量子计算
—算法篇

Quantum Computing

网址：www.qubits.top

作者：Calvin Tang

邮箱：179209347@qq.com

介绍

教程简介：

- 面向对象：量子计算初学者
- 依赖课程：线性代数，量子力学（非必需）

知乎专栏：
https://www.zhihu.com/column/c_1501138176371011584

Github & Gitee 地址：
https://github.com/mymagicpower/qubits
https://gitee.com/mymagicpower/qubits

*** 版权声明：**

- 仅限用于个人学习
- 禁止用于任何商业用途

量子相位估计（Phase Estimation）

由于幺正矩阵 U 的特征值模为1，那么该特征值可以被表示为 $\lambda = e^{2\pi i\varphi}$ 。于是求特征值在这里等价于求相位 φ ，从这里可以看出，相位估计名字由此而来。

量子相位估计（ QPE ），即求解下面公式中的 φ ：

$$U|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle = e^{2\pi i\varphi}|\psi\rangle$$

$|\psi\rangle$ 为 U 的特征向量

在相位估计中，通过 QFT 算法的逆运算，将量子态的概率幅值存储到基态中，以便通过后续测量得到相位值。

经典形式的量子相位估计是在量子傅里叶变换的基础上构造的：
- 量子傅里叶变换是实现相位估计的关键
- 而相位估计又是实现其它算法的关键

二进制分数的表示

计算基矢态的二进制表示

设n个量子位的量子计算机的计算基矢态为 $|\varphi\rangle$, 则其二进制展开为：

$$\varphi = \varphi_1\varphi_2 \dots \varphi_n\varphi_{n+1} \dots \varphi_t$$

$$\varphi = \varphi_1 2^{t-1} + \varphi_2 2^{n-2} + \dots + \varphi_t 2^0$$

如： x = 110

如： $x = 1*2^2 + 1*2^1 + 0*2^0$

$$\varphi' = \frac{\varphi}{2^t}$$

二进制分数的表示

$$U|\psi\rangle = e^{2\pi i\varphi}|\psi\rangle$$

$$\varphi' = \varphi_1/2^1 + \varphi_2/2^2 + \dots + \varphi_t/2^t$$

$$\varphi' = 0.\varphi_1\varphi_2 \dots \varphi_n\varphi_{n+1} \dots \varphi_t$$

如： x = 0.111

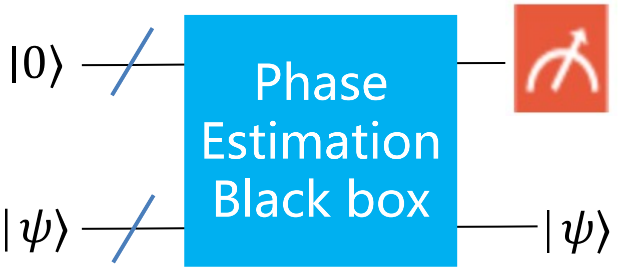
如： $x = 1/2^1 + 1/2^2 + 1/2^3$

量子相位估计

相位估计目的

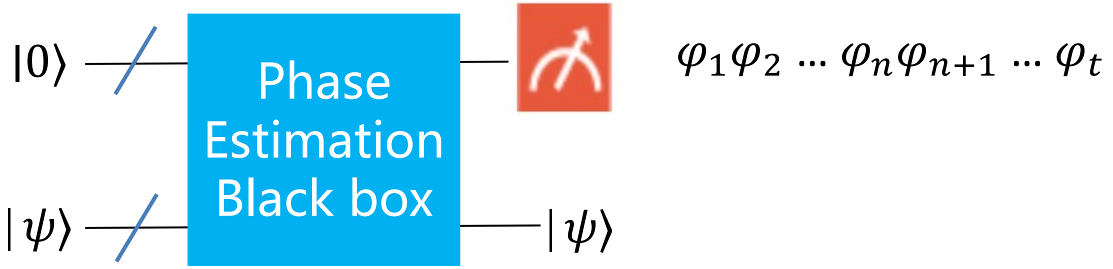
- 幺正算符 U 的特征向量是 $|\psi\rangle$，对应的特征值是 $e^{2\pi i\varphi}$，这里的 φ 的值是未知的。
- 相位估计算法的目的是确定 φ 。

为了实现相位估计操作，我们先假设我们可以实现一个黑箱（black box，即 oracle），这个黑箱的作用是控制 U^{2^j} 门，j 是非负整数，我们用黑盒子实现相位估计这个模块。黑箱意味着相位估计步骤本身不是完整的量子算法，而是算法的一个模块。



黑箱操作：通过一系列特殊旋转量子门操作将 U 的特征值相位分解转移到辅助量子比特的振幅上。

量子相位估计



相位估计需要两个寄存器：

- 第一个寄存器包含 t 个 qubit，初态为 $|00\ldots0\rangle$，其位数决定了估计的精度及成功概率。用于存储我们期望得到的相位。
- 第二个寄存器用来存储 $|\psi\rangle$，也就是 U 的特征向量。

黑箱操作完成后：

➢ 对第一寄存器进行测量，我们就可以得到一串二进制数 $\varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_n\varphi_{n+1} \ldots \varphi_t$ 。用这一串二进制数除以 2^t ，相当于将小数点向左移动 t 位，就可以得到：

$$\varphi' = 0.\varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_n\varphi_{n+1} \ldots \varphi_t \qquad (\ \varphi_i = 0, 1\ )$$

$$U|\psi\rangle = e^{2\pi i\varphi'}|\psi\rangle = e^{2\pi i 0.\varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_t}|\psi\rangle$$

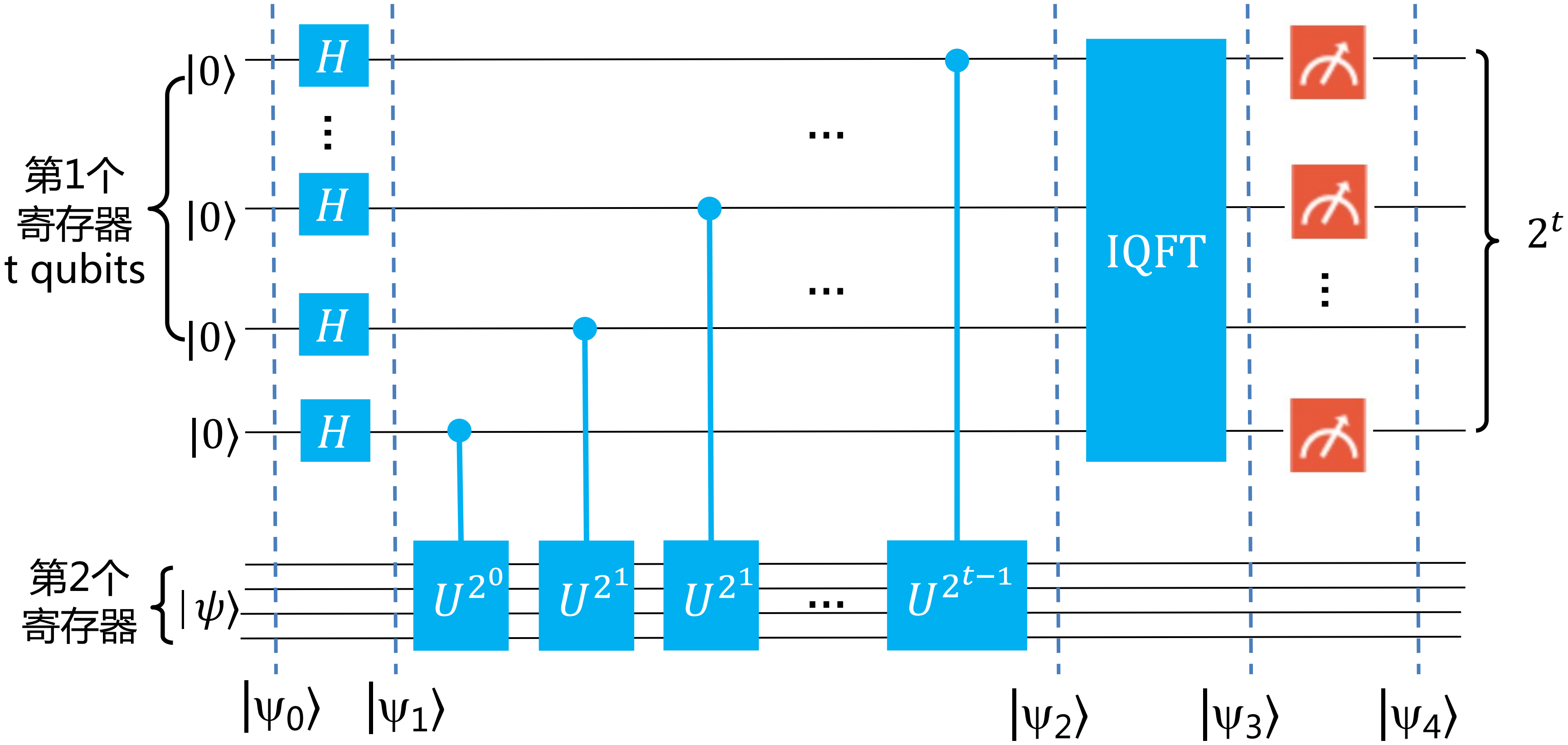
➢ 对经过这个黑箱之后，第二寄存器不发生变化。

Calvin, QQ: 179209347 Mail: 179209347@qq.com

量子相位估计 - 寄存器

相位估计需要两个寄存器：

- 第一个寄存器包含 t 个qubit，初态为 $|0\rangle$，其位数决定了估计的精度及成功概率。
- 第二个寄存器用来存储 $|\psi\rangle$，也就是 U 的特征向量。



Calvin，QQ: 179209347 Mail: 179209347@qq.com

量子相位估计算法

算法步骤：

1. $|0\rangle|u\rangle$

初态

2. → $\frac{1}{\sqrt{2^t}}\sum_{j=0}^{2^t-1}|j\rangle|u\rangle$

制备叠加态

3. → $\frac{1}{\sqrt{2^t}}\sum_{j=0}^{2^t-1}|j\rangle U^j|u\rangle$
$= \frac{1}{2^{\frac{t}{2}}}\sum_{j=0}^{2^t-1}e^{2\pi i j\varphi_u}|u\rangle$

黑箱操作：通过一系列特殊旋转门将 U 的特征值相位分解转移到辅助量子比特的振幅上。

4. → $|\widetilde{\varphi_u}>|u\rangle$

反向傅立叶变换：对辅助量子比特执行 IQFT，将振幅上的特征值相位转移到基向量上。

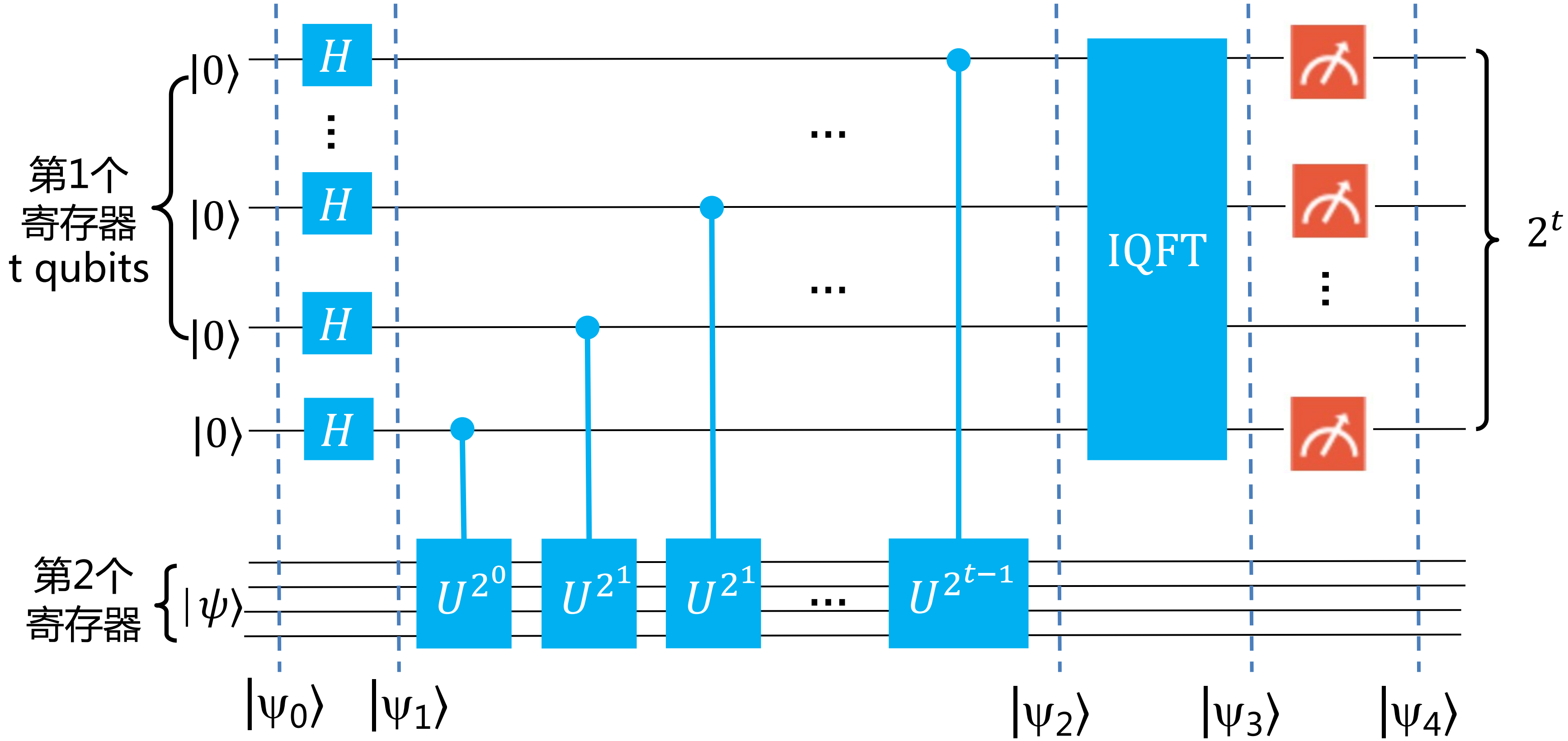
5. → $\widetilde{\varphi_u}$

测量第一个寄存器：对辅助量子比特的基向量分别进行测量后可得到特征值的相位信息。

量子相位估计 – 相位估计线路执行步骤

相位估计算法的三个步骤：

1. 对所有的寄存器应用 H 门 和 $Ctrl - U$ 门
2. 对第一个寄存器应用逆量子傅里叶变换（$IQFT$）门
3. 测量相位



Calvin，QQ: 179209347 Mail: 179209347@qq.com

量子相位估计 – 相位估计线路执行步骤

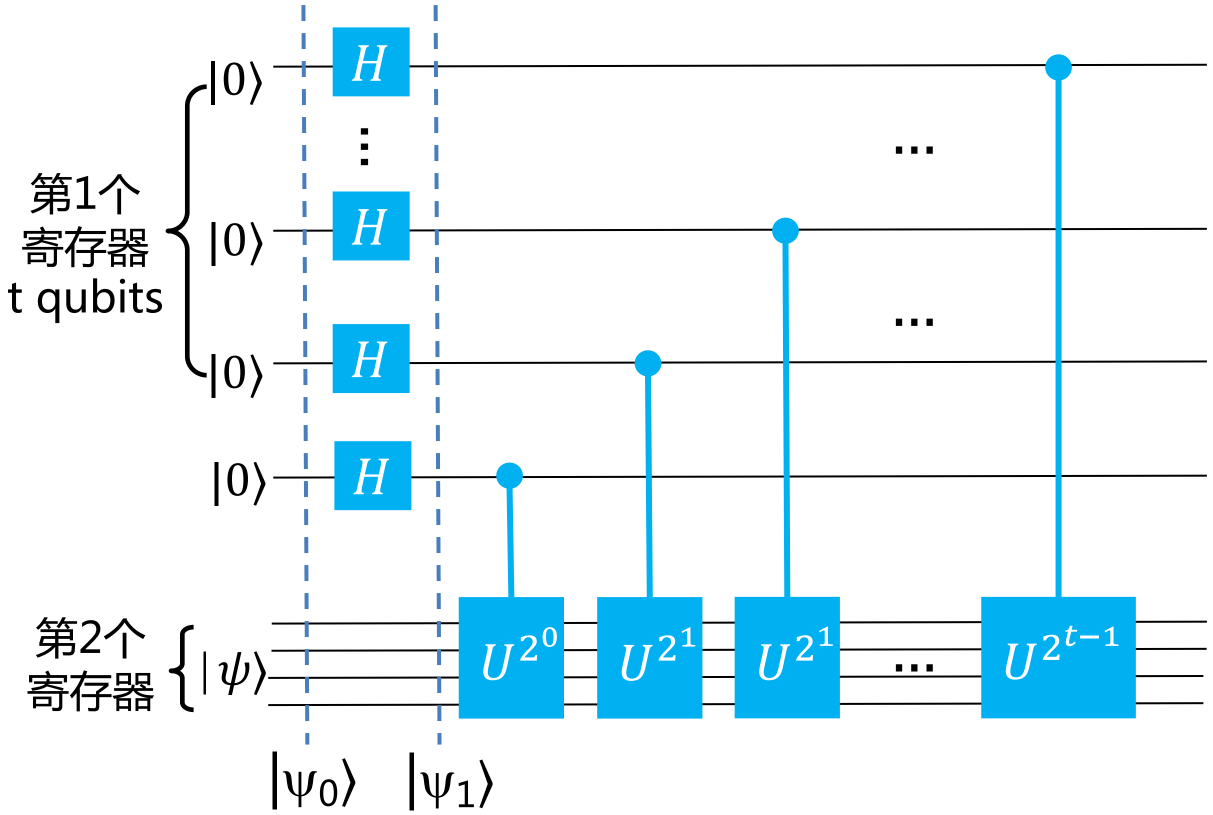
1. 初态

$|\psi_0\rangle = |0\rangle^{\otimes t}\,|\psi\rangle$

2. 最大叠加态

$|\psi_1\rangle = (H|0\rangle)^{\otimes t}\,|\psi\rangle$

$= \frac{1}{\sqrt{2^t}}\,(|0\rangle + |1\rangle)^{\otimes t}\,|\psi\rangle$



Calvin, QQ: 179209347 Mail: 179209347@qq.com

量子相位估计 – 相位估计线路执行步骤

3. 受控 *U* 门 $Ctrl - U^{2^j}$ **：**

由于 $U|\psi\rangle = e^{2\pi i\varphi}|\psi\rangle$

有： $U^{2^j}|\psi\rangle = U^{2^j-1}U|\psi\rangle$

$= U^{2^j-1}e^{2\pi i\varphi}|\psi\rangle$

$= U^{2^j-2}e^{2\times 2\pi i\varphi}|\psi\rangle$

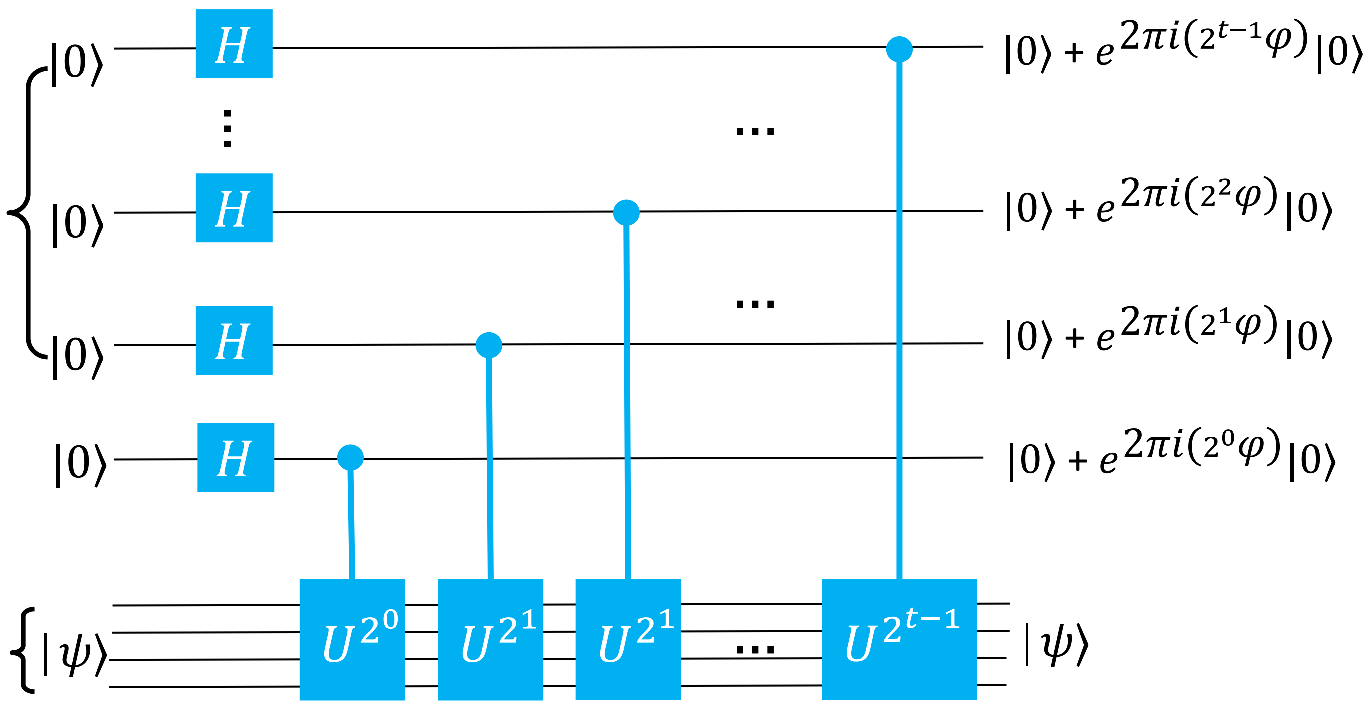
$= \ldots$

$= e^{2^j\times 2\pi i\varphi}|\psi\rangle$

应用第一个受控 *U* 门 $Ctrl - U^{2^0}$ **：**

$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \ Ctrl \ - e^{2\pi i\varphi}|\psi\rangle$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{2\pi i\varphi}|1\rangle) \otimes |\psi\rangle$



应用 t 个受控 *U* 门 $Ctrl - \ U^{2^j}$ **：**

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^t}}\left(|0\rangle + e^{2\pi i\varphi\, 2^0}|1\rangle\right)\otimes\left(|0\rangle + e^{2\pi i\varphi 2^1}|1\rangle\right)\otimes \ldots \otimes\left(|0\rangle + e^{2\pi i\varphi 2^{t-1}}|1\rangle\right)\otimes|\psi\rangle$$

Calvin，QQ: 179209347 Mail: 179209347@qq.com

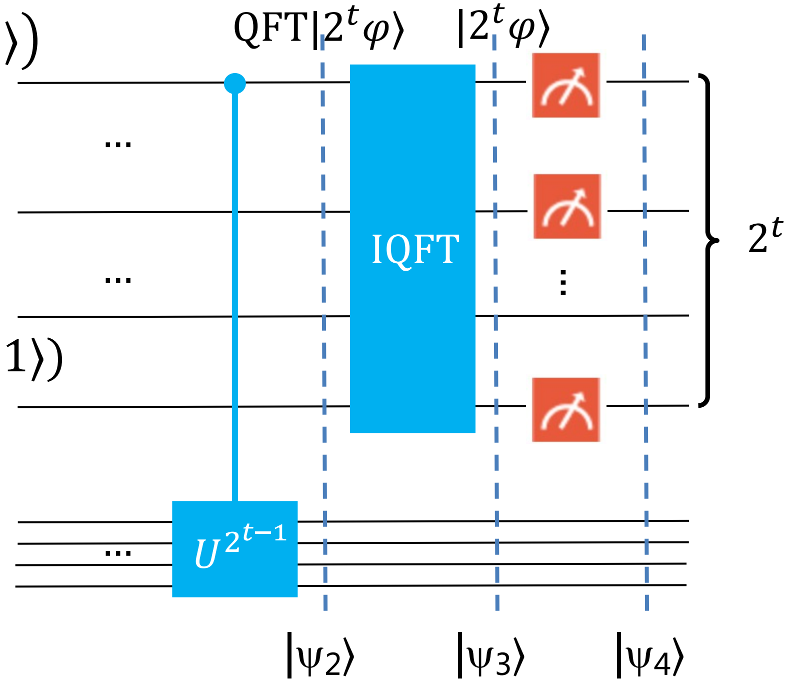
量子相位估计 – 相位估计线路执行步骤

4. **量子傅里叶逆变换 IQFT：** 对辅助量子比特执行 $IQFT$，将振幅上的特征值相位转移到基向量上。

量子傅里叶变换直积形式

$$QFT|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^t}}\left(|0\rangle + e^{2\pi i 0.x_t}|1\rangle\right)\left(|0\rangle + e^{2\pi i 0.x_{t-1}x_t}|1\rangle\right)\dots\left(|0\rangle + e^{2\pi i 0.x_1x_2\cdots x_t}|1\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^t}}\left(|0\rangle + e^{2\pi i x/2^1}|1\rangle\right)\left(|0\rangle + e^{2\pi i x/2^2}|1\rangle\right)\dots\left(|0\rangle + e^{2\pi i x/2^t}|1\rangle\right)$$



我们令 x 为 $x = 2^t\varphi$，则有：

$$QFT|2^t\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^t}}\left(|0\rangle + e^{2\pi i 2^t\varphi/2^1}|1\rangle\right)\left(|0\rangle + e^{2\pi i 2^t\varphi/2^2}|1\rangle\right)\dots\left(|0\rangle + e^{2\pi i 2^t\varphi/2^t}|1\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^t}}\left(|0\rangle + e^{2\pi i 2^{t-1}\varphi}|1\rangle\right)\left(|0\rangle + e^{2\pi i 2^{t-2}\varphi}|1\rangle\right)\dots\left(|0\rangle + e^{2\pi i 2^0\varphi}|1\rangle\right)$$

刚好得到 $|\psi_2\rangle$，即：

$QFT|2^t\varphi\rangle = |\psi_2\rangle$。

因此要恢复态 $|2^t\varphi\rangle$，则需要量子傅里叶变换的逆过程，即：

在辅助寄存器上应用量子傅里叶逆变换 $IQFT$。

Calvin，QQ: 179209347 Mail: 179209347@qq.com

量子相位估计 – 相位估计线路执行步骤

5. 测量

此时状态为：

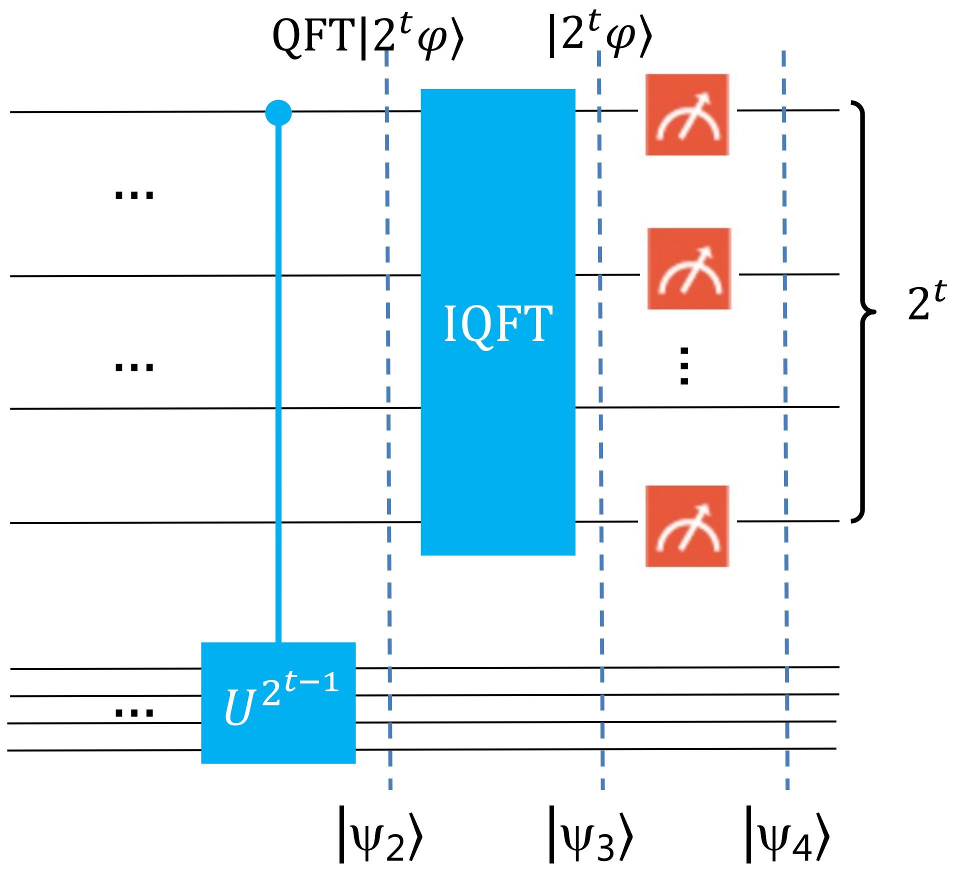
$$|\psi_3\rangle = |2^t\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle$$

$e^{2\pi i\varphi}$ 中 φ 应是一个小数，因为只有小数部分有意义。

假设二进制小数 $\varphi = 0.\varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_n$（$\varphi_i = 0,1$），则有：

- 如果 n≤t ,可以精确到得到 φ
- 如果 n>t ,相位不可用 t 位精确表示的情况，我们依然可以得到一个足够精确的近似解：

  - 对于相位精度：n 位
  - 成功概率：1 - ϵ
  - t 的位数要求：$t = n + \left\lceil \log\left(2 + \frac{1}{2\epsilon}\right) \right\rceil$



详细证明可以参考《Quantum Computation and Quantum Information》第五章

量子线路图

量子线路总共可以分为三个部分，特征量子态制备与辅助比特量子态初始化、特征值相位提取、逆量子傅里叶变换。

程序实现的核心内容如下：

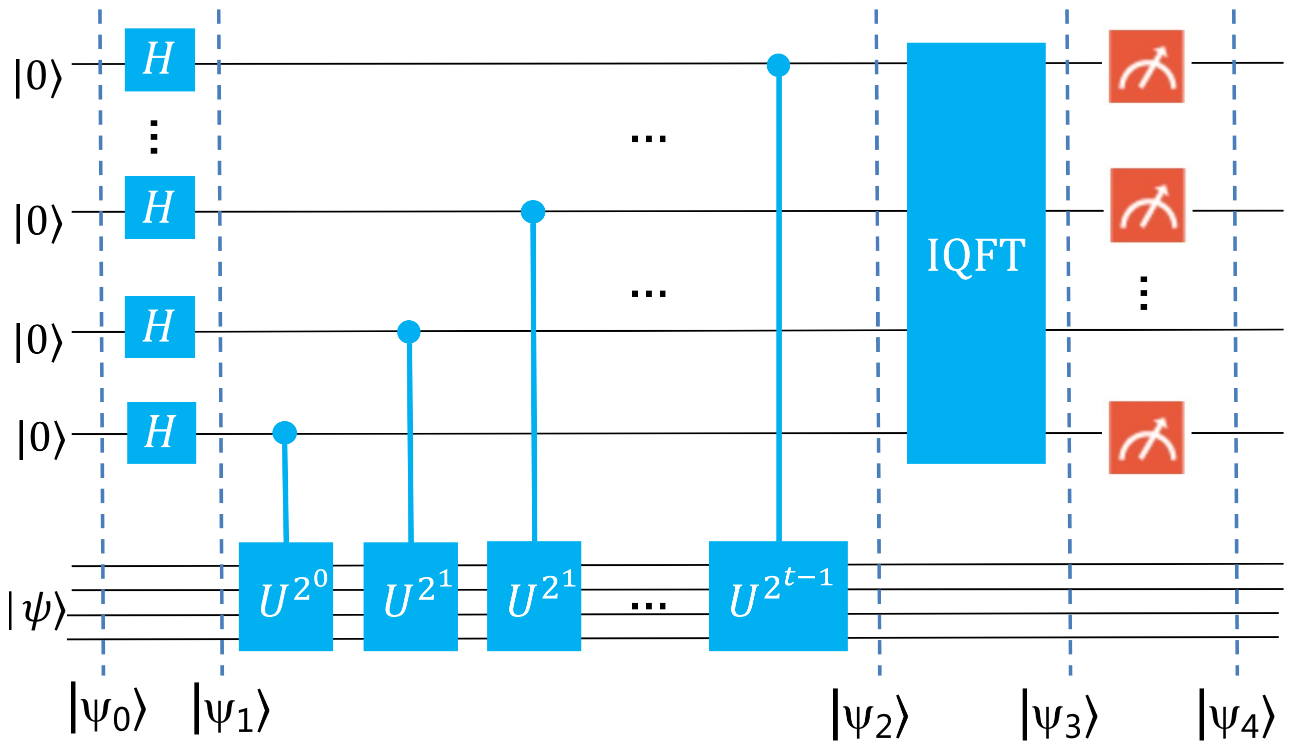
```
import pyqpanda as pq
from numpy import pi

def QPE(controlqlist, targetqlist, matrix):
   circ = pq.QCircuit()
   for i in range(len(controlqlist)):
         circ.insert(pq.H(controlqlist[i]))

   for i in range(len(controlqlist)):
         circ.insert(controlUnitaryPower(targetqlist,
         controlqlist[controlqlist.size() \
          - 1 - i], i, matrix))

   circ.insert(pq.QFT(controlqlist).dagger())
   return circ
```

图中的参数matrix是指需要估计特征值的幺正算符 U 对应的矩阵。



来源：https://pyqpanda-toturial.readthedocs.io/zh/latest/QFT.html

Calvin，QQ: 179209347 Mail: 179209347@qq.com

为什么 $e^{2\pi i\varphi}$ 中 φ 应是一个小数，因为只有小数部分有意义？

$x2^{-l} = x_1 2^{n-1-l} + x_2 2^{n-2-l} + \ldots + x_n 2^{0-l}$
$x2^{-l} = q$ (整数部分) $+ p$(小数部分)
$e^{i2\pi q} = \cos(2\pi q) + i\sin(2\pi q) = 1$
$e^{i2\pi x} = e^{i2\pi(q+p)} = e^{i2\pi q} e^{i2\pi p} = e^{i2\pi p}$

$$U|\psi\rangle = e^{2\pi i\varphi}|\psi\rangle$$

$$= e^{2\pi i(\varphi_q + \varphi_p)}|\psi\rangle$$

φ 整数部分为：φ_q，小数部分为：φ_p

$$= e^{2\pi i\varphi_q} e^{2\pi i\varphi_p}|\psi\rangle$$

φ 整数部分 φ_q 对应的$e^{2\pi i\varphi_q}$ 为 1：
$e^{i2\pi\varphi_q} = \cos(2\pi\varphi_q) + i\sin(2\pi\varphi_q) = 1$

$$= e^{2\pi i\varphi_p}|\psi\rangle$$

$$= e^{2\pi i 0.\varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_t}|\psi\rangle$$

Calvin, QQ: 179209347 Mail: 179209347@qq.com

Thank

You