Qubits
qubits.top

量子计算
—基础篇

Quantum Computer

网址：www.qubits.top

Calvin Tang

179209347@qq.com

介绍

教程简介：

- 面向对象：量子计算初学者
- 依赖课程：线性代数，解析几何，量子力学（非必需）

知乎专栏：
https://www.zhihu.com/column/c_1501138176371011584

Github & Gitee 地址：
https://github.com/mymagicpower/quantum
https://gitee.com/mymagicpower/quantum

*** 版权声明：**

- 仅限用于个人学习，或者大学授课使用
  （大学授课如需ppt 原件，请用学校邮箱联系我获取）
- 禁止用于任何商业用途

酉（幺正）变换

酉（幺正）变换是一种矩阵，它作用在量子态上得到的是一个新的量子态。 使用 U 来表达酉矩阵，$U^\dagger$ 表示酉矩阵的转置共轭矩阵，二者满足运算关系 $UU^\dagger=I$， 说明酉变换是一种可逆变换。

$|\psi\rangle$ 狄拉克符号 ket，代表列向量. $\langle\psi|$ 狄拉克符号 bra，代表行向量

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \text{ -> } \langle\psi| = \alpha^*\langle 0| + \beta^*\langle 1|$$

向量内积称为bracket，也称为归一化条件。

$$\langle\psi|\psi\rangle = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

一般酉变换在量子态上的作用是变换矩阵左乘以右矢进行计算的。例如一开始有一个量子态 $|\psi\rangle$ ，则状态的变换为一个矩阵，变换后得到：

$|\psi\rangle$ -> $U|\psi\rangle$

在对偶空间，我们可得到下面的变换：

$\langle\psi|$ -> $\langle\psi|U^\dagger$ ，$U^\dagger = (U^T)^*$ 称为转置共轭矩阵

此时，我们需要两个矢量的内积经过同一个酉变换之后保持不变，保持前后的归一化：

$\langle\psi|U^\dagger U|\psi\rangle = 1$ 意味着： $UU^\dagger=I$ => $U^\dagger= U^{-1}$

*也可以通过酉变换表示密度矩阵的演化 $\rho=U\rho_0 U^\dagger$ 这样就连混合态的演化也包含在内了。

酉（幺正）变换性质

1. $UU^\dagger = U^\dagger U = I \Rightarrow U^\dagger = U^{-1}$

2. 如果： $U \in \mathbb{C}^{n\mathrm{x}n}$ 是幺正矩阵，对于所有的 $v, w \in \mathbb{C}^n$

$< Uv, Uw > \; = \; < v, w > \quad < Uv, w > \; = \; < v, U^\dagger w >$

证明：$<Uv, Uw> = (U\,v)^\dagger\,(U\,w) = v^\dagger U^\dagger U w == v^\dagger I w = <v, w>$

3. 如果： $U \in \mathbb{C}^{n\mathrm{x}n}$ 是幺正矩阵，对于所有的 $v \in \mathbb{C}^n$

$||Uv|| = ||v||$

证明：$||Uv|| = \sqrt{<Uv, Uv>} = \sqrt{<v, v>} = ||v||$

4. 如果： $U \in \mathbb{C}^{n\mathrm{x}n}$ 是幺正矩阵，对于所有的 $v, w \in \mathbb{C}^n$

$d(U\,v, Uw) = d(v, w)$

证明：$d(Uv, Uw) = |U\,v - Uw| = |U(v - w)| = |v - w| = d(v, w)$

厄米共轭算符公式

给定一个线性算符 A，它的厄米共轭算符（转置共轭）定义为：

$$\langle u|A|v\rangle = \langle A^\dagger u|v\rangle = \langle v|A^\dagger|u\rangle^* \qquad A^\dagger = (A^*)^T$$

由上述定义可得：

$$\langle e_j|A|e_k\rangle = \langle e_k|A^\dagger|e_j\rangle^*$$

于是有：

$$(c^\dagger)_{jk} = {c^*}_{kj}$$

根据上述定义，可得：

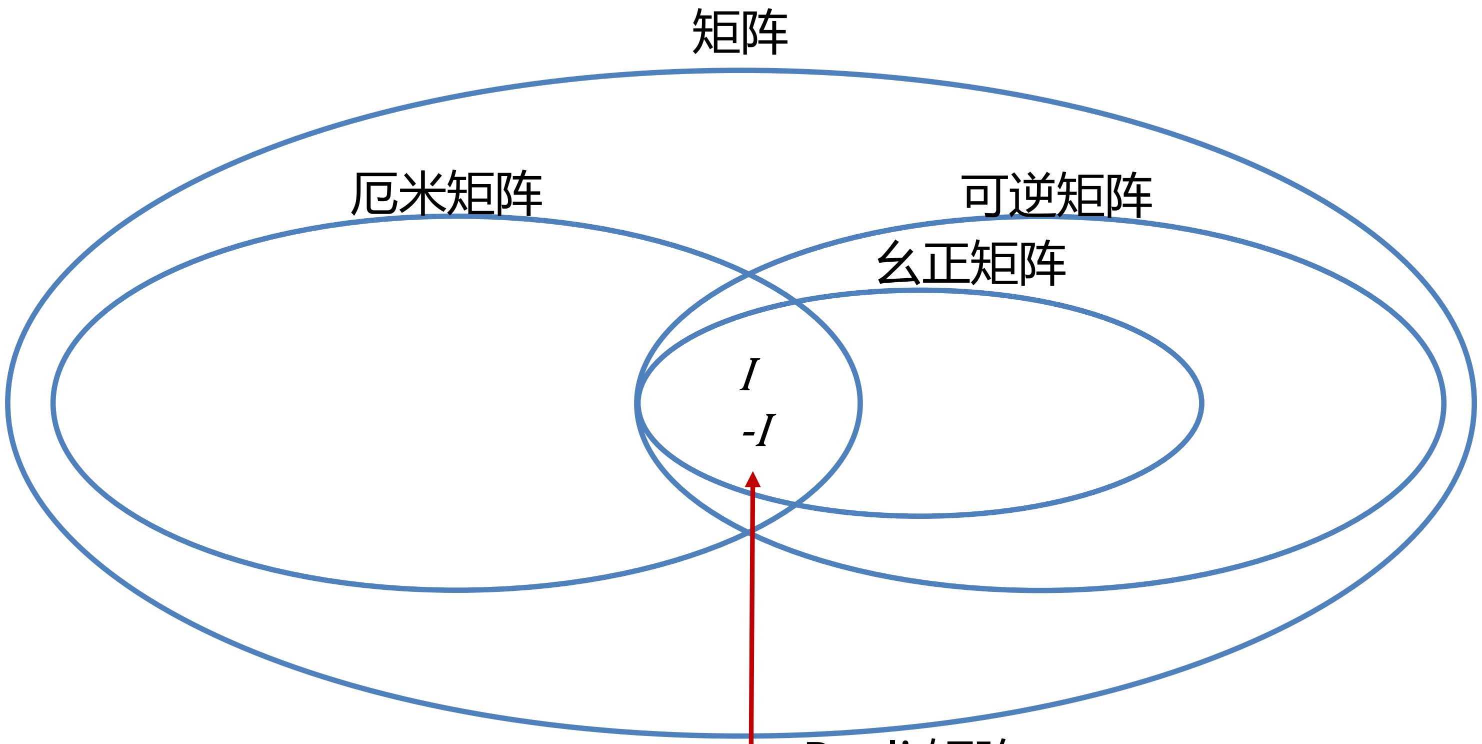
$$|x\rangle^\dagger = (x_1^*, \ldots, x_n^*) = \langle x|$$

$$\left(\sum_i a_i A_i\right)^\dagger = \sum_i a_i^* A_i^\dagger \qquad (cA)^\dagger = c^* A^\dagger \quad (\mathrm{A} + \mathrm{B})^\dagger = \mathrm{A}^\dagger + \mathrm{B}^\dagger \qquad (\mathrm{AB})^\dagger = \mathrm{B}^\dagger \mathrm{A}^\dagger$$

$$(A|v\rangle)^\dagger = \langle v|A^\dagger \qquad (|u\rangle\langle v|)^\dagger = |v\rangle\langle u|$$

$$||\, \langle u|A|v\rangle \,||^2 = \langle u|A|v\rangle \langle v|A^\dagger|u\rangle$$

酉（幺正）变换 - 矩阵类型



Pauli 矩阵

$$X = \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{Y} = \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \qquad Z = \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

单量子比特逻辑门

根据量子计算的原理：

- ✓ 任意的单量子比特逻辑门可以拆分为绕 X 轴旋转的量子逻辑门和绕 Y 轴旋转量子逻辑门的序列；
- ✓ 任意的两量子比特逻辑门可以拆分为由 CNOT/CZ 门和单量子比特逻辑门的序列。

在经典计算机中，单比特逻辑门只有一种——非门(NOT gate)，但是在量子计算机中，量子比特情况相对复杂，存在**叠加态**和**相位**，所以单量子比特逻辑门会有更多的种类。

经典计算线路由连线和门组成，量子线路也同样如此。

单量子比特门是一个二阶的酉矩阵 U，满足 $UU^{\dagger} = I$， 作用在量子比特 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix}\alpha \\ \beta\end{bmatrix}$ 上，相当于将 $|\psi\rangle$ 左乘上 U 矩阵，变换为：

$$|\psi'\rangle = U\begin{bmatrix}\alpha \\ \beta\end{bmatrix}$$

每一个酉矩阵 U 都对应着一个有效的量子门，即对于量子门来说唯一显示就是酉性(unitary)。
量子门的作用都是线性的。

单量子比特逻辑门

$|0\rangle$ 变换后的量子态为$|\varphi_0\rangle$ ， $|1\rangle$ 变换后的量子态为$|\varphi_1\rangle$，则U变换的表达式为：

$$U|0\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix} = |\varphi_0\rangle$$

$$U|1\rangle = \alpha'|0\rangle + \beta'|1\rangle = \begin{bmatrix}\alpha'\\\beta'\end{bmatrix} = |\varphi_1\rangle$$

因为：$|0\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \quad |1\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

两边分别同乘 $\langle 0|$, $\langle 1|$, 有：

① $U|0\rangle\langle 0| = |\varphi_0\rangle\langle 0| = \begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}\langle 0| = \begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}[1\ 0] = \begin{bmatrix}\alpha & 0\\\beta & 0\end{bmatrix}$

② $U|1\rangle\langle 1| = |\varphi_1\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix}\alpha'\\\beta'\end{bmatrix}\langle 1| = \begin{bmatrix}\alpha'\\\beta'\end{bmatrix}[0\ 1] = \begin{bmatrix}0 & \alpha'\\0 & \beta'\end{bmatrix}$

1, 2 两式相加：

$$U|0\rangle\langle 0| + U|1\rangle\langle 1| = U(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) = \begin{bmatrix}\alpha & 0\\\beta & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & \alpha'\\0 & \beta'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha & \alpha'\\\beta & \beta'\end{bmatrix}$$

由于：

$$|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}[1\ 0] + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}[0\ 1] = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = I$$

可得：

$$U(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) = U\,I = U = \begin{bmatrix}\alpha & \alpha'\\\beta & \beta'\end{bmatrix} = |\varphi_0\rangle\langle 0| + |\varphi_1\rangle\langle 1|$$

单量子比特逻辑门 - 幺正变换矩阵的计算方法

$|0\rangle$ 变换后的量子态为$|\varphi_0\rangle$ ， $|1\rangle$ 变换后的量子态为$|\varphi_1\rangle$ ：

$$|0\rangle \rightarrow |\varphi_0\rangle$$
$$|1\rangle \rightarrow |\varphi_1\rangle$$

根据之前的就算，可得 U 变换的通用表达式为：

$$\mathrm{U} = |\varphi_0\rangle\langle 0| + |\varphi_1\rangle\langle 1|$$

单量子比特幺正变换矩阵的计算方法：

$$\mathrm{U} = |\varphi_0\rangle\langle 0| + |\varphi_1\rangle\langle 1|$$

将每个量子态变换前的对偶向量（如： $|0\rangle$ 的对偶向量为 $\langle 0|$ ）右乘变换后的量子态，然后相加。

H (Hadamard) 门 - 矩阵计算

Hadamard 门是一种可以将基态变为叠加态的量子逻辑门，简称 H 门。

H 门作用在基态：

① $H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

② $H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle - |1\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

因为：$|0\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ $|1\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

两边分别同乘 $\langle 0|$，$\langle 1|$ ：

① $H|0\rangle\langle 0| = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\langle 0|$

② $H|1\rangle\langle 1| = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\langle 1|$

1, 2 两式相加：

$$H|0\rangle\langle 0| + U|1\rangle\langle 1| = H(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) = H\,I = H$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\langle 0| + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\langle 1|$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$$

完整计算一次，加深理解，后面直接套用公式：

$U = |\varphi_0\rangle\langle 0| + |\varphi_1\rangle\langle 1|$

H (Hadamard) 门

Hadamard 门是一种可以将基态变为叠加态的量子逻辑门，简称H门。

$$矩阵形式\ \mathrm{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

量子线路符号：

H 门作用在任意量子态 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \ \beta|1\rangle = \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}$，得到的新的量子态为：

$$|\psi'\rangle\ = \mathrm{H}|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\alpha+\beta\\ \alpha-\beta\end{bmatrix} = \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

H 门其它性质：

$\mathrm{H}^2 = \mathrm{I} \quad \mathrm{H}^{+} = \mathrm{H} \quad \mathrm{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{X}+\mathrm{Z})$

$\mathrm{HXH} = \mathrm{Z} \quad \mathrm{HZH} = \mathrm{X} \quad \mathrm{HYH} = \text{-}\mathrm{Y}$

$\mathrm{HR_x}(\theta)\mathrm{H} \ = \ \cos(\theta/2)\ \mathrm{HIH} - i\sin(\theta/2)\mathrm{HXH} = \cos(\theta/2)\ \mathrm{I} - i\sin(\theta/2)\mathrm{Z} \ = \mathrm{R_z}(\theta)$

H (Hadamard) 门

Hadamard 门是一种可以将基态变为叠加态的量子逻辑门，简称H门。

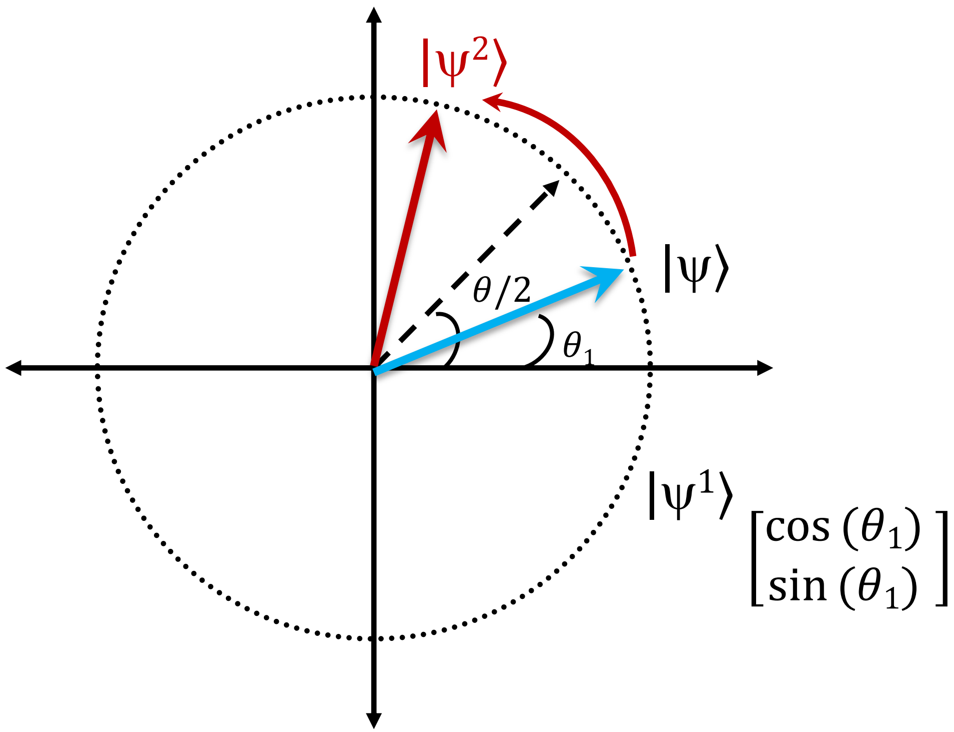
矩阵形式 $\mathrm{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

H 门作用在任意量子态 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$，得到的新的量子态为：

$$
\begin{aligned}
|\psi'\rangle &= \mathrm{H}|\psi\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha-\beta \end{bmatrix} \\
&= \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{2}}|1\rangle
\end{aligned}
$$

常用几何变换 – 镜像

$$Q=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{bmatrix}$$



$$|\psi\rangle=\cos(\theta/2)\ |0\rangle+\sin(\theta/2)\,|1\rangle=\begin{bmatrix}\cos(\theta/2)\\ \sin(\theta/2)\end{bmatrix}$$

* 关于通过原点、方向和水平轴夹角为 $\theta/2$ 直线镜像;

证明：

$$\begin{aligned}|\psi^2\rangle &= Q\,|\psi^1\rangle\\ &=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(\theta_1)\\ \sin(\theta_1)\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\cos(\theta)\cos(\theta_1)+\sin(\theta)\sin(\theta_1)\\ \sin(\theta)\ \cos(\theta_1)\ -\cos(\theta)\sin(\theta_1)\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\cos(\theta-\theta_1)\\ \sin(\theta-\theta_1)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

关于通过原点、方向和水平轴夹角为 $\theta/2$ 直线镜像，可以理解为逆时针旋转 $2\left(\frac{\theta}{2}-\theta_1\right)$，则：

$$|\psi^2\rangle=\begin{bmatrix}\cos\left(\theta_1+2\left(\frac{\theta}{2}-\theta_1\right)\right)\\ \sin\left(\theta_1+2\left(\frac{\theta}{2}-\theta_1\right)\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\theta-\theta_1)\\ \sin(\theta-\theta_1)\end{bmatrix}$$

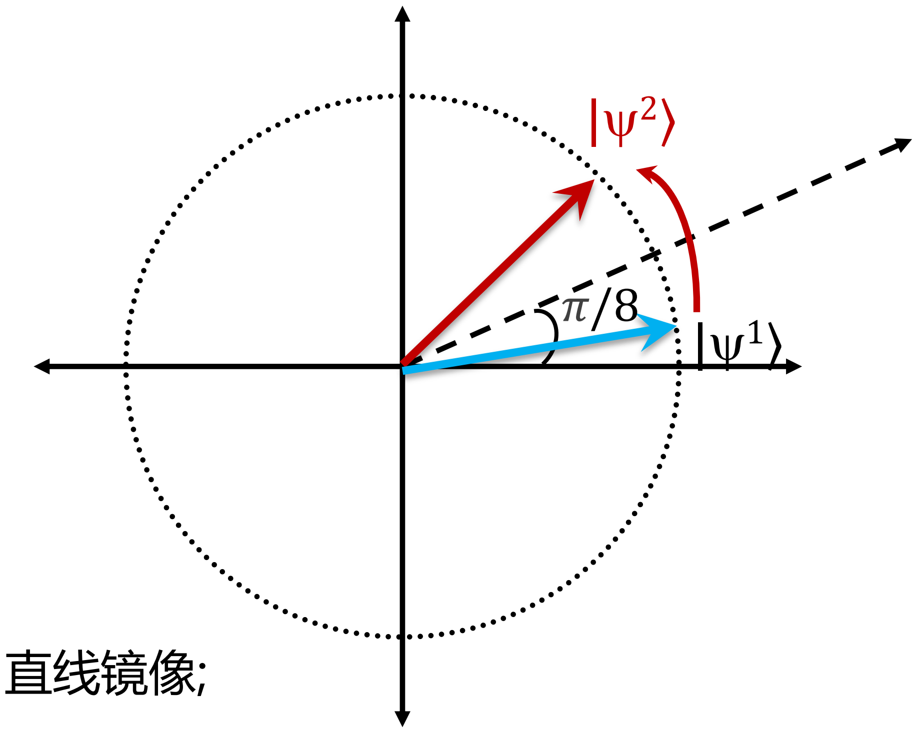
H (Hadamard) 门 – 举例（ α 和 β都为实数）

$$H=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\end{bmatrix}$$

观察发现，符合镜像公式：

$$Q=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{bmatrix}$$

* 关于通过原点、方向和水平轴夹角为 $\theta/2$ 直线镜像;



可知：

H门操作，相当于关于通过原点、方向和水平轴夹角为 $\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{8}$ 直线镜像;

H (Hadamard) 门 – 举例（ α 和 β都为实数 ）

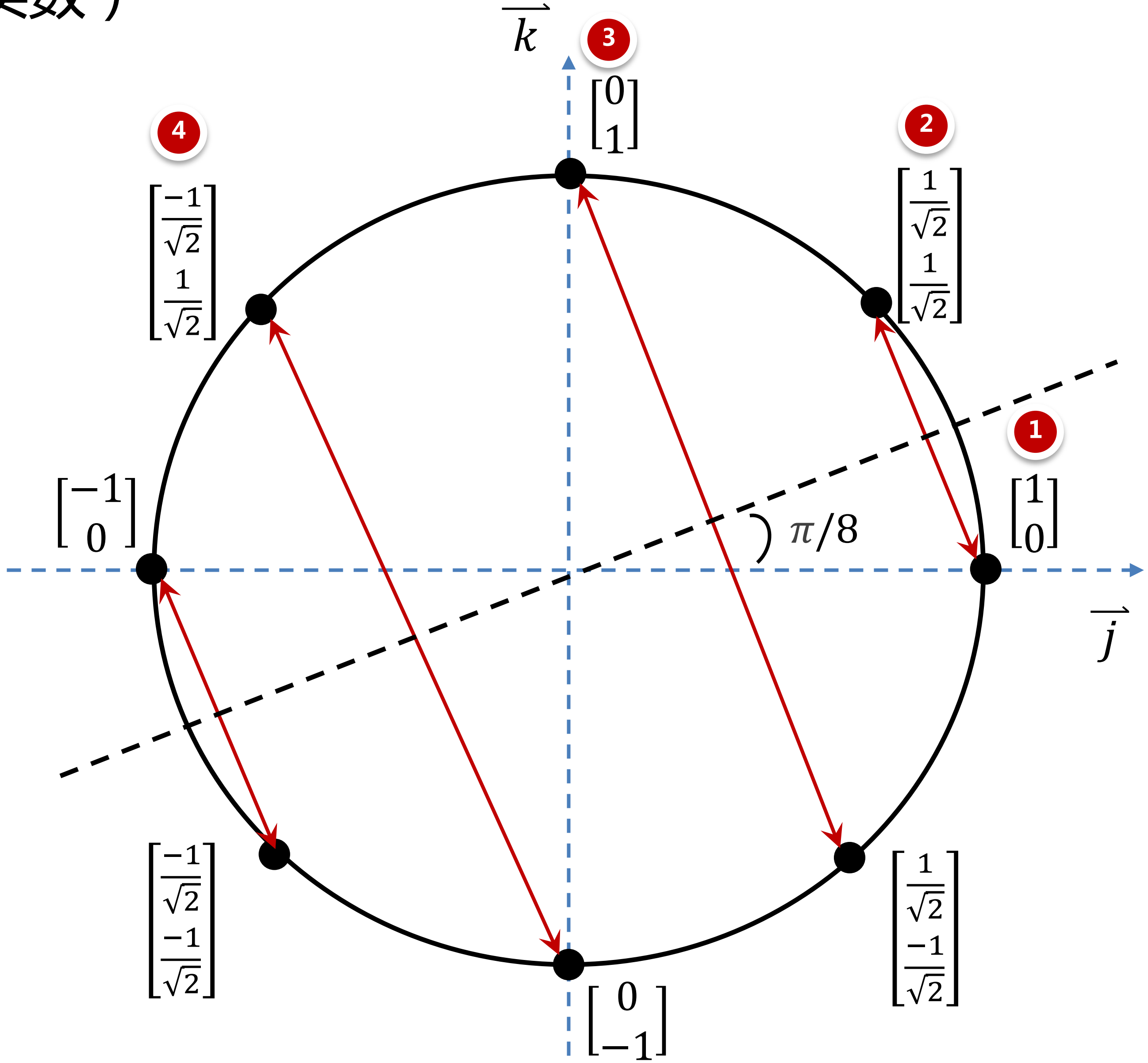
1 $\mathrm{H}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

2 $\mathrm{H}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

3 $\mathrm{H}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

4 $\mathrm{H}\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$

…



参考来源： Quantum Computing for Computer Scientists

泡利矩阵

泡利矩阵 (Pauli matrices) 有时也被称作自旋矩阵 (spin matrices)。
量子态的演化本质上可以看作是对量子态对应的矩阵做变换，即是做矩阵的乘法。
三个泡利矩阵表示的泡利算符代表着对量子态最基本的操作。
泡利算符是**一组三个2x2的幺正厄米复矩阵**，一般都以希腊字母 σ (西格玛)来表示。
读作泡利 x，泡利 y，泡利 z。

$$X = \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad Y = \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad Z = \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

每个泡利矩阵有两个特征值，1 和 -1， 其对应的归一化特征向量为：

$$\psi_{x+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \psi_{y+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \quad \psi_{z+} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\psi_{x-} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \psi_{y-} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \quad \psi_{z-} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

通常用$|+\rangle$表示ψ_{x+} ，用$|-\rangle$表示ψ_{x-} ，用$|0\rangle$表示ψ_{z+} ，用$|1\rangle$表示ψ_{z-}

泡利矩阵

如将σ_x 作用到基态上：

$$X|0\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |1\rangle$$
$$X|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |0\rangle$$

X 门作用在任意量子态 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$，得到的新的量子态为：

$$|\psi'\rangle = X|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \beta|0\rangle + \alpha|1\rangle$$

泡利矩阵的线性组合是完备的二维酉变换生成元，即所有满足 $UU^\dagger = I$ 的 U 都可以通过下面的公式得到：

$$U(\theta) = e^{-i\theta(a\sigma_x + b\sigma_y + c\sigma_z)}$$

泡利算符

泡利算符的对应运算规则如下：

$$\sigma_x\sigma_x = \sigma_y\sigma_y = \sigma_z\sigma_z = \mathrm{I}$$

证明：

$\sigma_x\sigma_x = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \mathrm{I}$ $\sigma_y\sigma_y = \begin{bmatrix}0 & -i\\i & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -i\\i & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \mathrm{I}$ $\sigma_z\sigma_z = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \mathrm{I}$

顺序相乘的两个泡利矩阵个跟未参与计算的泡利矩阵是 i 倍关系，逆序则是 -i 倍关系：

$\sigma_x\sigma_y = \mathrm{i}\sigma_z$. $\sigma_y\sigma_x = \text{-}\mathrm{i}\sigma_z$

$\sigma_y\sigma_z = \mathrm{i}\sigma_x$. $\sigma_z\sigma_y = -\mathrm{i}\sigma_x$

$\sigma_z\sigma_x = \mathrm{i}\sigma_y$. $\sigma_x\sigma_z = \text{-}\mathrm{i}\sigma_y$

$$det(\sigma_x) = det(\sigma_y) = det(\sigma_z) = -1$$

$$tr(\sigma_x) = tr(\sigma_y) = tr(\sigma_z) = 0$$

证明：

$\sigma_x\sigma_y = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -\mathrm{i}\\i & 0\end{bmatrix} = \mathrm{i}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix} = \mathrm{i}\sigma_z$.

$\sigma_y\sigma_x = \begin{bmatrix}0 & -\mathrm{i}\\i & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} = \text{-}\mathrm{i}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix} = \text{-}\mathrm{i}\sigma_z$.

Pauli-X 门 - 矩阵计算

Pauli-X 作用在单量子比特上，跟经典计算机的NOT门量子等价，将量子态翻转，量子态变换规律是：

$$|0\rangle \rightarrow |1\rangle$$
$$|1\rangle \rightarrow |0\rangle$$

单量子比特么正变换矩阵的计算方法：

$$U = |\varphi_0\rangle\langle 0| + |\varphi_1\rangle\langle 1|$$

根据变换矩阵计算公式，有：

$$X = |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [1\ 0] + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [0\ 1]$$

因为：$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pauli-X 门

Pauli-X 门矩阵形式为泡利矩阵σ_x，即：

$$X = \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X\,|j\rangle = |j \oplus 1\rangle$$

Pauli-X 门矩阵又称为NOT门，其**量子线路符号**：

X 门作用在基态：

$$X|0\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |1\rangle \quad X|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |0\rangle$$

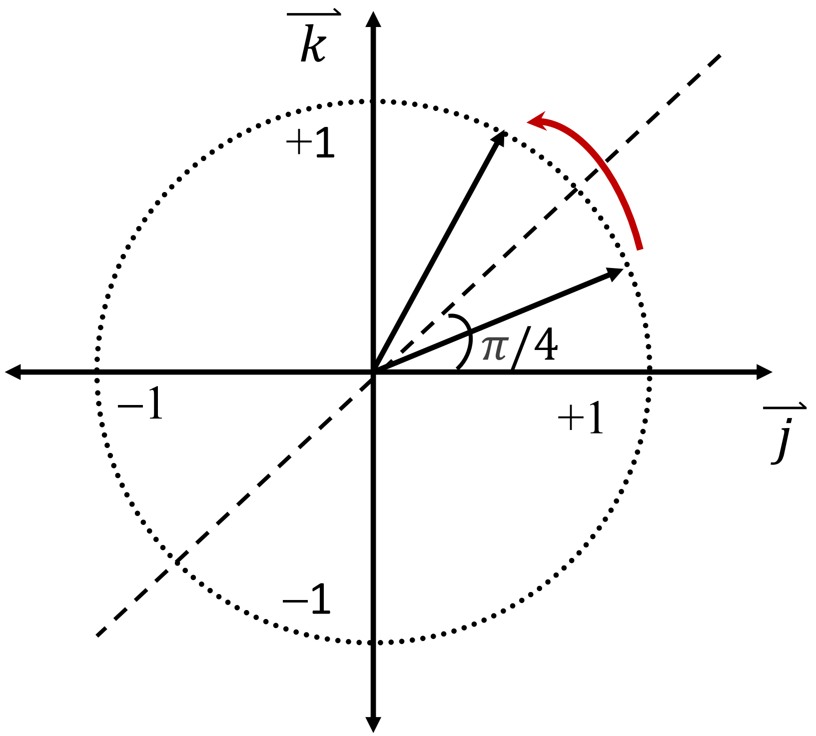
X 门作用在任意量子态 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$，得到的新的量子态为：

$$|\psi'\rangle = X|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \beta|0\rangle + \alpha|1\rangle$$

Pauli-X 门

Pauli-X 门矩阵形式为泡利矩阵 σ_x，即：

$$X=\sigma_x=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\end{bmatrix}$$



观察发现，符合镜像公式：

$$Q=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{bmatrix}$$

* 关于通过原点、方向和水平轴夹角为 $\theta/2$ 直线镜像;

可知：

X 门操作，相当于关于通过原点、方向和水平轴夹角为 $\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{4}$ 直线镜像;

Pauli-X 门 – α 和 β都为实数，且归一化 - 举例

X 门作用在基态：

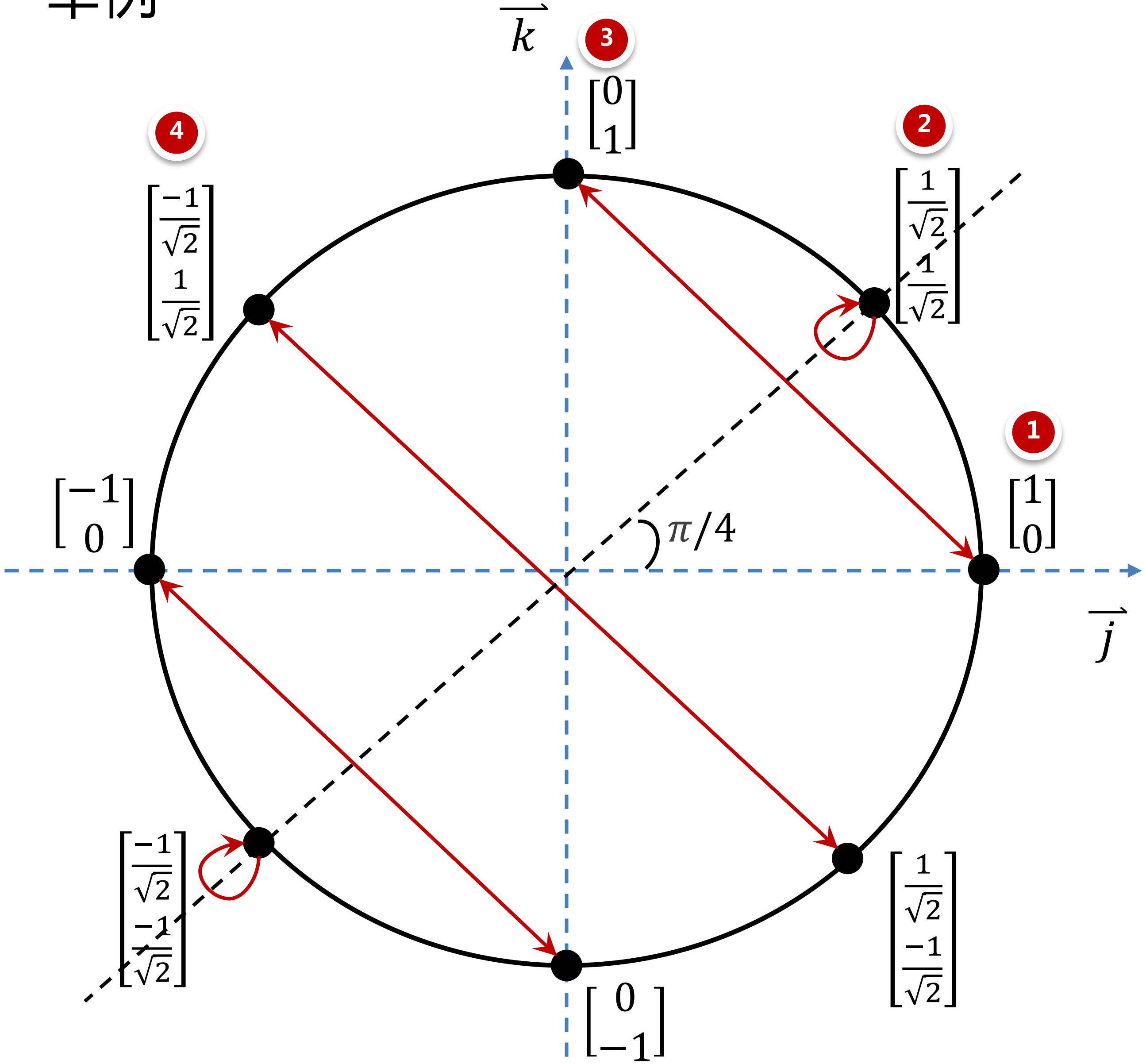
1 $X|0\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |1\rangle$

3 $X|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |0\rangle$

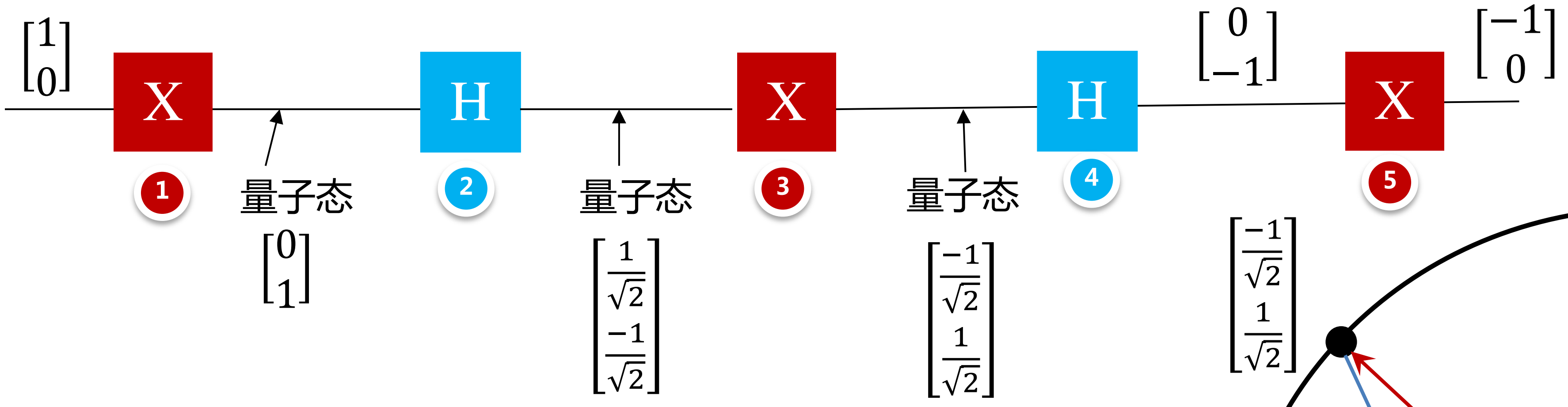
X 门作用在叠加态：

2 $X \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

4 $X \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$



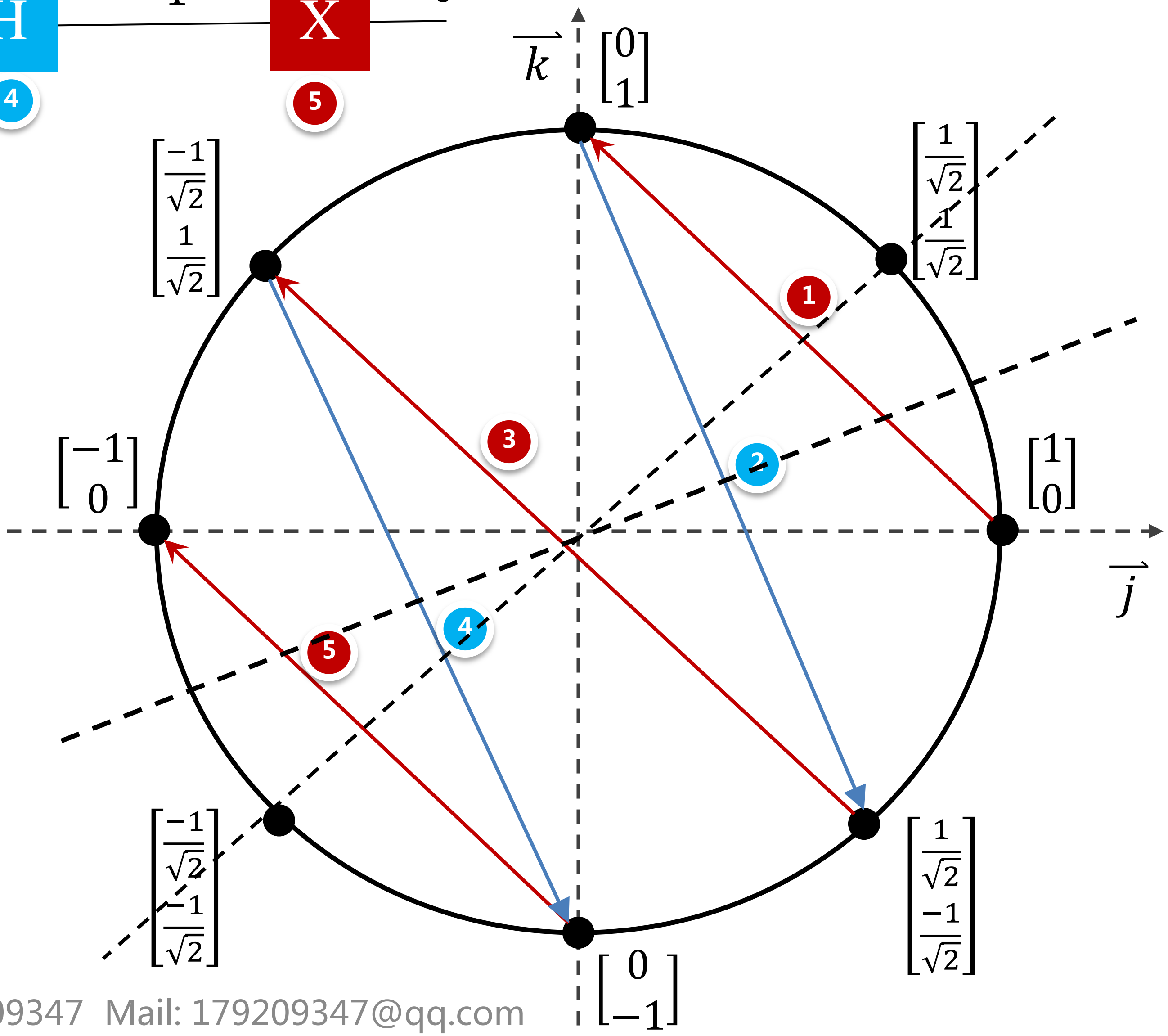
Pauli-X 门 - 单位圆状态机 – X H 门结合使用例子



连续两次 X门 或者连续两次 H门 都会恢复量子态。但是如果2次 X门 和2次 H门 交替操作，结果却会不同。

如图所示交替操作之后：

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$$



Pauli-Y 门 - 矩阵计算

Pauli-Y 作用在单量子比特上，作用相当于绕布洛赫球 Y 轴旋转角度 π，量子态变换规律是：

$$|0\rangle \rightarrow i|1\rangle$$
$$|1\rangle \rightarrow -i\,|0\rangle$$

单量子比特幺正变换矩阵的计算方法：

$$U = |\varphi_0\rangle\langle 0| + |\varphi_1\rangle\langle 1|$$

根据变换矩阵计算公式，有：

$$Y = i|1\rangle\langle 0| - i|0\rangle\langle 1| = i\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}[1\ 0] - i\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}[0\ 1]$$ 因为：$|0\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ $|1\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

$$= i\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix} - i\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0 & -i\\i & 0\end{bmatrix}$$

Pauli-Y 门

Pauli-Y 门矩阵形式为泡利矩阵σ_y，即：

$$\mathrm{Y} = \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

其量子线路符号：

Y 门作用在基态：

$$\mathrm{Y}|0\rangle = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} = \mathrm{i} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathrm{i}|1\rangle$$

$$\mathrm{Y}|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \\ 0 \end{bmatrix} = -\mathrm{i} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -\mathrm{i}|0\rangle$$

Y 门作用在任意量子态 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$，得到的新的量子态为：

$$|\psi'\rangle = \mathrm{Y}|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathrm{i}\beta \\ \mathrm{i}\alpha \end{bmatrix} = -\mathrm{i}\beta|0\rangle + \mathrm{i}\alpha|1\rangle$$

Pauli-Z 门 - 矩阵计算

Pauli-Z 作用在单量子比特上，作用相当于绕布洛赫球 Z 轴旋转角度π，量子态变换规律是：

$$|0\rangle \rightarrow |0\rangle$$

$$|1\rangle \rightarrow -|1\rangle$$

单量子比特幺正变换矩阵的计算方法：

$$\mathrm{U} = |\varphi_0\rangle\langle 0| + |\varphi_1\rangle\langle 1|$$

根据变换矩阵计算公式，有：

$$Z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}[1\ 0] - \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}[0\ 1]$$

因为：$|0\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ $|1\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$$

Pauli-Z 门

Pauli-Z 门矩阵形式为泡利矩阵σ_z，即：

$$Z = \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| \text{（谱分解）}$$

谱分解的变形写法

其量子线路符号：

① $I - 2|1\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

② $2|0\rangle\langle 0| - I = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Z 门作用在基态：

$$Z|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (-1)^0|0\rangle = |0\rangle$$

$$Z|1\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = (-1)^1|1\rangle = -|1\rangle$$

$$Z\,|\,j\,\rangle = (-1)^j|\,j\,\rangle$$

Z 门作用在任意量子态 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$，得到的新的量子态为：

$$|\psi'\rangle = Z|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\beta \end{bmatrix} = \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle$$

矩阵的指数函数

泰勒公式：

$$e^{x}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\cdots+\frac{x^{n}}{n!}$$

利用函数的幂级数定义矩阵A的函数，
矩阵A的指数函数表示：

$$e^{A}=I+\frac{A}{1!}+\frac{A^{2}}{2!}+\frac{A^{3}}{3!}+\cdots+\frac{A^{n}}{n!}$$

如果A是对角阵：
$A=\mathrm{diag}(A_{11}, A_{22}, A_{33},\dots)$

则(证明略)：
$A^n=\mathrm{diag}(A^n{}_{11}, An_{22}, An_{33},\dots)$

于是：
$A^1=\mathrm{diag}(A_{11}, A_{22}, A_{33},\dots)$
$A^2=\mathrm{diag}(A^2{}_{11}, A^2{}_{22}, A^2{}_{33},\dots)$
$A^3=\mathrm{diag}(A^3{}_{11}, A^3{}_{22}, A^3{}_{33},\dots)$

$$\begin{aligned}e^{A}&=I+\frac{A}{1!}+\frac{A^{2}}{2!}+\frac{A^{3}}{3!}+\cdots+\frac{A^{n}}{n!}\\&=I+\mathrm{diag}\left(\frac{A_{11}}{1!},\frac{A_{22}}{1!},\frac{A_{33}}{1!},\dots\right)+\mathrm{diag}\left(\frac{A^2{}_{11}}{2!},\frac{A^2{}_{22}}{2!},\frac{A^2{}_{33}}{2!},\dots\right)\\&\qquad+\mathrm{diag}\left(\frac{A^3{}_{11}}{3!},\frac{A^3{}_{22}}{3!},\frac{A^3{}_{33}}{3!},\dots\right)+\dots\\&=\mathrm{diag}\left(1+\frac{A_{11}}{1!}+\frac{A^2{}_{11}}{2!}+\frac{A^3{}_{11}}{3!}+\cdots,1+\frac{A_{22}}{1!}+\frac{A^2{}_{22}}{2!}+\frac{A^3{}_{22}}{3!}+\cdots,\dots\right)\\&=\mathrm{diag}(e^{A11}, e^{A22}, e^{A33}\dots)\end{aligned}$$

如果A不是对角阵，则可以通过酉变换将其对角化 $D=UAU^{\dagger}$

下面这种表达形式称为以A为生成元生成的酉变换：

$$U(\theta)=e^{(-i\theta A)}$$

矩阵的指数函数

如果A是2x2对角阵：

$A = \begin{bmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & a_1 \end{bmatrix}$， a_0, a_1 为矩阵A的特征值。

则：

$$A^k = \begin{bmatrix} a_0^k & 0 \\ 0 & a_1^k \end{bmatrix}$$

则：

$$e^A = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots + \frac{A^n}{n!} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & a_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{bmatrix} a_0^2 & 0 \\ 0 & a_1^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3!}\begin{bmatrix} a_0^3 & 0 \\ 0 & a_1^3 \end{bmatrix} + \ldots$$

由于：

$$|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可得：

$$e^A = \mathrm{diag}(e^{A11}, e^{A22}, e^{A33} \ldots) = \begin{bmatrix} e^{a_0} & 0 \\ 0 & e^{a_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{a_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{a_1} \end{bmatrix} = e^{a_0}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + e^{a_1}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = e^{a_0}|0\rangle\langle 0| + e^{a_1}|1\rangle\langle 1|$$

如果A为对角阵，容易根据特征值构造出矩阵指数函数的矩阵表达。

生成元 - 单位矩阵

以A为生成元生成的酉变换 $\mathrm{U}(\theta) = e^{(-i\theta A)}$

单位矩阵 $\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

以单位矩阵 I 作为生成元，则可以构建一种特殊的酉变换：

$$\mathrm{U}(\theta) = e^{(-i\theta A)}$$

$$-i\theta A = -i\theta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i\theta & 0 \\ 0 & -i\theta \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{U}(\theta) = e^{(-i\theta A)} = \begin{bmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix} = e^{-i\theta} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = e^{-i\theta}\ \mathrm{I}$$

它作用在单量子态上，相当于对整体乘以一个系数。
如果带入密度矩阵表达式，这个参数会被消去。
这个系数称为量子态的整体相位。任何操作和测量都无法分辨两个相同的密度矩阵，所以整体相位一般情况下对系统无影响。
分别用不同的泡利矩阵作为生成元，可以构成RX, RY, RZ。

$R_x(\theta)$, $R_y(\theta)$, $R_z(\theta)$逻辑门公式证明

泰勒公式：

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

根据上述公式：

$$R_U(\gamma) = e^{(-i\gamma Y)} = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots + \frac{A^n}{n!}$$

$$= I + \frac{-i\gamma U}{1!} + \frac{(-i\gamma U)^2}{2!} + \frac{(-i\gamma U)^3}{3!} + \cdots + \frac{(-i\gamma U)^n}{n!}$$

$$= \left(1 - \frac{\gamma^2}{2!} + \frac{\gamma^4}{4!} - \frac{\gamma^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{\gamma^{2n}}{(2n)!}\right) I - i\left(\gamma - \frac{\gamma^3}{3!} + \frac{\gamma^5}{5!} - \frac{\gamma^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{\gamma^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) U$$

$$= \cos(\gamma)\, I - i \sin(\gamma) U$$

X Y Z矩阵公式：

$$X = \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X^2 = \sigma_x \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$Y = \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

$$Y^2 = \sigma_y \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$Z = \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Z^2 = \sigma_z \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

代入Y可得： $R_y(\gamma) = \cos(\gamma) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - i \sin(\gamma) \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{bmatrix}$

$R_x(\theta)$，$R_y(\theta)$，$R_z(\theta)$逻辑门公式

根据 $R_U(\gamma) = \cos(\gamma)\,I - i\sin(\gamma)U$
可得：

$$R_x(\theta) = e^{-i\theta X/2} = \cos(\theta/2)\,I - i\sin(\theta/2)X$$

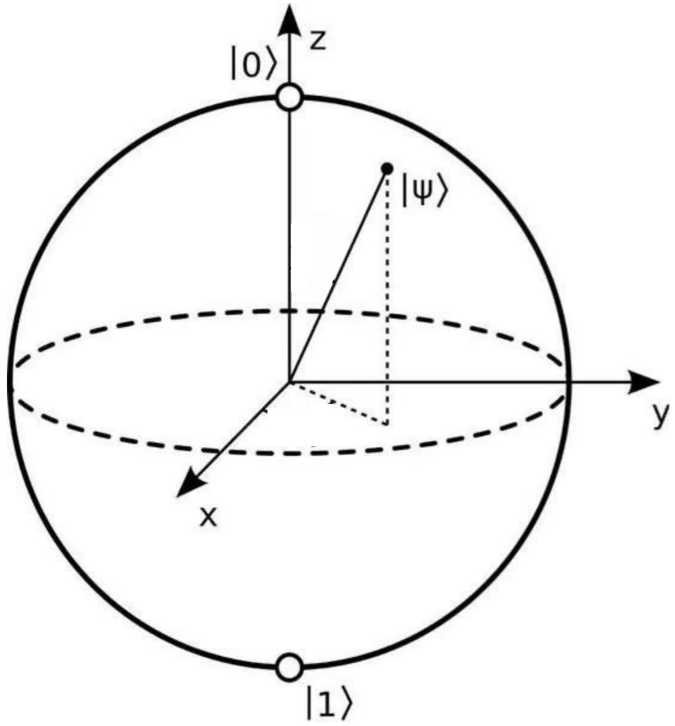
$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -i\sin(\theta/2) \\ -i\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta) = e^{-i\theta Y/2} = \cos(\theta/2)\,I - i\sin(\theta/2)Y$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

$$R_z(\theta) = e^{-i\theta Z/2} = \cos(\theta/2)\,I - i\sin(\theta/2)Z$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{bmatrix} = e^{-i\theta/2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}$$



由于$e^{-i\theta/2}$是一个整体相位，只考虑单门，则可以省略该参数。于是，RZ门矩阵可简写为：

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}$$

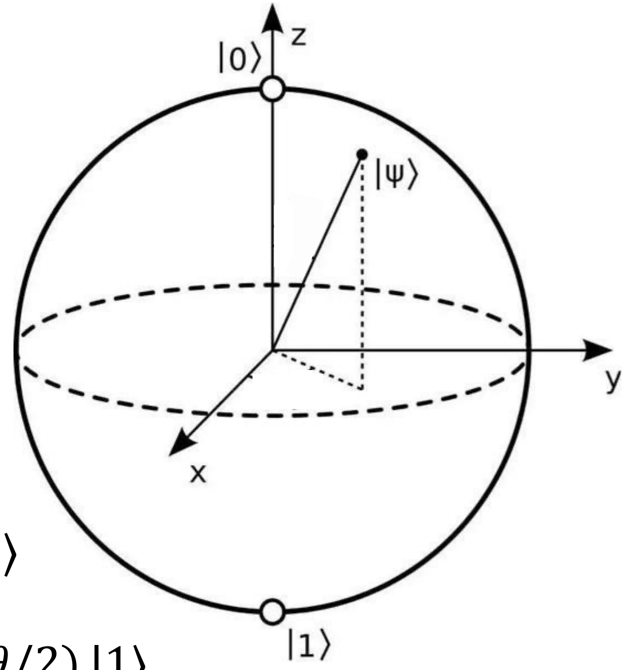
RX(θ) 门

RX门由Pauli-X 矩阵作为生成元生成，其矩阵形式为：

$$R_x(\theta) = e^{-i\theta X/2} = \cos(\theta/2)\, I - i \sin(\theta/2) X$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -i\sin(\theta/2) \\ -i\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

RX操作将原来的态上绕X轴逆时针旋转θ角。能导致概率振幅的变化。



其量子线路符号： X_θ

RX(θ) 门作用在基态：

$$R_x(\theta)\,|0\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -i\sin(\theta/2) \\ -i\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ -i\sin(\theta/2) \end{bmatrix} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle - i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$$

$$R_x(\theta)\,|1\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -i\sin(\theta/2) \\ -i\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i\sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{bmatrix} = -i\sin(\theta/2)\,|0\rangle + \cos(\theta/2)\,|1\rangle$$

$R_X(\pi/2)$ 门作用在任意量子态 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}$，得到的新的量子态为：

$$|\psi'\rangle = R_X(\pi/2)\,|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\alpha - i\beta \\ \beta - i\alpha\end{bmatrix} = \frac{\alpha - i\beta}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{\beta - i\alpha}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

RX(θ) 门 - 重要性质

两角和与差的三角函数公式：

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$$Q = R_x(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -i\sin(\theta/2) \\ -i\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

$$Q^2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -i\sin(\theta/2) \\ -i\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -i\sin(\theta/2) \\ -i\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2) & -2\,i\cos(\theta/2)\sin(\theta/2) \\ -2\,i\cos(\theta/2)\sin(\theta/2) & \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta/2 + \theta/2) & -i\sin(\theta/2 + \theta/2) \\ -i\sin(\theta/2 + \theta/2) & \cos(\theta/2 + \theta/2) \end{bmatrix}$$

$$Q^3 = \begin{bmatrix} \cos(3\theta/2) & -i\sin(3\theta/2) \\ -i\sin(3\theta/2) & \cos(3\theta/2) \end{bmatrix}$$

....

$$Q^n = \begin{bmatrix} \cos(n\theta/2) & -i\sin(n\theta/2) \\ -i\sin(n\theta/2) & \cos(n\theta/2) \end{bmatrix}$$

RY(θ) 门

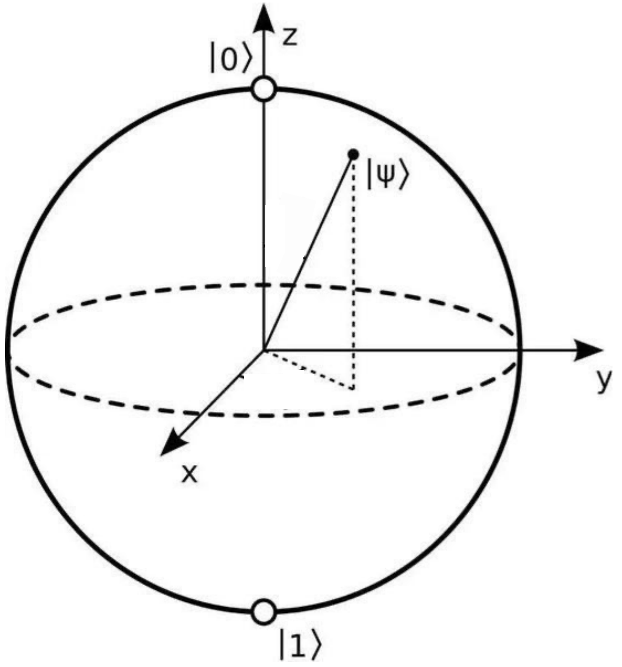
RY门由Pauli-Y 矩阵作为生成元生成，其矩阵形式为：

$$R_y(\theta) = e^{-i\theta Y/2} = \cos(\theta/2)\,\mathrm{I} - \mathrm{i}\sin(\theta/2)\mathrm{Y}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

其量子线路符号：

RY操作将原来的态上绕Y轴逆时针旋转θ角。能导致概率振幅的变化。



RY(θ) 门作用在基态：

$$R_y(\theta)\,|0\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{bmatrix} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$$

$$R_y(\theta)\,|1\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{bmatrix} = -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$$

$R_y(\pi/2)$ 门作用在任意量子态 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$，得到的新的量子态为：

$$|\psi'\rangle = R_X(\pi/2)\,|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \alpha-\beta \\ \alpha+\beta \end{bmatrix} = \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

RY(θ) 门 - 重要性质

两角和与差的三角函数公式：

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$$Q = R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

$$Q^2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2) & -2\cos(\theta/2)\sin(\theta/2) \\ 2\cos(\theta/2)\sin(\theta/2) & \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta/2 + \theta/2) & -\sin(\theta/2 + \theta/2) \\ \sin(\theta/2 + \theta/2) & \cos(\theta/2 + \theta/2) \end{bmatrix}$$

$$Q^3 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta)\cos(\theta/2) - \sin(\theta)\sin(\theta/2) & -\cos(\theta)\sin(\theta/2) - \sin(\theta)\cos(\theta/2) \\ \sin(\theta)\cos(\theta/2) + \cos(\theta)\sin(\theta/2) & -\sin(\theta)\sin(\theta/2) + \cos(\theta)\cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(3\theta/2) & -\sin(3\theta/2) \\ \sin(3\theta/2) & \cos(3\theta/2) \end{bmatrix}$$

....

$$Q^n = \begin{bmatrix} \cos(n\theta/2) & -\sin(n\theta/2) \\ \sin(n\theta/2) & \cos(n\theta/2) \end{bmatrix}$$

矩阵几何意义：

每次作用于向量，相当于将向量逆时针旋转 $\frac{\theta}{2}$

RY(θ) 门 - 举例（ α 和 β都为实数 ）

$$Q = R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

* 每次作用于量子态(向量)，相当于逆时针旋转 $\frac{\theta}{2}$

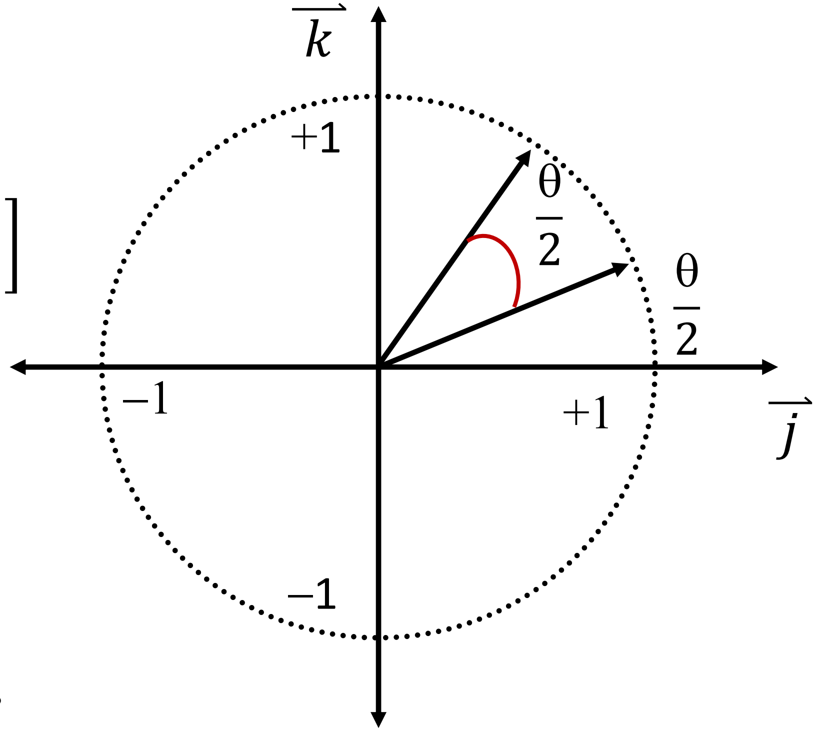
Q 作用在量子态 $|\psi\rangle = \cos(\theta/2)\ |0\rangle + \sin(\theta/2)\ |1\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{bmatrix}$

$$Q^1\,|\psi\rangle = Q^1 \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2 + \theta/2) \\ \sin(\theta/2 + \theta/2) \end{bmatrix}$$

$$Q^2\,|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \cos(2\theta/2 + \theta/2) \\ \sin(2\theta/2 + \theta/2) \end{bmatrix}$$

....

$$Q^n\,|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \cos((n+1)\theta/2\,) \\ \sin((n+1)\theta/2) \end{bmatrix} = \cos((n+1)\theta/2\,)\,|0\rangle + \sin((n+1)\theta/2\,)|1\rangle$$



选取合适的旋转次数 n 使得 $\sin^2((n+1)\theta/2\,)$ 最接近 1， 即可完成**振幅放大**量子线路。

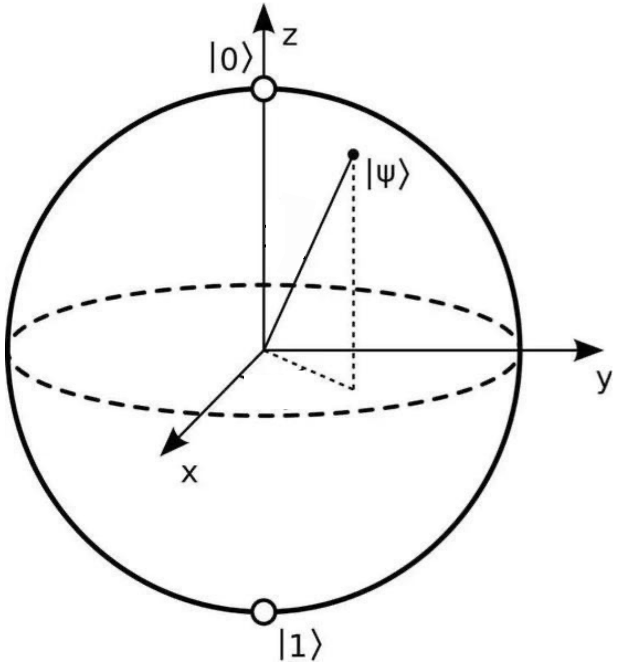
RZ(θ) 门

RZ门又称为相位转化门(phase-shift gate)，由Pauli-Z 矩阵作为生成元生成，其矩阵形式为：

$$R_z(\theta) = e^{-i\theta Z/2} = \cos(\theta/2)\,\mathrm{I} - \mathrm{i}\sin(\theta/2)\mathrm{Z}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{bmatrix} = e^{-i\theta/2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}$$

RZ 操作将原来的态上绕 Z 轴逆时针旋转θ角。不会导致概率振幅的变化，只会改变相位。



其量子线路符号：

RZ门作用在基态：

$$R_z(\theta)\,|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |0\rangle$$

$$R_z(\theta)\,|1\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{i\theta} \end{bmatrix} = e^{i\theta}\,|1\rangle$$

$R_y(\pi/2)$ 门作用在任意量子态 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta\,|1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$，得到的新的量子态为：

$$|\psi'\rangle = R_z(\pi/2)\,|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1+i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \frac{1+i}{\sqrt{2}}\beta \end{bmatrix} = \alpha|0\rangle + \frac{1+i}{\sqrt{2}}\beta|1\rangle$$

RZ(θ) 门

由于$e^{-i\theta/2}$ 是一个全局相位，其没有物理意义，只考虑单门，则可以省略该参数。于是，RZ门矩阵可简写为：

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}$$

$e^{-i\theta/2}$ 并没有对计算基|0⟩ 和 |1⟩ 做任何改变，而只是在原来的态上绕Z轴逆时针旋转θ角。

$$\begin{aligned} \mathrm{Rz}(\theta) &= |0\rangle\langle 0| + e^{i\theta}\,|1\rangle\langle 1| \\ &= I - |1\rangle\langle 1| + e^{i\theta}\,|1\rangle\langle 1| \\ &= I + e^{i\theta}\,|1\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 1| \end{aligned}$$

$$I = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|$$

RZ(θ) 门

RZ 操作将原来的态上绕 Z 轴逆时针旋转θ角。不会导致概率振幅的变化，只会改变相位。

因为：

① $|\psi> \ = r_0|0\rangle + r_1 e^{i\varphi}|1\rangle = \cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)\, e^{i\varphi}|1\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta)\, e^{i\varphi} \end{bmatrix}$

② $R_z(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}$

可得：

$R_z(\theta)\,|\,\psi\,\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta)\, e^{i\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ e^{i\theta} e^{i\varphi} \sin(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ e^{i(\theta+\varphi)} \sin(\theta) \end{bmatrix}$

注： $X = \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

RZ(θ) 门其它性质：

$X\, R_z(\theta) X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & e^{i\theta} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = e^{i\theta} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix}$ （舍去全局相位）

即：

$X\, R_z(\theta) X = R_z(-\theta) = R_z(\theta)^{-1} = R_z(\theta)^{+}$

$R_z(\theta)^{+} = \ (\cos(\theta/2)\, I - i \sin(\theta/2)\ Z)^{+} = \cos(\theta/2)\, I + i \sin(\theta/2)\ Z = e^{i\theta Z/2}$

RZ(θ) 门 – T门, S门, Z门

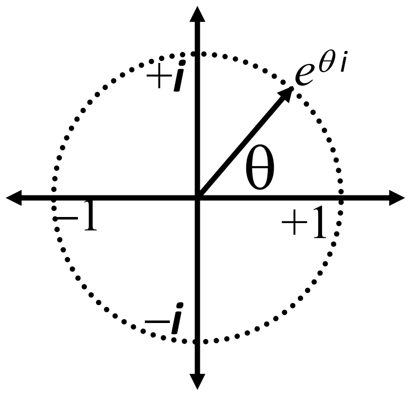
公式： $\mathrm{R_z}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}$

$$\mathrm{T} = \mathrm{R_z}(\pi/4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{S} = \mathrm{R_z}(\pi/2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

$\mathrm{S} = \mathrm{T}^2 \quad 45° + 45° = 90°$

$$\mathrm{Z} = \mathrm{R_z}(\pi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$



$e^{\pi i/2} = i$

$e^{\pi i} = -1$ (欧拉恒等式)

$e^{3\pi i/2} = -i$

$e^{2\pi i} = e^0 = 1$

Qubit
qubits.top

Thank You