Двофазни и дуални симплекс

Садржај:

- **Двофазни симплекс метод**
    - Увод
    - Опис алгоритма
    - Опис обичног симплекса коришћеног
    - Примери брисања вештачких променљивих
    - Задатак
- **Дуални симплекс метод**
    - Увод
    - Опис алгоритма
    - Задатак

Двофазни симплекс

Увод

Двофазни симплекс метод представља алгоритам који има способност да реши било који линеарни проблем. Састоји се из две фазе код којих примењујемо симплекс алгоритам (може ревидирани , а може и таблични) над једним од проблема које смо конструисали.

У **првој** фази конструишемо помоћни проблем то радимо ако не можемо одмах да уочимо подјединичну матрицу максималног ранка тј. ако не постоји базисна колона за сваки ред нашег проблема.
Затим покрећемо симплекс алгоритам над помоћним проблемом.

У **другој** фази ако смо установили да почетни проблем има допустиво решење онда уклањамо вештачке променљиве и на тако добијен проблем додамо функцију циља из почетног проблема и опет вршимо симплекс алгоритам.

Ако се разуме обичан симплекс алгоритам сва тешкоћа двофазног лежи у конструисању помоћног проблема и брисању вештачких.

Форма у којој се очекује улазни проблем:

$$\min f = c^T x$$
$$Ax = b$$
$$xi \geq 0, \forall i$$

Не мора да постоји подјединична матрица у A
што значи да пре него што кренемо са алгоритмом неопходан корак је увек да сведемо проблем у овај облик.

Нпр ако имамо проблем са неједначинама претворимо их у једначине додавајући изравнајуће променљиве (-s за >= , +s за <=).

Ако имамо проблем у max форми претворимо га у min множењем са -1.

Након што имамо проблем у одговарајућој форми можемо да кренемо алгоритам.

Опис алгоритма

(Предпоставка је да је улазни проблем у малопре описаној форми и нема подјединичну матрицу)

Фаза 1

Корак 1 : За сваки ред који нема своју базисну променљиву уведи нову вештачку променљиву w која ће му бити базисна.
Онда стави да је функција циља новог проблема min збира вештачких променљивих.

Пример матрица А:

$$x+3y+5z=nesto$$

$$4y+6z=nesto$$

базисне	x	y	z
x	1	3	5
Не постоји	0	4	6

Пошто за други ред не постоји базисна променљива тј нема колоне [0,1] додајемо такву колону са променљивом w

базисне	x	y	z	w
x	1	3	5	0
w	0	4	6	1

Корак 2 : Изврши симплекс алгоритам над овако добијеним проблемом.
Ако је резултат симплекса 0 пређи на **фазу 2** иначе испиши да не постоји оптимално решење

Фаза 2

За добијену симплекс табелу из претходног корака

Док постоје вештачке променљиве ради:

-Корак 1: Ако је вештачка променљива небазисна уклони целу њену колону.

-Корак 2 : Ако је базисна разликујемо 2 случаја

2**а :** У њеном реду где је базисна сем те јединице за базу су сви остали елементи 0. Онда обриши тај ред и њену колону

2б : У њеном реду где је базисна постоји елеменат који није 0.
Изабери један од тих елемената и пивотирај око њега (делиш цео ред са њим, а онда правиш 0 у тој колони изнад и испод њега)

На крају: У новој табели замени фунцију циља са функцијом почетног проблема и примени симплекс методу над овим. (Загарантовано је да има јединичну подматрицу)

Опис обичног симплекса коришћеног

Приказујемо кораке за таблични симплекс ради лакше имплементације у коду

Очекивани улаз:

$$\min f = c^T x$$
$$Ax = b$$
$$xi \geq 0, \forall i$$

При чему A мора да има јединичну подматрицу и свако b >=0

Корак 1 : Ако не постоји c<0 . Крај испиши оптимално решење
Корак 2 : Изабери индекс j тако да важи $cj<0$ (ако се користи бленд узимамо први такав)
Корак 3 : У колони j матрице A пронађи елемент Aij такав да важи min {bi / Aij | Aij>0}
Ако такав елемент не постоји стоп , проблем је неограничен.
Корак 4 : Пивотирај око тог елемента подели i-ти ред са Aij , прави нуле изнад и испод њега са елементарним трансформацијама
Врати се на корак 1

Корак пред сам алгоритам !
Пре него што кренемо сам алгоритам проверавамо да ли нам важе услови за улаз
Ако не важе пребацимо улаз у одговарајући облик
Затим правимо симплекс таблицу
Такође ако функција циља зависи од базичних променљивих морамо да је очистимо од њих тако што направимо ту 0!

Пример симплекс таблице за проблем:

$$\min f = -40x - 35y$$
$$x + y + z = 24$$
$$3x + 2y + w = 60$$

	x	y	z	w	
z	1	1	1	0	24
w	3	2	0	1	60
	-40	-35	0	0	0

Жута боја обележава матрицу A
Наранџаста обележава у ком реду је која колона базисна (нпр у реду 1 је w базисна)
Зелена обележава функцију циља c
Плава обележава вектор b тј све са десне стране једначина
Црвена обележава оптималну функцију циља за текућу итерацију

Примери брисања вештачких променљивих

Пошто је брисање један од тежих корака алгоритма видећемо пример за сваки од корака.
Рецимо да је у сваком примеру променљива w вештачка променљива коју смо додали.

Пример за небазисне (корак 1):

	x	y	z	w	
x	1	3	0	3	b0
z	0	2	1	4	b1
	cx	cy	cz	cw	f

Пошто овде вештачка w није базисна колона само је избришемо

	x	y	z	
x	1	3	0	b0
z	0	2	1	b1
	cx	cy	cz	f

Пример за базисне (Корак 2а)

	x	y	w	z	
x	1	3	0	4	b0
w	0	0	1	0	b1
	cx	cy	cw	cz	f

Овде за вештачку w у реду где је базисна су све 0 (гледамо плаву боју) па зато бришемо тај ред и ту колону.

	x	y	z	
x	1	3	4	b0
	cx	cy	cz	f

Пример за базисне (Корак 2б)

	x	y	w	z	
x	1	3	0	4	b0
w	0	2	1	1	b1
	cx	cy	cw	cz	f

Овде пошто постоје елементи који нису 0 бирамо један од њих и пивотирамо око њега тј он постаје нова база за тај ред , после пошто ова вештачка није базисна биће обрисана у кораку 1. Ајде за пивот да узмемо елемент 2 , делимо ред са 2 , а онда множимо ред са -3 и додајемо на први ред да би направили 0 изнад , а онда множимо са -cy и додајемо на ред испод да би и ту била 0

	x	y	w	z	
x	1	0	-3/2	4-3/2	b0- b1*3/2
y	0	1	1/2	1/2	b1/2
	cx	0	cw - 1-2*cy	cz – 1/2*cy	f - b1/2*cy

Сада bазисна је y па ће w бити обрисана у кораку 1 , зелено је где правимо 0 , наранџасто је пивот

Задатак

$$\max f = 3x + y + 4z$$
$$x + 3y + z \leq 10$$
$$3x + y - z \geq 2$$
$$3x + y + 3z \leq 6$$
$$x \leq 1$$
$$x, y, z \geq 0$$

Први корак који радимо је пребацујемо ово у одговарајућу форму (уклањамо неједначине и максимизацију сводимо на минимизацију.Такође ако је неко b<0 множимо са -1 пошто обичан симплекс то захтева)

Када пребацимо добијамо:

$$\min f = -3x - y - 4z$$
$$x + 3y + z + s1 = 10$$
$$3x + y - z - s2 = 2$$
$$3x + y + 3z + s3 = 6$$
$$x + s4 = 1$$
$$x, y, z, s1, s2, s3 \geq 0$$

додали смо редом : s1 , -s2 , s3 , s4

Где је био знак <= додали смо +s а где је био знак >= додали смо -s
Погледајмо како ово изгледа у табеларној форми за матрицу А

	x	y	z	s1	s2	s3	s4
s1	1	3	1	**1**	0	**0**	**0**
ништа	3	1	-1	**0**	-1	**0**	**0**
s3	3	1	3	**0**	0	**1**	**0**
s4	1	0	0	**0**	0	**0**	**1**

пошто за други ред не постоји базисна колона закључујемо следеће:
Морамо да решимо ово двофазним алгоритмом и другом реду морамо да додамо вештачку промењљиву такође решавамо другу функцију циља за помоћне промењљиве

добијамо наредни проблем

$$\begin{gathered} \min f = w \\ x+3y+z+s1=10 \\ 3x+y-z-s2+w=2 \\ 3x+y+3z+s3=6 \\ x+s4=1 \\ x, y, z, s1, s2, s3 \geq 0 \end{gathered}$$

додали смо w у други ред

	x	y	z	s1	s2	s3	s4	w
s1	1	3	1	**1**	0	**0**	**0**	**0**
w	3	1	-1	**0**	-1	**0**	**0**	**1**
s3	3	1	3	**0**	0	**1**	**0**	**0**
s4	1	0	0	**0**	0	**0**	**1**	**0**

Овиме смо конструисали помоћни проблем за фазу 1 сада радимо симплекс методу над њим

Конструишемо симплекс таблицу за помоћни проблем

	x	y	z	s1	s2	s3	s4	w	
s1	1	3	1	**1**	0	**0**	**0**	**0**	**10**
w	3	1	-1	**0**	-1	**0**	**0**	**1**	**2**
s3	3	1	3	**0**	0	**1**	**0**	**0**	**6**
s4	1	0	0	**0**	0	**0**	**1**	**0**	**1**
	0	0	0	**0**	0	**0**	**0**	**1**	**0**

Крећемо симплекс :

Проверавамо да ли функција циља садржи базичне променљиве пошто садржи (w) чистимо је од базичних тако што правимо 0 на том месту

	x	y	z	s1	s2	s3	s4	w	
s1	1	3	1	**1**	0	**0**	**0**	**0**	10
w	3	1	-1	**0**	-1	**0**	**0**	**1**	2
s3	3	1	3	**0**	0	**1**	**0**	**0**	6
s4	1	0	0	**0**	0	**0**	**1**	**0**	1
	0	0	0	**0**	0	**0**	**0**	**1**	0

-1

добијамо

	x	y	z	s1	s2	s3	s4	w	
s1	1	3	1	**1**	0	**0**	**0**	**0**	10
w	3	1	-1	**0**	-1	**0**	**0**	**1**	2
s3	3	1	3	**0**	0	**1**	**0**	**0**	6
s4	1	0	0	**0**	0	**0**	**1**	**0**	1
	-3	-1	1	**0**	1	**0**	**0**	**0**	-2

Крећемо симплекс алгоритам
Проверавамо да ли постоји c<0

-3	-1	1	**0**	1	**0**	**0**	**0**

Пошто постоји нисмо готови узимамо по бленду први такав с тј елемент -3
прогласимо његову колону као пивот колону
Сада у тој колони гледамо све позитивне елементе A и тражимо најмањи такав по формули
b[i] / A[i][pivot] ако таквог елемента нема кажемо да нема решење
кандидати су min { 10/1 , 2/3 , 6/2 , 1/1 }
Пошто је 2/3 најмањи елемент узимамо као пивот ред баш његов ред
Сада вршимо пивотирање око тог елемента

	x	y	z	s1	s2	s3	s4	w		
s1	1	3	1	**1**	0	**0**	**0**	**0**	10	
w	3	1	-1	**0**	-1	**0**	**0**	**1**	2	*1/3
s3	3	1	3	**0**	0	**1**	**0**	**0**	6	
s4	1	0	0	**0**	0	**0**	**1**	**0**	1	
	-3	-1	1	**0**	1	**0**	**0**	**0**	-2	

Зелено је пивот елемент , плаво је пивот ред , а црвено је пивот колона
Пивот ред делимо цео са 3 па онда , додајемо колико треба на остале редове да би изнад и испод пивот елемента биле 0

	x	y	z	s1	s2	s3	s4	w		
s1	1	3	1	**1**	0	**0**	**0**	**0**	10	-1
w	1	1/3	-1/3	**0**	-1/3	**0**	**0**	**1**	2/3	
s3	3	1	3	**0**	0	**1**	**0**	**0**	6	-3
s4	1	0	0	**0**	0	**0**	**1**	**0**	1	-1
	-3	-1	1	**0**	1	**0**	**0**	**0**	-2	3

добијамо следећу табелу и стављамо да је нова база за ту колону x

	x	y	z	s1	s2	s3	s4	w	
s1	**0**	8/3	4/3	**1**	1/3	**0**	**0**	-1	28/3
x	**1**	1/3	-1/3	**0**	-1/3	**0**	**0**	1	2/3
s3	**0**	0	4	**0**	1	**1**	**0**	-3	4
s4	**0**	-1/3	1/3	**0**	1/3	**0**	**1**	-1	1/3
	0	0	0	**0**	0	**0**	**0**	3	0

Пошто у последњем реду је све позитивно стајемо нашли смо оптимално решење
Њега читамо из плаво обојене ћелије
Пошто је оно 0 закључујемо да почетни проблем можемо да решимо па прелазимо у фазу 2
Да није било 0 исписали би да почетно проблем нема допустиво решење и ту стали!

Сада у фази 2 уклањамо вештачке променљиве
Једина вештачка нам је w и она **није базисна** што значи само елиминишемо њену колону
За функцију циља постављамо функцију из почетног проблема
добијамо табелу

	x	y	z	s1	s2	s3	s4	
s1	**0**	8/3	4/3	**1**	1/3	**0**	**0**	28/3
x	**1**	1/3	-1/3	**0**	-1/3	**0**	**0**	2/3
s3	**0**	0	4	**0**	1	**1**	**0**	4
s4	**0**	-1/3	1/3	**0**	1/3	**0**	**1**	1/3
	-3	-1	-4	**0**	0	**0**	**0**	0

3

(приметите нема колоне w пошто смо је уклонили)

Сада крећемо симплекс алгоритам над овом таблицом
Прво што радимо је уклањамо базисне променљиве из функције циља тј променљиву x
тако што множимо други ред са 3 и додајемо на функцију циља

добијамо :

	x	y	z	s1	s2	s3	s4	
s1	**0**	8/3	4/3	**1**	1/3	**0**	**0**	28/3
x	**1**	1/3	-1/3	**0**	-1/3	**0**	**0**	2/3
s3	**0**	0	4	**0**	1	**1**	**0**	4
s4	**0**	-1/3	1/3	**0**	1/3	**0**	**1**	1/3
	0	0	-5	**0**	-1	**0**	**0**	2

Идемо стандардно симплекс узимамо елемент -5 пошто је први <0 (бленд) тј његову колону (z)
У тој колони имамо кандидате min {28/3 / 4/3 , 4 / 4} (напомена само позитивне Aij гледамо)
узимамо елемент 4 и пивотирамо око њега (пивотирање је на претходном слајду лепше објашњено па ће сад бити на брзину одрађено)

добијамо табелу

	x	y	z	s1	s2	s3	s4	
s1	**0**	8/3	**0**	**1**	0	-1/3	**0**	8
x	**1**	1/3	**0**	**0**	-1/4	1/12	**0**	1
z	**0**	0	**1**	**0**	1/4	1/4	**0**	1
s4	**0**	-1/3	**0**	**0**	1/4	-1/12	**1**	0
	0	0	**0**	**0**	1/4	5/4	**0**	7

Пошто су сви c>=0 стајемо
Читамо решење 7
Што значи максимум функције са почетка је 7
Крај

Дуални симплекс

Опис алгоритма

Проблем нам је задат у формату:

$$\min f = c^T x$$
$$Ax = b$$
$$xi \geq 0, \forall i$$
$$ci \geq 0, \forall i$$

Алгоритам ради када постоје негативни b са десне стране али коефицијенти у функцији циља уз променљиве морају бити ненегативни

Алгоритам је врло сличан обичној симплекс методи само су кораци мало измењени
Наравно као у сваком симплексу треба да проблем који смо добили увек сведемо на ову форму која нам се тражи за улаз

корак1 : Да ли постоји b<0 ако не постоји крај! Нашли смо оптимално решење

корак2 : изабрати индекс i тако да је bi<0

корак3 : у том реду изабраном тражимо индекс j тако да важи следеће:
max { cj/Aij | Aij <0 } , а ако такав индекс не постоји онда исписати да нема допустивих тачака

корак4 : пивотирати око елемента Aij , делимо ред i са њим и правимо 0 изнад и испод у колони j
Вратити се на корак1

Задатак

$$\min f = 7x + 4y + z$$
$$2x - y - z \geq 0$$
$$x + 2y + z \geq 3$$
$$-x + y - 2z \geq -4$$
$$x, y, z \geq 0$$

Прво треба да сведемо у тражену форму за улаз
претварамо једначине у неједначине додавањем изравнајућих променљиви
(-s за >= , +s за <=)

$$\min f = 7x + 4y + z$$
$$2x - y - z - s1 = 0$$
$$x + 2y + z - s2 = 3$$
$$-x + y - 2z - s3 = -4$$
$$x, y, z, s1, s2 \geq 0$$

Сада пошто нам требају базисне множимо редове где су -s са -1

$$min f = 7x + 4y + z$$
$$-2x + y + z + s1 = 0$$
$$-x - 2y - z + s2 = -3$$
$$x - y + 2z + s3 = 4$$
$$x, y, z, s1, s2 \geq 0$$

конструишемо таблицу

x	y	z	s1	s2	s3	
-2	1	1	**1**	**0**	**0**	0
-1	-2	-1	**0**	**1**	**0**	-3
1	-1	2	**0**	**0**	**1**	4
7	4	1	**0**	**0**	**0**	0

крећемо корак 1 : постоји b<0 то је -3 па узимамо тај ред за пивот ред
корак 2: узимамо елементе <0 у том реду и узимамо по формули највећи
max = { 7/-1, 4/-2 , 1/-1}
највећи је -1 па узимамо тај ред и пивотирамо око њега
делимо тај ред са -1 и правимо 0 изнад и испод њега (плава боја)

x	y	z	s1	s2	s3	
-2	1	1	**1**	**0**	**0**	0
1	2	1	**0**	**-1**	**0**	3
1	-1	2	**0**	**0**	**1**	4
7	4	1	**0**	**0**	**0**	0

добијамо

x	y	z	s1	s2	s3	
-3	-1	**0**	**1**	1	**0**	-3
1	2	**1**	**0**	1	**0**	3
-1	-5	**0**	**0**	-2	**1**	-2
6	2	**0**	**0**	1	**0**	-3

Враћамо се на корак 1:
постоји b<0
корак2 : кандидати за b су {-3,-2} узимамо -3 јер је први тј мањи је индекс
корак3 : кандидати из тог реда су max{6/-3,2/-1 } узимамо x колону
након пивотирања по том елементу добијамо:

x	y	z	s1	s2	s3	
1	1/3	**0**	**-1/3**	-1/3	**0**	1
0	5/3	**1**	**1/3**	4/3	**0**	2
0	-14/3	**0**	**-1/3**	-7/3	**1**	-1
6	0	**0**	**2**	3	**0**	-9

Следећа итерација:

x	y	z	s1	s2	s3	
1	1/3	**0**	-1/3	-1/3	**0**	1
0	5/3	**1**	1/3	4/3	**0**	2
0	-14/3	**0**	-1/3	-7/3	**1**	-1
6	0	**0**	2	3	**0**	-9

Постоји b<0 j -1 бирамо тај ред
гледамо кандидате max { 0 / (-14/3) , 2 / (-1/3) , 3 / (-7/3) }
ту ће 0 бити највећи па пивотирамо око -14/3

добијамо:

x	y	z	s1	s2	s3	
1	**0**	**0**	-15/42	-1/2	1/14	13/14
0	**0**	**1**	9/42	1/2	5/14	23/14
0	**1**	**0**	1/14	1/2	-3/14	3/14
6	**0**	**0**	2	3	0	-9

враћамо се на корак1:

Пошто не постоји b<0 тренутно решење је оптимално
читамо га из колоне b и базисних колона за тај ред

x = (13/14 , 3/14 , 23/14 , 0 , 0 , 0)
f = -9