量子计算

—数学基础

Quantum Computer

网址：www.qubits.top

Calvin Tang

179209347@qq.com

Qubits
qubits.top

介绍

教程简介：
- 面向对象：量子计算初学者
- 依赖课程：线性代数，解析几何，量子力学（非必需）

知乎专栏：
https://www.zhihu.com/column/c_1501138176371011584

Github & Gitee 地址：
https://github.com/mymagicpower/qubits
https://gitee.com/mymagicpower/qubits

*** 版权声明：**
- 仅限用于个人学习，或者大学授课使用
- 禁止用于任何商业用途

目录

CONTENTS

酉（幺正）变换性质

1. $UU^{\dagger}=U^{\dagger}U=I \Rightarrow U^{\dagger}=U^{-1}$

2. 如果： $U \in \mathbb{C}^{nxn}$ 是幺正矩阵，对于所有的 $v, w \in \mathbb{C}^{n}$

$< Uv, Uw> \; = \; < v, w > \quad < Uv, w > \; = \; < v, U^{\dagger} w >$

证明：$< Uv, Uw> = (U\,v)^{\dagger}\,(U\,w) = v^{\dagger}U^{\dagger}Uw == v^{\dagger}Iw = < v, w>$

3. 如果： $U \in \mathbb{C}^{nxn}$ 是幺正矩阵，对于所有的 $v \in \mathbb{C}^{n}$

$||Uv|| = ||v||$

证明：$||Uv|| = \sqrt{<Uv, Uv>} = \sqrt{< v, v>} = ||v||$

4. 如果： $U \in \mathbb{C}^{nxn}$ 是幺正矩阵，对于所有的 $v, w \in \mathbb{C}^{n}$

$d(U\,v, Uw) \; = \; d(\,v, w)$

证明：$d(Uv, Uw) = |U\,v - Uw| = |U(v - w)| = \; |\,v - w| = d(v, w)$

酉（幺正）变换性质

5. $< U\nu, U\nu> \ = \ < \nu, U^\dagger U \nu > \ = \ < \nu, \nu > \ = \|\nu\|^2$

6. 如果： $U \in \mathbb{C}^{nxn}$ 是幺正矩阵，存在另一个幺正矩阵 V,和幺正对角阵 $D \in \mathbb{C}^{nxn}$

$$U = V^\dagger D V$$
$$D = VUV^\dagger$$

狄拉克符号

$$\langle v| = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix}^{\dagger} = [\overline{v_1} \;\; \overline{v_2} \;\; \dots \;\; \overline{v_n}]$$

$$|w\rangle = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_m \end{bmatrix}$$

$$|w\rangle\langle v| = \begin{bmatrix} w_1\overline{v_1} & \cdots & w_1\overline{v_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_m\overline{v_1} & \cdots & w_m\overline{v_n} \end{bmatrix}$$

$$\langle v|w\rangle = \langle v||w\rangle = (\langle v|)(|w\rangle)$$

当 $n = m$ 时：

$$\langle v|w\rangle = \langle v\,,w\rangle = \overline{v_1}w_1 + \overline{v_2}w_2 + \dots + \overline{v_n}w_n$$

ν的长度为：

$$||\nu|| = \sqrt{<\nu,\nu>}$$

共轭

$$[v_1 \ \ v_2 \ \ \ldots \ \ v_n]^{\dagger} = \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \ldots \\ \bar{v}_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \ldots \\ v_n \end{bmatrix}^{\dagger} = [\bar{v}_1 \ \ \bar{v}_2 \ \ \ldots \ \ \bar{v}_n]$$

$(vu)^* = u^* v$

$(u + v)^* = u^* + v^*$

$(\lambda u)^* = \bar{\lambda} u^*$

$(y|ux) = (u^*y|x)$

$||u|| = ||u^*||$

$||u||^2 = ||u^*u|| = ||uu^*||$

厄米共轭算符公式

给定一个线性算符 A，它的厄米共轭算符（转置共轭）定义为：

$$\langle u|A|v\rangle = \langle A^{\dagger}u|v\rangle = \langle v|A^{\dagger}|u\rangle^{*} \qquad A^{\dagger} = (A^{*})^{T}$$

由上述定义可得：

$$\langle e_j|A|e_k\rangle = \langle e_k|A^{\dagger}|e_j\rangle^{*}$$

于是有：

$$(c^{\dagger})_{jk} = c^{*}{}_{kj}$$

根据上述定义，可得：

$$|x\rangle^{\dagger} = (x_1^{*},\ldots,x_n^{*}) = \langle x|$$

$$(\textstyle\sum_i a_i A_i)^{\dagger} = \sum_i a_i^{*} A_i^{\dagger} \qquad (cA)^{\dagger} = c^{*}A^{\dagger} \quad (\mathrm{A}+\mathrm{B})^{\dagger} = \mathrm{A}^{\dagger}+\mathrm{B}^{\dagger} \qquad (\mathrm{AB})^{\dagger} = \mathrm{B}^{\dagger}\mathrm{A}^{\dagger}$$

$$(A|v\rangle)^{\dagger} = \langle v|A^{\dagger} \qquad (|u\rangle\langle v|)^{\dagger} = |v\rangle\langle u|$$

$$||\,\langle u|A|v\rangle\,||^{2} = \langle u|A|v\rangle\,\langle v|A^{\dagger}|u\rangle$$

厄米共轭算符公式

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(A-B)^T = A^T - B^T$$

$$(-A)^T = -A^T$$

$$(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

$$(A-B)^\dagger = A^\dagger - B^\dagger$$

$$(-A)^\dagger = -A^\dagger$$

矩阵的迹

$$tr(A+B) = tr\,(A) + tr\,(B)$$

$$tr(dA) = d\ tr\,(A)$$

$$tr(-A) = -\,tr\,(A)$$

$$tr(AB) = tr\,(BA)$$

$$tr(ABC) = tr\,(CAB) = tr\,(BCA)$$

对于方阵：

$$tr(A) = \ tr\,(A^T)$$

$$tr(\bar{A}) = \ tr\,(A^\dagger) = \overline{tr(A)}$$

矩阵的直和

$$v = [v_1\ \ v_2\ \ldots\ \ v_n]$$

$$w = [w_1\ w_2\ \ldots\ \ w_n]$$

$$v \oplus w = [v_1\ \ v_2\ \ldots\ \ v_{n,} w_1\ w_2\ \ldots\ \ w_n]$$

张量积（tensor product）

张量积是两个或多个向量空间张成一个更大向量空间的运算。
在量子力学中，**量子的状态**由希尔伯特空间 (Hilbert spaces) 中的**单位向量**来描述。
本质上复合系统中量子态的演化也是矩阵的乘法，其与单个子系统相比，只是多了张量积的运算。

$$|00\rangle = |0\,,0\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\\0\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$|01\rangle = |0\,,1\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\\0\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$|10\rangle = |1\,,0\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\\1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$|11\rangle = |1\,,1\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\\1\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

张量积 – 重要公式

1. $A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$, $|a\rangle \otimes (|b\rangle + |c\rangle) = |a\rangle \otimes |b\rangle + |a\rangle \otimes |c\rangle$

2. $(A + B) \otimes C = A \otimes C + \mathrm{B} \otimes C$, $(|a\rangle + |b\rangle) \otimes |c\rangle = |a\rangle \otimes |c\rangle + |b\rangle \otimes |c\rangle$

3. $z(|a\rangle \otimes |\mathrm{b}\rangle) = (z|a\rangle) \otimes |\mathrm{b}\rangle = |a\rangle \otimes (z|b\rangle)$ z 为标量

4. $(A \otimes B)^{\dagger} = A^{\dagger} \otimes B^{\dagger}$ $\quad (A \otimes B)^{*} = A^{*} \otimes B^{*}$

5. $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$ $\quad (A \otimes B)^{T} = A^{T} \otimes B^{T}$

6. $tr(A \otimes B) = tr(A)\, tr(B)$

7. $det(A \otimes B) = (detA)^{p}\, (detB)^{m}$

张量积 – 重要公式

1. 不同子空间的张量积的矩阵乘，相当于各自子空间下的矩阵乘，再把结果张量积。

① $(A\otimes B)\,(C\otimes D)=(AC)\otimes(BD)$

② $(A_1\otimes B_1)\,(A_2\otimes B_2)\,(A_3\otimes B_3)=(A_1\,A_2\,A_3)\otimes(B_1\,B_2\,B_3)$

③ $(|a\rangle\langle b|)\otimes(|c\rangle\langle d|)=(|a\rangle\otimes|c\rangle)(\langle b|\otimes\langle d|)=|ac\rangle\langle bd|$ (公式1逆向狄拉克符号写法)

④ $(A\otimes B)\,(|x\rangle\otimes|y\rangle)=A\,|x\rangle\otimes B\,|y\rangle$

⑤ $(A\otimes B)\,(\sum_i c_i|x_i\rangle\otimes|y_i\rangle)=\sum_i c_iA|x_i\rangle\otimes B\,|y_i\rangle$

⑥ $(\sum_i c_iA_i\otimes B_i)\,(|x\rangle\otimes|y\rangle)=\sum_i c_iA_i|\mathrm{x}\rangle\otimes B_i|\mathrm{y}\rangle$

2. $H^{\otimes n}=\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{x,y}(-1)^{x\cdot y}|x\rangle\langle y|$ $(H|0\rangle)^{\otimes n}=\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{x=0}^{2^{\mathrm{n}}-1}|x\rangle$

张量积 – 例子

例如，复合系统 H 由两能级系统 H1 和 H2 复合而成，
在 t1 时刻，两个系统的状态都为 $|0\rangle$ ，则复合系统的状态为 $|00\rangle$；
在 t2 时刻，第一个系统经过 X 门，状态变 为 $|1\rangle$，第二个系统经过 Z 门，状态为 $|0\rangle$，那么复合系统的状态经过的变换用矩阵运算表示为 ：

因为： $X = \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad Z = \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

所以：$X \otimes Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & 1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ 1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

则有：$X \otimes Z\,|00\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |10\rangle$

三角函数公式

两角和与差的三角函数公式：

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp sin\,\alpha\sin\beta$

$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$

$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$

目录

CONTENTS

从线性运算说起

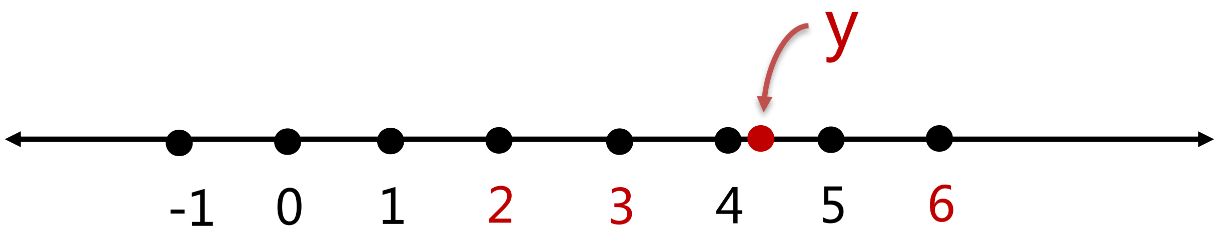
线性运算是**加法**和**数量乘法**， 在实数域像只包含加法和数量乘法二元一次方程就属于线性运算，如：

$$y=ax+b$$

矩阵的线性运算：矩阵的加法和数乘运算
向量的线性运算：向量的加法和数乘运算
它们满足交换律、结合律、分配律等。

对于一个实数轴而言，任意多个实数的线性组合仍然是实数，即其仍在实数轴上，如：

$$y = a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

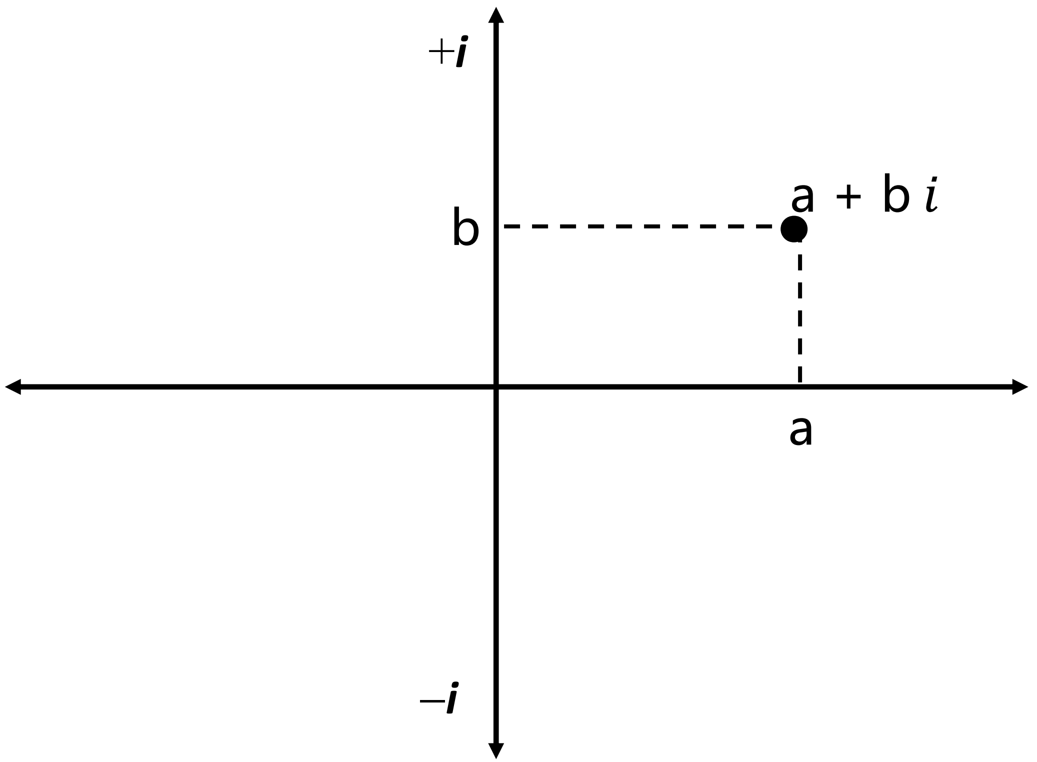


$$y = 1 * 2 + 0.5 * 3 + 0.1 * 6 = 2 + 1.5 + 0.6 = 4.1$$

复平面

对于虚数 i ，我们无法在实数轴上线性运算获得，也就是说**与实数线性无关。**而线性无关意味着虚数 i 在与实数轴垂直的一个数轴上：

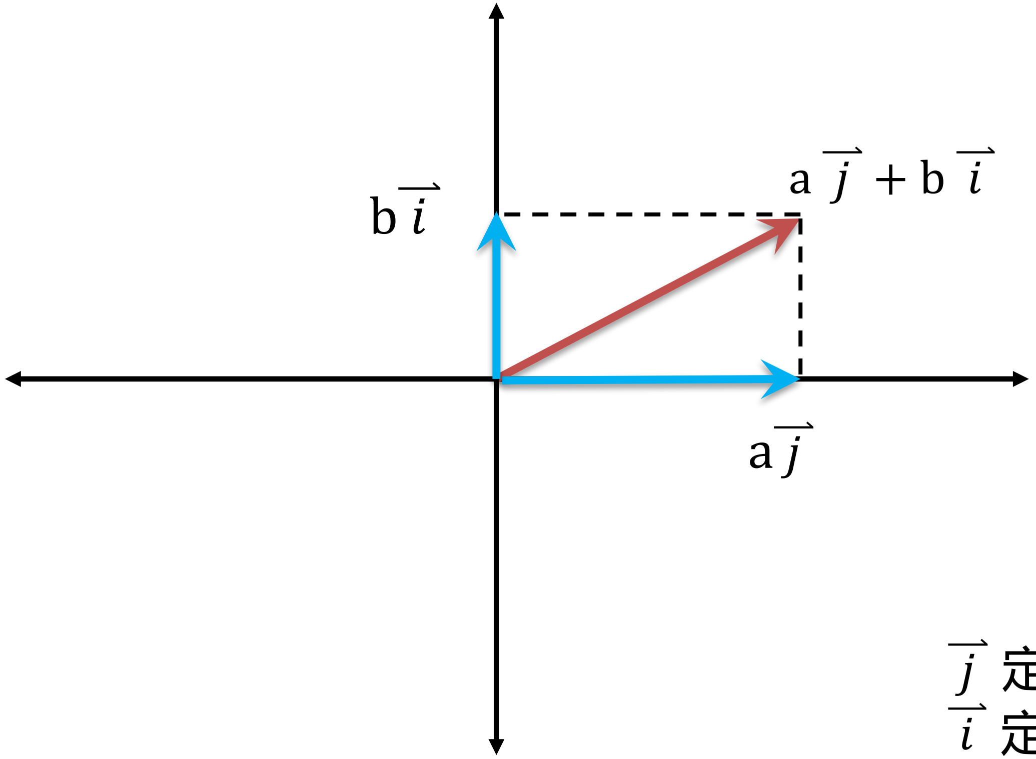
对于复数 a + b i，其在复平面里的坐标表示如下：



复数向量表示

如果我们用向量来理解的话，复数 a + b i可以表示为，向量 a $\vec{j}$ 和 b $\vec{i}$ 的线性组合：

$$a\,\vec{j} + b\,\vec{i} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$



$\vec{j}$ 定义为实数轴单位向量，单位长度为 1
$\vec{i}$ 定义为虚数轴单位向量，单位长度为 i

复数向量三角函数表示

如右图所示，如果将向量长度定义为 r，且 r = $\sqrt{a^2+b^2}$ ，则根据三角函数有：

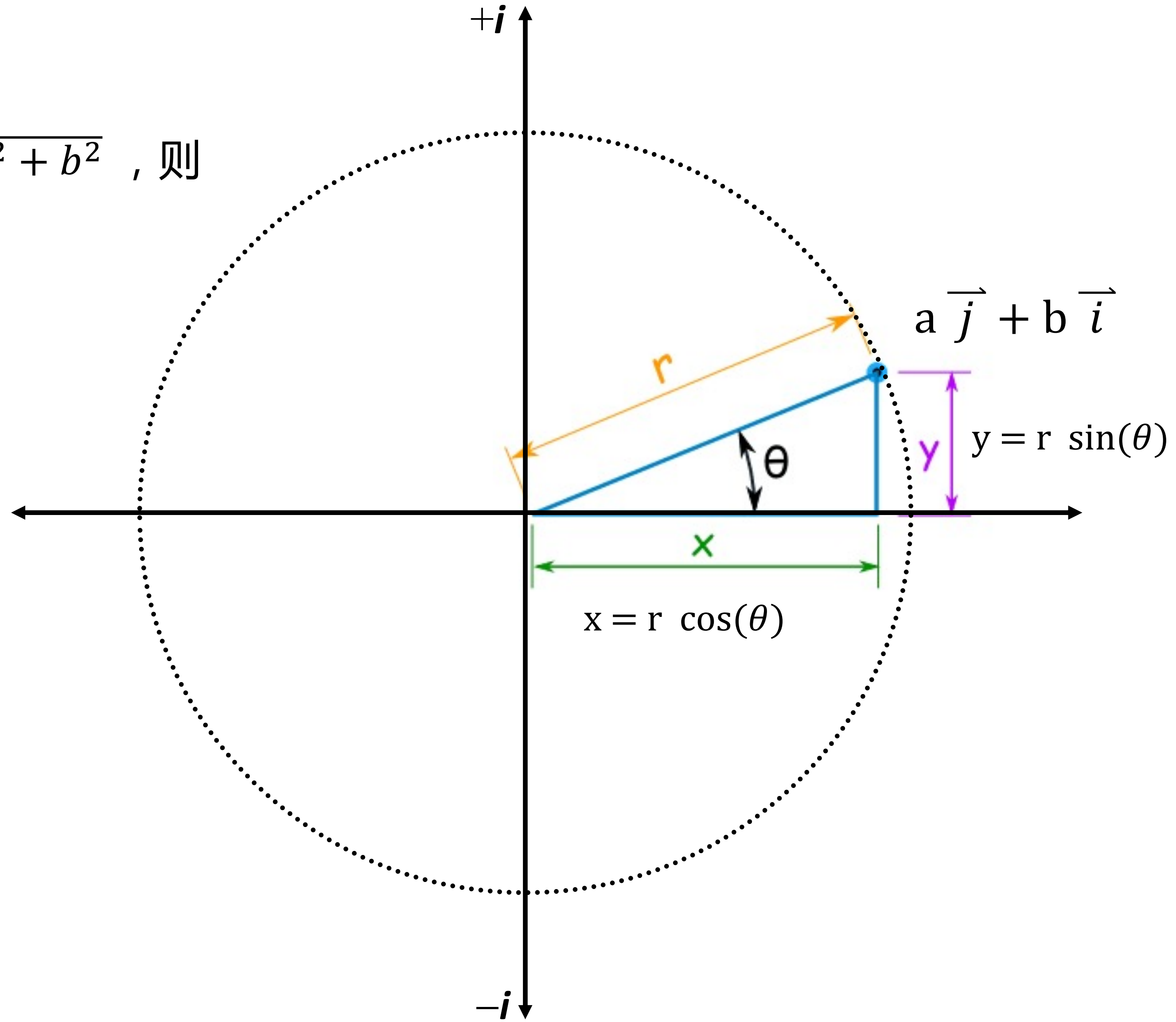
- a = $r\cos(\theta)$
- b = $r\sin(\theta)$

那么复数 c = a + b i 可以表示为：

$r(\cos(\theta)+i\ \sin(\theta))$

向量 $a\,\overrightarrow{j}+b\,\overrightarrow{i}$ 可以表示为：

$r\cos(\theta)\overrightarrow{j}+r\sin(\theta)\overrightarrow{i}$



欧拉公式（1/2）

泰勒公式：

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{公式1}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{公式2}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \qquad \text{公式3}$$

由公式3，用ix代入x

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \cdots + \frac{(ix)^n}{n!}$$

欧拉公式（2/2）

代入虚数 i： $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ ... $i^{2n} = (-1)^n$, $i^{2n+1} = (-1)^n\, i$

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{ix^7}{7!} + \cdots + \frac{i^{2n}x^{2n}}{(2n)!} + \frac{i^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!})$$

$$= \cos(x) + i\ \sin(x)$$

由此可得欧拉公式：

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\ \sin(\theta)$$

θ取 π 时，可得欧拉恒等式：

$$e^{i\pi} = -1$$

虚数 i 与实数关系 – 复数加法的几何意义

复数：

$c_1 = a + b\,i = a\,\vec{j} + b\,\vec{i}$

$c_2 = c + d\,i = c\,\vec{j} + d\,\vec{i}$

令：

$c_1 = 1 + 3\,i = 1\,\vec{j} + 3\,\vec{i}$

$c_2 = 3 +\ i = 3\,\vec{j} + 1\,\vec{i}$

则 $c_3 = c_1 + c_2$

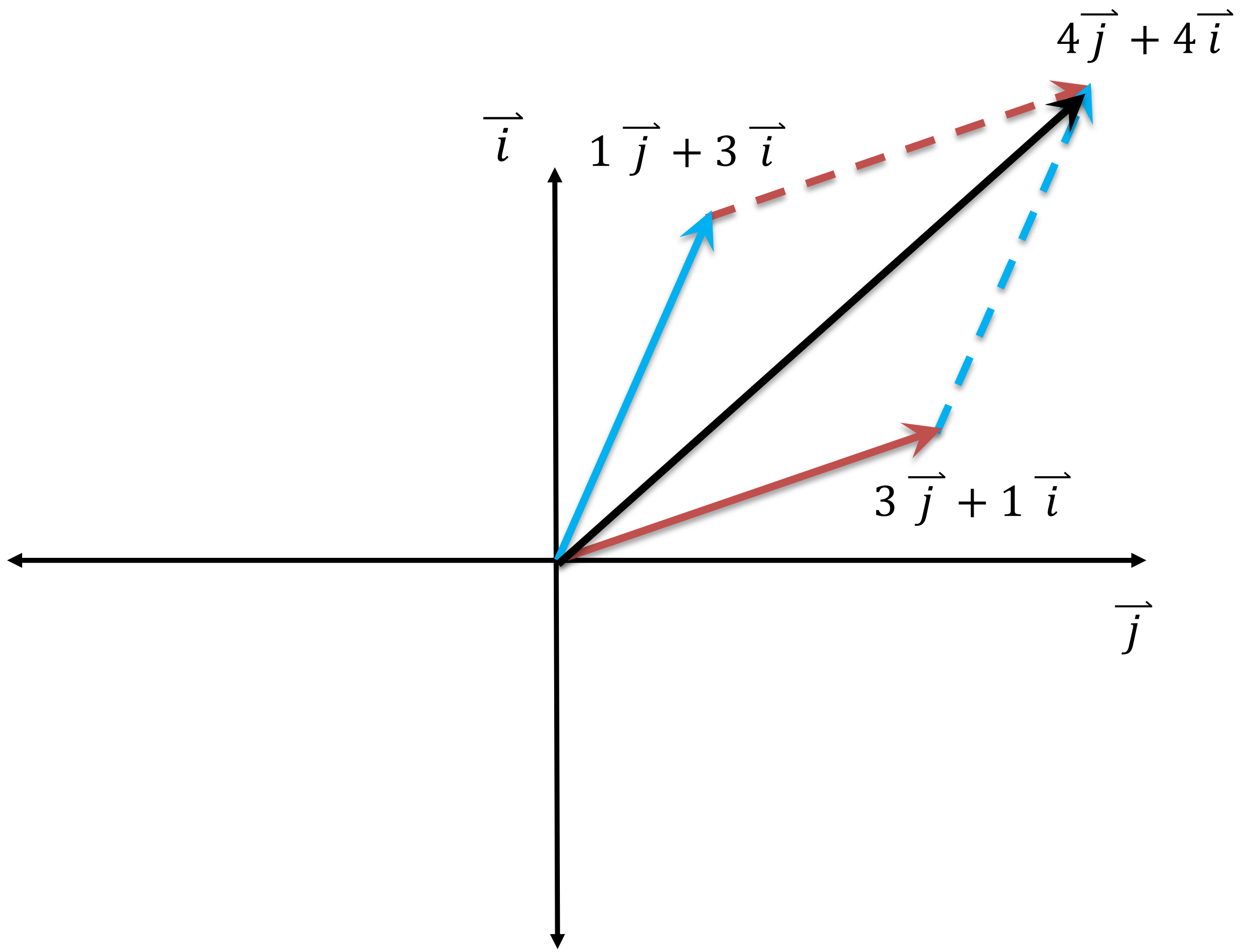
$= (a+c)\,\vec{j} + (b+d)\,\vec{i}$

$= 4\,\vec{j} + 4\,\vec{i}$

复数加法的几何意义可以概括为：

平行四边形法则

结果为两个复数向量形成的平行四边形的对角线。



虚数 i 与实数关系 – 向量旋转

根据欧拉公式：

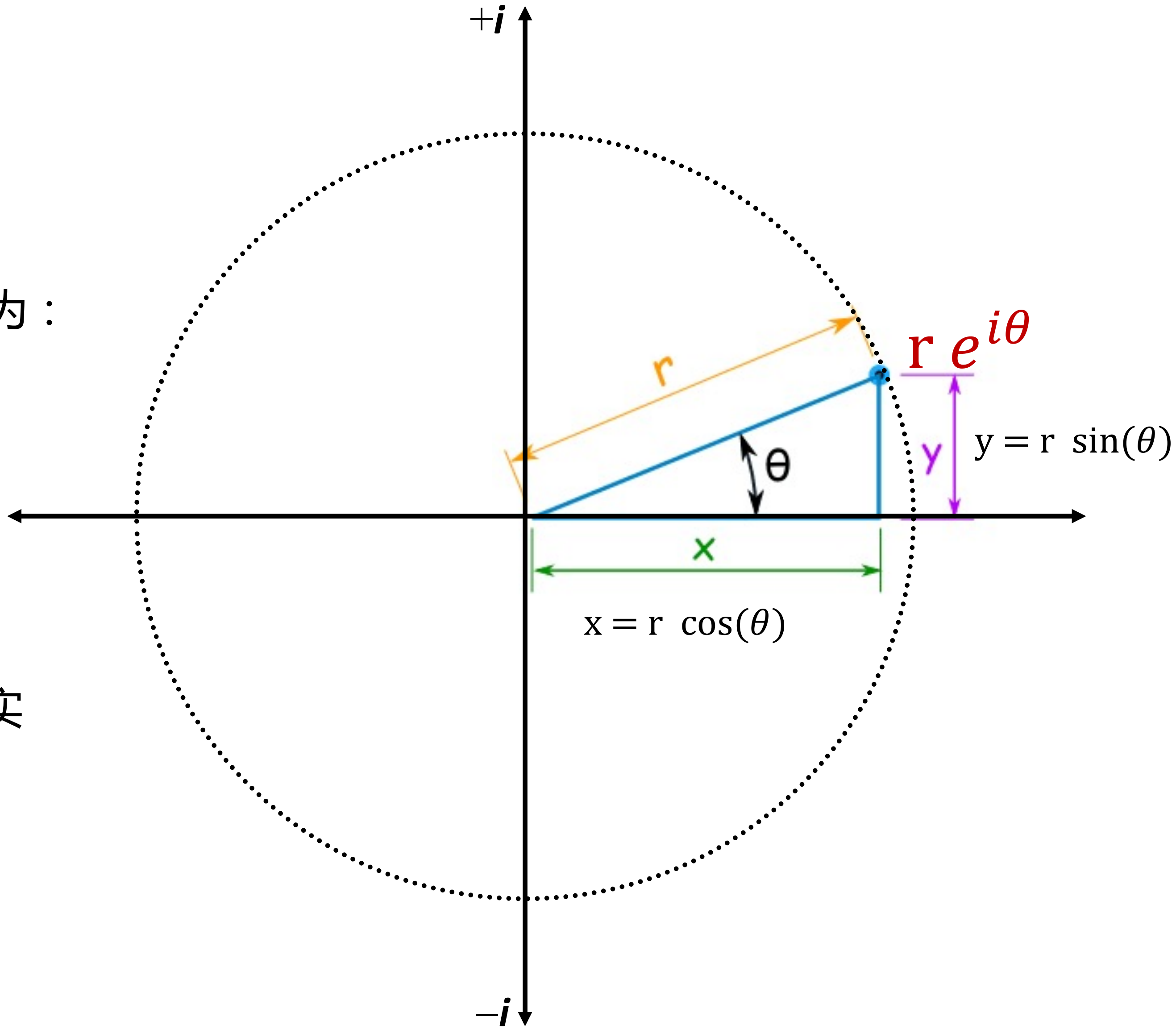
$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\ \sin(\theta)$$

复数 c = a + b i 即 $r(\cos(\theta) + i\ \sin(\theta))$ 可以表示为：

$$c = r\, e^{i\theta}$$

$\theta = 0$ 时，$c = r\, e^{i\theta} = r\, \mathrm{e}^0 = r$

根据图形可知：
复数 c = a + b i 即 $r(\cos(\theta) + i\ \sin(\theta))$可以理解为实数轴上长度为 r 的向量逆时针旋转 θ 角得到。



虚数 i 与实数关系 – 复数乘法的几何意义

复数 $c_1 = a + b\,i$ ：

- $c_1 = r_1(\cos(\theta_1) + i\ \sin(\theta_1))$
- $c_1 = r_1\, e^{i\theta 1}$

复数 $c_2 = c + d\,i$ ：

- $c_2 = r_2(\cos(\theta_2) + i\ \sin(\theta_2))$
- $c_2 = r_2\, e^{i\theta 2}$

复数 $c_1 * c_2 = r_1\, e^{i\theta 1} * r_2\, e^{i\theta 2}$

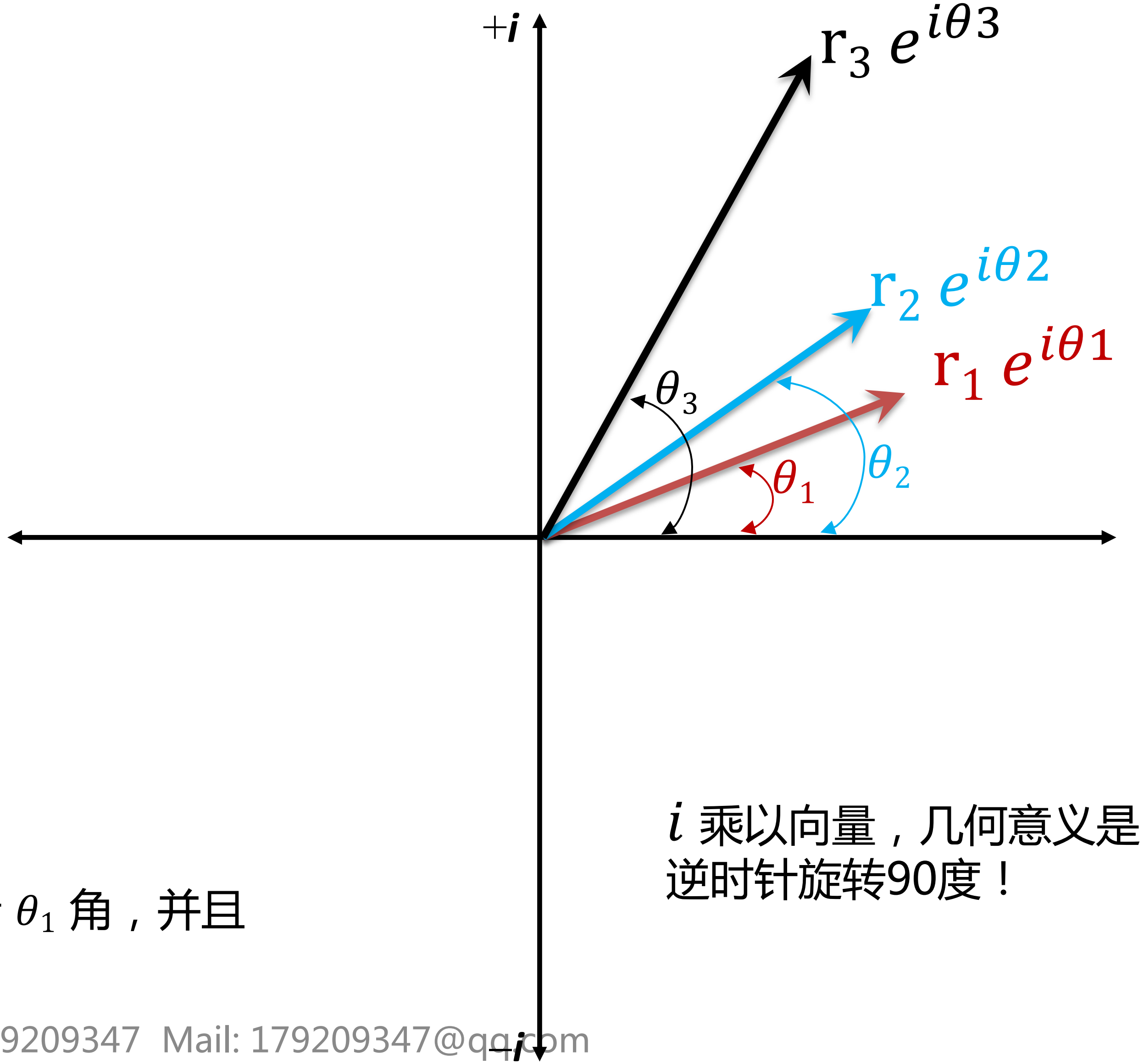
$$= r_1\, r_2\, e^{i(\theta 1 + \theta 2)}$$
$$= r_3\, e^{i\theta 3}$$

根据上面的计算过程可知复数乘法几何意义 ：

旋转缩放

$c_3 = c_1 * c_2 = r_1\, r_2\, e^{i(\theta 1 + \theta 2)}$

可以理解为 c_1 作用于 c_2， 将复数 c_2 向量逆时针旋转 θ_1 角，并且长度进行缩放，缩放系数为 r_1 。



i 乘以向量，几何意义是逆时针旋转90度！

复数空间与实数空间转换 – 向量

复向量：

$$\begin{bmatrix}\alpha \\ \beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a + b\, i \\ c + d\, i\end{bmatrix}$$

（ α、β 都是复数 ）

实向量表示：

$$\begin{bmatrix}a \\ b \\ c \\ d\end{bmatrix}$$

所有的门，都是希尔伯特空间中的算子，即算子矩阵中所有的元素都是复数（其中的实数应理解为虚部为 0 ）。

那么 $Y = \sigma_y = \begin{bmatrix}0 & -i \\ i & 0\end{bmatrix}$ **实向量空间**中的矩阵表示（看做 2 * 2 分块矩阵）：

$$\left[\begin{array}{cc|cc}0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

a + b i 算子其矩阵表示：

$$\begin{bmatrix}a & -b \\ b & a\end{bmatrix}$$

复数空间与实数空间转换 – 矩阵

a + b i 作为算子其矩阵表示：

$$\begin{bmatrix} \mathrm{a} & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

那么$\mathrm{Y} = \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ **实向量空间**中的矩阵表示（看做 2 * 2 分块矩阵）：

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

欧拉公式 – 矩阵证明法 (1/4)

1 泰勒公式： $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$

2 i 矩阵表示： $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & -sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{bmatrix}$

因为 a + b i 矩阵表示： $\begin{bmatrix} \mathrm{a} & -b \\ b & a \end{bmatrix}$

3 用 x $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 代入 e^x 中的 x：

4
$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \\ &= x^0 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \\ &= (\mathrm{x} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix})^0 + \frac{1}{1!}(\mathrm{x} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix})^1 + \frac{1}{2!}(\mathrm{x} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix})^2 + \frac{1}{3!}(\mathrm{x} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix})^3 + \ldots + \frac{1}{n!}(\mathrm{x} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix})^n \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^0 + \frac{1}{1!}\mathrm{x} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^1 + \frac{x^2}{2!} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 + \frac{x^3}{3!} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^3 + \ldots + \frac{x^n}{n!} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \end{aligned}$$

1 要转换成 x^0 ，如此才能保证维度一致

欧拉公式 – 矩阵证明法 (2/4)

$$\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos(\frac{\pi}{2}) & -sin(\frac{\pi}{2})\\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2})\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix}\cos(\frac{3\pi}{2}) & -sin(\frac{3\pi}{2})\\ \sin(\frac{3\pi}{2}) & \cos(\frac{3\pi}{2})\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\cdots$$

$$\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}^{2n+1} = \begin{bmatrix}\cos(\frac{(2n+1)\pi}{2}) & -sin(\frac{(2n+1)\pi}{2})\\ \sin(\frac{(2n+1)\pi}{2}) & \cos(\frac{(2n+1)\pi}{2})\end{bmatrix} = (-1)^n\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}^0 = \begin{bmatrix}\cos(\frac{0\pi}{2}) & -sin(\frac{0\pi}{2})\\ \sin(\frac{0\pi}{2}) & \cos(\frac{0\pi}{2})\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix}\cos(\frac{2\pi}{2}) & -sin(\frac{2\pi}{2})\\ \sin(\frac{2\pi}{2}) & \cos(\frac{2\pi}{2})\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\cdots$$

$$\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}^{2n} = \begin{bmatrix}\cos(\frac{(2n)\pi}{2}) & -sin(\frac{(2n+1)\pi}{2})\\ \sin(\frac{(2n)\pi}{2}) & \cos(\frac{(2n+1)\pi}{2})\end{bmatrix} = (-1)^n\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

欧拉公式 – 矩阵证明法 (3/4)

$$e^{x\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}} = \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}^0 + \frac{1}{1!}\text{x}\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}^1 + \frac{x^2}{2!}\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}^2 + \frac{x^3}{3!}\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}^3 + \ldots + \frac{x^n}{n!}\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}^n$$

$$= \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} - \frac{x^2}{2!}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} + \frac{x^4}{4!}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} - \frac{x^6}{6!}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} + \cdots + (-1)^{\text{n}}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$+ x\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix} - \frac{x^3}{3!}\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix} + \frac{x^5}{5!}\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix} - \frac{x^7}{7!}\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} & 0\\ 0 & 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix}0 & -(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!})\\ x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} & 0\end{bmatrix}$$

欧拉公式 – 矩阵证明法（4/4）

根据泰勒公式：

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

可得：

欧拉公式： $e^{x\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}} = \begin{bmatrix}\cos x & 0\\ 0 & \cos x\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & -\sin x\\ \sin x & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{bmatrix}$

欧拉恒等式： $e^{\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\pi} = \begin{bmatrix}\cos \pi & -\sin \pi\\ \sin \pi & \cos \pi\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

也可以表示为：

$$e^{x(0,1)} = (\cos x\,,\ \sin x)$$

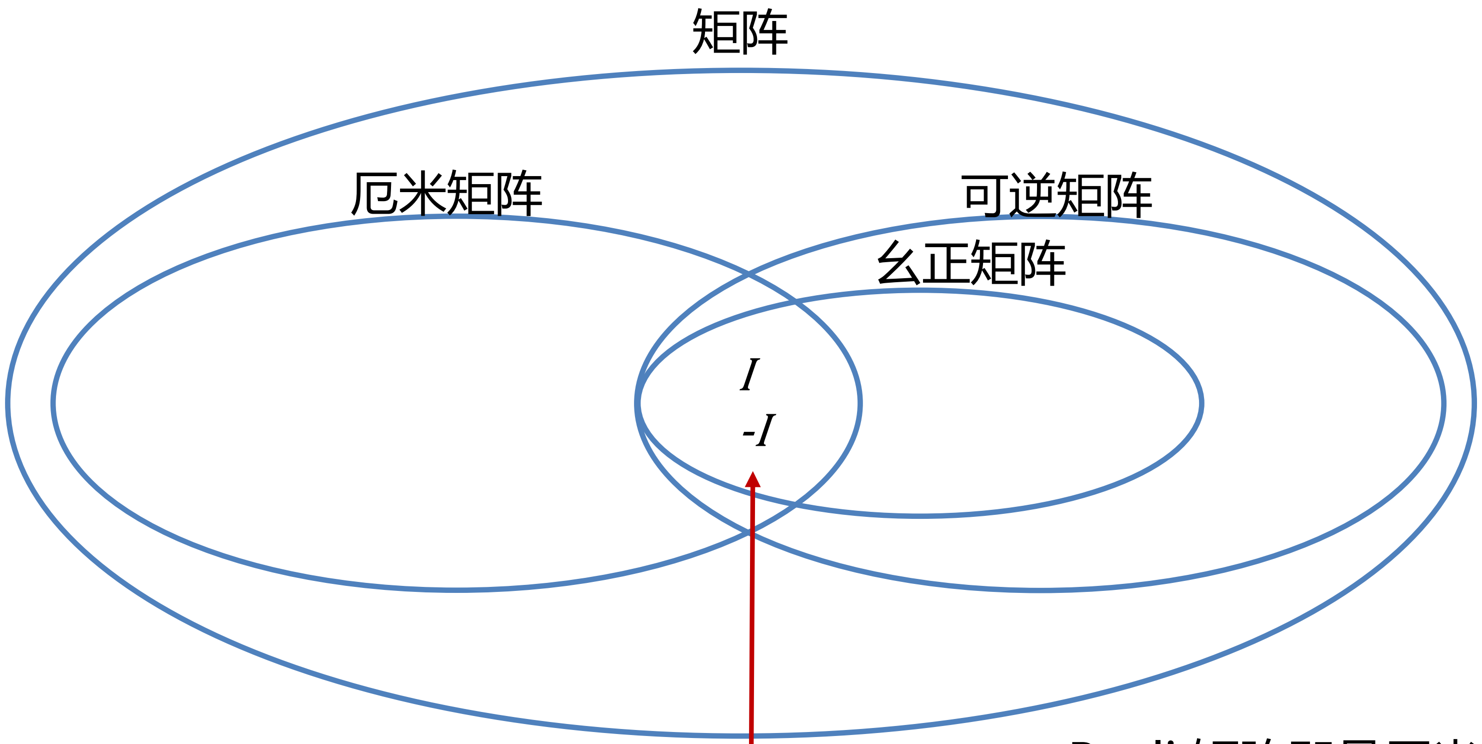
$$e^{(0,\pi)} = (-1\,,0)$$

矩阵表示或者二元组表示，更能体现复数的本质：
虚数不虚，复数是矩阵在2维上的特例！

$$e^{ix} = \cos x + i\ \sin x$$

$$e^{\,i\pi} = -1$$

矩阵类型



Pauli 矩阵即是厄米矩阵也是Pauli 矩阵。

Pauli 矩阵

$$X = \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad Y = \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \qquad Z = \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

实对称矩阵A^T vs 厄米矩阵$A^\dagger$ — 等价

实对称矩阵： $A^T = A$ A^T的意思是转置
厄米矩阵： $A^\dagger = A$ $A^\dagger$的意思是转置共轭

实对称矩阵是所有元素均为实数的对称矩阵。具有以下性质：
1、所有特征值均为实数
2、所有特征向量均为实向量
3、不同特征值对应的特征向量之间是正交的
4、具有n个线性无关的特征向量

为什么要加上共轭呢？
转换成实数矩阵后，就很清晰，没有共轭，矩阵并不对称。

$A^\dagger = A = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ **实向量空间**中的矩阵表示：

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$A^T = A = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ **实向量空间**中的矩阵表示：

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

正交矩阵 vs 幺正矩阵 — 等价

正交矩阵： $A^TA = I$，即 $A^T = A^{-1}$

性质：正交矩阵的行（列）向量组是欧几里得空间的标准正交向量组。

幺正矩阵： $UU^\dagger = I$ ，即 $U^\dagger = U^{-1}$

性质：幺正矩阵的行（列）向量组是酉空间的标准正交向量组。

那么$Y = \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ **实向量空间**中的矩阵表示（看做 2 * 2 分块矩阵）：

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$A^TA = I$ 其中的 I 意味着 A 行列式的值为 1， 也就意味着 A 对任何向量变换，只旋转，不缩放。

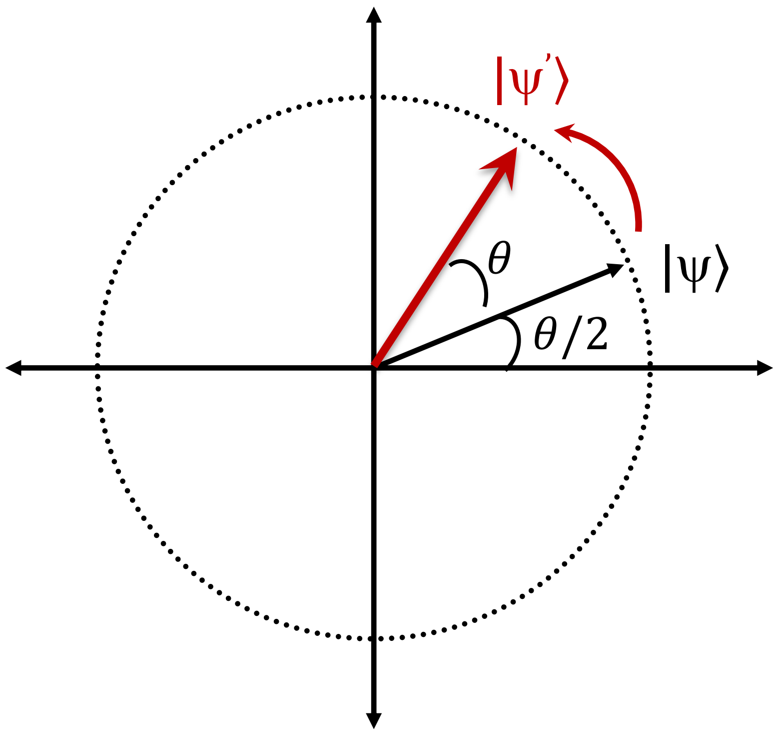
目录

CONTENTS

常用几何变换 - 逆时针旋转 θ

$$Q=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{bmatrix}$$

* 每次作用于向量，相当于逆时针旋转 θ



$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)\ |0\rangle + \sin(\theta/2)\ |1\rangle = \begin{bmatrix}\cos(\theta/2)\\ \sin(\theta/2)\end{bmatrix}$$

证明：

两角和与差的三角函数公式：

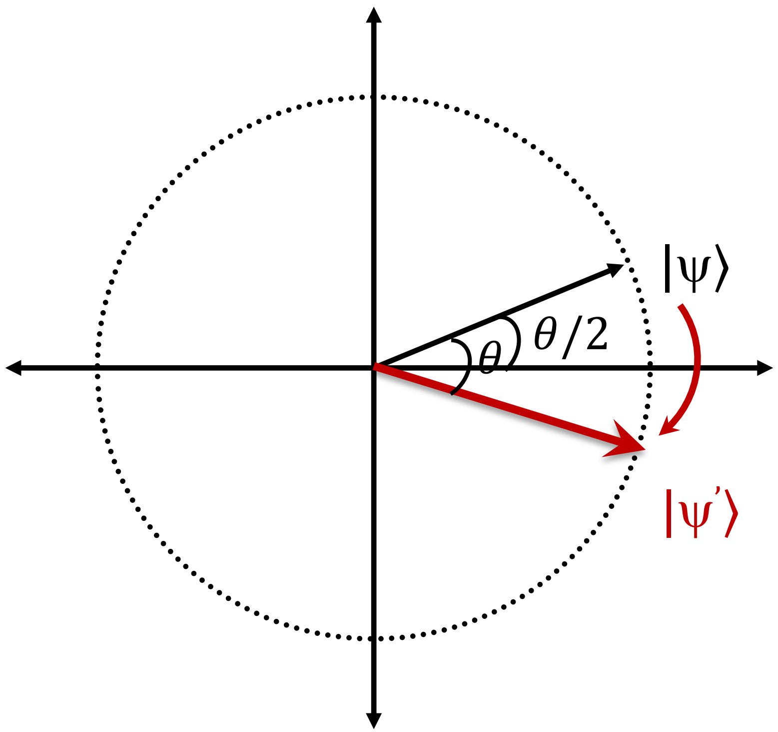
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$$\begin{aligned}|\psi'\rangle &= Q\,|\psi\rangle\\ &= \begin{bmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(\theta/2)\\ \sin(\theta/2)\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\cos(\theta)\cos(\theta/2) - \sin(\theta)\sin(\theta/2)\\ \sin(\theta)\cos(\theta/2) + \cos(\theta)\sin(\theta/2)\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\cos(\theta/2+\theta)\\ \sin(\theta/2+\theta)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

常用几何变换 - 顺时针旋转 θ

$$Q=\begin{bmatrix} \cos(\theta) & sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

* 每次作用于向量，相当于顺时针旋转 θ



$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)\ |0\rangle + \sin(\theta/2)\,|1\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{bmatrix}$$

证明：

两角和与差的三角函数公式：

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

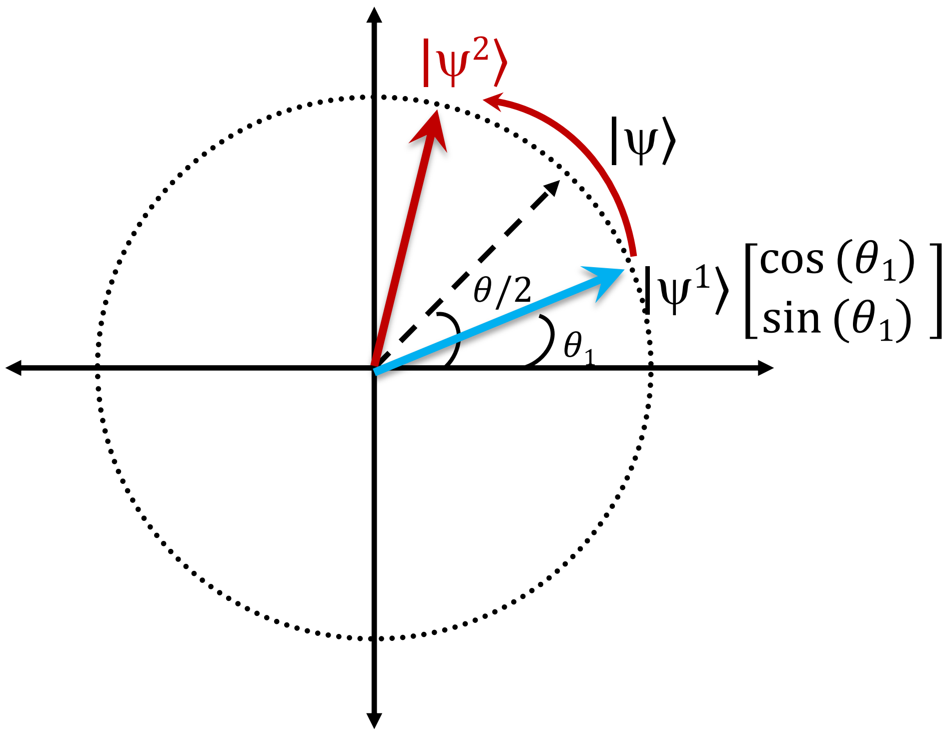
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp sin\,\alpha\sin\beta$

$$\begin{aligned} |\psi'\rangle &= Q\,|\psi\rangle \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta)\cos(\theta/2) + sin(\theta)\sin(\theta/2) \\ -\sin(\theta)\ \cos(\theta/2)\ + \cos(\theta)\sin(\theta/2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta/2-\theta) \\ \sin(\theta/2-\theta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

常用几何变换 – 镜像

$$Q=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & \mathit{sin}(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{bmatrix}$$

* 关于通过原点、方向和水平轴夹角为 $\theta/2$ 直线镜像;



$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)\ |0\rangle + \sin(\theta/2)\,|1\rangle = \begin{bmatrix}\cos(\theta/2)\\ \sin(\theta/2)\end{bmatrix}$$

证明：

$$\begin{aligned}|\psi^2\rangle &= Q\,|\psi^1\rangle\\ &= \begin{bmatrix}\cos(\theta) & \mathit{sin}(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(\theta_1)\\ \sin(\theta_1)\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\cos(\theta)\cos(\theta_1) + \mathit{sin}(\theta)\sin(\theta_1)\\ \sin(\theta)\ \cos(\theta_1)\ -\cos(\theta)\sin(\theta_1)\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\cos(\theta-\theta_1)\\ \sin(\theta-\theta_1)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

关于通过原点、方向和水平轴夹角为 $\theta/2$ 直线镜像，可以理解为逆时针旋转 $2\left(\frac{\theta}{2}-\theta_1\right)$，则：

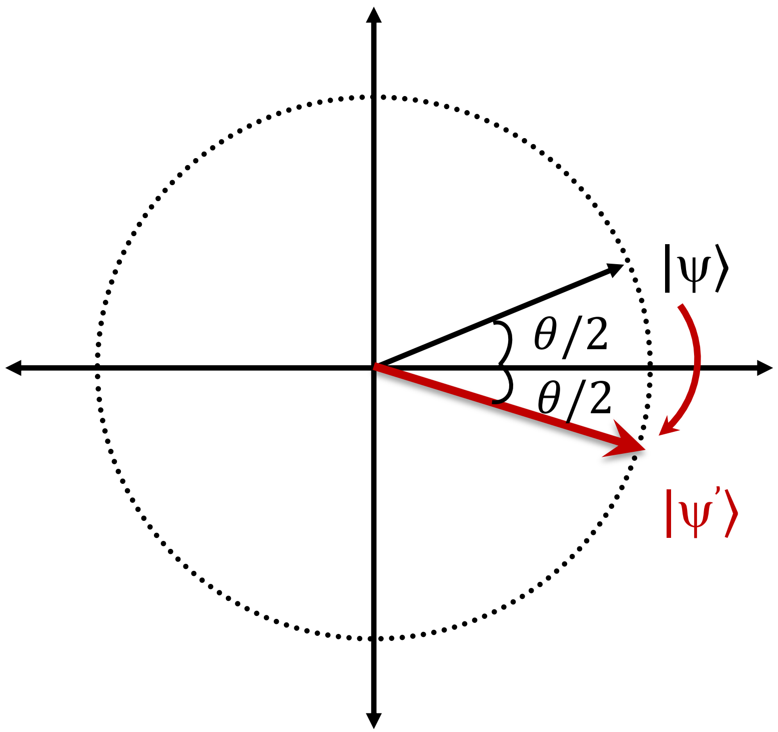
$$|\psi^2\rangle = \begin{bmatrix}\cos\left(\theta_1 + 2\left(\frac{\theta}{2}-\theta_1\right)\right)\\ \sin\left(\theta_1 + 2\left(\frac{\theta}{2}-\theta_1\right)\right)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos(\theta-\theta_1)\\ \sin(\theta-\theta_1)\end{bmatrix}$$

常用几何变换 -关于横轴镜像对称

$$Q=\begin{bmatrix}\cos(0) & \mathit{sin}(0)\\ \sin(0) & -\cos(0)\end{bmatrix}$$

$$Q=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

* 作用于向量，相当于关于横轴镜像

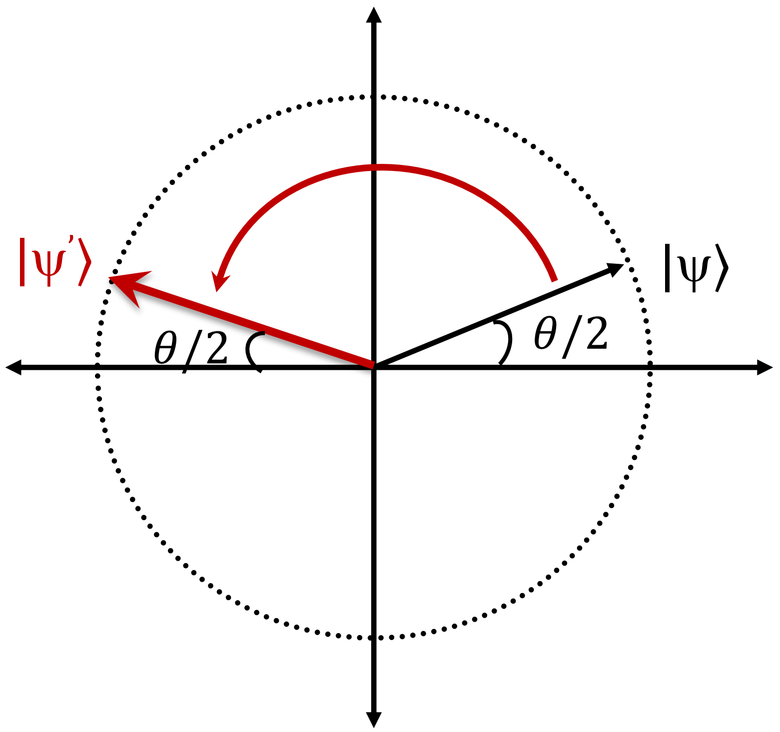


$$|\psi\rangle=\cos(\theta/2)\ |0\rangle+\sin(\theta/2)\,|1\rangle=\begin{bmatrix}\cos(\theta/2)\\ \sin(\theta/2)\end{bmatrix}$$

证明：

$$\begin{aligned}|\psi'\rangle &= Q\,|\psi\rangle\\ &=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(\theta/2)\\ \sin(\theta/2)\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\cos(\theta/2)\\ -\sin(\theta/2)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

常用几何变换 -关于纵轴镜像对称



$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)\ |0\rangle + \sin(\theta/2)\,|1\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{bmatrix}$$

$$Q=\begin{bmatrix} \cos\left(2\frac{\pi}{2}\right) & sin\left(2\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(2\frac{\pi}{2}\right) & -\cos\left(2\frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$Q=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

* 作用于向量，相当于关于纵轴镜像

证明：

$$\begin{aligned} |\psi'\rangle &= Q\,|\psi\rangle \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

常用几何变换 – 镜像

令 $|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{bmatrix}$

则 $|\psi\rangle\langle\psi| = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta/2) & \cos(\theta/2)\, sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2)\, sin(\theta/2) & sin^2(\theta/2) \end{bmatrix}$

则 $2|\psi\rangle\langle\psi| - I = \begin{bmatrix} 2\cos^2(\theta/2) - 1 & 2\cos(\theta/2)\, sin(\theta/2) \\ 2\cos(\theta/2)\, sin(\theta/2) & 2\, sin^2(\theta/2) - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{bmatrix}$

- $2|\psi\rangle\langle\psi| - I$ ，相当于关于 $|\psi\rangle$ 镜像
- $|\psi\rangle$ 为镜像轴

Qubits
qubits.top

目录

CONTENTS

单量子比特

一个量子比特 $|\psi\rangle$ 可以同时处于 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 两个状态，可用线性代数中的线性组合来表示为：

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta|1\rangle$$

$|\psi\rangle$ 狄拉克符号 ket

在量子力学中常称量子比特 $|\psi\rangle$ 处于 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 的叠加态(superpositions)，其中α、β都是复数，满足归一化条件 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$。

两维复向量空间的一组标准正交基(orthonormal basis) $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 组成一组计算基(computational basis)。

$$|0\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \quad |1\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

单量子比特

由于一个量子比特 $|\psi\rangle$ 线性代数中的线性组合来表示为：

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} \qquad |0\rangle = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} \quad |1\rangle = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

且 α、β 都是复数，那么有：

$\alpha = \mathrm{a} + \mathrm{b}\,i = r_1(\cos(\theta_1) + i\,\sin(\theta_1))$
$\beta = \mathrm{c} + \mathrm{d}\,i = r_2(\cos(\theta_2) + i\,\sin(\theta_2))$

那么有：

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\mathrm{a} + \mathrm{b}\,i\\ \mathrm{c} + \mathrm{d}\,i\end{bmatrix}$$

Qubits
qubits.top

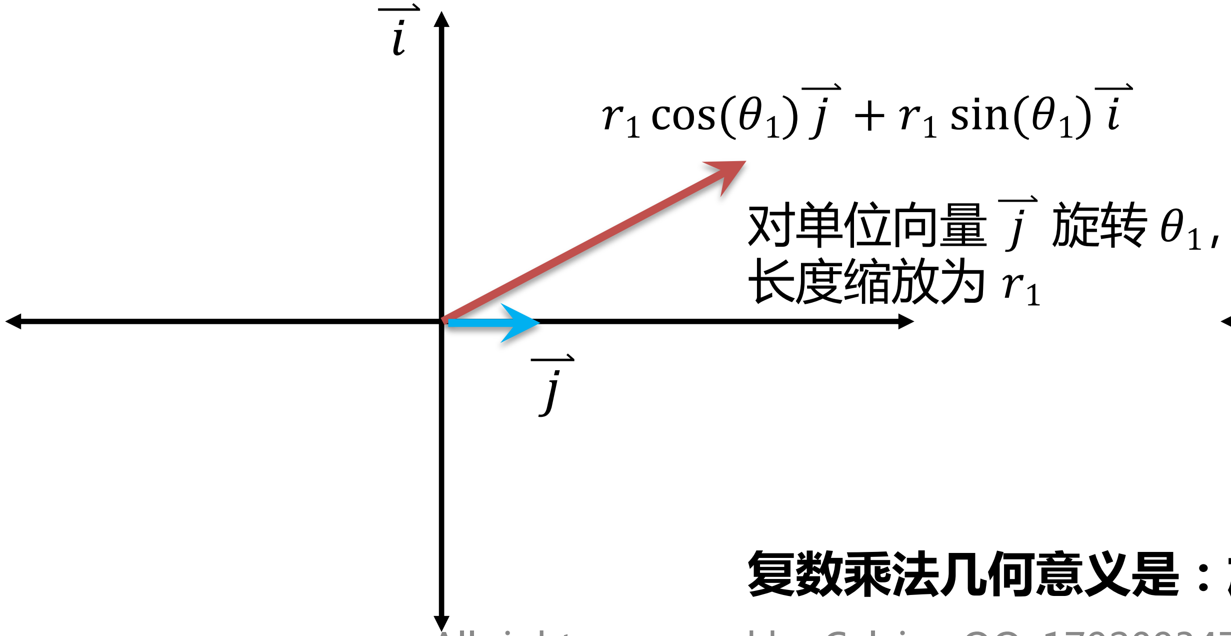
单量子比特 – 几何意义

因为：$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta|1\rangle\; = (a + b\,i)\,\overrightarrow{j} + (c + d\,i)\,\overrightarrow{k}$

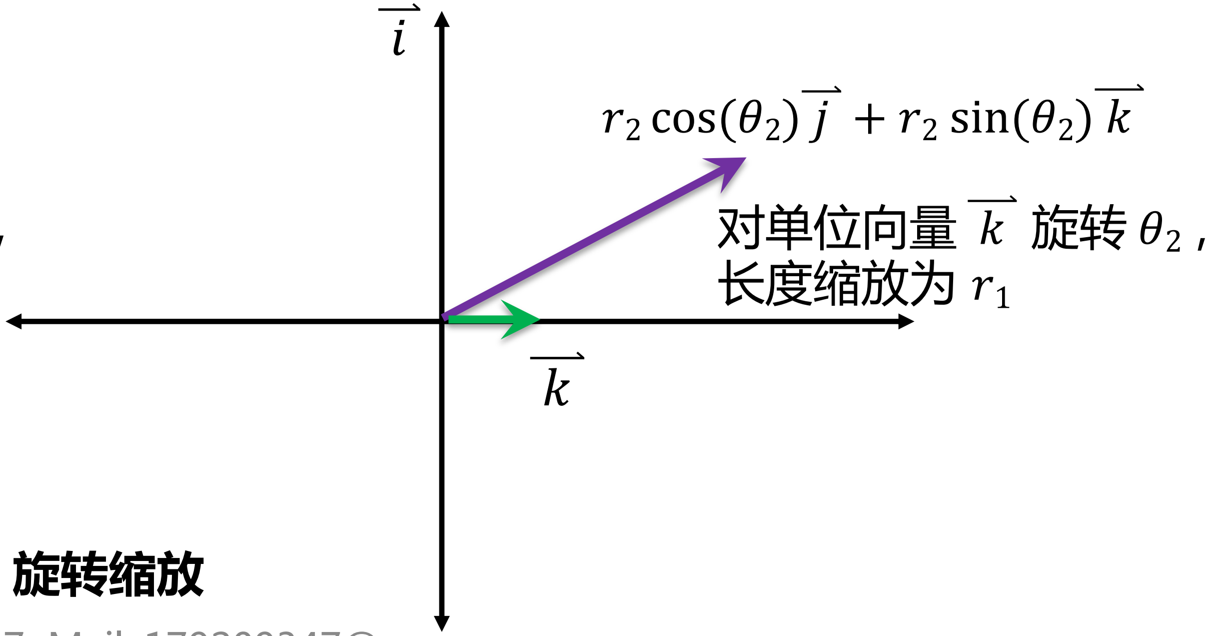
此时，我们将上述公式分成左右两部分来看，则其各自坐标系可以分别表示为：

$$\alpha = a + b\,i = r_1(\cos(\theta_1) + i\;\sin(\theta_1))$$
$$\beta = c + d\,i = r_2(\cos(\theta_2) + i\;\sin(\theta_2))$$

左侧部分：$(a + b\,i)\,\overrightarrow{j}$



右侧部分：$(c + d\,i)\,\overrightarrow{k}$



复数乘法几何意义是：旋转缩放

单量子比特 – 几何意义

a + bi 等价的向量表示：

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

单量子比特的**复向量**表示：

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta|1\rangle \;= \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + b\,i \\ c + d\,i \end{bmatrix} \qquad |0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

（ α、β 都是复数 ）

单量子比特的**实向量**表示：

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

单量子态可以理解为 **4 维空间中的向量**

单量子比特 – 几何意义

复数的乘法：

$$(a + b\,i)(c + d\,i) = ac - bd + (ad+bc)\,i = \begin{bmatrix} ac - bd \\ ad+bc \end{bmatrix}$$

$ac - bd + (ad+bc)\,i$ 的向量表示：

$$\begin{bmatrix} ac - bd \\ ad+bc \end{bmatrix}$$

$c + di$的向量表示：

$$\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

$a + b\,i$ 此时应理解为在复向量空间中对目标向量 $c + d\,i$ 的操作，即旋转缩放操作算子，其矩阵表示：

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

复数的乘法 $(a + b\,i)(c + d\,i)$ 等价为：

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac - bd \\ ad+bc \end{bmatrix}$$

目录

CONTENTS

单量子比特

一个量子比特 $|\psi\rangle$ 线性代数中的线性组合来表示为：

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

$$|0\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \qquad |1\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

由于 α、β 都是复数，那么有：

$$\alpha = a + bi = r_0(\cos(\varphi_0) + i\ \sin(\varphi_0)) = r_0\, e^{i\varphi_0}$$
$$\beta = c + di = r_1(\cos(\varphi_1) + i\ \sin(\varphi_1)) = r_1\, e^{i\varphi_1}$$

那么有：

$$|\psi\rangle = r_0\, e^{i\varphi_0}|0\rangle + r_1\, e^{i\varphi_1}|1\rangle$$

4个实数（两个实质上的自由度）

单量子态布洛赫球 (Bloch Sphere) 几何表示

为什么实质上只有2个自由度呢？

$$|\psi\rangle = r_0 e^{i\varphi_0}|0\rangle + r_1 e^{i\varphi_1}|1\rangle = e^{i\varphi_0}\,(\,r_0|0\rangle + r_1 e^{i(\varphi_1-\varphi_0)}|1\rangle\,)$$

由于$e^{i\varphi_0}$（共同相位）对 $|0\rangle$ 、 $|1\rangle$ 影响都一样，即不改变量子态，且在实验上无法测量，所以公式简化为：

$$|\psi\rangle = r_0|0\rangle + r_1 e^{i(\varphi_1-\varphi_0)}|1\rangle = r_0|0\rangle + r_1 e^{i\varphi}|1\rangle$$

单量子态布洛赫球 (Bloch Sphere) 几何表示

$$|\psi\rangle = r_0|0\rangle + r_1 e^{i(\varphi_1-\varphi_0)}|1\rangle = r_0|0\rangle + r_1 e^{i\varphi}|1\rangle$$

由于：

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

则有：

$$|r_0 e^{i\varphi_0}|^2 + |r_1 e^{i\varphi_1}|^2 = r_0^2 |e^{i\varphi_0}|^2 + r_1^2 |e^{i\varphi_1}|^2 = r_0^2 + r_1^2 = 1$$

* 注意 $|e^{i\varphi_1}|^2$是复数模运算

令：

$$r_0 = \cos(\theta)$$
$$r_1 = \sin(\theta)$$

最终可得： $|\psi\rangle = r_0|0\rangle + r_1 e^{i\varphi}|1\rangle = \cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)\, e^{i\varphi}\, |1\rangle$ * 即得到布洛赫球公式

单量子态布洛赫球 (Bloch Sphere) 几何表示

$|\psi\rangle = \cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)\, e^{i\varphi}\, |1\rangle$

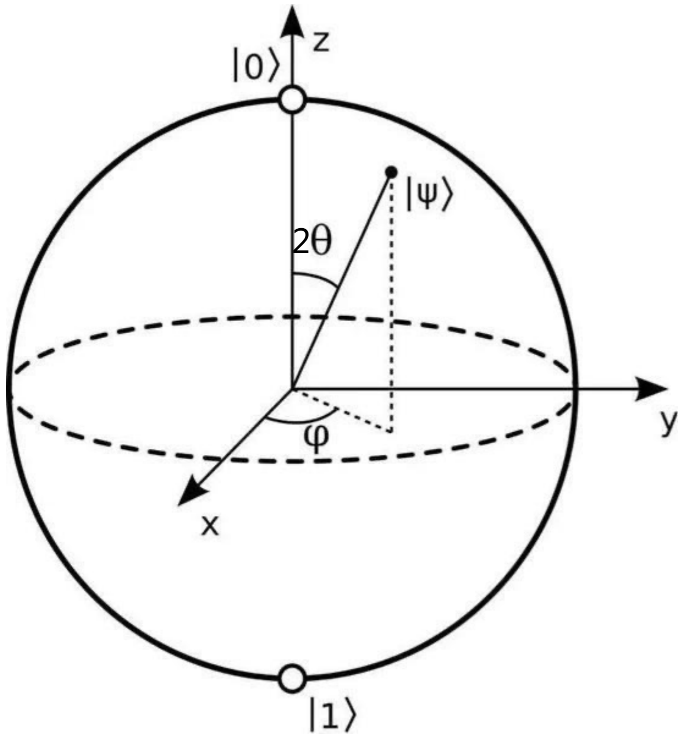
用2θ代替θ，且$0 \le \theta \le \pi/2$，$0 \le \varphi < 2\pi$

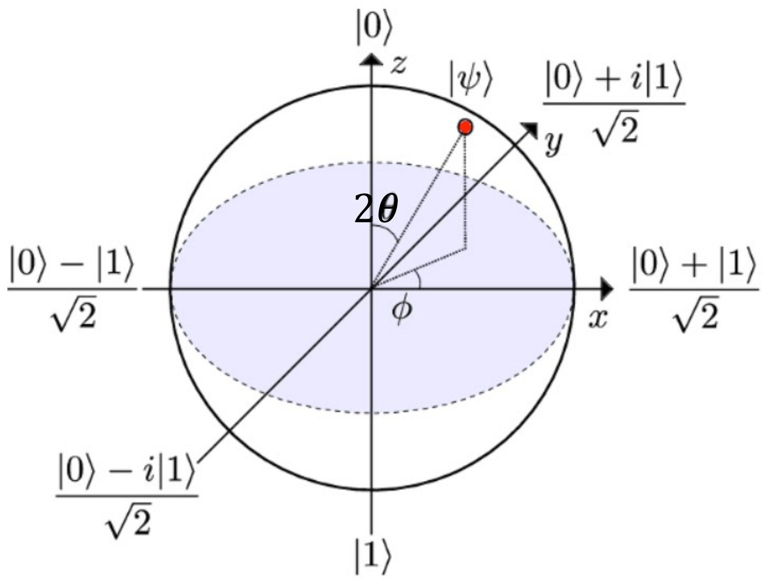
可得：

$x = \sin 2\theta \cos\varphi$

$y = \sin 2\theta \sin\varphi$

$z = \cos 2\theta$





单量子态几何表示

- 单量子态的几何（两个基向量的线性组合）表示：

$$|\psi\rangle = c_0\,|0\rangle + c_1\,|1\rangle$$

$$c_0 = r_0(\cos(\varphi_0) + i\ \sin(\varphi_0)) = r_0\, e^{i\varphi_0}$$
$$c_1 = r_1(\cos(\varphi_1) + i\ \sin(\varphi_1)) = r_1\, e^{i\varphi_1}$$

$|0\rangle$ 代表 $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ $|1\rangle$ 代表 $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

- 于是有：

$$\begin{aligned}|\psi\rangle &= c_0\,|0\rangle + c_1\,|1\rangle \\ &= r_0 e^{i\varphi_0}|0\rangle + r_1 e^{i\varphi_1}|1\rangle \\ &= r_0(\cos(\varphi_0) + i\ \sin(\varphi_0))|0\rangle + r_1(\cos(\varphi_1) + i\ \sin(\varphi_1))|1\rangle\end{aligned}$$

单量子态几何表示 – 降维

- 4个实数（3个实质上的自由度/维度）：

$$|\psi\rangle = r_0 e^{i\varphi_0}|0\rangle + r_1 e^{i\varphi_1}|1\rangle = r_0(\cos(\varphi_0) + i\ \sin(\varphi_0))|0\rangle + r_1(\cos(\varphi_1) + i\ \sin(\varphi_1))|1\rangle$$

- 为什么实质上只有 3 个自由度呢？

$$|\psi\rangle = r_0 e^{i\varphi_0}|0\rangle + r_1 e^{i\varphi_1}|1\rangle = e^{i\varphi_0}\left(r_0|0\rangle + r_1 e^{i(\varphi_1-\varphi_0)}|1\rangle\right)$$

由于$e^{i\varphi_0}$（共同相位）对 $|0\rangle$ 、 $|1\rangle$ 影响都一样，即不改变量子态，且在实验上无法测量，所以公式简化为：

$$|\psi\rangle = r_0|0\rangle + r_1 e^{i(\varphi_1-\varphi_0)}|1\rangle = r_0|0\rangle + r_1 e^{i\varphi}|1\rangle$$

并且由于:

$|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$

$|r_0 e^{i\varphi_0}|^2 + |r_1 e^{i\varphi_1}|^2 = r_0^2\,|e^{i\varphi_0}|^2 + r_0^2\,|e^{i\varphi_1}|^2 = r_0^2 + r_1^2 = 1$ * 注意 $|e^{i\varphi_1}|^2$是复数模运算

令 $r_0 = \cos(\theta)$ ， $r_1 = \sin(\theta)$ ：

可得：

$$|\psi\rangle = r_0|0\rangle + r_1 e^{i\varphi}|1\rangle = \cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)\, e^{i\varphi}\,|1\rangle$$

单量子态几何表示 – 降维

因为：

$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle &= r_0|0\rangle + r_1 e^{i\varphi}|1\rangle \\
&= \cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)\, e^{i\varphi}\, |1\rangle \\
&= \cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)\,(\cos(\varphi) + i\ \sin(\varphi)\,)|1\rangle \\
&= \cos(\theta)|0\rangle + (\sin(\theta)\cos(\varphi) + i\ \sin(\theta)\sin(\varphi))\,|1\rangle
\end{aligned}
$$

此时减少了一个维度，只有 3 个自由度：

$$\cos(\theta)\text{，}\quad \sin(\theta)\cos(\varphi)\text{，}\quad \sin(\theta)\sin(\varphi)$$

单量子比特的**复向量**表示：

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix}\alpha \\ \beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\varphi) + i\ \sin(\theta)\sin(\varphi)\end{bmatrix}$$

单量子比特的**实向量**表示：

$$\begin{bmatrix}\cos(\theta) \\ 0 \\ \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi)\end{bmatrix}$$

由于其中一个维度始终为 0，
那么我们可以用三维空间来表示单量子比特。

单量子态几何表示 – 布洛赫球 (Bloch Sphere)

单量子比特的**实向量**表示：

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ 0 \\ \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) \end{bmatrix}$$

由于其中一个维度始终为 0，那么可以用三维空间来表示单量子比特：

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) \end{bmatrix}$$

用2θ代替θ，且$0 \le \theta \le \pi/2$，$0 \le \varphi < 2\pi$

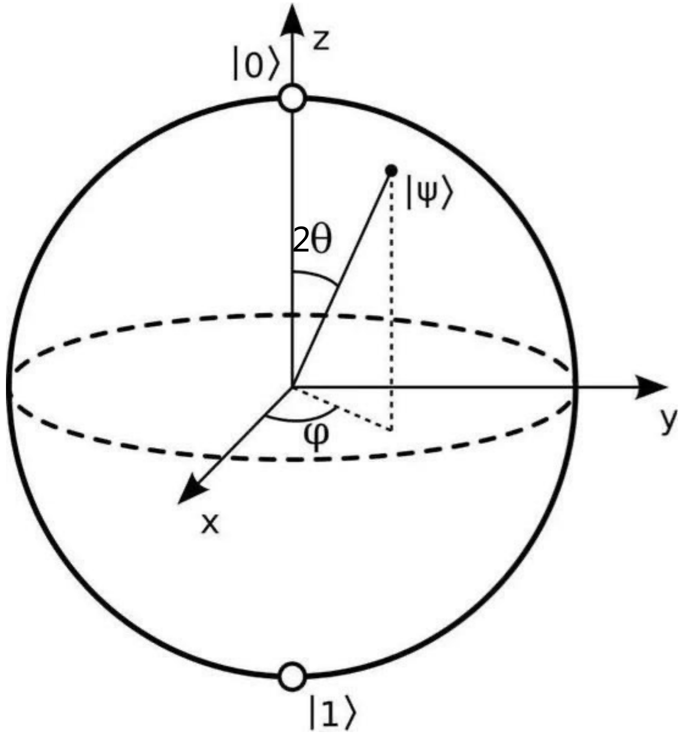
可得：

$x = \sin 2\theta \cos \varphi$

$y = \sin 2\theta \sin \varphi$

$z = \cos 2\theta$

* 即得到布洛赫球



目录

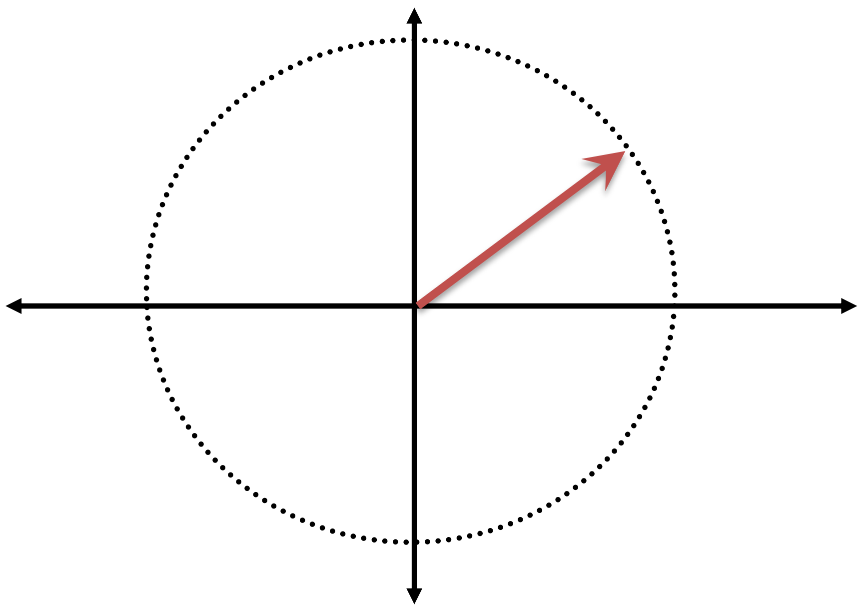
CONTENTS

H (Hadamard) 门

Hadamard 门是一种可以将基态变为叠加态的量子逻辑门，简称H门。

矩阵形式 $H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

当 α 和 β都为实数时，且长度归一化，则量子态位于单位圆上：



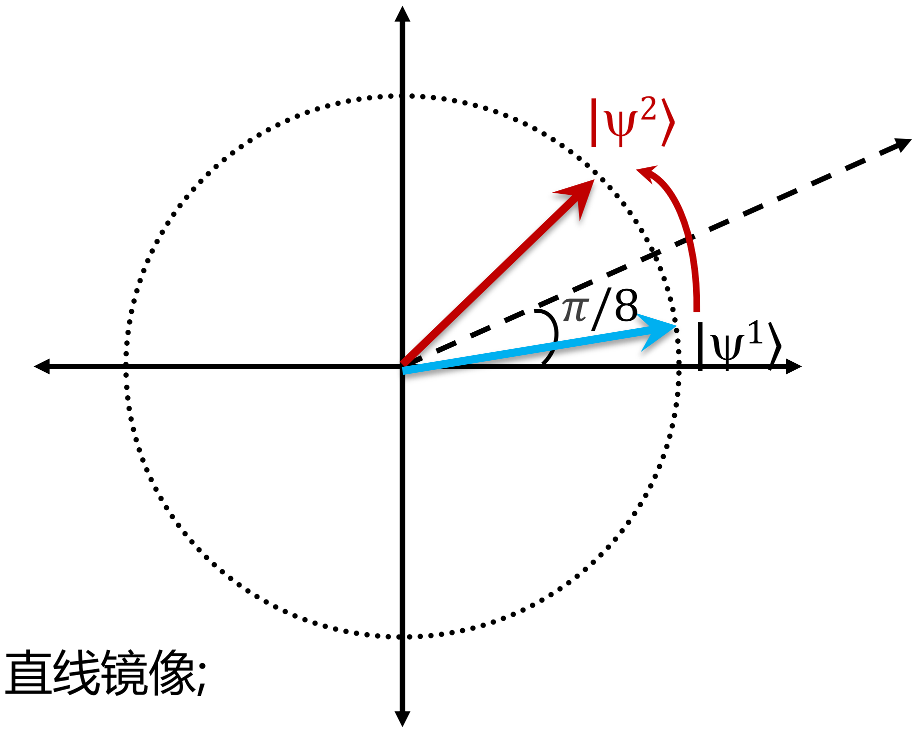
H (Hadamard) 门 – α 和 β都为实数

$$H=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\end{bmatrix}$$

观察发现，符合镜像公式：

$$Q=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{bmatrix}$$

* 关于通过原点、方向和水平轴夹角为 $\theta/2$ 直线镜像;



可知：

H门操作，相当于关于通过原点、方向和水平轴夹角为 $\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{8}$ 直线镜像;

H (Hadamard) 门 – α 和 β都为实数 - 举例

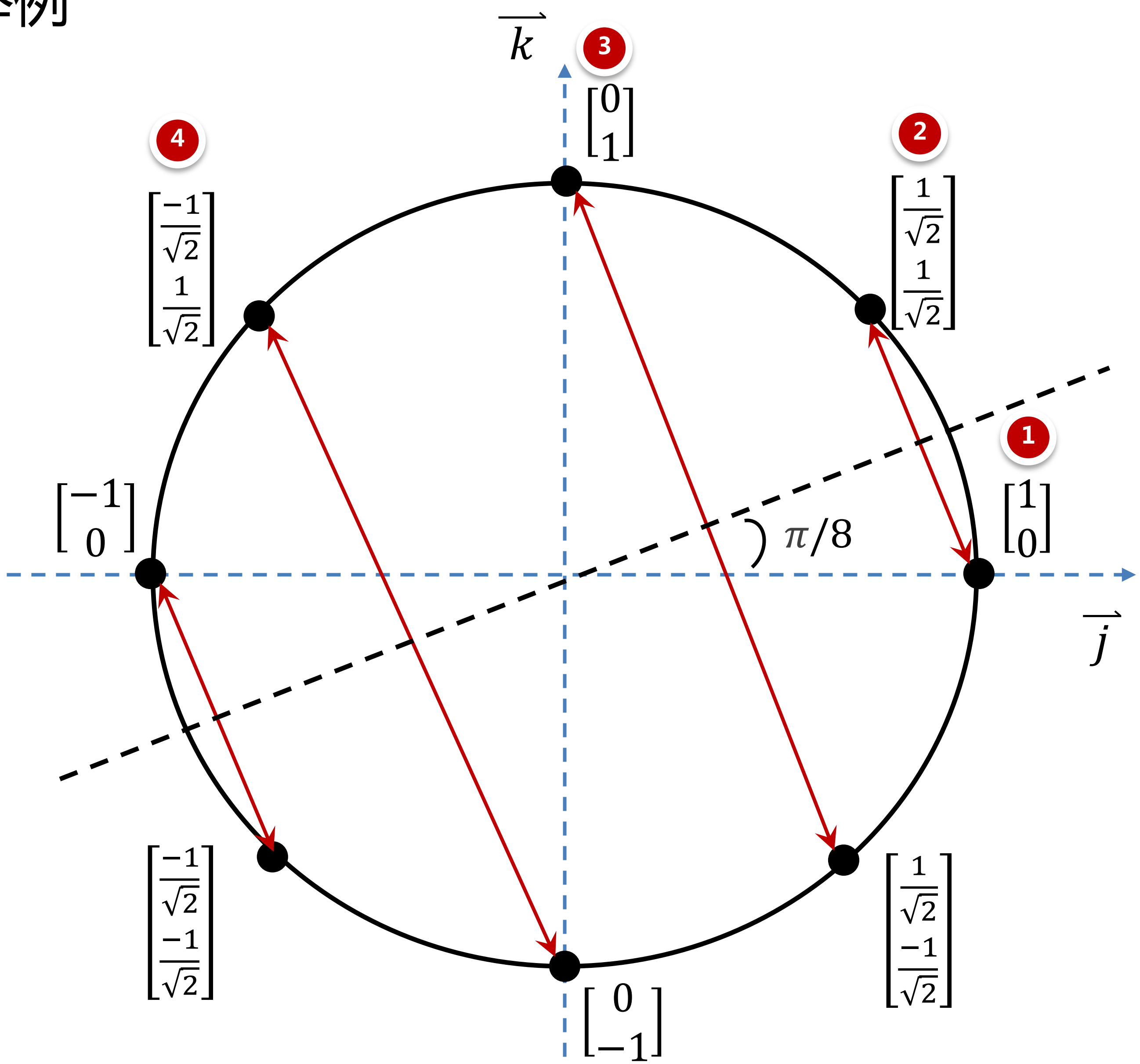
1 $H\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

2 $H\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

3 $H\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

4 $H\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$

…



参考来源： Quantum Computing for Computer Scientists

H (Hadamard) 门 – α 和 β都为复数

单量子比特的**复向量**表示：

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix}\alpha \\ \beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a + b\,i \\ c + d\,i\end{bmatrix}$$

（ α、β 都是复数）

单量子比特的**实向量**表示：

$$\begin{bmatrix}a \\ b \\ c \\ d\end{bmatrix}$$

所有的门，都是希尔伯特空间中的算子，即算子矩阵中所有的元素都是复数（其中的实数应理解为虚部为 0）。

那么$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1 \\ 1 & -1\end{bmatrix}$ **实向量空间**中的矩阵表示（看做 2 * 2 分块矩阵）：

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1\end{array}\right]$$

a + b i 算子其矩阵表示：

$$\begin{bmatrix}a & -b \\ b & a\end{bmatrix}$$

H (Hadamard) 门 – α 和 β都为复数 - 举例

单量子比特的**复向量**表示：

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a + b\,i\\ c + d\,i\end{bmatrix}$$

H门作用于量子态：

$$H\,|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\alpha+\beta\\ \alpha-\beta\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}(a+c)+(b+d)i\\ (a-c)+(b-d)i\end{bmatrix}$$

单量子比特的**实向量**表示：

$$\begin{bmatrix}a + b\,i\\ c + d\,i\end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{bmatrix}$$

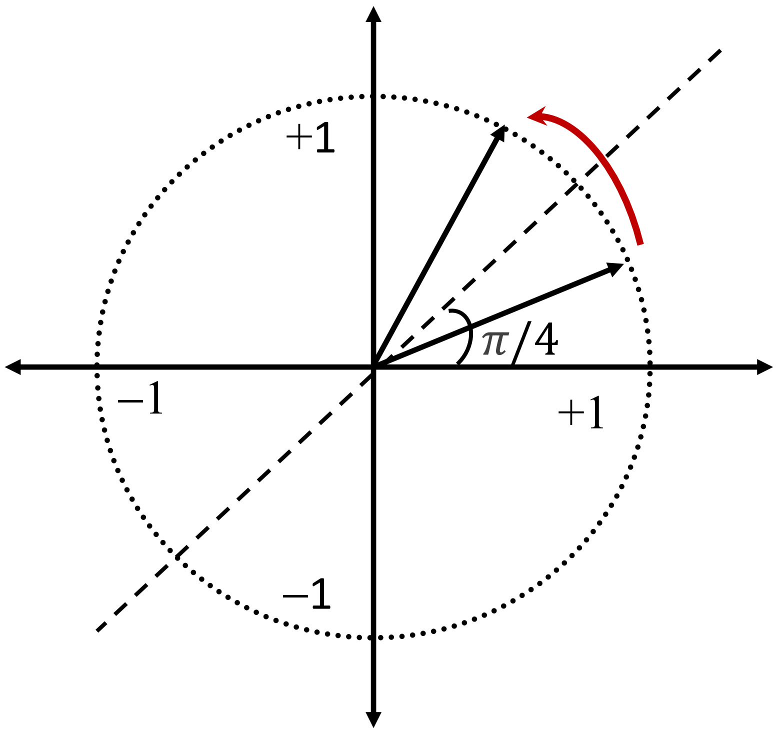
H门作用于量子态：

$$H\,|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}a+c\\ b+d\\ a-c\\ b-d\end{bmatrix} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}(a+c)+(b+d)i\\ (a-c)+(b-d)i\end{bmatrix}$$

Pauli-X 门

Pauli-X 门矩阵形式为泡利矩阵 σ_x，即：

$$X = \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix}$$



观察发现，符合镜像公式：

$$Q = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{bmatrix}$$

* 关于通过原点、方向和水平轴夹角为 $\theta/2$ 直线镜像;

可知：

X 门操作，相当于关于通过原点、方向和水平轴夹角为 $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4}$ 直线镜像;

Qubits
qubits.top

Pauli-X 门 – α 和 β都为实数，且归一化 - 举例

X 门作用在基态：

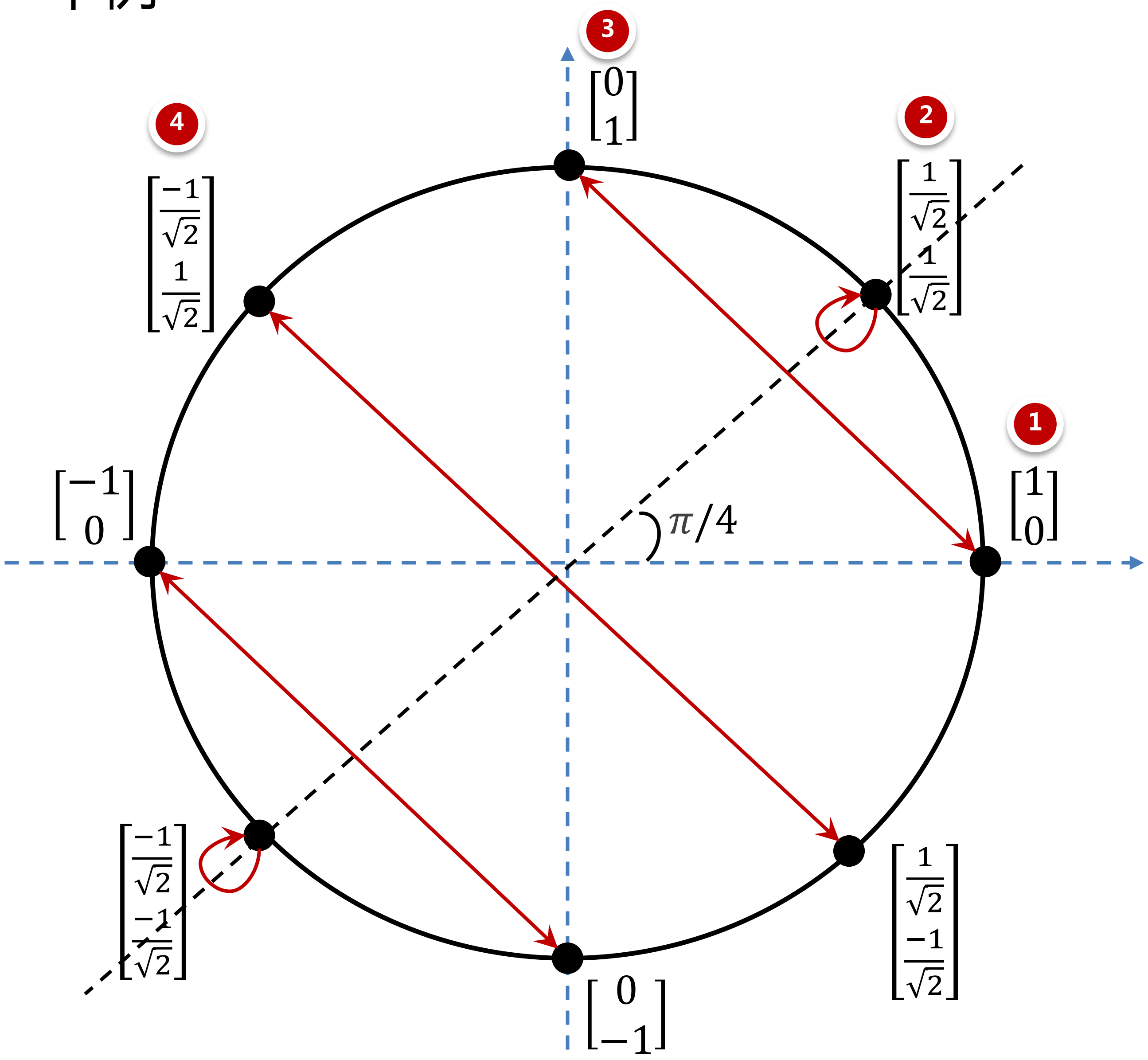
1 $X|0\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |1\rangle$

3 $X|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |0\rangle$

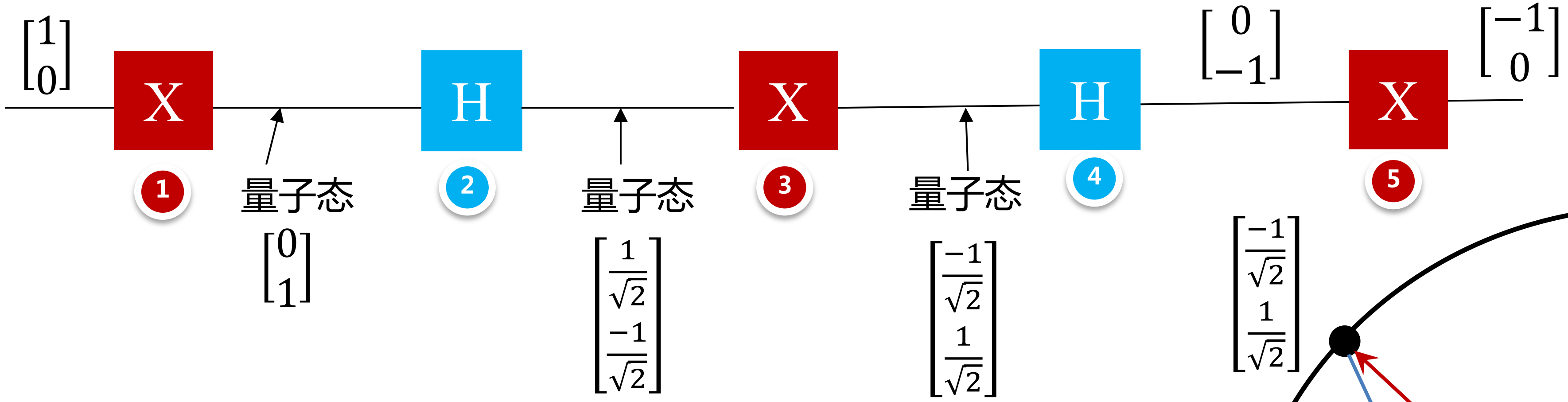
X 门作用在叠加态：

2 $X\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

4 $X\begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$



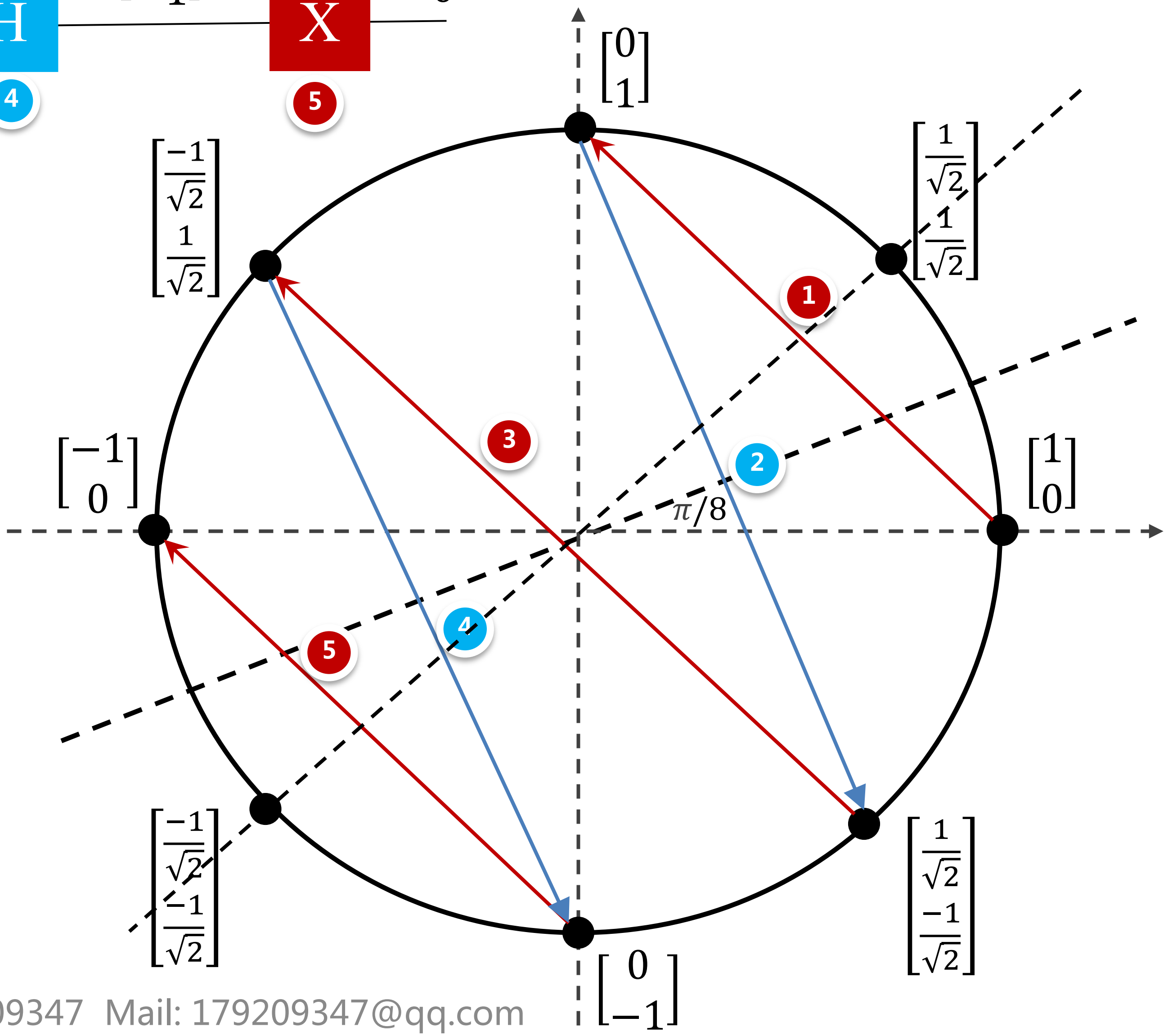
Pauli-X 门 – X H 门结合使用例子



连续两次 X门 或者连续两次 H门 都会恢复量子态。但是如果2次 X门 和2次 H门 交替操作，结果却会不同。

如图所示交替操作之后：

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$$



Pauli-X 门 – α 和 β都为复数

单量子比特的**复向量**表示：

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a + b\,i\\ c + d\,i\end{bmatrix}$$

（ α、β 都是复数）

单量子比特的**实向量**表示：

$$\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{bmatrix}$$

所有的门，都是希尔伯特空间中的算子，即算子矩阵中所有的元素都是复数（其中的实数应理解为虚部为 0）。

那么 $X = \sigma_x = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ **实向量空间**中的矩阵表示（看做 2 * 2 分块矩阵）：

$$\left[\begin{array}{cc|cc}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \hline 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{array}\right]$$

a + b i 算子其矩阵表示：

$$\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}$$

Pauli-X 门 – α 和 β都为复数 - 举例

单量子比特的**复向量**表示：

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a+b\,i\\ c+d\,i\end{bmatrix}$$

X 门作用于量子态：

$$X|\psi\rangle = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\beta\\ \alpha\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c+d\,i\\ a+b\,i\end{bmatrix}$$

单量子比特的**实向量**表示：

$$\begin{bmatrix}a+b\,i\\ c+d\,i\end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{bmatrix}$$

X 门作用于量子态：

$$X|\psi\rangle = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c\\ d\\ a\\ b\end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix}c+d\,i\\ a+b\,i\end{bmatrix}$$

Pauli-Y 门

Pauli-Y 门矩阵形式为泡利矩阵σ_y，即：

$$Y = \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

其量子线路符号：

Y 门作用在基态：

$$Y|0\rangle = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} = \mathrm{i}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathrm{i}|1\rangle$$

$$Y|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \\ 0 \end{bmatrix} = -\mathrm{i}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -\mathrm{i}|0\rangle$$

Y 门作用在任意量子态 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$，得到的新的量子态为：

$$|\psi'\rangle = Y|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathrm{i}\beta \\ \mathrm{i}\alpha \end{bmatrix} = -\mathrm{i}\beta|0\rangle + \mathrm{i}\alpha|1\rangle$$

Pauli-Y 门 – α 和 β都为复数

单量子比特的**复向量**表示：

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a+b\,i\\ c+d\,i\end{bmatrix}$$

（ α、β 都是复数）

单量子比特的**实向量**表示：

$$\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{bmatrix}$$

所有的门，都是希尔伯特空间中的算子，即算子矩阵中所有的元素都是复数（其中的实数应理解为虚部为 0）。那么 $Y = \sigma_y = \begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix}$ **实向量空间**中的矩阵表示（看做 2 * 2 分块矩阵）：

$$\left[\begin{array}{cc|cc}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ \hline 0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

a + b i 算子其矩阵表示：

$$\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}$$

Pauli-Y 门 – α 和 β都为复数 - 举例

单量子比特的**复向量**表示：

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta|1\rangle \;= \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + b\,i \\ c + d\,i \end{bmatrix}$$

Y 门作用于量子态：

$$Y|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i\beta \\ i\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i(c + d\,i) \\ i(a + b\,i) \end{bmatrix}$$

单量子比特的**实向量**表示：

$$\begin{bmatrix} a + b\,i \\ c + d\,i \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

Y 门作用于量子态：

$$Y|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ -c \\ -b \\ a \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} d - ci \\ -b + ai \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i(c + d\,i) \\ i(a + b\,i) \end{bmatrix}$$

Pauli-Z 门

Pauli-Z 门矩阵形式为泡利矩阵σ_z，即：

$$Z = \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$$

Z 门作用在基态：

$$Z|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (-1)^0|0\rangle = |0\rangle$$

$$Z|1\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = (-1)^1|1\rangle = -|1\rangle$$

$$Z\,|\,j\,\rangle = (-1)^j|\,j\,\rangle$$

Z 门作用在任意量子态 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$，得到的新的量子态为：

$$|\psi'\rangle = Z|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\beta \end{bmatrix} = \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle$$

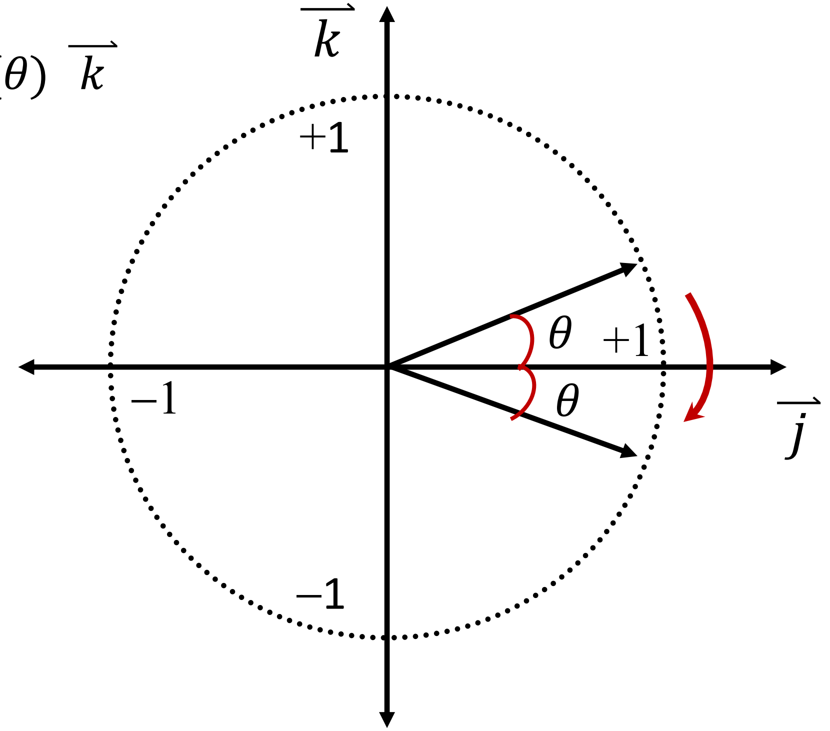
Pauli-Z 门 – α 和 β都为实数，且归一化

$$Z = \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \cos(\theta)\,|0\rangle + \sin(\theta)\,|1\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} = \cos(\theta)\,\vec{j} + \sin(\theta)\,\vec{k}$$

Z 门作用在量子态 $|\psi\rangle$ ：

$$Z\,|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \end{bmatrix}$$



* 每次作用于量子态(向量)，相当于在j,k平面内相对 j 轴做镜像映射。

Pauli-Z 门 – α 和 β都为复数

单量子比特的**复向量**表示：

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a+b\,i\\ c+d\,i\end{bmatrix}$$

（ α、β 都是复数）

单量子比特的**实向量**表示：

$$\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{bmatrix}$$

所有的门，都是希尔伯特空间中的算子，即算子矩阵中所有的元素都是复数（其中的实数应理解为虚部为 0）。

那么 $Z = \sigma_z = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ **实向量空间**中的矩阵表示（看做 2 * 2 分块矩阵）：

$$\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{array}\right]$$

a + b i 算子其矩阵表示：

$$\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}$$

Pauli-Z 门 – α 和 β都为复数 - 举例

单量子比特的**复向量**表示：

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a + b\,i\\ c + d\,i\end{bmatrix}$$

Z 门作用于量子态：

$$Z|\psi\rangle = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha\\ -\beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a + b\,i\\ -(c + d\,i)\end{bmatrix}$$

单量子比特的**实向量**表示：

$$\begin{bmatrix}a + b\,i\\ c + d\,i\end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{bmatrix}$$

Z 门作用于量子态：

$$Z|\psi\rangle = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\ b\\ -c\\ -d\end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix}a + b\,i\\ -(c + d\,i)\end{bmatrix}$$

RX(θ) 门

RX门矩阵形式为：

$$R_x(\theta) = e^{-i\theta X/2} = \cos(\theta/2)\,I - i\sin(\theta/2)X$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -i\sin(\theta/2) \\ -i\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

$R_X(\pi/2)$ 门作用在任意量子态 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$，得到的新的量子态为：

$$|\psi'\rangle = R_X(\pi/2)\,|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \alpha - i\beta \\ \beta - i\alpha \end{bmatrix} = \frac{\alpha - i\beta}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{\beta - i\alpha}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

RX(θ) 门 - 重要性质

两角和与差的三角函数公式：

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$$Q = R_x(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -i\sin(\theta/2) \\ -i\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

$$Q^2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -i\sin(\theta/2) \\ -i\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -i\sin(\theta/2) \\ -i\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2) & -2i\cos(\theta/2)\sin(\theta/2) \\ -2i\cos(\theta/2)\sin(\theta/2) & \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta/2 + \theta/2) & -i\sin(\theta/2 + \theta/2) \\ -i\sin(\theta/2 + \theta/2) & \cos(\theta/2 + \theta/2) \end{bmatrix}$$

$$Q^3 = \begin{bmatrix} \cos(3\theta/2) & -i\sin(3\theta/2) \\ -i\sin(3\theta/2) & \cos(3\theta/2) \end{bmatrix}$$

....

$$Q^n = \begin{bmatrix} \cos(n\theta/2) & -i\sin(n\theta/2) \\ -i\sin(n\theta/2) & \cos(n\theta/2) \end{bmatrix}$$

RX(θ) 门 – 复向量旋转

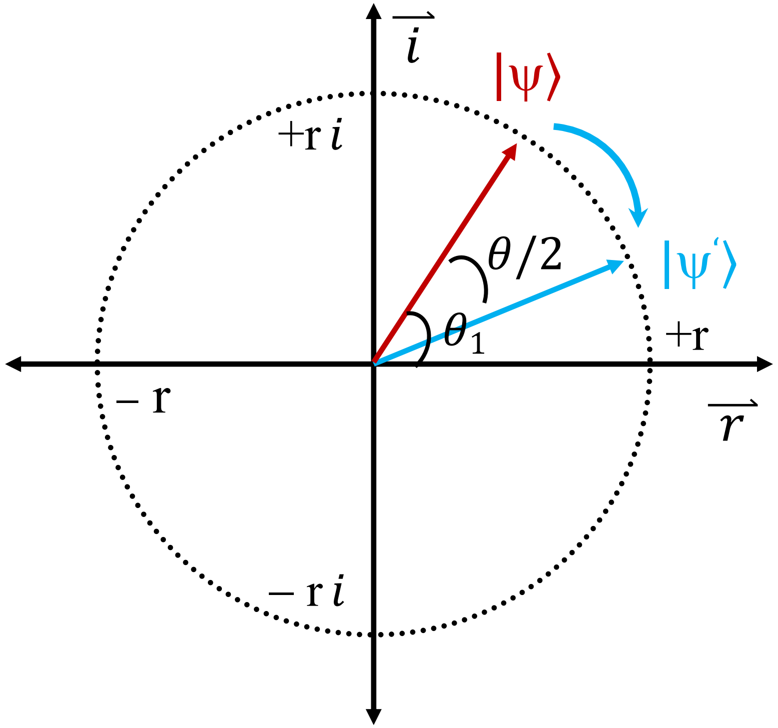
两角和与差的三角函数公式：

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$$|\psi\rangle = r(\cos(\theta_1) + i\ \sin(\theta_1)) = \begin{bmatrix} r\cos(\theta_1) \\ ri\sin(\theta_1) \end{bmatrix}$$

$$R_x(\theta)|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -i\sin(\theta/2) \\ -i\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r\cos(\theta_1) \\ ri\sin(\theta_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\theta_1)\cos(\theta/2) + r\sin(\theta_1)\sin(\theta/2) \\ -ri\cos(\theta_1)\sin(\theta/2) + r\,i\sin(\theta_1)\cos(\theta/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\theta_1 - \theta/2) \\ r\,i\sin(\theta_1 - \theta/2) \end{bmatrix}$$



- $R_x(\theta)|\psi\rangle$ 相当于将复平面内的向量 $|\psi\rangle$ ，旋转 $\theta/2$ 角。

RX(θ) 门 - α 和 β都为实数

$$Q = R_x(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -isin(\theta/2) \\ -\mathrm{isin}(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)\ |0\rangle + \sin(\theta/2)\,|1\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{bmatrix}$$

$Q = R_x(\theta)$ 作用在量子态：

$$Q\,|\psi\rangle = Q\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -isin(\theta/2) \\ -\mathrm{isin}(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2)\cos(\theta/2) - i\,sin(\theta/2)\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2)\ \cos(\theta/2) - i\sin(\theta/2)\cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

$$Q^n\,|\psi\rangle = Q^n\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\mathrm{n}\theta/2) & -i\,sin(\mathrm{n}\theta/2) \\ -i\sin(\mathrm{n}\theta/2) & \cos(\mathrm{n}\theta/2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \cos(\mathrm{n}\theta/2)\cos(\theta/2) - i\,sin(\mathrm{n}\theta/2)\sin(\theta/2) \\ \cos(\mathrm{n}\theta/2)\ \sin(\theta/2) - i\sin(\mathrm{n}\theta/2)\cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

RX(θ) 门 - 布洛赫球 (Bloch Sphere) 几何表示

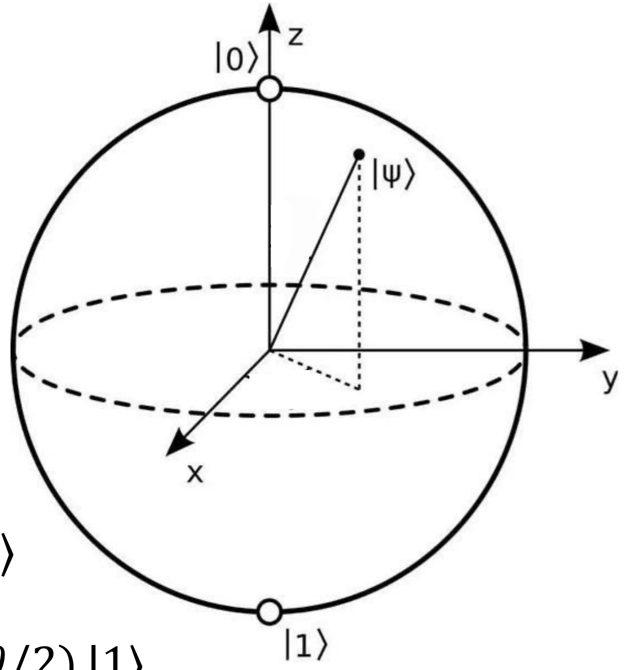
RX门由Pauli-X 矩阵作为生成元生成，其矩阵形式为：

$$R_x(\theta) = e^{-i\theta X/2} = \cos(\theta/2)\, I - i\sin(\theta/2) X$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -i\sin(\theta/2) \\ -i\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

其量子线路符号：

RX操作将原来的态上绕X轴逆时针旋转θ角。
能导致概率振幅的变化。



RX(θ) 门作用在基态：

$$R_x(\theta)|0\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -i\sin(\theta/2) \\ -i\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ -i\sin(\theta/2) \end{bmatrix} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle - i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$$

$$R_x(\theta)|1\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -i\sin(\theta/2) \\ -i\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i\sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{bmatrix} = -i\sin(\theta/2)|0\rangle + \cos(\theta/2)|1\rangle$$

$R_X(\pi/2)$ 门作用在任意量子态 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$，得到的新的量子态为：

$$|\psi'\rangle = R_X(\pi/2)|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \alpha - i\beta \\ \beta - i\alpha \end{bmatrix} = \frac{\alpha - i\beta}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{\beta - i\alpha}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

RY(θ) 门

RY门矩阵形式为：

$$R_y(\theta) = e^{-i\theta Y/2} = \cos(\theta/2)\, I - i \sin(\theta/2) Y$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

$R_y(\pi/2)$ 门作用在任意量子态 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$，得到的新的量子态为：

$$|\psi'\rangle = R_X(\pi/2)\, |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \alpha - \beta \\ \alpha + \beta \end{bmatrix} = \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2}} |1\rangle$$

RY(θ) 门 - 重要性质

两角和与差的三角函数公式：

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$$Q = R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

$$Q^2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2) & -2\cos(\theta/2)\sin(\theta/2) \\ 2\cos(\theta/2)\sin(\theta/2) & \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta/2 + \theta/2) & -\sin(\theta/2 + \theta/2) \\ \sin(\theta/2 + \theta/2) & \cos(\theta/2 + \theta/2) \end{bmatrix}$$

$$Q^3 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta)\cos(\theta/2) - \sin(\theta)\sin(\theta/2) & -\cos(\theta)\sin(\theta/2) - \sin(\theta)\cos(\theta/2) \\ \sin(\theta)\cos(\theta/2) + \cos(\theta)\sin(\theta/2) & -\sin(\theta)\sin(\theta/2) + \cos(\theta)\cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \cos(3\theta/2) & -\sin(3\theta/2) \\ \sin(3\theta/2) & \cos(3\theta/2) \end{bmatrix}$$

....

$$Q^n = \begin{bmatrix} \cos(n\theta/2) & -\sin(n\theta/2) \\ \sin(n\theta/2) & \cos(n\theta/2) \end{bmatrix}$$

矩阵几何意义：

每次作用于向量，相当于将向量逆时针旋转 $\frac{\theta}{2}$

RY(θ) 门 - α 和 β都为实数

$$Q = R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

* 每次作用于量子态(向量)，相当于逆时针旋转 $\frac{\theta}{2}$

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)\ |0\rangle + \sin(\theta/2)\ |1\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{bmatrix}$$

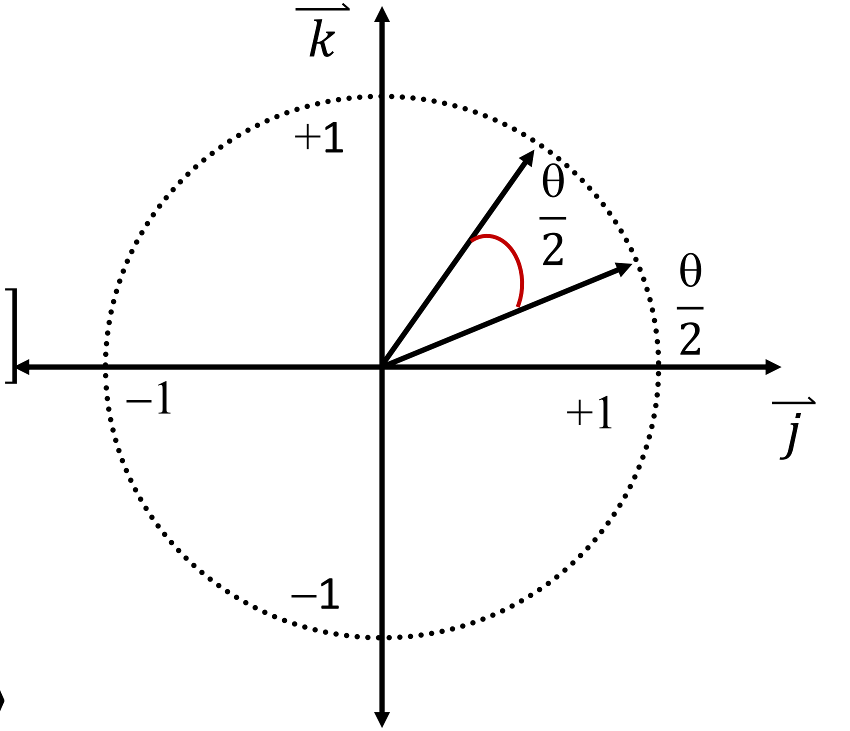
$Q = R_y(\theta)$ 作用在量子态：

$$Q^1 |\psi\rangle = Q^1 \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2+\theta/2) \\ \sin(\theta/2+\theta/2) \end{bmatrix}$$

$$Q^2 |\psi\rangle = \begin{bmatrix} \cos(2\theta/2+\theta/2) \\ \sin(2\theta/2+\theta/2) \end{bmatrix}$$

....

$$Q^n |\psi\rangle = \begin{bmatrix} \cos((n+1)\theta/2\ ) \\ \sin((n+1)\theta/2) \end{bmatrix} = \cos((n+1)\theta/2\ )\,|0\rangle + \sin((n+1)\theta/2\ )|1\rangle$$



选取合适的旋转次数 n 使得 $\sin^2((n+1)\theta/2\ )$ 最接近 1， 即可完成**振幅放大**量子线路。

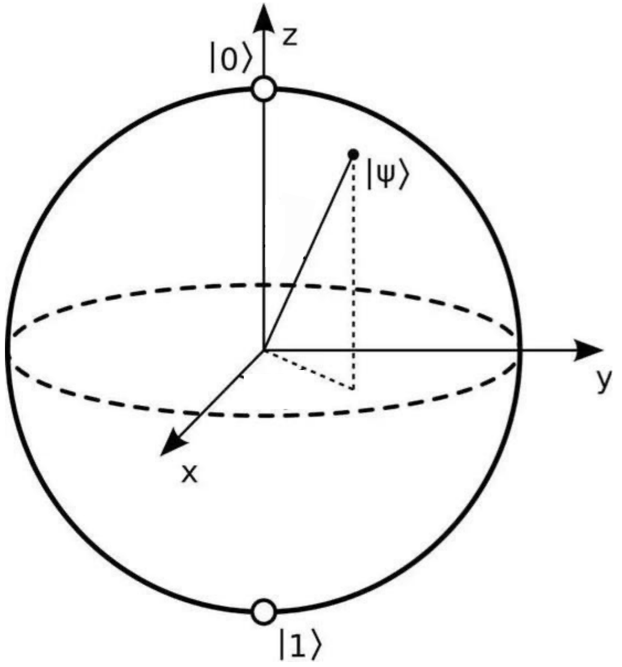
RY(θ) 门 - 布洛赫球 (Bloch Sphere) 几何表示

RY门由Pauli-Y 矩阵作为生成元生成，其矩阵形式为：

$$R_y(\theta) = e^{-i\theta Y/2} = \cos(\theta/2)\,\mathrm{I} - \mathrm{i}\sin(\theta/2)\mathrm{Y}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

RY操作将原来的态上绕Y轴逆时针旋转θ角。
能导致概率振幅的变化。



其量子线路符号：

RY(θ) 门作用在基态：

$$R_y(\theta)\,|0\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{bmatrix} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$$

$$R_y(\theta)\,|1\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{bmatrix} = -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$$

$R_y(\pi/2)$ 门作用在任意量子态 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta\,|1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$，得到的新的量子态为：

$$|\psi'\rangle = R_X(\pi/2)\,|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \alpha - \beta \\ \alpha + \beta \end{bmatrix} = \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

RZ(θ) 门

RZ门又称为相位转化门(phase-shift gate)，由Pauli-Z 矩阵作为生成元生成，其矩阵形式为：

$$R_z(\theta) = e^{-i\theta Z/2} = \cos(\theta/2)\,I - i\sin(\theta/2)Z$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{bmatrix} = e^{-i\theta/2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}$$

由于$e^{-i\theta/2}$ 是一个全局相位，其没有物理意义，只考虑单门，则可以省略该参数。于是，RZ门矩阵可简写为：

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}$$

$R_y(\pi/2)$ 门作用在任意量子态 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$，得到的新的量子态为：

$$|\psi'\rangle = R_z(\theta)\,|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ e^{i\theta}\beta \end{bmatrix} = \alpha|0\rangle + e^{i\theta}\beta|1\rangle$$

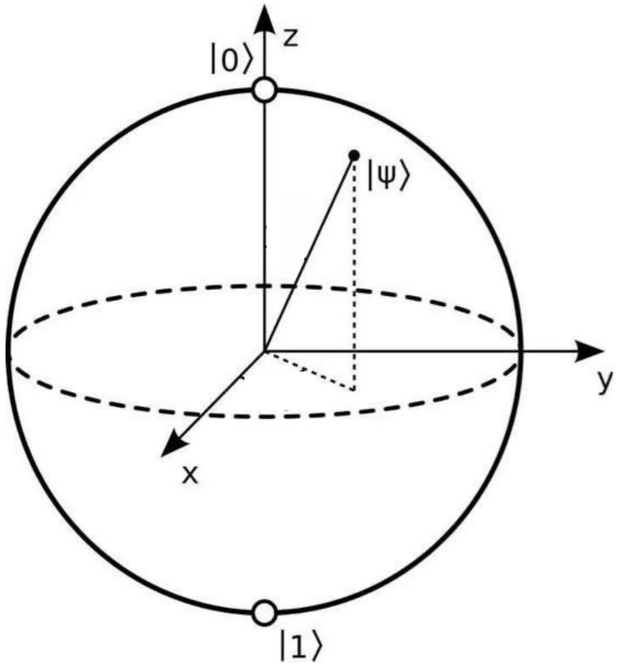
RZ(θ) 门 - 布洛赫球 (Bloch Sphere) 几何表示

RZ门又称为相位转化门(phase-shift gate)，由Pauli-Z 矩阵作为生成元生成，其矩阵形式为：

$$R_z(\theta) = e^{-i\theta Z/2} = \cos(\theta/2)\,\mathrm{I} - \mathrm{i}\sin(\theta/2)\mathrm{Z}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{bmatrix} = e^{-i\theta/2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}$$

RZ 操作将原来的态上绕 Z 轴逆时针旋转θ角。不会导致概率振幅的变化，只会改变相位。



其量子线路符号：

RZ门作用在基态：

$$R_z(\theta)\,|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |0\rangle$$

$$R_z(\theta)\,|1\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{i\theta} \end{bmatrix} = e^{i\theta}\,|1\rangle$$

$R_y(\pi/2)$ 门作用在任意量子态 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta\,|1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$，得到的新的量子态为：

$$|\psi'\rangle = R_z(\pi/2)\,|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1+i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \frac{1+i}{\sqrt{2}}\beta \end{bmatrix} = \alpha|0\rangle + \frac{1+i}{\sqrt{2}}\beta|1\rangle$$

RZ(θ) 门 - 全局相位的几何意义

$$R_z(\theta) = e^{-i\theta Z/2} = \cos(\theta/2)\,I - i\sin(\theta/2)Z$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{bmatrix} = e^{-i\theta/2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}$$

由于$e^{-i\theta/2}$ 是一个全局相位，其没有物理意义，只考虑单门，则可以省略该参数，那么怎么理解几何意义呢？

令：$|\psi\rangle = r_1(\cos(\theta_1) + i\ \sin(\theta_1))|0\rangle + r_2(\cos(\theta_2) + i\ \sin(\theta_2))|1\rangle$

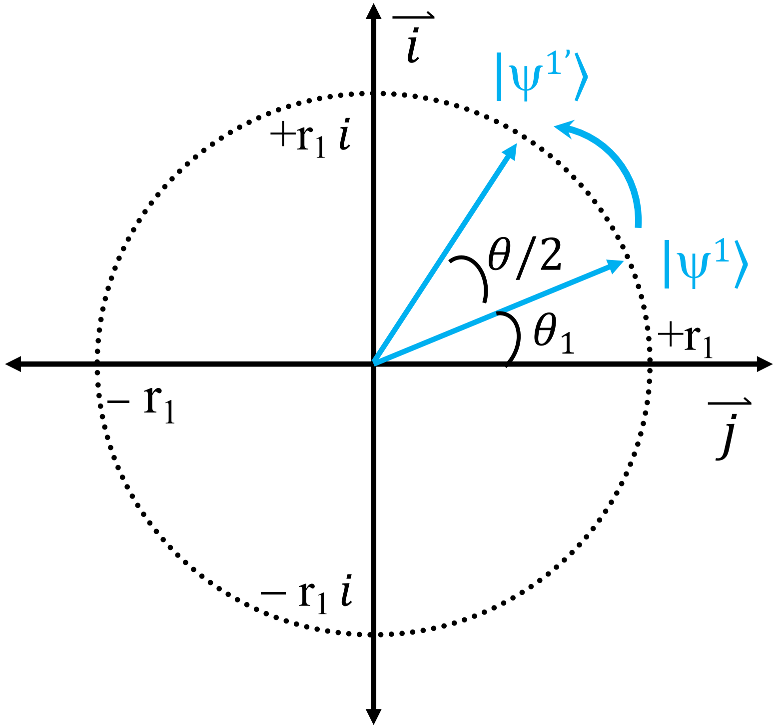
$e^{-i\theta/2} = \cos(\theta/2) + i\ \sin(\theta/2)$

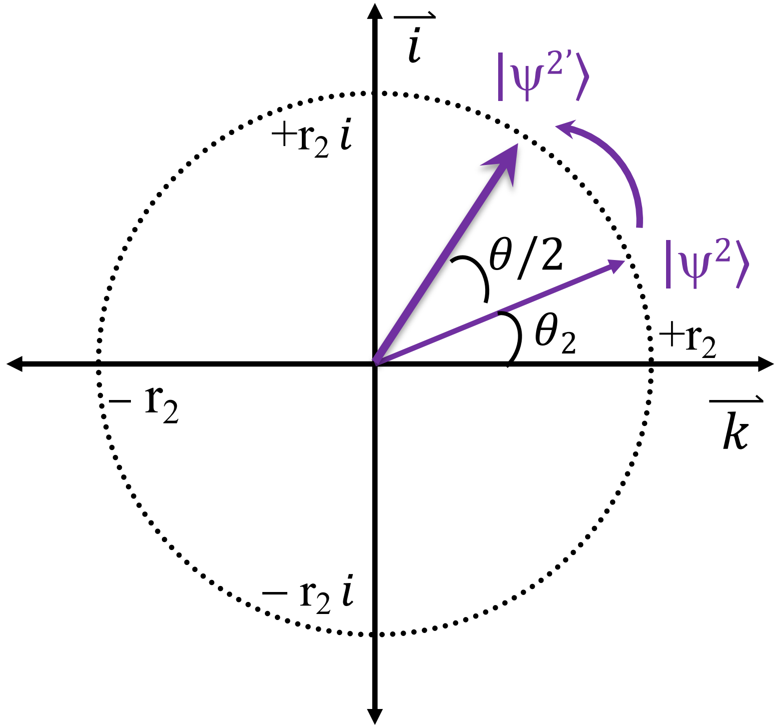
则 $e^{-i\theta/2}$ 作用在量子态 $|\psi\rangle$ ：

$$\begin{aligned} e^{-i\theta/2}|\psi\rangle &= r_1(\cos(\theta_1) + i\ \sin(\theta_1))(\cos(\theta/2) + i\ \sin(\theta/2))|0\rangle \\ &\quad + r_2(\cos(\theta_2) + i\ \sin(\theta_2))(\cos(\theta/2) + i\ \sin(\theta/2))|1\rangle \\ &= r_1(\cos(\theta_1 + \theta/2) + i\ \sin(\theta_1 + \theta/2))|0\rangle + r_2(\cos(\theta_2 + \theta/2) + i\ \sin(\theta_2 + \theta/2))|1\rangle \end{aligned}$$

RZ(θ) 门 – 全局相位

$$e^{-i\theta/2}\,|\psi\rangle = r_1(\cos(\theta_1+\theta/2)+i\ \sin(\theta_1+\theta/2))|0\rangle + r_2(\cos(\theta_2+\theta/2)+i\ \sin(\theta_2+\theta/2))|1\rangle$$





$|\psi^1\rangle$ 为 $|\psi\rangle$ 在 i-k 复平面的分量 $r_1(\cos(\theta_1)+i\ \sin(\theta_1))$

$|\psi^2\rangle$ 为 $|\psi\rangle$ 在 i-j 复平面的分量 $r_2(\cos(\theta_2)+i\ \sin(\theta_2))$

* 全局相位几何意义为：
所有复平面内向量同时旋转相同角度。
如果加上时间 t，则意味着有相同的角速度。
而周期旋转又可以理解为波。

目录

CONTENTS

矩阵的指数函数

泰勒公式：

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

利用函数的幂级数定义矩阵 A 的函数，矩阵A的指数函数表示：

$$e^A = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots + \frac{A^n}{n!}$$

如果 A 是对角阵：

$A = diag(A_{11}, A_{22}, A_{33}, \ldots)$

则(证明略)：

$A^n = diag(A_{11}^n, A_{22}^n, A_{33}^n, \ldots)$

$$e^A = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots + \frac{A^n}{n!}$$

$$= diag(1 + \frac{A_{11}^1}{1!} + \frac{A_{11}^2}{2!} + \frac{A_{11}^3}{3!} + \cdots, 1 + \frac{A_{22}^1}{1!} + \frac{A_{22}^2}{2!} + \frac{A_{22}^3}{3!} + \cdots, \ldots)$$

$$= diag(e^{A_{11}}, e^{A_{22}}, e^{A_{33}} \ldots)$$

如果A不是对角阵，则可以通过幺正变换将其对角化 $D = UAU^\dagger$

矩阵的指数函数 – 例子

如果 A 是 2 X 2 对角阵： $A=\begin{bmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & a_1 \end{bmatrix}$, a_0, a_1 为矩阵 A 的特征值。

则： $A^k=\begin{bmatrix} a_0^k & 0 \\ 0 & a_1^k \end{bmatrix}$

则：

$$e^A = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots + \frac{A^n}{n!} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & a_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{bmatrix} a_0^2 & 0 \\ 0 & a_1^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3!}\begin{bmatrix} a_0^3 & 0 \\ 0 & a_1^3 \end{bmatrix} + \dots$$

由于：

$$|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}[1\ 0] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}[0\ 1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可得：

$$e^A = diag(e^{A11}, e^{A22}, e^{A33} \dots) = \begin{bmatrix} e^{a_0} & 0 \\ 0 & e^{a_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{a_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{a_1} \end{bmatrix} = e^{a_0}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + e^{a_1}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = e^{a_0}|0\rangle\langle 0| + e^{a_1}|1\rangle\langle 1|$$

如果A为对角阵，容易根据特征值构造出矩阵指数函数形式。

生成元

泰勒公式：

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

根据上述公式：

$$\begin{aligned}
\mathrm{U}(\varphi) &= e^{(-i\varphi A)} \\
&= \mathrm{I} + \frac{-i\varphi A}{1!} + \frac{(-i\varphi A)^2}{2!} + \frac{(-i\varphi A)^3}{3!} + \cdots + \frac{(-i\varphi A)^n}{n!} \\
&= \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{\varphi^{2n}}{(2n)!}\right)\mathrm{I} - \mathrm{i}\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) A \\
&= \cos(\varphi)\,\mathrm{I} - \mathrm{i}\sin(\varphi) A
\end{aligned}$$

其中 $A^2 = \mathrm{I}$

这种表达形式称为以 A 为生成元生成的幺正变换（其对应的实数矩阵为正交矩阵，证明略）。

生成元 - 单位矩阵

单位矩阵 $\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

以单位矩阵 I 作为生成元，则可以构建一种特殊的幺正变换：

$$\mathrm{U}(\varphi) = e^{(-i\varphi A)} = \begin{bmatrix} e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{bmatrix} = e^{-i\varphi} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = e^{-i\varphi}\,\mathrm{I}$$

它作用在单量子态上，相当于对整体乘以一个系数。这个系数称为量子态的整体相位。

分别用不同的泡利矩阵 X, Y ,Z 作为生成元，可以构成RX, RY, RZ，即 $\mathrm{R_x}(\theta)$, $\mathrm{R_y}(\theta)$, $\mathrm{R_z}(\theta)$ 逻辑门。

泡利矩阵

泡利矩阵 (Pauli matrices) 有时也被称作自旋矩阵 (spin matrices)。三个泡利矩阵表示的泡利算符代表着对量子态最基本的操作。泡利算符是**一组三个2x2的幺正厄米复矩阵**，一般都以希腊字母 σ (西格玛)来表示。
读作泡利 x，泡利 y，泡利 z。

$$X = \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad Y = \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad Z = \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1 \quad \sigma_x \sigma_y = i\sigma_z \quad \sigma_y \sigma_z = i\sigma_x \quad \sigma_z \sigma_x = i\sigma_y$$

每个泡利矩阵有两个特征值，1 和 -1， 其对应的归一化特征向量为：

$$\psi_{x+} = |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \psi_{y+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \quad \psi_{z+} = |0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\psi_{x-} = |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \psi_{y-} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \quad \psi_{z-} = |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

生成元 - 泡利矩阵

根据 $U(\theta) = e^{(-i\varphi A)} = \cos(\theta)\ I - i\sin(\theta)A$，可得：

$$R_x(\theta) = e^{-i\theta X/2} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) I - i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)X$$

$R_x(\theta)$可将布洛赫球上的向量 **v** 绕 x 轴旋转 θ 角。

$$R_y(\theta) = e^{-i\theta Y/2} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) I - i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)Y$$

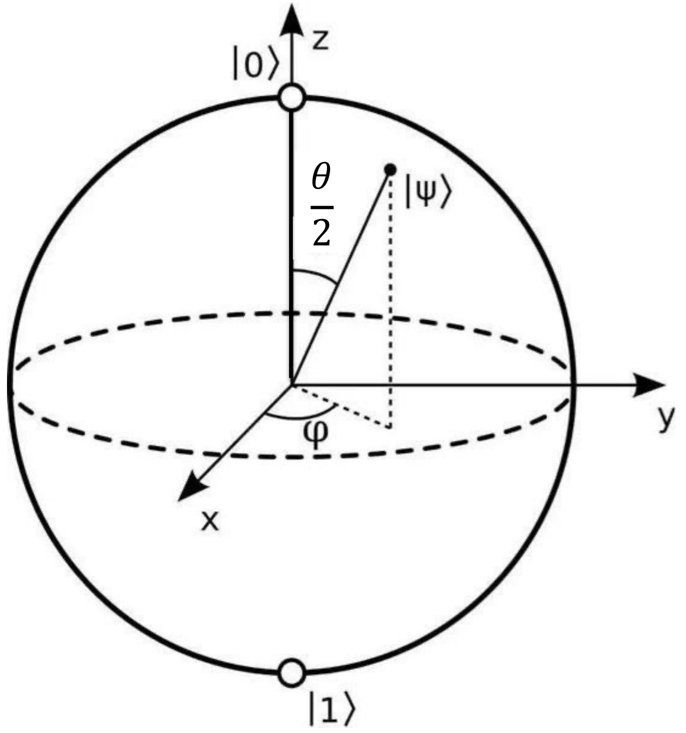
$R_y(\theta)$可将布洛赫球上的向量 **v** 绕 y 轴旋转 θ 角。

$$R_z(\theta) = e^{-i\theta Z/2} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) I - i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)Z$$

$R_z(\theta)$可将布洛赫球上的向量 **v** 绕 z 轴旋转 θ 角。

布洛赫球上的向量 **v** ：

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\frac{\theta}{2}\cos\varphi \\ \sin\frac{\theta}{2}\sin\varphi \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$



旋转算符

$$X = \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad Y = \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad Z = \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

由于 $X^2 = Y^2 = Z^2 = I$ 则有：

$$R_x(\theta) = e^{-i\theta X/2} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) I - i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)X = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta) = e^{-i\theta Y/2} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) I - i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)Y = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$R_z(\theta) = e^{-i\theta Z/2} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) I - i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)Z = \begin{bmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{bmatrix} = e^{-i\theta/2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}$$

由于$e^{-i\theta/2}$ 是一个整体相位，只考虑单门，则可以省略该参数。于是，RZ门矩阵可简写为：

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}$$

密度算符(矩阵)

1. 对于纯态（连接球心和球面上的点形成的一个矢量）量子态 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$，其密度矩阵为：

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{bmatrix}\alpha \\ \beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\alpha} & \bar{\beta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha\bar{\alpha} & \alpha\bar{\beta} \\ \beta\bar{\alpha} & \beta\bar{\beta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}|\alpha|^2 & \alpha\bar{\beta} \\ \beta\bar{\alpha} & |\beta|^2\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix}x \\ y \\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sin\frac{\theta}{2}\cos\varphi \\ \sin\frac{\theta}{2}\sin\varphi \\ \cos\frac{\theta}{2}\end{bmatrix}$$

其中 $\langle\psi| = |\psi\rangle^\dagger$，且矩阵迹为：$\mathrm{tr}(\rho) = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

2. 而对于如下量子态表达式：

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + (\sin\frac{\theta}{2}\cos\varphi + \sin\frac{\theta}{2}\sin\varphi)|1\rangle$$

则有：

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{bmatrix}\cos^2\frac{\theta}{2} & e^{-i\varphi}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} & \sin^2\frac{\theta}{2}\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1+\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta - i\sin\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi\sin\theta + i\sin\varphi\sin\theta & 1-\cos\theta\end{bmatrix}$$

密度矩阵有以下的性质:

- ✓ 对于一个两能级体系表述的态，不论是纯的还是混合的，都可以用密度矩阵 ρ 表示 。$\rho = \rho^2$ 当且仅当量子态时纯态时成立。
- ✓ ρ 对角线上的分量表示整个系统如果经历一次测量，可以得到这个态的概率。

密度算符（矩阵）

由于：

$$\mathrm{I} = \sigma_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathrm{X} = \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathrm{Y} = \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \mathrm{Z} = \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

则有：

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta - i\sin\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi\sin\theta + i\sin\varphi\sin\theta & 1-\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi\sin\theta & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -i\sin\varphi\sin\theta \\ -i\sin\varphi\sin\theta & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & -\cos\theta \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \cos\varphi\sin\theta\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \sin\varphi\sin\theta\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} + \cos\theta\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(\mathrm{I} + r_x\mathrm{X} + r_y\mathrm{Y} + r_z\mathrm{Z})$$

$$= \frac{1}{2}(\mathrm{I} + \vec{r}\cdot\vec{\sigma})$$

其中 $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{bmatrix}$ 布洛赫球上的单位向量，$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$ 泡利矩阵组成的三维向量

如果以 $\{I, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}\}$ 为基，则 ρ 与四元数同构。

密度算符（矩阵）

酉（幺正）变换是一种矩阵，它作用在量子态上得到的是一个新的量子态。 使用 U 来表达酉矩阵，$U^\dagger$ 表示酉矩阵的转置共轭矩阵，二者满足运算关系 $U^\dagger U = UU^\dagger = \mathrm{I}$。

一般酉变换在量子态上的作用是变换矩阵左乘右矢进行计算的。如开始量子态 $|\psi_0\rangle$ ，则状态的变换为一个 U 矩阵，变换后得到：

$$|\psi\rangle = U|\psi_0\rangle$$

通过酉变换表示密度矩阵的演化：

$$\rho_0 = |\psi\rangle\langle\psi| = |\psi\rangle\otimes(|\psi\rangle)^\dagger$$

$$\begin{aligned}\rho &= (U|\psi\rangle\otimes(U|\psi\rangle)^\dagger \\ &= (U|\psi\rangle)\otimes(\langle\psi|U^\dagger) \\ &= U|\psi\rangle\langle\psi|U^\dagger \\ &= U\rho_0 U^\dagger\end{aligned}$$

$\mathrm{R_z}(\theta)$ - 绕 Z 轴旋转 θ 角

通过酉变换 $\mathrm{R_z}(\theta)$ 表示密度矩阵的演化：

$$
\begin{aligned}
\rho &= \mathrm{R_z}(\theta)\rho_0\mathrm{R_z}(\theta)^\dagger \\
&= \mathrm{R_z}(\theta)\frac{1}{2}(\mathrm{I} + \vec{v} \cdot \vec{\sigma})\mathrm{R_z}(\theta)^\dagger \\
&= \mathrm{R_z}(\theta)\frac{1}{2}(\mathrm{I} + v_x\mathrm{X} + v_y\mathrm{Y} + v_z\mathrm{Z})\mathrm{Rz}(\theta)^\dagger \\
&= \frac{1}{2}(\mathrm{I} + v_x\mathrm{R_z}(\theta)\mathrm{X}\mathrm{Rz}(\theta)^\dagger + v_y\mathrm{R_z}(\theta)\mathrm{Y}\mathrm{Rz}(\theta)^\dagger + v_z\mathrm{R_z}(\theta)\mathrm{Z}\mathrm{Rz}(\theta)^\dagger)
\end{aligned}
$$

其中 $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{bmatrix}$ 布洛赫球上的单位向量，$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$ 泡利矩阵组成的三维向量

$R_z(\theta)$ - 绕 Z 轴旋转 θ 角

$$R_z(\theta) = e^{-i\theta Z/2} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) I - i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)Z$$

$$X^2 = Y^2 = Z^2 = -iXYZ = I$$
$$XY = -YX = iZ$$
$$YZ = -ZY = iX$$
$$ZX = -XZ = iY$$

$$\begin{aligned}
R_z(\theta)XRz(\theta)^{\dagger} &= \left(\cos\frac{\theta}{2}I - i\sin\frac{\theta}{2}Z\right)X\left(\cos\frac{\theta}{2}I + i\sin\frac{\theta}{2}Z\right)\\
&= \cos^2\frac{\theta}{2}X + i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}XZ - i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}ZX + \sin^2\frac{\theta}{2}ZXZ\\
&= \cos^2\frac{\theta}{2}X + \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}Y + \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}Y - \sin^2\frac{\theta}{2}X\\
&= \left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)X + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}Y\\
&= \cos\theta\, X + \sin\theta\, Y
\end{aligned}$$

同样的计算可得：

$$R_z(\theta)YRz(\theta)^{\dagger} = \cos\theta\, Y - \sin\theta\, X$$
$$R_z(\theta)ZRz(\theta)^{\dagger} = Z$$

$\mathrm{R_z}(\theta)$ - 绕 Z 轴旋转 θ 角

于是有：

$$\rho = \frac{1}{2}(\mathrm{I} + v_x \mathrm{R_z}(\theta)\mathrm{X}\mathrm{Rz}(\theta)^{\dagger} + v_y \mathrm{R_z}(\theta)\mathrm{Y}\mathrm{Rz}(\theta)^{\dagger} + v_z \mathrm{R_z}(\theta)\mathrm{Z}\mathrm{Rz}(\theta)^{\dagger})$$
$$= \frac{1}{2}(\mathrm{I} + v_x(\cos\theta\,\mathrm{X} + \sin\theta\,\mathrm{Y}) + v_y(\cos\theta\,\mathrm{Y} - \sin\theta\,\mathrm{X}) + v_z\mathrm{Z})$$
$$= \frac{1}{2}(\mathrm{I} + (v_x\cos\theta - v_y\sin\theta) + (v_x\sin\theta + v_y\cos\theta)\mathrm{Y} + v_z\mathrm{Z})$$

因为：

$$\rho' = \frac{1}{2}(\mathrm{I} + v'_x\mathrm{X} + v'_y\mathrm{Y} + v'_z\mathrm{Z})$$
$$= \frac{1}{2}(\mathrm{I} + \overrightarrow{v'} \cdot \vec{\sigma})$$

于是有：

$$v'_x\mathrm{X} = v_x\cos\theta - v_y\sin\theta$$
$$v'_y\mathrm{Y} = v_x\sin\theta + v_y\cos\theta$$
$$v'_z\mathrm{Z} = v_z$$

$R_z(\theta)$ - 绕 Z 轴旋转 θ 角

于是有：

$$\begin{aligned} v'_x X &= v_x \cos\theta - v_y \sin\theta \\ v'_y Y &= v_x \sin\theta + v_y \cos\theta \\ v'_z Z &= v_z \end{aligned}$$

绕 z 轴旋转 θ 角矩阵

$$\vec{v'} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{v}$$

其中 $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{bmatrix}$布洛赫球上的单位向量， $\vec{v'}$ 为 $\vec{v}$ 绕 z 轴旋转 θ 角后的向量

同样的方法可证：

$R_x(\theta)$ 为绕 x 轴旋转 θ 角矩阵

$R_y(\theta)$ 为绕 y 轴旋转 θ 角矩阵

目录
CONTENTS

四元数

四元数是复数的拓展，性质相似。相当于一个四维向量，在作为算子操作时，相当于一个四维矩阵。有兴趣的话可以找相关资料深入学习，这里就不展开了。

四元数的表示：

$$q = a + bi + cj + dk$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

X	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	-i	-1

一个四元数$q=a+bi+cj+dk$的共轭为 $q^* = a-bi-cj-dk$ （q^* 读作 q star).
如果用标量向量有序对的形式来定义的话，$q = [s, \mathbf{v}]$ 的共轭为 $q^* = [s, -\mathbf{v}]$.

四元数 – 加法和减法

四元数：

$$q_1 = a + bi + cj + dk$$
$$q_2 = e + fi + gj + hk$$

四元数的加法：

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= a + bi + cj + dk + e + fi + gj + hk \\ &= (a+e) + (b+f)i + (c+g)j + (d+h)k \end{aligned}$$

四元数的减法：

$$q_1 - q_2 = (a-e) + (b-f)i + (c-g)j + (d-h)k$$

四元数 – 乘法

四元数：

$$q_1 = a + bi + cj + dk$$
$$q_2 = e + fi + gj + hk$$

$$\begin{aligned} q_1 q_2 &= (a + bi + cj + dk)(e + fi + gj + hk) \\ &= ae + afi + agj + ahk + \\ &\quad bei - bf + bgk - bhj + \\ &\quad cej - cfk - cg + chi + \\ &\quad dek + dfj - dgi - dh \\ &= (ae - bf - cg - dh) + \\ &\quad (be + af - dg + ch)i + \\ &\quad (ce + cf + ag - bh)j + \\ &\quad (de - df + bg + ah)k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_2 q_1 &= (e + fi + gj + hk)(a + bi + cj + dk) \\ &= ea + ebi + ecj + edk + \\ &\quad fai - fb + fck - fdj + \\ &\quad gaj - gbk - gc + gdi + \\ &\quad hak + hbj - hci - hd \\ &= (ea - fb - gc - hd) + \\ &\quad (eb + fa + gd - hc)i + \\ &\quad (ec - fd + ga + hb)j + \\ &\quad (ed + fc - gb + ha)k \\ &= (ae - bf - cg - dh) + \\ &\quad (be + af + dg - ch)i + \\ &\quad (ce - df + ag + bh)j + \\ &\quad (de + cf - bg + ah)k \end{aligned}$$

左乘一个四元数等同于**左乘**这个矩阵:

$$= \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix}$$

右乘一个四元数等同于**左乘**这个矩阵:

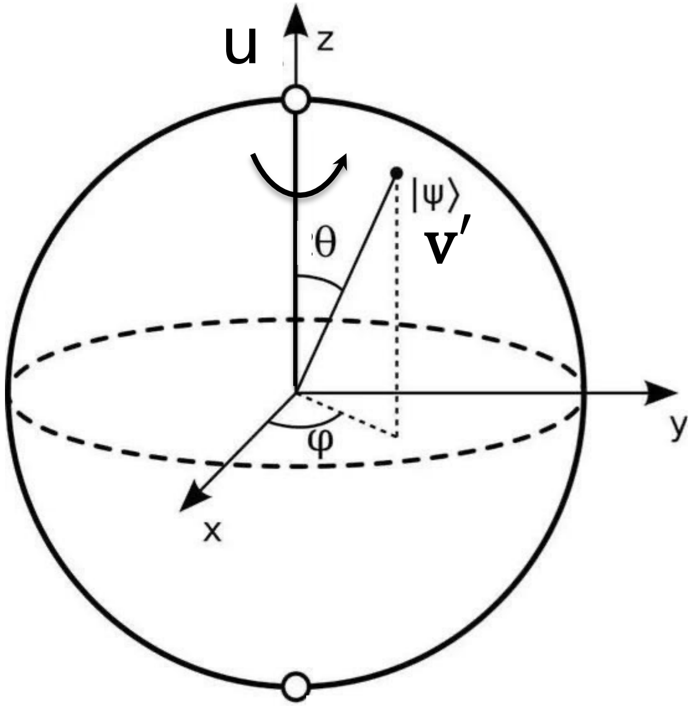
$$= \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix}$$

3D 旋转公式

3D 旋转公式 (Rodrigues Rotation Formula)：

3D 空间中任意一个 **v** = $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ 沿着单位向量 **u** 旋转 φ 角度之后的 **v'** 为:

$$\mathbf{v}' = \cos(\varphi)\mathbf{v} + (1-\cos(\varphi))(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u} + \sin(\varphi)(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$$



四维空间中旋转 – 四元数

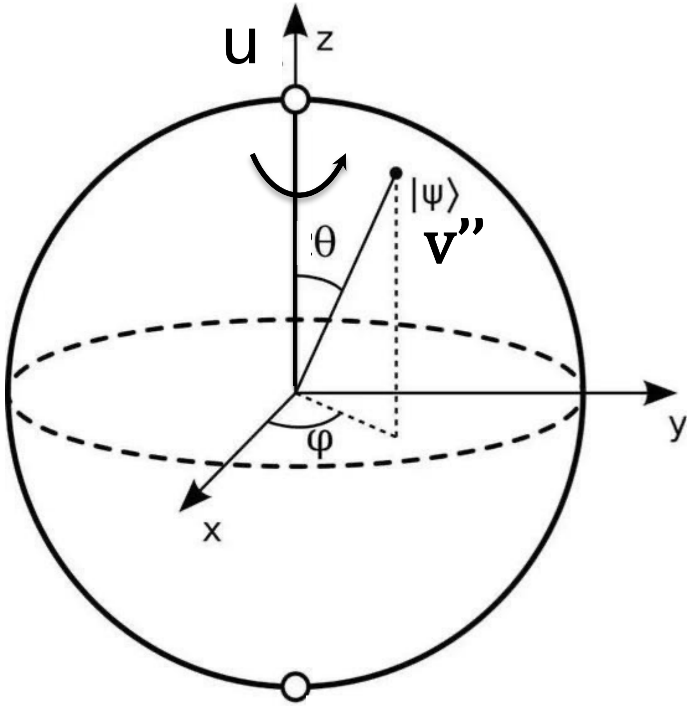
四维空间中任意向量 $\boldsymbol{v}$ = [0, **v**] ，在三维子空间中的投影 **v** 沿着单位向量 **u** 旋转 φ 度之后，有：

$$\boldsymbol{v}' = q\boldsymbol{v}q^{*} = q\boldsymbol{v}q^{-1}$$
$$= [0, \cos(\varphi)\mathbf{v} + (1-\cos(\varphi))(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u} + \sin(\varphi)(\mathbf{u}\times\mathbf{v})]$$

其中：

$$q = a + bi + cj + dk = [\cos(\tfrac{\varphi}{2}) \ ， \ \sin(\tfrac{\varphi}{2})\ \mathbf{u}\ ]$$

*上述公式的证明，涉及到四元数。四元数是复数的拓展，性质相似。相当于一个四维向量，在作为算子操作时，相当于一个四维矩阵。



四维空间中的三维子空间

四维空间中旋转 - 矩阵形式

由于：

$$\boldsymbol{v}' = q\boldsymbol{v}q^{-1} \qquad q = a + bi + cj + dk$$

左乘一个四元数 q 等同于**左乘**下面这个矩阵：

$$M_1 = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix}$$

右乘一个四元数 q 等同于**左乘**下面这个矩阵：

$$M_2 = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{bmatrix}$$

右乘一个四元数 q^{-1} 等同于**左乘** 矩阵 $M_3 = M_2^T$(M_2 转置）：

$$\mathrm{M}_3 = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix}$$

所以有：

$$\boldsymbol{v}' = q\boldsymbol{v}q^{-1} = \mathrm{M}_1\,\mathrm{M}_3\,\boldsymbol{v} = \mathrm{M}_3\,\mathrm{M}_1\boldsymbol{v}$$

四维空间中旋转 - 矩阵形式

$$\boldsymbol{v}' = q\boldsymbol{v}q^{-1} = \mathrm{M}_1\,\mathrm{M}_2\,\boldsymbol{v} = \mathrm{M}_2\,\mathrm{M}_1\boldsymbol{v}$$

$$= \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix} \boldsymbol{v}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2c^2-2d^2 & 2bc-2ad & 2ac+2bd \\ 0 & 2bc+2ad & 1-2b^2-2d^2 & 2cd-2ab \\ 0 & 2bd-2ac & 2ab+2cd & 1-2b^2-2c^2 \end{bmatrix} \boldsymbol{v}$$

$(a^2+b^2+c^2+d^2=1)$

这样我们就得到了四维空间里，三维子空间中的旋转的矩阵形式。

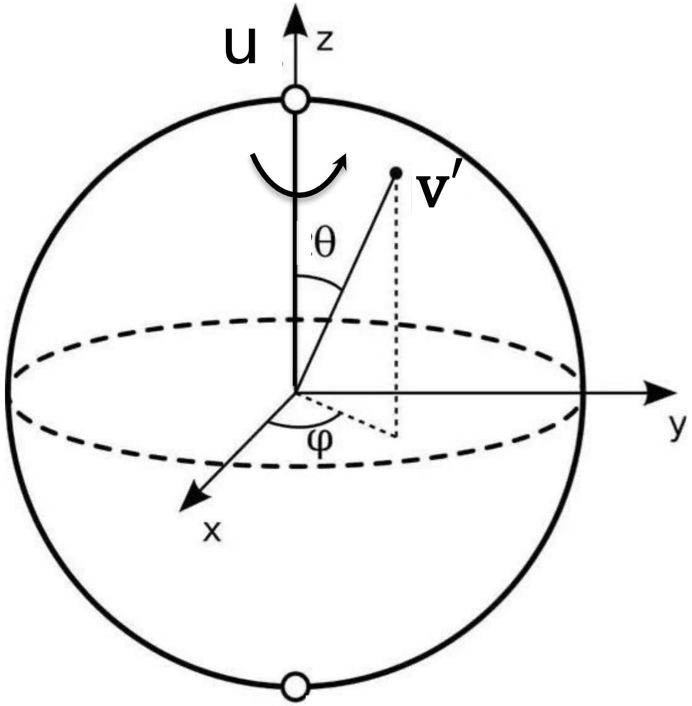
四维空间中旋转 - 矩阵形式

因为矩阵的最外层不对 v 进行任何变换，所以 4 × 4 矩阵可以压缩成 3 × 3 矩阵。于是得到四维空间中三维子空间的 3D 旋转公式 (矩阵型) ：

四维空间中任意向量 $\boldsymbol{v} = [0, \mathbf{v}]$ ，在三维子空间中的投影 **v** 沿着单位向量 **u** 旋转 φ 度之后 $\mathbf{v}'$ 为：

$$\mathbf{v}' = \begin{bmatrix} 1-2c^2-2d^2 & 2bc-2ad & 2ac+2bd \\ 2bc+2ad & 1-2b^2-2d^2 & 2cd-2ab \\ 2bd-2ac & 2ab+2cd & 1-2b^2-2c^2 \end{bmatrix} \mathbf{v}$$

$$\boldsymbol{v} = [0, \mathbf{v}] = \begin{bmatrix} 0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{q} = [\cos(\tfrac{\varphi}{2}), \ \sin(\tfrac{\varphi}{2})\,\mathbf{u}\,] = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\varphi}{2}) \\ \sin(\frac{\varphi}{2})\,u_x \\ \sin(\frac{\varphi}{2})\,u_y \\ \sin(\frac{\varphi}{2})\,u_z \end{bmatrix}$$



绕任意轴旋转 – 指数形式

欧拉公式复数形式：

$$e^{ix} = \cos x + i\ \sin x$$

类似于欧拉公式复数形式，四元数也有一个类似的公式，如果 **u** 是一个单位向量，那么对于单位四元数 u = [0, **u**]，即 $u = \mathbf{u}$ = $u_x i + u_y j + u_z k$，有（证明略）：

$$e^{u\frac{\theta}{2}} = \cos\frac{\theta}{2} + u\sin\frac{\theta}{2} = \cos\frac{\theta}{2} + \mathbf{u}\sin\frac{\theta}{2}$$

将 $u = u_x i + u_y j + u_z k$，代入公式可得：

$$e^{\frac{\theta}{2}(u_x i + u_y j + u_z k)} = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}(u_x i + u_y j + u_z k)$$

这个公式为四维空间中三维子空间绕单位向量 **u** 旋转 θ 角公式（证明略）。

绕任意轴旋转 – 指数形式

根据公式：

$$U(\varphi) = e^{(-i\varphi A)} = \cos(\varphi)\ I - i\sin(\varphi)A$$

如果 $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}$，$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$ 泡利矩阵组成的三维向量，

那么有：

$$A = \mathbf{u} \cdot \vec{\sigma} = u_x X + u_y Y + u_z Z$$

$$\begin{aligned} U(\varphi) = \boldsymbol{e}^{(-i\varphi\mathbf{u}\cdot\vec{\boldsymbol{\sigma}})} &= \cos(\varphi)\ I - i\sin(\varphi)\,\mathbf{u}\cdot\vec{\sigma} = \cos(\varphi)\ I - i\sin(\varphi)\,(u_x X + u_y Y + u_z Z) \\ &= \cos(\varphi)\ I + \sin(\varphi)\,\boldsymbol{(-u_x iX - u_y iY - u_z iZ)} \end{aligned}$$

如果以 $\{I, -iX, -iY, -iZ\}$ 为基，则 $U(\varphi)$ 与四元数同构，即（证明略）：

这个公式为四维空间中三维子空间绕单位向量 **u** 旋转公式。

绕任意轴旋转 – 指数形式

于是有 **u** = $\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}$ 是四维空间三维子空间中的实单位向量，那么在布洛赫球上绕 **u 旋转** φ 角度公式为(证明略)：

$$\mathrm{R}_u(\varphi) \equiv e^{(-i\varphi\mathbf{u}\cdot\vec{\sigma}\,/\,2)} \qquad \text{其中 } \vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

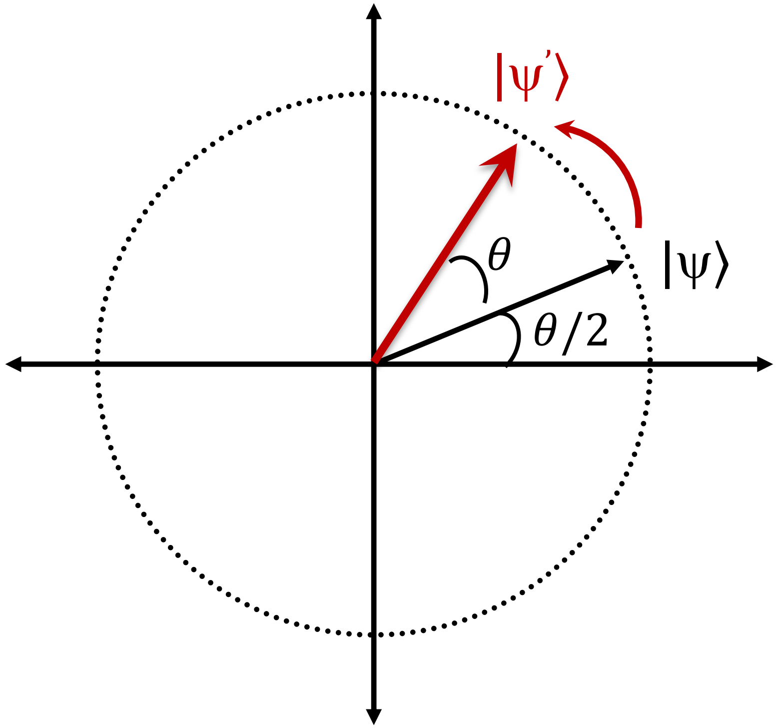
由于上述旋转，实质是四维空间中的旋转，所以需要乘以一个全局相位，以使 $|0\rangle$ 的系数为实数，所以有任意幺正变换公式为：

$$\mathrm{U} = e^{(i\alpha)}\mathrm{R}_u(\varphi)$$

目录

CONTENTS

二维常用几何变换 - 逆时针旋转 θ



$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)\ |0\rangle + \sin(\theta/2)\ |1\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{bmatrix}$$

* 量子态为实系数特例

$$Q = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

* 每次作用于向量，相当于逆时针旋转 θ

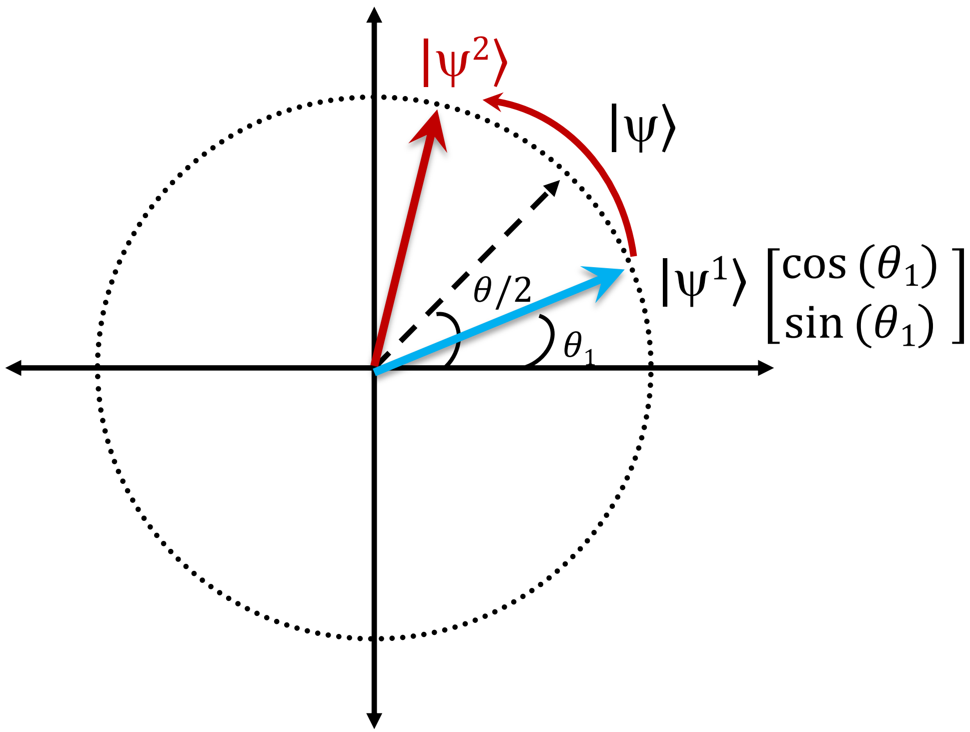
证明：

两角和与差的三角函数公式：

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp sin\,\alpha\sin\beta$$

$$\begin{aligned} |\psi'\rangle &= Q\,|\psi\rangle \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta)\cos(\theta/2) - sin(\theta)\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta)\ \cos(\theta/2)\ + \cos(\theta)\sin(\theta/2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta/2+\theta) \\ \sin(\theta/2+\theta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

二维常用几何变换 – 镜像



$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)\ |0\rangle + \sin(\theta/2)\ |1\rangle = \begin{bmatrix}\cos(\theta/2)\\ \sin(\theta/2)\end{bmatrix}$$

* 量子态为实系数特例

$$Q = \begin{bmatrix}\cos(\theta) & sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{bmatrix}$$

* 关于通过原点、方向和水平轴夹角为 $\theta/2$ 直线镜像;

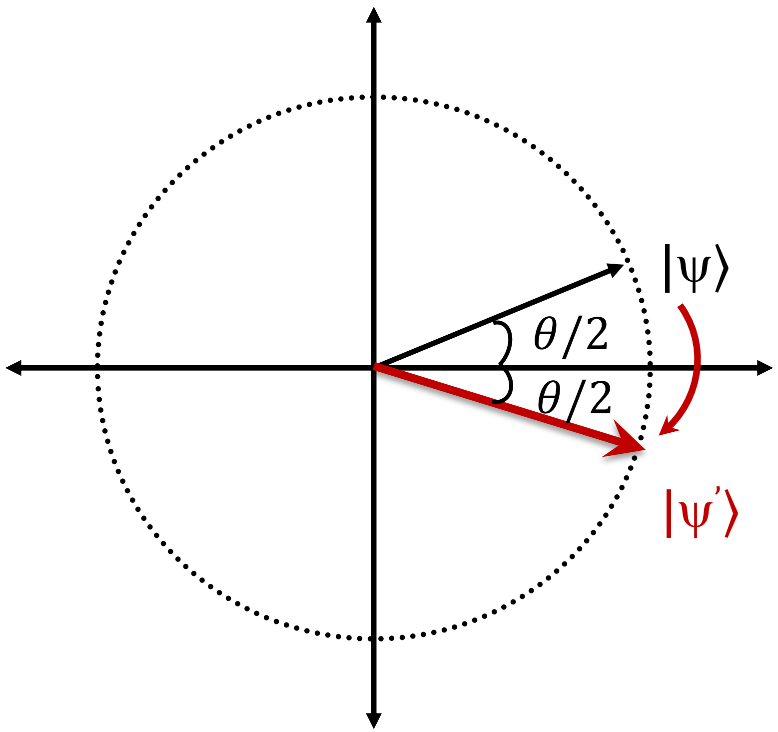
证明：

$$\begin{aligned}|\psi^2\rangle &= Q\ |\psi^1\rangle\\ &= \begin{bmatrix}\cos(\theta) & sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(\theta_1)\\ \sin(\theta_1)\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\cos(\theta)\cos(\theta_1) + sin(\theta)\sin(\theta_1)\\ \sin(\theta)\ \cos(\theta_1) - \cos(\theta)\sin(\theta_1)\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\cos(\theta-\theta_1)\\ \sin(\theta-\theta_1)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

关于通过原点、方向和水平轴夹角为 $\theta/2$ 直线镜像，可以理解为逆时针旋转 $2\left(\frac{\theta}{2}-\theta_1\right)$，则：

$$|\psi^2\rangle = \begin{bmatrix}\cos\left(\theta_1 + 2\left(\frac{\theta}{2} - \theta_1\right)\right)\\ \sin\left(\theta_1 + 2\left(\frac{\theta}{2} - \theta_1\right)\right)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos(\theta-\theta_1)\\ \sin(\theta-\theta_1)\end{bmatrix}$$

二维常用几何变换 -关于横轴镜像对称



$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)\ |0\rangle + \sin(\theta/2)\ |1\rangle = \begin{bmatrix}\cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2)\end{bmatrix}$$

* 量子态为实系数特例

$$Q = \begin{bmatrix}\cos(0) & sin(0) \\ \sin(0) & -\cos(0)\end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

* 作用于向量，相当于关于横轴镜像

证明：

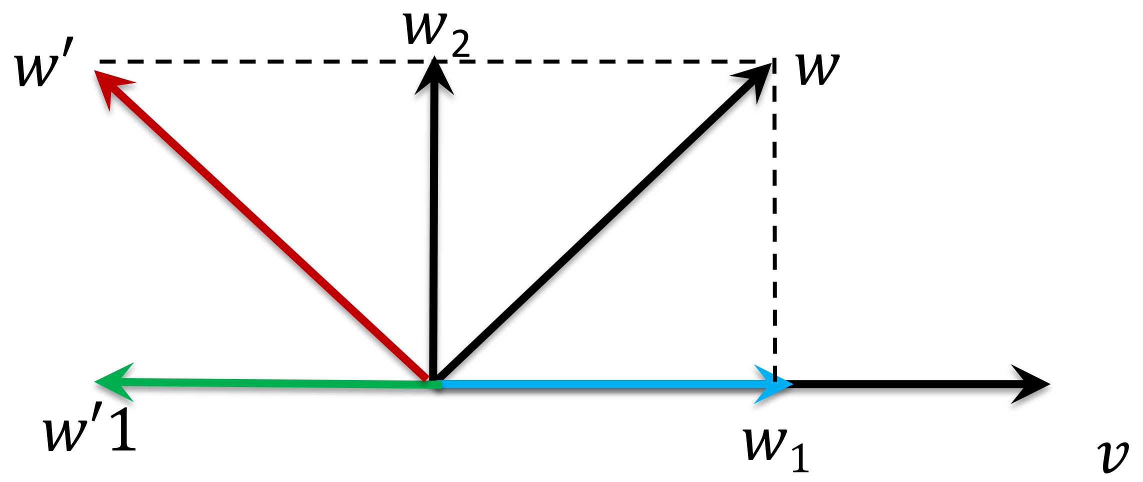
$$\begin{aligned} |\psi'\rangle &= Q\ |\psi\rangle \\ &= \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2)\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}\cos(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2)\end{bmatrix} \end{aligned}$$

任意维度反射变换 – 实向量空间

线性代数，在任意维度空间中，有如下反射变换，对应的矩阵为：

$$R_n = I_n - 2vv^T$$

在公式中，I_n 为 nxn 的单位矩阵，v为长度为 1 的 n 维列向量，vv^T为 nxn 的矩阵。
R_n 可以实现**反射变换**：把任意向量 w 与 v 平行的分量 w_1 反向为 $w'1$，而与 v 垂直的分量 w_2保持不变。

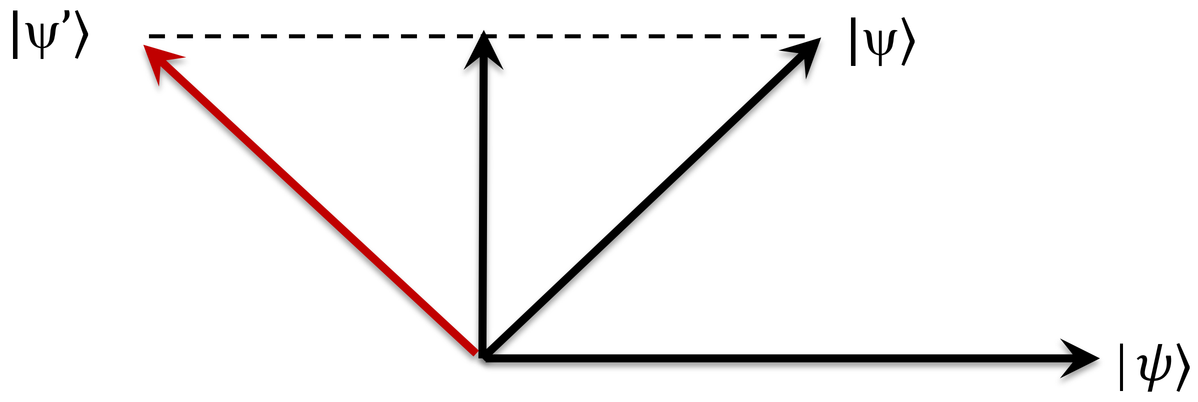


R_n 作用于任何向量，相当于关于 v 的垂直分量 w_2（法线）做镜像映射。

任意维度反射变换 – 复向量空间

根据我们之前总结的实向量与复向量的变换关系，我们可以得到下面等价的公式：

$$R_n = I_n - 2|\psi\rangle\langle\psi|$$



R_n 作用于任何量子态向量 |ψ⟩ ，相当于关于 $|\psi\rangle$ 垂直方向（法线）做镜像映射。

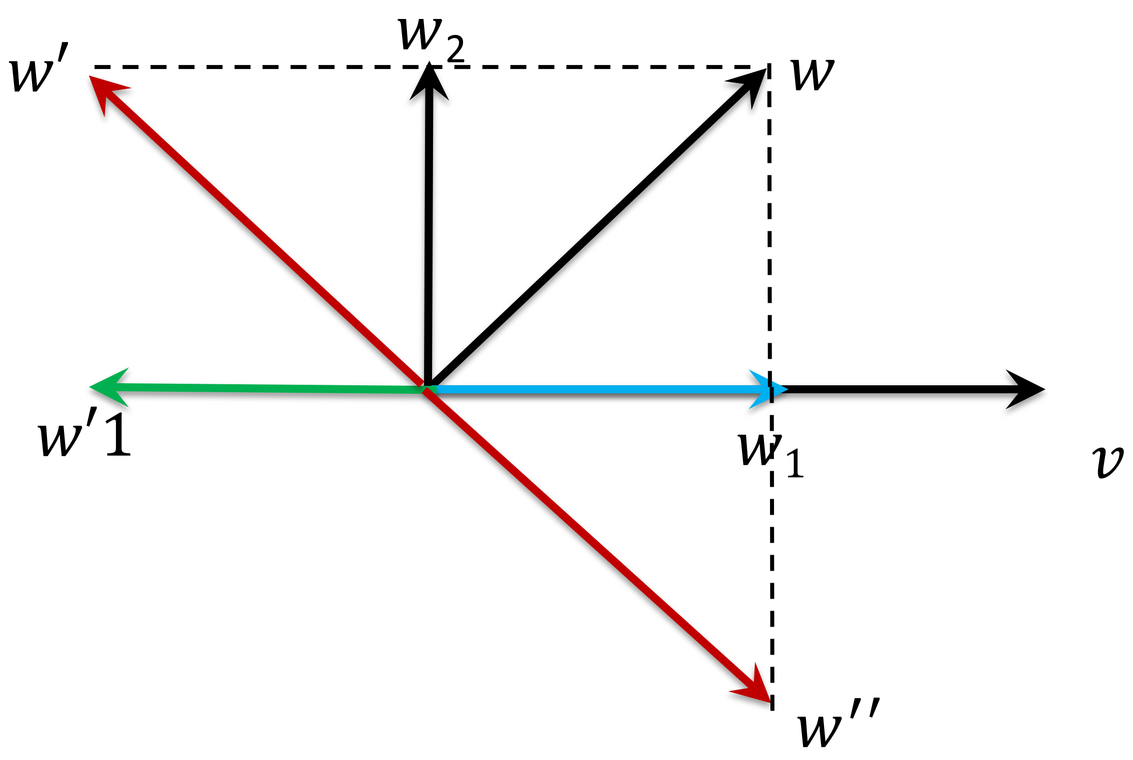
$$R_n = I_n - 2|\psi\rangle\langle\psi|$$

任意维度镜像变换 – 实向量空间

如果我们将公式改为下面的写法，也就是增加一个负号，我们看看它的几何性质：

$$R_n = 2vv^T - I_n$$

增加一个负号，相当于在任意维空间中，将 w' 翻转反向，至 w'' 的位置，显然，其与原向量关于 v 形成镜像映射关系。

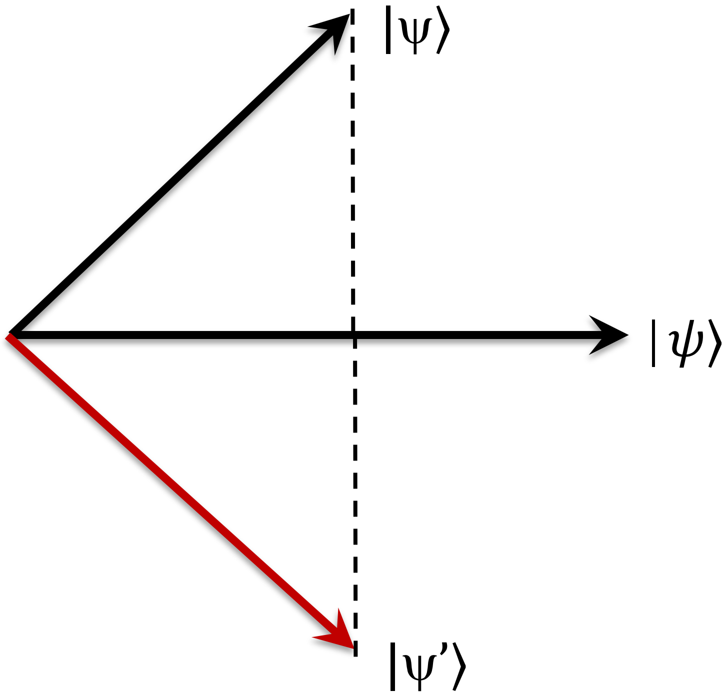


R_n 作用于任何向量，相当于关于 v 做镜像映射。

任意维度镜像变换 – 复向量空间

根据我们之前总结的实向量与复向量的变换关系，我们可以得到下面等价的公式：

$$R_n = 2|\psi\rangle\langle\psi| - I_n$$

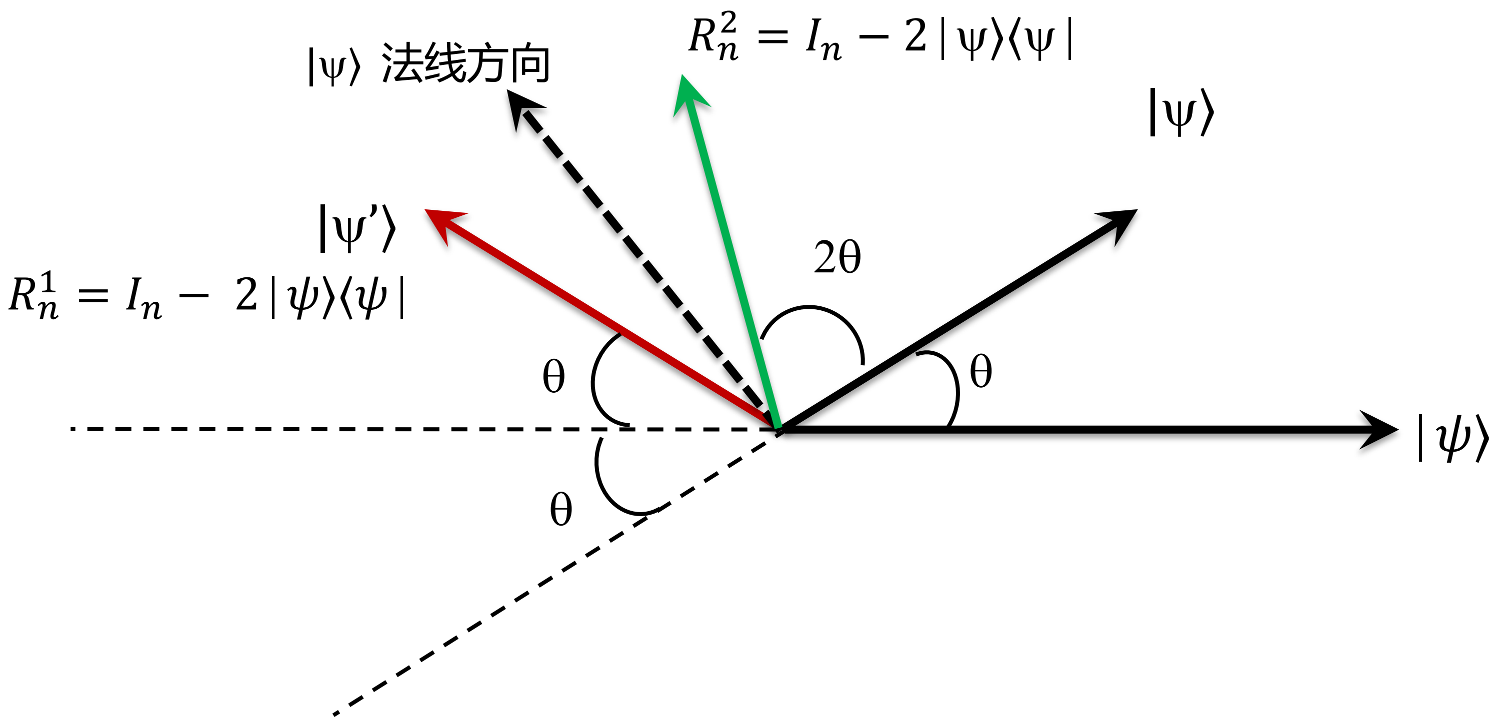


R_n 作用于任何量子态向量 $|\psi\rangle$ ，相当于关于 $|\psi\rangle$ 做镜像映射。

$$R_n = 2|\psi\rangle\langle\psi| - I_n$$

两次反射变换定义旋转

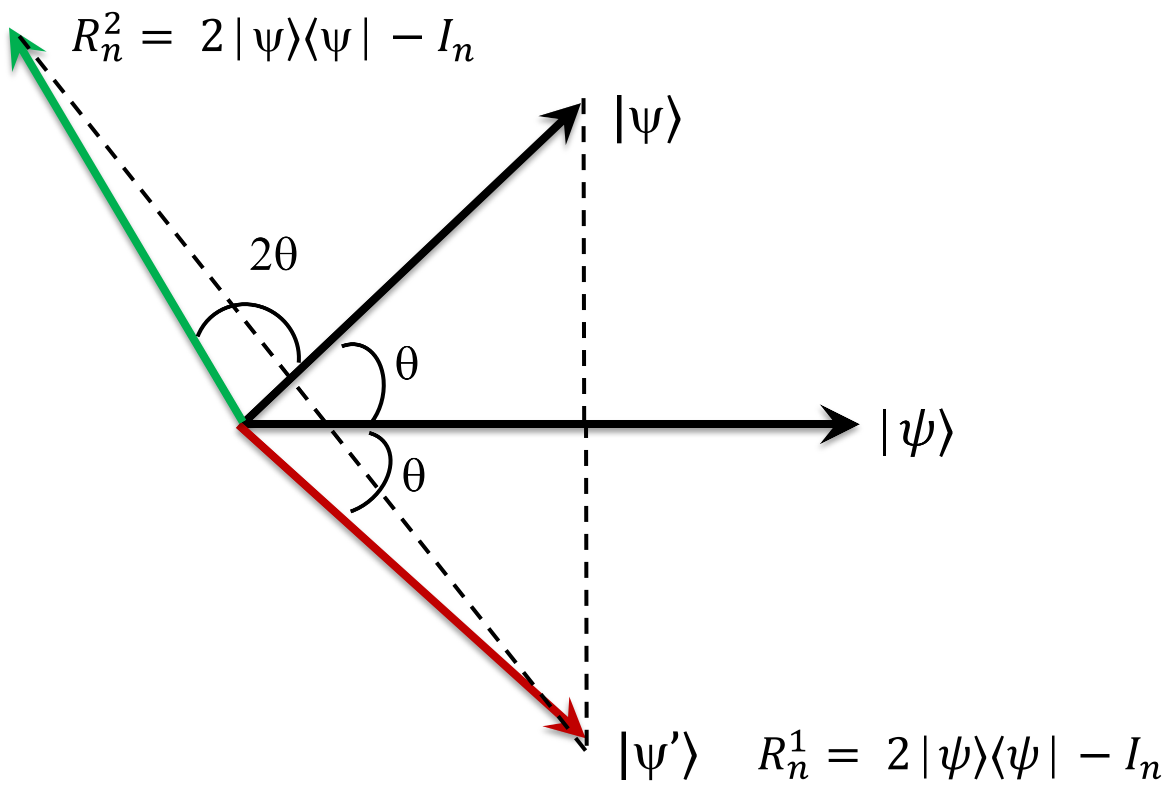
连续两次反射变换：



相当于逆时针旋转 2θ 角。

两次镜像变换定义旋转

连续两次镜像映射：



相当于逆时针旋转 2θ 角。

Qubit
qubits.top

Thank You