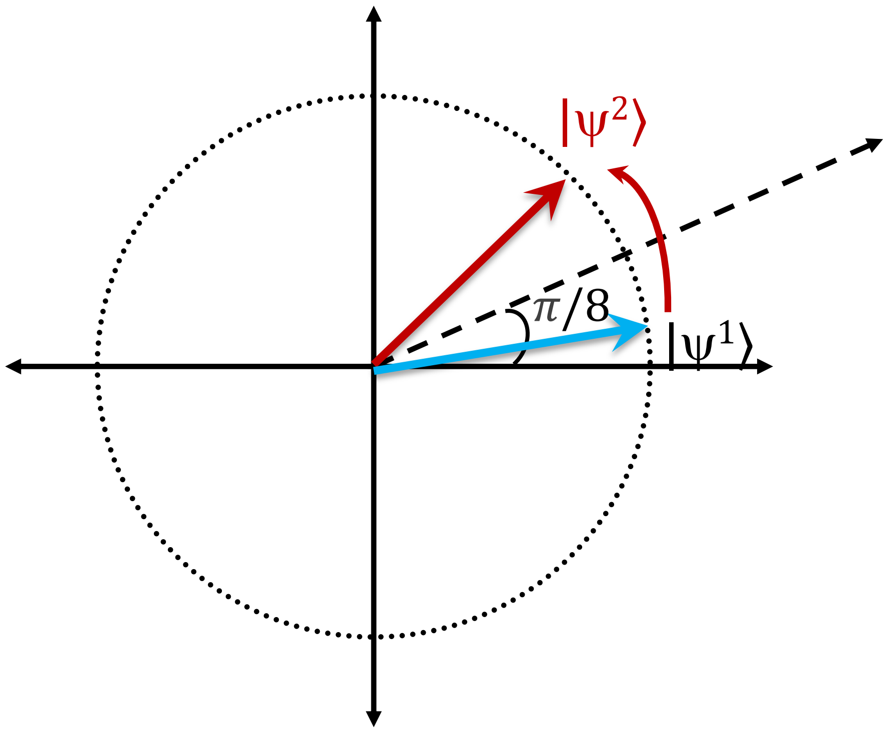
$$|\psi^2\rangle = \begin{bmatrix} \cos\left(\theta_1 + 2\left(\frac{\theta}{2} - \theta_1\right)\right) \\ \sin\left(\theta_1 + 2\left(\frac{\theta}{2} - \theta_1\right)\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta - \theta_1) \\ \sin(\theta - \theta_1) \end{bmatrix}$$

H (Hadamard) 门 – 举例

$$H=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\end{bmatrix}$$

观察发现，符合镜像公式：

$$Q=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{bmatrix}$$



可知：

H门作用于量子态，当量子态对应的向量为实数时，相当于关于角 $\frac{\theta}{2} \rightarrow \frac{\pi}{8}$ 对应的直线镜像。

H (Hadamard) 门 – 举例

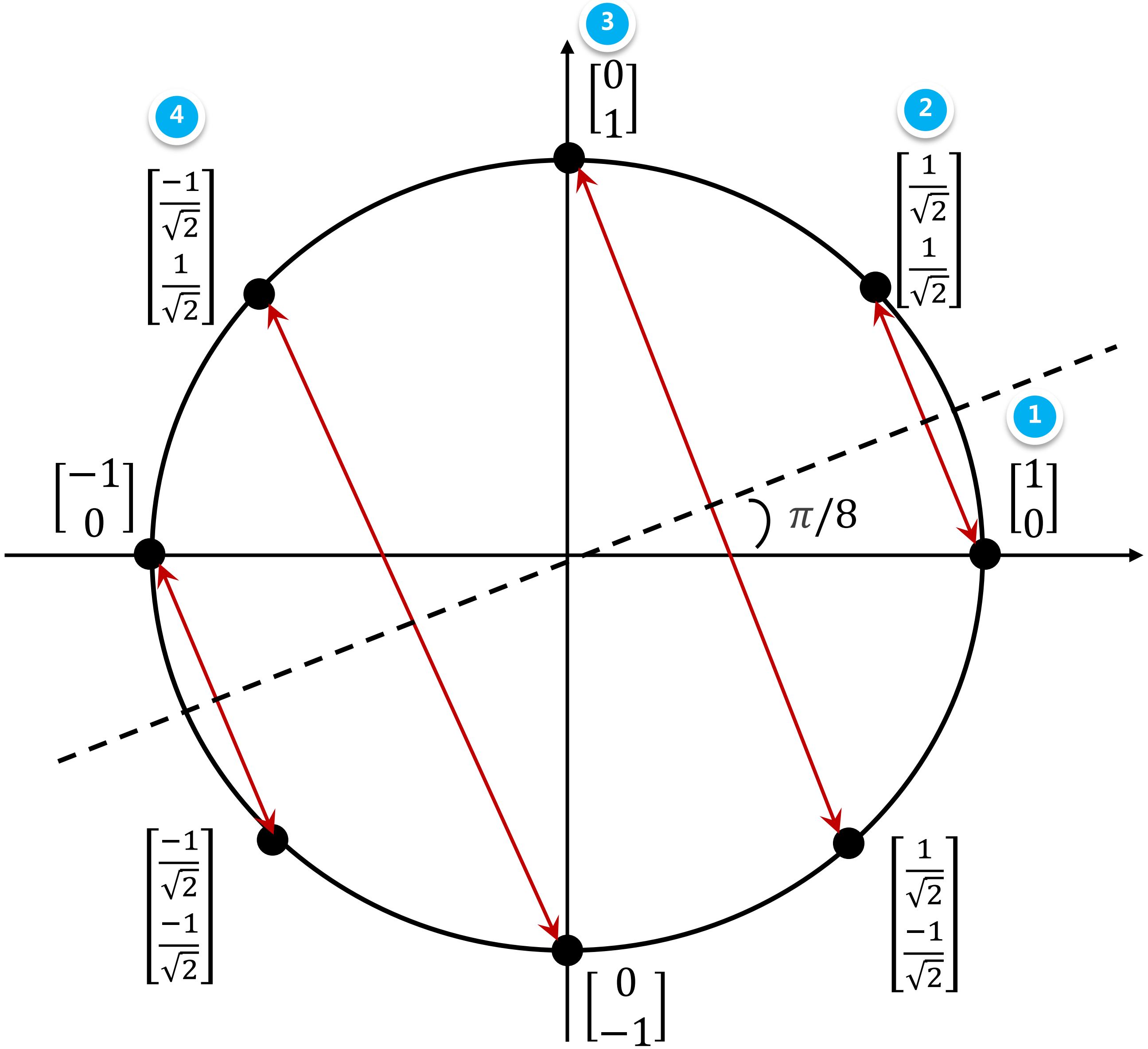
1. $H\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

2. $H\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

3. $H\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

4. $H\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$

…



参考来源： Quantum Computing for Computer Scientists

泡利算符（矩阵）

泡利算符是**一组三个2x2的幺正厄米复矩阵**，一般都以希腊字母 σ (西格玛)来表示，读作泡利 x，泡利 y，泡利 z：

$$X = \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad Y = \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad Z = \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

每个泡利矩阵有两个特征值，1 和 -1， 其对应的归一化特征向量为：

$$\psi_{x+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \psi_{y+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \quad \psi_{z+} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\psi_{x-} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \psi_{y-} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \quad \psi_{z-} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

通常用$|+\rangle$表示ψ_{x+}，用$|-\rangle$表示ψ_{x-}，用$|0\rangle$表示ψ_{z+}，用$|1\rangle$表示ψ_{z-}

泡利算符

泡利算符的对应运算规则如下：

$$\sigma_x\sigma_x = \sigma_y\sigma_y = \sigma_z\sigma_z = \mathrm{I}$$

证明：

$\sigma_x\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{I}$ $\sigma_y\sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{I}$ $\sigma_z\sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{I}$

$$\sigma_x\sigma_y = \mathrm{i}\sigma_z, \quad \sigma_y\sigma_x = \text{-}\mathrm{i}\sigma_z$$
$$\sigma_y\sigma_z = \mathrm{i}\sigma_x, \quad \sigma_z\sigma_y = -\mathrm{i}\sigma_x$$
$$\sigma_z\sigma_x = \mathrm{i}\sigma_y, \quad \sigma_x\sigma_z = \text{-}\mathrm{i}\sigma_y$$

$$det(\sigma_x) = det(\sigma_y) = det(\sigma_z) = -1$$

$$tr(\sigma_x) = tr(\sigma_y) = tr(\sigma_z) = 0$$

Pauli-X 门 - 矩阵计算

Pauli-X 作用在单量子比特上，跟经典计算机的NOT门量子等价，将量子态翻转，量子态变换规律是：

$$|0\rangle \rightarrow |1\rangle$$
$$|1\rangle \rightarrow |0\rangle$$

单量子比特幺正变换矩阵的计算公式：

$$U = |\varphi_0\rangle\langle 0| + |\varphi_1\rangle\langle 1|$$

根据变换矩阵计算公式，有：

$$X = |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [1\ 0] + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [0\ 1]$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pauli-X 门

Pauli-X 门矩阵形式为泡利矩阵σ_x，即：

$$X = \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pauli-X 门矩阵又称为NOT门，其**量子线路符号**：

X 门作用在基态：

$$X|0\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |1\rangle \quad X|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |0\rangle$$

X 门作用在任意量子态 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$，得到的新的量子态为：

$$|\psi'\rangle = X|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \beta|0\rangle + \alpha|1\rangle$$

Pauli-X 门

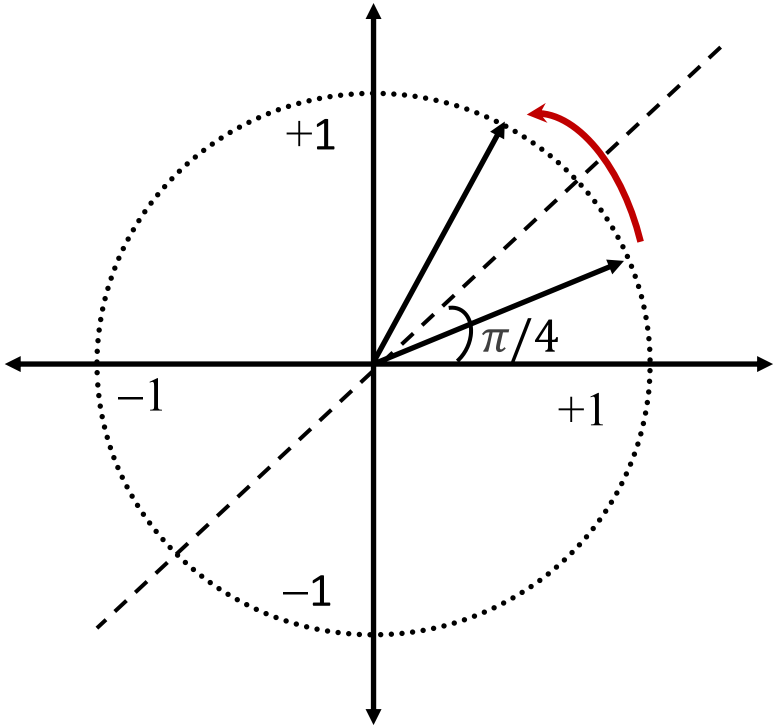
Pauli-X 门：

$$X = \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix}$$

观察发现，符合镜像公式：

$$Q= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{bmatrix}$$

* 关于通过原点、方向和水平轴夹角为 $\theta/2$ 直线镜像;



可知：

X 门操作，相当于关于通过原点、方向和水平轴夹角为 $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4}$ 直线镜像;

Pauli-X 门 – 举例

X 门作用在基态：

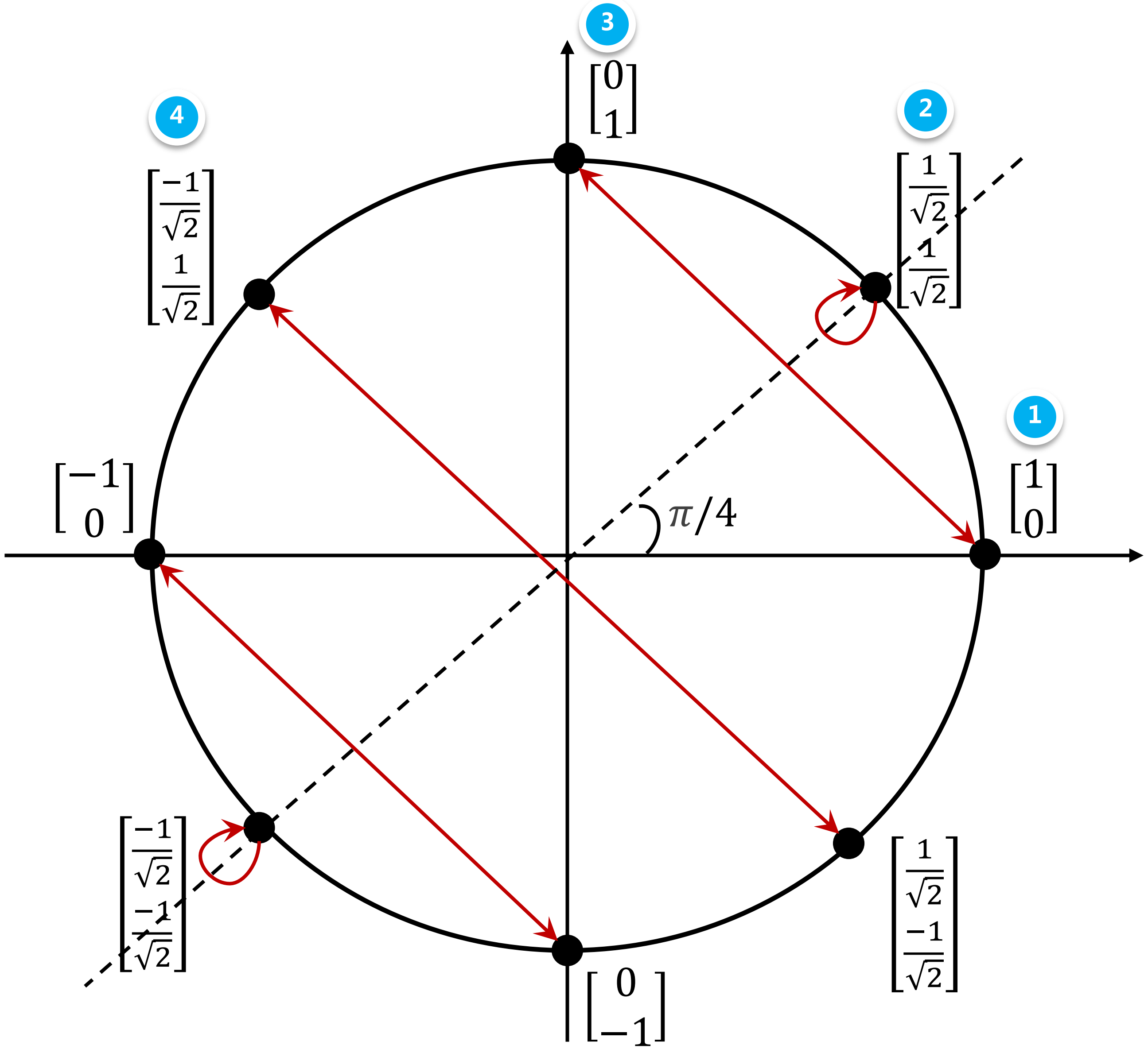
1 $X|0\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |1\rangle$

3 $X|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |0\rangle$

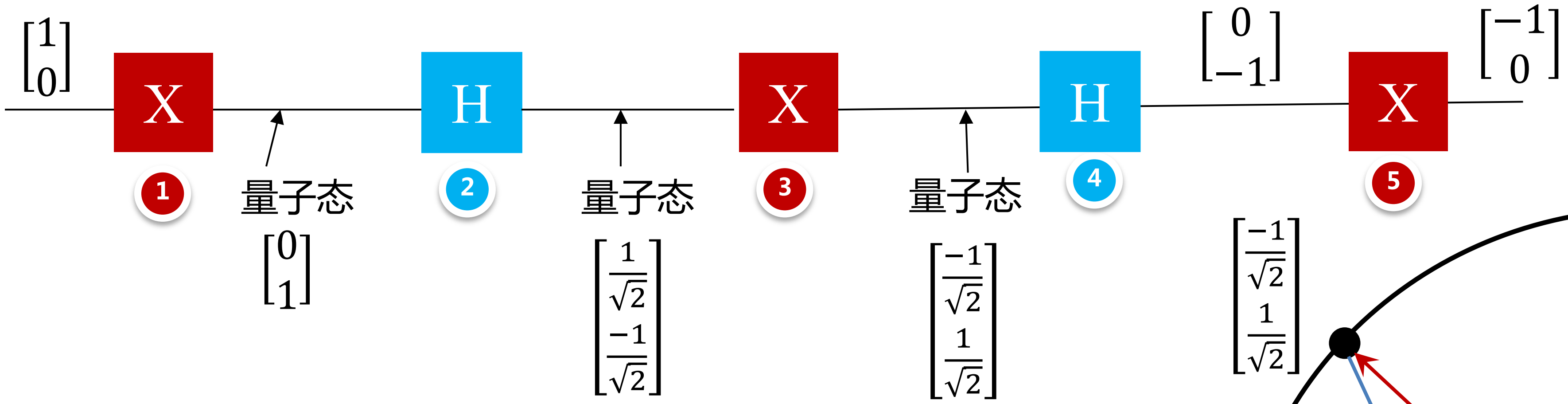
X 门作用在叠加态：

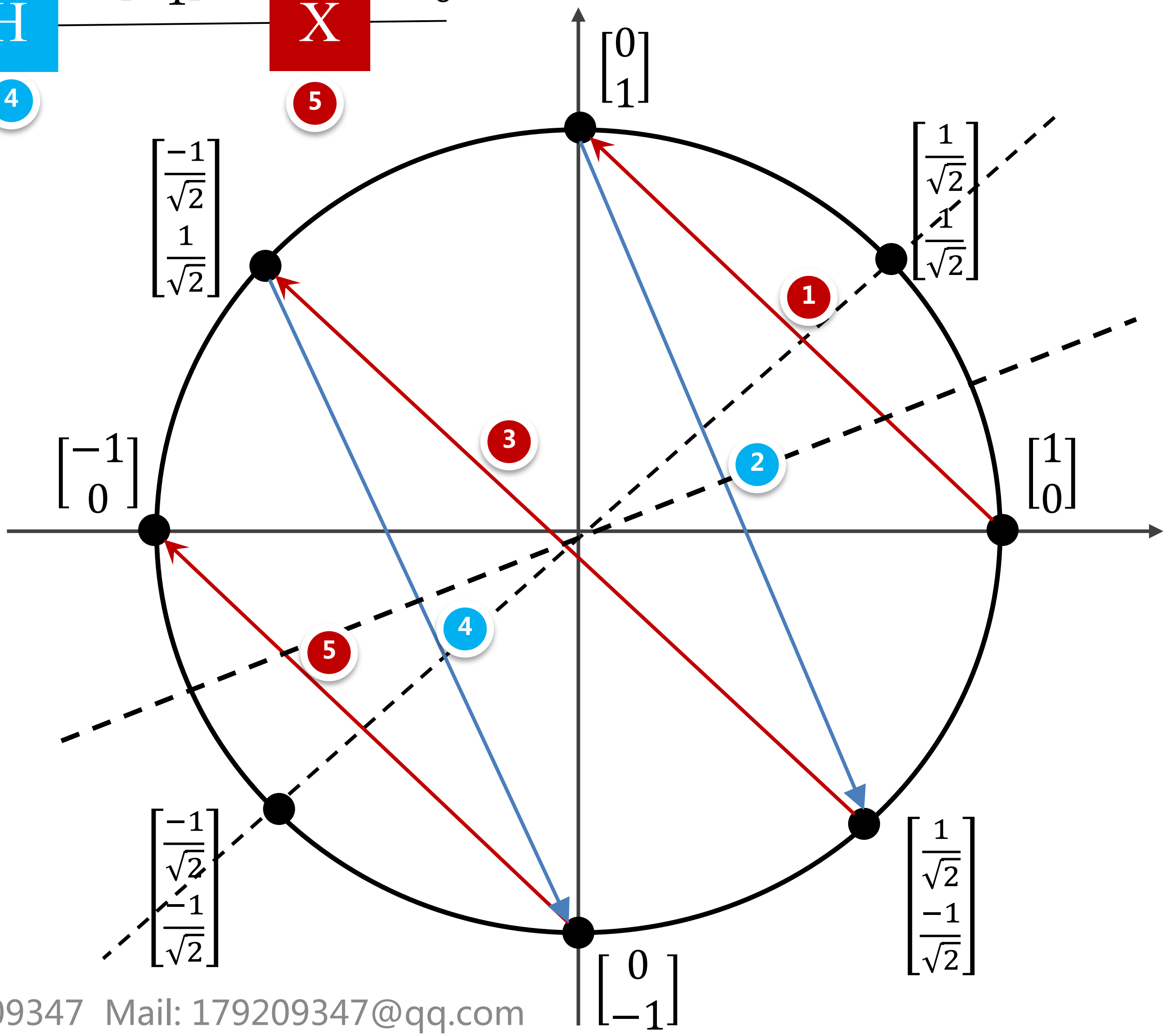
2 $X \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

4 $X \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$



X ，H 门结合使用例子





如图所示交替操作之后：

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$$

Pauli-Y 门 - 矩阵计算

Pauli-Y 作用在单量子比特上，作用相当于绕布洛赫球 Y 轴旋转角度 π，量子态变换规律是：

$$|0\rangle \rightarrow i|1\rangle$$
$$|1\rangle \rightarrow -i\,|0\rangle$$

单量子比特幺正变换矩阵的计算公式：

$$\mathrm{U} = |\varphi_0\rangle\langle 0| + |\varphi_1\rangle\langle 1|$$

根据变换矩阵计算公式，有：

$$\begin{aligned}\mathrm{Y} = i|1\rangle\langle 0| - i|0\rangle\langle 1| &= i\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}[1\ 0] - i\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}[0\ 1] \\ &= i\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix} - i\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$|0\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \quad |1\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

Pauli-Y 门

Pauli-Y 门矩阵形式为泡利矩阵σ_y，即：

$$Y = \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

其量子线路符号：

Y 门作用在基态：

$$Y|0\rangle = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} = \mathrm{i} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathrm{i}|1\rangle$$

$$Y|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \\ 0 \end{bmatrix} = -\mathrm{i} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -\mathrm{i}|0\rangle$$

Y 门作用在任意量子态 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$，得到的新的量子态为：

$$|\psi'\rangle = Y|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathrm{i}\beta \\ \mathrm{i}\alpha \end{bmatrix} = -\mathrm{i}\beta|0\rangle + \mathrm{i}\alpha|1\rangle$$

Pauli-Z 门 - 矩阵计算

Pauli-Z 作用在单量子比特上，作用相当于绕布洛赫球 Z 轴旋转角度π，量子态变换规律是：

$|0\rangle \rightarrow |0\rangle$

$|1\rangle \rightarrow -|1\rangle$

单量子比特幺正变换矩阵的计算公式：

$$\mathrm{U} = |\varphi_0\rangle\langle 0| + |\varphi_1\rangle\langle 1|$$

根据变换矩阵计算公式，有：

$$\begin{aligned}\mathrm{Z} = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| &= \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}[1\ 0] - \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}[0\ 1] \\ &= \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$|0\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ $|1\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

Pauli-Z 门

Pauli-Z 门矩阵形式为泡利矩阵σ_z，即：

$$Z = \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| \text{（谱分解）}$$

① $I - 2|1\rangle\langle 1|$
② $2|0\rangle\langle 0| - I$

谱分解的等价写法

其量子线路符号：

Z 门作用在基态：

$$Z|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (-1)^0|0\rangle = |0\rangle$$

$$Z|1\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = (-1)^1|1\rangle = -|1\rangle$$

$$Z\,|\,j\,\rangle = (-1)^j|\,j\,\rangle$$

Z 门作用在任意量子态 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$，得到的新的量子态为：

$$|\psi'\rangle = Z|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\beta \end{bmatrix} = \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle$$

Thank You