

量子计算 —基础篇

Quantum Computer

网址: www.qubits.top

Calvin Tang

179209347@qq.com

介绍

教程简介：

- 面向对象：量子计算初学者
- 依赖课程：线性代数，解析几何，量子力学（非必需）

知乎专栏：

https://www.zhihu.com/column/c_1501138176371011584

Github & Gitee 地址：

<https://github.com/mymagicpower/qubits>

<https://gitee.com/mymagicpower/qubits>

* 版权声明：

- 仅限用于个人学习，或者大学授课使用
（大学授课如需ppt原件，请用学校邮箱联系我获取）
- 禁止用于任何商业用途

介绍

本开发教程基于我开源的量子线路模拟器 – **circuit_weaver** 编写。

- 项目价值：学习基本的线路设计，直观了解量子门与量子态演化

Github & Gitee 代码地址：

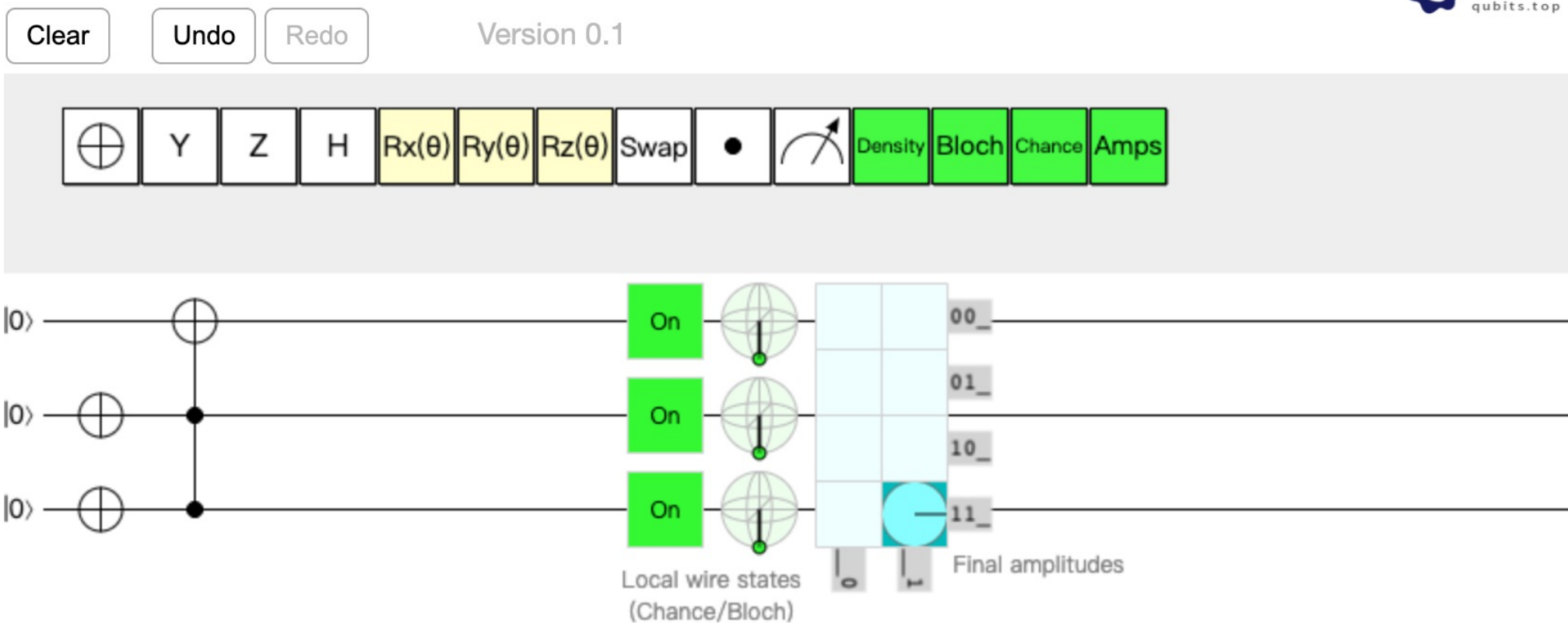
https://github.com/mymagicpower/qubits/tree/main/circuit_weaver

https://gitee.com/mymagicpower/qubits/tree/main/circuit_weaver

量子线路模拟器

本节内容基于 qubits.top 开源的QuantumWeaver编写，可以在线测试使用。
<http://qubits.top/CircuitWeaver.html>

Quantum Circuit Simulator



量子线路介绍

所谓量子线路，从本质上是一个量子逻辑门的执行序列，它是从左至右依次执行的。

量子线路，也称量子逻辑电路是最常用的通用量子计算模型，表示在抽象概念下，对于量子比特进行操作的线路。组成包括了量子比特、线路（时间线），以及各种逻辑门。最后常需要量子测量将结果读取出来。

不同于传统电路是用金属线所连接以传递电压讯号或电流讯号，在量子线路中，线路是由时间所连接，亦即量子比特的状态随着时间自然演化，过程中是按照哈密顿运算符的指示，一直到遇上逻辑门而被操作。

由于组成量子线路的每一个量子逻辑门都是一个酉算子，所以整个量子线路整体也是一个大的酉算子。

Pauli-X (NOT) 门

Pauli-X 作用在单量子比特上，跟经典计算机的 NOT 门的量子等价，将量子态翻转，量子态变换规律是：

$$\begin{aligned} |0\rangle &\rightarrow |1\rangle \\ |1\rangle &\rightarrow |0\rangle \end{aligned}$$

Pauli-X 门矩阵形式为泡利矩阵 σ_x ，即：

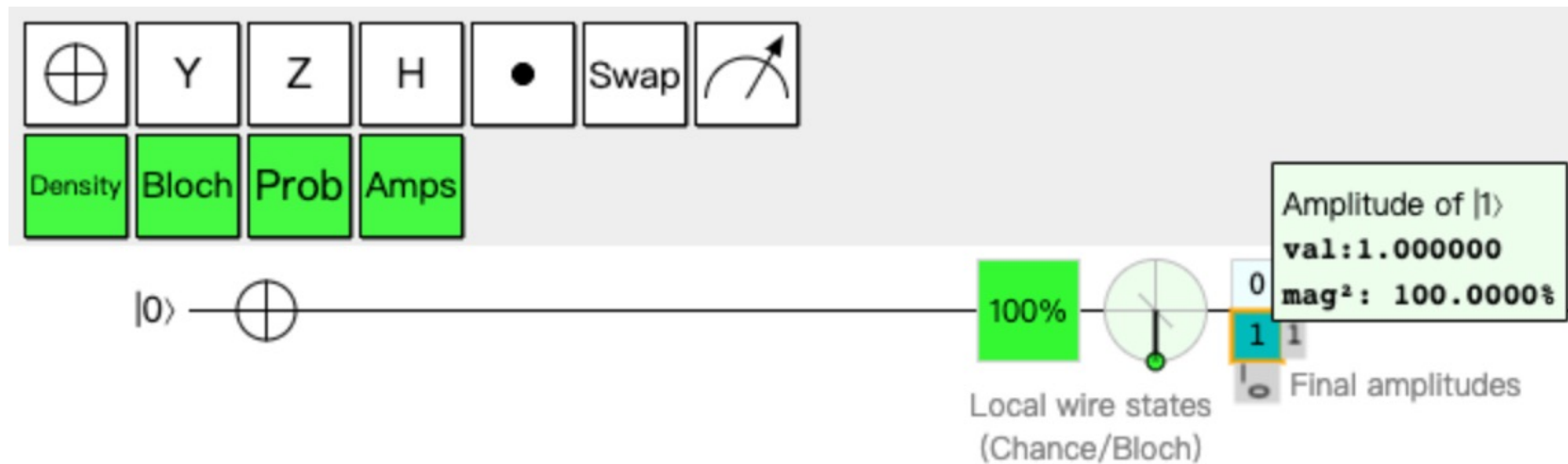
$$X = \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pauli-X 门矩阵又称为 NOT 门，其量子线路符号：



X 门作用在基态 $|0\rangle$ ：

$$X|0\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |1\rangle$$



Pauli-Y 门

Pauli-Y 作用在单量子比特上，作用相当于绕布洛赫球 Y 轴旋转角度 π .

Pauli-Y 门矩阵形式为泡利矩阵 σ_y ，即：

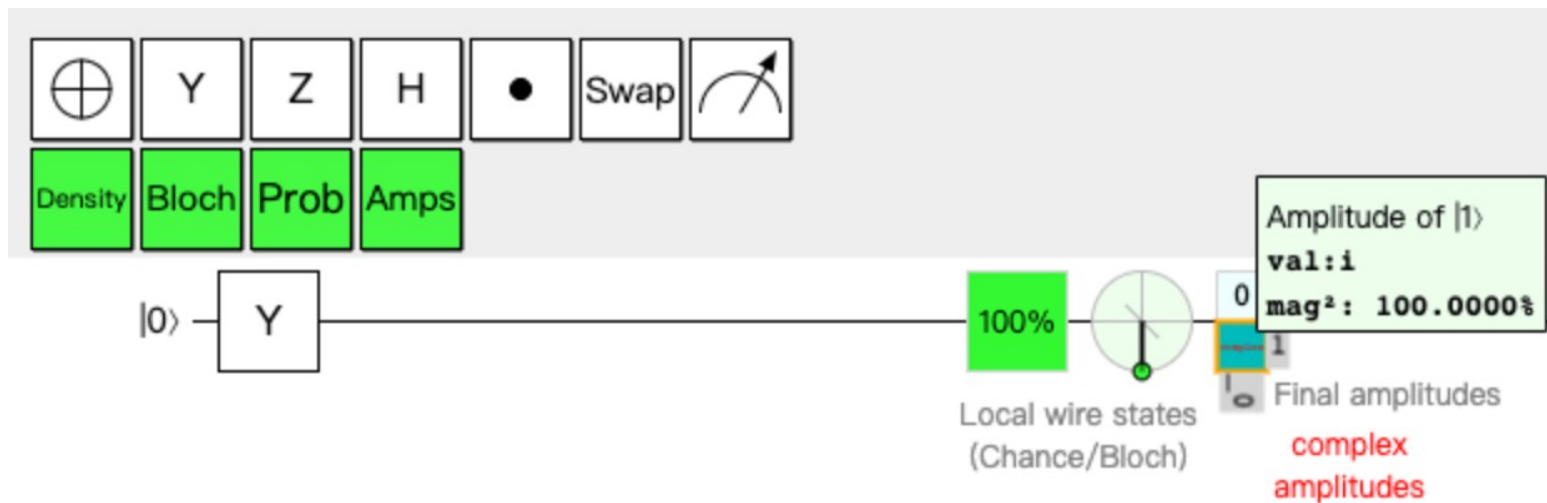
$$Y = \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

Pauli-Y 门矩阵，其量子线路符号：



Y 门作用在基态 $|0\rangle$ ：

$$Y|0\rangle = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = i|1\rangle$$



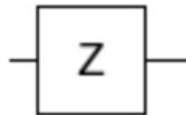
Pauli-Z 门

Pauli-Z 作用在单量子比特上，作用相当于绕布洛赫球 Z 轴旋转角度 π .

Pauli-Z 门矩阵形式为泡利矩阵 σ_z ，即：

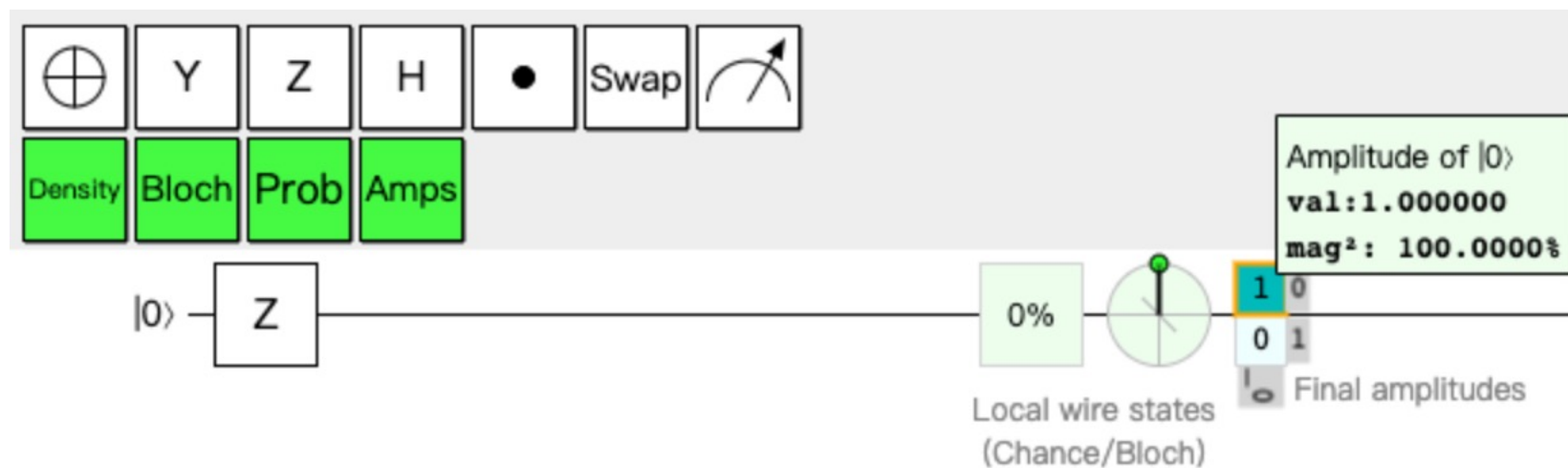
$$Z = \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Pauli-Z 门矩阵，其量子线路符号：



Z 门作用在基态 $|0\rangle$ ：

$$Z|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |0\rangle$$

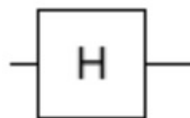


H (Hadamard) 门

Hadamard 门是一种可以将基态变为叠加态的量子逻辑门，简称H门。

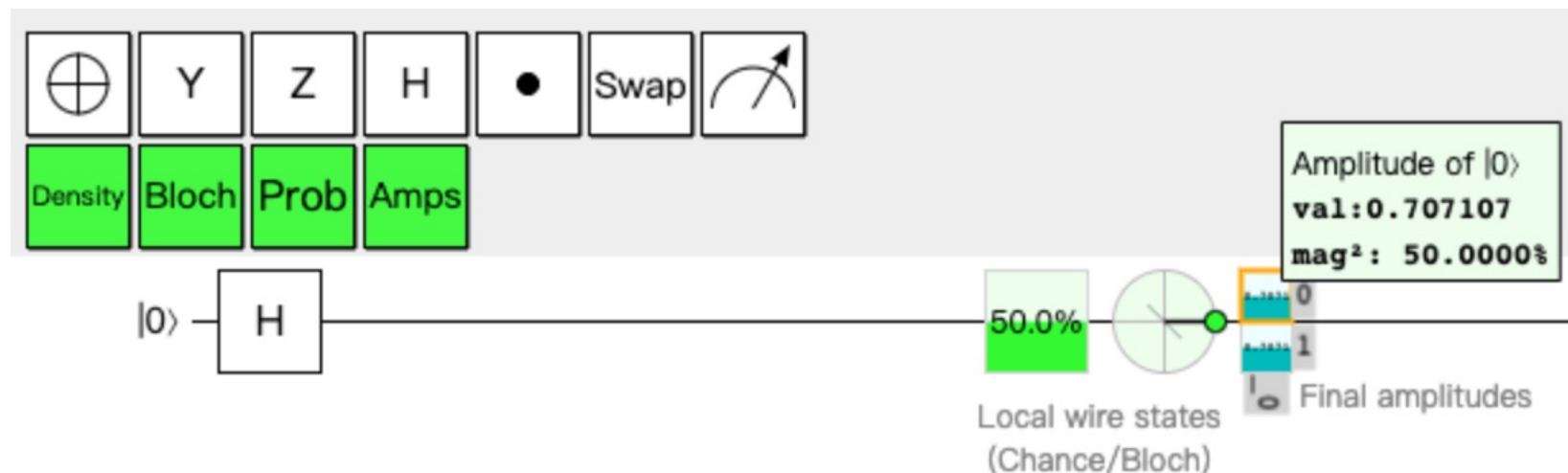
Hadamard 门矩阵形式： $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \langle 0| + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \langle 1|$

Hadamard 门矩阵，其量子线路符号：



H 门作用在基态 $|0\rangle$ ：

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$$



RX(θ) 门

RX门由Pauli-X 矩阵作为生成元生成，其矩阵形式为：

$$R_x(\theta) = e^{-i\theta X/2} = \cos(\theta/2) I - i \sin(\theta/2) X$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -i \sin(\theta/2) \\ -i \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

其量子线路符号：

RX($\pi/2$)门作用在基态：

$$R_x(\theta) |0\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & -i \sin(\frac{\pi}{4}) \\ -i \sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) \\ -i \sin(\frac{\pi}{4}) \end{bmatrix}$$

$$= \cos(\frac{\pi}{4}) |0\rangle - i \sin(\frac{\pi}{4}) |1\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} i |1\rangle$$

设置参数 $\theta = \pi / 2$ ：

Quantum Circuit Simulator

Clear Undo Redo Version 0.1

⊕ Y Z H Rx(θ) Ry(θ) Rz(θ) Swap •



Enter a formula to use for the F

The formula can depend on the
Time t starts at -1, grows to +1
Invalid results will default to 0.

Available constants: e, pi
Available functions: cos, sin, ar
Available operators: + * / - ^

pi/2



RY(θ) 门

RY门由Pauli-Y 矩阵作为生成元生成，其矩阵形式为：

$$R_y(\theta) = e^{-i\theta Y/2} = \cos(\theta/2) I - i \sin(\theta/2) Y$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

其量子线路符号：

RY($\pi/2$) 门作用在基态：

$$R_y(\theta) |0\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & -\sin(\frac{\pi}{4}) \\ \sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) \\ \sin(\frac{\pi}{4}) \end{bmatrix}$$

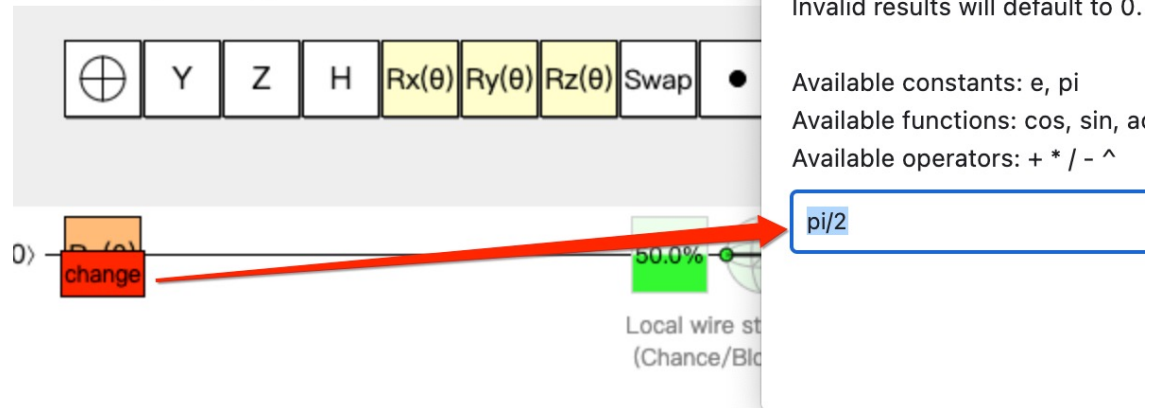
$$= \cos(\frac{\pi}{4}) |0\rangle + \sin(\frac{\pi}{4}) |1\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle$$

设置参数 $\theta = \pi / 2$ ：

Quantum Circuit Simulator

Clear Undo Redo Version 0.1



Enter a formula to use for the F

The formula can depend on the Time t starts at -1, grows to +1
Invalid results will default to 0.

Available constants: e, pi
Available functions: cos, sin, arctan
Available operators: + * / - ^

pi/2



RZ(θ) 门

RZ门又称为相位转化门(phase-shift gate), 由Pauli-Z 矩阵作为生成元生成, 其矩阵形式为:

$$R_z(\theta) = e^{-i\theta Z/2} = \cos(\theta/2) I - i \sin(\theta/2) Z$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{bmatrix} = e^{-i\theta/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}$$

其量子线路符号: 

由于 $e^{-i\theta/2}$ 是一个全局相位, 其没有物理意义, 只考虑单门, 则可以省略该参数。于是, RZ门矩阵可简写为:

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}$$

* $e^{-i\theta/2}$ 并没有对计算基 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 做任何改变, 而只是在原来的态上绕Z轴逆时针旋转 θ 角。

RZ门作用在基态:

$$R_z(\theta) |0\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |0\rangle$$


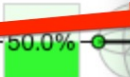
$$R_z(\theta) |1\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{i\theta} \end{bmatrix} = e^{i\theta} |1\rangle$$

设置参数 $\theta = \pi / 2$:

Quantum Circuit Simulator

Clear Undo Redo Version 0.1

⊕ Y Z H Rx(θ) Ry(θ) Rz(θ) Swap ●

0)  change  50.0%

Local wire states (Chance/Bloch)

Enter a formula to use for the F

The formula can depend on the Time t starts at -1, grows to +1
Invalid results will default to 0.

Available constants: e, pi
Available functions: cos, sin, ar
Available operators: + * / - ^



CNOT 门

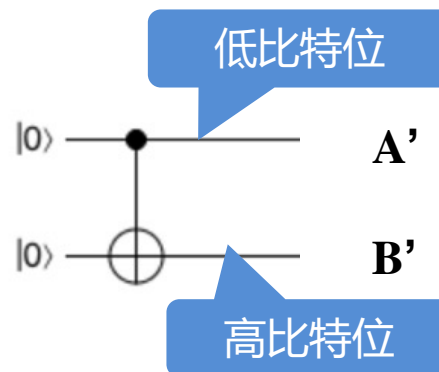
控制非门(Control - NOT), 通常用 CNOT 表示, 是一种普遍使用的两量子比特门。
 如果低位作为控制比特, 则它的矩阵形式:

$$\text{CNOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

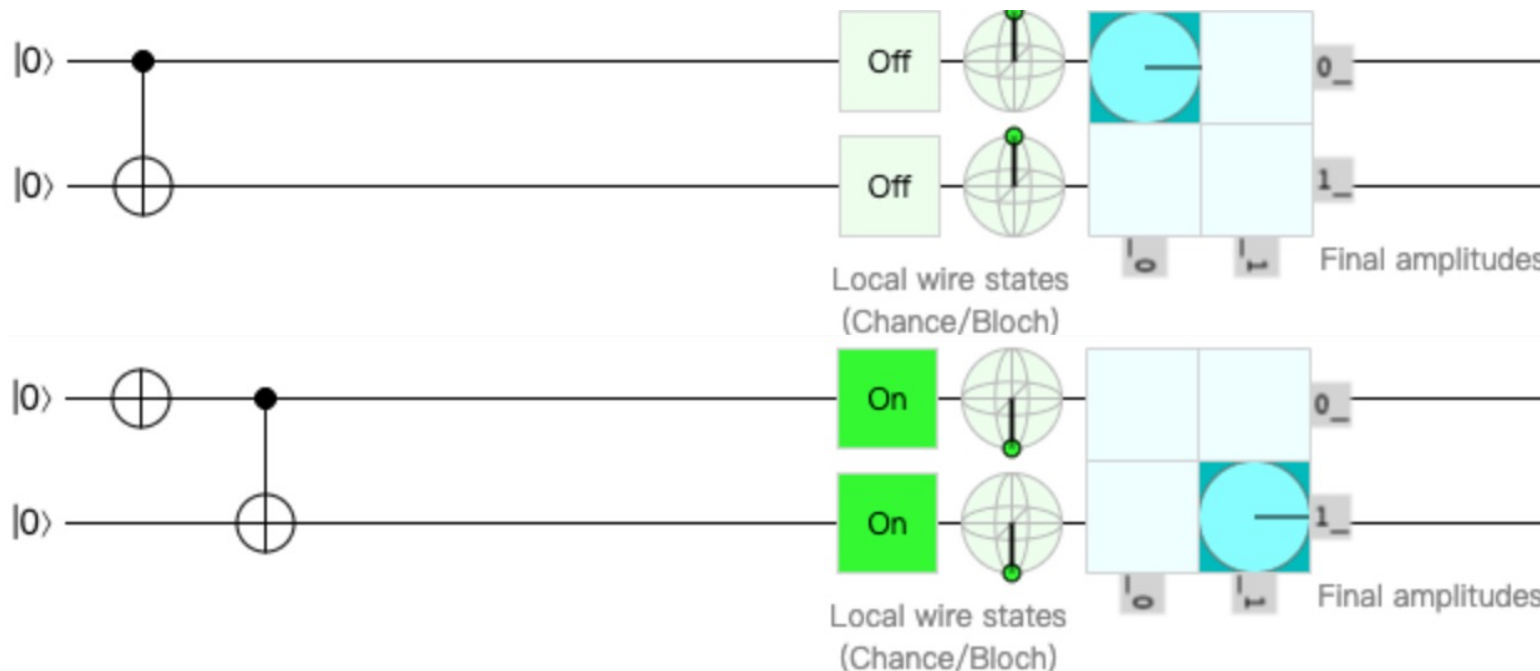
$$\text{CNOT CNOT} = I$$

A - Control

B - Target



Input		Output	
A	B	A'	B'
0	0	0	0
1	0	1	1
0	1	0	1
1	1	1	0



SWAP 门

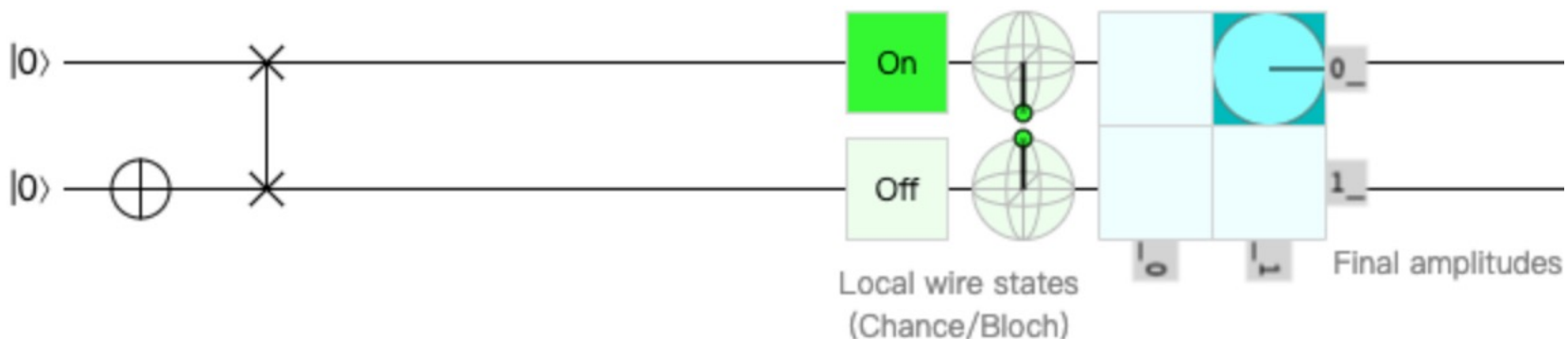
SWAP门可以将 $|01\rangle$ 态变为 $|10\rangle$, $|10\rangle$ 变为 $|01\rangle$, 它的矩阵形式 :

$$\text{SWAP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |\psi'\rangle &= \text{SWAP} |01\rangle \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |10\rangle \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} |\psi'\rangle &= \text{SWAP} |10\rangle \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |01\rangle \end{aligned}$$



Toffoli (CCNOT)

Toffoli门即CCNOT门，它涉及3个量子比特，两个控制比特，一个目标比特，它的矩阵形式：

$$\text{Toffoli} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Toffoli门作用于 $|110\rangle$ ：

$$\text{CCNOT } |110\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |111\rangle$$





Thank

You