Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГАОУ ВО «УрФУ имени первого Президента России Б.Н. Ельцина»
Кафедра «школы бакалавриата (школа)»

Оценка работы_____________
Руководитель от УрФУ Перевалова Т.В.

Тема задания на практику

Производственная практика, научно-исследовательская работа

ОТЧЕТ
Вид практики Производственная практика
Тип практики Производственная практика, научно-исследовательская работа

Руководитель практики от предприятия (организации)
ФИО руководителя **Подпись**

Студент Соломеин Л.Е.
ФИО студента

Специальность (направление подготовки) 02.03.01 Математика и компьютерные науки

Группа МЕН-390206

Екатеринбург 2021

Содержание

1 Введение

В настоящее время задачи экологии имеют большое значение. Важно научиться применять методы для анализа математических моделей различных экологических систем.

Одна из основных задач экологии — изучение структуры системы и то, как она функционирует, поиск закономерностей. В качестве инструмента для анализа систем можно использовать методы из различных разделов математики, в частности нелинейеной динамики.

В данной работе предложены некоторые выкладки по анализу дискретной модели Хасселя. Подобные модели широко используется в качестве общих моделей динамики популяции с дискретным временем и наличием конкуренции за ресурсы и внутривидовой конкуренции. Так же их используют для исследования различных явлений в динамике популяций.

Наверное у нас есть эффект Алли

https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rsos.182178#d3e228

https://www.hindawi.com/journals/ddns/2020/8148634/

https://www.jstor.org/stable/3863

https://www.imperial.ac.uk/people/m.hassell/publications.html

2 Основная часть

2.1 Описание модели

Одна из вариаций модели Хасселя имеет следующую математическая запись:

$$x_{t+1} = \frac{\alpha x_t^2}{(\beta + x_t)^6}.$$

В данной формуле x_i — количество особей в поколении с номером i. Параметр α определяет скорость роста популяции, а параметр β определяет несущую способность окружающей среды.

Для упрощения задачи рассмотрим частный случай. Зафиксируем параметр $\alpha = 1$. Параметр β изменяется в диапазоне $[0; 0.6]$. Теперь запишем уравнение в таком виде:

$$x = \frac{\alpha x^2}{(\beta + x)^6}$$

$$1 = \frac{\alpha x}{(\beta + x)^6}$$

$$\alpha x = (\beta + x)^6 \tag{1}$$

Данную формулу можно рассмотреть как две функции. Построим графики функций $y = \alpha x$ и $y = (\beta + x)^6$.

В зависимости от значений параметра β уравнение (1) может иметь ноль (при $\beta > 0.582355932$), один (при $\beta \approx 0.582355932$) или два корня (при $\beta < 0.582355932$). На рисунках 1, 2 и 3 можно увидеть все возможные варианты.

2.2 Временные ряды

Для демонстрации поведения системы можно использовать временные ряды. Временной ряд позволяет наглядно показать как с течением времени изменяется численность популяции.

Далее рассмотрим подробнее все возможные ситуации. Для этого давайте зафиксируем параметр следующим образом: $\beta = 0.56$.

Давайте зафикисируем начальную численность популяции $x_0 = 0.04$. На 4 мы видим, что временной ряд сходится к нулю. В биологическом смысле это означает, что популяция с теченеим времени вымирает.

А теперь зафиксируем начальную численность популяции на уровне $x_0 = 0.06$. На 5 видно, что при таких начальных условиях популяция

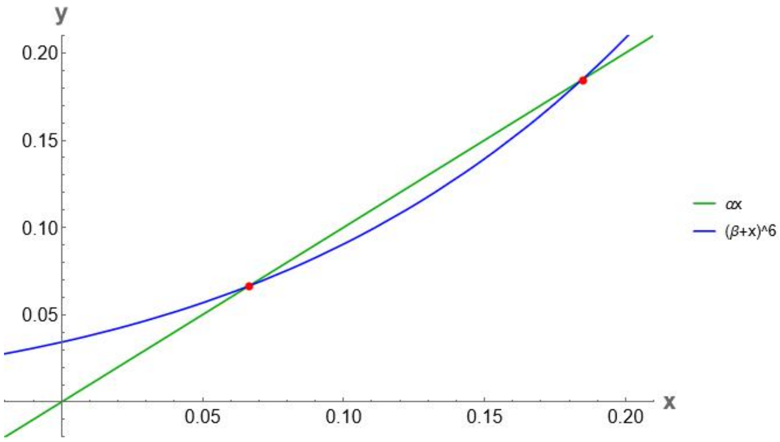

Рис. 1: $\beta = 0.57$

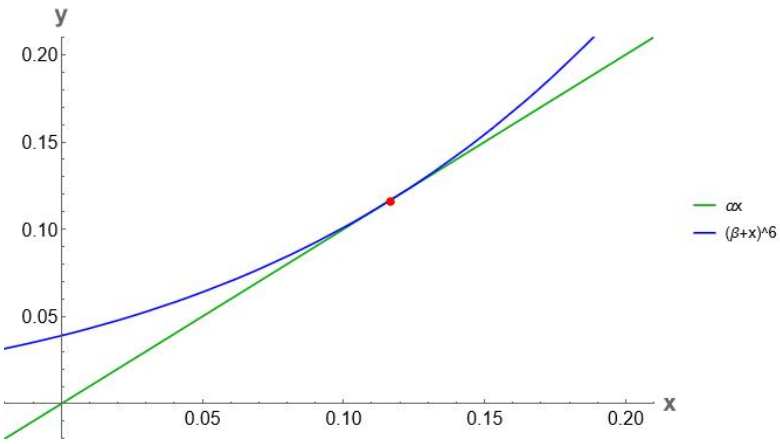

Рис. 2: $\beta \approx 0.582355932$

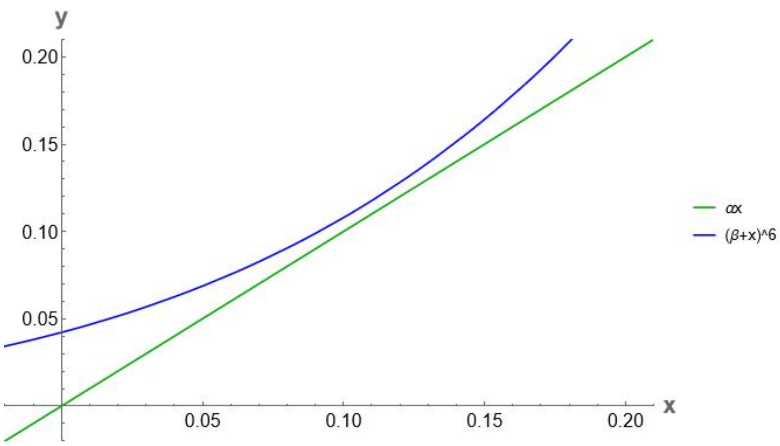

Рис. 3: $\beta = 0.59$

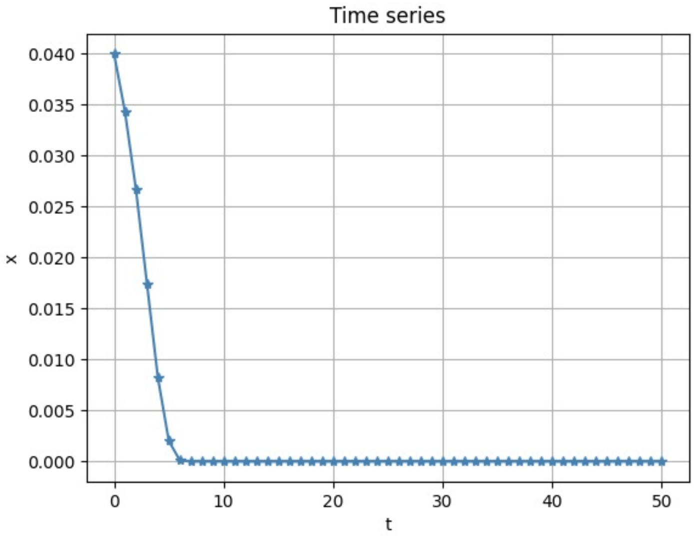

Рис. 4: $x_0 = 0.04; \beta = 0.56$

очень быстро увеличивается до некоторого значения. После достижения данного предела рост численности популяции прекращается. То есть популяция с течением времени стабилизируется.

Очень похожую ситуацию мы можем наблюдать на 6. Такой график построен при начальном значении $x_0 = 0.3$. Значения численности популяции тоже сходятся к устойчивому равновесию. Численность снова стабилизируется.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда начальная численность популяции очень большая. Такая ситуация изображена на графике (7). Мы видим, что происходит вымирание.

2.3 Лестница Ламерея

Существует также инструмент визуализации решения отображения называемый лестницой Ламерея. Этот метод аналогично временному ряду позволяет проиллюстрировать изменение численности популяции с течением времени.

Опять же рассмотрим подробнее все возможные ситуации. Для этого зафиксируем параметр: $\beta = 0.56$.

Давайте зафикисируем начальную численность популяции $x_0 = 0.04$. На 8 мы видим, что траектория сходится к нулю. В биологическом смысле это означает, что популяция с течением времени вымирает.

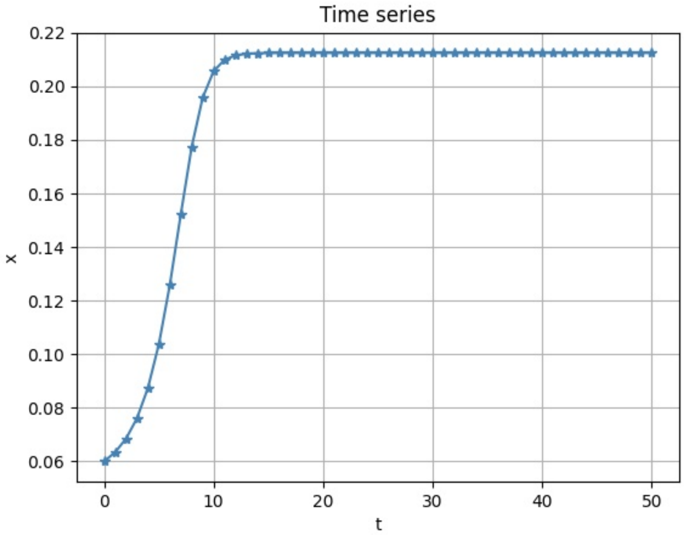

Рис. 5: $x_0 = 0.06; \beta = 0.56$

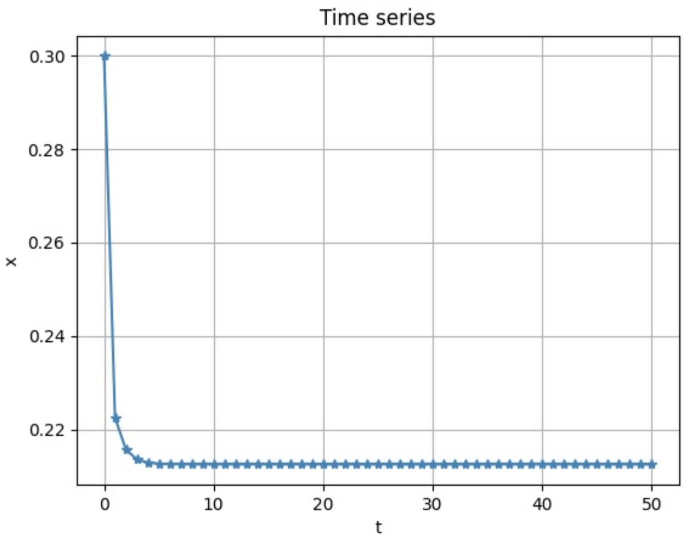

Рис. 6: $x_0 = 0.3; \beta = 0.56$

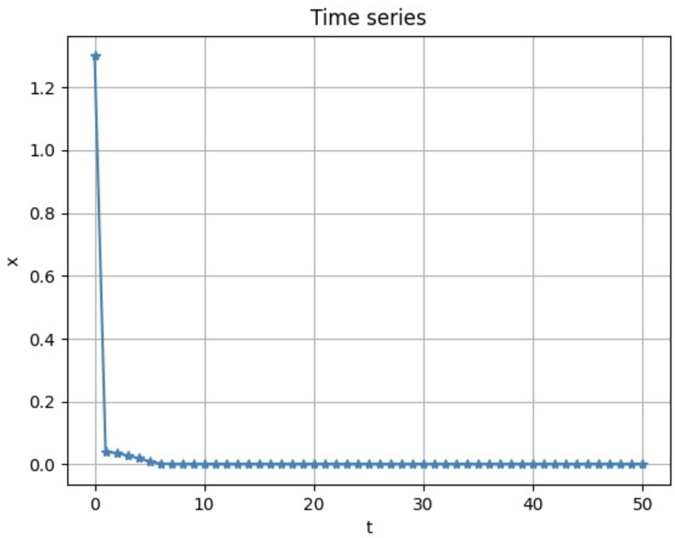

Рис. 7: $x_0 = 1.3; \beta = 0.56$

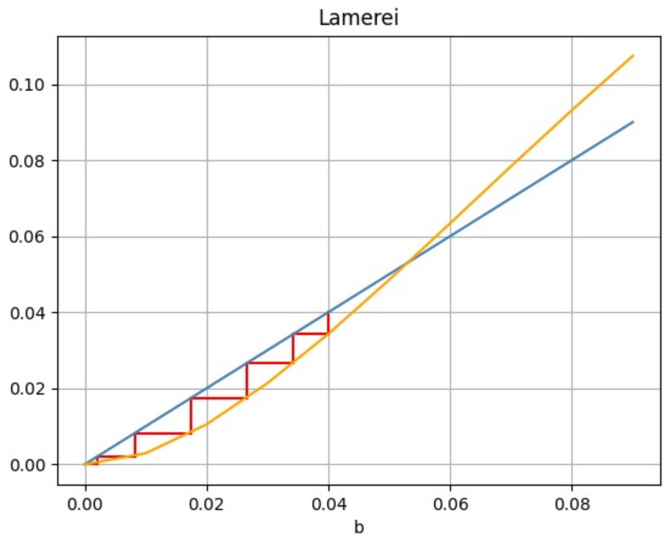

Рис. 8: $x_0 = 0.04$

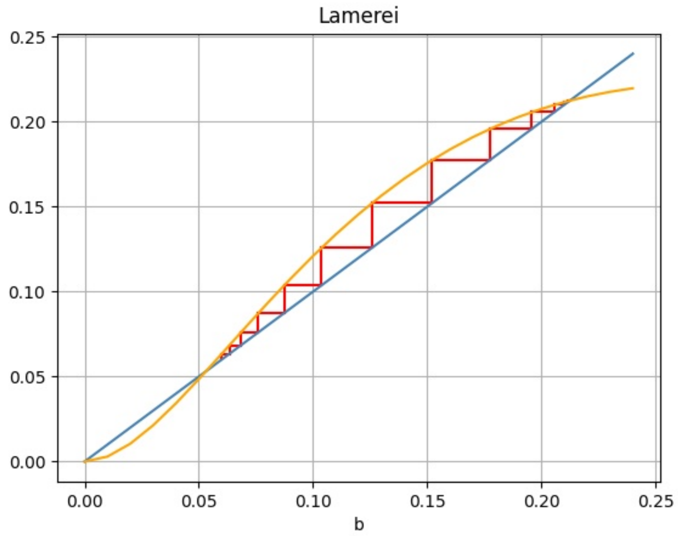

Рис. 9: $x_0 = 0.06$

А теперь зафиксируем начальную численность популяции на уровне $x_0 = 0.06$. На 9 видно, что при таких начальных условиях численность популяции сходится к $x \approx 0.21$.

Очень похожую ситуацию мы можем наблюдать на 10. Такой график построен при начальном значении $x_0 = 0.3$. Значения численности популяции тоже сходятся к устойчивому равновесию. Численность снова стабилизируется.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда начальная численность популяции очень большая. Такая ситуация изображена на графиках (11) и (12). Мы видим, что популяция вымирает.

Таким образом, кроме порогового маленького значения численности популяции существует и большое значение, задающие интервал существования популяции. Вне этого интервала популяция вымирает.

2.4 Бифуркционная диаграмма

Для визуализации аттракторов при изменении бифуркационного параметра системы строится бифуркационная диаграмма. Бифуркционная диаграмма для модели (1) при $\alpha = 1$ представленна на рисунке 13.

Бифуркационная диаграмма показывает в каком диапазоне изменяется численность популяции при конкретном значении параметра β.

Мы видим, что при $\beta \in [0.44; 0.56]$ — аттрактором модели (1) является

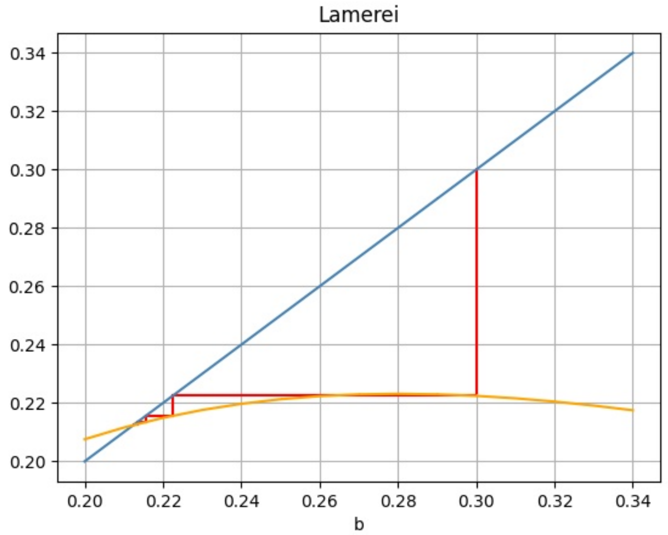

Рис. 10: $x_0 = 0.3$

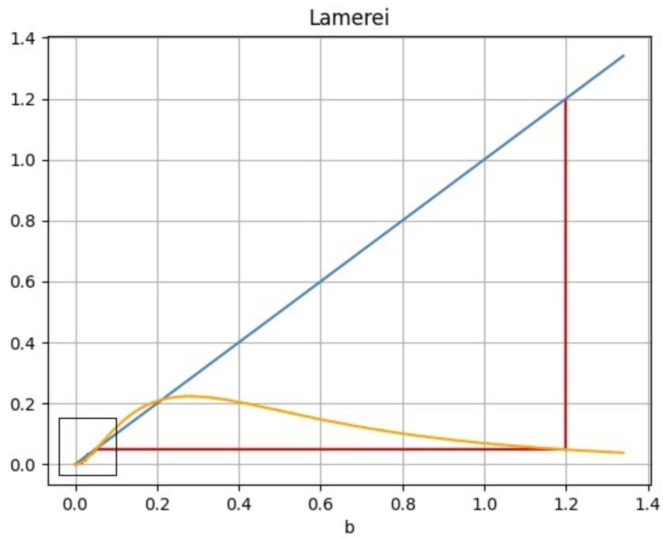

Рис. 11: $x_0 = 1.3$

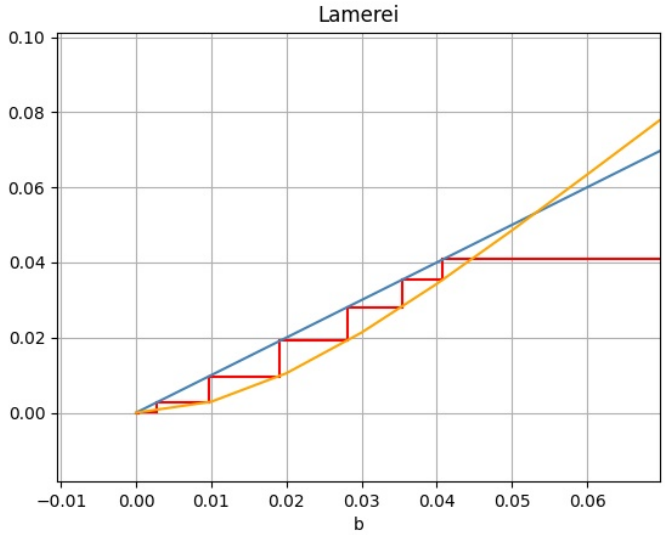

Рис. 12: Дополнение к (11)

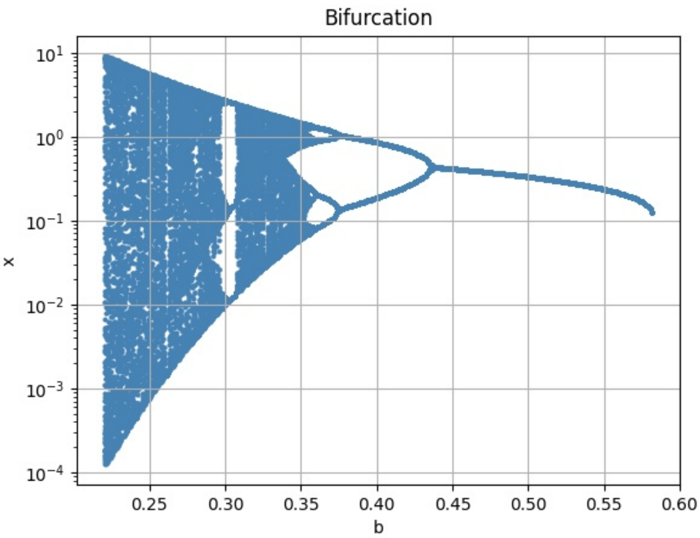

Рис. 13

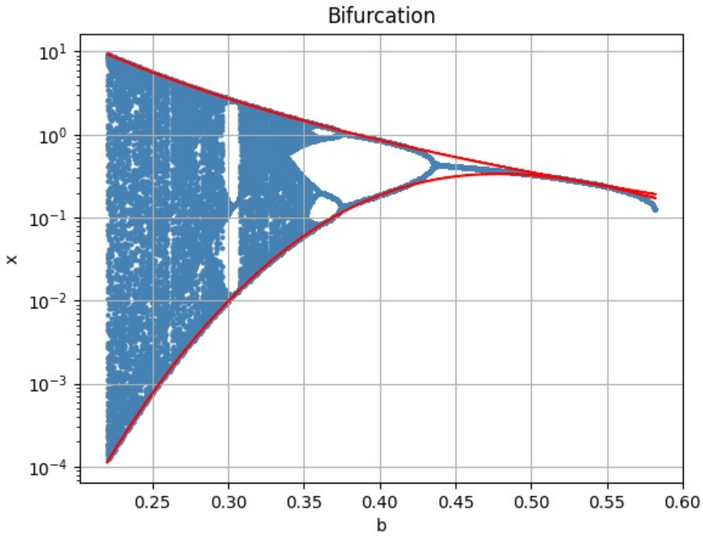

Рис. 14

равновесие. Затем происходит раздвоение и при $\beta \in [0.37; 0.44]$ видно, что аттрактором является цикл преиода 2. На диапазне $\beta \in [0.36; 0.37]$ аттрактором является цикл периода 4.

Рассмотренные выше интервалы диапазона значений β называются аттракторами. Чем дальше мы идем, тем зона каждого аттрактора становится все меньше и меньше. В какой-то момент начинается хаос. Когда наступает хаос уже невозможно предсказать к какому значению может сходится численность популяции.

А может произойти деление не на две, а на три ветки?

Странный аттрактор

Книга, стр 33

Также на график бифуркации можно нанести линии, которые показывают границы хаоса. Такое можно увидеть на изображении (14). Мы можем увидеть, что численность популяции не вылезает за линии границы хаоса, кроме самого начала. А вот почему я не знаю.

2.5 Показатель Ляпунова

Еще есть метод исследования через построение графика показателя Ляпунова. Такой график можно увидеть на рисунке (15).

На этом графике мы видим, что точки, где график показателя Ляпунова касается нуля точно соответствуют границам аттракторов, которые

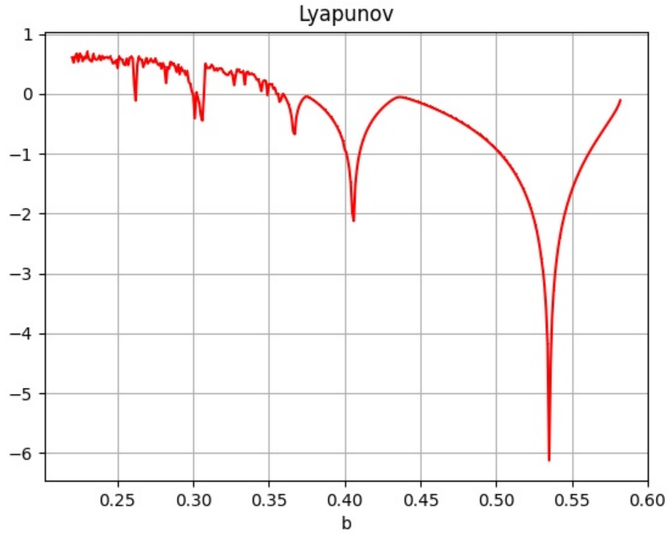

Рис. 15

мы могли наблюдать на графике бифуркации (13).

2.6 Карта режимов

Про нее нврн вообще не стоит писать, т.к. она еще не готова. Напишем в следующем курсаче

3 Итоги

Итак, что-то сделано.

На что можно ссылаться?

Для визуализации использовались Python 3.9, mathplotlib, GeoGebra и Wolfram Mathematica. Для вычислений — Python 3.9 и GeoGebra.

При написании данной курсовой работы разобрался с некоторыми методами исследования математических моделей.

Все методы исследования важны, все методы исследования нужны!

rte [Ряшко Л. Б., 2006]

Список литературы

[Ряшко Л. Б., 2006] Ряшко Л. Б., . . . (2006). *Элементы нелинейной динамики: от порядка к хаосу.*