

# 量子计算

## —数学基础

# Quantum Computer

网址: [www.qubits.top](http://www.qubits.top)

Calvin Tang

179209347@qq.com

# 介绍

## 教程简介：

- 面向对象：量子计算初学者
- 依赖课程：线性代数，解析几何，量子力学（非必需）

## 知乎专栏：

[https://www.zhihu.com/column/c\\_1501138176371011584](https://www.zhihu.com/column/c_1501138176371011584)

## Github & Gitee 地址：

<https://github.com/mymagicpower/qubits>

<https://gitee.com/mymagicpower/qubits>

## \* 版权声明：

- 仅限用于个人学习，或者大学授课使用  
（大学授课如需ppt原件，请用学校邮箱联系我获取）
- 禁止用于任何商业用途

# 单量子态几何表示

- 单量子态的几何（两个基向量的线性组合）表示：

$$|\psi\rangle = c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle$$

$$c_0 = r_0(\cos(\varphi_0) + i \sin(\varphi_0)) = r_0 e^{i\varphi_0}$$

$$c_1 = r_1(\cos(\varphi_1) + i \sin(\varphi_1)) = r_1 e^{i\varphi_1}$$

$$|0\rangle \text{ 代表 } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |1\rangle \text{ 代表 } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 于是有：

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle \\ &= r_0 e^{i\varphi_0} |0\rangle + r_1 e^{i\varphi_1} |1\rangle \\ &= r_0(\cos(\varphi_0) + i \sin(\varphi_0)) |0\rangle + r_1(\cos(\varphi_1) + i \sin(\varphi_1)) |1\rangle \end{aligned}$$

## 单量子态几何表示 – 降维

- 4个实数（3个实质上的自由度/维度）：

$$|\psi\rangle = r_0 e^{i\varphi_0} |0\rangle + r_1 e^{i\varphi_1} |1\rangle = r_0 (\cos(\varphi_0) + i \sin(\varphi_0)) |0\rangle + r_1 (\cos(\varphi_1) + i \sin(\varphi_1)) |1\rangle$$

- 为什么实质上只有 3 个自由度呢？

$$|\psi\rangle = r_0 e^{i\varphi_0} |0\rangle + r_1 e^{i\varphi_1} |1\rangle = e^{i\varphi_0} (r_0 |0\rangle + r_1 e^{i(\varphi_1 - \varphi_0)} |1\rangle)$$

由于  $e^{i\varphi_0}$ （共同相位）对  $|0\rangle$ 、 $|1\rangle$  影响都一样，即不改变量子态，且在实验上无法测量，所以公式简化为：

$$|\psi\rangle = r_0 |0\rangle + r_1 e^{i(\varphi_1 - \varphi_0)} |1\rangle = r_0 |0\rangle + r_1 e^{i\varphi} |1\rangle$$

并且由于：

$$|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$$

$$|r_0 e^{i\varphi_0}|^2 + |r_1 e^{i\varphi_1}|^2 = r_0^2 |e^{i\varphi_0}|^2 + r_1^2 |e^{i\varphi_1}|^2 = r_0^2 + r_1^2 = 1 \quad * \text{注意 } |e^{i\varphi_1}|^2 \text{ 是复数模运算}$$

令  $r_0 = \cos(\theta)$ ， $r_1 = \sin(\theta)$ ：

可得：

$$|\psi\rangle = r_0 |0\rangle + r_1 e^{i\varphi} |1\rangle = \cos(\theta) |0\rangle + \sin(\theta) e^{i\varphi} |1\rangle$$



## 单量子态几何表示 – 降维

因为：

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle &= r_0|0\rangle + r_1 e^{i\varphi} |1\rangle \\
 &= \cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta) e^{i\varphi} |1\rangle \\
 &= \cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta) (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) |1\rangle \\
 &= \cos(\theta)|0\rangle + (\sin(\theta) \cos(\varphi) + i \sin(\theta) \sin(\varphi)) |1\rangle
 \end{aligned}$$

此时减少了一个维度，只有 3 个自由度：

$$\cos(\theta), \quad \sin(\theta) \cos(\varphi), \quad \sin(\theta) \sin(\varphi)$$

单量子比特的**复向量**表示：

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \cos(\varphi) + i \sin(\theta) \sin(\varphi) \end{bmatrix}$$

单量子比特的**实向量**表示：

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ 0 \\ \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) \end{bmatrix}$$

由于其中一个维度始终为 0，  
那么我们可以用三维空间来表示单量子比特。

# 单量子态几何表示 – 布洛赫球 (Bloch Sphere)

单量子比特的**实向量**表示：

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ 0 \\ \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) \end{bmatrix}$$

由于其中一个维度始终为 0，那么可以用三维空间来表示单量子比特：

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) \end{bmatrix}$$

用  $2\theta$  代替  $\theta$ ，且  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ， $0 \leq \varphi < 2\pi$

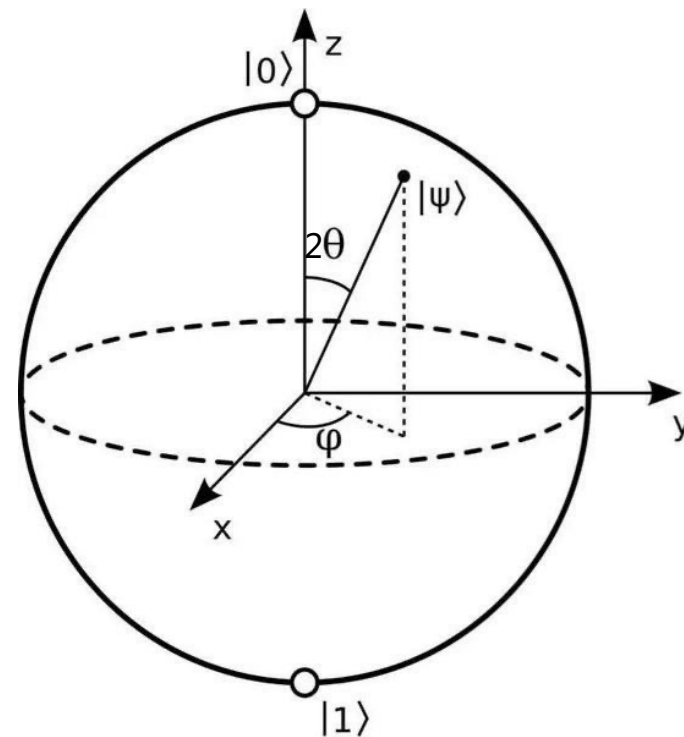
可得：

$$x = \sin 2\theta \cos \varphi$$

$$y = \sin 2\theta \sin \varphi$$

$$z = \cos 2\theta$$

\* 即得到布洛赫球





Thank

You