量子计算
—基础篇

Quantum Computer

网址：www.qubits.top

Calvin Tang

179209347@qq.com

介绍

教程简介：

- 面向对象：量子计算初学者
- 依赖课程：线性代数，解析几何，量子力学（非必需）

知乎专栏：
https://www.zhihu.com/column/c_1501138176371011584

Github & Gitee 地址：
https://github.com/mymagicpower/qubits
https://gitee.com/mymagicpower/qubits

*** 版权声明：**

- 仅限用于个人学习，或者大学授课使用
  （大学授课如需ppt 原件，请用学校邮箱联系我获取）
- 禁止用于任何商业用途

测量

厄米矩阵（Hermitian Matrix），指的是自共轭矩阵。矩阵中每一个第 i 行第 j 列的元素都与第 j 行第 i 列的元素的共轭相等。厄米矩阵主对角线上的元素都是实数的，其特征值也是实数。

$$A^{\dagger} = A$$

量子测量有很多种方式，如：**投影测量** (projective measurements)、**POVM 测量** (Positive Operator-Valued Measure)。
当测量算子具有酉变换性质时，投影测量和一般测量等价。 当我们测量一个物理系统属性的时候，如：测量动量或者位置，我们需要指定一个实数。
每个可能的测量结果都对应一个特征值 λ，由可观测量 $|P|\psi\rangle|^2$ 描述， P 为特征值 λ 对应的特征空间上的投影。由于向量做了归一化，测量的状态可以特征值和特征向量来描述。

一个**自伴算子**(self-adjoint operator) 等于自己的伴随算子；等价地说，表达自伴算子的矩阵是厄米矩阵。厄米矩阵等于自己的共轭转置。根据有限维的谱定理，必定存在着一个正交归一基，可以表达自伴算子为一个实值的对角矩阵。

特征分解（Eigen decomposition），**又称谱分解**（Spectral decomposition）是将矩阵分解为由其特征值和特征向量表示的矩阵之积的方法。需要注意只有对可对角化矩阵才可以施以特征分解。
特征值的集合，有时也称为“谱”（Spectrum）。

厄米共轭算符

给定一个线性算符 A，它的厄米共轭算符（转置共轭）定义为：

$$\langle u|A|v\rangle = \langle A^\dagger u|v\rangle = \langle v|A^\dagger|u\rangle^* \qquad A^\dagger = (A^*)^T$$

由上述定义可得：

$$\langle e_j|A|e_k\rangle = \langle e_k|A^\dagger|e_j\rangle^*$$

于是有：

$$(c^\dagger)_{jk} = c^*{}_{kj}$$

根据上述定义，可得：

$$|x\rangle^\dagger = (x_1^*, \ldots, x_n^*) = \langle x|$$

$$(\sum_i a_i A_i)^\dagger = \sum_i a_i^* A_i^\dagger \qquad (cA)^\dagger = c^* A^\dagger \quad (\mathrm{A} + \mathrm{B})^\dagger = \mathrm{A}^\dagger + \mathrm{B}^\dagger \qquad (\mathrm{AB})^\dagger = \mathrm{B}^\dagger \mathrm{A}^\dagger$$

$$(A|v\rangle)^\dagger = \langle v|A^\dagger \qquad (|u\rangle\langle v|)^\dagger = |v\rangle\langle u|$$

正规矩阵

在复数域上，设 A 是 $\mathbb{C}^n$ 到 $\mathbb{C}^n$ 的线性变换，则下面三个等价：

1. A 是正规（ Normal ）矩阵，也就是 $AA^\dagger = A^\dagger A$

2. A 的特征向量组成 $\mathbb{C}^n$ 空间上的标准正交基

3. $\mathbb{C}^n$ 空间上存在关于某个标准正交基的对角矩阵

* 在量子计算中，**厄米矩阵**、**幺正矩阵**都是**正规矩阵**。

标准正交基和完备性方程

标准正交基 $\{|e_i\rangle\}$ 满足如下条件（i , j 相同为1，不同为0）：

$$\langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij}$$

令：

$$|x\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i|e_i\rangle$$

由于：

$$\langle e_j|x\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i\langle e_j|e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i\delta_{ji} = c_j$$ 即： $$c_j = \langle e_j|x\rangle$$

可得：

$$|x\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i|e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle e_i|x\rangle|e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} |e_i\rangle\langle e_i|x\rangle = \left(\sum_{i=1}^{n} |e_i\rangle\langle e_i|\right)|x\rangle$$

由于 $|x\rangle$ 是任意的，可得： $\sum_{i=1}^{n} |e_i\rangle\langle e_i| = I$ 称为**完备性方程**。

投影算子

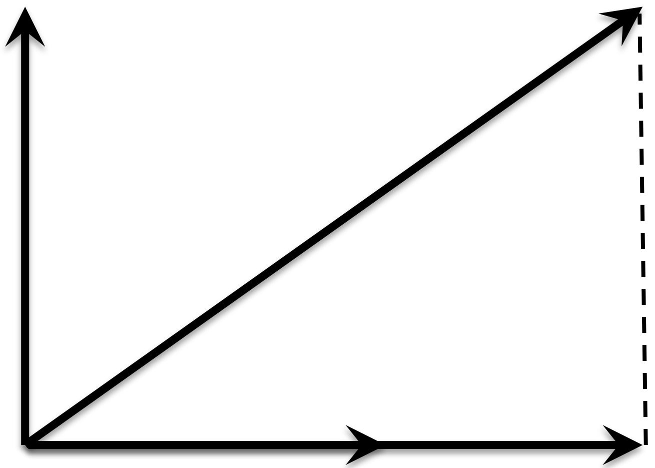
一个向量 $|v\rangle$投影到特定方向，使用单位向量 $|\mathrm{e}_k\rangle$ 定义为：

$$P_k = |\mathrm{e}_k\rangle\langle e_k|$$

$P_k = |\mathrm{e}_k\rangle\langle e_k|$ 称为投影算子。

$\{P_k = |\mathrm{e}_k\rangle\langle e_k|\}$ 满足如下条件：

- $P_k{}^2 = P_k$
- $P_k P_j = 0\ (k \neq j)$
- $\sum_k P_k = \mathrm{I}$



因为： $P_k|v\rangle = |\mathrm{e}_k\rangle\langle e_k|v\rangle = c_k\,|\mathrm{e}_k\rangle$

可得：

- $\mathrm{P}_k|v\rangle$为 $|v\rangle$ 在 $|e_k\rangle$ 上的投影
- c_k 为投影的长度

投影算子 – 例子

令：

$$① \; |e_1\rangle = H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$② \; |e_2\rangle = H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle - |1\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

则投影算子为：

$$P_1 = |e_1\rangle\langle e_1| = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} \qquad P_2 = |e_2\rangle\langle e_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}$$

完备性方程：

$$\sum_k P_k = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = I$$

正交条件：

$$P_1 P_2 = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

线性组合与矩阵分解

线性映射：

$A(c_1|x\rangle + c_2|y\rangle) = c_1A|x\rangle + c_2A\,|y\rangle$ $\quad |x\rangle, |y\rangle \in \mathbb{C}^n, c_k \in \mathbb{C}$

假设$\{\,|e_k\rangle\}$为一组标准正交基，则$\mathbb{C}^n$空间中任意向量可由其线性组合表达：

$|v\rangle = \sum_{k=1}^{n} c_k|e_k\rangle$

由于 $A|e_k\rangle \in \mathbb{C}^n$， 那么$A|e_k\rangle$ 可由$\{\,|e_k\rangle\}$线性组合表达：

$A|e_k\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_{ik}|e_i\rangle$

两边同乘（内积）$\langle e_j|$，由于$\langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij}$ 可得：

$c_{jk} = \langle e_j|A|e_k\rangle$

线性组合与矩阵分解

根据，完备性方程：

$$\sum_{i=1}^{n}|e_i\rangle\langle e_i| = \mathrm{I}$$

可得：

$$\begin{aligned} A &= \mathrm{I}\,A\,\mathrm{I} \\ &= \sum_{j,k}|e_j\rangle\langle e_j|A|e_k\rangle\langle e_k| \qquad \text{代入 } c_{jk} = \langle e_j|A|e_k\rangle \\ &= \sum_{j,k}c_{jk}|e_j\rangle\langle e_k| \end{aligned}$$

谱分解（特征值分解）

假设 A 是一个正规矩阵，它的特征值为 $\{\lambda_i\}$，对应的特征向量为 $\{|e_i\rangle\}$，那么 A 可以分解为：

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |e_i\rangle\langle e_i| = \begin{bmatrix} \lambda_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

证明：

由于正规矩阵 A 的特征向量标准且正交，根据完备性方程 $\sum_{i=1}^{n} |e_i\rangle\langle e_i| = I$

$$A = AI = \sum_i A|e_i\rangle\langle e_i| = \sum_i \lambda_i |e_i\rangle\langle e_i|$$

此时，根据投影算子的定义 $P_k = |e_k\rangle\langle e_k|$， A 可以表示为：

$$A = \sum_i \lambda_i P_i$$

线性变换 A 作用于任何向量，其几何意义如下：

相当于该向量，投影到 A 的各特征向量上，然后再以特征值 $\{\lambda_i\}$ 为系数线性组合起来。

投影测量

投影测量(projective measurements)由一个可观测量(observable) A（矩阵）来描述。指标(index) i 表示在实验上可能发生的结果。可观测量 A 是一个待观测系统的状态空间上的自伴算子。可观测量 A 可以写成谱分解的形式：

$$A = \sum_{\mathrm{i}} \lambda_{\mathrm{i}} \boldsymbol{P}_{\mathrm{i}}$$

$\boldsymbol{P}_{\mathrm{i}}$ 为在 A 的特征值 λ_i 对应的特征空间(特征向量)上的投影（称为谱阵）。测量的可能结果与可观测量 A 的特征值 λ_i对应。在对状态$|\psi\rangle$ 测量之后，得到的结果 i 的概率为：

$$\mathrm{p_i} = \mathrm{p}(\lambda = \lambda_i) = \langle\psi|\boldsymbol{P}_{\mathrm{i}}|\psi\rangle \qquad P_i = |\, \mathrm{e}_i\rangle\langle e_i|$$

如果测量后，结果 I 发生，则量子系统的最新状态为：

$$\frac{\boldsymbol{P}_{\mathrm{i}}|\psi\rangle}{\sqrt{\mathrm{p_i}}}$$

投影测量有一个重要的特征，容易计算投影测量的平均值：

$$\mathrm{E(A)} = \sum_{\mathrm{i}} \lambda_{\mathrm{i}} \mathrm{p_i} = \sum_{\mathrm{i}} \lambda_{\mathrm{i}} \langle\psi|\boldsymbol{P}_{\mathrm{i}}|\psi\rangle = \langle\psi|(\sum_{\mathrm{i}} \lambda_{\mathrm{i}} \boldsymbol{P}_{\mathrm{i}})|\psi\rangle = \langle\psi|\mathrm{A}|\psi\rangle$$

观测量 Λ 的平均值通常也记作 $\langle \mathrm{A}\rangle = \langle\psi|\mathrm{A}|\psi\rangle$

观测量 Λ 的标准差 $\Delta(A)$ 满足：$[\Delta(A)]^2 = \langle(\mathrm{A} - \langle \mathrm{A}\rangle)^2\rangle = \langle \mathrm{A}^2\rangle - \langle \mathrm{A}\rangle^2$

测量值与期望

假定 A 为可观测量，A 是厄米矩阵，其特征向量为 ：$|e_1\rangle$，$|e_2\rangle$ ，对应的特征值为：λ_1，λ_2，那么：
$A|e_1\rangle = \lambda_1 |e_1\rangle$，$A|e_2\rangle = \lambda_2 |e_2\rangle$

如果 $|\psi\rangle = \alpha |e_1\rangle + \beta |e_2\rangle$ ，且$\langle\psi|\psi\rangle = 1$，那么：

$\alpha = \langle e_1|\psi\rangle$，$\beta = \langle e_2|\psi\rangle$

因此有：

$|\psi\rangle = \langle e_1|\psi\rangle|e_1\rangle + \langle e_2|\psi\rangle|e_2\rangle$

测得 λ_1 概率为 $|\langle e_1|\psi\rangle|^2$，测得 λ_2 概率为 $|\langle e_2|\psi\rangle|^2$

那么测量 A 的期望为：

$$
\begin{aligned}
\langle A\rangle &= |\langle e_1|\psi\rangle|^2\lambda_1 + |\langle e_2|\psi\rangle|^2\lambda_2 \\
&= \langle\psi|e_1\rangle\langle e_1|\psi\rangle\lambda_1 + \langle\psi|e_2\rangle\langle e_2|\psi\rangle\lambda_2 \\
&= \langle\psi|A|e_1\rangle\langle e_1|\psi\rangle + \langle\psi|A|e_2\rangle\langle e_2|\psi\rangle \\
&= \langle\psi|A(|e_1\rangle\langle e_1| + |e_2\rangle\langle e_2|)|\psi\rangle \\
&= \langle\psi|A|\psi\rangle
\end{aligned}
$$

因为 $|\langle e_1|\psi\rangle|^2 = \langle\psi|e_1\rangle\langle e_1|\psi\rangle$

因为 $A|e_1\rangle = \lambda_1 |e_1\rangle$，$A|e_2\rangle = \lambda_2 |e_2\rangle$

投影测量

量子测量是由测量算子(measurement operators)的集合$\{M_i\}$来描述，这些算子可以作用在待测量系统的状态空间(state space)上。指标(index) i 表示在实验上可能发生的结果。如果测量前的量子系统处在最新状态$|\psi\rangle$，那么结果发生的概率为：

$$p(i) = \langle\psi|M_i^{\dagger} M_i|\psi\rangle$$

测量就是将量子态 $|\psi\rangle$ 投影到另一个态 $|\alpha\rangle$ 上。
获得这个态的概率是它们内积的平方 ：

$$P_\alpha = |\langle\psi|\alpha\rangle|^2$$

其它概率下会将量子态投影到它的正交态上去，即：

$$1 - P_\alpha$$

测量之后量子态就坍缩到测量到的态上。

投影测量

并且测量后的系统状态变为

$$\frac{M_i|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|M_i^\dagger M_i|\psi\rangle}}$$

由于所有可能情况的概率和为 1，即

$$\sum_i p(i) = \sum_i \langle\psi|M_i^\dagger M_i|\psi\rangle = 1$$

因此，测量算子需满足

$$\sum_i M_i^\dagger M_i = I$$

该方程被称为完备性方程(completeness equation)。

单量子比特的测量

单量子比特的测量，有两个测量算子 ：

$$M_0 = |0\rangle\langle 0|$$

$$M_1 = |1\rangle\langle 1|$$

两个测量算子都是自伴的，即：

$$M_0^\dagger = M_0 \quad M_1^\dagger = M_1$$

且 $M_0^2 = M_0 \quad M_1^2 = M_1$

因此该测量算子满足完备性方程：

$$M_0^\dagger M_0 + M_1^\dagger M_1 = M_0 + M_1 = I$$

设系统被测量时的状态是

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

测量结果为 0 的概率为

$$p(0) = \langle\psi|M_0^\dagger M_0|\psi\rangle = \langle\psi|M_0|\psi\rangle = |\alpha|^2$$

对应测量后的状态为

$$\frac{M_0|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|M_0^\dagger M_0|\psi\rangle}} = \frac{M_0|\psi\rangle}{|\alpha|} = \frac{\alpha}{|\alpha|}|0\rangle$$

测量结果为 1 的概率为

$$p(1) = \langle\psi|M_1^\dagger M_1|\psi\rangle = \langle\psi|M_1|\psi\rangle = |\beta|^2$$

测量后的状态为

$$\frac{M_1|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|M_1^\dagger M_1|\psi\rangle}} = \frac{M_1|\psi\rangle}{|\beta|} = \frac{\beta}{|\beta|}|1\rangle$$

单量子比特的测量

测量结果为 $|0\rangle$ 的概率，证明：

$$
\begin{aligned}
p(0) &= \langle\psi|M_0^\dagger M_0|\psi\rangle = \langle\psi|M_0|\psi\rangle = \langle\psi||0\rangle\langle 0||\psi\rangle \\
&= \langle\psi|0\rangle\langle 0|\psi\rangle \\
&= [\bar{\alpha}\ \ \bar{\beta}] \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} [1\ 0] \begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix} \\
&= \bar{\alpha}\,\alpha \\
&= |\alpha|^2
\end{aligned}
$$

测量结果为 $|1\rangle$ 的概率，证明：

$$
\begin{aligned}
p(1) &= \langle\psi|M_1^\dagger M_1|\psi\rangle = \langle\psi|M_1|\psi\rangle = \langle\psi||1\rangle\langle 1||\psi\rangle \\
&= \langle\psi|1\rangle\langle 1|\psi\rangle \\
&= [\bar{\alpha}\ \ \bar{\beta}] \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} [0\ 1] \begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix} \\
&= \bar{\beta}\,\beta \\
&= |\beta|^2
\end{aligned}
$$

量子线路与测量操作

量子线路是由代表量子比特演化的路线和作用在量子比特上的量子逻辑门组成的。
量子线路产生的效果，等同于每一个量子逻辑门依次作用在量子比特上。在真实的量子计算机上，最后要对量子系统末态进行测量操作，才能得到末态的信息，因此也把测量 操作作为量子线路的一部分，测量操作有时也称为测量门。
测量背后的原理就是之前讲到的投影测量。

它表示对该量子线路代表的量子比特进行测量操作。

在计算基 $|0\rangle$ 、$|1\rangle$ 下，测量操作对应的矩阵形式为：

$$M_0 = |0\rangle\langle 0| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = |1\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

测量操作：单量子比特量子线路测量

一个简单的单量子比特量子线路：

初态为 $|0\rangle$ ，首先经过一个H门，演化的到新的态：

$$|\psi\rangle = H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right)$$

$$p(0) = \langle\psi|M_0^\dagger M_0|\psi\rangle = \langle\psi|M_0|\psi\rangle = |\alpha|^2$$

$$p(1) = \langle\psi|M_1^\dagger M_1|\psi\rangle = \langle\psi|M_1|\psi\rangle = |\beta|^2$$

由于在 真实的量子计算机上，测量会对量子态有影响，所以每次测量后，需要重新制备初始量子态，让它重新演化，再进行测量，从而得到末量子态在计算基下的频率，用频率来近似概率，并且每次测量只能使用测量操作M_0或者M_1中的一个进行测量。

测量操作，得到投影到计算基 $|0\rangle$ 下的概率为：

$$p(0) = \langle\psi|M_0^\dagger M_0|\psi\rangle = \langle\psi|M_0|\psi\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}$$

对应测量后的状态为

$$|\psi'\rangle = \frac{M_0|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|M_0^\dagger M_0|\psi\rangle}} = \frac{M_0|\psi\rangle}{|\alpha|} = \frac{\alpha}{|\alpha|}|0\rangle = |0\rangle$$

$$p(1) = \langle\psi|M_1^\dagger M_1|\psi\rangle = \langle\psi|M_1|\psi\rangle$$

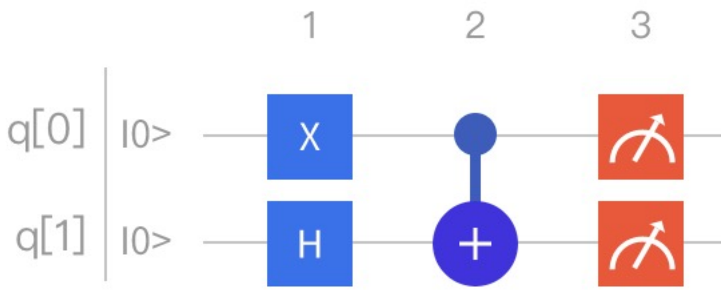
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}$$

对应测量后的状态为

$$|\psi'\rangle = \frac{M_1|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|M_1^\dagger M_1|\psi\rangle}} = \frac{M_1|\psi\rangle}{|\beta|} = \frac{\beta}{|\beta|}|1\rangle = |1\rangle$$

测量操作：两量子比特量子线路测量

两量子比特量子线路：



在该量子线路中，初态 q[0], q[1] 代表量子比特的初始态均为$|0\rangle$。
因此，该系统的复合量子态为$|00\rangle$, 从左到右依次对应高位比特到低位比特：

$$|0\rangle \otimes |0\rangle = |0\,,0\rangle = |00\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\\ 0\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

系统的演化过程：
T1时刻，同时分别经过 H门 和 X门
T2时刻，经过CNOT门
T3时刻，进行整体测量操作。

矩阵运算过程：

系统初始态： $|\psi_0\rangle = |00\rangle$

T1时刻，同时分别经过 H门 和 X门，演化为：

$$|\psi_1\rangle = [H \otimes X]\,|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}|00\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}$$

T2时刻，经过CNOT门，演化为：

$$|\psi_2\rangle = \mathrm{CNOT}\,|\psi_1\rangle = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

测量操作：两量子比特量子线路测量

T3时刻，进行整体测量操作：

1. 测量操作$M_{00} = |00\rangle\langle 00|$ ，则得到投影到计算基 $|00\rangle$ 下的概率为：

$$
\begin{aligned}
p(00) &= \langle\psi_2|M_{00}^{\dagger} M_{00}|\psi_2\rangle = \langle\psi_2|M_{00}|\psi_2\rangle \\
&= \langle\psi_2|[|00\rangle\langle 00|]|\psi_2\rangle \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

根据测量，由于 $p(00) = 0$，可知测量后，量子态不可能塌缩在基态 $|00\rangle$ 上面。

2. 使用测量操作$M_{01} = |01\rangle\langle 01|$ ，则得到投影到计算基 $|01>$ 下的概率为：

$$p(01) = \langle\psi_2|M_{01}^{\dagger} M_{01}|\psi_2\rangle = \langle\psi_2|M_{01}|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}$$

对量子态$|\psi_2>$测量后，得到新的量子态为

$$|\psi_3\rangle = \frac{M_{01}|\psi_2\rangle}{\sqrt{p(01)}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |01\rangle$$

3. 使用测量操作$M_{10} = |10\rangle\langle 10|$，则得到投影到计算基 $|10>$ 下的概率为：

$$p(10) = \langle\psi_2|M_{10}^{\dagger} M_{10}|\psi_2\rangle = \langle\psi_2|M_{10}|\psi_2\rangle = 0$$

根据测量，由于 $p(10) = 0$，可知测量后，量子态不可能塌缩在基态 $|00\rangle$ 上面。

测量操作：两量子比特量子线路测量

4. 使用测量操作$M_{11} = |11\rangle\langle 11|$ ，则得到投影到计算基 $|11\rangle$ 下的概率为：

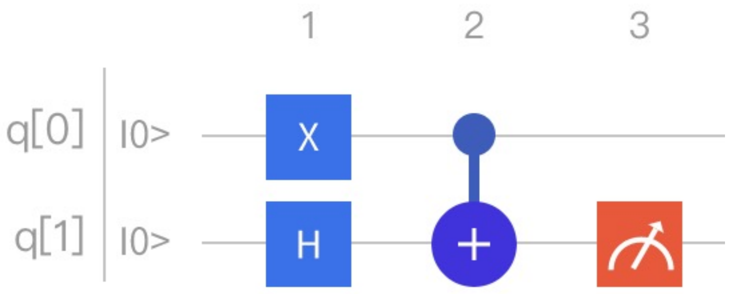
$$p(11) = \langle\psi_2|M_{11}^{\dagger}\, M_{11}|\psi_2\rangle = \langle\psi_2|M_{11}|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}$$

对量子态 $|\psi_2\rangle$ 测量后，得到新的量子态为：

$$|\psi_3\rangle = \frac{M_{11}|\psi_2\rangle}{\sqrt{p(11)}} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} = |11\rangle$$

测量操作：两量子比特量子线路测量

如果需要测量特定线路中某些位量子比特演化结果，那么把测量放在对应线路上面。
对高比特位 q[1] 进行测量：



此时测量对应的测量操作矩阵为：

$$M_1^0 = \sum_{i\in\{0,1\}} |0i\rangle\langle 0i| \qquad M_1^1 = \sum_{i\in\{0,1\}} |1i\rangle\langle 1i|$$

因此通过测量，得到测量结果 0 和 1 概率为：

$$p_1(0) = \langle\psi_2|M_1^0|\psi_2\rangle = \begin{bmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} = \frac{1}{2}$$

$$p_1(1) = \langle\psi_2|M_1^1|\psi_2\rangle = \begin{bmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} = \frac{1}{2}$$

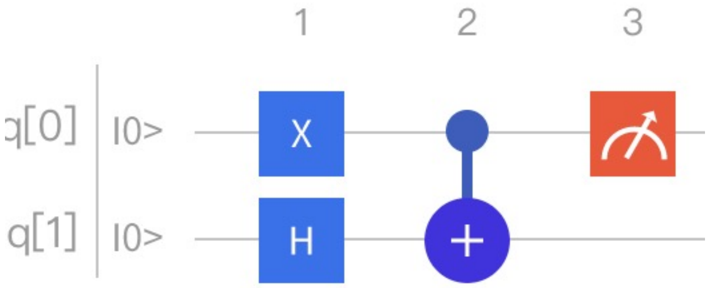
测量后，量子系统的状态分别变为：

$$|\psi_3\rangle = \frac{M_1^0|\psi_2\rangle}{\sqrt{p_1(0)}} = |01\rangle$$

$$|\psi_3\rangle = \frac{M_1^1|\psi_2\rangle}{\sqrt{p_1(1)}} = |11\rangle$$

测量操作：两量子比特量子线路测量

对低比特位 q[0] 进行测量：



此时测量对应的测量操作矩阵为：

$M_0^0 = \sum_{i\in\{0,1\}} |i0\rangle\langle i0|$ $\quad$ $M_0^1 = \sum_{i\in\{0,1\}} |i1\rangle\langle i1|$

因此通过测量，得到测量结果 0 和 1 概率为：

$$p_0(0) = \langle\psi_2|M_0^0|\psi_2\rangle = \begin{bmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} = 0$$

$$p_0(1) = \langle\psi_2|M_0^1|\psi_2\rangle = \begin{bmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} = 1$$

测量后，量子系统的状态演化为量子状态：

$$|\psi_3\rangle = \frac{M_0^1|\psi_2\rangle}{\sqrt{p_0(1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

Thank You