Qubits
qubits.top

量子计算
—算法篇

Quantum Computing

网址：www.qubits.top

作者：Calvin Tang

邮箱：179209347@qq.com

介绍

教程简介：

- 面向对象：量子计算初学者
- 依赖课程：线性代数，量子力学（非必需）

知乎专栏：
https://www.zhihu.com/column/c_1501138176371011584

Github & Gitee 地址：
https://github.com/mymagicpower/qubits
https://gitee.com/mymagicpower/qubits

*** 版权声明：**

- 仅限用于个人学习
- 禁止用于任何商业用途

Calvin，QQ: 179209347 Mail: 179209347@qq.com

以简御繁 – 本轮 & 均轮

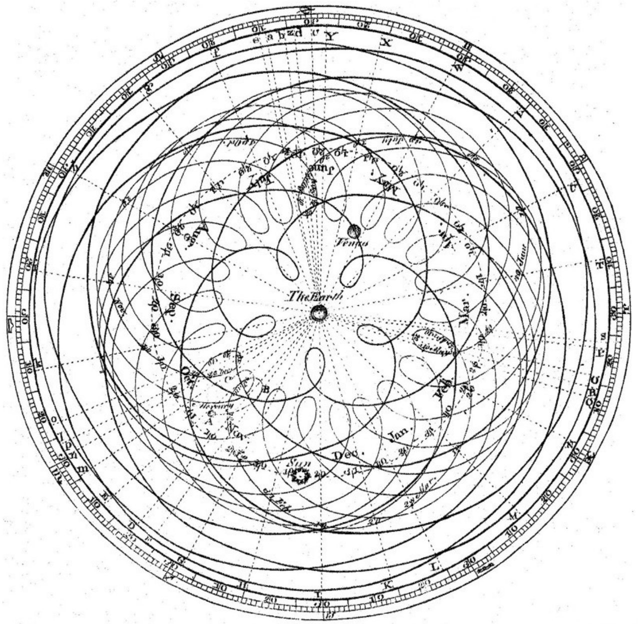
2世纪

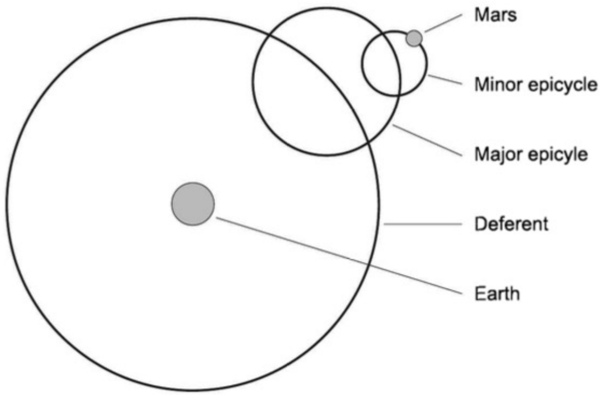
地心说

托勒密全面继承了亚里士多德的地心说，并利用前人积累和他自己长期观测得到的数据，写成了8卷本的《伟大论》。

托勒密
（约90年—168年）

托勒密使用古希腊本轮–均轮系统具有类似级数展开的功能，即为了增加推算的精确度，可以在本轮上再加一个小轮，让此小轮之心在本轮上绕行，而让天体在小轮上绕行。只要适当调诸轮的半径、绕行方向和速度，即可达到要求。从理论上说，小轮可以不断增加，以求得更高的精度。





之后哥白尼在《天体运行论》中放弃了这种表示，改用了更为简洁的日心说，之后开普勒改用椭圆代替圆。（地心说可以理解为以地球为参照点观察其它星体轨迹）

Calvin，QQ: 179209347 Mail: 179209347@qq.com

以简御繁 - 泰勒展开式

1712

泰勒展开式

在局部用一个多项式函数近似地替代一个复杂函数。

泰勒 (Taylor)
（1685—1731年）

它是数学中**逼近**这个重要思想的一个典型应用。
逼近思想：给定一个函数 f ，我们要研究 f 的性质，但 f 本身很复杂，直接无处入手。于是我们就想办法去找一个较简单的函数 g，使其逼近 f ，取代 f 。

典型例子：

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

以简御繁 – 傅里叶级数 & 傅里叶变换

1811

傅里叶级数（即三角级数）

傅里叶级数能够将任意周期函数表示成一组三角函数基函数依照各自的系数的累加。

傅里叶(Fourier)
（1768—1830年）

傅里叶级数能够将任意周期函数表示成一组基函数依照各自的系数的累加。
对于非周期函数，可使用**傅立叶变换**———傅立叶级数的泛化形式，因此，理解傅立叶级数是理解傅立叶变换、快速傅立叶变换(FFT)等概念的基础。

- 在不同的研究领域，傅里叶变换具有多种不同的变体形式，如连续傅里叶变换和离散傅里叶变换。
- 傅里叶变换是线性算子，若赋予适当的范数，它还是酉算子。
- 离散形式的傅里叶变换可以利用数字计算机快速的算出（其算法称为快速傅里叶变换算法(FFT)）

Calvin, QQ: 179209347 Mail: 179209347@qq.com

化繁为简

1949

费曼图和费曼规则

费曼图、费曼规则和重正化的计算方法，这是研究量子电动力学和粒子物理学不可缺少的工具。

理查德·费曼
（1918—1988年）

The world is strange. The whole universe is very strange, but you see when you look at the details that ***the rules of the game are very simple*** *– the mechanical rules by which you can figure out exactly what is going to happen when the situation is simple.*

But ***it is not complicated. It is just a lot of it.***

看似复杂的世界是由众多的简单规则构建而成。

傅里叶级数

傅里叶级数，它可以将任意周期为 T 函数分解为简单周期函数（正弦函数和余弦函数，这些函数作为基函数）的累加，这种叠加本质上就是对于正交基的线性组合：

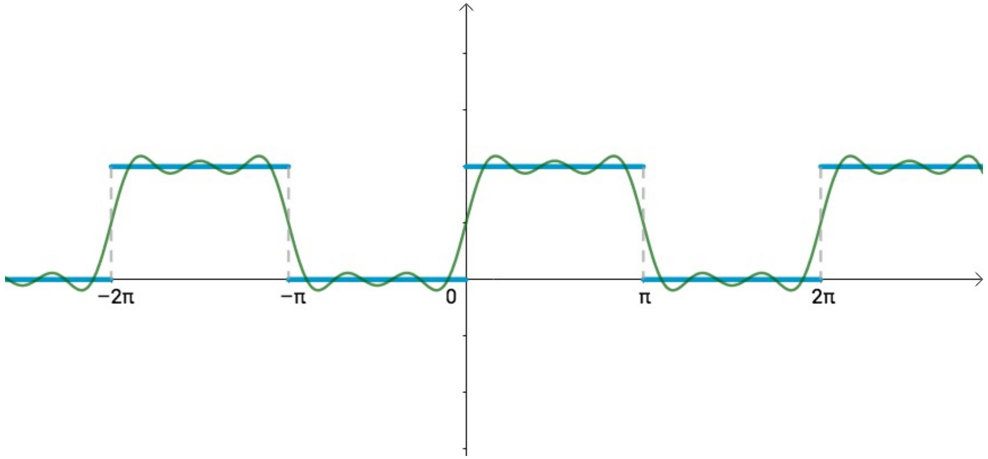
$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

$$T \text{ 为周期 ， } \omega = \frac{2\pi}{T} \text{ 称为基频率}$$

三角函数系：

$$\{1, \sin(\omega t), \cos(\omega t), \sin(2\omega t), \cos(2\omega t), \cdots, \sin(n\omega t), \cos(n\omega t), \cdots\}$$

使用傅里叶级数分解周期函数时不同周期 T 的函数要使用不同的三角函数系来作为基函数。

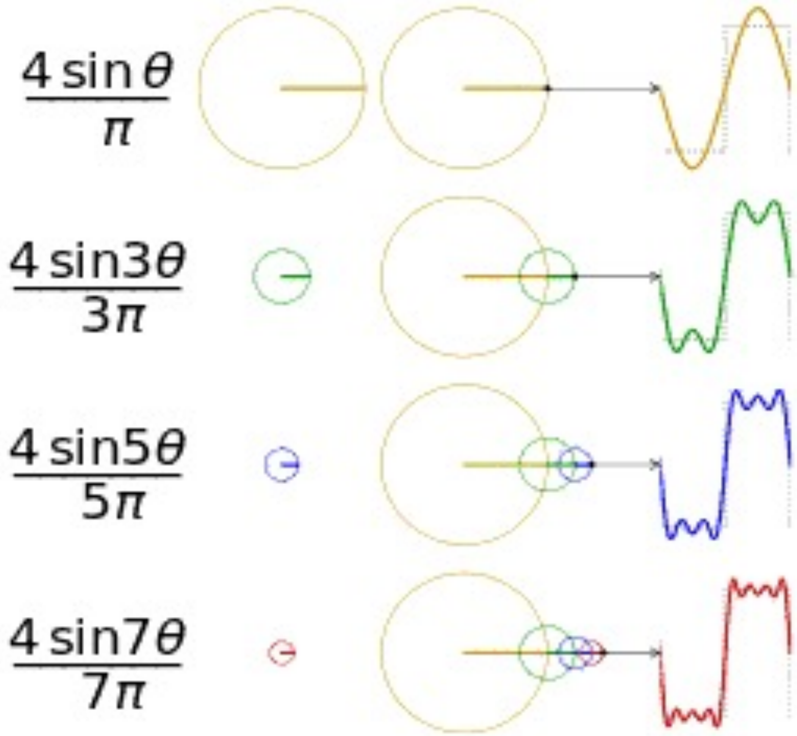


$a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$

不同频率的三角函数即正交基(Basis)，也被称为特征函数(Eigenfunction)，傅立叶级数的本质就是利用无穷多组正交的傅立叶基进行线性组合得到任意周期函数。

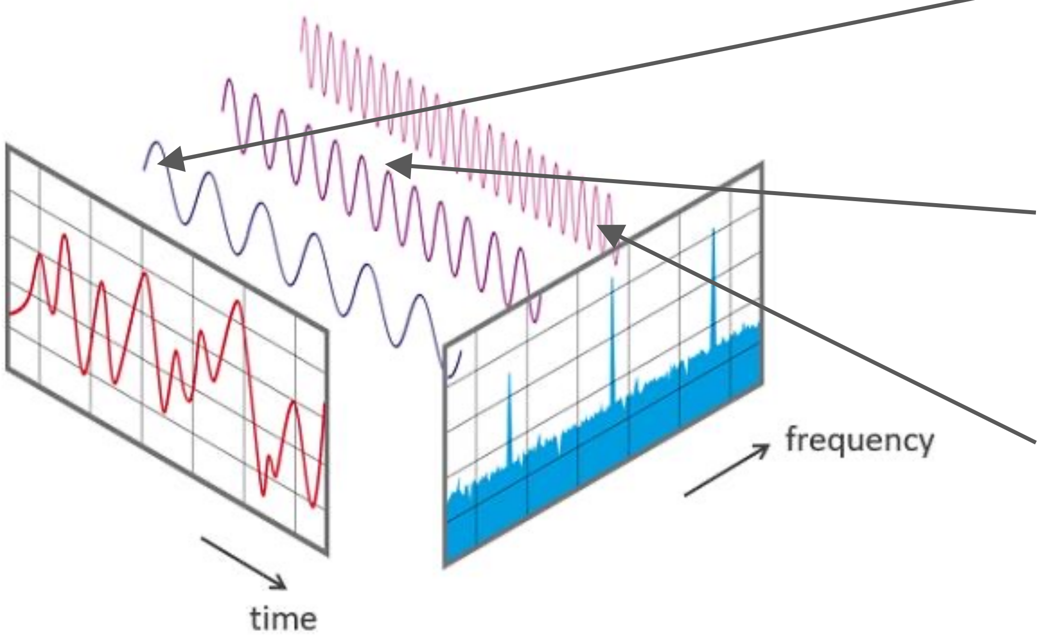
傅里叶级数 - 圆周运动的投影

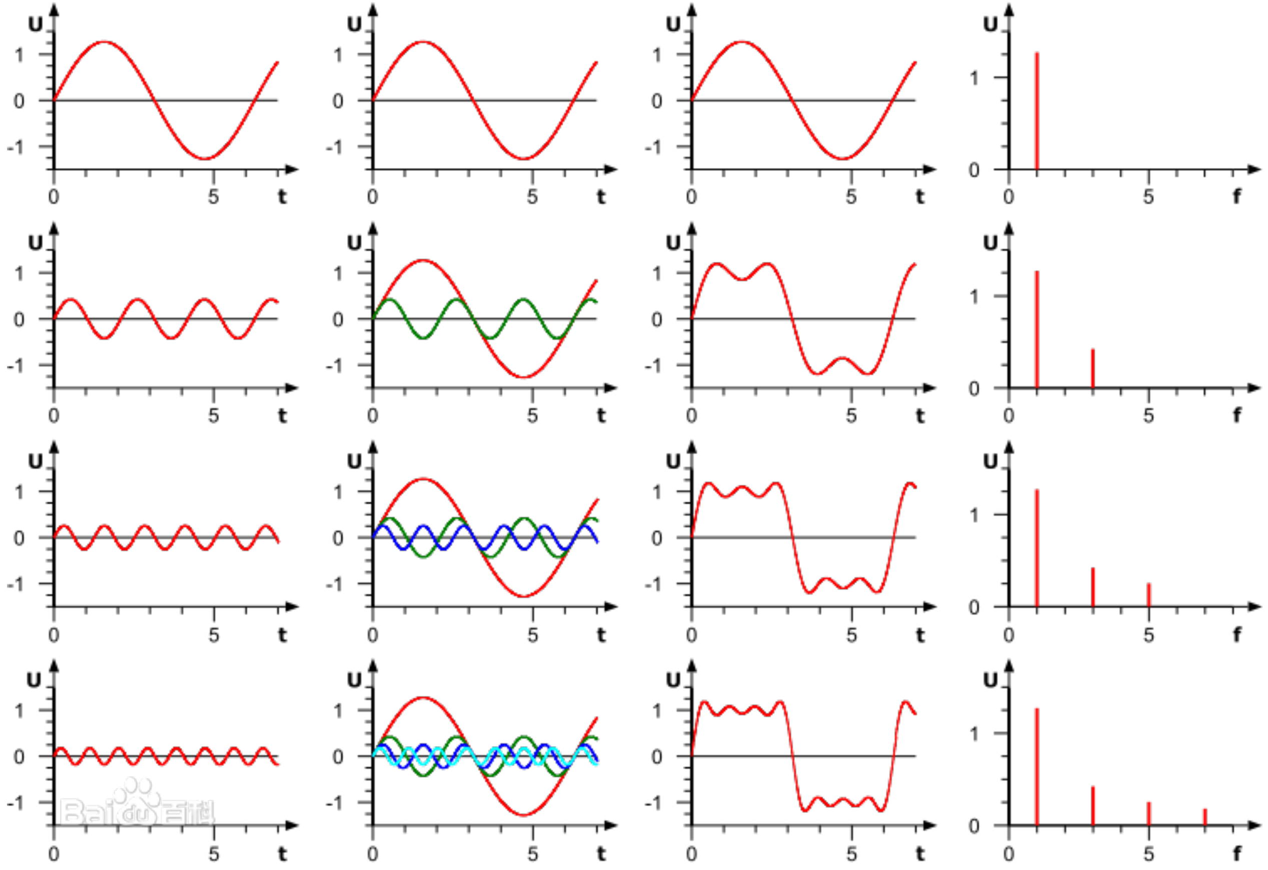
正弦波或者余弦波都是一个圆周运动在一条直线上的投影。所以傅里叶级数基本单元也可以理解为一系列始终在旋转的圆。



傅里叶级数

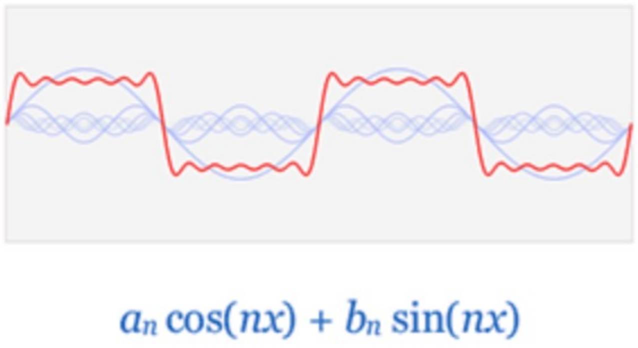
泰勒级数将任何函数表示为无限的单项之和；**傅里叶级数**可将任何周期函数表示为正弦 / 余弦函数之和。

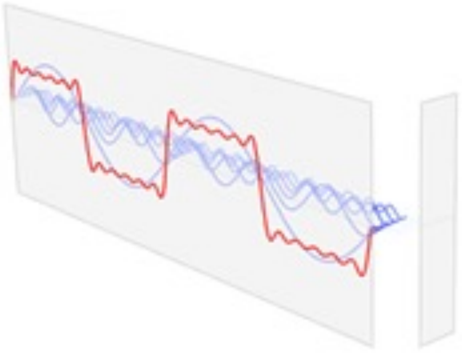


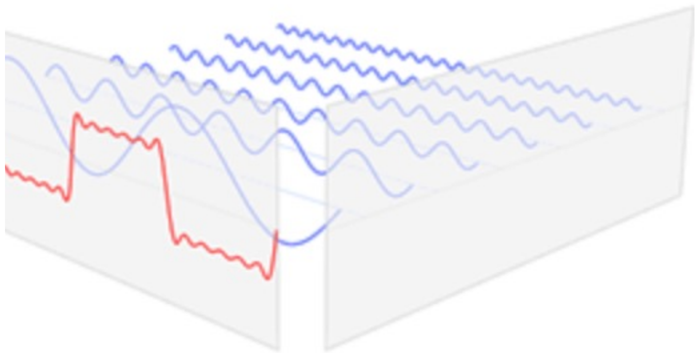


傅里叶级数，在时域是一个周期且连续的函数，而在频域是一个非周期离散的函数。

频域分析 - 分解周期函数



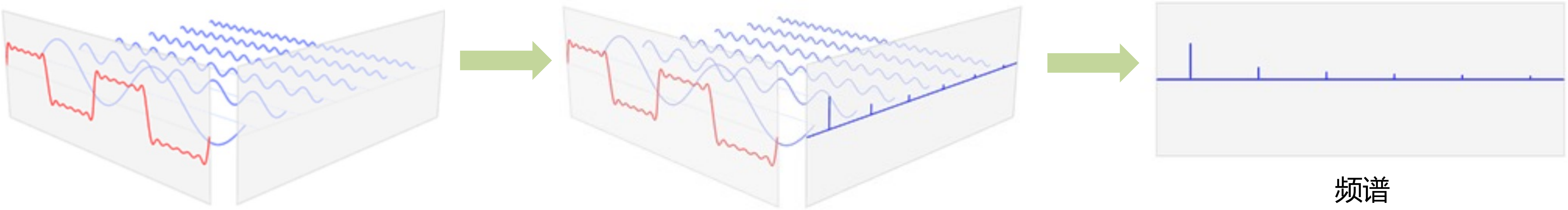




这些正弦波（正弦函数）和正弦波（余弦函数）按照频率从低到高从前向后排列。

Calvin，QQ: 179209347 Mail: 179209347@qq.com

频域分析 - 频谱



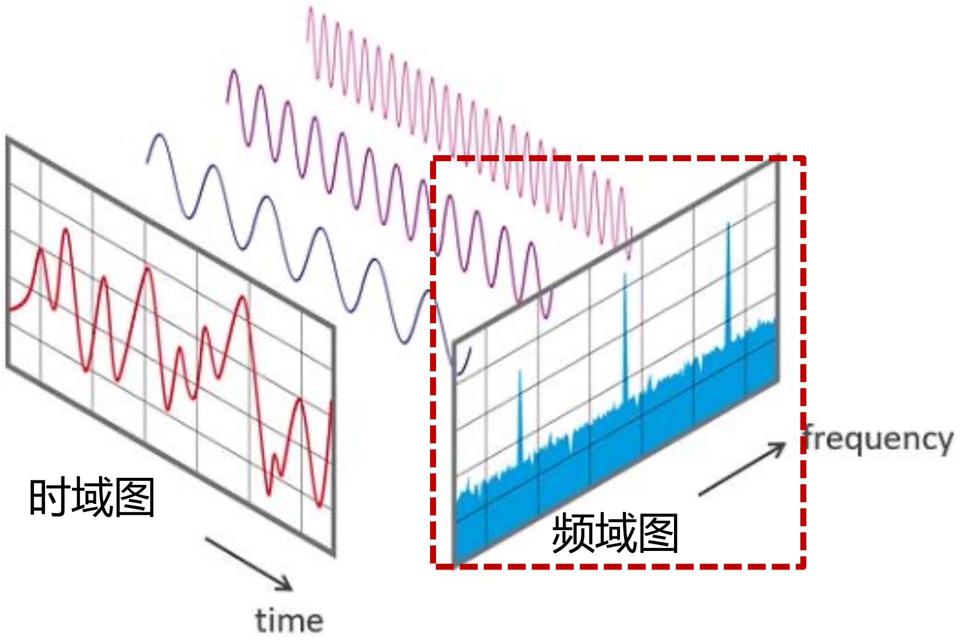
频谱

这些按照频率从低到高从前向后排列的周期函数，投影形成的频域图像就是频谱。
其中每一个波的振幅都是不同的。

傅里叶变换

傅立叶变换使我们可以将信号分解为单个频率和频率幅度。 换句话说，它将信号**从时域转换到频域**，结果称为频谱。

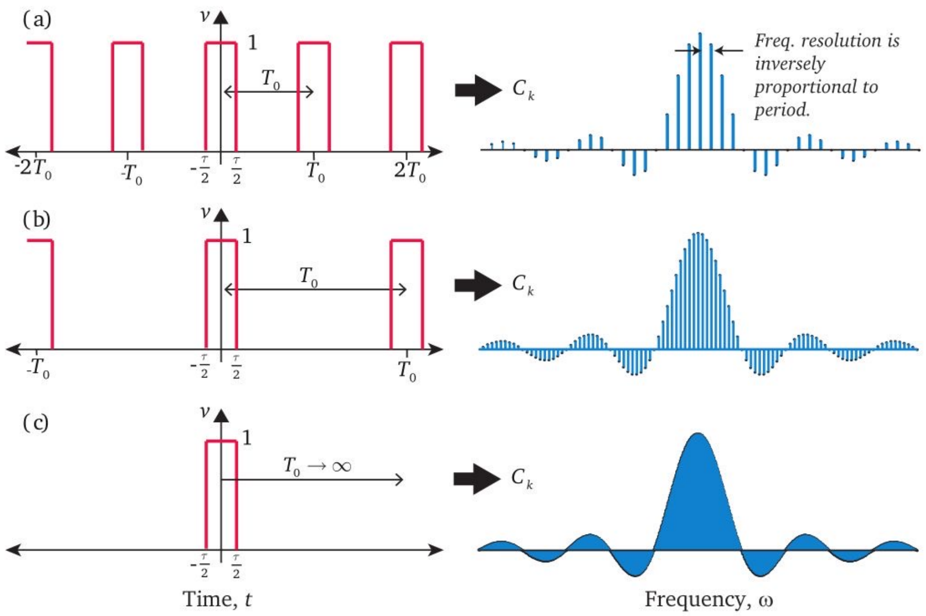
时域分析：
以时间作为参照来观察动态世界的方法。



频域分析：
应用频率特性研究线性系统的经典方法。

傅里叶变换

傅里叶变换，是将一个时域非周期的连续信号，转换为一个在频域非周期的连续信号。
也可以理解为对一个周期无限大的函数进行傅里叶变换。



随着周期T增加，频域图越来越密集。当$T=\infty$时，得到傅立叶变换，频域图变为连续曲线。因此在傅里叶变换在频域上就从离散谱变成了连续谱。

傅里叶变换

快速傅里叶变换（FFT）是一种可以有效计算傅立叶变换的算法，它广泛用于信号处理。

傅立叶级数的复数形式

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{i\frac{2\pi n}{T}x}$$

其中：

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\, e^{-i\frac{2\pi n}{T}x} dx$$

傅立叶变换

当 $T = \infty$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega x} d\omega$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x} dx$$

两者称为傅立叶变换对，可以相互转换：

$$f(x) \Leftrightarrow F(\omega)$$

离散傅里叶变换（DFT）

Qubits
qubits.top

离散傅里叶变换（DFT - Discrete Fourier Transform ）是离散傅里叶级数（DFS）引申出来的， 这二者的时域、频域都是离散的，因而它们的时域、频域又必然是周期的。但是 DFT 是有限长序列。

离散傅里叶变换和傅里叶变换一样，也是从时域到频域，它是把一组复数 $\{x_n\} = x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}$ 变换到另一组复数 $\{X_n\} = X_0, X_1, \ldots, X_{N-1}$ ：

$$X_k = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} x_n \cdot e^{-i\frac{2\pi kn}{N}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} x_n \cdot [\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) - i\sin(\frac{2\pi kn}{N})]$$

其中， $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$

Calvin, QQ: 179209347 Mail: 179209347@qq.com

离散傅里叶变换（DFT）

把一组复数 $\{x_n\} = x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$ 变换到另一组复数 $\{X_n\} = X_0, X_1, \dots, X_{N-1}$：

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-i\frac{2\pi kn}{N}} \qquad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$\begin{aligned}
k = 0,\quad & X_0 = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{N-1} \\
k = 1,\quad & X_1 = x_0 + \omega^{1*1}x_1 + \omega^{1*2}x_2 + \cdots + \omega^{1*(N-1)}x_{N-1} \\
k = 2,\quad & X_2 = x_0 + \omega^{2*1}x_1 + \omega^{2*2}x_2 + \cdots + \omega^{2*(N-1)}x_{N-1} \\
\dots & \\
k = N-1,\quad & X_{N-1} = x_0 + \omega^{N-1}x_1 + \omega^{(N-1)*2}x_2 + \cdots + \omega^{(N-1)*2}x_{N-1}
\end{aligned}$$

其中：$\omega = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$

DFT: $X = Wx$

$$X = \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_{N-1} \end{bmatrix} = Wx = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^{2*1} & \omega^{2*2} & \dots & \omega^{2*(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{(N-1)*2} & \dots & \omega^{(N-1)*(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{N-1} \end{bmatrix}$$

ω 的一些性质

$\omega = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$ 的一些性质：

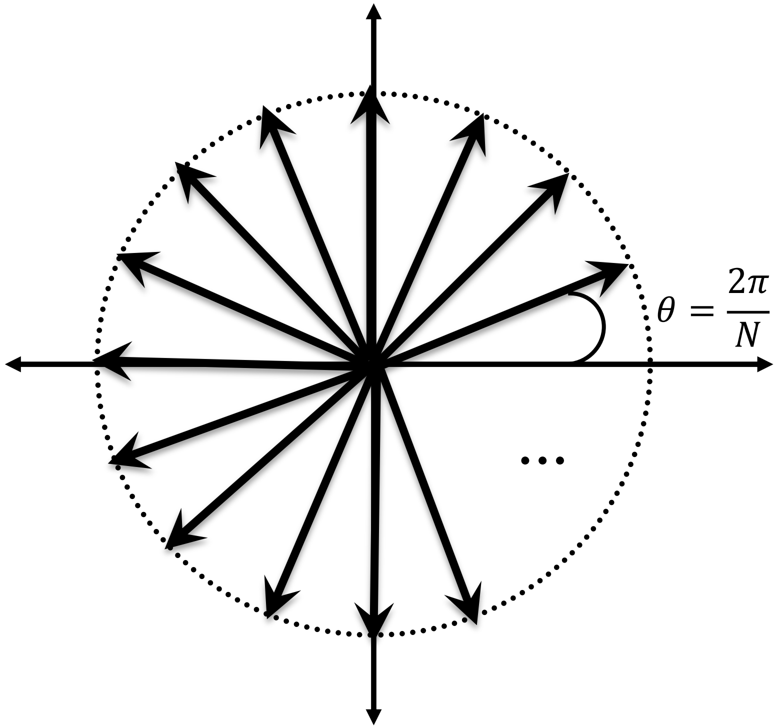
- $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\cdots+\omega^{N-1} = \frac{1-\omega^N}{1-\omega} = \frac{1-e^{-i\frac{2\pi}{N}N}}{1-\omega} = 0$
- $1+\omega^{1*n}+\omega^{2*n}+\omega^{3*n}+\cdots+\omega^{(N-1)n} = \begin{cases} 0. & n \neq 0 \\ N & n = 0 \end{cases}$
- $\frac{1-\omega^{Nn}}{1-\omega^n} = \frac{1-e^{-i\frac{2\pi}{N}Nn}}{1-\omega^n} = \frac{1-e^{-i2n\pi}}{1-\omega^n} = 0 \ \ (n \neq 0)$
- ω 的共轭转置为：

$$\omega^{\dagger} = e^{i\frac{2\pi}{N}} = \omega^{-1}$$

等比数列求和公式：

$S_n = a_1\frac{1-q^n}{1-q}$

$e^{-i2n\pi} = \cos 2n\pi - i\sin 2n\pi = 1$



$\omega, \omega^2, \omega^3 \ldots, \omega^N$ 是 $x^N=1$ 的 N 个解。

W 矩阵的性质 - 转置共轭

因为：

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega^{1} & \omega^{2} & \cdots & \omega^{(N-1)} \\ 1 & \omega^{2*1} & \omega^{2*2} & \cdots & \omega^{2*(N-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \omega^{(N-1)} & \omega^{(N-1)*2} & \cdots & \omega^{(N-1)*(N-1)} \end{bmatrix}$$

$$\omega^{\dagger} = e^{i\frac{2\pi}{N}} = \omega^{-1}$$

所以 W 的转置共轭：

$$W^{\dagger} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega^{-1} & \omega^{-2} & \cdots & \omega^{-(N-1)} \\ 1 & \omega^{-2*1} & \omega^{-2*2} & \cdots & \omega^{-2*(N-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \omega^{-(N-1)} & \omega^{-(N-1)*2} & \cdots & \omega^{-(N-1)*(N-1)} \end{bmatrix}$$

W 矩阵的性质

Qubits qubits.top

由于：

$$1+\omega^{1*n}+\omega^{2*n}+\omega^{3*n}+\cdots+\omega^{(N-1)n}=\begin{cases}0. & n\neq 0\\ N & n=0\end{cases}$$

所以有：

$$WW^{\dagger}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \omega^{1} & \omega^{2} & \cdots & \omega^{(N-1)}\\ 1 & \omega^{2*1} & \omega^{2*2} & \cdots & \omega^{2*(N-1)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & \omega^{(N-1)} & \omega^{(N-1)*2} & \cdots & \omega^{(N-1)*(N-1)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \omega^{-1} & \omega^{-2} & \cdots & \omega^{-(N-1)}\\ 1 & \omega^{-2*1} & \omega^{-2*2} & \cdots & \omega^{-2*(N-1)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & \omega^{-(N-1)} & \omega^{-(N-1)*2} & \cdots & \omega^{-(N-1)*(N-1)}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}N & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & N & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & N & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N\end{bmatrix}=N\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}=NI_N$$

即：

$$WW^{\dagger}=NI_N$$

同样可得：

$$W^{\dagger}W=NI_N$$

W 矩阵的性质

由于：

$$W^{\dagger}W = WW^{\dagger} = N\, I_N$$

所以有：

$$(\frac{1}{\sqrt{N}}W)^{\dagger}(\frac{1}{\sqrt{N}}W) = (\frac{1}{\sqrt{N}}W)(\frac{1}{\sqrt{N}}W)^{\dagger} = I_N$$

从公式可知， $\frac{1}{\sqrt{N}}W$ **为幺正矩阵，于是有：**

$$(\frac{1}{\sqrt{N}}W)^{-1} = (\frac{1}{\sqrt{N}}W)^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{N}}W^{\dagger}$$

逆离散傅里叶变换（IDFT）

由于： **DFT:** $X = Wx$ $\quad W^{\dagger}W = WW^{\dagger} = NI_N$

所以有： $W^{\dagger}X = W^{\dagger}Wx \rightarrow W^{\dagger}X = NI_N x \rightarrow x = \frac{1}{N}W^{\dagger}X$

于是，我们得到了逆离散傅里叶变换（IDFT）公式：

$$
\begin{aligned}
x_n &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} X_k \cdot e^{i\frac{2\pi kn}{N}} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} X_k \cdot [\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) + i\sin(\frac{2\pi kn}{N})]
\end{aligned}
$$

其中，$n = 0, 1,2, \dots, N-1$

逆离散傅里叶变换（IDFT）

IDFT: $x = \frac{1}{N} W^{\dagger} X \quad \rightarrow \quad x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot e^{i\frac{2\pi kn}{N}}$

$$x = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{N} W^{\dagger} X = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^{2*1} & \omega^{2*2} & \cdots & \omega^{2*(N-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{(N-1)*2} & \cdots & \omega^{(N-1)*(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ \cdots \\ X_{N-1} \end{bmatrix}$$

其中，$\omega = e^{i\frac{2\pi}{N}}$

量子傅里叶变换（QFT）

量子傅里叶（Fourier）变换要点

1. 量子傅里叶变换是对量子力学振幅进行傅里叶变换的有效算法。
2. 量子傅里叶变换（QFT）实质上是经典的逆离散傅里叶变换（IDFT）的量子版本。
3. 量子傅里叶变换/逆变换，实质上可以视为一种振幅和基向量的相互转化。
4. 量子傅里叶变换**不加速计算经典数据的傅里叶变换**, 但它可以用做相位估计。

参考来源：https://pyqpanda-toturial.readthedocs.io/zh/latest/QFT.html

量子傅里叶变换（QFT）

经典的逆离散傅里叶变换（IDFT）：

$$x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot e^{i\frac{2\pi kn}{N}}$$

量子傅里叶变换（QFT）：

实质是经典的逆离散傅里叶变换（IDFT）的量子版本，可以简单地通过对 IDFT 进行替换得到。等价的，转换为基态作用表示形式，即，量子傅里叶变换作用在 $N = 2^n$ 个正交基 $|0\rangle, |1\rangle, \cdots, |N-1\rangle$ 上：

$$|x\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{k=0}^{2^n-1} e^{i\frac{2\pi kx}{2^n}}|k\rangle,\ x = 0,1,\ldots, N-1$$

即： $$QFT|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{k=0}^{2^n-1} e^{i\frac{2\pi kx}{2^n}}|k\rangle$$

* 这里系数换成 $\frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{2^n}}$，其目的是做**归一化处理**。使得 $QFT = \frac{1}{\sqrt{N}}W^{\dagger}$ 为**幺正变换**。

量子傅里叶变换（QFT）

由于： $$QFT|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{k=0}^{2^n-1} e^{i\frac{2\pi kx}{2^n}}|k\rangle$$

所以有： $$\sum_{j=0}^{N-1} x_j\,|x\rangle \rightarrow \sum_{k=0}^{N-1} y_k\,|k\rangle,\quad \text{其中 } y_k = \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{j=0}^{2^n-1} x_j e^{i\frac{2\pi kj}{2^n}}$$

对于 n 个量子比特 $|x_1x_2\,x_3\ldots\,x_n\rangle$，它的状态可用这 N 个正交基的线性组合表示。

$$|q_1q_2\,q_3\ldots\,q_n\rangle = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle + \cdots + a_{N-1}|N-1\rangle$$

由定义可知，在量子态幅度上执行离散傅里叶变换：
空间 $\{|x\rangle\}$ 中的某个向量 $\sum_{j=0}^{N-1} x_j\,|x\rangle$ 通过傅里叶变换，
可以表示为另一个等价空间 $\{|k\rangle\}$ 中基向量的线性组合 $\sum_{j=0}^{N-1} y_k\,|k\rangle$,
且线性组合的系数 y_k 由 $|x\rangle$ 和 x_j 决定。

量子傅里叶变换（QFT）

$$QFT|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{k=0}^{2^n-1} e^{i\frac{2\pi kx}{2^n}}|k\rangle$$

N 比特的傅里叶变换的矩阵：

$$QFT = \frac{1}{\sqrt{N}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^{2*1} & \omega^{2*2} & \cdots & \omega^{2*(N-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{(N-1)*2} & \cdots & \omega^{(N-1)*(N-1)} \end{bmatrix}$$

其中，$\omega = e^{i\frac{2\pi}{N}}$

量子态的二进制表示

计算基矢态的二进制表示

设 n 个量子位的计算基量子态向量为 $|k\rangle$, 则其二进制展开 $k = \sum_{i=0}^{n} k_i\, 2^{n-i}$ 为：

$$k = k_1 k_2 \ldots k_n \qquad k = 110$$

$$k = k_1 2^{n-1} + k_2 2^{n-2} + \ldots + k_n 2^0 \qquad k = 1*2^2 + 1*2^1 + 0*2^0$$

二进制分数的表示

$$0.\, k_l k_{l+1} \ldots k_m$$

$$k_l/2^1 + k_{l+1}/2^2 + \ldots + k_m/2^{m-l+1}$$

QFT的求和形式与张量积形式

对任给整数 k ，由二进制展开 $k=\sum_{i=0}^{n} k_i\, 2^{n-i}$ ，对 $|x\rangle$ 进行量子傅里叶变换的结果可表示为：

整数部分： $k_1k_2\ldots k_n = k_1 2^{n-1} + k_2 2^{n-2} + \ldots + k_n 2^0$

小数部分：$0.k_1k_2\ldots k_\mathrm{n} = \frac{k_1}{2^1} + \frac{k_2}{2^2} + \ldots + \frac{k_n}{2^n}$

$$x2^{-l} = x_1 2^{n-1-l} + x_2 2^{n-2-l} + \ldots + x_n 2^{0-l}$$
$$x2^{-l} = q\ (\text{整数部分}) + p(\text{小数部分})$$
$$e^{i2\pi q} = \cos(2\pi q) + i\sin(2\pi q) = 1$$
$$e^{i2\pi x} = e^{i2\pi(q+p)} = e^{i2\pi q}\, e^{i2\pi p} = e^{i2\pi p}$$

$$\begin{aligned}
QFT|x\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{k=0}^{2^n-1} e^{i\frac{2\pi kx}{2^n}}|k\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{k=0}^{2^n-1} e^{i2\pi x\frac{k_1 2^{n-1} + k_2 2^{n-2} + \ldots + k_n 2^0}{2^n}}|k_1k_2\ldots k_n\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{k=0}^{2^n-1} e^{i2\pi x\,(\frac{k_1}{2^1} + \frac{k_2}{2^2} + \ldots + \frac{k_n}{2^n})}|k_1k_2\ldots k_n\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{k_1=0}^{1}\sum_{k_2=0}^{1}\ldots\sum_{k_n=0}^{1} e^{i2\pi x\,(\sum_{l=1}^{n} k_l 2^{-l})}\,|k_1k_2\ldots k_n\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{k_1=0}^{1}\sum_{k_2=0}^{1}\ldots\sum_{k_n=0}^{1} \otimes_{l=1}^{n} e^{i2\pi x k_l 2^{-l}}|k_1k_2\ldots k_n\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^n}}\otimes_{l=1}^{n}(\sum_{k_l=0}^{1} e^{i2\pi x k_l 2^{-l}}|k_l\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^n}}\ \otimes_{l=1}^{n}(|0\rangle + e^{i2\pi x 2^{-l}}|1\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^n}}\otimes_{l=1}^{n}(|0\rangle + e^{i2\pi q}e^{i2\pi p 2^{-l}}|1\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^n}}\big(|0\rangle + e^{2\pi i 0.x_n}|1\rangle\big)\big(|0\rangle + e^{2\pi i 0.x_{n-1}x_n}|1\rangle\big)\ldots\big(|0\rangle + e^{2\pi i 0.x_1x_2\ldots x_n}|1\rangle\big)
\end{aligned}$$

QFT的求和形式与张量积形式

直积形式

$$|x_1x_2\ldots x_N\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2^n}}\left(|0\rangle + e^{2\pi i 0.x_n}|1\rangle\right)\left(|0\rangle + e^{2\pi i 0.x_{n-1}x_n}|1\rangle\right)\ldots\left(|0\rangle + e^{2\pi i 0.x_1x_2\ldots x_n}|1\rangle\right)$$

由上式可知， QFT 不仅可以将特定量子态 $|x\rangle$ 表示为另一组基的线性组合，这个线性组合还能表示为多个单比特量子态 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i2\pi x2^{-l}}|1\rangle)$ 的张量积。

因此对任给整数 x，如果可以由二进制展开位 $|x_{n+1-l}\rangle$ 快速构造量子态 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i2\pi x2^{-l}}|1\rangle)$ ，那么就可以通过张量积形式的 QFT 表达式完成相应 QFT 量子线路的构造。

二进制展开与量子态制备

$$|x_1x_2 \dots x_N\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2^n}} \left(|0\rangle + e^{2\pi i 0.x_n}|1\rangle\right)\left(|0\rangle + e^{2\pi i 0.x_{n-1}x_n}|1\rangle\right) \dots \left(|0\rangle + e^{2\pi i 0.x_1x_2 \dots x_n}|1\rangle\right)$$

制备 $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{i2\pi x 2^{-l}}|1\rangle\right)$ 转化为制备 $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{2\pi i 0.x_{n+1-l}\dots x_n}|1\rangle\right)$

由于：

$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{2\pi i[0.x_n]}|1\rangle\right)$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{2\pi i[0.x_{n-1}x_n]}|1\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{2\pi i[0.x_{n-1}]}e^{2\pi i[0.0x_n]}|1\rangle\right)$

$R_m|0\rangle = |0\rangle$，$R_m|1\rangle = e^{2\pi i/2^{m}}|1\rangle$

R_k 逻辑门

$$R_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/2^k} \end{bmatrix}$$

且定义受控旋转量子门 $(Ctrl - R)_{j-k+1}$ 满足：

$$(Ctrl - R)_{j-k+1} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{2\pi i[0.x_{n-j}]}|1\rangle\right)|x_{n-k}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{2\pi i[0.x_{n-j}0\dots0x_{n-k}]}|1\rangle\right)$$

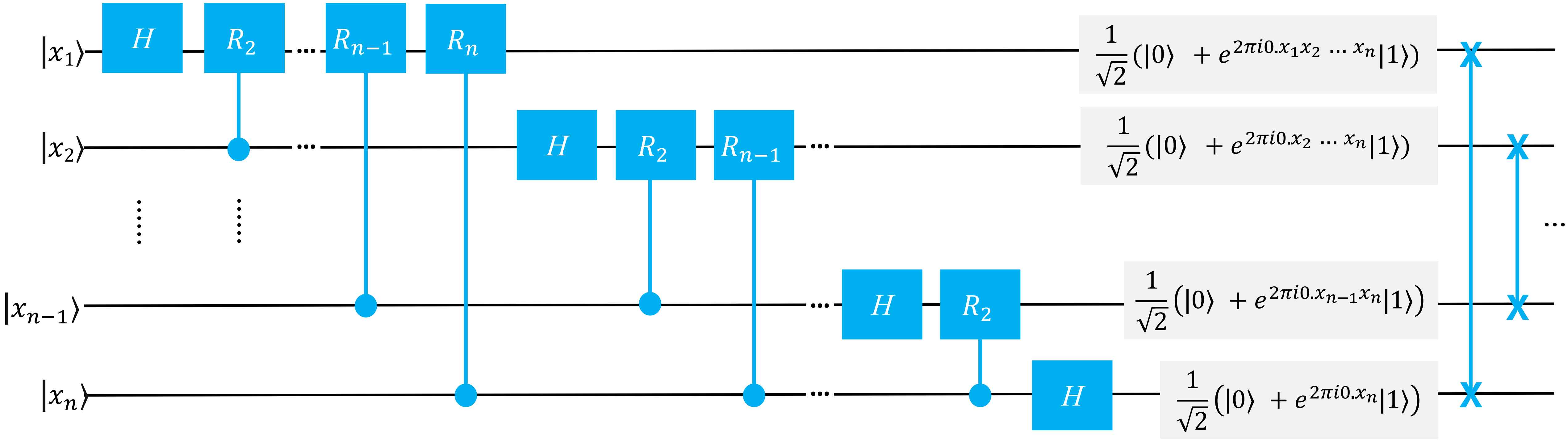
于是利用量子门 H 和 $(Ctrl - R)_{j-k+1}$ 就可以完成对量子态 $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{i2\pi x 2^{-l}}|1\rangle\right)$ 的制备，进而完成 QFT 的量子线路。

参考来源：https://pyqpanda-toturial.readthedocs.io/zh/latest/QFT.html

QFT的量子线路图

R_k 逻辑门

$$R_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/2^k} \end{bmatrix}$$



上图中初始量子态为 $|x_i\rangle$ 的量子比特对应的结果量子态为 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i2\pi x 2^{n+1-l}}|1\rangle)$，而非 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i2\pi x 2^{-l}}|1\rangle)$，所以线路后面还需多组 $SWAP$ 门。

Calvin，QQ: 179209347 Mail: 179209347@qq.com

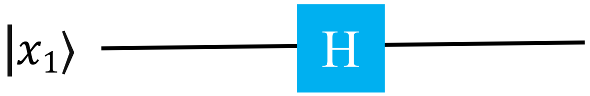
1 量子比特 QFT 线路

Hadamard 门，简称 H 门：

$$\text{矩阵形式 H} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$QFT = \frac{1}{\sqrt{N}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{N-1}\\ 1 & \omega^{2*1} & \omega^{2*2} & \cdots & \omega^{2*(N-1)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{(N-1)*2} & \cdots & \omega^{(N-1)*(N-1)}\end{bmatrix}$$

$x = |x_1\rangle$



$$|x_1\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{\pi i x_1}|1\rangle\right)$$

$$\text{矩阵形式 } QFT = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & \omega\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & e^{i\frac{2\pi}{2}}\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & e^{i\pi}\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

（其中，$\omega = e^{i\frac{2\pi}{2}}$）

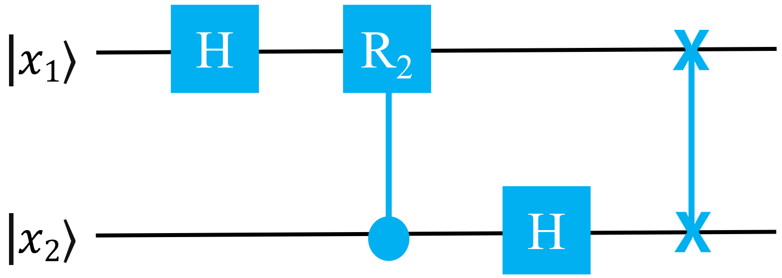
所以，1量子比特 QFT 线路就是H 门。

Calvin, QQ: 179209347 Mail: 179209347@qq.com

2 量子比特 QFT 线路

$$QFT = \frac{1}{\sqrt{N}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^{2*1} & \omega^{2*2} & \cdots & \omega^{2*(N-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{(N-1)*2} & \cdots & \omega^{(N-1)*(N-1)} \end{bmatrix}$$

$x = |x_1 x_2\rangle$



矩阵形式 $QFT = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^9 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & e^{i\frac{\pi}{2}} & e^{i\pi} & e^{i\frac{3\pi}{2}} \\ 1 & e^{i\pi} & e^{2i\pi} & e^{3i\pi} \\ 1 & e^{i\frac{3\pi}{2}} & e^{3i\pi} & e^{i\frac{9\pi}{2}} \end{bmatrix}$ （其中，$\omega = e^{i\frac{2\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}}$）

$$|x_1\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{\pi i x_1}|1\rangle\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{\pi i x_1} e^{\frac{\pi i x_2}{2}}|1\rangle\right)$$

$$|x_2\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{\pi i x_2}|1\rangle\right)$$

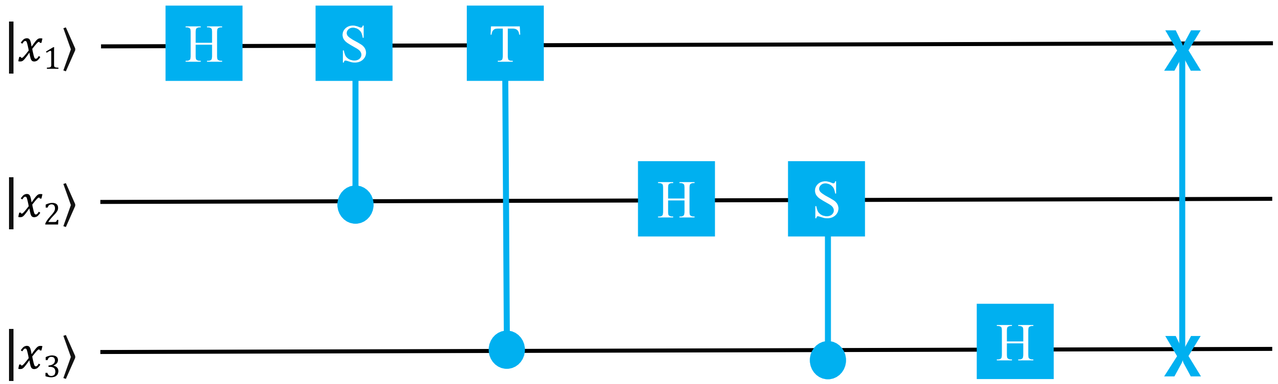
$SWAP$ 门后的量子态：

$$\frac{1}{2}\left(|0\rangle + e^{\pi i x_2}|1\rangle\right)\left(|0\rangle + e^{\pi i (x_1 + \frac{x_2}{2})}|1\rangle\right)$$

Calvin，QQ: 179209347 Mail: 179209347@qq.com

3 量子比特 QFT 线路

$x = |x_1 x_2\, x_3\rangle$



$$|x_1\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{\pi i x_1}|1\rangle\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{\pi i x_1}e^{\frac{\pi i x_2}{2}}|1\rangle\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{\pi i x_1}e^{\frac{\pi i x_2}{2}}e^{\frac{\pi i x_3}{4}}|1\rangle\right)$$

$$|x_2\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{\pi i x_2}|1\rangle\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{\pi i x_2}e^{\frac{\pi i x_3}{2}}|1\rangle\right)$$

$$|x_3\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{\pi i x_3}|1\rangle\right)$$

$SWAP$ 门后的量子态：

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{\pi i x_3}|1\rangle\right)\left(|0\rangle + e^{\pi i (x_2+\frac{x_3}{2})}|1\rangle\right)\left(|0\rangle + e^{\pi i (x_1+\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{4})}|1\rangle\right)$$

R_k 逻辑门：

$$R_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/2^k} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{T} = R_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{S} = R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/2} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{S} = \mathrm{T}^2$$

逆向量子傅里叶变换（IQFT）

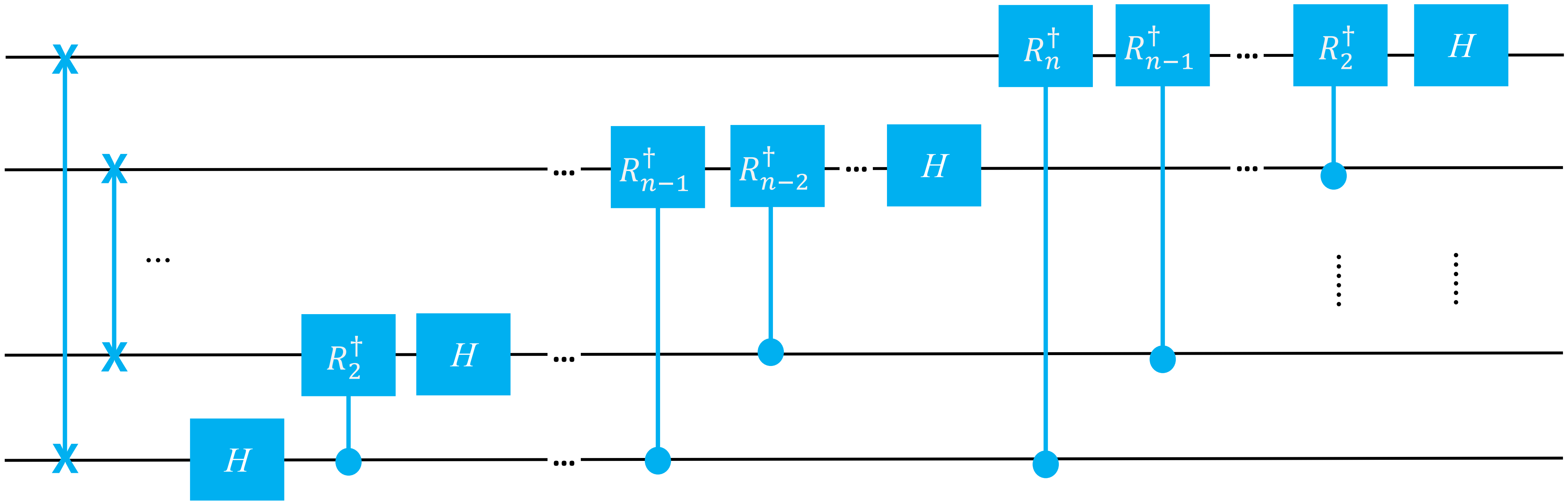
逆向量子傅里叶变换（ Inverse Quantum Fourier transform **）：**

$$\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{k=0}^{2^n-1} e^{i\frac{2\pi kx}{2^n}}|k\rangle \rightarrow |x\rangle$$

逆向旋转逻辑门：

$$\boldsymbol{R_k^\dagger} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i/2^k} \end{bmatrix}$$

逆向量子傅里叶变换（IQFT）量子线路图



$$\boldsymbol{R}_k^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i/2^k} \end{bmatrix}$$

Calvin, QQ: 179209347 Mail: 179209347@qq.com

Qubits
qubits.top

Thank You