Qubits
qubits.top

量子计算

—数学基础

Quantum Computing

网址：www.qubits.top

作者：Calvin Tang

邮箱：179209347@qq.com

介绍

教程简介：

- 面向对象：量子计算初学者
- 依赖课程：线性代数，解析几何，量子力学（非必需）

知乎专栏：
https://www.zhihu.com/column/c_1501138176371011584

Github & Gitee 地址：
https://github.com/mymagicpower/qubits
https://gitee.com/mymagicpower/qubits

*** 版权声明：**

- 仅限用于个人学习，或者大学授课使用
  （大学授课如需ppt 原件，请用学校邮箱联系我获取）
- 禁止用于任何商业用途

单量子比特

一个量子比特 $|\psi\rangle$ 线性代数中的线性组合来表示为：

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

$$|0\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \quad |1\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

由于 α、β 都是复数，那么有：

$$\alpha = a + bi = r_0(\cos(\varphi_0) + i\ \sin(\varphi_0)) = r_0\, e^{i\varphi_0}$$

$$\beta = c + di = r_1(\cos(\varphi_1) + i\ \sin(\varphi_1)) = r_1\, e^{i\varphi_1}$$

那么有：

$$|\psi\rangle = r_0\, e^{i\varphi_0}|0\rangle + r_1\, e^{i\varphi_1}|1\rangle$$

4个实数（两个实质上的自由度）

单量子态布洛赫球 (Bloch Sphere) 几何表示

为什么实质上只有2个自由度呢？

$$|\psi\rangle = r_0 e^{i\varphi_0}|0\rangle + r_1 e^{i\varphi_1}|1\rangle = e^{i\varphi_0}\,(\,r_0|0\rangle + r_1 e^{i(\varphi_1-\varphi_0)}|1\rangle\,)$$

由于$e^{i\varphi_0}$（共同相位）对 $|0\rangle$ 、 $|1\rangle$ 影响都一样，即不改变量子态，且在实验上无法测量，所以公式简化为：

$$|\psi\rangle = r_0|0\rangle + r_1 e^{i(\varphi_1-\varphi_0)}|1\rangle = r_0|0\rangle + r_1 e^{i\varphi}|1\rangle$$

单量子态布洛赫球 (Bloch Sphere) 几何表示

$$|\psi\rangle = r_0|0\rangle + r_1 e^{i(\varphi_1-\varphi_0)}|1\rangle = r_0|0\rangle + r_1 e^{i\varphi}|1\rangle$$

由于：

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

则有：

$$|r_0 e^{i\varphi_0}|^2 + |r_1 e^{i\varphi_1}|^2 = r_0^2 |e^{i\varphi_0}|^2 + r_1^2 |e^{i\varphi_1}|^2 = r_0^2 + r_1^2 = 1$$

* 注意 $|e^{i\varphi_1}|^2$是复数模运算

令：

$$r_0 = \cos(\theta)$$
$$r_1 = \sin(\theta)$$

最终可得： $|\psi\rangle = r_0|0\rangle + r_1 e^{i\varphi}|1\rangle = \cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)\, e^{i\varphi}\, |1\rangle$ * 即得到布洛赫球公式

单量子态布洛赫球 (Bloch Sphere) 几何表示

$|\psi\rangle = \cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)\, e^{i\varphi}\, |1\rangle$

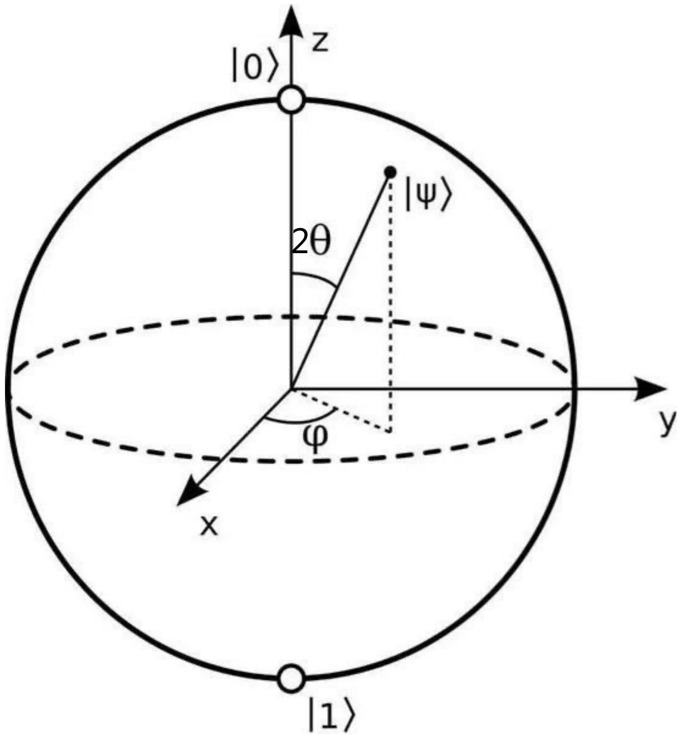
用2θ代替θ，且$0 \le \theta \le \pi/2$，$0 \le \varphi < 2\pi$

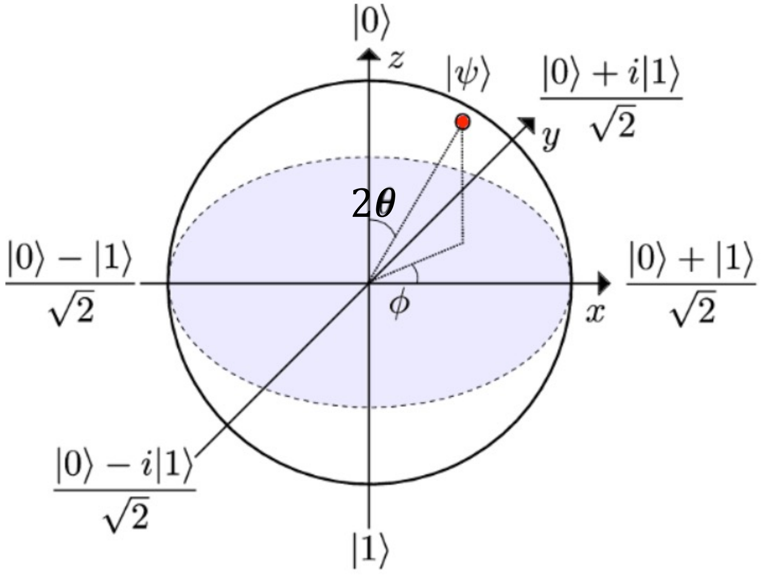
可得：

x = $\sin 2\theta \cos\varphi$

y = $\sin 2\theta \sin\varphi$

z = $\cos 2\theta$





单量子态几何表示

➢ 单量子态的几何（两个基向量的线性组合）表示：

$$|\psi\rangle = c_0\,|0\rangle + c_1\,|1\rangle$$

$$c_0 = r_0(\cos(\varphi_0) + i\ \sin(\varphi_0)) = r_0\, e^{i\varphi_0}$$
$$c_1 = r_1(\cos(\varphi_1) + i\ \sin(\varphi_1)) = r_1\, e^{i\varphi_1}$$

$|0\rangle$ 代表 $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ $|1\rangle$ 代表 $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

➢ 于是有：

$$\begin{aligned}|\psi\rangle &= c_0\,|0\rangle + c_1\,|1\rangle \\ &= r_0 e^{i\varphi_0}|0\rangle + r_1 e^{i\varphi_1}|1\rangle \\ &= r_0(\cos(\varphi_0) + i\ \sin(\varphi_0))|0\rangle + r_1(\cos(\varphi_1) + i\ \sin(\varphi_1))|1\rangle\end{aligned}$$

单量子态几何表示 – 降维

- 4个实数（3个实质上的自由度/维度）：

$$|\psi\rangle = r_0 e^{i\varphi_0}|0\rangle + r_1 e^{i\varphi_1}|1\rangle = r_0(\cos(\varphi_0) + i\ \sin(\varphi_0))|0\rangle + r_1(\cos(\varphi_1) + i\ \sin(\varphi_1))|1\rangle$$

- 为什么实质上只有 3 个自由度呢？

$$|\psi\rangle = r_0 e^{i\varphi_0}|0\rangle + r_1 e^{i\varphi_1}|1\rangle = e^{i\varphi_0}\left(r_0|0\rangle + r_1 e^{i(\varphi_1-\varphi_0)}|1\rangle\right)$$

由于$e^{i\varphi_0}$（共同相位）对 $|0\rangle$、$|1\rangle$ 影响都一样，即不改变量子态，且在实验上无法测量，所以公式简化为：

$$|\psi\rangle = r_0|0\rangle + r_1 e^{i(\varphi_1-\varphi_0)}|1\rangle = r_0|0\rangle + r_1 e^{i\varphi}|1\rangle$$

并且由于:

$|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$

$|r_0 e^{i\varphi_0}|^2 + |r_1 e^{i\varphi_1}|^2 = r_0^2|e^{i\varphi_0}|^2 + r_0^2|e^{i\varphi_1}|^2 = r_0^2 + r_1^2 = 1$ * 注意 $|e^{i\varphi_1}|^2$是复数模运算

令 $r_0 = \cos(\theta)$ ，$r_1 = \sin(\theta)$：

可得：

$$|\psi\rangle = r_0|0\rangle + r_1 e^{i\varphi}|1\rangle = \cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)\, e^{i\varphi}|1\rangle$$

单量子态几何表示 – 降维

因为：

$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle &= r_0|0\rangle + r_1 e^{i\varphi}|1\rangle \\
&= \cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)\, e^{i\varphi}\,|1\rangle \\
&= \cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)\,(\cos(\varphi) + i\ \sin(\varphi)\,)|1\rangle \\
&= \cos(\theta)|0\rangle + (\sin(\theta)\cos(\varphi) + i\ \sin(\theta)\sin(\varphi))\,|1\rangle
\end{aligned}
$$

此时减少了一个维度，只有 3 个自由度：

$$\cos(\theta)\,,\quad \sin(\theta)\cos(\varphi)\,,\quad \sin(\theta)\sin(\varphi)$$

单量子比特的**复向量**表示：

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix}\alpha \\ \beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\varphi) + i\ \sin(\theta)\sin(\varphi)\end{bmatrix}$$

单量子比特的**实向量**表示：

$$\begin{bmatrix}\cos(\theta) \\ 0 \\ \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi)\end{bmatrix}$$

由于其中一个维度始终为 0，
那么我们可以用三维空间来表示单量子比特。

单量子态几何表示 – 布洛赫球 (Bloch Sphere)

单量子比特的**实向量**表示：

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ 0 \\ \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) \end{bmatrix}$$

由于其中一个维度始终为 0，那么可以用三维空间来表示单量子比特：

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) \end{bmatrix}$$

用2θ代替θ， 且$0 \le \theta \le \pi/2$，$0 \le \varphi < 2\pi$

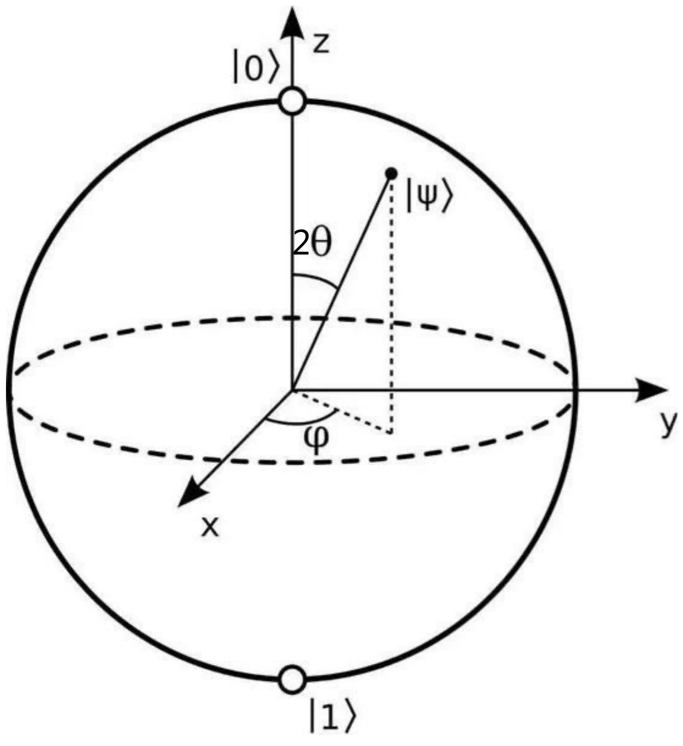
可得：

$x = \sin 2\theta \cos\varphi$

$y = \sin 2\theta \sin\varphi$

$z = \cos 2\theta$

* 即得到布洛赫球



Qubit
qubits.top

Thank You