量子计算
—基础篇

Quantum Computer

网址：www.qubits.top

Calvin Tang

179209347@qq.com

介绍

教程简介：

- 面向对象：量子计算初学者
- 依赖课程：线性代数，解析几何，量子力学（非必需）

知乎专栏：
https://www.zhihu.com/column/c_1501138176371011584

Github & Gitee 地址：
https://github.com/mymagicpower/quantum_quest
https://gitee.com/mymagicpower/quantum_quest

*** 版权声明：**

- 仅限用于个人学习，或者大学授课使用
  （大学授课如需ppt 原件，请用学校邮箱联系我获取）
- 禁止用于任何商业用途

量子线路介绍

所谓量子线路，从本质上是一个量子逻辑门的执行序列，它是从左至右依次执行的。

量子线路，也称量子逻辑电路是最常用的通用量子计算模型，表示在抽象概念下，对于量子比特进行操作的线路。组成包括了量子比特、线路（时间线），以及各种逻辑门。最后常需要量子测量将结果读取出来。

不同于传统电路是用金属线所连接以传递电压讯号或电流讯号，在量子线路中，线路是由时间所连接，亦即量子比特的状态随着时间自然演化，过程中是按照哈密顿运算符的指示，一直到遇上逻辑门而被操作。

由于组成量子线路的每一个量子逻辑门都是一个酉算子 ，所以整个量子线路整体也是一个大的酉算子。

来源：本源量子

本源量子云

本节内容基于本源量子的量子云平台编写。可以免费在线测试使用。
https://qcloud.originqc.com.cn/quantumVm/0/0

单比特量子逻辑门

I	`I`	$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$
H	`Hadamard`	$\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$
T	`T`	$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & \exp(i\pi/4)\end{bmatrix}$
S	`S`	$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1i\end{bmatrix}$
X	`Pauli-X`	$\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$
Y	`Pauli-Y`	$\begin{bmatrix}0 & -1i\\1i & 0\end{bmatrix}$
Z	`Pauli-Z`	$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$
X_1	`X1`	$\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & -1i/\sqrt{2}\\-1i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$
Y_1	`Y1`	$\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$

Z_1	`Z1`	$\begin{bmatrix}\exp(-i\pi/4) & 0\\0 & \exp(i\pi/4)\end{bmatrix}$
X_θ	`RX`	$\begin{bmatrix}\cos(\theta/2) & -1i\times\sin(\theta/2)\\-1i\times\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2)\end{bmatrix}$
Y_θ	`RY`	$\begin{bmatrix}\cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2)\\\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2)\end{bmatrix}$
Z_θ	`RZ`	$\begin{bmatrix}\exp(-i\theta/2) & 0\\0 & \exp(i\theta/2)\end{bmatrix}$
U_1	`U1`	$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & \exp(i\theta)\end{bmatrix}$
U_2	`U2`	$\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & -\exp(i\lambda)/\sqrt{2}\\\exp(i\phi)/\sqrt{2} & \exp(i\lambda+i\phi)/\sqrt{2}\end{bmatrix}$
U_3	`U3`	$\begin{bmatrix}\cos(\theta/2) & -\exp(i\lambda)\times\sin(\theta/2)\\\exp(i\phi)\times\sin(\theta/2) & \exp(i\lambda+i\phi)\times\cos(\theta/2)\end{bmatrix}$
U_4	`U4`	$\begin{bmatrix}u0 & u1\\u2 & u3\end{bmatrix}$

多比特量子逻辑门

+	CNOT	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
CR	CR	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp(i\theta) \end{bmatrix}$
i	iSWAP	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -i \times \sin(\theta) & 0 \\ 0 & -i \times \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
SWAP	SWAP	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
CZ	CZ	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
CU	CU	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u0 & u1 \\ 0 & 0 & u2 & u3 \end{bmatrix}$
Toff	Toffoli	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

H (Hadamard) 门

Hadamard 门是一种可以将基态变为叠加态的量子逻辑门，简称H门。

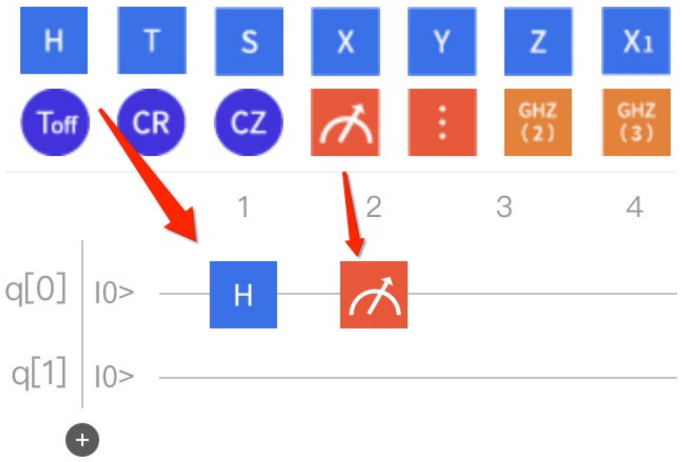
矩阵形式 $H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\langle 0| + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}\langle 1|$

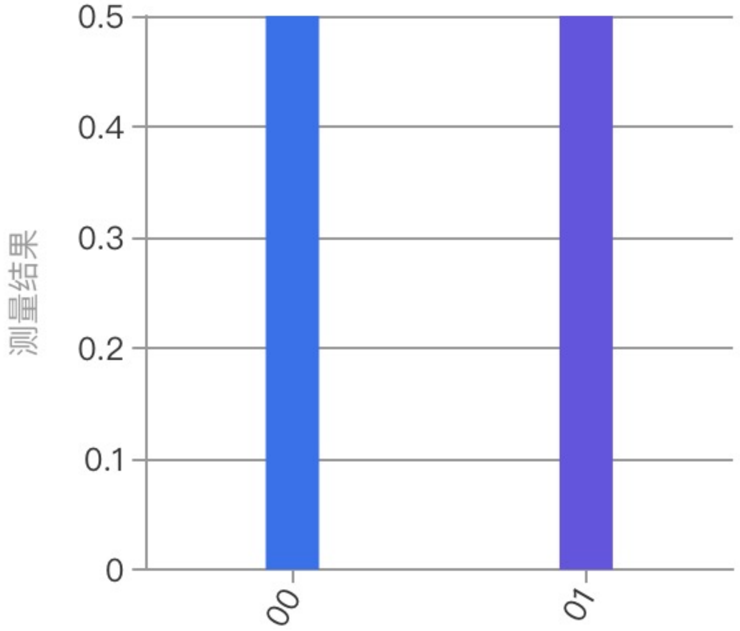
量子线路符号：

测量符号：

H 门作用在基态：

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\,|0\rangle + |1\rangle\,\right)$$





Pauli-X 门

Pauli-X 作用在单量子比特上，跟经典计算机的NOT门的量子等价，将量子态翻转，量子态变换规律是：

$$|0\rangle \rightarrow |1\rangle$$
$$|1\rangle \rightarrow |0\rangle$$

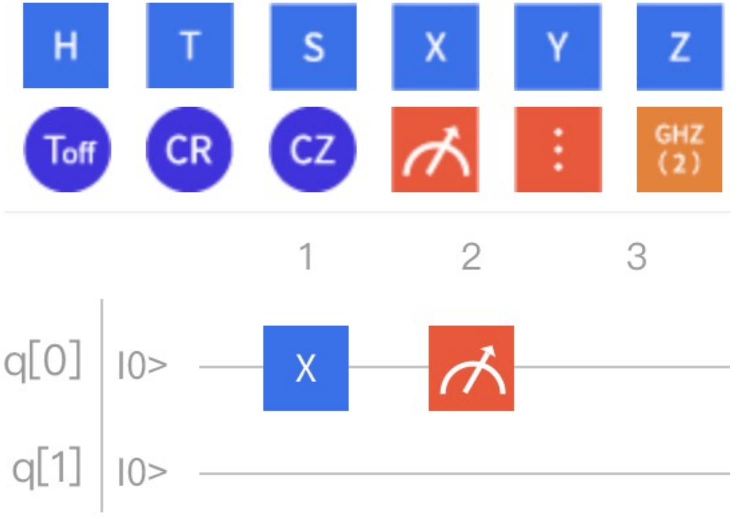
Pauli-X 门矩阵形式为泡利矩阵σ_x，即：

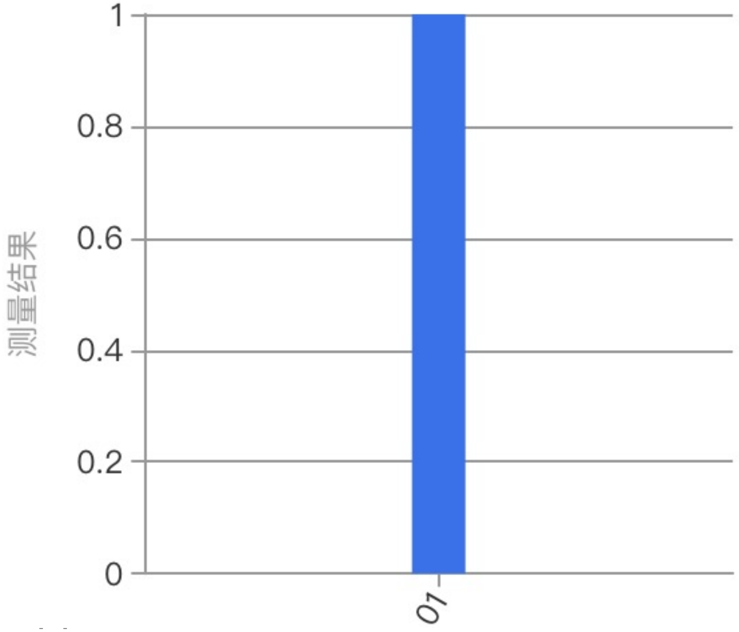
$$X = \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pauli-X 门矩阵又称为NOT门，其量子线路符号：

X 门作用在基态：

$$X|0\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |1\rangle$$





Pauli-Y 门

Pauli-Y 作用在单量子比特上，作用相当于绕布洛赫球 Y 轴旋转角度π.

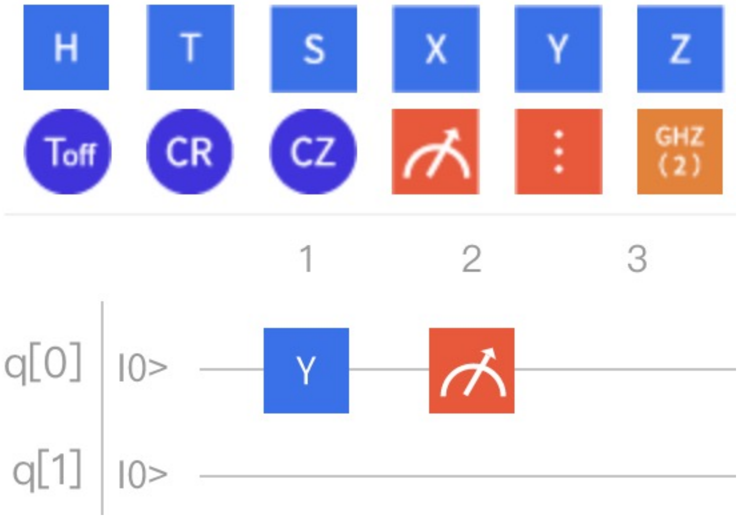
Pauli-Y 门矩阵形式为泡利矩阵σ_y，即：

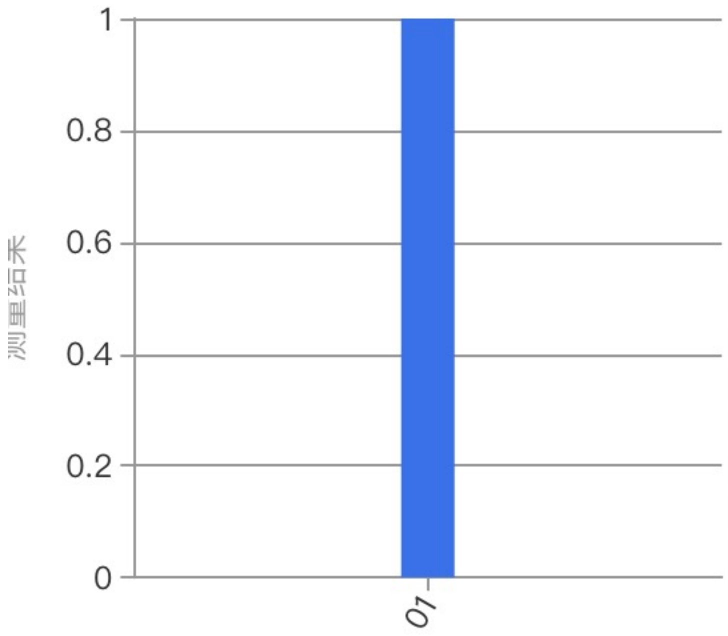
$$Y = \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

其量子线路符号：

Y 门作用在基态：

$$Y|0\rangle = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} = i\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = i|1\rangle$$





Pauli-Z 门

Pauli-Z 作用在单量子比特上，作用相当于绕布洛赫球 Z 轴旋转角度π.

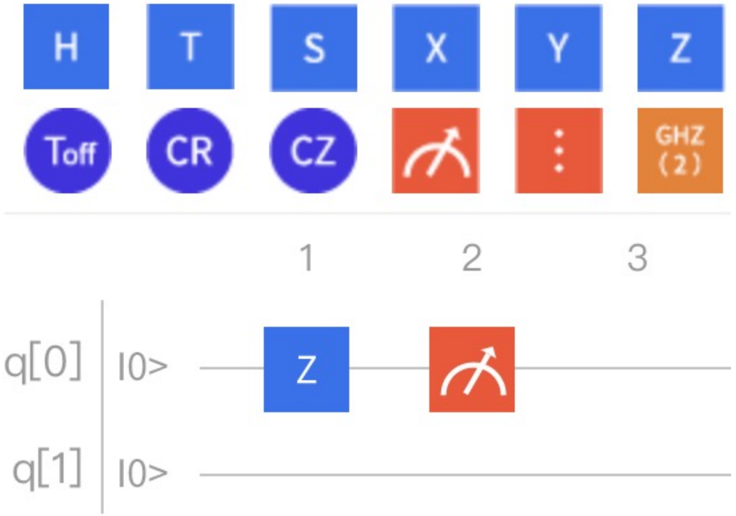
Pauli-Z 门矩阵形式为泡利矩阵σ_z，即：

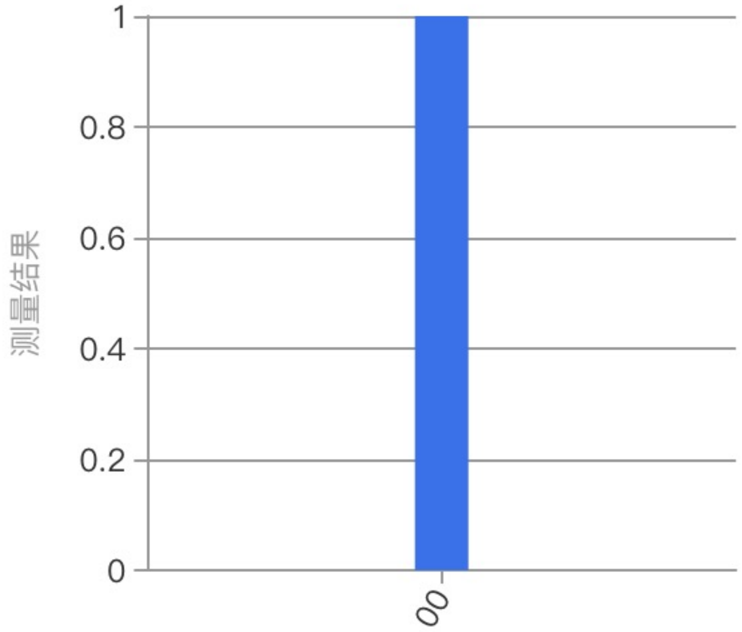
$$Z = \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

其量子线路符号：

Z 门作用在基态：

$$Z|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |0\rangle$$





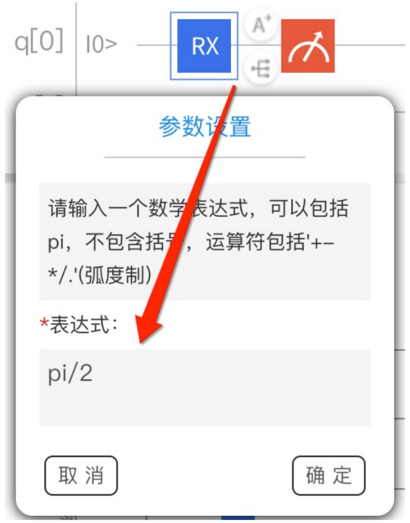
RX(θ) 门

RX门由Pauli-X 矩阵作为生成元生成，其矩阵形式为：

$$R_x(\theta) = e^{-i\theta X/2} = \cos(\theta/2)\,\mathrm{I} - \mathrm{i}\sin(\theta/2)\mathrm{X}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -i\sin(\theta/2) \\ -\mathrm{i}\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

设置参数 $\theta = \pi$ / 2：



其量子线路符号

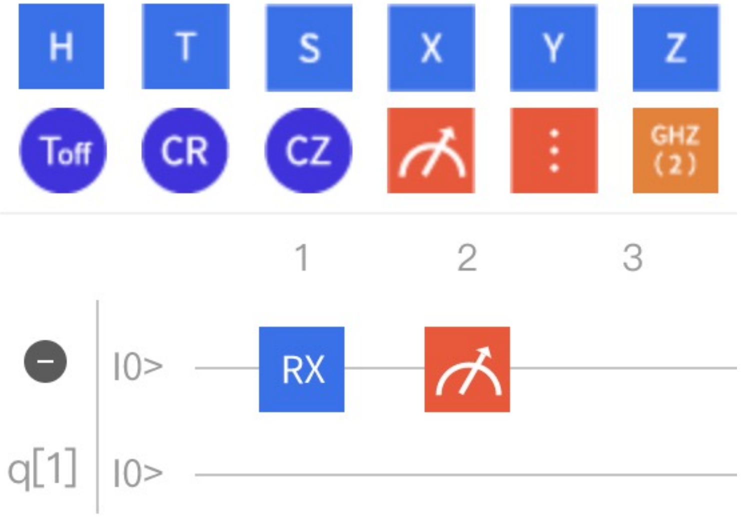
RX(π/2)门作用在基态：

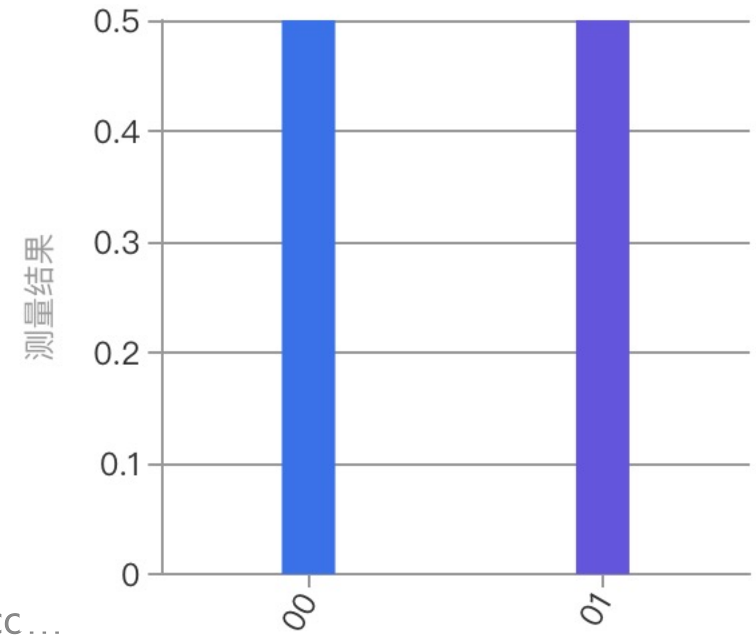
$$R_x(\theta)\,|0\rangle = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ -\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ -i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)|0\rangle - \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)|1\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\,|1\rangle$$





RY(θ) 门

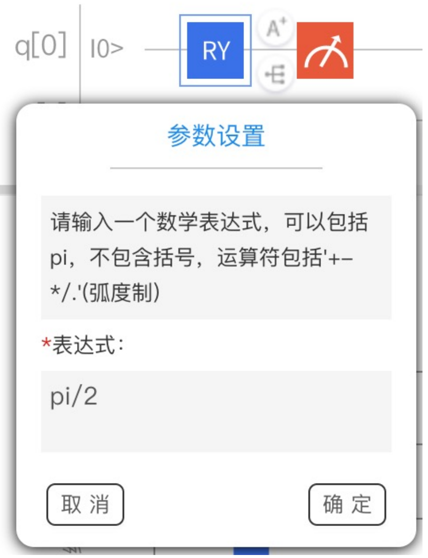
RY门由Pauli-Y 矩阵作为生成元生成，其矩阵形式为：

$$R_y(\theta) = e^{-i\theta Y/2} = \cos(\theta/2)\,\mathrm{I} - \mathrm{i}\,\sin(\theta/2)\mathrm{Y}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

其量子线路符号 

设置参数 $\theta = \pi/2$：



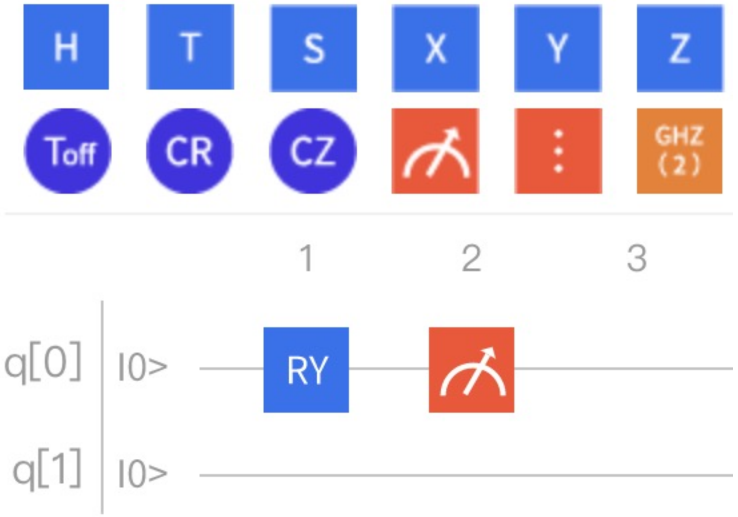
RY(π/2) 门作用在基态：

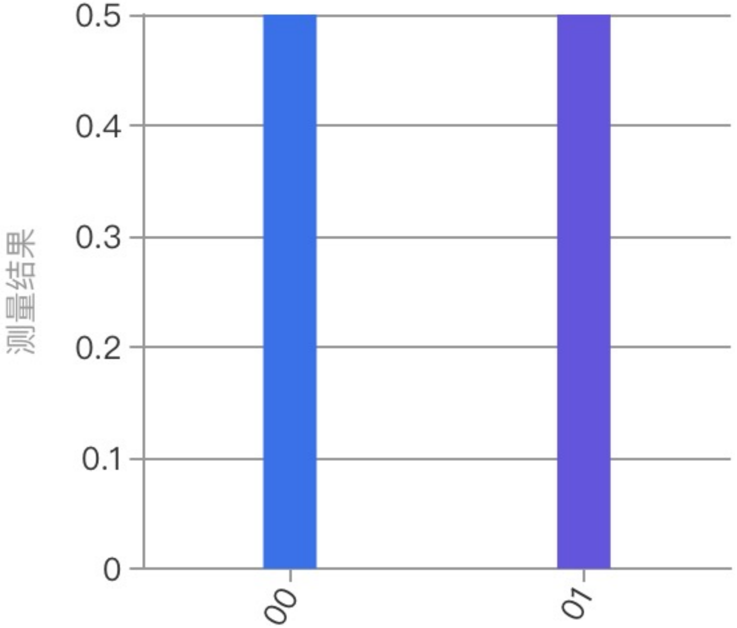
$$R_y(\theta)\,|0\rangle = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)|0\rangle + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)|1\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$





RZ(θ) 门

RZ门又称为相位转化门(phase-shift gate)，由Pauli-Z 矩阵作为生成元生成，其矩阵形式为：

$$R_z(\theta) = e^{-i\theta Z/2} = \cos(\theta/2)\,\mathrm{I} - i\sin(\theta/2)\mathrm{Z}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{bmatrix} = e^{-i\theta/2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}$$

$e^{-i\theta/2}$ 并没有对计算基|0⟩ 和 |1⟩ 做任何改变，而只是在原来的态上绕Z轴逆时针旋转θ角。

其量子线路符号：

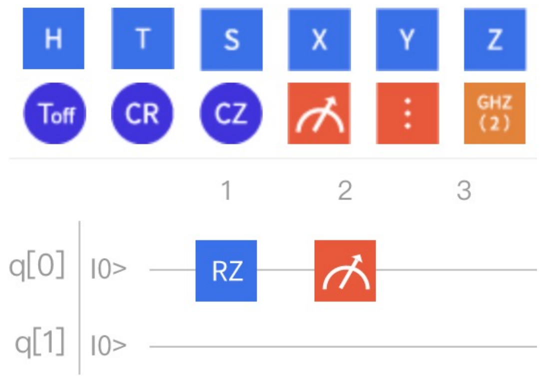
由于$e^{-i\theta/2}$ 是一个全局相位，其没有物理意义，只考虑单门，则可以省略该参数。于是，RZ门矩阵可简写为：

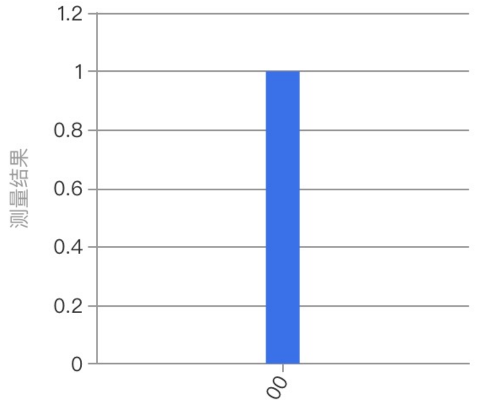
$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}$$

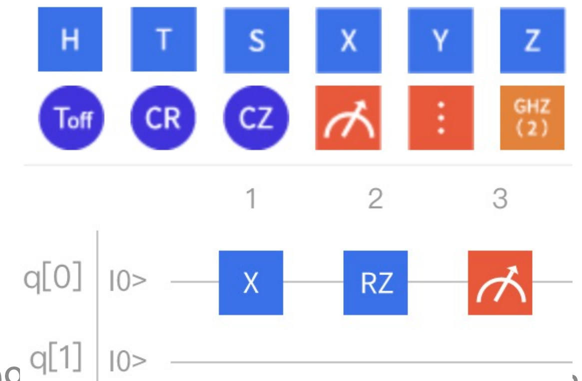
RZ门作用在基态：

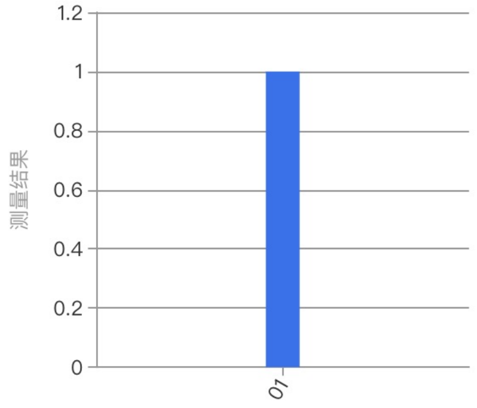
$$R_z(\theta)\,|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |0\rangle$$

$$R_z(\theta)\,|1\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{i\theta} \end{bmatrix} = e^{i\theta}\,|1\rangle$$





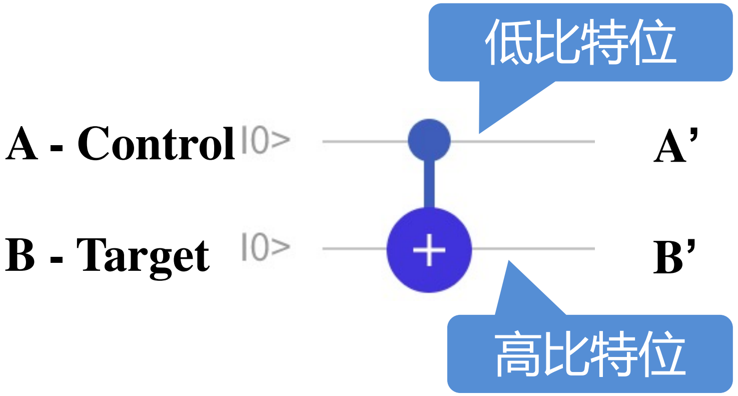




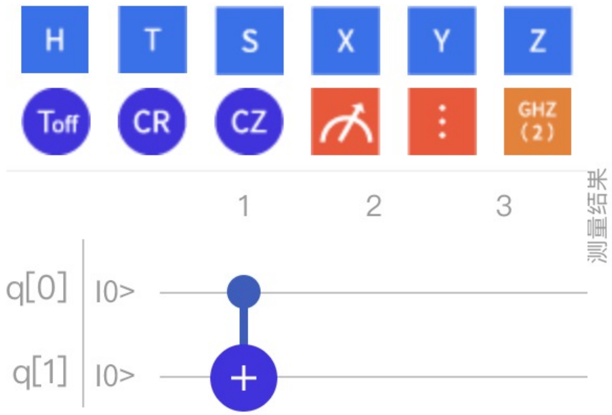
CNOT 门

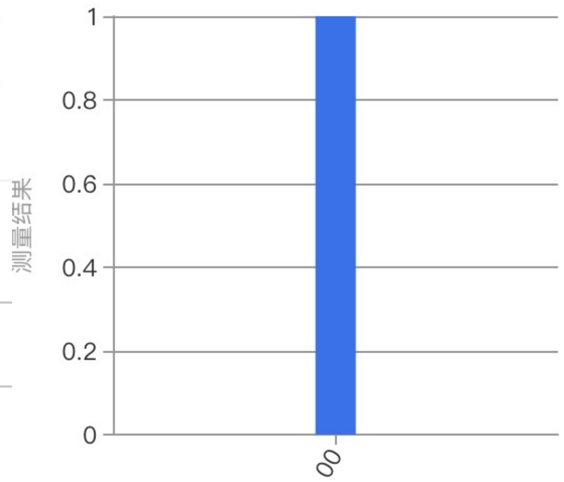
控制非门(Control - NOT)，通常用 CNOT 表示，是一种普遍使用的两量子比特门。
如果低位作为控制比特，则它的矩阵形式：

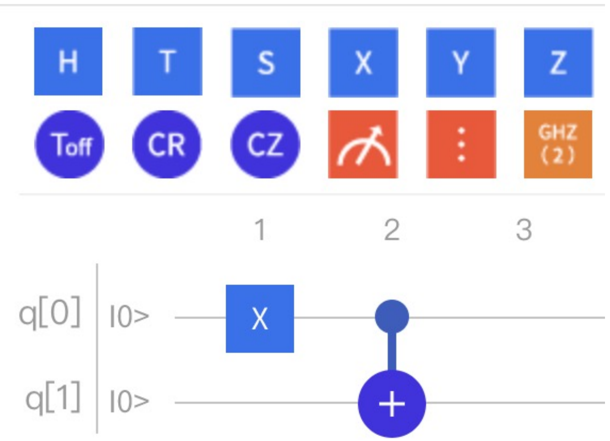
$$\mathrm{CNOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{CNOT}\ \mathrm{CNOT} = I$$

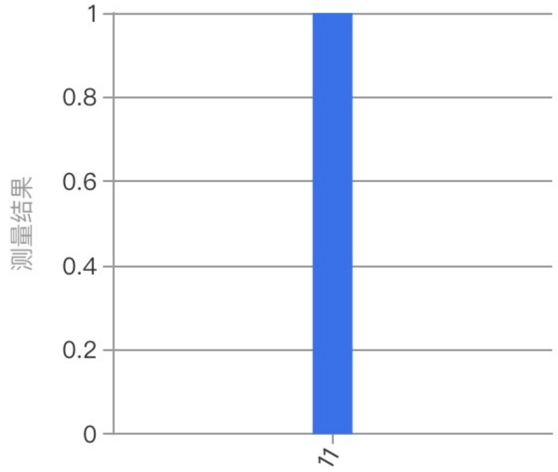


Input		Output	
A	B	A’	B’
0	0	0	0
1	0	1	1
0	1	0	1
1	1	1	0





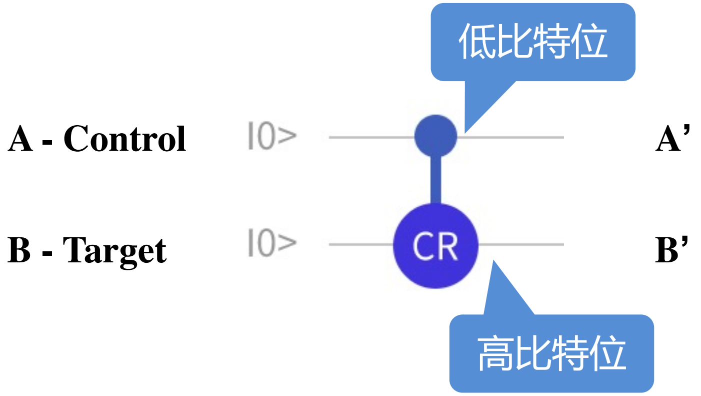


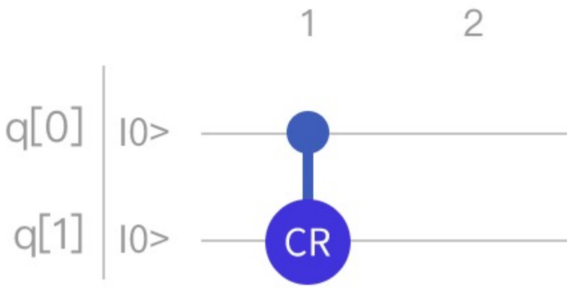


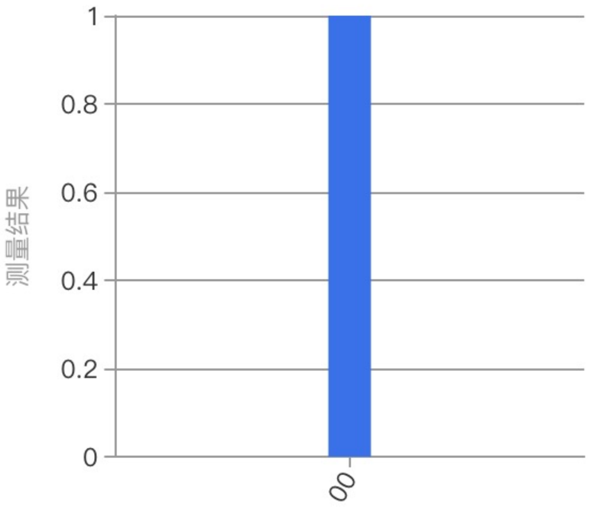
CR 门

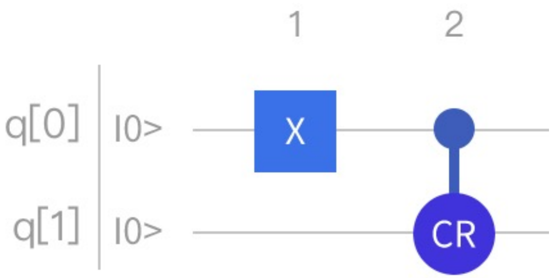
控制相位门(Control phase gate) 和控制非门类似，通常用 CR（CPhase） 表示，它的矩阵形式：

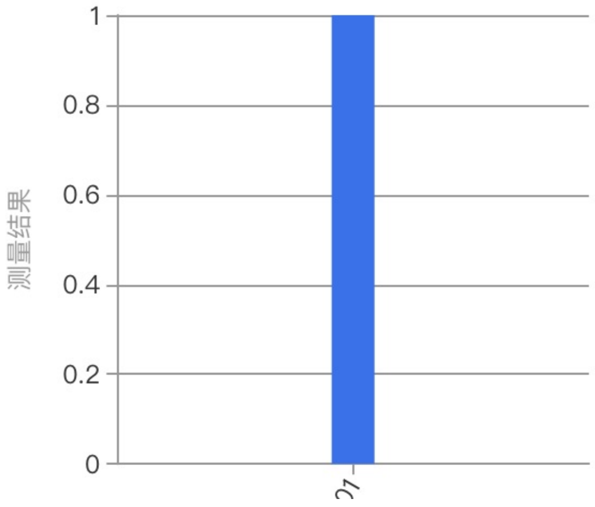
$$\mathrm{CR}\ (\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}$$









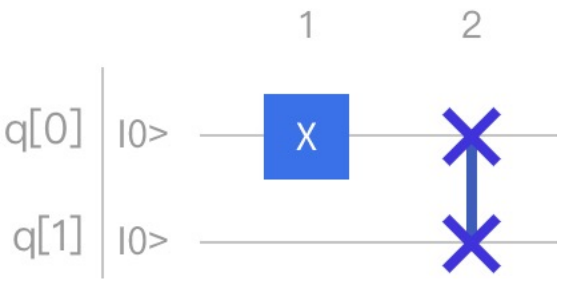


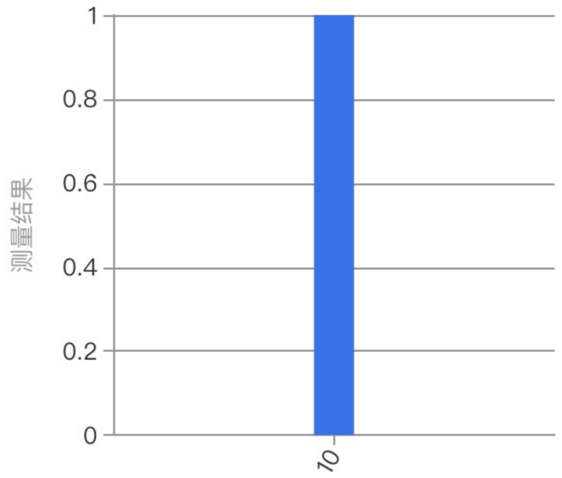
SWAP 门

SWAP门可以将 $|01\rangle$ 态变为 $|10\rangle$ ， $|10\rangle$ 变为 $|01\rangle$，它的矩阵形式：

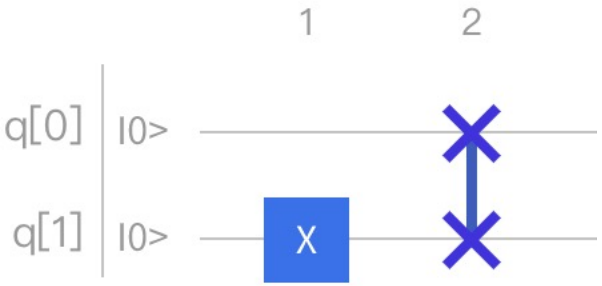
$$\mathrm{SWAP}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

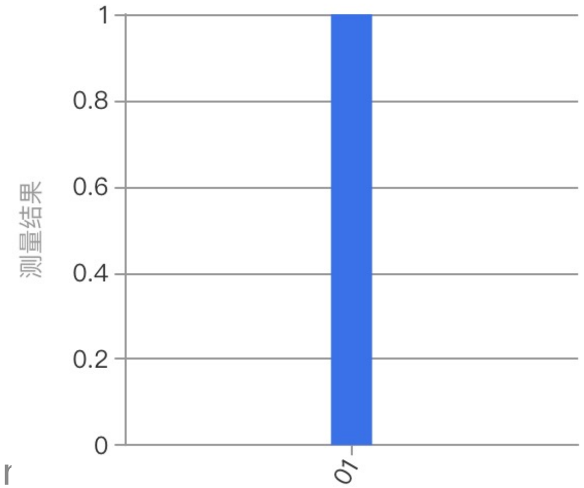
$$|\psi'\rangle=\mathrm{SWAP}\,|01\rangle=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}=|10\rangle$$





$$|\psi'\rangle=\mathrm{SWAP}\,|10\rangle=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}=|01\rangle$$





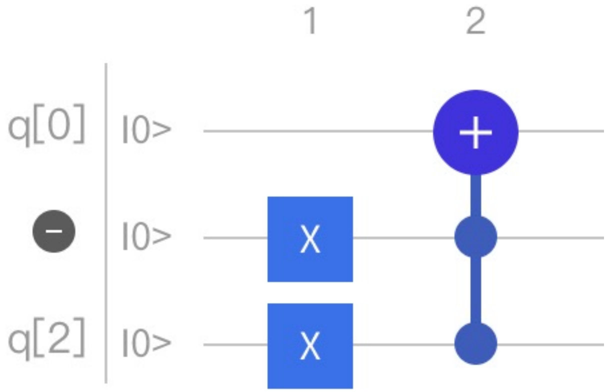
Toffoli（CCNOT）

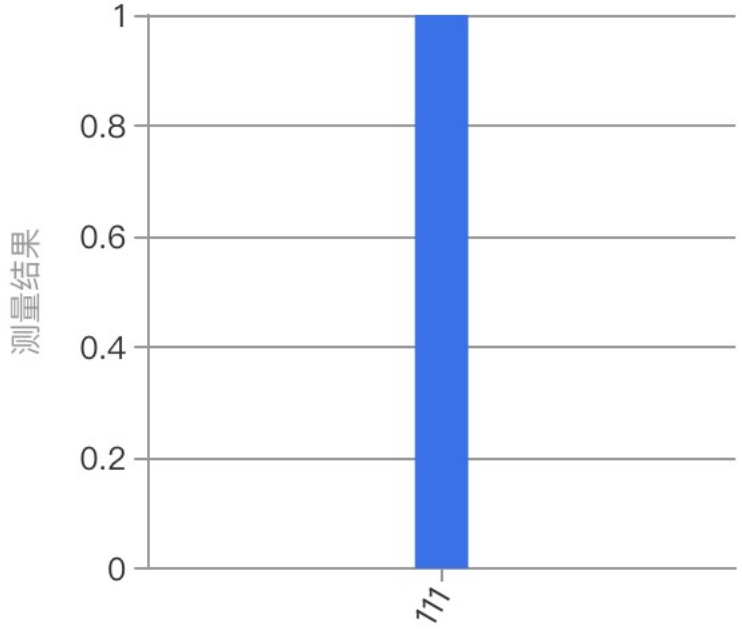
Toffoli门即CCNOT门，它涉及3个量子比特，两个控制比特，一个目标比特，它的矩阵形式：

$$\text{Toffoli} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \end{bmatrix}$$

Toffoli门作用于$|110\rangle$：

$$\text{CCNOT}\,|110\rangle = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix} = |111\rangle$$





Qubits
qubits.top

Thank

You