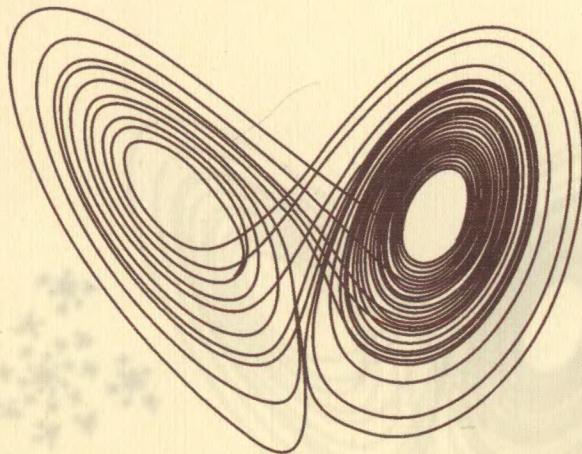


В. В. Васин

Л. Б. Ряшко

ЭЛЕМЕНТЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ: ОТ ПОРЯДКА К ХАОСУ



Институт
Компьютерных
Исследований

R&C
Dynamics

В. В. Васин, Л. Б. Ряшко

ЭЛЕМЕНТЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ: ОТ ПОРЯДКА К ХАОСУ

Рекомендовано

Учебно-методическим советом по математике
и механике УМО по классическому университетскому
образованию в качестве учебного пособия для студентов
физико-математических и технических специальностей



Москва ♦ Ижевск

2006

УДК 517.938
ББК В161.618
В195

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра прикладной математики Уральского государственного технического университета зав. кафедрой докт. физ.-мат. наук, проф. *A. H. Сесекин*; докт. физ.-мат. наук, проф. *A. Л. Агеев*

В195 Васин В. В., Ряшко Л. Б.

Элементы нелинейной динамики: от порядка к хаосу. — М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2006. — 164 с.

В пособии излагаются элементы теории хаотического поведения (детерминированного хаоса) простейших дискретных и непрерывных динамических систем и обсуждаются основные понятия фрактальной геометрии.

ISBN 5-93972-469-8

ББК В161.618

© В. В. Васин, Л. Б. Ряшко, 2006
© НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006

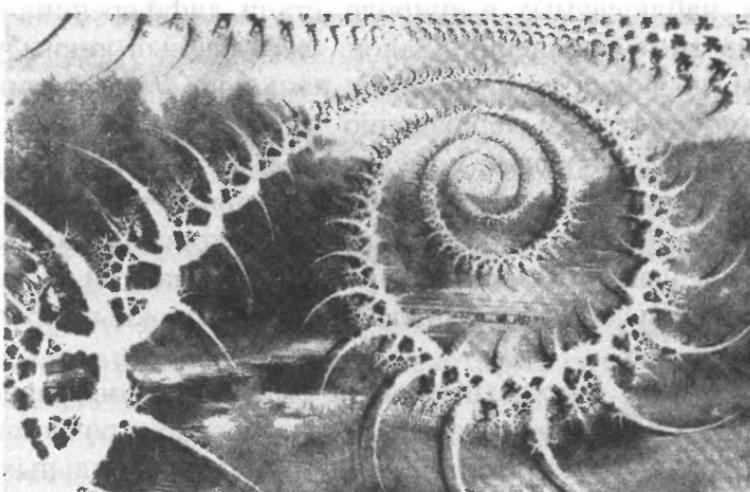
<http://rcd.ru>
<http://ics.org.ru>

Оглавление

Введение	7
ГЛАВА 1. Дискретные динамические системы	14
§ 1. Простая модель — сложная динамика	14
§ 2. Анализ одномерной системы	17
2.1. Основные понятия. (17). 2.2. Отыскание точек покоя и циклов. (19). 2.3. Устойчивость инвариантных подмножеств. (19). Упражнения (23).	
§ 3. Модели динамики популяции	24
3.1. Линейная модель. (24). 3.2. Нелинейная модель. (27). Упражнения (28).	
§ 4. Поведение нелинейной системы $x_{t+1} = \mu x_t(1 - x_t)$	29
4.1. Случай $0 < \mu \leq 1$. (29). 4.2. Случай $1 < \mu \leq 3$. (30).	
4.3. Случай $\mu > 3$. Бифуркация рождения цикла (30).	
4.4. Каскады бифуркаций, удвоение периода и переход к хаосу (32). Упражнения (37).	
§ 5. Хаотическое поведение системы	38
5.1. Поведение критических значений параметра. (38).	
5.2. Показатель Ляпунова. (41). Упражнения (43).	
§ 6. Универсальность в поведении систем	43
6.1. Определение константы α . (43). 6.2. Универсальность констант. (44). 6.3. Класс функций, порождающий бифуркацию удвоения. (47). Упражнения (49).	
§ 7. Уравнение удвоения	50
§ 8. Численное нахождение универсальной константы α_p	55
§ 9. Численное нахождение универсальной константы δ_p	58
9.1. Общий метод. (58). 9.2. Прямой алгоритм. (60).	
Упражнения (62).	

ГЛАВА 2. Элементы фрактальной геометрии	64
§ 10. Комплексные динамические системы	64
10.1. Множества Жюлиа, Фату и Мандельброта. (64).	
10.2. Классификация множеств Жюлиа. (69). 10.3.	
N-фуркации системы. (76). Упражнения (78).	
§ 11. Отображение подобия и самоподобие множеств	79
§ 12. Топологическая и фрактальная размерности	82
Упражнения (84).	
§ 13. Галерея классических фракталов	85
13.1. Канторово множество. (85). 13.2. Кривая Кох (85). 13.3. Фрактал Мандельброта–Гивена (86).	
13.4. Решето Серпинского (клиновидная кривая) (86).	
13.5. Ковер Серпинского (двумерное множество). (87).	
13.6. Фрактал Давида (двумерное множество). (88).	
13.7. Пятиугольник Дюрера (двумерное множество) (88). 13.8. Губка Серпинского (трехмерное множество) (89). 13.9. Кривая Гильберта. (89). 13.10.	
Структура аттракторов. (90). Упражнения (91).	
§ 14. Функциональное уравнение для фракталов	92
14.1. Уравнение для канторова множества. (92). 14.2.	
Уравнение для кривой Кох. (93). 14.3. Уравнение для решета Серпинского. (94).	
§ 15. Итерационная аппроксимация фракталов	95
15.1. Свойство сжимаемости оператора Хатчинсона в метрике Хаусдорфа. (95). 15.2. Метод последовательных приближений. (98).	
§ 16. Проблема сжатия информации	101
16.1. Общий формализм. (101). 16.2. Случай множеств. (103). 16.3. Случай функции. (103). 16.4. Численный пример. (106).	
ГЛАВА 3. Непрерывные динамические системы	109
§ 17. Модели динамических процессов	109
17.1. Одномерная модель динамики популяции. (109).	
17.2. Модель «хищник – жертва». (110). 17.3. Линей-	

ный осциллятор. (111). 17.4. Электронный осциллятор. Уравнение Ван-дер-Поля. (113). 17.5. Химический осциллятор (брюсселятор). (113). 17.6. Хаотический осциллятор. Модель Лоренца. (115). 17.7. Модель Ресслера. (115).	
§ 18. Фазовый портрет системы дифференциальных уравнений и его свойства	116
18.1. Основные понятия. (116). 18.2. Фазовые портреты линейных систем. (120). 18.3. Численные методы решения дифференциальных уравнений. (121). Упражнения (123).	
§ 19. Анализ нелинейной системы в окрестности точки покоя	126
19.1. Система первого приближения. (126). 19.2. Устойчивость точки покоя. (128). 19.3. Примеры (129). Упражнения (132).	
§ 20. Анализ системы в окрестности цикла	133
20.1. Основные понятия. Система первого приближения. (133). 20.2. Линейные системы с периодическими коэффициентами. Элементы теории Флорке. (135). 20.3. Экспоненциальная устойчивость цикла.(137). Упражнения (139).	
§ 21. Бифуркации	140
21.1. Структурная устойчивость и бифуркации. (140). 21.2. Бифуркация рождения цикла. (142). 21.3. Порядок и хаос в модели Лоренца. (151). Упражнения (156).	
Список литературы	158
Предметный указатель	162



Я приветствую тех, кто любит хаос.
Ведь без хаоса нельзя родить танцу-
ющую звезду.

Ф. Ницше

Введение

В бесконечном многообразии явлений окружающего мира человек всегда выделял простое и сложное, упорядоченное и непредсказуемое, однозначно определенное и случайное. Явления первого типа составляют мир порядка, а все остальное относилось к зоне хаоса. Развитие наук, выявляя неизвестные ранее закономерности явлений, относящихся к зоне хаоса, позволяло переводить эти закономерности в зону порядка.

Классическими математическими моделями для процессов, наблюдаемых в природе, стали дифференциальные и разностные уравнения. Закон, выраженный таким уравнением, позволял по известному начальному состоянию исследуемой системы однозначно определять ее состояние в любой последующий момент времени. Успехи механики и электродинамики, опирающиеся на уравнения Ньютона – Максвелла, в решении задач описания движения материальных тел и электромагнитных процессов позволяли надеяться сделать предсказуемыми явления в этих важных областях знания.

Казалось, дело за немногим: выявить закономерности, лежащие в основе этих, еще мало изученных процессов, записать найденные законы в виде дифференциальных или разностных уравнений и «... будущее предстанет перед нами с полной определенностью». Эти слова Лапласа, основоположника идеи детерминизма, рисовали счастливое будущее, когда наконец воцарится желанный порядок, а хаос останется лишь как воспоминание о далеком прошлом, когда цивилизация делала свои первые шаги.

Лапласовские мечты о детерминизме столкнулись с новой реальностью. В 60-х годах прошлого века были обнаружены весьма простые по форме записи динамические модели, имеющие чрезвычайно сложное поведение. Хаос появлялся там, где его никак не ждали. Оказалось, что дифференциальные (модель Лоренца) и разностные (модель Ферхюльста) уравнения, задаваемые простейшими квадратичными функциями, при сколь угодно малых изменениях их параметров, могут резко менять характер своих решений и от упорядоченных регулярных движений (положение равновесия или периодические колебания) переходить к хаотическим с непредсказуемой динамикой.

Таким образом, было установлено, что существуют динамические системы, поведение которых фактически нельзя проследить на достаточно широком промежутке времени или, как говорят, система имеет малый горизонт прогнозирования или пределы предсказуемости (например, прогноз погоды) ввиду чрезвычайно сильной неустойчивости основных характеристик системы. По остроумному замечанию одного из авторов популярной статьи, нелинейная динамика лишила иллюзии глобальной предсказуемости.

К концу прошлого века возникла теория динамического хаоса, которая позволяет в некоторых ситуациях описать универсальные сценарии перехода от упорядоченного поведения системы к хаосу и наоборот. Было установлено, что хаотическое поведение присуще многим развивающимся системам с нелинейной динамикой и что хаос — достаточно глубокая характеристика природных явлений. Характерным примером проявления этого феномена является любая экономическая система, в которой период устойчивого развития, характеризующийся стабильностью базовых макроэкономических показателей, обязательно сменяется периодом нестабильности, коллапса и хаоса. Это сопровождается, как правило, существенной структурной перестройкой самой системы, после чего система выходит на качественно новый уровень развития. Поэтому можно утверждать, что переход через хаос есть необходимое условие развития любой экономической системы.

Под динамической системой (ДС) условимся понимать всякую записанную в математических терминах совокупность соотношений, которая однозначно определяет некоторую функцию (в общем случае вектор-функцию), зависящую от дискретного или непрерывного аргумента, играющего роль времени, и параметра (скалярного или векторного).

Конечно, это слишком общее определение. Обычно этот термин (т. е. ДС) используют, когда речь идет об объектах или явлениях, описываемых системами уравнений обыкновенных или в частных производных эволюционного типа.

Таким образом, динамическую систему мы определяем в математическом смысле, как правило, отвлекаясь от явлений (процессов), которые она описывает. Однако в инженерной трактовке (для физиков) обычно различают собственно динамическую систему и ее математическое описание.

Приведем для сравнения соответствующее определение из учебного пособия В. С. Анищенко: «Под динамической системой понимают любой объект или процесс, для которого однозначно определено понятие состояния как совокупности некоторых величин в данный момент времени, и задан закон, который описывает изменение (эволюцию) начального состояния с течением времени. Динамические системы — это механические, физические, химические и биологические объекты, вычислительные процессы преобразования информации, совершаемые в соответствии с конкретным алгоритмом» [2].

Значительный всплеск интереса исследователей к хаотическим ДС возник после выхода работ М. Фейгенбаума в конце 70-х годов прошлого столетия, который, исследуя простейший итерационный процесс с квадратичной нелинейностью, обнаружил хаотическое поведение итераций и нашел две универсальные константы, характеризующие поведение целого класса ДС, включая систему Лоренца [19].

Примерно в этот же период произошло еще одно событие, вызвавшее большой резонанс, это открытие Б. Мандельброта, который, изучая с помощью компьютерного моделирования итерации с комплексной квадратичной функцией (т. е. двумерный итерационный процесс), обнаружил, что область изменения комплексного параметра (множество Мандельброта), при котором траектория критической точки

системы удерживается в ограниченной области, имеет удивительно причудливую форму, состоящую из самоподобных фрагментов (см. об этом [29]).

Самоподобную и нерегулярную структуру образуют также множества Жюлиа (первые компьютерные изображения этих множеств получены Дж.Х.Хаббардом и Б.Мандельбротом), которые порождаются ограниченными траекториями комплексной квадратичной функции с фиксированным параметром из множества Мандельброта.

Множества, обладающие свойством подобия и некоторой «геометрической хаотичностью», были названы Б.Мандельбротом фракталами. Таким образом, возникла новая дисциплина — ф р а к т а л ь н а я г е о м е т р и я .

Было обнаружено, что аттракторы (предельные точки квадратичного итерационного процесса) в бесконечной цепи бифуркаций (удвоение периода) образуют самоподобные, т.е. фрактальные, структуры с величиной скейлинга, равной 2-й универсальной константе Фейгенбаума.

Также выяснилось, что еще в 20-х годах, в работах французских математиков Г.Жюлиа и П.Фату были предсказаны и изучены многие свойства комплексных ДС. Но эти работы не были оценены, даже были забыты на многие десятилетия. Отчасти это произошло, может быть, потому, что из-за отсутствия компьютеров в то время не было возможности проиллюстрировать их результаты наглядно в графическом виде и показать завораживающую красоту фрактальных форм.

Причем, что интересно отметить, фракталы, рожденные как математические объекты в процессе исследования очень простых динамических систем, удивительным образом напоминают то причудливую форму облака, структуру кристалла или фрагмент Галактики, то сильно изрезанную береговую линию, трещину в металле или ювелирное украшение.

В пособии излагаются элементы теории хаотического поведения на примере простейших динамических систем, в которых переход к хаосу сопровождается бифуркацией (n -фуркацией) периода системы. Исследуются два класса динамических систем: дискретные ДС, задаваемые одномерным или двумерным итерационным процессом, и непрерывные ДС, описываемые нелинейными дифференциальными уравнениями специального вида и обладающие сильной чувствительностью к изменениям входящих параметров.

Учебное пособие состоит из трех глав, разделенных на параграфы, и организовано следующим образом.

Глава 1 целиком посвящена дискретным ДС, главным образом, итерационному процессу с действительной квадратичной функцией шага. Рассматривается переход к хаосу через цепочку бифуркаций удвоения периода. Вводятся базовые понятия, определяются универсальные константы, устанавливается связь этих констант с типом нелинейности итерируемой функции, предпринимается попытка описания класса отображений, порождающих явления удвоения периода.

Глава 2 — это введение во фрактальную геометрию. Выясняется поведение итераций с комплексной квадратичной функцией (двумерный итерационный процесс), описываются основные классы множеств Жюлия и их связь с множеством Мандельброта. Далее, определяется фрактальная размерность, позволяющая охарактеризовать класс фрактальных множеств, описываются классические фракталы и выводятся уравнения, которым они удовлетворяют, излагаются методы итерационной аппроксимации фракталов и подходы к проблеме сжатия информации.

Глава 3 посвящена непрерывным ДС. Рассматриваются классические модели, задаваемые дифференциальными уравнениями: модель хищник — жертва, механическая, элек-

тронная (уравнение Ван-дер-Поля) и химическая (брюсселятор) колебательные системы, хаотические осцилляторы (модель Лоренца и Ресслера). Даётся способ описания динамики систем при помощи фазовых портретов. Излагаются методы анализа ДС вблизи точки покоя и цикла. Детально рассматривается бифуркация рождения цикла. На примере циклов модели Лоренца представлен каскад бифуркаций удвоения периода, приводящий к хаосу.

Содержание пособия основано на материале, который читался авторами в течение ряда лет в Уральском государственном университете. Оно может быть рекомендовано студентам физико-математических и технических специальностей для первоначального знакомства с хаотической динамикой и фрактальной геометрией.

ГЛАВА 1

Дискретные динамические системы

В последние годы стало ясно, что высокая чувствительность к начальным условиям, приводящая к хаотическому поведению во времени, никоим образом не исключение, — это типичное свойство многих систем.

Г. Шустер

You can't know how happy I am that we met
I'm strangely attracted to you.

C. Porter

§ 1. Простая модель — сложная динамика

Многие считают, что сложное поведение динамической системы определяется большим количеством переменных, связанных громоздкими формулами. Однако существуют примеры очень простых систем, демонстрирующих достаточно сложную динамику. Одним из таких примеров является рассматриваемая ниже система, в поведении которой присутствуют основные черты таких важных явлений нелинейной динамики, как циклы различной кратности, перемешивание, хаос.

Рассмотрим динамику системы, заданной итерационным процессом

$$x_{t+1} = \{10x_t\}, \quad t = 0, 1, \dots \quad (1.1)$$

Функция шага $\varphi(x) = \{10x\}$, где $\{y\}$ означает дробную часть числа y , по заданному начальному значению x_0 однозначно определяет последовательность $x_1 = \varphi(x_0), x_2 = \varphi(x_1), \dots$. Отображение $\varphi(x)$ переводит полуинтервал $[0, 1)$ в себя. Это означает, что, начиная с произвольной точки $x_0 \in [0, 1)$, все последующие элементы x_1, x_2, \dots будут также лежать в полуинтервале $[0, 1)$.

Примеры последовательностей

$$\begin{aligned} x_0 &= 0.27, & x_1 &= 0.7, & x_2 &= 0, & \dots & x_n = 0, \dots \\ x_0 &= 0.51(3), & x_1 &= 0.1(3), & x_2 &= 0.(3), & \dots & x_n = 0.(3), \dots \end{aligned}$$

показывают, что для некоторых начальных значений состояния системы уже через несколько шагов перестает изменяться, т. е. последовательность $\{x_t\}$ становится стационарной. При этом $\xi_0 = 0, \xi_1 = 0.(1), \dots, \xi_8 = 0.(8)$ являются неподвижными точками отображения $\varphi(x)$ или точками покоя системы (1.1).

Взяв другие начальные значения, можно получить последовательности

$$\begin{aligned} x_0 &= 0.27(35), & x_1 &= 0.7(35), & x_2 &= 0.(35), \\ x_3 &= 0.(53), & x_4 &= 0.(35), & x_5 &= 0.(53), \dots \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} x_0 &= 0.8(307), & x_1 &= 0.(307), & x_2 &= 0.(073), \\ x_3 &= 0.(730), & x_4 &= 0.(307), & x_5 &= 0.(073), \dots \end{aligned} \quad (1.3)$$

элементы которых через некоторое число шагов начинают повторяться, образуя цикл. Для последовательности (1.2)

цикл состоит из двух элементов (2-цикл) $\xi_1 = 0.(35), \xi_2 = 0.(53)$. Для последовательности (1.3) наблюдается 3-цикл $\xi_1 = 0.(307), \xi_2 = 0.(073), \xi_3 = 0.(730)$. С какого бы рационального числа $x_0 = 0.a_1 \dots a_n(b_1 \dots b_m)$ мы ни стартовали, итерационный процесс (1.1) через конечное число шагов становится периодическим:

$$x_1 = 0.a_2 \dots a_n(b_1 \dots b_m), \dots, x_n = 0.(b_1 \dots b_m), \\ x_{n+1} = 0.(b_2 \dots b_m b_1), \dots, x_{n+m} = 0.(b_1 \dots b_m), \dots$$

При этом длина переходного процесса равна n , а длина цикла определяется количеством знаков m в повторяющейся части десятичного позиционного представления начального состояния x_0 . Как видим, поведение системы является вполне упорядоченным и предсказуемым. В этом случае говорят, что в системе наблюдается порядок.

Последовательность, стартующая с иррационального числа, ведет себя гораздо сложнее. Например, взяв $x_0 = \{\pi\} = 0.14159265\dots$, получим последовательность, которая бесконечное число раз попадает в сколь угодно малую окрестность каждой точки полуинтервала $[0, 1]$. Поведение последовательности выглядит как случайное или хаотическое. Тогда говорят, что в системе наблюдается хаос.

Рассмотрим задачу приближенного описания динамики системы (1.1), выходящей из точки $x_0 = \{\pi\}$. Десятичная дробь, представляющая x_0 , содержит бесконечную последовательность цифр после запятой. В качестве приближения для x_0 возьмем $x_0^* = 0.14159265$. Тогда найденные по формуле $x_{t+1}^* = \varphi\{x_t^*\}$ последующие элементы x_1^*, x_2^*, \dots являются соответствующими приближениями для x_1, x_2, \dots .

При этом ошибка $\Delta_t = x_t - x_t^*$ меняется следующим образом: $10^{-7} < \Delta_0 < 10^{-8}, 10^{-6} < \Delta_1 < 10^{-7}, \dots, 10^{-1} < \Delta_8 < 1$. Десятикратный рост ошибки на каждом шаге приводит к тому, что уже через восемь шагов мы ничего не можем сказать

о поведении полученного решения. Действительно, элементы приближения $x_8^* = 0 = x_9^* = x_{10}^* \dots$ уже не несут никакой информации об истинных значениях x_8, x_9, x_{10}, \dots .

Отображение промежутка $[0, 1)$ в себя, задаваемое функцией $\varphi(x) = \{10x\}$, можно разделить на этапы. Разобьем весь промежуток $[0, 1)$ на 10 частей: $I_1 = [0, 0.1), I_2 = [0.1, 0.2), \dots, I_{10} = [0.9, 1.0)$. Сначала функция $\varphi_1(x) = 10x$ растягивает каждый из полуинтервалов I_n в десять раз: $I'_1 = \varphi_1[I_1] = [0, 1.0), I'_2 = \varphi_1[I_2] = [1, 2), I'_{10} = \varphi_1[I_{10}] = [9, 10)$. Затем функция $\varphi_2(x) = \{x\}$ переводит каждый из этих растянутых полуинтервалов в один исходный полуинтервал $[0, 1)$, отождествляя (склеивая) соответствующие точки. В результате функция $\varphi(x) = \varphi_2[\varphi_1(x)]$ есть суперпозиция двух функций — растяжения $\varphi_1(x)$ и склеивания $\varphi_2(x)$. Последовательные итерации растяжения и склеивания, удаляя друг от друга близкие точки и сближая далекие, хорошо перемешивают точки полуинтервала $[0, 1)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если считать x_0 случайной величиной, распределенной на интервале $[0, 1)$ с плотностью $p_0(x)$, то $p_1(x)$ — плотность распределения $x_1 = \varphi(x_0)$ — получается из $P_0(x)$ усреднением

$$p_1(x) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} p_0(10(x - \frac{i}{10})).$$

§ 2. Анализ одномерной системы

2.1. Основные понятия. Рассмотрим одномерную систему, определяемую итерационным процессом

$$x_{t+1} = \varphi(x_t), \tag{2.1}$$

где x — скалярная переменная, X — область определения, а $Y = \varphi(X)$ — область значений функции $\varphi(x)$. Предполага-

гается, что $Y \subseteq X$. Тогда для любого $x_0 \in X$ процесс (2.1) задает последовательность x_t ($t = 0, 1, \dots$), которая называется орбитой точки x_0 .

Определение 2.1. Множество $M \subset X$ называется инвариантом системы (2.1), если $\varphi(M) \subset M$.

Если $x_0 \in M$, то и все последующие элементы $x_t \in M$. Простейшим примером инвариантного множества является точка покоя, т. е. неподвижная точка отображения φ .

Определение 2.2. Точка $\xi \in X$ называется точкой покоя системы (2.1), если $\xi = \varphi(\xi)$.

Если $x_0 = \xi$, то $x_0 = x_1 = x_2 = \dots = x_t = x_{t+1} = \dots$, все последующие элементы не меняются. Важным примером инвариантного множества является цикл.

Определение 2.3. Множество $M = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k\}$ называется k -циклом системы (2.1), если между его элементами имеется следующая связь:

$$\xi_2 = \varphi(\xi_1), \xi_3 = \varphi(\xi_2), \dots, \xi_k = \varphi(\xi_{k-1}), \xi_1 = \varphi(\xi_k).$$

Определение 2.4. Точка ξ называется k -периодической, если $\xi = \varphi^k(\xi) = \varphi(\varphi(\dots(\varphi(\xi))))$. Здесь функция φ применяется k раз.

Пусть у системы (2.1) имеется 2-цикл $M = \{\xi_1, \xi_2\}$. Тогда для $x_0 = \xi_1$ получим последовательность $x_1 = \xi_2, x_2 = \xi_1, \dots, x_{2t} = \xi_1, x_{2t+1} = \xi_2, \dots$, а для $x_0 = \xi_2$ — последовательность $x_1 = \xi_2, x_2 = \xi_1, \dots, x_{2t} = \xi_2, x_{2t+1} = \xi_1, \dots$. Оба эти решения являются 2-периодическими: $x_{t+2} = x_t$.

В общем случае каждая последовательность, стартующая из произвольного элемента k -цикла $x_0 = \xi_i$, является k -периодической: $x_{t+k} = x_t$.

2.2. Отыскание точек покоя и циклов. Точка покоя ξ системы (2.1) удовлетворяет равенству $\xi = \varphi(\xi)$. Таким образом, для отыскания всех точек покоя системы (2.1) требуется найти все решения уравнения $x = \varphi(x)$.

Поиск цикла также сводится к решению некоторого уравнения. Действительно, рассмотрим k -кратную суперпозицию функций $\varphi(x)$

$$\varphi^k(x) = \varphi(\varphi(\dots\varphi(x)))$$

и связанную с $\varphi^k(x)$ динамическую систему

$$y_{t+1} = \varphi^k(y_t). \quad (2.2).$$

При одинаковых начальных значениях $y_0 = x_0$ элементы орбит для систем (2.1) и (2.2) связаны соотношением $y_t = x_{kt}$. Как видим, $\{y_t\}$ является подпоследовательностью для последовательности x_t . При этом элементы y_t получаются выделением (сечением) в последовательности $\{x_t\}$ элементов, отстоящих друг от друга на k шагов.

Каждый элемент ξ_i k -цикла $\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$, удовлетворяя соотношению $\xi_i = \varphi^k(\xi_i)$, является точкой покоя системы (2.2). При этом все элементы ξ_1, \dots, ξ_k являются корнями уравнения $x = \varphi^k(x)$. Среди корней этого уравнения могут быть не только элементы k -цикла. Действительно, очевидным корнем этого уравнения является точка покоя ξ системы (2.1). Если система (2.1) имеет более короткий l -цикл, где l кратно k и $l < k$, то все элементы этого l -цикла также являются корнями уравнения $x = \varphi^k(x)$.

2.3. Устойчивость инвариантных подмножеств. Пусть $\rho(x_0, M) = \inf_{x \in M} |x_0 - x|$ — расстояние от точки x_0 до подмножества M .

Определение 2.5. Инвариантное подмножество M в системе (2.1) называется устойчивым по Ляпунову, если в некоторой его окрестности U ($M \subseteq U$) справедливо следующее:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall x_0 \in U \quad \forall t \quad \rho(x_0, M) < \delta \Rightarrow \rho(x_t, M) < \varepsilon.$$

В противном случае подмножество M называется неустойчивым.

Определение 2.6. Устойчивое по Ляпунову подмножество M называется асимптотически устойчивым, если $\forall x_0 \in U \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(x_t, M) = 0$, где U — некоторая окрестность множества M .

Для простейшего инвариантного множества, состоящего из одной точки покоя ξ , достаточное условие асимптотической устойчивости дается следующей теоремой.

Теорема 2.1. Пусть в некоторой окрестности $U_\varepsilon = (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ точки покоя ξ системы (2.1) существует непрерывная производная $\varphi'(x)$ и выполняется неравенство $|\varphi'(\xi)| < 1$. Тогда точка покоя ξ является асимптотически устойчивой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Благодаря непрерывности $\varphi'(x)$, в некоторой окрестности $U_\delta = (\xi - \delta, \xi + \delta)$ выполняется неравенство $|\varphi'(x)| \leq q < 1$. При этом, используя формулу Лагранжа, получим $|\varphi(x) - \xi| = |\varphi'(\theta)||x - \xi| \leq q|x - \xi|$. Данное неравенство означает, что при любом $x_0 \in U_\delta$ справедлива оценка $|x_t - \xi| \leq q^t|x_0 - \xi| < \delta$, гарантирующая асимптотическую устойчивость точки покоя ξ .

Теорема 2.2. Пусть $|\varphi'(\xi)| > 1$. Тогда ξ — неустойчивая точка покоя.

Отметим, что величина $q = |\varphi'(\xi)|$ является количественной характеристикой степени устойчивости точки покоя ξ . Действительно, вблизи ξ справедливо приближенное равенство

$$|x_{t+1} - \xi| \approx |\varphi'(\xi)| |x_t - \xi|.$$

Величина q показывает, во сколько раз решение системы (2.1) приближается к точке покоя ξ за один шаг. При $q = 1$ (критический случай) точка может быть как устойчивой, так и неустойчивой.

Исследование устойчивости цикла $\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ системы (2.1), как следует из приведенных выше рассуждений, сводится к анализу устойчивости его элементов ξ_1, \dots, ξ_k как точек покоя системы (2.2). В соответствии с теоремами 2.1, 2.2 все решает производная $(\varphi^k(x))'$ в этих точках.

Теорема 2.3. *Пусть x_0, x_1, \dots, x_{k-1} — последовательные итерационные точки в процессе (2.1). Тогда справедлива формула*

$$(\varphi^k(x_0))' = \prod_{t=0}^{k-1} \varphi'(x_t). \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Применим индукцию по k . Для $k = 0$ формула очевидна. Предположим, что она справедлива для $k - 1$, и докажем, что она имеет место для k . Действительно, имеем

$$\begin{aligned} (\varphi^k(x_0))' &= [\varphi(\varphi^{k-1}(x_0))]' = \varphi'(\varphi^{k-1}(x_0)) \cdot (\varphi^{k-1}(x_0))' = \\ &= \varphi'(x_{k-1}) \cdot \prod_{t=0}^{k-2} \varphi'(x_t) = \prod_{t=0}^{k-1} \varphi'(x_t). \end{aligned}$$

Следствие 2.1. *Пусть $\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ — k -цикл. Тогда производная $(\varphi^k(x))'$ во всех точках ξ_i ($i = 1, 2, \dots, k$) име-*

ет одно и то же значение

$$q = (\varphi^k(\xi_i))' = \prod_{t=0}^k \varphi'(\xi_t).$$

Теорема 2.4. Пусть в некоторой окрестности k -цикла системы (2.1) существует непрерывная производная $\varphi'(x)$ и выполняется неравенство

$$\left| \prod_{i=1}^k \varphi'(\xi_k) \right| < 1. \quad (2.4)$$

Тогда k -цикл является асимптотически устойчивым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Из выражений (2.3), (2.4) вытекают неравенства $|(\varphi^k(\xi_i))'| < 1$ ($i = 1, \dots, k$), из которых по теореме 2.1 следует асимптотическая устойчивость всех точек покоя ξ_i для системы (2.2). Рассмотрим точку ξ_1 . Ее асимптотическая устойчивость означает существование окрестности $U = (\xi_1 - \delta, \xi_1 + \delta)$, для которой соответствующие решения y_t системы (2.2) обладают следующими свойствами:

$$\forall y_0 \ \forall t \ y_0 \in U \Rightarrow y_t \in U,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_t = \xi_1.$$

Свяжем с последовательностью y_t последовательность x_j , порождаемую системой (2.1) с начальным условием $x_0 = y_0$. Отметим, что $y_t = x_{kt}$. Теперь для каждого $i \in \{1, \dots, k\}$ в последовательности x_j выделим подпоследовательность $y_t^i = x_{kt+i-1}$. Отметим, что последовательность y_t^i есть решение системы (2.2) с начальным условием $y_0^i = x_{i-1}$, при этом

$$y_t^i - \xi_i = \varphi^{i-1}(y_t) - \varphi^{i-1}(\xi_1). \quad (2.5)$$

Из непрерывности $\varphi'(x)$ следует существование константы $K > 0$, для которой справедлива оценка

$$\forall i \in \{1, \dots, k\} \quad \forall y \in U \quad |\varphi^{i-1}(y) - \varphi^{i-1}(\xi_1)| \leq K|y - \xi_1|. \quad (2.6)$$

Из (2.5), (2.6) следует неравенство

$$|y_t^i - \xi_i| \leq K|y_t - \xi_1|.$$

Теперь сходимость y_t к ξ_1 влечет для каждого i сходимость y_t^i к ξ_i , при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, последовательность x_j сходится к циклу $\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$. Асимптотическая устойчивость цикла доказана.

Упражнения

2.1. Для системы $x_{t+1} = x_t^3 + 0.1$

- а) доказать существование трех точек покоя $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$;
- б) найти непересекающиеся интервалы, содержащие эти точки покоя;
- в) доказать, что из этих трех точек только ξ_2 является устойчивой;
- г) найти максимальный инвариантный интервал, содержащий ξ_2 ;
- д) доказать, что, начиная с любой точки этого интервала, последовательность x_t стремится к ξ_2 .

2.2. Доказать теорему 2.2.

2.3. Для критического случая, когда в точке покоя ξ выполняется равенство $|\varphi'(\xi)| = 1$, привести примеры устойчивости и неустойчивости.

2.4. Указать условия, при которых последовательность x_t системы (2.1) стремится к устойчивой точке покоя ξ монотонно.

2.5. Для системы $x_{t+1} = \mu x_t + \gamma$ указать значения параметров, при которых система имеет 2-цикл. Будет ли этот цикл устойчивым (асимптотически устойчивым)?

§ 3. Модели динамики популяции

Сообщество животных одного вида, населяющих определенную территорию, называют популяцией. Изучать жизнь отдельной популяции можно с самых различных точек зрения — разнообразие природы бесконечно. Нас будет интересовать лишь численность популяции N_t в различные моменты времени $t = 1, 2, \dots$ и ее динамика.

3.1. Линейная модель. Для построения модели требуется учесть основные факторы, влияющие на изменение численности. Таковыми являются рождаемость и смертность. Предполагается, что за время, прошедшее между соседними моментами наблюдений t и $t + 1$, появилось на свет αN_t и умерло βN_t особей. Данное предположение кажется достаточно естественным: количество как родившихся, так и умерших особей должно быть пропорционально общему числу N_t особей популяции. Соответствующие пропорции задаются параметрами: α — коэффициент рождаемости и β — коэффициент смертности.

В результате учета этих факторов получаем линейную модель динамики популяции

$$N_{t+1} = N_t + \alpha N_t - \beta N_t = \mu N_t. \quad (3.1)$$

Эта модель в действительности зависит только от одного параметра $\mu = 1 + \alpha - \beta$ — коэффициента естественного прироста.

Используя уравнение (3.1), легко предсказывать значения численности популяции. Действительно, уравнение (3.1)

означает, что последовательность N_0, N_1, \dots есть геометрическая прогрессия со знаменателем μ , каждый элемент которой N_t может быть выражен через начальный N_0 соотношением $N_t = \mu^t N_0$.

Что же ожидает популяцию в будущем?

В рамках модели (3.1) в зависимости от величины μ для данной популяции возможны три варианта динамики:

1) при $0 < \mu < 1$ численность популяции монотонно убывает к нулю. В условиях превышения смертности над рождаемостью ($\alpha < \beta$) популяция вымирает;

2) при $\mu = 1$ численность популяции не изменяется: $N_t \equiv N_0$. Популяция, благодаря балансу между рождаемостью и смертностью ($\alpha = \beta$), находится в состоянии равновесия;

3) при $\mu > 1$ численность популяции монотонно возрастает к бесконечности. Превышение рождаемости над смертностью ($\alpha > \beta$) ведет к демографическому взрыву.

Наглядное сравнение динамики численности популяции для этих трех случаев дано на рис. 3.1.

Для первого и третьего случаев на рис. 3.2 и рис. 3.3 с помощью графиков функции $y = \varphi(x) = \mu x$ иллюстрируется геометрический метод получения по начальному значению N_0 последующих элементов N_1, N_2, \dots . Для этого следует из точки N_0 на оси ОХ сначала провести вертикаль до графика $\varphi(x)$, а затем — горизонталь до графика $y = x$. Абсцисса найденной точки и есть N_1 . Далее вертикаль проводим уже из точки N_1 и т. д. В результате проделанных построений последовательность N_t изображается в виде «лестницы Ламерея». Направленное перемещение по этой «лестнице» дает возможность наглядно судить о характере поведения последовательности N_t .

Как видим, величина N_0 численности популяции в начальный момент времени влияет лишь на количественную

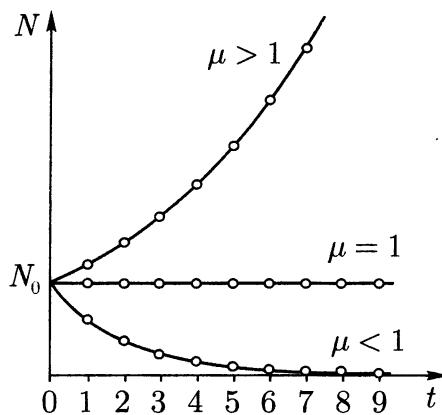
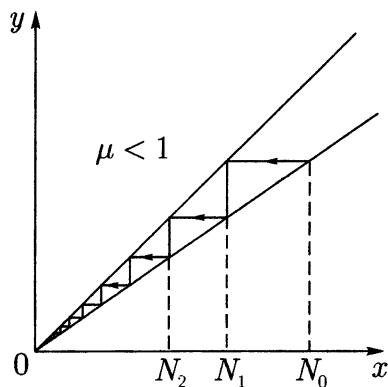
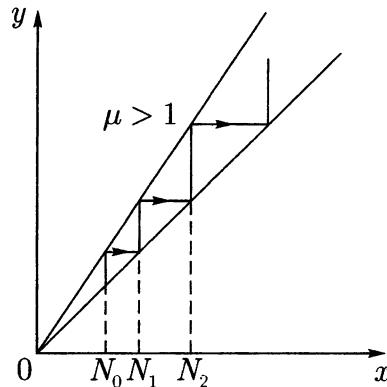


Рис. 3.1. Линейная модель. Три варианта динамики

Рис. 3.2. Динамика при $0 < \mu < 1$ Рис. 3.3. Динамика при $\mu > 1$

сторону дела. Качественная картина динамики определяется исключительно параметром μ . Значение параметра $\mu = \mu_*$ называют критическим, или бифуркационным (от лат. *bifurcus* — раздвоенный), если при переходе μ че-

рез μ_* характер динамики системы качественно изменяется. В данной модели критическим значением, отделяющим один вариант от другого, является $\mu_* = 1$.

3.2. Нелинейная модель. Неограниченный рост численности популяции, следуемый из модели (3.1) при $\mu > 1$ (см. вариант 3), в реальности не наблюдается. Ограничность жизненного пространства и, прежде всего, недостаток продуктов питания приведут к неизбежному замедлению роста численности. Территория, на которой обитает данная популяция, в состоянии прокормить лишь определенное количество особей. По мере заполнения экологической ниши внутри популяции нарастает напряженность: жизненных ресурсов на всех не хватает. На динамику численности все сильнее начинает воздействовать новый фактор — голод.

Для учета этого фактора П. Ф. Ферхольст еще в 1845 году предложил добавить в уравнение (3.1) нелинейный член. Новая модель, называемая в биологии логистическим уравнением, имеет вид

$$N_{t+1} = \mu N_t - \gamma N_t^2. \quad (3.2)$$

Здесь γ — коэффициент смертности, связанной с ограниченностью ресурса. Выбор квадратичной зависимости в (3.2) можно пояснить следующим образом.

Недостаток ресурсов порождает внутривидовую борьбу, интенсивность которой пропорциональна количеству возможных контактов между отдельными особями. В популяции из N особей количество возможных парных (другие учитывать не будем) контактов пропорционально N^2 . Не все контакты заканчиваются летальным исходом. Соответствующий процент и задается коэффициентом γ .

Займемся анализом этой нелинейной модели. Сначала упростим ее заменой $x_t = \frac{\gamma}{\mu} N_t$, перейдя от (3.2) к системе,

зависящей уже только от одного параметра:

$$x_{t+1} = \varphi(x_t), \quad \varphi(x) = \mu x(1 - x). \quad (3.3)$$

Как видим, именно μ — коэффициент естественного прироста — является тем параметром, который определяет качественную картину динамики данной модели. При этом параметр γ играет роль масштабирующего множителя.

Модель (3.3) сохраняет биологический смысл (численность популяции не может быть отрицательным числом) лишь при $\mu > 0$ и $x_t \in [0, 1]$. Причем условие $x_t \in [0, 1]$ гарантируется лишь при $\mu \leq 4$, поскольку максимум функции $\varphi(x)$ на этом отрезке равен $\mu/4$. В строгой математической формулировке это выглядит так: при любом $\mu \in [0, 4]$ функция $\varphi(x)$ задает отображение отрезка $[0, 1]$ в себя. Таким образом, при $0 \leq \mu \leq 4$, стартуя из любой точки x_0 , лежащей на отрезке $[0, 1]$, все последующие элементы $x_1, x_2, \dots, x_t, \dots$, формируемые системой (3.3), будут принадлежать этому же отрезку. Отрезок $[0, 1]$ есть инвариантное множество отображения $\varphi(x)$.

Упражнения

3.1. Найти точки покоя и исследовать их устойчивость для линейной модели динамики популяции с внешним воздействием u :

$$N_{t+1} = \mu N_t + u_t$$

- а) при $0 < \mu < 1$ и $u_t \equiv \gamma > 0$, γ — величина постоянного внешнего притока особей;
- б) при $\mu > 1$ и $u_t \equiv -\gamma < 0$, γ — величина постоянного оттока особей;
- в) при $\mu > 1$ и $u_t = -\gamma - k(N_t - \bar{N})$, $\gamma > 0$. Здесь внешнее воздействие строится по принципу обратной связи

по отклонению $N_t - \bar{N}$ состояния системы N_t от желаемого уровня численности \bar{N} , k — коэффициент обратной связи.

3.2. Для модели Риккера

$$N_{t+1} = \mu N_t \exp(-N_t)$$

найти точки покоя и исследовать их устойчивость в зависимости от параметра $\mu > 0$.

§ 4. Поведение нелинейной системы

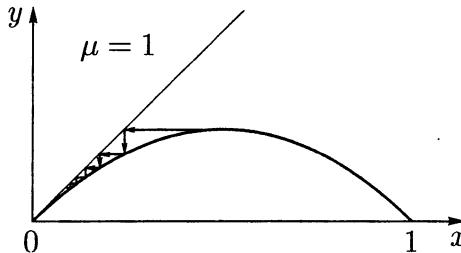
$$x_{t+1} = \mu x_t(1 - x_t)$$

Рассмотрим динамику системы (3.3) при различных значениях параметра μ , двигаясь по отрезку $[0, 4]$ от левого конца к правому.

Найдем сначала точки покоя. Корнями уравнения $x = \varphi(x)$ являются $\xi_1 = 0, \xi_2 = 1 - \frac{1}{\mu}$. Отметим, что в интересующий нас отрезок $[0, 1]$ точка ξ_2 попадает лишь при $\mu \geq 1$.

4.1. Случай $0 < \mu \leq 1$. В данном диапазоне изменения параметра μ система имеет единственную точку покоя $\xi_1 = 0$. Анализ устойчивости ξ_1 связан (см. теорему 1) с величиной $q = |\varphi'(\xi_1)| = \mu$. При $0 < \mu \leq 1$ точка покоя является асимптотически устойчивой. Для любого x_0 из $[0, 1]$ последовательность x_t , монотонно убывая, сходится к ξ_1 как геометрическая прогрессия со знаменателем, близким к μ . Для μ , близких к нулю, скорость сходимости высокая. При приближении μ к единице скорость сходимости падает. Случай $\mu = 1$ не охватывается теоремой 1 и является критическим. Однако и здесь последовательность x_t монотонно сходится к точке $\xi_1 = 0$ (см. рис. 4.1).

При $\mu > 1$ точка покоя $\xi_1 = 0$ становится (см. теорему 2) неустойчивой. Для исследования устойчивости точки покоя

Рис. 4.1. Динамика системы при $\mu = 1$

$\xi_2 = 1 - \frac{1}{\mu}$ рассмотрим производную $\varphi'(\xi_2) = 2 - \mu$. Неравенство $q = |2 - \mu| < 1$ имеет решение $1 < \mu < 3$, что приводит к следующему случаю.

4.2. Случай $1 < \mu \leq 3$. В этом случае у системы (3.3) имеется две точки покоя: ξ_1 — неустойчивая, ξ_2 — устойчивая. Для любого x_0 из $(0, 1)$ последовательность x_t сходится к ξ_2 . Скорость сходимости определяется величиной $q = |2 - \mu| < 1$.

В окрестности точки ξ_2 , при $1 < \mu \leq 2$ последовательность сходится монотонно (рис. 4.2), а при $2 < \mu \leq 3$ монотонность нарушается (рис. 4.3).

При переходе μ через значение $\mu_1 = 3$ точка покоя ξ_2 становится неустойчивой. Что же происходит в системе при $\mu > \mu_1$, когда обе точки покоя являются неустойчивыми?

4.3. Случай $\mu > 3$. Бифуркация рождения цикла. Рассмотрим отображение $x_t \rightarrow x_{t+2}$ за два шага, задаваемое функцией $\varphi^2(x) = \varphi(\varphi(x)) = \mu^2 x(1-x)(1-\mu x(1-x))$,

$$x_{t+2} = \varphi^2(x_t). \quad (4.1)$$

Анализ системы (4.1) начнем, как обычно, с отыскания точек покоя. Уравнение $x = \varphi^2(x)$ — алгебраическое

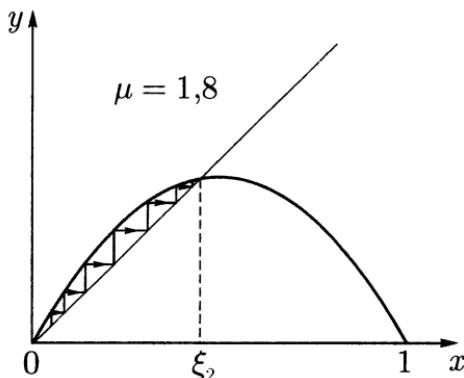


Рис. 4.2. Динамика системы при $1 < \mu \leq 2$

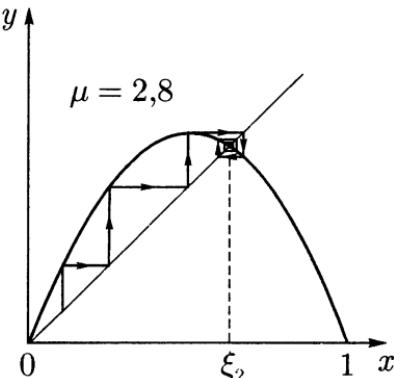


Рис. 4.3. Динамика системы при $2 < \mu \leq 3$

уравнение четвертой степени — имеет своими корнями ранее найденные ξ_1 и ξ_2 . Это и понятно: точки покоя ξ_1, ξ_2 системы (3.3) остаются точками покоя также и системы (4.1). Понижая степень на две единицы, получим квадратное уравнение

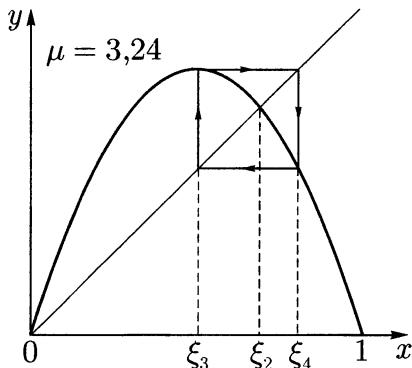
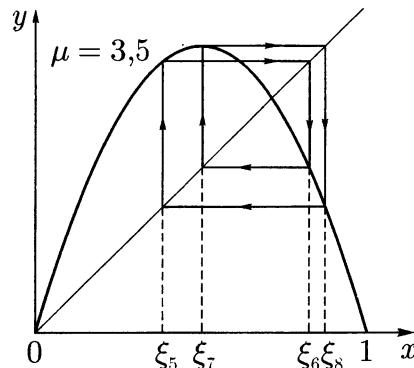
$$\mu x^2 - (\mu + 1)x + (1 + \frac{1}{\mu}) = 0$$

с корнями

$$\xi_{3,4} = \frac{\mu + 1 \pm \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}}{2\mu}.$$

В интересующем нас здесь случае $\mu > 3$ корни ξ_3, ξ_4 — вещественны и различны. Каков же смысл у этой пары с точки зрения исходной модели (3.3)? Пусть $x_0 = \xi_3$. Найдем далее $x_1 = \varphi(\xi_3)$. Из равенств $\varphi^2(x_1) = \varphi(\varphi(x_1)) = \varphi(\varphi(\varphi(\xi_3))) = \varphi(\xi_3) = x_1$ следует, что x_1 является точкой покоя системы (4.1). Поскольку x_1 не совпадает ни с одной из точек ξ_1, ξ_2, ξ_3 , то $x_1 = \xi_4$. Далее находим $x_2 = \varphi(x_1) = \varphi^2(\xi_3) = \xi_3, x_3 = \xi_4$. Формируемая здесь последователь-

ность получается периодической: $x_{2t} = \xi_3, x_{2t+1} = \xi_4$. Ее элементы составляют цикл $S^2 = \{\xi_3, \xi_4\}$ (рис. 4.4).

Рис. 4.4. Цикл S^2 Рис. 4.5. Цикл S^4

Таким образом, при переходе параметра μ через критическое значение $\mu_1 = 3$ в системе (3.3) происходит бифуркация: одновременно с потерей устойчивости точкой покоя ξ_2 рождается цикл S^2 периода 2. Эта бифуркация сопровождается рождением двух новых точек покоя ξ_3, ξ_4 системы (4.1). При этом устойчивость этих точек покоя в системе (4.1) эквивалентна устойчивости цикла S^2 в системе (3.3).

4.4. Каскады бифуркаций, удвоение периода и переход к хаосу. При дальнейшем увеличении μ точки покоя ξ_3 и ξ_4 сохраняют устойчивость лишь до некоторого следующего бифуркационного значения μ_2 . Переход μ через μ_2 ведет к одновременной потере устойчивости у точек ξ_3 и ξ_4 . При этом у отображения $\varphi^4(x) = \varphi^2(\varphi^2(x)) = \varphi(\varphi(\varphi(\varphi(x))))$ — многочлена 8-й степени — рождаются четыре новые устойчивые точки покоя $\xi_5, \xi_6, \xi_7, \xi_8$.

Данная бифуркация с точки зрения исходной системы означает рождение устойчивого цикла $S^4 = \{\xi_5, \xi_6, \xi_7, \xi_8\}$: $\xi_6 = \varphi(\xi_5), \xi_7 = \varphi(\xi_6), \xi_8 = \varphi(\xi_7), \xi_5 = \varphi(\xi_8)$. Численность популяции повторяется через четыре шага (см. рис. 4.5).

Дальнейшее увеличение μ обнаруживает аналогичные бифуркационные значения $\mu_3, \mu_4, \mu_5 \dots$, связанные с рождением циклов $S^8, S^{16}, S^{32} \dots$ При этом каждый раз, проходя очередное бифуркационное значение, соответствующий цикл S^{2k} теряет устойчивость, происходит бифуркация удвоения периода, и рождается устойчивый цикл S^{4k} .

Как видим, появление достаточно разнообразных циклов (ритмов) [8] в жизни популяции можно объяснить сугубо внутренними факторами, не изобretая в качестве первопричины каких-то периодических внешних воздействий.

Общая картина усложнения циклов, происходящих в результате бифуркаций удвоения периода, представлена на рис. 4.6. Здесь при каждом μ указано устойчивое инвариантное предельное множество (множество предельных точек) — аттрактор (*attract* — притягивать) системы (3.3).

По мере прохождения бифуркационных значений μ_0, μ_1, \dots картина усложняется. На интервале $[0, \mu_0]$ аттрактором является устойчивая точка покоя $\xi_1(\mu) \equiv 0$. На интервале $(\mu_0, \mu_1]$, где ξ_1 теряет устойчивость и далее не изображается, расположен график $\xi_2(\mu)$. На следующем интервале $(\mu_1, \mu_2]$, где ξ_2 теряет устойчивость, появляются графики $\xi_3(\mu)$ и $\xi_4(\mu)$ — точки аттрактора S^2 . Далее, на $(\mu_3, \mu_4]$ представлены графики $\xi_i(\mu)$ для $i = 5, 6, 7, 8$ — точки аттрактора S^4 и т. д.

Отметим своеобразие нелинейных систем. В линейном случае появление неустойчивой точки всегда сопровождается уходом решений в бесконечность (система разрушается).

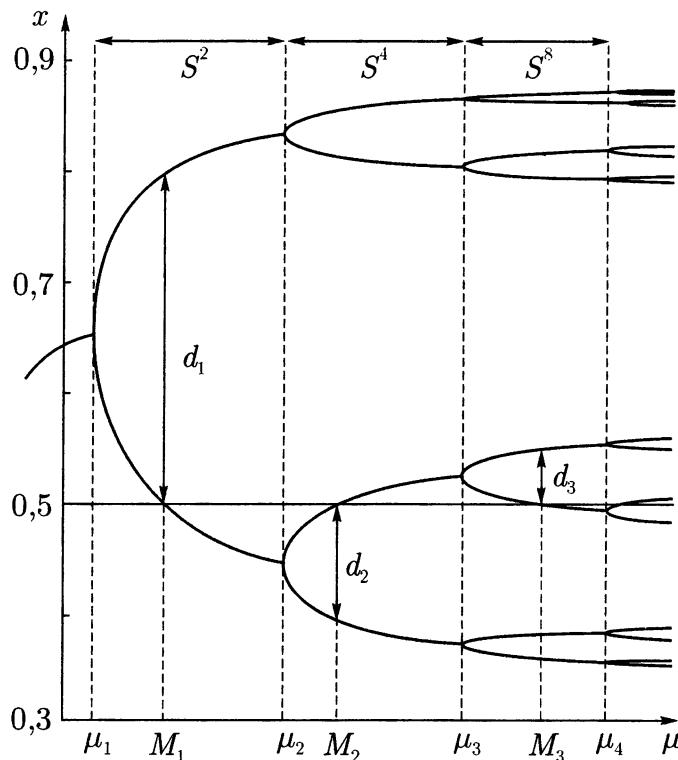


Рис. 4.6. Бифуркационная диаграмма

В нелинейном — потеря устойчивости ведет к появлению новых качественных особенностей в ее поведении, рождению новых аттракторов.

Последовательность μ_n при $n \rightarrow \infty$ имеет предел (обозначим его μ_∞). Система (3.3) при $\mu = \mu_\infty = 3.5699456\dots$ формирует сложную непериодическую последовательность — хаос. Соответствующие предельные множества получили название **странных аттракторов**. Некоторое пред-

ставление о характере поведения системы (3.3) в зоне $(\mu_\infty, 4)$ можно получить из рис. 4.7. Его левая часть повторяет бифуркационную схему рис. 4.6 и отражает зону параметров, для которых система ведет себя периодически $((0, \mu_\infty))$ — зона «порядка». Здесь аттракторы состоят из конечного на-

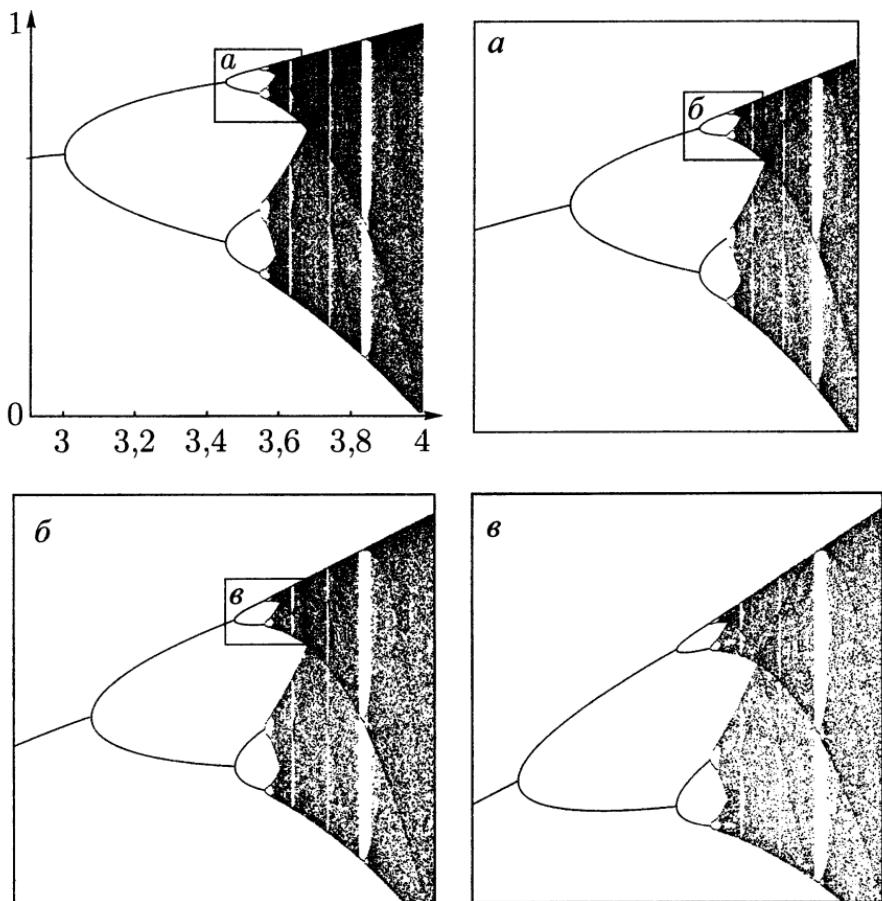


Рис. 4.7. Самоподобие

бора точек. При переходе параметра μ через μ_∞ «порядок» сменяется «хаосом». Аттракторы начинают выглядеть как множества, состоящие из сплошных (зачерненных) интервалов. В этой зоне выделяются и просветы — окна, в которых снова виден «порядок». В этих окнах расположены аттракторы, отвечающие периодическим циклам вида $S^{P \cdot 2^k}$, $P = 3, 5, 7, \dots$. Наиболее отчетливо в самом широком окне виден цикл S^3 .

В зоне $(\mu_\infty, 4]$ содержится бесконечное количество бифуркаций «хаос» \rightarrow «порядок» и «порядок» \rightarrow «хаос». Следует подчеркнуть, что в режиме «хаоса» при больших n практически невозможно предсказать значение x_n . Как же так, может спросить читатель, ведь состояние x_t однозначно определяется из (3.3) по t и x_0 ? Дело в том, что неизбежные, пусть даже очень малые, ошибки в определении начального значения x_0 приведут к тому, что вместо последовательности $x_0, x_1, x_2, \dots, x_t, \dots$ вы будете получать другую последовательность — $x_0^*, x_1^*, x_2^*, \dots, x_t^*, \dots$

В режиме «хаоса», стартуя с практически неотличимых значений x_0 и x_0^* , уже через несколько итераций элементы x_t^* потеряют всякую связь с истинными значениями x_t .

В «хаотическом» режиме элементы последовательности x_n начинают вести себя как случайные величины. Для описания таких последовательностей используют приемы, принятые в теории вероятности и математической статистике. В бифуркационной картине на рис. 4.7 *a, b, в* выделена последовательность кадров *a, b, в*, вложенных один в другой. При этом каждый последующий кадр представляет собой увеличенный фрагмент предыдущего. Как видим, все эти кадры удивительным образом воспроизводят практически одну и ту же картину. Здесь повторяются не только бифуркации удвоения периода, но и цепочки «хаос» \rightarrow «порядок», «порядок» \rightarrow «хаос». Отмеченная регуляр-

ность и повторяемость этих структур (самоподобие) позволяет надеяться на получение простого описания форм хаотического поведения, обнаруженных при исследовании различных нелинейных моделей.

Подводя итог приведенного анализа разнообразных явлений, порожденных нелинейной моделью динамики популяции, можно сказать следующее. Одна группа явлений связана с существованием регулярных и весьма упорядоченных процессов типа предельных точек покоя или циклов. В таких системах царит порядок, позволяющий по данным о прошлом и настоящем предсказывать будущее. Другую группу составляют хаотические процессы, возможности предсказания которых являются весьма ограниченными. Как правило, в анализе таких систем используется статистический подход (см., например, [14]), позволяющий получить лишь некоторые усредненные характеристики.

При этом между хаосом и порядком существует глубокая внутренняя связь. Хаотическое поведение возникает как предел усложняющейся последовательности периодических движений. Рассмотренная нами простейшая одномерная модель с квадратичной нелинейностью наглядно это демонстрирует.

Дополнительный материал по обсуждаемым здесь вопросам, включая другие сценарии перехода к хаосу, можно найти, например, в работах [6], [12], [13], [15], [21], [23].

Упражнения

4.1. Из условия $|(\varphi^2(\xi_{3,4}))'| = 1$ найти бифуркационное значение μ_2 , при котором теряет устойчивость 2-цикл.

4.2. Из условия $|(\varphi^2(\xi_{3,4}))'| = 0$ найти значение μ , соответствующее наиболее устойчивому 2-циклу.

4.3. Для системы

$$x_{t+1} = \mu g(x_t), \quad g(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

- а) указать интервал значений μ , при которых элементы последовательности x_t не выходят из отрезка $[0, 1]$;
 б) найти точки покоя и исследовать их устойчивость в зависимости от μ ;
 в) построить бифуркационную диаграмму.

4.4. Для системы $\varphi(x) = \mu x(1 - x^2)$ найти точки покоя и исследовать их устойчивость.

§ 5. Хаотическое поведение системы

5.1. Поведение критических значений параметра. В предыдущем параграфе был подробно описан сценарий поведения динамической системы, порождаемый итерационным процессом

$$x_{t+1} = \mu x_t(1 - x_t). \quad (5.1)$$

Этот сценарий таков: при определенных значениях параметра $\mu, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ происходит бифуркация системы, сопровождаемая удвоением числа предельных точек-аттракторов итерационного процесса (5.1), а именно: при $\mu = \mu_n$ точки цикла порядка 2^{n-1} становятся неустойчивыми и рождается цикл порядка 2^n . Приведем приближенные численные значения для нескольких критических значений пара-

метра μ :

$$\begin{aligned}\mu_1 < \mu < 3.449499\dots = \mu_2 &\quad \text{— цикл порядка } 2; \\ \mu_2 < \mu < 3.544090\dots = \mu_3 &\quad \text{— цикл порядка } 2^2; \\ \mu_3 < \mu < 3.564407\dots = \mu_4 &\quad \text{— цикл порядка } 2^3; \\ \mu_4 < \mu < 3.568759\dots = \mu_5 &\quad \text{— цикл порядка } 2^4; \\ \mu_5 < \mu < 3.569692\dots = \mu_6 &\quad \text{— цикл порядка } 2^5; \\ \mu_6 < \mu < 3.569891\dots = \mu_7 &\quad \text{— цикл порядка } 2^6; \\ \mu_7 < \mu < 3.569934\dots = \mu_8 &\quad \text{— цикл порядка } 2^7.\end{aligned}$$

...

...

Американский физик М. Фейгенбаум, экспериментируя на калькуляторе с процессом (5.1), обнаружил, что последовательность μ_n критических значений параметра сходится к некоторому предельному значению μ_∞ с геометрической скоростью, которая характеризуется величиной

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_{n+1} - \mu_n} = \delta, \quad (5.2)$$

и вычислил приближенно ее значение, которое составило $\delta = 4.6692016\dots$ [19].

Величина $\delta = 4.6692016\dots$ получила название перво^й универсальной константы Фейгенбаума.

Можно приближенно вычислить предельное значение μ_∞ последовательности критических значений параметра μ , используя формулу (5.2) и найденные значения μ_n ($n = 1, 2, \dots$). Для этого перепишем (5.2) в виде приближенного соотношения

$$\mu_n - \mu_{n-1} \approx \delta(\mu_{n+1} - \mu_n)$$

и положим в левой части $\mu_n \approx \mu_\infty$, а в правой $\mu_{n+1} \approx \mu_\infty$. Подставляя найденные значения $\mu_n = \mu_8$, $\mu_{n-1} = \mu_7$, имеем

$$\begin{aligned} m\mu_\infty &\approx \frac{\delta\mu_8 - \mu_7}{\delta - 1} \approx \frac{4.669202 \cdot 3.569934 - 3.569891}{3.669202} \approx \\ &\approx 3.569946. \end{aligned}$$

Дальнейшие эксперименты показали, что при $\mu > \mu_\infty$ поведение итераций (5.1) становится абсолютно неупорядоченным, или, как принято говорить, хаотическим.

Чтобы пояснить хаотический характер итераций при $\mu > \mu_\infty$, примем в процессе (5.1) $\mu = 4$ и возьмем в качестве начальной точки $x_0 = \sin^2 \pi\beta$, где β — иррациональное число.

Тогда, подставляя x_0 в формулу (5.1), последовательно находим

$$x_1 = 4 \sin^2 \pi\beta (1 - \sin^2 \pi\beta) = \sin^2 2\pi\beta,$$

$$x_2 = \sin^2 2^2 \pi\beta, \dots, x_n = \sin^2 2^n \pi\beta.$$

Полученные соотношения показывают, что x_n ведет себя как псевдослучайная величина, которая хаотично заполняет отрезок $[0,1]$. Эту ситуацию хорошо иллюстрирует рис. 5.1, на котором представлены итерации (5.1) при $\mu = 3.9$ после достаточно большого числа шагов ($N = 1000$). Видно, что x_n достаточно плотно заполнили отрезок $[x_{\min}, x_{\max}]$, где

$$x_{\max} = \varphi_\mu(x) \Big|_{x=3.9} = \frac{\mu}{4} \Big|_{\mu=3.9} = 0.975,$$

$$x_{\min} = \varphi_\mu(x) \Big|_{x=x_{\max}} = \frac{\mu^2}{4} \left(1 - \frac{\mu}{4}\right) \Big|_{\mu=3.9} = 0.095.$$

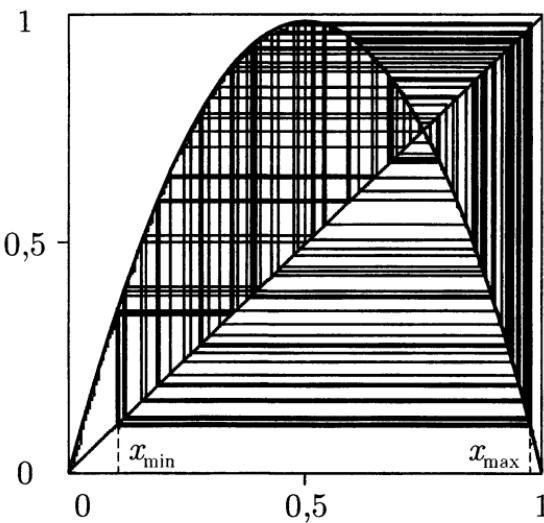


Рис. 5.1

5.2. Показатель Ляпунова. Введем некоторую характеристику — функцию параметра μ , по знаку которой можно судить, в какой области значений параметра находится система: область регулярного поведения, точки бифуркации или область хаоса?

Строгому определению предпошлем некоторые наводящие соображения. На отрезке $[0,1]$ возьмем две близкие точки x_0 , $x_0 + \varepsilon$, где ε — малый параметр. После n итераций процессом (5.1) точки займут положение $\varphi_\mu^n(x_0)$, $\varphi_\mu^n(x_0 + \varepsilon)$ соответственно. Введем величину λ , для которой приближенно выполнено соотношение

$$\exp[n\lambda] \approx \frac{|\varphi_\mu^n(x_0 + \varepsilon) - \varphi_\mu^n(x_0)|}{\varepsilon}.$$

Поскольку правая часть соотношения при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится к производной $|(\varphi_\mu^n(x_0))'|$, то можно определить функцию $\lambda^{\varphi, x_0}(\mu)$, не зависящую от n :

$$\lambda^{\varphi, x_0}(\mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |(\varphi_\mu^n(x_0))'|.$$

Введенная характеристика называется показателем Ляпунова. Этот показатель будет интересовать нас прежде всего как функция параметра μ . Однако ясно, что он зависит также от начальной точки x_0 и функции φ , хотя можно предположить, что в результате осреднения по n зависимость от x_0 будет слабой.

Теперь, с учетом формулы (2.3), показатель Ляпунова принимает вид

$$\lambda^{\varphi, x_0}(\mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |\varphi'_\mu(x_i)|. \quad (5.3)$$

Утверждение 5.1. *Если $\lambda(\mu) < 0$, то процесс (5.1) осуществляет периодический режим с циклом некоторого порядка. Если $\lambda(\mu) = 0$, то это соответствует режиму бифуркации, т. е. удвоению периода. Если $\lambda(\mu) > 0$, то поведение процесса хаотическое.*

Рис. 5.2. иллюстрирует факт, составляющий содержание утверждения 5.1.

Как будет показано в следующем параграфе, явления бифуркации, удвоения периода и перехода к хаотическому поведению системы не являются уникальным свойством процесса (5.1), а имеют место для целого класса функций $\varphi_\mu(x)$. В частности, аналогичным свойством обладает итерационный процесс с треугольным отображением $\varphi_\mu(x) = \mu(1 - |1 - 2x|)$.

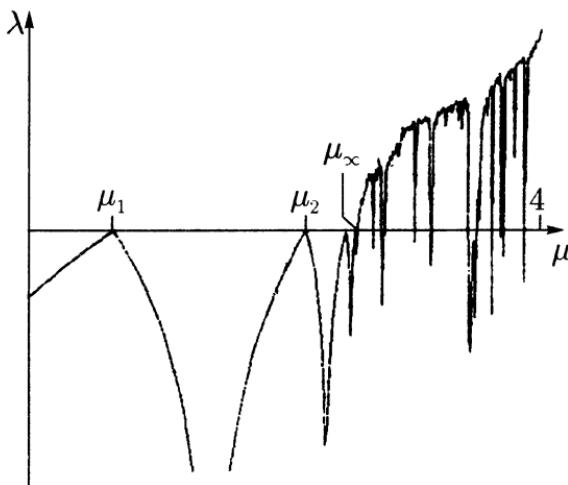


Рис. 5.2

Упражнения

5.1. Вычислить показатель Ляпунова для треугольного отображения

$$\varphi_\mu(x) = \mu(1 - |1 - 2x|).$$

5.2. Вычислить приближенно константу δ для треугольного отображения. Сравнить полученную величину с первой универсальной константой Фейгенбаума $\delta = 4.669201$.

§ 6. УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ В ПОВЕДЕНИИ СИСТЕМ

6.1. Определение константы α . М. Фейгенбаум [19] открыл еще одну константу. Она определяется следующим образом. При переходе от цикла порядка 2^n ($n = 1, 2, \dots$) к циклу порядка 2^{n+1} в процессе (5.1) при некотором значе-

нии параметра $\mu = M_n$ точка $x^* = 1/2$ становится аттрактором (см. рис. 7.1, 7.2). Обозначим через d_n алгебраическое расстояние (т. е. с учетом знака) от аттрактора $x^* = 1/2$ до ближайшего к нему аттрактора (см. рис. 4.6). Оказывается, что существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} = -\alpha, \quad \alpha > 0, \quad (6.1)$$

который определяет в т о р у ю у н и в е р с а л ь н у ю к о н - с т а н т у. Ее численное значение с точностью до семи знаков после запятой есть $\alpha = 2.5029078$. Позднее было установлено (см., например, [25]), что эту константу также можно определить соотношением

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d'_n}{d'_{n+1}} = -\alpha, \quad (6.1a)$$

где d'_n — расстояние между ближайшими к $1/2$ аттракторами при значении параметра $\mu = \mu_{n+1}$, когда цикл порядка 2^n разрушается и рождается цикл порядка 2^{n+1} .

6.2. Универсальность констант. Почему же константы δ, α назвали универсальными?

Изложим свою версию происхождения этого термина. В своей работе [19] М. Фейгенбаум пишет, что после его численных экспериментов с процессом (5.1) и обнаружением закономерностей, характеризующихся константами (5.2), (6.1), коллега по Лос-Аламосской лаборатории П. Стайн обратил его внимание, что итерационный процесс

$$x_{t+1} = \mu \sin \pi x_t \quad (t = 0, 1, 2, \dots)$$

с функцией шага $\varphi_\mu(x) = \mu \sin \pi x$ также обладает свойством удвоения периода (числа предельных точек) при изменении

параметра μ и, что самое удивительное, с теми же константами δ, α !

Дальнейшие исследования показали, что явление бифуркации (резкого изменения поведения системы) обнаруживается для двумерного процесса Хеннона:

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= 1 - ax_t^2 + y_t \\y_{t+1} &= bx_t,\end{aligned}\tag{6.2}$$

причем последовательность a_n критических значений параметра a (для некоторых фиксированных значений b), при которых происходит качественный скачок в процессе (6.2), подчиняется соотношению (5.2).

Конечно, в данном случае можно говорить о некотором сходстве систем (5.1) и (6.2), например, о наличии квадратичной нелинейности.

Однако та же закономерность при изменении одного из параметров была обнаружена в знаменитой системе Лоренца

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma x + \sigma y, \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz.\end{aligned}$$

А именно: при $\sigma = 10, b = 8/3$ отношение

$$\sigma_n = \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n}$$

критических значений параметра r_n очень хорошо аппроксимирует константу δ , например $\delta_5 \approx 4.670$ (см. [7]).

Рис. 17.6 иллюстрирует сложное поведение решения системы Лоренца.

На этом рисунке изображена траектория, порождаемая системой Лоренца при $r = 28, \sigma = 10, b = 8/3$. Оказывается, что а) она притягивается к ограниченной области в фазовом пространстве (аттрактору Лоренца); б) движение ее

блуждающее, т. е. траектория делает один виток направо, затем несколько витков налево, затем снова направо и т. д.; в) траектория очень чувствительна к малым изменениям начальных условий.

Факт геометрической скорости сходимости (с константой δ) критических значений параметра был подтвержден и во многих других системах. Это обстоятельство, по-видимому, породило у некоторых исследователей уверенность в том, что переход ДС к хаосу происходит по одному и тому же сценарию и может быть описан одной и той же константой δ . Что касается константы α , которая отвечает за структуру аттракторов в одномерном итерационном процессе, то были найдены другие функции $\varphi_\mu(x)$, отличные от $\varphi_\mu(x) = \mu x(1 - x)$, $\varphi_\mu(x) = \mu \sin \pi x$, которые генерируют итерационные последовательности (орбиты) со свойством удвоения числа предельных точек, расположение которых на отрезке подчинено соотношению (6.1).

По-видимому, М. Фейгенбаумом впервые была высказана гипотеза, которая до сих пор строго не доказана, но и не опровергнута, что установленные закономерности, характеризуемые константами $\delta = 4.6692016\dots$, $\alpha = 2.5029078\dots$, справедливы по крайней мере для всех унимодальных функций с квадратичной нелинейностью в точке максимума, т. е. функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих условию

$$\varphi(x) - \varphi(\bar{x}) = O(x - \bar{x})^2$$

в окрестности единственной точки максимума \bar{x} на отрезке.

Таким образом, можно сказать, что сценарий удвоения числа предельных точек процесса (5.1) и переход к хаосу не зависят от конкретной функции $\varphi(x)$ в пределах класса с квадратичной нелинейностью и, следовательно, носят универсальный характер.

Таким образом, в математике, наряду с числами $e = 2.718281\dots$, $\pi = 3.141592\dots$, найдены еще две замечательные иррациональные константы α и δ , которые характеризуют сценарий бифуркации в одномерном итерационном процессе с функцией перехода $\varphi_\mu(x)$, обладающей квадратичной нелинейностью.

Вскоре выяснилось, однако, что численные значения констант α, δ , определяемых соотношениями (5.2), (6.1), зависят от характера нелинейности переходной функции $\varphi_\mu(x)$.

Проще всего это можно пояснить, если от системы (5.1) перейти к процессу

$$v_{t+1} = 1 - a|v_t|^2, \quad (6.3)$$

где функция перехода $\psi_a(x) = 1 - ax^2$ задана на отрезке $[-1, 1]$. Заменой $v_t = \frac{4}{\mu-2}(x_t - \frac{1}{2})$, $a = \frac{\mu(\mu-2)}{4}$ один процесс сводится к другому, но процесс (6.3) более удобен, так как в нем ясно виден квадратичный характер нелинейности и его легко можно варьировать, меняя степень.

Оказалось, что если теперь рассмотреть одномерный итерационный процесс

$$v_{t+1} = 1 - a|v_t|^p \equiv \psi_a(v_t) \quad (6.4)$$

при $p > 2$ (например, $p = 3$), то он, как и (6.3), испытывает бифуркации (удвоение периода), существуют пределы (5.2), (6.1), но численные значения констант δ, α уже другие. Итак, константы δ, α зависят от степени p , и следует писать δ_p, α_p , отмечая зависимость констант от показателя степени p .

6.3. Класс функций, порождающий бифуркацию удвоения. Естественно возникает вопрос, можно ли опи-

сать совокупность всех функций $\varphi_\mu(x)$, для которых итерационный процесс претерпевает бифуркации, причем сценарий удвоения периода, структура аттракторов и переход к хаотическому поведению системы характеризуется некоторыми константами δ, α , которые определяются соотношением (5.2), (6.1). Попытаемся это сделать из существующего на настоящем времени теоретического анализа и вычислительного опыта.

Обозначим этот класс через K и будем считать для определенности, что речь идет о функциях на отрезке $[0, 1]$.

Не лишено достоверности (это лишь гипотеза!) следующее утверждение (для простоты в записи функции мы опускаем параметр μ).

Утверждение 6.1. Для того чтобы функция $\varphi(x)$, где $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, трижды дифференцируемая почти всюду, принадлежала классу K , достаточно выполнение следующих условий:

- 1) существует единственная точка максимума $x^* \in (0, 1)$ этой функции;
- 2) $\varphi'(x) > 0 \quad \forall x > 0 \in [0, x^*], \quad \varphi'(x) < 0 \quad \forall x \in (x^*, 1];$
- 3) при этом для любой Шварца

$$S[\varphi](x) = \frac{\varphi'''(x)}{\varphi''(x)} - \frac{3}{2} \left[\frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)} \right]^2 < 0$$

почти для всех $x \in [0, 1]$.

Строгое доказательство этого факта (как, впрочем, и пример, опровергающий его) отсутствует, но некоторую аргументацию в пользу этого утверждения, в частности важности условия 3, можно найти в работе Г. Шустера ([23], см. приложение 3).

Однако справедлива следующая теорема, в которой для $\varphi \in C^3[0, 1]$ с условиями 1 – 3 утверждается несколько более слабое свойство, чем принадлежность классу K .

Теорема 6.1. *Пусть $\varphi \in C^3[0, 1]$ и выполнены условия 1–3 из утверждения 6.1. Тогда существует не более одного устойчивого цикла. В случае его существования элементы цикла являются предельными точками последовательности*

$$v^n = \varphi^n(x^*),$$

где x^* – точка из условия 2 ($\varphi'(x^*) = 0$).

Доказательство теоремы приведено в работе Д. Зингера. Там же построен пример, показывающий, что без условия 3 утверждение, вообще говоря, не имеет места (см. [31]).

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Условие 3 в утверждении 1 нельзя, вообще говоря, заменить более слабым – $S[\varphi](x) \leq 0$. Например, для линейной функции $S[\varphi](x) \equiv 0$, но эта функция, очевидно, не принадлежит классу K . С другой стороны, для кусочно-линейной функции $\varphi(x) = \mu(1 - |1 - 2x|)$ также $S[\varphi](x) \equiv 0$ (за исключением точки $x = 1/2$, где она является недифференцируемой), тем не менее эта функция из класса K , в чем непосредственно можно убедиться, исследуя итерационный процесс с такой переходной функцией. Следовательно, условие 3 не является необходимым для $\varphi \in K$.

Упражнения

6.1. Доказать следующие свойства производной Шварца:

- 1) если f – линейная функция, а $\varphi \in C^3$, то $S[f(\varphi)](x) = S[\varphi](x)$ для всех x ;
- 2) если φ – дробно-линейная функция, то $S[\varphi](x) = 0$;

3) если $S[\varphi](x) < 0$ ($S[\varphi](x) > 0$) и $S[f](x) \leq 0$ ($S[f](x) \geq 0$), то $S[f(g)](x) < 0$ ($S[f(g)](x) > 0$);

4) если для функции $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ $S[\varphi](x) < 0$, то для любого целого n выполняется неравенство $[\varphi^n](x) < 0$.
Здесь $\varphi^n(x) = \underbrace{\varphi(\varphi(\dots\varphi(x)))}_{n \text{ раз}}$.

6.2

А. Проверить аналитически, что следующие функции удовлетворяют условиям утверждения 6.1:

$$1) \varphi_\mu(x) = \mu x(1-x), \quad x \in [0, 1], \quad 0 \leq \mu \leq 4;$$

$$2) \varphi_\mu(x) = \exp^{-\mu x^2}, \quad x \in [-1, 1], \quad 0 \leq \mu \leq 1;$$

$$3) \varphi_\mu(x) = \mu \sin x, \quad x \in [0, \pi], \quad 0 \leq \mu \leq 1;$$

$$4) \varphi_\mu(x) = 1 - \mu|x|^p, \quad x \in [-1, 1], \quad 0 \leq \mu \leq 1, \quad 1 < p < \infty.$$

Б. Численно найти показатель Ляпунова на некоторой сетке по μ для функций из пункта А. Построить бифуркационную диаграмму.

В. Построить другие функции из класса K и протестировать их аналогично пунктам А, Б.

Г. Построить функцию $\varphi(x)$, удовлетворяющую условиям 1, 2 утверждения 6.1 и не принадлежащую классу K .

Д. Построить функцию $\varphi(x)$ из класса K , удовлетворяющую условиям 1 — 2 и не удовлетворяющую условию 3 утверждения 6.1.

§ 7. Уравнение удвоения

Преобразуем формулу (6.1) для второй универсальной константы, выразив ее непосредственно через итерируемую функцию $\varphi_\mu(x)$. Эта константа была определена как расстояние между $x_0^* = \frac{1}{2}$ и ближайшей к ней точкой x_1^* , когда обе

являются элементами аттрактора. Данная ситуация характеризуется понятием суперцикла.

Определение 7.1. Суперциклом называется цикл, в котором

$$\frac{d}{dx} \varphi_{M_n}^{2^n}(x) |_{x=x_0^*} = 0,$$

где x_0^* — некоторая предельная точка-аттрактор (элемент цикла), M_n — значение параметра, при котором производная 2^n -й итерации функции φ_μ обращается в нуль.

На основании формулы (2.3) имеем

$$\frac{d}{dx} \varphi_{M_n}^{2^n}(x) |_{x=x_0^*} = \prod_{i=0}^{2^n-1} \varphi'_{M_n}(x_i^*) = 0.$$

Так как $x = 1/2$ — единственная точка, в которой $\varphi'_\mu(x) = 0$, то $x = 1/2$ является элементом цикла. Этую ситуацию иллюстрирует рис. 7.1 (а, б).

Заметим, что аналогично определяется суперцикл для функции $\psi_a(x) = 1 - ax^2$, где роль точки $x = 1/2$ играет $x = 0$.

Принимая во внимание факты, изложенные в § 4, можно написать следующие соотношения:

$$d_1 = \varphi_{M_1}^{2^0}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}, d_2 = \varphi_{M_2}^{2^1}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}, \dots, d_n = \varphi_{M_n}^{2^{n-1}}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2},$$

а с учетом формулы (6.1) — цепочку приближенных равенств

$$d_{n+1} \approx \frac{d_n}{(-\alpha)} \approx \frac{d_{n-1}}{(-\alpha)^2} \approx \frac{d_1}{(-\alpha)^n},$$

что позволяет заключить о существовании предела

$$d_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} d_{n+1}(-\alpha)^n = [\varphi_{M_{n+1}}^{2^n}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}](-\alpha)^n. \quad (7.1)$$

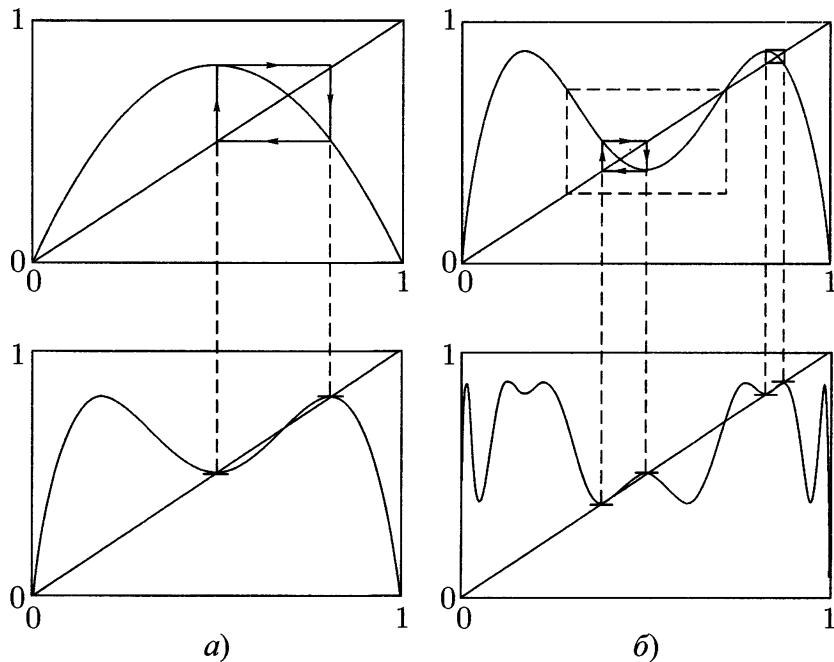


Рис. 7.1

Сделаем замену переменных $x = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$. Тогда точка $\frac{1}{2}$ перейдет в точку 0, а функция $\varphi_\mu(x)$ в $f_\mu(t) = \frac{\mu}{4}(1 - t^2)$. Сохранив для новой переменной старое обозначение, перепишем формулу (7.1):

$$d_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n [f_{M_{n+1}}^{2^n}(0) - 0].$$

Численный анализ показывает, что для любого x существует также предел

$$g_1(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n f_{M_{n+1}}^{2^n} \left(\frac{x}{(-\alpha)^n} \right).$$

Введем семейство функций

$$g_i = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n f_{M_{n+i}}^{2^n} \left(\frac{x}{(-\alpha)^n} \right).$$

Определим оператор удвоения

$$T(g) = -\alpha g(g(-\frac{x}{\alpha}))$$

и покажем, что справедливо соотношение

$$g_{i-1}(x) = Tg_i(x).$$

Действительно, преобразуя выражение для g_{i-1} , получаем представление

$$\begin{aligned} g_{i-1}(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n f_{M_{n+i-1}}^{2^n} \left(\frac{x}{(-\alpha)^n} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)(-\alpha)^{n-1} f_{M_{n+i-1}}^{2^{n-1}} \times \\ &\quad \times \left[\frac{-(\alpha)^{n-1}}{(-\alpha)^{n-1}} f_{M_{n+i-1}}^{2^{n-1}} \left(\frac{x}{(-\alpha)(-\alpha)^{n-1}} \right) \right] = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} (-\alpha)(-\alpha)^m f_{M_{m+i}}^{2^m} \left[\frac{-(\alpha)^m}{(-\alpha)^m} f_{M_{m+i}}^{2^m} \left(\frac{x}{(-\alpha)(-\alpha)^m} \right) \right], \end{aligned}$$

из которого, в предположении справедливости предельного перехода, получаем

$$g_{i-1}(x) = (-\alpha)g_i(g_i(\frac{x}{-\alpha})) \equiv T(g_i).$$

В условиях существования предела при $i \rightarrow \infty$ приходим к уравнению удвоения

$$g(x) = -\alpha g(g(-\frac{x}{\alpha})) \equiv T(g), \quad (7.2)$$

которое называют уравнением Цвитановича – Фейгенбаума (см. [25]). Вывод уравнения (7.2), приведенный выше, принадлежит, по-видимому, Фейгенбауму (см. [19]).

Нетрудно проверить, что если $g(x)$ — решение уравнения (7.2), то $f(x) = \gamma g(x/\gamma)$, где γ — числовой параметр, также является решением. Чтобы избавиться от неоднозначности, нормируем решение, потребовав выполнения условия $g(0) = 1$. Подставляя условие нормировки в уравнение (7.2), приходим к соотношению

$$\alpha = -1/g(1), \quad (7.3)$$

которое позволяет переписать уравнение в виде

$$g(1)g(x) = g(g(g(1)x)), \quad (7.4)$$

т. е. избавиться от 2-й универсальной константы.

Уравнение (7.4) можно решать приближенными методами (см. § 8). Найдя решение, можно вычислить универсальную константу α по формуле (7.3).

Как обстоит дело с существованием решения? Этому вопросу посвящены многие статьи. Мы ограничимся формулировкой одного утверждения из работы О. Ландфорда, доказательство которого было получено с привлечением компьютерных вычислений (см. [28]).

Теорема 7.1. *Существует функция g , аналитическая и четная в круге $\{z \in C : |z| < \sqrt{8}\}$, сужение которой на $[-1, +1]$ есть решение уравнения (7.4), причем производная Шварца функции g отрицательна на отрезке $[-1, +1]$.*

При дальнейшем рассмотрении было установлено [24], что решение уравнения (7.4) не единственное, каждое реше-

ние представимо в виде степенного ряда

$$g(x) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i |x|^{ip} \quad (7.5)$$

при некотором $1 < p < \infty$, а найденная по этой функции универсальная константа $\alpha_p = -(1/g(1))$ отвечает за скейлинг аттракторов в динамической системе, описываемой процессом (6.4) со степенной нелинейностью p .

§ 8. Численное нахождение универсальной константы α_p

Ограничимся константой α_2 , которая соответствует квадратичной функции $\psi_a(x) = 1 - ax^2$, $x \in [-1, +1]$. На основании представления (7.5) из предыдущего параграфа решение уравнения удвоения (7.2) следует искать в виде степенного ряда по четным степеням. При грубой аппроксимации можно ограничиться двумя членами, что, с учетом нормировки $g(0) = 1$, дает представление $g(x) = 1 + bx^2$ с неизвестным коэффициентом b . Для нахождения b подставим выражение для $g(x)$ в уравнение (7.2) и приравняем коэффициенты при степенях x , отбрасывая члены четвертого порядка в правой части. Тогда имеем

$$1 + bx^2 = -\alpha(1 + b(1 + b(\frac{x}{\alpha})^2)^2),$$

откуда $1 = -\alpha(1 + b)$, $\alpha = -2b$. Исключая α , приходим к уравнению $2b^2 + 2b - 1 = 0$, поэтому $b_{1,2} = (-2 \pm \sqrt{12})/4$. Из некоторых соображений следует, что нужно взять отрицательный корень, что дает $b \approx -1.36$, следовательно, $\alpha_2 \approx 2.72$.

Для получения более точного приближения, естественно, нужно взять отрезок степенного ряда с большим числом членов и решать систему нелинейных уравнений, полученную с помощью схемы коллокации. Опишем подробнее эту технологию в случае динамической системы (6.4) с нелинейностью степени p . На основании представления (7.5) ищем решение в виде отрезка ряда

$$g(x) = 1 + \sum_{i=1}^n \xi_i |x|^{pi}. \quad (8.1)$$

Зададим некоторую сетку $\{x_i\}, i = 1, 2, \dots, n$ на отрезке $[-1, +1]$. Подставим выражение (8.1) для $g(x)$ в уравнение (7.4) и потребуем выполнения равенства для каждой точки $x = x_i$ сетки. Окончательно приходим к системе нелинейных уравнений

$$\begin{aligned} & (1 + \sum_{i=1}^n \xi_i)(1 + \sum_{i=1}^n \xi_i |x_j|^{ip}) - \\ & - 1 - \sum_{i=1}^n \xi_i |1 + \sum_{i=1}^n \xi_i |(1 + \sum_{i=1}^n \xi_i)x_j|^{ip}|^{ip} = 0, j = \overline{1, n} \end{aligned} \quad (8.2)$$

относительно коэффициентов $\{\xi_i\}$ разложения (8.1).

Для приближенного нахождения искомого вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ можно применять подходящий метод решения систем n нелинейных уравнений с n неизвестными. К. Бриггс использовал для этой цели классический метод Ньютона и, привлекая специальные программные средства, позволяющие проводить вычисления с 200 знаками, вычислил константы α_p, δ_p для $p = 2, 3, \dots, 12$ со 100 знаками после запятой (см. [24]). Полученные значения для α_p, δ_p с тремя знаками после запятой приведены в таблице 1.

Таблица 1

p	2	3	4	5	6	7
α_p	2.502	1.927	1.690	1.555	1.467	1.405
δ_p	4.669	5.967	7.284	8.349	9.296	10.222
p	8	9	10	11	12	
α_p	1.358	1.321	1.291	1.267	1.246	
δ_p	10.948	11.768	12.341	13.076	13.535	

При больших значениях p метод Ньютона расходится (неустойчивость!).

А. Б. Смирнова [18], используя итеративно регуляризованные методы Ньютона и Гаусса – Ньютона (см. [32]), повторила результаты К. Бриггса с точностью до пяти знаков после запятой и вычислила константу α_p для $p = 13, 14, \dots, 24$ с той же точностью. Полученные значения с тремя знаками после запятой приведены в таблице 2.

Таблица 2

p	13	14	15	16	17	18
α_p	1.229	1.213	1.201	1.189	1.178	1.169
p	19	20	21	22	23	24
α_p	1.161	1.153	1.146	1.140	1.134	1.129

Приведем выражение для функции $g(x)$, полученной в результате решения системы (8.2) при $p = 2$ (квадратичный случай) и $n = 7$ с девятью знаками после запятой

$$\begin{aligned} g(x) = & 1 - 1.527632997x^2 + 0.104815194x^4 + 0.026705673x^6 - \\ & - 0.003527413x^8 + 0.000081581x^{10} + 0.000025368x^{12} - \\ & - 0.000002687x^{14}. \quad (8.3) \end{aligned}$$

Вычисленное по формуле $\alpha = -1/g(1)$ оказывается равной $\alpha = 2.502907875\dots$. Заметим, что коэффициенты степенного ряда довольно быстро убывают, поэтому высокую точность для решения $g(x)$ (а следовательно, для α) можно получить при сравнительно небольшой размерности системы (8.2).

§ 9. Численное нахождение универсальной константы δ_p

9.1. Общий метод. Перейдем теперь к вычислению универсальной константы δ_p , которая отвечает за скейлинг по параметру μ (см. формулу (5.2) из § 5). М.Фейгенбаумом было доказано следующее утверждение.

Утверждение 9.1. Универсальная константа δ_p совпадает с наибольшим по модулю собственным числом оператора производной $L(g)=T'(g)$, где T – оператор удвоения (см. (7.2)), а g – решение уравнения универсальности (7.4) для случая степенной нелинейности с показателем p .

Доказательство приведено в книге Г.Шустера [23] (см. § 32). Вычислим производную Гато оператора удвоения $T(g) = -\alpha g(g(-\frac{x}{\alpha}))$.

$$\begin{aligned} L(g)h &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} (-\alpha) \left\{ \frac{(g + \lambda h)(g(-\frac{x}{\alpha}) + \lambda h(-\frac{x}{\alpha})) - g(g(-\frac{x}{\alpha}))}{\lambda} \right\} = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} (-\alpha) \left\{ \frac{g(g(-\frac{x}{\alpha}) + \lambda h(-\frac{x}{\alpha}))g(g(-\frac{x}{\alpha}))}{\lambda} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda h(g(-\frac{x}{\alpha}) + \lambda h(-\frac{x}{\alpha}))}{\lambda} \right\} = \\ &= -\alpha \{ g'(g(-\frac{x}{\alpha})) \cdot h(-\frac{x}{\alpha}) + h(g(-\frac{x}{\alpha})) \}. \quad (9.1) \end{aligned}$$

Согласно утверждению 9.1, универсальная константа δ_p является решением задачи на собственные значения для линейного оператора $L(g)$, т. е.

$$L(g)h = \delta h. \quad (9.2)$$

Как и в случае константы α_2 , сначала найдем грубое приближение для δ_2 . Для этой цели воспользуемся следующим приемом. При решении задачи (9.2) будем считать функцию h константой. Тогда, подставляя в (9.2) найденное выражение для $L(g)$ и полагая $x = 0$, приходим к соотношению

$$-\alpha(g'(1)h + h) = \delta h,$$

которое после сокращения на h переходит в следующее:

$$-\alpha(g'(1) + 1) = \delta. \quad (9.3)$$

Для нахождения $g'(1)$ продифференцируем два раза уравнение универсальности

$$g(x) = -\alpha g(g(-\frac{x}{\alpha})),$$

что дает

$$g'(x) = g'(g(-\frac{x}{\alpha})) \cdot g'(-\frac{x}{\alpha}),$$

$$g''(x) = g''(g(-\frac{x}{\alpha})) \cdot (g'(-\frac{x}{\alpha}))^2 (-\frac{1}{\alpha}) + g'(g(-\frac{x}{\alpha})) \cdot g''(\frac{x}{\alpha})(-\frac{1}{\alpha}).$$

Подставим в последнее соотношение $x = 0$, воспользуемся условием $g'(0) = 0$, которое следует из представления решения (7.5), и сократим на $g''(0)$. Окончательно получаем

$$1 = g'(1)(-1/\alpha).$$

Вместе с (9.3) это дает выражение для δ :

$$\alpha^2 - \alpha = \delta.$$

Воспользовавшись найденным в предыдущем параграфе значением $\alpha_2 \approx 2.72$, получаем $\delta_2 \approx 4.67$. Для сравнения численное значение этой константы с девятью знаками есть

$$\delta_2 = 4.669016091 \dots$$

9.2. Прямой алгоритм. Можно предложить прямой метод (см. [25]) вычисления константы δ_2 , в котором нет необходимости решать уравнение удвоения и находить максимальное собственное значение производной оператора T . Он основан на гипотезе К. Бриггса [25], что константу δ_2 можно вычислять также по формуле

$$\delta_2 = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{a_{i-1} - a_{i-2}}{a_i - a_{i-1}}, \quad (9.4)$$

где a_i — не критические значения параметра, в котором происходит бифуркация удвоения периода в процессе с функцией $\psi_a(x) = 1 - ax^2$ (ср. с (5.2)), а значение параметра, при котором реализуется суперцикл порядка 2^i .

Рассмотрим последовательность полиномов b_k , определяемых рекуррентно:

$$b_0(a) = 0,$$

$$b_k(a) = a - [b_{k-1}(a)]^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

Утверждение 9.2. Пусть $k = 2^i$. Процесс с функцией $\psi_a(x)$ имеет суперцикл порядка $k = 2^i$ тогда и только тогда, когда $b_k(a) = 0$.

Доказательство вытекает из определения суперцикла для функции $\psi_a(x)$ и того факта, что $x = 0$ является корнем полинома $\psi_a^{2^i}(x) = 0$ (см. рис. 7.1).

Установленное свойство позволяет находить значения a_i параметра a , входящие в формулу (9.4), как корень уравнения $b_k(a) = 0$. Это позволяет выписать следующий алгоритм приближенного вычисления δ_2 :

$$a_i^0 = a_{i-1} + \frac{a_{i-1} - a_{i-2}}{\delta^{i-1}}, \quad i = 2, 3, \dots, \quad (9.5)$$

$$a_i^{j+1} = a_i^j - \frac{b_{2^i}(a_i^j)}{b'_{2^i}(a_i^j)}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (9.6)$$

$$b'_k(a) = 1 - 2b'_{k-1}(a)b_{k-1}(a), \quad k = 1, 2, 3, \quad (9.7)$$

$$a_i = \lim_{j \rightarrow \infty} a_i^j, \quad (9.8)$$

$$\delta^i = \frac{a_{i-1} - a_{i-2}}{a_i - a_{i-1}}, \quad \delta_2 = \lim_{i \rightarrow \infty} \delta^i. \quad (9.9)$$

Поясним эти формулы. Соотношение (9.5) предназначено для вычисления начального приближения при вычислении очередного значения параметра a_i . Формулы (9.6)–(9.8) реализуют метод Ньютона для нахождения корня уравнения $b_k(a) = 0$. Наконец, формула (9.9) есть просто перезапись формулы (9.4).

Оказывается, что описанный алгоритм для нахождения δ_2 можно использовать для вычисления универсальной константы α_2 . В работе К. Бриггса [25] была предложена формула

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{b'_{i+1}(a_{i+1})}{b'_i(a_i)} = \frac{\delta_2}{\alpha_2}, \quad (9.10)$$

где $b'_i(a_i)$ определяются рекуррентно соотношением (9.7).

Таким образом, зная приближенное значение предела в соотношении (9.10) и одной из универсальных констант, можно вычислить другую.

Существует ли какая-либо аналитическая функциональная зависимость между константами α_2 и δ_2 ? Являются ли они алгебраическими числами, т. е. корнями многочлена с целыми числами? До сих пор эти вопросы остаются открытыми. Однако на основе численного моделирования установлен следующий интересный факт (см. об этом [25]).

Утверждение 9.3. *Если бы константа α_2 была корнем полинома степени 20 или меньше с целыми коэффициентами, то по крайней мере один из коэффициентов превосходил бы $2 \cdot 10^{15}$. Если бы константа δ_2 была корнем полинома степени 20 или меньше с целыми коэффициентами, тогда по крайней мере один из коэффициентов превосходил бы $5 \cdot 10^{15}$.*

Иными словами, универсальные константы α_2, δ_2 не являются корнями полиномов с целыми коэффициентами до 20-й степени, коэффициенты которых не превосходят $2 \cdot 10^{15}$ или $5 \cdot 10^{15}$ соответственно.

Упражнения

9.1. Вычислить константу δ_2 , проведя предварительно дискретизацию задачи (9.2) и используя итерационный процесс

$$x^{n+1} = Ax^n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\langle x^{n+1}, x^n \rangle}{\langle x^n, x^n \rangle} = \delta_2,$$

где A — оператор, полученный в результате дискретизации оператора $L(g)$, g — решение уравнения удвоения из § 8 (см. формулу (8.7)).

9.2. Используя алгоритм (9.5)–(9.9) и начальные аппроксимации $a_0 = 0, a_1 = 1, b'_0 = 0, \delta_1 = 3.2$, вычислить a_i ($i = 2, 3, \dots, 10$) и $\delta^{10} \approx \delta_2$.

9.3. Используя формулу (5.10) и найденное выше $\delta_2 \approx \delta^{10}$, вычислить приближенное значение α_2 .

9.4. Модифицировать процесс (9.5)–(9.9) и выписать алгоритм для вычисления δ_3 .

ГЛАВА 2

Элементы фрактальной геометрии

§ 10. Комплексные динамические системы

Почему геометрию называют холодной и сухой? Одна из причин заключается в ее неспособности описать форму облака, горы, дерева или берега моря. Облака — это не сферы, горы — это не конусы, линии берега — это не окружности, а кора не является гладкой, а молния не распространяется по прямой.... Природа демонстрирует нам не просто более высокую степень, а совсем другой уровень сложности. Число различных масштабов длин в структурах всегда бесконечно. Существование этих структур бросает нам вызов в виде трудной задачи изучения тех форм, которые Эвклид отбросил как бесформенные, — задачи исследования морфологии аморфного.

B. Мандельброт

A fractal can be beatiful as a sunset.

A. Phillips

10.1. Множества Жюлиа, Фату и Мандельбрата. В предыдущих параграфах были рассмотрены динами-

ческие системы, порождаемые итерационными процессами с функциями действительного переменного (одномерный случай). В частности, были рассмотрены функции шага

$$\varphi_\mu(x) = \mu x(1-x), x \in [0, 1]; \quad \psi_a(v) = 1 - av^2, x \in [-1, 1],$$

которые сводятся одна к другой линейной заменой переменных при некоторой связи параметров (см. § 6). Если в итерационном процессе

$$v_{t+1} = 1 - av_t^2$$

сделать замену $v_t = z_t/(-a)$ и положить $(-a) = c$, то приходим к динамической системе вида

$$z_{t+1} = z_t^2 + c. \quad (10.1)$$

Если z_t принимает действительные значения, то наблюдается аналогичная картина бифуркации удвоения периода, которая характеризуется теми же константами δ_2, α_2 .

Пусть теперь $z_t \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$, т. е. принимают комплексные значения. Если воспользоваться представлением $z_t = x_t + iy_t$, $c = p + iq$, то после подстановки в (10.1) и выделения действительных и мнимых частей приходим к двумерной системе

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= x_t^2 - y_t^2 + p \\ y_{t+1} &= 2x_ty_t + q, \end{aligned}$$

эквивалентной системе (10.1).

Переход к комплексным системам привел к появлению множеств очень необычной, можно сказать, фантастически причудливой формы. Речь идет, конечно, о множествах Жюлиа, Фату и Мандельброта.

Комплексные динамические системы в начале прошлого века интенсивно исследовали французские математики Г. Жюлиа и П. Фату. Их исследования не получили дальнейшего развития и фактически были забыты на несколько десятилетий, «поскольку в отсутствие современной компьютерной графики было почти невозможно передать их тонкие идеи» [16].

Всплеск интереса к динамическим системам, порождаемым итерационными процессами с рациональными функциями перехода, произошел в конце 1970-х годов, когда Б. Мандельброт и Дж. Хаббард получили компьютерное изображение некоторых множеств Жюлиа, т. е. множеств, имеющих ограниченную траекторию. Кроме того, Б. Мандельброт продемонстрировал множество, носящее теперь его имя, значений параметра c , для которых траектория нуля (критической точки функции $z^2 + c$) остается ограниченной.

Формы таких множеств настолько причудливы и чрезвычайно изящны, что никого не оставляют равнодушным и производят сильное эстетическое впечатление.

Отличительной чертой этих множеств является самоподобие: например, на границе основного множества Мандельброта (см. рис. 10.1) можно увидеть многочисленные его копии сколь угодно малого размера, все множества Жюлиа (см. рис. 10.3–10.9) состоят из самоподобных фрагментов. Можно также обратить внимание, что границы этих множеств сильно изрезаны, что, по-видимому, дало основание Б. Мандельброту назвать такого типа множества фракталаами (от *fractus* – изломанный). Этот термин также хорошо согласуется с английским словом *fractional* (дробный), что подчеркивает еще одно характерное свойство таких множеств, связанное с дробностью размерности Хаусдорфа (строгие определения подобия, фрактала и размерности будут даны в следующих двух параграфах).

Перейдем теперь к строгим определениям множеств Жюлиа и Мандельброта, приняв обозначение $P_c(z) = z^2 + c$, $P_c^n = \underbrace{P_c(P_c(\dots P_c))}_{n \text{ раз}}$.

Определение 10.1. Наполненным множеством Жюлиа для $P_c(z)$ называется множество

$$K(P_c) = \{z \in \mathbb{C} : \forall n |P_c^n(z)| \leq R < \infty\},$$

где R — некоторая положительная константа; т. е. это множество точек комплексной плоскости, орбиты которых ограничены. Граница множества K называется просто множеством Жюлиа и обозначается $J(P_c)$.

Определение 10.2. Дополнение $\mathbb{C} \setminus J(P_c)$ называется множеством Фату для отображения P_c .

Определение 10.3. Множеством Мандельброта для $P_c(z)$ называется множество

$$M = \{c \in \mathbb{C} : \forall n |P_c^n(0)| \leq R < \infty\},$$

где R — некоторая фиксированная положительная константа, т. е. M — множество параметров c , для которых орбиты нуля ограничены (итерации $z_{n+1} = P_c(z_n)$, $n = 0, 1, \dots$, содержатся в круге фиксированного радиуса $R > 0$).

Множество Мандельброта представлено на рис. 10.1. Оно расположено в круге $\{z : |z| \leq r\}$. Предоставим читателю судить, является ли это множество прекрасным или безобразным с художественной точки зрения, но определенно можно сказать, что оно имеет необычно причудливую форму с точки зрения классической геометрии.

Можно дать эквивалентные определения множеств $J(P_c)$ и M на основе понятия чувствительности отображения.

Определение 10.4. Пусть X — метрическое пространство, а Λ — его подмножество. Говорят, что отображение $F: X \rightarrow X$ чувствительно к начальным данным на множестве Λ , если

$$\exists \beta > 0 : \forall y \in \Lambda \quad \forall O_\epsilon(y) \quad \exists p \in O_\epsilon(y) \quad \exists n > 0 \\ \rho(F^n(y), F^n(p)) > \beta, \quad F^n = \underbrace{F(F(\dots F))}_{n \text{ раз}},$$

т. е. сколь угодно близкие точки на некотором шаге итерации разойдутся на расстояние, большее чем β .

Определение 10.1'. Множество Жюлиа $J(P_c)$ — это множество всех точек из \mathbb{C} , на котором отображение $P_c(z)$ чувствительно к начальным данным.

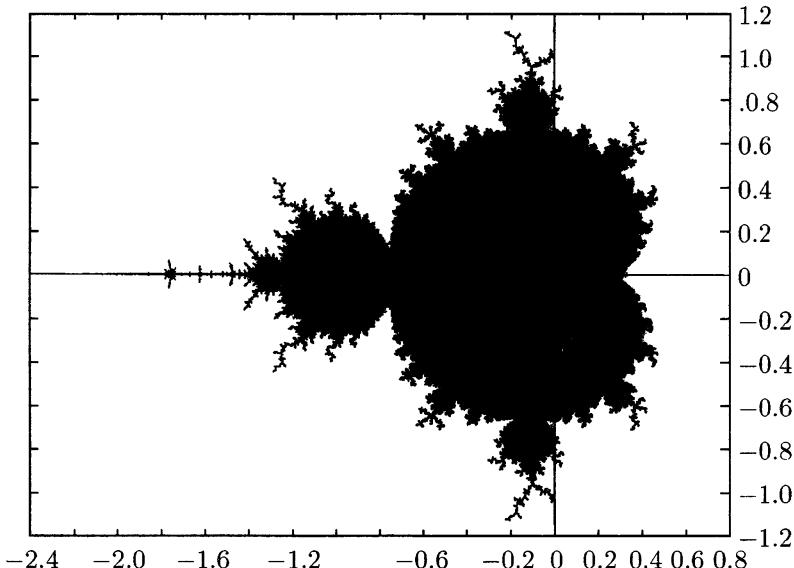


Рис. 10.1

Определение 10.3'. Множество Мандельброта — это множество значений параметра c , для которого наполненное множество Жюлиа $K(P_c)$ связно.

Доказательство эквивалентности определений и некоторых других свойств множеств $K(P_c)$, $J(P_c)$, M можно найти в монографии [26].

ЗАМЕЧАНИЕ 10.1. Не следует думать, что множества Жюлиа и Мандельброта определяются только для отображения $P_c(z) = z^2 + c$. Просто исторически изучение комплексных систем начиналось с отображения $P_c(z)$, и все определения были сначала введены для этого отображения. Аналогичным образом вводится определение наполненного множества Жюлиа для произвольного отображения $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, а именно

$$K(f) = \{z : z \in \mathbb{C}, |f^n(z)| \leq R < \infty\}. \quad (10.2)$$

Чтобы обобщить определение множества Мандельброта, напомним сначала определение критической точки z^* отображения $f(z)$ как корня уравнения $f'(z) = 0$, т. е. $f'(z^*) = 0$. Пусть теперь $f_c(z) = f(z) + c$, $f'_c(z^*) = 0$. Тогда множество Мандельброта для отображения f_c и критической точки z^* определяется как множество

$$M(f_c, z^*) = \{c : c \in \mathbb{C}, |f_c^n(z^*)| \leq R < \infty\}. \quad (10.3)$$

Таким образом, сколько критических точек (корней уравнения $f'_c(z) = 0$), столько и множеств Мандельброта. Поскольку нуль — критическая точка отображения $P_c(z) = z^2 + c$, то данное определение согласуется с введенным ранее. Наиболее полно изучены множества $K(f)$, $M(f_c, z^*)$ для случаев, когда f — полином или рациональная функция (см., например, [16], [26]).

10.2. Классификация множеств Жюлиа. В соответствии с определением 10.3' при изменении параметра c

в пределах множества Мандельброта наполненное множество Жюлиа остается связным. Более того, оказывается, что эти множества имеют некоторые характерные формы в зависимости от того, из какой части множества M взят параметр c . Иными словами, положение параметра c во множестве Мандельброта определяет свой специфический класс множеств Жюлиа. Это позволяет провести классификацию основных типов множеств Жюлиа.

Проследим, как меняется множество Жюлиа, когда параметр c последовательно принимает действительные отрицательные значения.

Начнем с параметра $c = 0.0 + 0i$. Очевидно, что множество Жюлиа в этом случае есть круг единичного радиуса с аттрактором $z = 0.0 + 0i$. При $c = -0.25 + 0i$ это множество уже представляет собой несколько деформированную окружность с аттрактором (устойчивой неподвижной точкой) $z_2 = 1 - \sqrt{2}$.

Действительно, решая квадратное уравнение

$$P_c(z) \equiv z^2 + c = z,$$

находим два корня $z_{1,2} = (1 \pm \sqrt{1 - 4c})/2$ и проверяем условие $|P'_c(z)| = |2z| < 1$. При $c = -0.25 + 0i$ этому условию удовлетворяет лишь корень $z_2 = 1 - \sqrt{2}$.

На рис. 10.2 изображены множества Жюлиа при различных значениях параметра c .

Обратим особое внимание на значение $c = -0.75 + 0i$. Напомним, что при переходе от функции $\varphi_\mu = \mu x(1 - x)$ к $P_c = z^2 + c$ была установлена связь параметров

$$\mu(\mu - 2) = -4c,$$

поскольку $\mu(\mu - 2)/4 = a$ (см. § 6) и $a = -c$ (см. п. 10.1). Поэтому $c = -0.75$ соответствует единственное положительное

значение параметра $\mu = 3$. А это, как было установлено в § 4, есть критическое значение параметра μ , при котором происходит бифуркация, т. е. удвоение аттракторов (предельных точек).

Таким образом, $c = -0.75 + 0i$ также критическое значение параметра c , и, следовательно, при дальнейшем уменьшении c , что соответствует увеличению параметра μ , уже появляются два аттрактора, которые условно помечены жирными точками на трех последних фигурах рис. 10.2.

С другой стороны, первые четыре фигуры на этом рисунке соответствуют значениям параметра c , которые расположены внутри основной области Мандельброта (типа кардиоиды). Границы этих фигур представляют собой деформированную окружность, охватывающую собой единственную притягивающую неподвижную точку.

Оказывается, что подобная картина наблюдается для всех значений параметра c , не выходящих из кардиоиды.

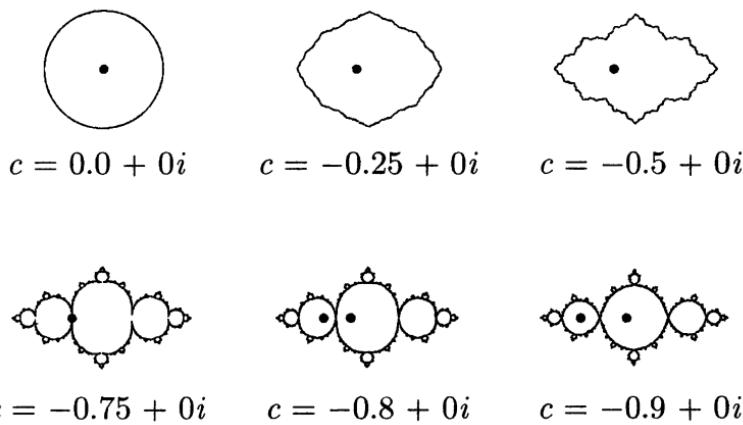


Рис. 10.2

Например, при $c = -0.12375 + 0.56508i$ множество Жюлиа, изображенное на рис. 10.3, также имеет вид деформированной окружности.

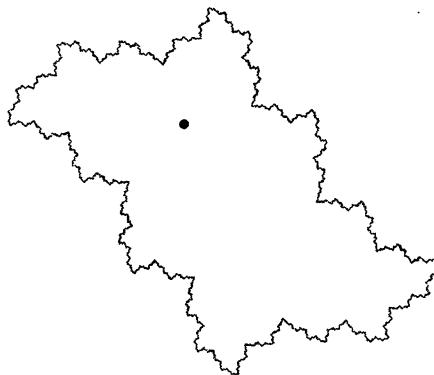


Рис. 10.3

Возьмем теперь значение $c = -0.12 + 0.74i$, которое расположено в центре самой большой почки («луковки») сверху от основной части M . Множество Жюлиа при этом значении параметра c представлено на рис. 10.4. Цикл периода 3 появляется здесь в результате трифуркации неподвижной точки, когда параметр c переходит из основной части в соответствующую почку.

Значение $c = -0.481762 - 0.531657i$ соответствует месту прорастания средней нижней почки, дающей устойчивые циклы периода 5, когда c переходит внутрь почки. Для этого значения параметра реализуется так называемый параболический случай. Соответствующее множество Жюлиа изображено на рис. 10.5: здесь неподвижная точка является точкой ветвления.

Значение $c = -0.39054 - 0.58679i$ является граничной точкой основного множества Мандельброта, которое не сов-

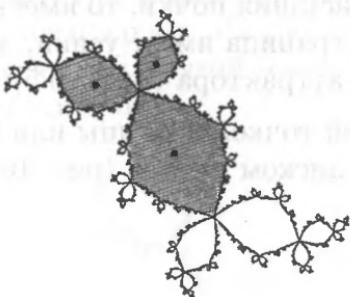


Рис. 10.4

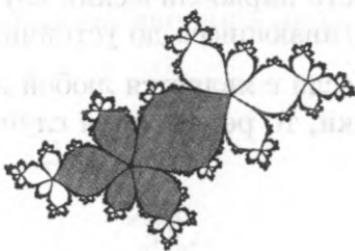


Рис. 10.5

падает с точкой прорастания почек. Внутри области, ограниченной множеством Жюлиа, процесс итераций протекает следующим образом: сначала итерационные точки пересекаются из меньших, периферийных, точек в большие до тех пор, пока не попадут внутрь диска, содержащего неподвижную точку. Этот диск назван **диском Зигеля** (в честь немецкого математика К. Л. Зигеля). После того как точки попадают в диск, они начинают вращаться по своим инвариантным окружностям, не покидая их (см. рис. 10.6).

Четыре примера, рассмотренные выше, охватывают фактически все типичные случаи, когда множество Жюлиа содержит внутренние точки. Итак,

- если c лежит внутри основного множества Мандельброта, то множество Жюлиа представляет собой деформированную окружность, охватывающую единственную притягивающую неподвижную точку-аттрактор (рис. 10.2, 10.3);
- если c лежит внутри одной из почек, то множество Жюлиа состоит из бесконечного числа (фрактально) деформированных окружностей, охватывающих устойчивый цикл некоторого порядка (рис. 10.4);

- если c является точкой прорастания почки, то имеет место параболический случай, граница имеет усики, дотягивающиеся до устойчивого аттрактора (рис. 10.5);
- если c является любой другой точкой границы или почки, то реализуется случай с диском Зигеля (рис. 10.6).

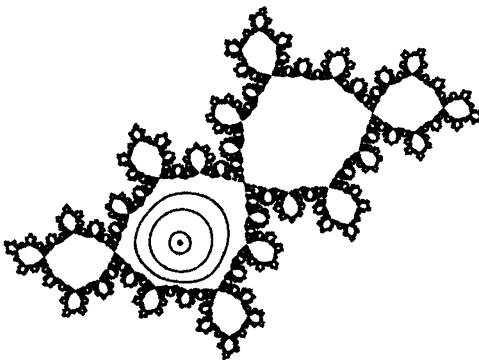


Рис. 10.6

Оказывается, возможен еще один класс множеств Жюлиа — так называемые к о л ь ц а Э р м а н а, которые не реализуются в случае отображения $P_c(z)$, но могут возникать при других отображениях (см. разд. 3 книги [16] Х. Пайтгена и П. Рихтера, где изложены результаты Д. Салливана о полной классификации множеств Фату и Жюлиа).

Рассмотренные случаи относятся к множествам Жюлиа с внутренними точками. Однако существуют множества Жюлиа, не содержащие внутренних точек. Множество Мандельброта окружено иглоподобными разветвленными антеннами. Если поместить параметр c на самый конец антенн, то получится множество Жюлиа подобной формы.

На рис. 10.7 показано множество для $c = i$; оно носит название дендрит. На рис. 10.8 представлено множество при выборе c из другой части антенны (вторичного множества Мандельброта).

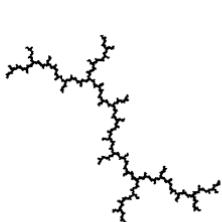


Рис. 10.7

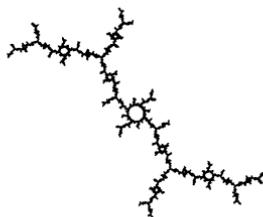


Рис. 10.8

Какова структура множеств Жюлиа, если взять значение параметра c вне множества Мандельброта M ? В этом случае множество Жюлиа перестает быть связным и распадается в облако точек, называемое пылью Фату. Два примера таких множеств показано на рис. 10.9.



Рис. 10.9

Простейший способ приближенного построения наполненного множества Жюлиа основан непосредственно на определении 10.1 и состоит из следующих этапов:

1. Выбирается квадрат с центром в начале координат, и строится достаточно мелкая сетка.
2. Для каждого узла z_0 сетки вычисляется $P_c^k(z_0)$, $0 \leq k \leq N$, для достаточно большого N .
3. Если $|P_c^k(z_0)| > B$ при некотором k , то $z_0 \notin K_c$.
4. Если $|P_c^k(z_0)| \leq B$, $0 \leq n \leq N$, то $z_0 \in K_c$.

При этом в качестве константы B можно взять $B = \max\{|c|, 2\}$. Действительно, если $|z| > B$, то

$$\frac{|P_c(z)|}{|z|} = \frac{|z^2 + c|}{|z|} \geq |z| - \frac{c}{|z|} > |z| - 1 = q > 1$$

и, следовательно, $P_c^n(z) \rightarrow \infty$.

Содержание этого пункта в основном составляет материал из книги Х. Пайтгена и П. Рихтера (см. [16]).

10.3. N -фуркации системы. В отличие от действительного случая с квадратичной функцией итерации (10.1), в комплексной плоскости при изменении комплексного параметра c порождают не только бифуркации, но n -фуркации (n — любое целое), когда k -цикл становится неустойчивым и рождается kn -цикл. Если z_0 — точка k -цикла, то условием n -фуркации является выполнение соотношения

$$\frac{dz_k}{dz_0} = \exp(2\pi i m/n),$$

что влечет равенство $|dz_k/dz_0| = 1$.

Числа m/n , где m/n — взаимно простые и $m = 1, 2, \dots, n-1$, называются *поворотными числами* и n -фуркации системы. Если обозначить через c_j последовательные значения параметра c , при которых происходит n -фуркация системы (10.1) с поворотным числом $\delta_{m/n}$,

то оказывается, что, как и в действительном случае, существует предел (комплексное число)

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{c_j - c_{j-1}}{c_{j+1} - c_j} = \delta_{m/n},$$

т. е. $\delta_{m/n}$ — комплексный вариант универсальной константы Фейгенбаума δ_2 .

Аналогом уравнения удвоения является уравнение n -фуркации

$$g(z) = \alpha g^{\langle n \rangle}(z/\alpha),$$

где $g^{\langle n \rangle}$ — n раз взятая суперпозиция функции g . Если нормировать функцию условием $g(0) = 1$, то для параметра α получаем формулу

$$\alpha = \alpha_{m/n} = [g^{\langle n-1 \rangle}(1)]^{-1}.$$

Подобным же образом определяются константы $\delta_{m/n}$, $\alpha_{m/n}$ для других функций, например для полиномов произвольного порядка и рациональных функций. Значения этих величин для некоторых полиномов вида $P(z) = c + z^d$ ($2 \leq d \leq 5$) приведены в работе К. Бриггса [25], а множества Жюлиа для рациональных функций, возникающих при реализации метода Ньютона для кубических полиномов, представлены в монографии Х. Пайтгена и П. Рихтера [16].

Известно, что для действительных полиномов P_j , имеющих только действительные корни, метод Ньютона

$$z^{k+1} = z^k - \frac{P(z^k)}{P'(z^k)} \equiv N(z^k) \quad (10.4)$$

сходится к какому-либо корню почти при всех начальных значениях R . Оказывается, что подобным свойством обладает метод Ньютона и для полинома $P(z) = z^3 - 1$ (с двумя комплексными корнями), т. е., за исключением начальных точек из множества нулевой плоской меры (множества

Жюлиа), наблюдается сходимость к одному из корней полинома $P(z) \equiv z^3 - 1 = 0$.

Интересно отметить, что граница области притяжения (т. е. множества начальных точек, для которых метод (10.4) сходится к одному из корней полинома) корней имеет фрактальную структуру. Это и не удивительно, поскольку метод Ньютона (10.4) для полинома $P(z)$ представляет собой не что иное, как дискретную комплексную динамическую систему с рациональной функцией перехода $N(z)$. Фрактальные множества, которые возникают в нелинейных динамических системах (в частности в дискретных ДС), называют **динамими фракталами**, в отличие от конструктивных (классических) фракталов, о которых пойдет речь в § 13.

Упражнения

10.1. Найти численно область притяжения для каждого из корней z_i ($i = 1, 2, 3$) полинома $P(z) = z^3 - 1$, т. е. найти множества

$$A(z_i) = \{z \in \mathbb{C} : \lim_{k \rightarrow \infty} N^k(z) = z_i\}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Изобразить эти множества графически.

10.2. Построить множества $A(z_i)$ для корней полинома $P(z) \equiv x^3 + (\lambda - 1)x - \lambda = 0$ при различных значениях λ .

10.3. Доказать теоретически и проверить численно, что параметры a и c в процессах (6.3), (10.1) определяют в действительном случае одну и ту же универсальную константу δ , которая введена формулой (5.2).

§ 11. Отображение подобия и самоподобие множеств

Одним из наиболее отличительных свойств множеств Жюлиа является их самоподобие. Если, например, рассмотреть под микроскопом некоторый фрагмент на границе множества K_c , то нам предстанет картина, которая, во-первых, практически не зависит от того, в каком месте этот фрагмент расположен, а во-вторых, существенно не отличается от той, которую мы видели без микроскопа. Множество Мандельброта также обладает (с некоторыми оговорками) этим удивительным свойством самоподобия, на его границу нанизано бесконечное число копий самого себя.

Попытаемся перенести наши интуитивные представления об этом свойстве на язык математических терминов.

Определение 11.1. Пусть X — метрическое пространство. Отображение $S: X \rightarrow X$ называется отображением подобия, если для любых $x, y \in X$ $\rho(S(x), S(y)) = r\rho(x, y)$ для некоторого $r > 0$.

Определение 11.2. Два множества метрического пространства называются подобными, если взаимно-однозначное соответствие между ними можно установить с помощью некоторого преобразования подобия S .

ПРИМЕР 1. Пусть $X = R^2$. Преобразования

- а) растяжения (гомотетии) $\mu_r: (x, y) \rightarrow (x', y'), x' = rx, y' = ry;$
- б) сдвига $\tau_b: x' = x - b_1, y' = y - b_2, b = (b_1, b_2)^T;$
- в) вращения (поворота на угол θ) $O:$

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' &= x \sin \theta + y \cos \theta; \end{aligned}$$

г) симметрии относительно оси OY : $x' = -x$, $y' = +y$; а также их суперпозиция (в любом порядке) являются преобразованием подобия. Справедлива следующая теорема о представлении отображения подобия [27].

Теорема 11.1. *Пусть X – сепарабельное гильбертово пространство. Для того чтобы S было преобразованием подобия, необходимо и достаточно, чтобы имело место представление $S = \mu_r \tau_b O$, где μ_r , τ_b – отображение растяжения и сдвига, а O – ортогональное отображение, т. е. $O^* = O^{-1}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Необходимость. Пусть S – преобразование подобия. Обозначим $g(x) = (S(x) - S(0))/r$. Тогда, согласно определению 11.1, имеем

$$\|g(x) - g(y)\| = \frac{\|S(x) - S(y)\|}{r} = \|x - y\|,$$

в частности, $g(0) = 0$, $\|g(x)\| = \|x\|$.

Покажем, что отображение g сохраняет скалярное произведение. Действительно,

$$\begin{aligned} \langle g(x), g(y) \rangle &= \frac{1}{2}(\|g(x)\|^2 + \|g(y)\|^2 - \|g(x) - g(y)\|^2) = \\ &= \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2) = \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

Поэтому, если $\{e_i\}$ – ортонормированный базис, то таковым будет и $\{g(e_i)\}$.

Из соотношений

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle g(x), g(e_i) \rangle g(e_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle g(e_i)$$

следует, что $g(x)$ — линейное отображение. Умножая последнее соотношение скалярно на y , находим

$$\begin{aligned}\langle g(x), y \rangle &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle \langle g(e_i), y \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle \langle g(e_i), gg^{-1}(y) \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, g^{-1}(y) \rangle,\end{aligned}$$

откуда следует, что $g^* = g^{-1}$.

Для $g(x)$ введем новое обозначение $O(x)$. Тогда

$$\begin{aligned}O(x) &= (S(x) - S(0))/r, \\ S(x) &= r(O(x) + \frac{1}{r}S(0)) = \mu_r(\tau_b(O(x))),\end{aligned}$$

где $b = -S(0)/r$.

Достаточность. С учетом того факта, что ортогональное отображение сохраняет норму, требуемое свойство проверяется непосредственно.

Определение 11.3. Множество Q метрического пространства X называется **с а м о п о д о б н ы м**, если его можно разбить на произвольно малые части так, что каждая часть будет подобна целому множеству.

Таким образом, для таких множеств при некотором разбиении каждая часть подобна исходному множеству, следовательно, существует отображение подобия, их связывающее. Поэтому открывается возможность представления самоподобного множества K как конечного объединения его образов для некоторой совокупности функций подобия ω_i , $i = 1, 2, \dots, m$, т. е.

$$K = \bigcup_{i=1}^m \omega_i(K). \quad (11.1)$$

При дополнительном условии, что каждое из ω_i является сжимающим отображением, оператор $T = \cup_{i=1}^m \omega_i$ называется оператором Хатчinsona.

§ 12. Топологическая и фрактальная размерности

Самоподобие не является характеристическим свойством множеств Жюлиа, Фату и Мандельброта. Отрезок и прямоугольник, например, очевидно являются самоподобными фигурами. Однако следует отметить, что множества, подобные множеству Жюлиа, обладают некоторой нерегулярностью, или, как иногда говорят, геометрической хаотичностью. Чтобы охарактеризовать оба этих свойства — и самоподобие и нерегулярность, а также выделить класс таких множеств с геометрической хаотичностью, нам понадобится понятие фрактальной размерности множества.

Напомним сначала определение топологической размерности. Используемое здесь пространство X является метрическим пространством со счетной базой. Из всего многообразия подходов к определению размерности мы остановимся на таком, в котором пространство имеет размерность $\leq n$, если произвольно малые куски пространства, окружающие каждую точку, могут быть ограничены подмножествами размерности $\leq n - 1$. Этот метод определения является индуктивным, причем исходным пунктом индукции является принятие пустого множества в качестве (-1) -мерного пространства.

Определение 12.1. Пустое множество и только пустое множество имеет размерность -1 .

Пространство X имеет размерность $\leq n$ ($n \geq 0$) в точке p , если p обладает произвольно малыми окрестностями, границы которых имеют размерность $\leq n - 1$. X имеет размерность $\leq n$ (обозначаем $\dim X \leq n$), если X имеет размерность $\leq n$ в каждой своей точке.

X имеет размерность n в точке p , если верно, что X имеет размерность $\leq n$ в p и неверно, что X имеет размерность $\leq n - 1$ в p . X имеет размерность n , если $X \leq n$ верно, а $\dim X \leq n - 1$ неверно. X имеет размерность ∞ , если $\dim X \leq n$ неверно для каждого n .

Перейдем к определению размерности Хаусдорфа. Пусть A — подмножество метрического пространства, $\text{diam}(a) = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in A\}$ и $\{U_i\}$ — счетное открытое покрытие множества A , т. е. $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$. Пусть s и ε — положительные числа. Определим функцию

$$h_{\varepsilon}^s(A) = \inf \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \text{diam}(U_i)^s : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, \text{diam}(U_i) < \varepsilon \right\},$$

где нижняя грань берется по всевозможным покрытиям. Поскольку $h_{\varepsilon}^s(A)$ как функция ε не убывает, то существует предел, конечный или бесконечный:

$$h^s(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_{\varepsilon}^s(A).$$

Хаусдорфом было установлено, что для любого множества A ($A \subset R^n$) существует такое число $D_H(A)$, что

$$h^s(A) = \begin{cases} \infty & \text{для } s < D_H(A), \\ 0 & \text{для } s > D_H(A). \end{cases}$$

Определение 12.2. Число $D_H(A) = \inf\{s : h^s(A) = 0\} = \sup\{s : h^s(A) = \infty\}$ называется размерностью Хаусдорфа, или фрактальной размерностью, множества A .

Множества с нецелой размерностью Хаусдорфа принято называть фрактальами. Чтобы охватить некоторые экзотические случаи (кривая Гильберта), когда множество имеет целую размерность Хаусдорфа, но сохраняет все признаки фрактальности, дадим более общее определение, следя Б. Мандельброту.

Определение 12.3. Фракталом называется множество, размерность Хаусдорфа которого строго больше его топологической размерности.

Заметим, что для отрезка, прямоугольника и параллелепипеда эти размерности, очевидно, совпадают.

Необходимо отметить, что из-за трудности вычисления величины D_H обычно на практике используется другое, более удобное для вычисления определение фрактальной размерности (*box-counting dimension*) как величины $D_b(A)$, определяемой соотношением

$$D_b(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\varepsilon(A)}{\ln(1/\varepsilon)}, \quad (12.1)$$

где $N_\varepsilon(A)$ — наименьшее число шаров (открытых или закрытых) диаметром ε , покрывающих множество A . Как показывают примеры, величины $D_H(A)$ и $D_b(A)$ не всегда совпадают. Например, если A — множество рациональных точек на отрезке $[0, 1]$, то $D_b(A) = 1$, а $D_H(A) = 0$. Однако для многих классических фракталов эти величины совпадают, что делает использование $D_b(A)$ в качестве фрактальной размерности оправданным.

Упражнения

12.1. Вычислить топологическую и фрактальную размерности множества точек с рациональными координатами в n -мерном кубе.

12.2. Вычислить $D_H(A)$ и $D_b(A)$ для множества $A = \{0, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots\}$.

12.3. Вычислить фрактальную размерность $D_H(A)$ для канторова множества и кривой Кох из § 13.

§ 13. Галерея классических фракталов

Рассмотрим примеры так называемых конструктивных фракталов, которые строятся с помощью некоторой основы и фрагмента, повторяющегося при каждом уменьшении масштаба. Вычислим их фрактальную размерность, используя формулу (12.1).

13.1. Канторово множество.

Оно строится следующим образом. Отрезок $[0,1]$ делится на три равные части и удаляется средний интервал $(1/3, 2/3)$. К оставшимся двум отрезкам применяется снова та же процедура. Схематично это показано на рис. 13.1. Для покрытия n -й стадии построения канторова множества требуется $N_\epsilon(A) = 2^n$ шаров (отрезков) диаметром $\epsilon = 3^{-n}$.

Поэтому $D_B(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \frac{2}{3}$.

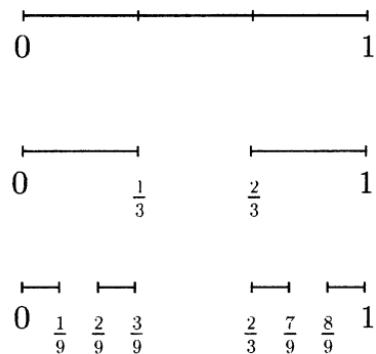


Рис. 13.1

13.2. Кривая Кох. Здесь также отрезок $[0,1]$ разбивается на три равные части. Над средним интервалом строится равносторонний треугольник, а основание его убирается. Затем к каждому звену полученной ломаной линии применяется аналогичное построение и так далее.

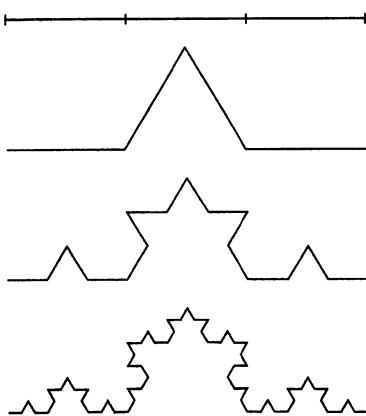


Рис. 13.2

Четыре этапа (начиная с нулевого) построения кривой Кох изображены на рис. 13.2. Ясно, что для покрытия кривой, полученной на n -м этапе, потребуется 4^n шаров (отрезков) диаметром $\varepsilon = (1/3)^n$, что дает $D_B(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 4^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 4}{\ln 3}$. Заметим, что имеются многочисленные другие варианты кривой Кох (см. [30] стр. 90–93).

13.3. Фрактал Мандельброта–Гивена. Снова отрезок $[0, 1]$ делится на три части, и над средним отрезком выстраивается квадрат, две стороны которого продолжаются вниз на величину длины стороны квадрата, как показано на рис. 13.3. Теперь к каждому отрезку длины $1/3$ полученной фигуры снова проводятся те же построения. Два этапа описанной процедуры представлены на рис. 13.3. Ясно, что $D_b(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 8^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 8}{\ln 3}$.

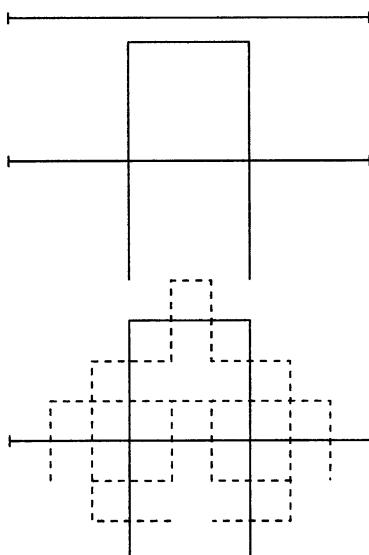


Рис. 13.3

13.4. Решето Серпинского (клиновидная кривая). В правильный треугольник встраивается равносторонний треугольник с вершинами, лежащими на серединах сторон исход-

ного треугольника. Процедура повторяется для полученных треугольников, за исключением треугольника, лежащего в центре. Два этапа таких построений показаны на рис. 13.4. Объектом нашего анализа является кривая, со-

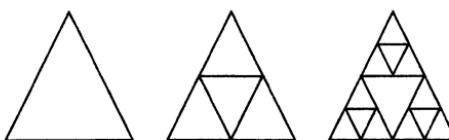


Рис. 13.4

ставленная из сторон всех треугольников. Имеем $D_b(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 3^{n+1}}{\ln 2^n} = \frac{\ln 3}{\ln 2}$. Часто рассматривают вариант решетка, когда в качестве исходного объекта берется равнобедренный прямоугольный треугольник.

13.5. Ковер Серпинского (двумерное множество). В общем случае квадрат делится на n^2 равных частей (квадратов), и затем изымается k^2 квадратов. На рис. 13.5 представлен случай $n = 5, k = 3$. К оставшимся квадратам снова применяется описанная процедура, т. е. каждый из них делится на n^2 частей и изымаются k^2 ячеек по выбранному правилу (через один). В этом случае $D_b(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 16^n}{\ln 5^n} = \frac{\ln 16}{\ln 5}$.

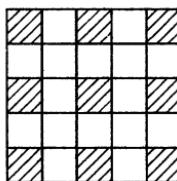
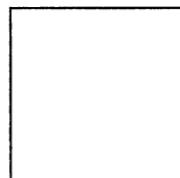


Рис. 13.5

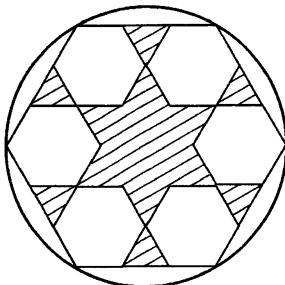


Рис. 13.6

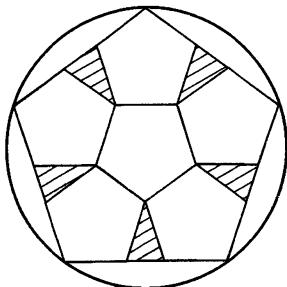


Рис. 13.7

13.6. Фрактал Давида (двумерное множество). Исходным множеством является правильный шестиугольник. Каждая его сторона делится на три равные части, и проводятся построения, как показано на рис. 13.6.

В результате получается 6 шестиугольников меньшего размера. Для каждого из них процесс снова повторяется (заштрихованные части не учитываются). Фрактальная размерность полученного в пределе множества составляет величину

$$D_b(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 6^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 6}{\ln 3}.$$

13.7. Пятиугольник Дюрера (двумерное множество). Сторона правильного пятиугольника делится по правилу золотого сечения. Полученный в результате этой процедуры меньший отрезок используется как сторона нового пятиугольника, примыкающего к вершине исходного пятиугольника (см. рис. 13.7).

При этом еще один пятиугольник (шестой) выстраивается в центре. Для каждого из 6 полученных пятиугольников схема повторяется. Диаметр описанного (покрывающего) круга на каждом очередном этапе уменьшается в $2/(3 - \sqrt{5})$ раз, следовательно,

$$D_b(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 6^n}{\ln \left(\frac{2}{3 - \sqrt{5}} \right)^n} = \frac{\ln 6}{\ln \frac{3 + \sqrt{5}}{2}}.$$

13.8. Губка Серпинского (трехмерное множество). Единичный куб разбивается на кубические ячейки со стороной, равной $1/3$, и изымаются 7 кубиков (на рис. 13.8 они заштрихованы). Процесс повторяется для каждого из оставшихся кубиков. Поэтому для фрактальной размерности предельного множества получаем значение

$$D_b(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 20^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 20}{\ln 3}.$$

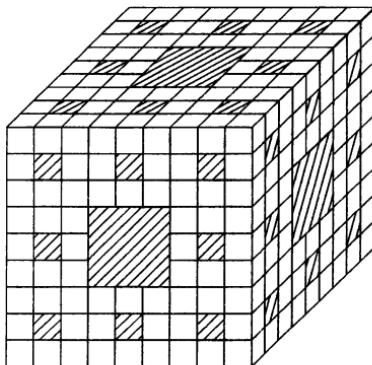


Рис. 13.8

Список классических фракталов не ограничивается множествами, приведенными выше. Упомянем некоторые из них: дерево Пифагора, кривая дракона, $3/2$ -кривая, кривая Гильберта и др. Остановимся лишь на последней, поскольку она обладает одной особенностью, а именно имеет целую фрактальную размерность.

13.9. Кривая Гильберта. Квадрат делится на четыре квадрата, и середины полученных квадратов соединяются отрезками, как показано на первой фигуре рис. 13.9. Затем

такие же построения проделываются для каждого из меньших четырех квадратов. Причем на нижних двух квадратах фигура разворачивается на 90° , как показано на втором квадрате. Четыре фигуры соединяются между собой, как показано на 3-м квадрате. Снова те же построения проделываются для образованной фигуры, уменьшенной в 2 раза, и т. д. Простой подсчет показывает, что

$$D_b(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^{2n} - 1}{\ln 2^n} = 2.$$

Таким образом, кривая Гильберта имеет целую размерность $D_B = 2$, хотя налицо все атрибуты фрактальности. Вот почему предпочтительней определение фрактала как множества, для которого топологическая и фрактальная размерности различны (см. определение 12.3).

13.10. Структура аттракторов. На рис. 13.10 изображены аттракторы (предельные точки) для критических значений параметра μ_i ($i = 1, 2, \dots, 5$), т. е. значений, при которых происходит бифуркация в системе (5.1) с квадра-

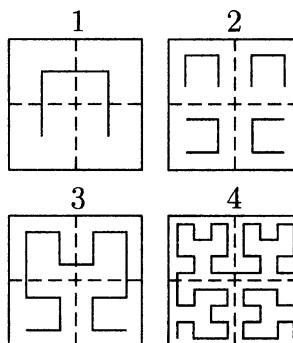


Рис. 13.9

тичной функцией. Можно видеть, что кластер аттракторов, отмеченный на самой нижней линии, повторяет в миниатюре совокупность аттракторов, отмеченную на линии выше, если ее отобразить симметрично относительно крайней правой точки. При этом кластер на каждой последующей линии упакован примерно в α раз плотнее (см. формулу (6.1 a)) кластера на предыдущей линии, т. е. наблюдается само-подобие.

Вычислена приближенно фрактальная размерность $D_B(A)$ для 2^n -цикла в пределе при $n \rightarrow \infty$ (см. [23]), а именно

$$D_B(A) = -\ln 2 / \ln[\frac{1}{2}(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2})] \approx 0.543.$$

Упражнения

13.1. Вывести формулу для длины n -й стадии построения кривой Кох и клиновидной кривой (Рис. 13.4).

13.2. Построить фракталы, отличные от представленных выше. Вычислить их фрактальные размерности.

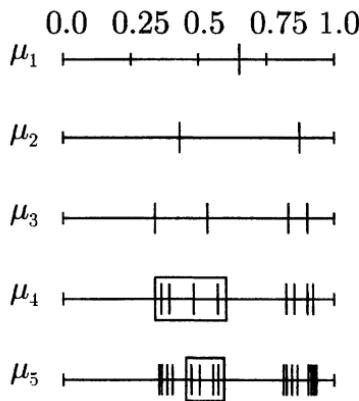


Рис. 13.10

§ 14. Функциональное уравнение для фракталов

Как было отмечено в § 11 для самоподобных множеств, каковыми являются фракталы, открывается принципиальная возможность конструирования функционального уравнения второго рода

$$K = W(K), \quad (14.1)$$

где оператор Хатчинсона W , действующий на множестве всех подмножеств некоторого исходного метрического пространства X , имеет представление $W = \bigcup_{i=1}^n w_i$, а w_i — сжимающее отображение подобия.

Оказывается, что для каждого фрактала можно построить отображения w_i таким образом, что данный фрактал будет единственным решением уравнения (14.1), и это решение можно получить методом последовательных приближений

$$K^{n+1} = W(K^n),$$

начиная с произвольного начального приближения $K^0 \neq 0$ (K^0 — любое замкнутое множество). Появляется возможность восстанавливать фракталы с любой точностью.

14.1. Уравнение для канторова множества. Обозначим это множество через C . Введем отображения

$$w_1(x) = \frac{x}{3}, \quad w_2(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}, \quad W(A) = w_1(A) \cup w_2(A).$$

Покажем, что $W(C) = C$. Как известно, канторово множество можно представить как совокупность точек, троичное разложение которых состоит только из 0 и 2, т. е.

$$C = \{X : x = 0.a_1a_2\ldots, a_i \in \{0, 2\}\}.$$

Пусть $x = 0.a_1a_2\dots = a_13^{-1} + a_23^{-2} + \dots \in C$. Тогда

$$\begin{aligned} w_1(x) &= \frac{1}{3}x = a_13^{-2} + a_23^{-3} + \dots = 0.0a_1a_2\dots \in C, \\ w_2(x) &= \frac{1}{3}\{0.a_1a_2\dots\} + \frac{2}{3} = 0.0a_1a_2\dots + 0.20\dots = \\ &= 0.2a_1a_2\dots \in C. \end{aligned}$$

Итак, $W(C) \subseteq C$. С другой стороны, если $y = 0.a_1a_2\dots$ и $y \in C$, то существует $x \in C$ и точно одна из двух функций w_i ($i = 1, 2$), что $w_i(x) = y$. Именно, положим $x = 0.a_2a_3\dots$. Если у элемента y $a_1 = 0$, то выбираем w_1 , что дает

$$\frac{1}{3}\{a_2\frac{1}{3} + a_3\frac{1}{3^2} + \dots\} = 0.0a_2a_3\dots = y.$$

В противном случае, если $a_1 = 2$, то выбираем w_2 и имеем

$$\frac{1}{3}\{a_2\frac{1}{3} + a_3\frac{1}{3^2} + \dots\} + \frac{2}{3} = 0.2a_2a_3\dots = y$$

14.2. Уравнение для кривой Кох. Прежде чем перейти к построению образующих функций для кривой Кох, обратимся к рис. 13.2, где представлены четыре стадии этой кривой. Каждая стадия кривой не является, конечно, самоподобной фигурой в строгом смысле. Но можно заметить, что уже для четвертой стадии уменьшенная в 3 раза целая фигура мало отличается от каждой из образующих ее четырех частей. Ясно, что в пределе, т. е. для истинной кривой Кох, можно говорить об их совпадении.

Поэтому левая часть может быть получена как уменьшенная в три раза копия целой кривой. Правая часть — сдвиг полученной копии по оси x на величину $2/3$. Левая боковая часть строится поворотом копии на 60° и сдвигом

по оси x на $1/3$. Правая боковая часть получается поворотом на -60° , сдвигом по оси x на $1/2$ и по оси y на величину $\sqrt{3}/2$.

Выражения для функций $w_i(x, y)$, входящие в оператор Хатчинсона W из уравнения (14.1), принимают вид

$$w_1(x, y) = \left(\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y\right), \quad w_2(x, y) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \frac{1}{3}y\right),$$

$$w_3(x, y) = \left(\frac{1}{6}x - \frac{\sqrt{3}}{6}y + \frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{1}{6}y\right),$$

$$w_4(x, y) = \left(\frac{1}{6}x + \frac{\sqrt{3}}{6}y + \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{1}{6}y + \frac{\sqrt{3}}{6}\right).$$

14.3. Уравнение для решета Серпинского. В качестве исходного объекта возьмем прямоугольный треугольник с катетами единичной длины. На рис. 14.1 представлены

две стадии построения клиновидной кривой P . Определим функции $w_i(x, y)$ ($i = 1, 2, 3$):

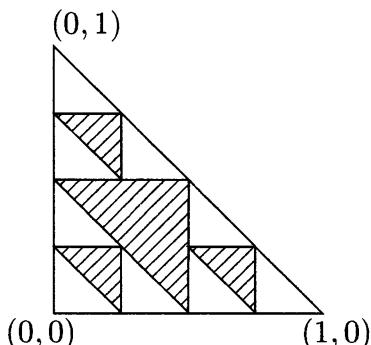


Рис. 14.1

$$w_1(x, y) = \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right),$$

$$w_2(x, y) = w_1(x, y) + \left(\frac{1}{2}, 0\right),$$

$$w_3(x, y) = w_1(x, y) + \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

По построению кривая P может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} P = & \{(x, y) : x = (0.a_1a_2\dots), y = \\ & = (0.b_1b_2\dots)\}, \end{aligned}$$

где в двоичном разложении координат a_k, b_k не могут одновременно быть единицы. Очевидно, что множество P явля-

ется объединением трех множеств P_i ($i = 1, 2, 3$) :

$$P_1 = \{(x, y) : x = (0.0a_2a_3\dots), y = (0.0b_2b_3\dots)\};$$

$$P_2 = \{(x, y) : x = (0.1a_2a_3\dots), y = (0.0b_2b_3\dots)\};$$

$$P_3 = \{(x, y) : x = (0.0a_2a_3\dots), y = (0.1b_2b_3\dots)\}.$$

Покажем, что $w_i(P) \subseteq P_i$. Действительно, если $z = (0.a_1a_2\dots, 0.b_1b_2\dots) \in P$, то

$$w_1(z) = \frac{1}{2}z = (0.0a_1a_2\dots, 0.0b_1b_2\dots) \in P_1.$$

Обратно, пусть $u = (0.0a_2a_3\dots, 0.0b_2b_3\dots) \in P_1$, тогда, взяв $z = (0.a_2a_3\dots, 0.b_2b_3\dots)$, имеем $w_1(z) = u$.

Таким образом, установлено, что $w_1(P) = P_1$. Аналогично рассматриваются случаи $i = 2, 3$. Тем самым установлено, что для решета Серпинского оператор Хатчинсона имеет вид

$$W(A) = w_1(A) \cup w_2(A) \cup w_3(A).$$

§ 15. Итерационная аппроксимация фракталов

15.1. Свойство сжимаемости оператора Хатчинсона в метрике Хаусдорфа. Напомним определение метрики Хаусдорфа между двумя множествами некоторого исходного метрического пространства X .

Определим сначала полноту открытие между множествами A и B как величину

$$\beta(A, B) = \sup_{x \in A} \rho(x, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \rho(x, y).$$

Как видно из рис. 15.1, полуотклонение не обладает свойством симметричности. Полуотклонение может быть записано также в более наглядной эквивалентной форме

$$\beta(A, B) = \inf\{\varepsilon: A \subset B_\varepsilon\}, \quad B_\varepsilon = \{x \in X: \rho(x, B) < \varepsilon\}.$$

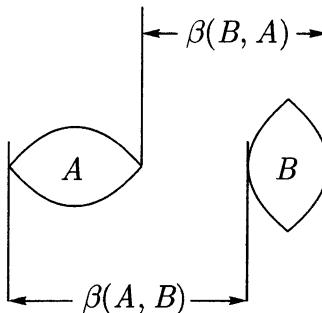


Рис. 15.1

Определение 15.1. Пусть A и B — множества метрического пространства X с метрикой ρ между его элементами. Величина

$$h(A, B) = \max\{\beta(A, B), \beta(B, A)\}$$

называется метрикой Хаусдорфа.

Определение 15.2. Пусть F — некоторое отображение из X в X . Если для любых $x, y \in X$ $\rho(F(x), F(y)) \leq \alpha \rho(x, y)$, то говорят, что F удовлетворяет условию Липшица (обозначим этот класс через $\text{Lip } \alpha$).

Лемма 15.1. Если $F \in \text{Lip } \alpha$, то $h(F(A), F(B)) \leq \alpha h(A, B)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Действительно, исходя из определения метрики Хаусдорфа, имеем

$$\begin{aligned} h(F(A), F(B)) &= \max\{\beta(F(A), F(B)), \beta(F(B), F(A))\} = \\ &= \max\{\sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \rho(F(x), F(y)), \sup_{y \in B} \inf_{x \in A} \rho(F(x), F(y))\} \leqslant \\ &\leqslant \max\{\alpha \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \rho(x, y), \alpha \sup_{y \in B} \inf_{x \in A} \rho(x, y)\} = \alpha h(A, B). \end{aligned}$$

Лемма 15.2. Пусть $\cup_{i=1}^n A_i, \cup_{i=1}^n B_i$ — ограниченные множества. Справедливо соотношение

$$h(\cup_{i=1}^n A_i, \cup_{i=1}^n B_i) \leqslant \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} h(A_i, B_i). \quad (15.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть для определенности

$$h(\cup_{i=1}^n A_i, \cup_{i=1}^n B_i) = \beta(\cup_{i=1}^n A_i, \cup_{i=1}^n B_i).$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} h(\cup_{i=1}^n A_i, \cup_{i=1}^n B_i) &= \sup_{x \in \cup_{i=1}^n A_i} \inf_{y \in \cup_{i=1}^n B_i} \rho(x, y) = \\ &= \sup_{x \in A_{i_0}} \inf_{y \in B_{j_0}} \rho(x, y) \leqslant \sup_{x \in A_{i_0}} \inf_{y \in B_{i_0}} \rho(x, y) = \\ &= \beta(A_{i_0}, B_{i_0}) \leqslant h(A_{i_0}, B_{i_0}) \leqslant \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} h(A_i, B_i). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 15.1. Соотношение (15.1) справедливо и для счетной совокупности множеств.

Из установленных лемм вытекает

Теорема 15.1. *Если для оператора Хатчинсона $W = \cup_{i=1}^n w_i$, каждое отображение $w_i \in \text{Lip } r_i$, то*

$$h(W(A), W(B)) \leq rh(A, B), \quad r = \max_{1 \leq i \leq n} r_i,$$

т. е. $W \in \text{Lip } r$ относительно хаусдорфовой метрики. В частности, если w_i — сжимающее отображение, т. е. $r_i < 1$, то оператор W — сжимающий в метрике Хаусдорфа.

15.2. Метод последовательных приближений. Сначала сформулируем хорошо известную теорему Банаха для сжимающих отображений.

Теорема 15.2 (Прицип сжимающих отображений). *Пусть X — полное метрическое пространство, $S: X \rightarrow X$ — сжимающее отображение, т. е. для некоторого $r < 1$*

$$\rho(S(x), S(y)) \leq r\rho(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Тогда:

- 1) существует единственное решение x^* уравнения $x = S(x)$;
- 2) для любого $x^0 \in X$ метод последовательных приближений $x^{k+1} = S(x^k)$ сходится к решению x^* при $k \rightarrow \infty$;
- 3) справедлива оценка

$$\rho(x^*, x^k) \leq \frac{r^k}{1-r} \rho(x^0, S(x^0)). \quad (15.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Для любых целых k, p имеем неравенства

$$\begin{aligned} \rho(x^k, x^{k+p}) &\leq \rho(x^k, x^{k+1}) + \rho(x^{k+1}, x^{k+2}) + \cdots + \\ &+ \rho(x^{k+p-1}, x^{k+p}) \leq r^k \rho(x^0, x^1) + r^{k+1} \rho(x^0, x^1) + \cdots + \\ &+ r^{k+p-1} \rho(x^0, x^1) \leq r^k (1 + r + \cdots + r^{k+p-1}) \rho(x^0, x^1) \leq \\ &\leq r^k \frac{1}{1-r} \rho(x^0, S(x^0)). \end{aligned}$$

Так как правая часть стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$, то последовательность фундаментальна. Поэтому x^k сходится к некоторому элементу $x^* \in X$. Переходя к пределу при $p \rightarrow \infty$, получаем оценку (15.2).

Теорема 15.3. Пусть X — полное метрическое пространство с метрикой ρ и $W = \cup_{i=1}^n w_i$ — оператор Хатчинсона, где $w_i : 2^X \rightarrow 2^X$ — сжимающие отображения с константой $r_i < 1$.

Тогда для любого ограниченного замкнутого множества итерационный процесс

$$A^{k+1} = W(A^k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (15.3)$$

сходится к единственному компактному множеству K , которое является решением уравнения $A = W(A)$, причем справедлива оценка (15.2) с метрикой Хаусдорфа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Известно, что множество всех замкнутых подмножеств полного метрического пространства с метрикой Хаусдорфа образует полное метрическое пространство, в котором мно-

жество всех компактных подмножеств является замкнутым подмножеством.

По теореме 15.1 W — сжимающее отображение в метрике Хаусдорфа. По теореме 15.2 для любого замкнутого множества A имеет место сходимость к некоторому множеству A^* , т. е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h(A^k, A^*) = 0,$$

причем справедлива оценка

$$h(A^k, A^*) \leq \frac{r^k}{1-r} h(A^0, W(A^0)), \quad r = \max_{1 \leq i \leq n} r_i.$$

Так как в качестве A^0 можно взять компактное множество, а непрерывное отображение переводит компактное множество в компактное, то A^* — компактно.

ЗАМЕЧАНИЕ 15.2. В предыдущем параграфе были получены уравнения с оператором Хатчинсона для некоторых фракталов. Очевидно, что все входящие в них отображения w_i — сжимающие, поэтому для аппроксимации фракталов (с любой точностью) применим итерационный процесс (15.3). Обратим также внимание на то, что все w_i в упомянутых примерах являются аффинными преобразованиями, которые в общем случае представимы в форме

$$w_i(x) = A_i x + b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где $A_i : X \rightarrow X$ — линейный ограниченный оператор (в примерах это матрица), X — линейное нормированное пространство, b_i — фиксированный элемент из X , а коэффициент сжатия r_i совпадает с нормой оператора A_i , поскольку

$$r_i = \sup_{x \neq y} \frac{\|w_i(x) - w_i(y)\|}{\|x - y\|} = \|A_i\|.$$

Таким образом, на трех примерах (множества Кантона, Кох, Серпинского) показано, что конструктивные фракталы допускают не только простое геометрическое построение, но и численное восстановление с помощью рекуррентной формулы (15.3). При этом в качестве начального приближения A^0 может быть взято любое подмножество исходного пространства.

§ 16. Проблема сжатия информации

16.1. Общий формализм. Предположим, что имеется некоторый объект x^0 , для которого требуется большой объем машинной памяти для его хранения. Из результатов предыдущего параграфа следует, что если известен сжимающий оператор S , для которого x^0 является неподвижной точкой и для задания S нужен сравнительно небольшой объем памяти, то целесообразно хранить этот оператор, а объект x^0 восстанавливать в процессе счета методом последовательных приближений.

Однако построение такого оператора для заданного x^0 весьма непростая, а в некоторых случаях неразрешимая задача. В этой ситуации естественно изменить постановку задачи и попытаться построить близкий к упомянутому оператору, неподвижная точка которого не совпадает с x^0 , но аппроксимирует x^0 с нужной точностью.

Теоретическая возможность построения такого оператора вытекает из следующей теоремы.

Теорема 16.1. *Пусть X – метрическое пространство и $S : X \rightarrow X$ – сжимающий оператор с константой $r < 1$, который удовлетворяет условию*

$$\rho(x^0, S(x^0)) < \varepsilon(1 - r).$$

Тогда для любого $y \in X$ найдется такой номер N , что при $k \geq N$

$$\rho(S^k(y), x^0) < \varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Используя неравенство треугольника и условия теоремы, имеем

$$\begin{aligned} \rho(x^0, S^k(y)) &\leq \rho(x^0, S^k(x^0)) + \rho(S^k(x^0), S^k(y)) \leq \\ &\leq \rho(x^0, S(x^0)) + \rho(S(x^0), S^2(x^0)) + \cdots + \rho(S^{k-1}(x^0), S^k(x^0)) + \\ &+ r\rho(S^{k-1}(x^0), S^{k-1}(y)) \leq \rho(x^0, S(x^0))(1 + r + \cdots + r^{k-1}) + \\ &+ r^k\rho(x^0, y) \leq \frac{\rho(x^0, S(x^0))}{1-r} + r^k\rho(x^0, y) < \varepsilon + r^k\rho(x^0, y), \end{aligned}$$

откуда следует требуемая оценка.

Обратимся теперь к оценке (15.2). Если положить в ней $k = 0$, то приходим к неравенству Барнсли

$$\rho(x^*, x^0) \leq \frac{1}{1-r}\rho(x^0, S(x^0)), \quad (16.1)$$

которое показывает, что аппроксимация интересующего нас элемента x^0 неподвижной точкой x^* оператора S , вообще говоря, тем лучше, чем меньше величина $\rho(x^0, S(x^0))$.

Таким образом, чтобы восстановить интересующий нас элемент x^0 с точностью ε последовательностью итераций $S^k(y)$, необходимо:

- 1) построить сжимающий оператор S , удовлетворяющий неравенству $\rho(x^0, S(x^0)) < \varepsilon(1-r)$;
- 2) для заданного начального приближения y найти номер k , для которого выполнено неравенство

$$r^k\rho(x^0, y) + \frac{\rho(x^0, S(x^0))}{1-r} < \varepsilon.$$

16.2. Случай множеств. Из результатов предыдущего пункта следует, что точность восстановления элемента x^0 фактически зависит от величины $\rho(x^0, S(x^0))$, поэтому желательно строить оператор S , который минимизирует эту величину для фиксированного элемента x^0 :

$$\min\{\rho(x^0, S(x^0)) : S \in \mathcal{F}\}. \quad (16.2)$$

Если речь идет об аппроксимации множеств (фракталов), то подлежит минимизации функционал

$$f(A) = h(B^0, W(B^0)) \rightarrow \min_W,$$

где $W(B^0) = \cup_{i=1}^n w_i(B^0)$, B^0 — фиксированное множество. Обычно ограничиваются рассмотрением оператора W из класса афинных отображений, т. е. $w_i(\cdot) = A_i(\cdot) + b_i$.

Поскольку нахождение точного решения задачи минимизации весьма затруднительно, естественно ограничиться нахождением поправки $\Delta W = \cup_{i=1}^n [\Delta A_i(\cdot) + \Delta b_i]$, которая задает направление убывания функционала $f(A)$, т. е.

$$f(W + \lambda \Delta W) < f(W). \quad (16.3)$$

Достаточные условия, которым должна удовлетворять поправка ΔW оператора W , чтобы выполнялось неравенство (16.3), описаны, например, в книге В. И. Бердышева и Л. В. Петрак [5] (см. § 3.2 главы 2).

16.3. Случай функции. Когда обсуждают проблему сжатия информации, то обычно имеют в виду цифровую информацию, касающуюся некоторого изображения. Математической моделью черно-белого изображения может служить функция $z = f(x, y)$, заданная на прямоугольнике $\Pi \in R^2$, значение которой выражает глубину (оттенок)

серого в точке (x, y) . Функцию можно считать масштабированной так, что $0 \leq f(x, y) \leq 1$. Предположим также, что $f(x, y)$ — элемент некоторого нормированного пространства: например, $X = L_2(\Pi)$.

Пусть $\{D_i\}$ — некоторая совокупность подобластей, называемых *домами*, из исходного множества Π .

Предположим, что, наряду с выделенным набором областей $D_j \subset \Pi$, прямоугольник Π разбит на *регионы* R_i (например прямоугольники) таким образом, что

$$\Pi = \bigcup_{i=1}^n R_i, \mu(R_i \cap R_j) = 0 \quad (i \neq j), \text{ где } \mu \text{ — мера Лебега.}$$

Пусть для каждого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ указан номер $j(i)$ и взаимно-однозначное отображение $\nu_i: D_{j(i)} \rightarrow R_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), которое задается формулой

$$\nu_i : t \rightarrow q \quad q = (q_1, q_2) \in R_i, \quad t = (t_1, t_2) \in D_{j(i)},$$

$$q_k = \alpha_{k1}^i t_1 + \alpha_{k2}^i t_2 + \beta_k^i, \quad k = 1, 2, \quad (16.4)$$

где верхний индекс $i = 1, 2, \dots, n$ означает номер региона.

Теперь определим отображение S на каждом из регионов R_i по формуле

$$f \rightarrow S(f), \quad S(f)|_{R_i}(q) = a_i f(\nu_i^{-1}(q)) + b_i \quad (16.5)$$

$$(q \in R_i, \quad i = 1, 2, \dots, n),$$

где a_i, b_i — найденные из некоторых соображений коэффициенты. Формулу (16.4) можно также интерпретировать следующим образом. Оператор S имеет представление $S(f)(q) = \bigcup_{i=1}^n w_i(f)(q)$, где w_i — отображения, действующие на функции f , которые определены на множестве $D_{j(i)}$ формулой (16.5).

Поскольку качество аппроксимации зависит от близости элементов f и $S(f)$, то естественно выбирать коэффициенты a_i, b_i из условия

$$\begin{aligned} & \|[f(q) - a_i f(\nu_i^{-1}(q)) - b_i]\|_{R_i}^2 = \\ & = \inf_{\alpha, \beta} \|[f(q) - \alpha f(\nu_i^{-1}(q)) - \beta_i]\|_{R_i}^2 \quad (16.6) \end{aligned}$$

Из следующих соотношений

$$\begin{aligned} \|S(f) - S(\tilde{f})\|_{L_2(\Pi)}^2 &= \int_{\Pi} |S(f)(q) - S(\tilde{f})(q)|^2 dq = \\ &= \sum_{i=1}^n a_i^2 \int_{R_i} |f(\nu_i^{-1}(q)) - \tilde{f}(\nu_i^{-1}(q))|^2 dq = \\ &= \sum_{i=1}^n a_i^2 \int_{D_j(i)} |f(t) - \tilde{f}(t)|^2 I_i dt \leq \int_{\Pi} |f(t) - \tilde{f}(t)|^2 dt \sum_{i=1}^n |a_i|^2 I_i, \end{aligned}$$

где $I_i = a_{11}^i a_{22}^i - \alpha_{12}^i \alpha_{21}^i$, получаем достаточное условие для сжимаемости оператора S :

$$\sum_{i=1}^n |a_i|^2 I_i < 1.$$

Если вместо $L_2(\Pi)$ привлечь пространство $C(\Pi)$ с нормой

$$\|f\| = \sup\{|f(t)| : t \in \Pi\},$$

то, поскольку имеем оценку

$$\begin{aligned} \|S(f) - S(\tilde{f})\|_{C(\Pi)} &= \max_i |a_i| \sup_{q \in R_i} |f(\nu_i^{-1}(q)) - \tilde{f}(\nu_i^{-1}(q))| \leq \\ &\leq \max_i |a_i| \|f - \tilde{f}\|_{C(\Pi)}, \end{aligned}$$

условие сжимаемости базового оператора принимает вид

$$\max\{|a_i| : i = 1, 2, \dots, n\} < 1.$$

Наилучшие значения параметров a_i, b_i при заданных функциях $\nu_{j(i)}$ определяются из решения задачи (16.6). Задачу нахождения подходящего индекса $j(i)$ для отображения $\nu_{j(i)}(t_1, t_2) : D_j \rightarrow R_i$, задаваемого формулой (16.4), можно осуществить в два этапа: сначала для каждой пары (j, i) , $j = 1, 2, \dots, l$, $i = 1, 2, \dots, n$, находится величина

$$\varepsilon_{ij} = \inf_{\nu_{ji}: D_j \rightarrow R_i} \inf_{a, b} \|[f(q) - af(\nu_{ij}^{-1}(q)) - b]|_{R_i}\|^2,$$

а затем находится номер $j(i)$, для которого реализуется

$$\min\{\varepsilon_{ij} : j = 1, 2, \dots, l\}.$$

Итак, для реализации описанной процедуры необходимо:

- 1) выбрать набор домен D_j ($j = 1, 2, \dots, l$) в заданной области Π ;
- 2) разбить область Π на конечное число регионов R_i ($i = 1, 2, \dots, n$);
- 3) для каждого региона R_i выбрать подходящий домен $D_{j(i)}$;
- 4) определить отображение $\nu_i : D_{j(i)} \rightarrow R_i$ вида (16.4);
- 5) построить отображение $S : X \rightarrow X$ так, чтобы S было сжимающим в пространстве X и неподвижная точка S была близка к исходной функции (изображению) $f(x, y)$.

16.4. Численный пример. Фрактальное сжатие черно-белого изображения «Лена» выступает часто как тестовый пример, на котором проверяется качество предлагаемой методики. Это изображение (см. рис. 16.1) состоит из 256×256 графических элементов (пикселей) с глубиной



Рис. 16.1

цвета 8 бит на точку (256 оттенков серого, поскольку $255 = 1111111 = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^7$).

Таким образом, исходное изображение требует $8 \cdot 256 \cdot 256 / 8 = 65536$ байт памяти (1 байт = 8 бит).

В качестве регионов были выбраны 1024 непересекающихся квадратов $R_1, R_2, \dots, R_{1024}$ размером 8×8 точек. Коллекция доменов $D = \{D_j\}$ состояла из всевозможных квадратов размером 16×16 точек. Их общее количество составляет $241 \times 241 = 58\,081$.

В соответствии с описанной в предыдущем пункте процедурой для каждого региона находится домен $D_{j(i)}$ и определяются отображения ν_i (формула (16.4)) и параметры a_i, b_i . Тем самым строится базовый оператор

$$S(f)(q)|_{R_i} = a_i f(\nu_i^{-1}(q)) + b_i.$$

С помощью оператора S генерируется итерационный процесс $f^{k+1} = S(f^k)$, где в качестве начального приближения f^0 выбиралось равномерно серое изображение. На рис. 16.2 представлены начальное приближение, 1, 2 и 10-я итерации [30].



Рис. 16.2

Поскольку отображение ν_i задается шестью параметрами $\alpha_{k1}^i, \alpha_{k2}^i, \beta_k^i$ ($k = 1, 2$), то нужно хранить восемь параметров для каждого номера i ($i = 1, 2, \dots, 1024$). Задание восьми параметров требует 31 бит памяти (см. [30]), поэтому всего нужно $1024 \cdot 31/8 = 3968$ байт. Коэффициент сжатия составляет $k = 65536/3968 = 16.5$.

Этот параграф написан на основе материала, почерпнутого из монографии В. И. Бердышева и Л. В. Петрак [5] и книги Х. Пейтгена, Х. Юргена, Д. Соупа [30].

ГЛАВА 3

Непрерывные динамические системы

С точки зрения математики в нелинейных динамических системах с числом степеней свободы больше 2 (особенно во многих биологических, метеорологических и экономических моделях) можно обнаружить хаос, и, следовательно, на достаточно больших временах их поведение становится непредсказуемым.

Г. Шустер

§ 17. Модели динамических процессов

Стандартными моделями динамических процессов с непрерывным временем являются дифференциальные уравнения. Впервые появившиеся в задачах механики, они в настоящее время широко используются и в других областях при моделировании различных процессов.

17.1. Одномерная модель динамики популяции. Простейшей моделью динамики популяции с непрерывно меняющимся временем является дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = \alpha x - \beta x - \gamma x^2. \quad (17.1)$$

Здесь $x(t)$ — численность популяции в момент времени t , $\alpha > 0$ — коэффициент рождаемости, $\beta > 0$ — коэффициент смертности, вызванной старением организма, $\gamma > 0$ — коэффициент смертности, связанный с ограниченностью ресурса. Для заданного $x(0) = x_0$ (значения численности популяции в начальный момент времени $t = 0$) решение этого уравнения можно найти аналитически.

При $a \neq 0$

$$x(t) = \frac{ae^{at}}{\gamma(e^{at} - 1) + \frac{a}{x_0}},$$

при $a = 0$

$$x(t) = \frac{1}{\gamma t + \frac{1}{x_0}}.$$

Здесь динамика численности определяется коэффициентом естественного прироста $a = \alpha - \beta$.

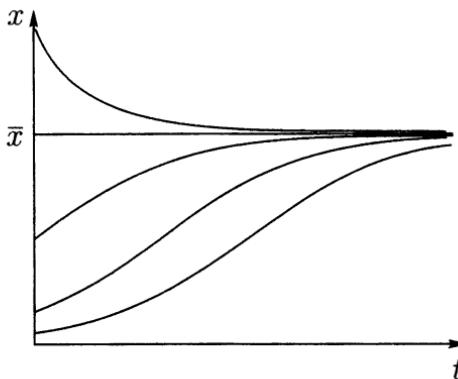
При $a > 0$ численность популяции $x(t)$, независимо от начального значения x_0 , при $t \rightarrow \infty$ стремится к стационарному значению (см. рис.17.1)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x} = \frac{a}{\gamma} > 0.$$

В случае $a \leq 0$ численность популяции стремится к нулю, популяция вымирает.

17.2. Модель «хищник – жертва». Классической моделью динамики двух взаимодействующих популяций является модель Лотке – Вольтерра, задаваемая системой двух дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha x - \beta xy, & \alpha > 0, \beta \geq 0, \\ \dot{y} &= -\gamma y + \delta xy, & \gamma > 0, \delta \geq 0. \end{aligned} \tag{17.2}$$

Рис. 17.1. Динамика решений уравнения (17.1) при $\alpha > \beta$

Здесь $x(t)$ — численность жертв, $y(t)$ — численность хищников. В условиях изоляции ($\beta = \delta = 0$) численность жертв $x(t) = e^{\alpha t}x_0$ экспоненциально возрастает, а численность хищников $y(t) = e^{-\gamma t}y_0$ экспоненциально убывает. При взаимодействии ($\beta > 0$, $\delta > 0$) в системе может наблюдаться равновесное состояние, отвечающее стационарному решению $x(t) \equiv \bar{x} = \frac{\gamma}{\delta}$, $y(t) \equiv \bar{y} = \frac{\alpha}{\beta}$. Отклонение от равновесия ведет к колебательному решению (см. рис. 17.2).

17.3. Линейный осциллятор. Движение бруска, связанного с пружиной при наличии трения, задается дифференциальным уравнением второго порядка

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + lx = 0.$$

Здесь $x(t)$ — отклонение от положения равновесия, m — масса бруска, k — коэффициент трения, l — коэффициент жесткости пружины. Будем далее считать, что $m = 1$.

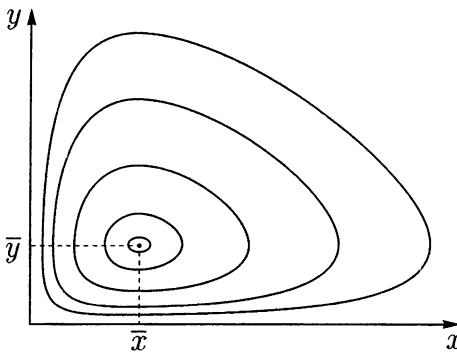


Рис. 17.2. Периодические решения в модели «хищник – жертва»

От уравнения перейдем к системе

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -lx - ky.\end{aligned}\tag{17.3}$$

В отсутствие трения ($k = 0$) брусок совершает гармонические колебания по закону

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{y_0}{\omega} \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{l},$$

где $x_0 = x(0)$, $y_0 = \dot{x}(0)$ — начальные положение и скорость, а ω — частота колебаний (рис. 17.3, а).

Слабое трение ($0 < k < 2\omega$) ведет к затуханию колебаний (рис. 17.3, б). Действительно, в этом случае решение имеет вид

$$x(t) = \left(x_0 \cos \omega_1 t + \frac{2y_0 + x_0 k}{2\omega_1} \sin \omega_1 t \right) e^{-\frac{k}{2}t}, \quad \omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \frac{k^2}{4}},$$

и, следовательно, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

При сильном трении ($k > 2\omega$) система стремится к положению равновесия без колебаний (рис. 17.3, в).

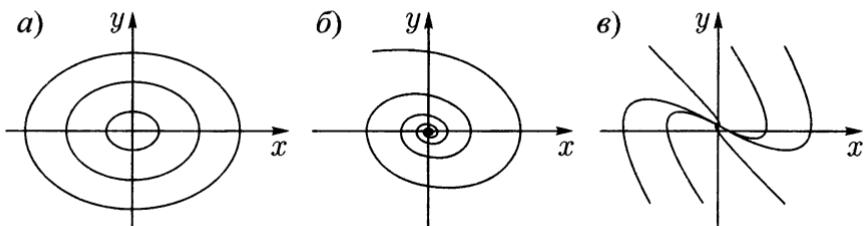


Рис. 17.3. Линейный осциллятор: *a* — отсутствие трения ($k = 0$); *б* — слабое трение ($0 < k < 2\omega$); *в* — сильное трение ($k > 2\omega$)

17.4. Электронный осциллятор. Уравнение Ван-дер-Поля. Классической моделью электронного генератора является предложенное Ван-дер-Полем дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + x = \delta(1 - x^2)\dot{x}.$$

Перепишем его в виде системы

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + \delta(1 - x^2)y.\end{aligned}\tag{17.4}$$

При $\delta > 0$ траектории системы с ростом t стремятся к некоторой замкнутой кривой — предельному циклу (рис. 17.4).

В результате в системе поддерживаются колебания фиксированной частоты и амплитуды (автоколебания).

17.5. Химический осциллятор (брюсселятор). Изучая неравновесные химические процессы, Тьюринг (1952), Пригожин и Лефевр (1976) предложили и исследовали систему

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 1 - (b + 1)x + ax^2y, \quad a > 0, \quad b > 0 \\ \dot{y} &= bx - ax^2y.\end{aligned}\tag{17.5}$$

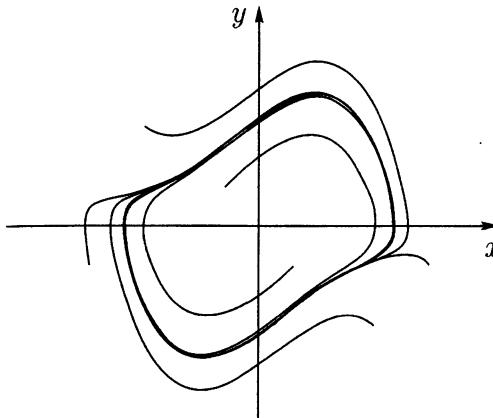


Рис. 17.4. Предельный цикл уравнения Ван-дер-Поля при $\delta = 1$

Данная модель, получившая название брюсселятора, подобно уравнению Ван-дер-Поля, имеет устойчивые периодические режимы (рис. 17.5).

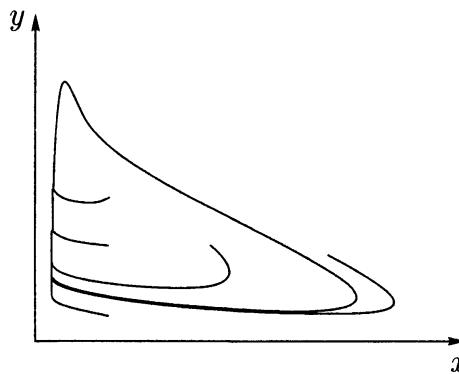


Рис. 17.5. Предельный цикл брюсселятора ($a = 0.2$, $b = 1.065$)

17.6. Хаотический осциллятор. Модель Лоренца. В 1962 году Лоренц, специалист по физике атмосферы, предложил простую модель тепловой конвекции

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz.\end{aligned}\tag{17.6}$$

Прямое компьютерное моделирование этой системы при $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$, $r = 28$ показало сложное нерегулярное поведение ее решений (рис. 17.6).

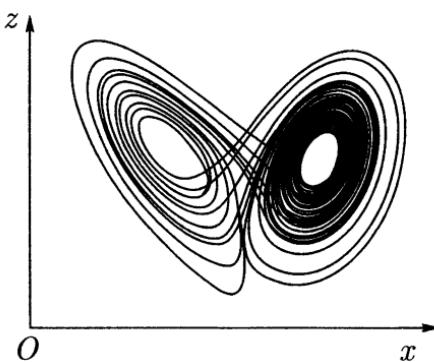


Рис. 17.6. Хаотический аттрактор системы Лоренца в проекции на плоскость xOz

Система Лоренца стала классической моделью хаотической динамики.

17.7. Модель Ресслера. Следующая система, предложенная Ресслером (1976), является хорошей моделью, де-

монстрирующей периодическое и хаотическое поведение

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -(y + z) \\ \dot{y} &= x + \alpha y \\ \dot{z} &= \alpha + z(x - \mu).\end{aligned}\tag{17.7}$$

§ 18. Фазовый портрет системы дифференциальных уравнений и его свойства

18.1. Основные понятия. В предыдущем параграфе представлены модели, задаваемые одно-, двух- и трехмерными системами дифференциальных уравнений. В общем n -мерном случае автономная система дифференциальных уравнений задается следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\dots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n).\end{aligned}$$

Ее векторная запись имеет вид

$$\dot{x} = f(x),\tag{18.1}$$

где

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}.$$

Пусть $X \subset R^n$ — область определения функции $f(x)$. Предполагается, что при любых $x^{(0)}$ из X дифференциальное уравнение (18.1) имеет решение $x = \varphi(t, x^{(0)})$, определенное для всех $t \geq 0$, с начальным условием $x(0) = x^{(0)}$. Подробное геометрическое изображение решения $x(t)$ с помощью графика — интегральной кривой — требует $(n+1)$ -мерного пространства переменных t, x_1, \dots, x_n . Если при $n = 1$ интегральные кривые располагаются на плоскости t, x_1 и их изображение не вызывает особых затруднений, то уже при $n = 2$ соответствующие интегральные кривые лежат в трехмерном пространстве t, x_1, x_2 , что резко усложняет их наглядное представление. Для сокращения размерности можно пожертвовать переменной t , оставив только так называемые фазовые переменные x_1, x_2, \dots, x_n , составляющие n -мерное фазовое пространство. При $n = 2$ фазовое пространство двумерно и называется фазовой плоскостью. Проекция интегральной кривой $x(t)$ на фазовое пространство называется фазовой кривой, или фазовой траекторией. Множество фазовых кривых, отвечающих различным начальным данным, называется фазовым портретом системы. Во многих случаях фазовый портрет позволяет получить достаточно наглядное представление о динамике системы.

В каждой точке x фазового пространства системы (18.1) вектор $f(x)$ есть вектор скорости движения системы вдоль фазовой кривой, проходящей через эту точку. Вектор $f(x)$ указывает направление касательной к соответствующей фазовой кривой. Множество точек фазового пространства с указанными в них направлениями составляют поле направлений системы (18.1). Поле направлений позволяет построить, хотя бы приближенно, фазовый портрет исследуемой системы. Для этого линии, изображающие фазовые кривые, следует провести так, чтобы в каждой своей

точке они имели касательную, совпадающую с полем направлений.

Определение 18.1. Решение $\bar{x}(t)$ системы (18.1) называется устойчивым по Ляпунову, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall t \geq 0 \ \forall x^{(0)}$$

$$\|\bar{x}(0) - x^{(0)}\| < \delta \Rightarrow \|\bar{x}(t) - \varphi(t, x^{(0)})\| < \varepsilon.$$

В противном случае решение $\bar{x}(t)$ называется неустойчивым.

Определение 18.2. Решение $\bar{x}(t)$ системы (18.1) называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и

$$\exists \delta > 0 : \ \forall x^{(0)} \ \|\bar{x}(0) - x^{(0)}\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\bar{x}(t) - \varphi(t, x^{(0)})\| = 0.$$

Определение 18.3. Решение $\bar{x}(t)$ системы (18.1) называется экспоненциально устойчивым, если

$$\exists \alpha > 0 \ \exists K > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall t \geq 0 \ \forall x^{(0)}$$

$$\|\bar{x}(0) - x^{(0)}\| < \delta \Rightarrow \|\bar{x}(t) - \varphi(t, x^{(0)})\| \leq K e^{-\alpha t} \|\bar{x}(t) - x^{(0)}\|.$$

Определение 18.4. Множество $M \subset X$ называется инвариантным системы (18.1), если

$$\forall x^{(0)} \in M \ \forall t \geq 0 \ \varphi(t, x^{(0)}) \in M.$$

Если $x^{(0)} \in M$, то во все последующие моменты времени $\varphi(t, x^{(0)}) \in M$. Простейшим примером инвариантного множества является точка покоя.

Определение 18.5. Точка $\bar{x} \in X$ называется точкой покоя системы (18.1), если

$$\forall t \geq 0 \quad \varphi(t, \bar{x}) = \bar{x}.$$

Если \bar{x} — точка покоя, то $f(\bar{x}) = 0$. Все точки покоя системы (18.1) находятся из решения системы

$$f(x) = 0. \quad (18.2)$$

Другим примером инвариантного множества является цикл.

Определение 18.6. Пусть $\xi(t)$ является T -периодическим решением системы (18.1): $\xi(t+T) = \xi(t)$. Множество $\Gamma = \{\xi(t) | 0 \leq t < T\}$ называется циклом.

В фазовом пространстве цикл изображается в виде замкнутой кривой. Возьмем в качестве начальной произвольную точку цикла. Можно показать, что фазовая кривая соответствующего решения совпадает с циклом.

Введем функцию $\rho(x, Y) = \inf_{y \in Y} \|x - y\|$, задающую расстояние от фиксированной точки x до множества Y .

Определение 18.7. Компактное инвариантное множество M системы (18.1) называется устойчивым по Ляпунову, если справедливо следующее:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x^{(0)}$$

$$\rho(x^{(0)}, M) < \delta \Rightarrow \rho(\varphi(t, x^{(0)}), M) < \varepsilon.$$

Определение 18.8. Компактное инвариантное множество M системы (18.1) называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и

$$\exists \delta > 0 : \quad \forall x^{(0)} \quad \rho(x^{(0)}, M) < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(\varphi(t, x^{(0)}), M) = 0.$$

При этом множество $U = \{x \in X \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(\varphi(t, x), M) = 0\}$ называется областью (бассейном) притяжения инвариантного множества M .

Определение 18.9. Компактное инвариантное множество M системы (18.1) называется экспоненциальноустойчивым, если

$$\exists \alpha > 0 \ \exists K > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall t \geq 0 \ \forall x^{(0)}$$

$$\rho(x^{(0)}, M) < \delta \Rightarrow \rho(\varphi(t, x^{(0)}), M) \leq K e^{-\alpha t} \rho(x^{(0)}, M).$$

18.2. Фазовые портреты линейных систем. Рассмотрим двумерную ($n = 2$) линейную систему

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Пусть λ_1, λ_2 — собственные числа, а h_1, h_2 — линейно независимые собственные векторы матрицы A . По этим данным общее решение системы записывается аналитически

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} h_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} h_2.$$

Здесь возможны следующие случаи [17]:

- а) λ_1, λ_2 — вещественные одного знака. Фазовый портрет — узел (рис. 18.1, а);
- б) λ_1, λ_2 — вещественные разных знаков. Фазовый портрет — седло (рис. 18.1, б);
- в) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ — комплексно сопряженные ($\alpha \neq 0$). Фазовый портрет — фокус (рис. 18.1, в);
- г) $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$ — чисто мнимые. Фазовый портрет — центр (рис. 18.1, г).

При $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} < 0$ движение вдоль фазовых траекторий идет в направлении точки покоя $\bar{x} = 0$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. Точка

покоя $\bar{x} = 0$ — асимптотически устойчива. Тогда говорят, что узел (фокус) является устойчивым.

При $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} > 0$ движение вдоль фазовых траекторий идет по направлению от точки покоя в бесконечность. Точка покоя $\bar{x} = 0$ неустойчива. В этом случае говорят, что узел (фокус) является неустойчивым.

В случае центра $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} = 0$ движение происходит по замкнутым фазовым траекториям вокруг точки покоя. Точка покоя $\bar{x} = 0$ устойчива (но не асимптотически). В случае седла всегда имеется направление, движение по которому идет от точки покоя в бесконечность. Поэтому здесь точка покоя $\bar{x} = 0$ является неустойчивой.

Приведенная здесь детальная классификация фазовых портретов получена на основе аналитического представления для общего решения рассматриваемой линейной системы. Построение точных аналитических решений для нелинейных систем возможно лишь в каких-то частных случаях. В общем случае при исследовании отдельных траекторий и построении фазовых портретов нелинейных дифференциальных уравнений используют численные методы.

18.3. Численные методы решения дифференциальных уравнений. Разобьем временной отрезок $[t_0, t_0+T]$ на N частей узлами $t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_0 + T$ с шагом $h = \frac{T}{N}$: $t_{m+1} = t_m + h$. Пусть $x(t)$ — решение задачи Коши системы дифференциальных уравнений с начальным условием

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Обозначим через x_m приближенное значение для неизвестного точного решения $x(t_m)$ в момент t_m . Для расчета x_m используют различные методы.

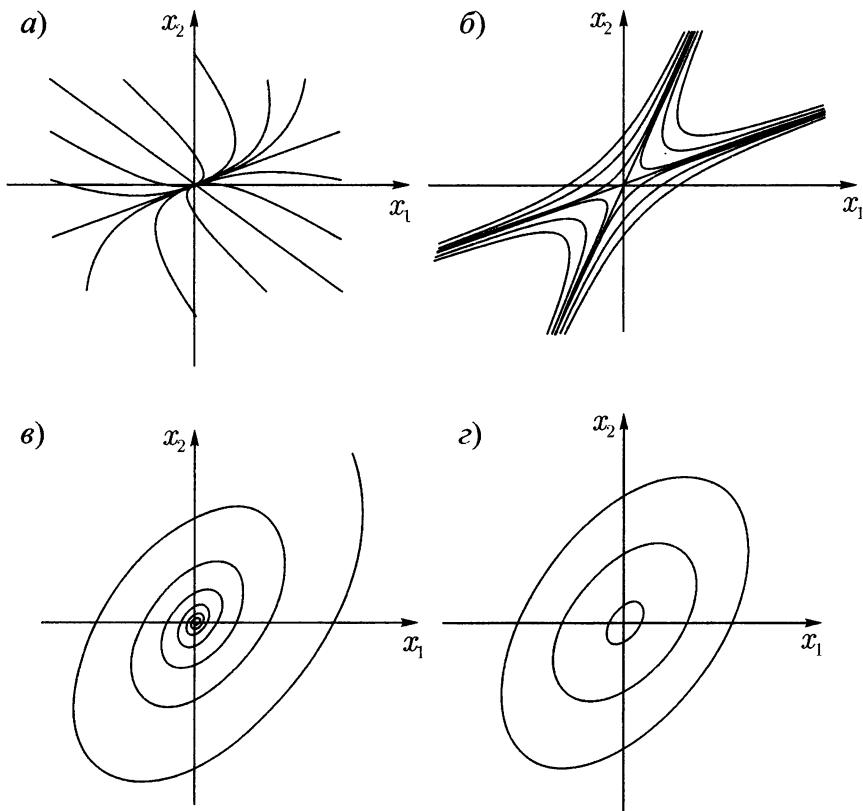


Рис. 18.1. Фазовые портреты линейной системы: а — узел, б — седло, в — фокус, г — центр

Метод Эйлера. Расчет приближенных значений ведется по формуле

$$x_{m+1} = x_m + h f(t_m, x_m).$$

Получаемые приближения имеют погрешности первого порядка: $\|x(t_m) - x_m\| = O(h)$.

Метод Рунге–Кутта. Расчет приближенных значений ведется по формулам:

$$x_{m+1} = x_m + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4);$$

$$K_1 = hf(t_m, x_m), \quad K_2 = hf\left(t_m + \frac{h}{2}, x_m + \frac{K_1}{2}\right),$$

$$K_3 = hf\left(t_m + \frac{h}{2}, x_m + \frac{K_2}{2}\right), \quad K_4 = hf(t_m + h, x_m + K_3).$$

Получаемые по методу Рунге–Кутта приближения имеют погрешности четвертого порядка $\|x(t_m) - x_m\| = O(h^4)$. Вывод формул, анализ их погрешностей, описание других численных методов можно найти в книгах [4], [20].

Упражнения

18.1. Построить поле направлений и фазовые траектории следующих систем:

- а) модель Лотке–Вольтерра (17.2) для $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$; $\alpha = \delta = 1$, $\beta = \gamma = 4$;
- б) линейный осциллятор (17.3) для $l = 1$ при $k = 0$; $k = \pm 0.5$; $k = \pm 1$; $k = \pm 2$;
- в) осциллятор Ван-дер-Поля (17.5) при $\delta = 0$, $\delta = \pm 0.5$, $\delta = \pm 1$, $\delta = \pm 2$;
- г) $\ddot{x} + \sin x = 0$
- д) $\ddot{x} + x - \alpha x^3 = 0$, $\alpha = -1$, $+1$.

18.2. Построить фазовые портреты линейных систем

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}; \quad \begin{cases} \dot{x} = x + 3y \\ \dot{y} = -6x + 5y \end{cases};$$

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}; \quad \begin{cases} \dot{x} = -2x - 5y \\ \dot{y} = 2x + 2y \end{cases}.$$

18.3. Пусть $s = a_{11} + a_{22}$ (след матрицы A), $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ (определитель A). В плоскости параметров (s, Δ) изобразить зоны, соответствующие узлу (устойчивому и неустойчивому), фокусу (устойчивому и неустойчивому), седлу и центру.

18.4. Сравнить фазовые кривые системы (17.2), полученные методами Эйлера и Рунге-Кутта при различных шагах $h = 0.5; 0.1; 0.01; 0.001$.

18.5. Используя методы Эйлера и Рунге-Кутта, построить фазовые портреты систем из задачи 18.1.

18.6. Построить фазовые портреты следующих систем при различных значениях параметров:

- уравнение Хайрера $\ddot{x} + x = \varepsilon \dot{x} - (\dot{x})^3$;
- гликолитический осциллятор

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - xy \\ \dot{y} = py \left(x - \frac{1+q}{q+y} \right); \end{cases}$$

в) осциллятор Ван-дер-Поля (мягкий режим)

$$\ddot{x} + x = \delta(1 - x^2)\dot{x};$$

г) осциллятор Ван-дер-Поля (жесткий режим)

$$\ddot{x} + x = \delta(1 + ax^2 - bx^4)\dot{x}, \quad a = 5, b = 0.5;$$

д) уравнение Дуффинга $\ddot{x} + x + \beta x^3 = 0$;

е) модель «хищник – жертва» с ограниченностью ресурса

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - \alpha y) - \gamma x^2 \\ \dot{y} = y(\beta x - 1) \end{cases};$$

ж) модель «хищник – жертва» с насыщением хищника

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - \gamma x) - \alpha \frac{x}{1+x} y \\ \dot{y} = -y + \beta \frac{x}{1+x} y \end{cases};$$

з) маятник с трением $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \sin x = 0$;

и) брюсселятор

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - (b+1)x + ax^2y, \quad a > 0, \quad b > 0 \\ \dot{y} = bx - ax^2y \end{cases};$$

к) модель Хопфа (мягкий режим)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \mu x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 + \mu x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases};$$

л) модель Хопфа (жесткий режим)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(\mu + 2x_1^2 + 2x_2^2 - (x_1^2 + x_2^2)^2) - x_2 \\ \dot{x}_2 = x_2(\mu + 2x_1^2 + 2x_2^2 - (x_1^2 + x_2^2)^2) + x_1 \end{cases}.$$

18.7. Написать программу динамики множества точек, равномерно распределенных в начальный момент времени в заданном прямоугольнике. Положение каждой точки в последующие моменты времени определяется численно по данной системе дифференциальных уравнений. При помощи этой программы исследовать динамику различных систем в прямом и обратном времени. К каким предельным множествам стягиваются эти точки? Как меняется характер сходимости и форма предельных множеств при изменении параметров динамической системы?

§ 19. Анализ нелинейной системы в окрестности точки покоя

Если для построения фазового портрета нелинейной системы в основном используются лишь численные методы, то при исследовании характерных особенностей вблизи точки покоя возможен общий аналитический подход. Этот подход состоит в отыскании для исследуемой нелинейной системы некоторой близкой линейной, с тем чтобы по результатам анализа последней можно было судить об основных чертах динамики исходной нелинейной системы.

19.1. Система первого приближения. Рассмотрим способ построения линейной системы первого приближения в окрестности точки покоя исходной нелинейной системы. Для наглядности ограничимся сначала случаем двумерной ($n = 2$) системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}. \quad (19.1)$$

Пусть $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ — точка покоя системы (19.1). Это означает, что

$$\begin{cases} f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0 \\ f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0 \end{cases}. \quad (19.2)$$

Разложим в окрестности точки покоя \bar{x} правые части системы (19.1) — функции f_1 и f_2 — в ряды Тейлора:

$$\dot{x}_1 = f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(x_2 - \bar{x}_2) + \dots,$$

$$\dot{x}_2 = f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(x_2 - \bar{x}_2) + \dots$$

Первый член в каждом из этих разложений, благодаря (19.2), равен нулю. Далее идут линейные члены, за ними — слагаемые более высоких порядков, которые вблизи точки покоя существенно меньше линейных.

Отбрасывая эти малые слагаемые и делая замену

$$z_1 = x_1 - \bar{x}_1, z_2 = x_2 - \bar{x}_2,$$

$$a_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2), a_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2),$$

$$a_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2), a_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2),$$

получим линейную систему

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = a_{11}z_1 + a_{12}z_2 \\ \dot{z}_2 = a_{21}z_1 + a_{22}z_2 \end{cases}.$$

Данная система получила название системы первого приближения для исходной нелинейной системы в окрестности точки покоя. Системы первого приближения играют весьма важную роль в исследовании нелинейных систем. Как правило (если не рассматривать особые вырожденные случаи), общий характер фазового портрета нелинейной системы вблизи точки покоя совпадает с фазовым портретом соответствующей системы первого приближения. Тип фазового портрета системы первого приближения, благодаря ее линейности, определяется достаточно просто — аналитически (см. §18.2). Примеры анализа некоторых двумерных нелинейных систем по системам первого приближения даются в §19.3.

В случае общей n -мерной системы (18.1) в окрестности точки покоя \bar{x} замена $x = \bar{x} + z$ ($\|z\|$ — мало) и разложение

Тейлора приводят к равенствам

$$\dot{x} = \dot{\bar{x}} + \dot{z} = f(\bar{x} + z) = f(\bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x})z + \dots$$

Отбрасывая нелинейные члены с учетом равенств $\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}) = 0$, получим для малых отклонений $z = x - \bar{x}$ состояния x от положения равновесия \bar{x} линейную систему первого приближения

$$\dot{z} = Az, \quad A = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}). \quad (19.3)$$

19.2. Устойчивость точки покоя. Исследование устойчивости начнем с линейной системы (19.3). Для этой системы точкой покоя является вектор $\bar{z} = 0$. Анализ общего решения системы (19.3) позволяет получить (см. об этом [9]) следующие критерии.

Теорема 19.1. Для того, чтобы точка покоя $\bar{z} = 0$ системы (19.3) была устойчивой по Ляпунову, необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения λ_i ($i = 1, \dots, n$) матрицы A имели неположительные вещественные части: $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$. При этом собственным значениям, лежащим на мнимой оси ($\operatorname{Re} \lambda_j = 0$), должны соответствовать клетки Жордана размерности единица.

Теорема 19.2. Для того, чтобы точка покоя $\bar{z} = 0$ системы (19.3) была экспоненциально устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения λ_i ($i = 1, \dots, n$) матрицы A имели отрицательные вещественные части: $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$.

Отметим, что в случае линейных систем понятия асимптотической и экспоненциальной устойчивости эквивалентны.

Если система (19.3) является экспоненциально устойчивой, то она остается таковой и при малых изменениях ее параметров. В случае, если система (19.3) просто устойчива по Ляпунову, отмеченное свойство уже не выполняется. Сколько угодно малые изменения параметров могут перевести собственные значения матрицы системы, лежащие на мнимой оси, в правую часть комплексной полуплоскости, что сделает систему уже неустойчивой.

Сформулируем теперь критерий устойчивости решения $x(t) \equiv \bar{x}$, являющегося точкой покоя нелинейной системы (18.1).

Теорема 19.3. Для того, чтобы точка покоя \bar{x} системы (18.1) была экспоненциально устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы у системы первого приближения

$$\bar{z} = Az, \quad A = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}),$$

была экспоненциально устойчивой точка покоя $\bar{z} = 0$.

Как видим, исследование экспоненциальной устойчивости точек покоя нелинейной системы сводится к выяснению знаков вещественных частей собственных значений матриц соответствующих систем первого приближения.

19.3. Примеры

ПРИМЕР 1. Рассмотрим модель «хищник–жертва». Для отыскания точек покоя системы (17.2) составим систему

$$\begin{cases} \alpha x - \beta xy = 0 \\ -\gamma y + \delta xy = 0 \end{cases}.$$

Получаем две точки покоя: $\bar{x}_1 = 0, \bar{y}_1 = 0$ — полное отсутствие какой-либо жизни, $\bar{x}_2 = \frac{\gamma}{\delta}, \bar{y}_2 = \frac{\alpha}{\beta}$ — равновесное состояние.

Матрицы соответствующих систем первого приближения имеют вид

$$A_1 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\beta\gamma}{\delta} \\ \frac{\delta\alpha}{\beta} & 0 \end{bmatrix}.$$

У матрицы A_1 собственные значения $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_2 = -\gamma$ — вещественны и имеют разные знаки. Фазовый портрет первой точки покоя — седло. У матрицы A_2 собственные значения $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\alpha\gamma} i$ — чисто мнимые. Фазовый портрет второй точки покоя — центр. Как видим (см. рис. 17.2), фазовые портреты систем первого приближения в окрестности точек покоя соответствуют фазовому портрету исходной нелинейной системы.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим уравнение Ван-дер-Поля. Для отыскания точек покоя составим систему

$$\begin{cases} y = 0 \\ -x + \delta(1 - x^2)y = 0 \end{cases}.$$

Здесь единственной точкой покоя является $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$. Матрица соответствующей системы первого приближения равна

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \delta \end{bmatrix}$$

и имеет характеристическое уравнение $\lambda^2 - \delta\lambda + 1 = 0$. В зависимости от значений параметра δ возможны следующие случаи:

1) При $\delta < -2$ собственные значения $\lambda_{1,2} = \frac{\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4}}{2}$ вещественные и отрицательные. Фазовый портрет — устойчивый узел.

2) При $-2 < \delta < 0$ собственные значения становятся комплексно сопряженными с отрицательной вещественной частью: $\lambda_{1,2} = \frac{\delta \pm i\sqrt{4 - \delta^2}}{2}$. Фазовый портрет — устойчивый фокус.

3) При $\delta = 0$ собственные значения $\lambda_{1,2} = \pm i$ — чисто мнимые. Фазовый портрет — центр.

4) При $0 < \delta < 2$ собственные значения становятся комплексно сопряженными с положительной вещественной частью: $\lambda_{1,2} = \frac{\delta \pm i\sqrt{4 - \delta^2}}{2}$. Фазовый портрет — неустойчивый фокус.

5) При $\delta > 2$ собственные значения $\lambda_{1,2} = \frac{\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4}}{2}$ вещественные, положительные. Фазовый портрет — неустойчивый узел.

Здесь по системе первого приближения при различных значениях параметра удается достаточно точно представить фазовый портрет исходной нелинейной системы вблизи точки покоя (рис. 21.9). Однако в области, удаленной от точки покоя, нелинейная система имеет предельный цикл (рис. 17.4) — важнейшую особенность, которую система первого приближения уже никак не отражает. Исследованию предельных циклов посвящен §20 нашей книги.

ПРИМЕР 3. Проведем анализ устойчивости точки покоя брюсселятора. Из системы

$$\begin{cases} 1 - (b + 1)x + ax^2y = 0 \\ bx - ax^2y = 0 \end{cases}$$

найдем единственную точку покоя $\bar{x} = 1$, $\bar{y} = \frac{b}{a}$. Матрица соответствующей системы первого приближения равна

$$A = \begin{bmatrix} b - 1 & a \\ -b & -a \end{bmatrix}$$

и имеет характеристическое уравнение $\lambda^2 - (b-a-1)\lambda + ab = 0$. Для того, чтобы при положительных коэффициентах a и b выполнялось условие $Re\lambda_{1,2} < 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$b < a + 1.$$

Полученное неравенство задает в пространстве значений параметров $a > 0$, $b > 0$ область, внутри которой точка покоя брюсселятора сохраняет экспоненциальную устойчивость. Граница области устойчивости задается уравнением $b_* = a + 1$. При переходе параметров системы через эту границу точка покоя теряет устойчивость. Потеря устойчивости сопровождается появлением у системы качественно нового типа решения — предельного цикла (см. далее в § 21, рис. 21.8).

Упражнения

19.1. Доказать, что для уравнения (17.1)

а) решение $\bar{x} = \frac{a}{\gamma}$ при $a > 0$ является экспоненциально устойчивым;

б) решение $\bar{x} = 0$ при $a = 0$ асимптотически устойчиво, но не экспоненциально;

в) решение $\bar{x} = 0$ при $a > 0$ — неустойчиво.

19.2. Доказать, что необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости точки покоя $(0,0)$ линейной двумерной системы являются неравенства $s = a_{11} + a_{22} < 0$, $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$.

19.3. Провести анализ устойчивости точек покоя нелинейных систем из задачи 18.6 (в пространстве их параметров) по системам первого приближения.

19.4. Для следующих систем

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 2 - x; \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = y - x^3 \\ \dot{y} = -x - y^3; \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = y + x^3 \\ \dot{y} = x + y^3 \end{cases}$$

исследовать устойчивость точки покоя $\bar{x} = 0, \bar{y} = 0$.

19.5. Доказать критерии устойчивости и асимптотической устойчивости теорем 19.1 и 19.2 для случая $n = 2$.

§ 20. Анализ системы в окрестности цикла

20.1. Основные понятия. Система первого приближения. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x), \quad (20.1)$$

имеющую T -периодическое решение $x = \xi(t)$ ($\xi(t+T) = \xi(t)$). Графиком такого решения будет замкнутая фазовая кривая — цикл Γ . Точка $x_0 = \xi(0)$ отмечает на Γ начальное положение этого решения. Всякое решение, стартующее с любой другой точки цикла, будет двигаться по этой же замкнутой кривой. Цикл Γ — инвариантное множество системы (20.1). Если начальную точку взять в окрестности цикла, то траектория соответствующего решения может вести себя различным образом. Здесь возможны следующие варианты:

- а) решение приближается к циклу так, что отклонение от цикла стремится к нулю; другими словами, фазовая траектория наматывается на цикл;
- б) решение движется вдоль цикла и формирует замкнутую фазовую кривую — новый цикл, расположенный рядом с исходным;
- в) решение удаляется от цикла; фазовая кривая разматывается по спирали.

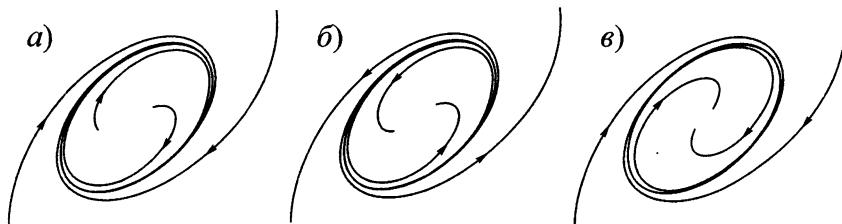


Рис. 20.1. Циклы: *а* — устойчивый, *б* — неустойчивый, *в* — полуустойчивый

Среди возможных сочетаний динамики снаружи и внутри цикла обычно выделяют следующие: устойчивый предельный цикл (рис. 20.1, *а*); неустойчивый цикл (рис. 20.1, *б*); полуустойчивый цикл (рис. 20.1, *в*).

Нас интересуют условия, при которых предельный цикл имеет сильное экспоненциальное притяжение.

Предполагается, что в U — некоторой окрестности кривой Γ — определена функция $\gamma(x) = \operatorname{argmin}_{y \in \Gamma} \|y - x\|$, задающая для каждого x из окрестности U ближайшую к ней точку $\gamma(x)$ с цикла Γ . Тогда функция $\Delta(x) = x - \gamma(x)$ задает отклонение точки x от цикла Γ .

Определение 20.1. Решение $\xi(t)$ будем называть экспоненциально орбитально устойчивым, если найдутся такие $\alpha > 0$, $K > 0$, что справедливо неравенство

$$\|\Delta(\xi(t))\| \leq K e^{-\alpha t} \|\Delta(\xi_0)\|$$

для любого решения $\xi(t)$ системы (20.1) с начальным условием $\xi(0) = \xi_0 \in U$.

Динамика малых отклонений, как и в случае точки покоя, определяется системой первого приближения.

Рассмотрим для T -периодического решения $\xi(t)$ системы (20.1) новую переменную $z = x - \xi(t)$. Подставив $x = \xi(t) + z$ в систему (20.1) и разложив ее правую часть в ряд Тейлора, получим

$$\dot{\xi} + \dot{z} = f(\xi(t) + z) = f(\xi(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t))z + \dots .$$

Отбрасывая нелинейные члены с учетом тождества $\dot{\xi} = f(\xi(t))$, получим линейную систему первого приближения

$$\dot{z} = F(t)z, \quad F(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t)). \quad (20.2)$$

Матрица $F(t)$ этой системы вслед за функцией $\xi(t)$ является T -периодической.

20.2. Линейные системы с периодическими коэффициентами. Элементы теории Флоке. Рассмотрим для системы

$$\dot{z} = A(t)z, \quad (20.3)$$

где $A(t)$ — произвольная T -периодическая $(n \times n)$ -матрица, фундаментальную матрицу $Z(t) = [z_1(t) \ z_2(t) \ \dots \ z_n(t)]$, составленную из линейно независимых решений системы (20.3) с начальными условиями $z_1(0) = (1, 0, \dots, 0)^\top$, $z_2(0) = (0, 1, \dots, 0)^\top, \dots, z_n(0) = (0, 0, \dots, 1)^\top$.

Лемма 20.1. Для фундаментальной матрицы справедливо тождество

$$Z(t+T) = Z(t) \cdot Z(T). \quad (20.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Рассмотрим вектор-функции $\tilde{z}_1(t) = z_1(t+T), \dots, \tilde{z}_n(t) = z_n(t+T)$ — столбцы матрицы $Z(t+T)$. Благодаря T -пе-

риодичности матрицы $A(t)$, справедливы соотношения

$$\dot{\tilde{z}}_i(t) = \dot{z}_i(t+T) = A(t+T)z_i(t+T) = A(t)z_i(t+T) = A(t)\tilde{z}_i(t),$$

означающие, что функции $\tilde{z}_i(t)$ также являются решениями системы (20.3). Последнее позволяет связать их при помощи фундаментальной матрицы $Z(t)$ со своими начальными значениями $\tilde{z}_i(t) = Z(t)\tilde{z}(0)$. Переписывая эти соотношения в исходных обозначениях $z_i(t+T) = Z(t)z_i(T)$, получим требуемое тождество (20.4).

Матрица $B = Z(T)$, задающая отображение за период T системы (20.3), называется **матрицей монодромии**. Любое решение $z(t)$ системы (20.3) в моменты времени, кратные периоду, благодаря (20.4) легко выражается с помощью матрицы монодромии через начальные данные:

$$z(kT) = Z(kT)z(0) = Z((k-1)T)Z(T)z(0) = \dots = B^k z(0).$$

Рассмотрим постоянную матрицу $\Lambda = \frac{1}{T} \ln B$ ($B = e^{T\Lambda}$) и матричную функцию $\Phi(t) = Z(t)e^{-t\Lambda}$.

Лемма 20.2. *Матричная функция $\Phi(t)$ является T -периодической.*

Доказательство следует из цепочки равенств:

$$\begin{aligned}\Phi(t+T) &= Z(t+T)e^{-(t+T)\Lambda} = Z(t)Z(T)e^{-T\Lambda}e^{-t\Lambda} = \\ &= \{Z(T)e^{-T\Lambda} = I\} = Z(t)e^{-t\Lambda} = \Phi(t).\end{aligned}$$

П р и в о д и м о с т ь. В системе (20.3) сделаем замену переменных $z = \Phi(t)y$, где y — новая переменная.

Теорема 20.1. *Система (20.3) в новых переменных y имеет вид*

$$\dot{y} = \Lambda y. \tag{20.5}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Равенство (20.5) следует из (20.3) и соотношений

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \dot{\Phi}(t)y + \Phi(t)\dot{y} = \dot{Z}(t)e^{-t\Lambda}y + Z(t)e^{-t\Lambda}(-\Lambda)y + \Phi(t)\dot{y} = \\ &= A(t)Z(t)e^{-t\Lambda}y - Z(t)e^{-t\Lambda}\Lambda y + \Phi(t)\dot{y} \\ A(t)z &= A(t)\Phi(t)y = A(t)Z(t)e^{-t\Lambda}y.\end{aligned}$$

Как видим, линейная система с периодическими коэффициентами (20.3) подходящей заменой переменных приводится к системе (20.5) с постоянной матрицей.

Собственные значения ρ_i ($i = 1, \dots, n$) матрицы монодромии $B = Z(T)$ называют мультипликаторами системы (20.3). Собственные числа λ_i матрицы Λ — характеристические показатели — связаны с мультипликаторами соотношениями

$$\lambda_i = \frac{1}{T} \ln \rho_i, \quad \rho_i = e^{\lambda_i T}.$$

Критерием асимптотической устойчивости решения $\bar{y} = 0$ системы (20.5) является условие $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ (см. теорему 19.2). В силу равенства $|\rho_i| = e^{\operatorname{Re} \lambda_i T}$ это эквивалентно условию $|\rho_i| < 1$. Полученное неравенство и теорема 20.1 дают следующий результат.

Теорема 20.2. Для асимптотической устойчивости решения $\bar{z} = 0$ системы (20.3) необходимо и достаточно, чтобы все мультипликаторы удовлетворяли неравенствам $|\rho_i| < 1$, ($i = 1, \dots, n$).

20.3. Экспоненциальная устойчивость цикла. Система первого приближения (20.2) в общем классе линейных систем с периодическими коэффициентами (20.3) имеет

важную особенность. Действительно, вектор-функция $r(t) = f(\xi(t))$ в силу равенств $\dot{r}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t))\dot{\xi}(t)$ и $\dot{\xi}(t) = f(\xi(t))$ является частным решением системы первого приближения (20.2). Отсюда, в частности, следует равенство $r(T) = Br(0)$, или, с учетом T -периодичности функции $r(t)$, равенство $r(0) = Br(0)$. Как видим, вектор $r(0)$ является собственным вектором матрицы B с соответствующим собственным значением, равным единице. Таким образом, в случае цикла матрица монодромии B обязательно имеет мультипликатор $\rho_1 = 1$. Полученное означает (см. теорему 19.2), что точка покоя $\bar{z} = 0$ системы первого приближения (20.2) никогда не может быть асимптотически устойчивой. Следует подчеркнуть, что для экспоненциальной устойчивости цикла этого и не требуется. Вопрос об экспоненциальной устойчивости цикла Γ решается в зависимости от расположения остальных мультипликаторов ρ_2, \dots, ρ_n .

Теорема 20.3 (Андронова – Витта). Для экспоненциальной орбитальной устойчивости решения $\xi(t)$ системы (20.1) необходимо и достаточно, чтобы мультипликаторы ρ_2, \dots, ρ_n удовлетворяли неравенствам $|\rho_i| < 1$, $i = 2, \dots, n$.

Доказательство см. в монографии Б. П. Демидовича [9].

Из теоремы Виета и формулы Лиувилля следуют равенства

$$\rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \dots \cdot \rho_n = \det B = e^{\int_0^T \operatorname{tr} F(t) dt}.$$

Неравенство

$$\int_0^T \operatorname{tr} F(t) dt < 0 \tag{20.6}$$

по теореме Андронова – Витта является в общем n -мерном случае необходимым условием экспоненциальной устойчивости цикла Γ .

В двумерном случае справедливо равенство

$$\rho_2 = \det B,$$

что делает неравенство (20.6) не только необходимым, но одновременно и достаточным условием экспоненциальной устойчивости цикла (критерий Пуанкаре).

В случае цикла на плоскости мультиплликатор ρ_2 имеет простой геометрический смысл, показывая при малых отклонениях, во сколько раз траектория приближается к циклу за один оборот. Величина ρ_2 может служить мерой устойчивости предельного цикла к начальным возмущениям. Малость ρ_2 означает высокую степень устойчивости. При значениях $\rho_2 < 1$, но близких к единице, цикл устойчив слабо. При $\rho_2 > 1$ цикл неустойчив. Случай $\rho_2 = 1$ — критический. Здесь возможны различные варианты: цикл устойчив, но не экспоненциально; цикл полуустойчив; цикл находится в окружении других близких циклов и т. д.

Упражнения

20.1. Написать программу отыскания устойчивого предельного цикла с заданной точностью. При помощи этой программы найти предельные циклы и соответствующие им мультиплликаторы для следующих систем:

- а) уравнение Хайрера,
- б) гликолитический осциллятор,
- в) осциллятор Ван-дер-Поля (мягкий режим),
- г) осциллятор Ван-дер-Поля (жесткий режим),
- д) брюсселятор.

20.2. Исследовать изменения циклов из задачи 20.1 и их мультиплликаторов при изменении параметров порождающих их систем. Получить графики зависимости мультиплликаторов от параметров.

§ 21. Бифуркации

21.1. Структурная устойчивость и бифуркации.

В исследовании зависимости фазового портрета системы от изменения входящих в нее параметров выделяют два случая. К первому относят системы, изменение параметров которых в некоторой области сопровождается сохранением качественной картины их фазовых портретов. Два фазовых портрета называют качественно одинаковыми, если существует взаимно-однозначное и взаимно-непрерывное отображение, переводящее один фазовый портрет в другой. Область параметров, внутри которой сохраняется качественная картина фазовых портретов системы, называется **областью структурной устойчивости**. Второй случай составляют системы, в которых при прохождении параметра μ через некоторое значение μ_* происходит качественное изменение фазового портрета (см.[1]). При этом говорят, что в системе при $\mu = \mu_*$ происходит **бифуркация**, а само значение μ_* называют **точкой бифуркации**.

ПРИМЕР. Фазовые портреты линейной системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \mu x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$$

для различных μ представлены на рис. 21.1.

Как видим, система имеет две области структурной устойчивости. При $-\infty < \mu < 0$ фазовый портрет — устойчивый узел (рис. 21.1, *а*; 21.1, *б*). При $0 < \mu < \infty$ фазовый портрет — седло (рис. 21.1, *г*). Эти области разделены единственной точкой бифуркации $\mu_* = 0$ (рис. 21.1, *в*).

Переход параметра μ через бифуркационное значение $\mu_* = 0$ слева направо сопровождается потерей устойчивости точки покоя $\bar{x}_1 = 0, \bar{x}_2 = 0$.

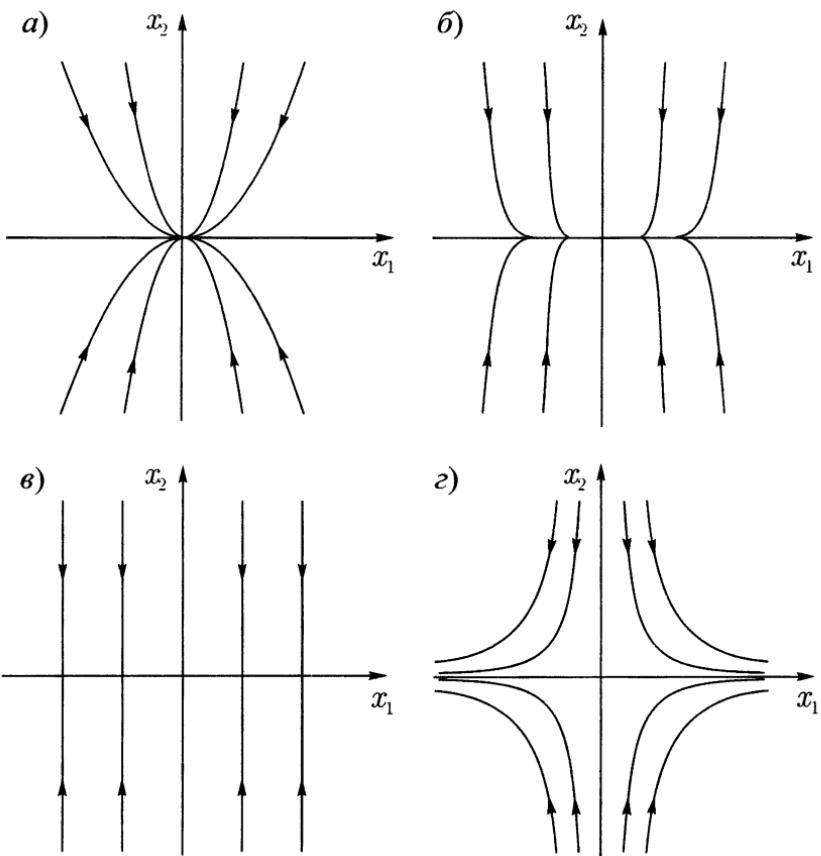


Рис. 21.1. Фазовые портреты: *a* — при $\mu = -0.5$; *б* — при $\mu = -0.1$; *в* — при $\mu = 0$; *г* — при $\mu = 1$

Бифуркация потери устойчивости точки покоя в случае линейных систем обязательно приводит к тому, что фазовые траектории уходят в бесконечность. В нелинейном случае такая бифуркация может сопровождаться появлением у системы новых инвариантных множеств.

21.2. Бифуркация рождения цикла. Рассмотрим двумерную систему — модель Хопфа

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \mu x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 + \mu x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}. \quad (21.1)$$

Перейдя от декартовых координат x_1, x_2 к полярным r, φ по формулам $x_1 = r \cos \varphi, x_2 = r \sin \varphi$, получим совсем простую систему

$$\begin{cases} \dot{r} = \mu r - r^3 \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases}, \quad (21.2)$$

состоящую из двух независимых уравнений. Решением второго уравнения будет функция $\varphi = \varphi_0 + t$, где φ_0 — начальное положение угла φ .

Решения первого уравнения в зависимости от параметра μ имеют следующий вид:

а) при $\mu < 0$ $r_0 = 0$ — единственная точка покоя, к которой экспоненциально стремятся все другие решения при $t \rightarrow +\infty$ (рис. 21.2, а);

б) при $\mu = 0$ общая картина предыдущего случая сохраняется, однако скорость стремления решений к $r_0 = 0$ перестает быть экспоненциальной:

$$r(t) = \frac{r(0)}{\sqrt{2t r^2(0) + 1}}$$

(как видим, для всех $\mu \leq 0$ точка покоя $r_0 = 0$ является асимптотически устойчивой);

в) при $\mu > 0$ у первого уравнения системы (21.2) наряду с $r_0 = 0$ появляется еще одна точка покоя $r_1 = \sqrt{\mu}$, к которой стремятся экспоненциально другие решения. Расположение интегральных кривых для этого случая представлено на рис. 21.3, а.

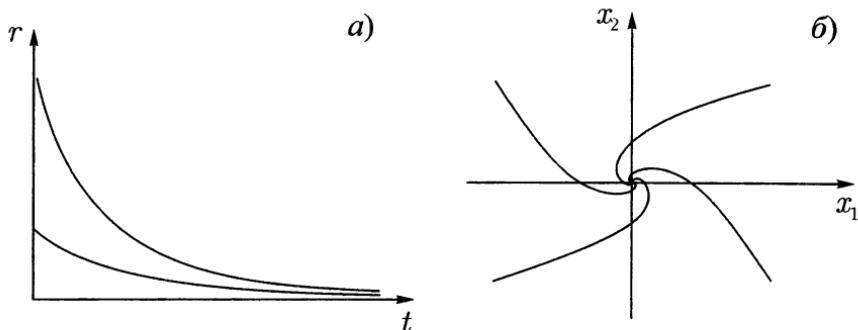


Рис. 21.2. Динамика систем при $\mu = -1$: а — система (21.2); б — система (21.1)

Как видно, при переходе параметра μ через бифуркационное значение $\mu_* = 0$ в область $\mu > 0$ точка покоя $r_0 = 0$ теряет устойчивость. При этом появляется новая устойчивая точка покоя r_1 . Проведенный анализ позволяет проследить изменение фазовых портретов системы (21.1):

- при $\mu < 0$ точка покоя $(0, 0)$ системы экспоненциально устойчива. Фазовый портрет — фокус (рис. 21.2, б);
- при $\mu = 0$ точка покоя $(0, 0)$ — асимптотически устойчива;
- при $\mu > 0$ точка покоя $(0, 0)$ — неустойчива. В системе появляется устойчивый предельный цикл — окружность радиуса $r_1 = \sqrt{\mu}$ (рис. 21.3, б).

Таким образом, переход параметра μ через бифуркационное значение $\mu_* = 0$ сопровождается качественным изменением фазового портрета системы (21.1). При этом потеря устойчивости точки покоя $(0, 0)$ сопровождается рождением устойчивого предельного цикла — окружности $x_1^2 + x_2^2 = \mu$. Следует отметить, что размер цикла (радиус окружности $r_1 = \sqrt{\mu}$) непрерывно меняется (возрастает) по ме-

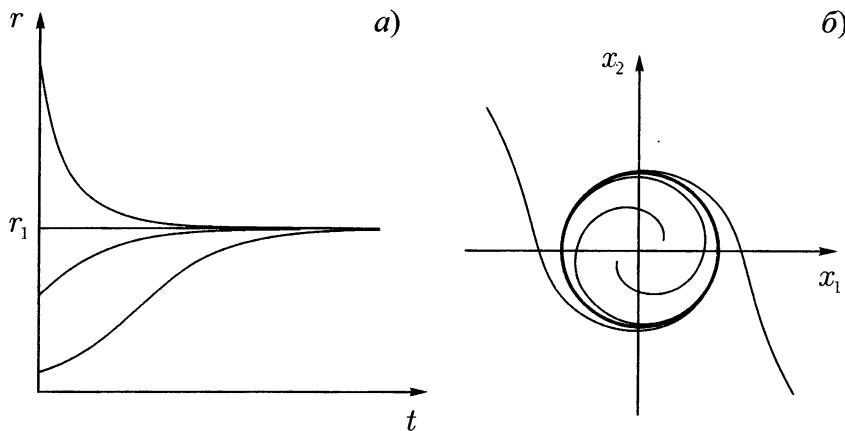


Рис. 21.3. Динамика систем при $\mu = 0.5$: а — система (21.2); б — система (21.1)

ре удаления параметра от своего бифуркационного значения $\mu_* = 0$. Такой вариант бифуркации называется мягkim рождением цикла, или бифуркацией Андрено-ва – Хопфа.

Другой вариант бифуркации рождения цикла рассмотрим на примере системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(\mu + 2x_1^2 + 2x_2^2 - (x_1^2 + x_2^2)^2) - x_2 \\ \dot{x}_2 = x_2(\mu + 2x_1^2 + 2x_2^2 - (x_1^2 + x_2^2)^2) + x_1 \end{cases}. \quad (21.3)$$

В полярных координатах данная система распадается на два независимых уравнения

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\mu + 2r^2 - r^4) \\ \dot{\phi} = 1 \end{cases}. \quad (21.4)$$

Решения первого уравнения в зависимости от параметра μ имеют следующий вид:

а) При $\mu < -1$ единственной точкой покоя является $r_0 = 0$. Все другие решения стремятся к $r_0 = 0$ экспоненциально. Точка покоя $r_0 = 0$ устойчива (рис. 21.4, а).

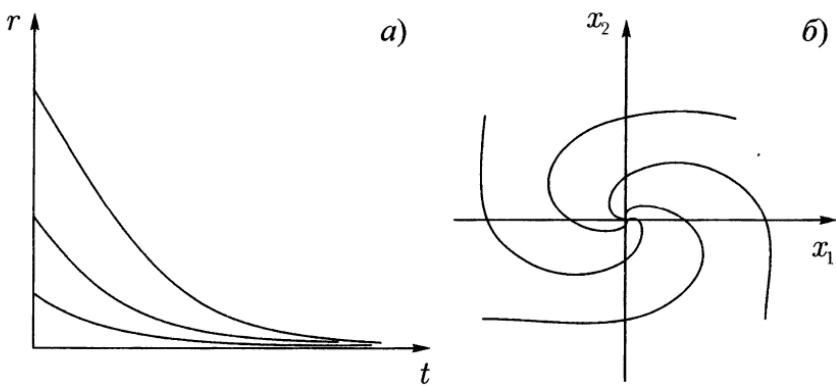


Рис. 21.4. Динамика систем при $\mu = -1.2$: а — система (21.4); б — система (21.3)

б) При $\mu = -1$ наряду с $r_0 = 0$ появляется еще одна точка покоя $r_1 = 1$. Расположение интегральных кривых становится другим (см. рис. 21.5, а). Решения с начальными точками, лежащими выше $r_1 = 1$, монотонно убывая, стремятся к $r_1 = 1$. Решения с начальными точками, лежащими ниже $r_1 = 1$, уже стремятся к $r_0 = 0$. Точка покоя $r_0 = 0$ устойчива, а точка покоя $r_1 = 1$ полуустойчива.

в) При $-1 < \mu < 0$ имеем уже три точки покоя: $r_0 = 0$, $r_1 = \sqrt{1 - \sqrt{1 + \mu}}$, $r_2 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \mu}}$. Точка покоя r_1 при переходе μ в интервал $-1 < \mu < 0$ расщепляется в две. Соответственно меняется и расположение интегральных кривых (см. рис. 21.6, а).

Решения с начальными точками, лежащими в интервале (r_1, ∞) , стремятся к r_2 . Решения с начальными точками,

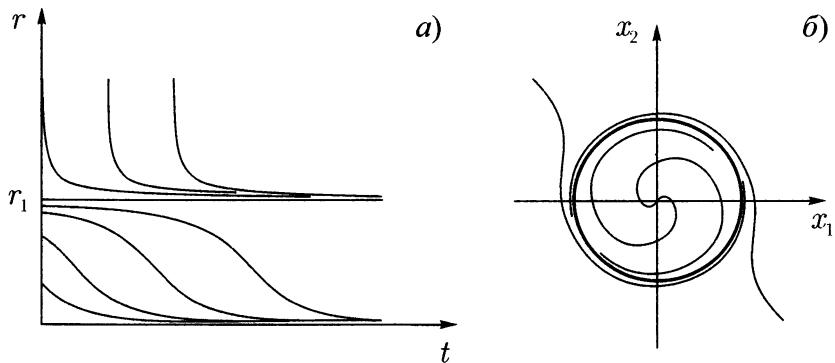


Рис. 21.5. Динамика систем при $\mu = -1$: а — система (21.4); б — система (21.3)

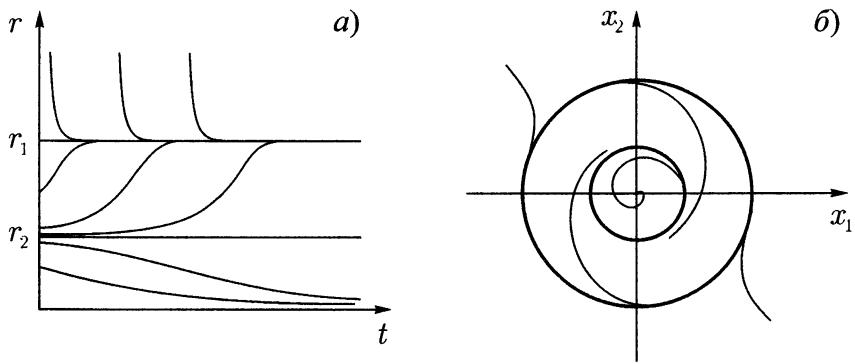


Рис. 21.6. Динамика систем при $\mu = -0.5$: а — система (21.4); б — система (21.3)

лежащими в интервале $(0, r_1)$, стремятся к r_1 . Точки покоя r_0 и r_2 — устойчивы, точка покоя r_1 — неустойчива.

г) При $\mu = 0$ имеем две точки покоя: $r_0 = 0$, $r_2 = \sqrt{2}$. Вид интегральных кривых показан на рис. 21.7, а. Точка покоя r_0 — неустойчива, точка покоя r_1 — устойчива.

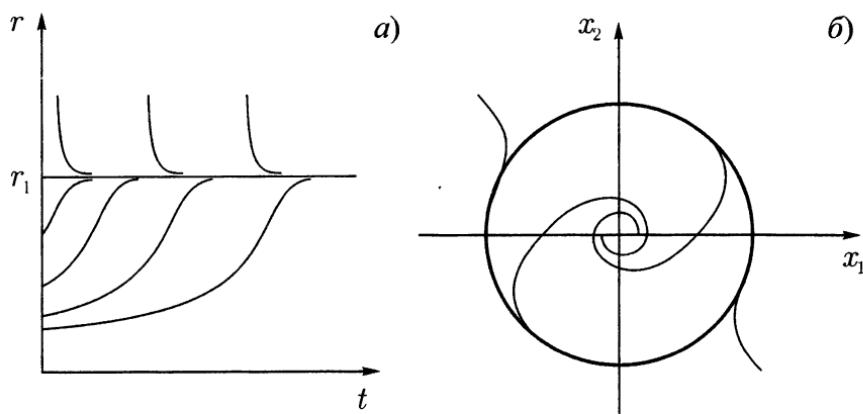


Рис. 21.7. Динамика систем при $\mu = 0$: а — система (21.4); б — система (21.3)

д) При $\mu > 0$ имеем две точки покоя $r_0 = 0$, $r_2 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \mu}}$. Общая картина подобна случаю г.

Проследим, как представленные изменения в поведении интегральных кривых $r(t)$ скажутся на изменении фазовых портретов системы (21.3).

а) При $\mu < -1$ у системы (21.3) — единственная точка покоя $(0,0)$. Фазовый портрет — устойчивый фокус (рис. 21.4, б). Все траектории стремятся к точке покоя.

б) При $\mu = -1$ у системы (21.3) появляется периодическое решение (цикл), фазовая траектория которого есть окружность $x_1^2 + x_2^2 = 1$ единичного радиуса. Фазовые траектории с началом вне единичного круга асимптотически стремятся к этому циклу. Все остальные с началом внутри круга стремятся к точке покоя $(0,0)$ (рис. 21.5, б).

В системе (21.3) при $\mu = -1$ произошла же сткая бифуркация рождения цикла (полустойчивого) фиксированного радиуса.

в) При $-1 < \mu < 0$ на фазовом портрете мы видим результат расщепления полуустойчивого цикла из b на два новых цикла. Один из них (внешний, радиусом r_2) — устойчивый, другой (внутренний, радиусом r_1) — неустойчивый (рис. 21.6, б).

Точка покоя $(0,0)$ по-прежнему остается устойчивой. При приближении μ к 0 внутренний цикл, уменьшая свой радиус, стремится к точке покоя $(0,0)$.

г) При $\mu = 0$ происходит слияние внутреннего цикла с точкой покоя $(0,0)$. В результате данной бифуркации точка покоя теряет устойчивость и у системы на фазовой плоскости остается единственное притягивающее множество — предельный цикл (рис. 21.7, б).

д) При $\mu > 0$ и дальнейшем увеличении параметра μ фазовый портрет системы (21.3) качественно не изменяется.

В нелинейных системах потеря устойчивости точки покоя при изменении параметров часто сопровождается рождением устойчивого предельного цикла. Отмеченная связь (потеря устойчивости точки покоя — появление предельного цикла) позволяет искать бифуркации рождения цикла по бифуркациям потери устойчивости точек покоя, используя для отыскания последних анализ линейных систем первого приближения.

Возможности такого подхода иллюстрируются на примерах брюсселятора и уравнения Ван-дер-Поля. У брюсселятора (см. анализ системы первого приближения в примере 3 из §19) бифуркация потери устойчивости точки покоя $\bar{x} = 1$, $\bar{y} = \frac{b}{a}$ происходит при пересечении прямой $b = a + 1$. Например, для $a = 1$ бифуркационным значением параметра будет $b_* = 2$. При $b > 2$ у брюсселятора вокруг уже неустойчивой точки покоя появляется (рис. 21.8) предельный цикл.

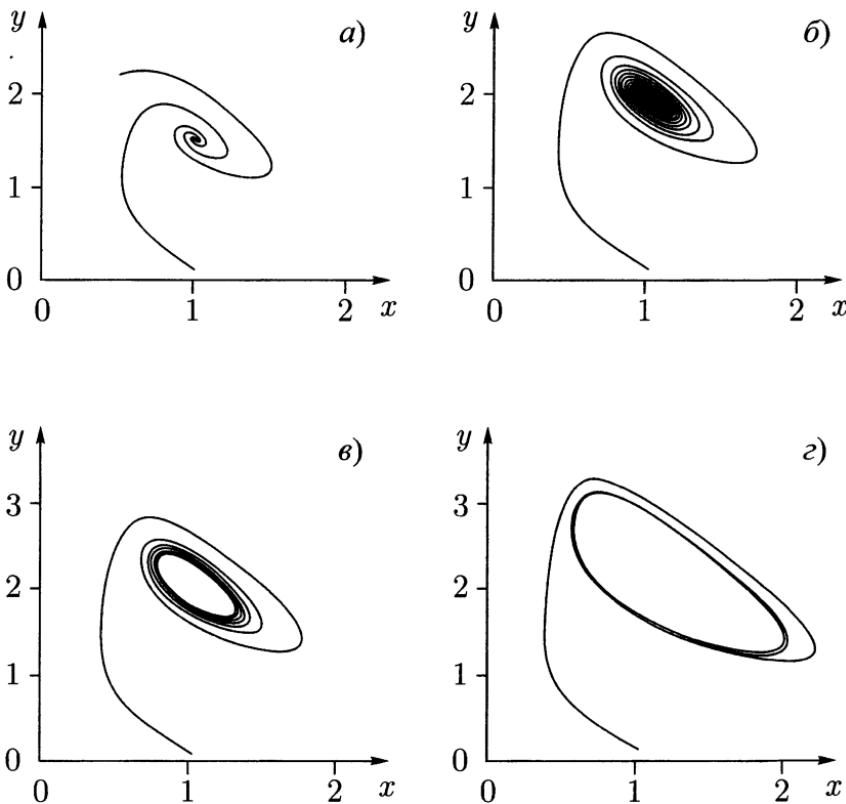


Рис. 21.8. Фазовые портреты брюсселятора при $a = 1$: а — для $b = 1.5$; б — для $b = 2$; в — для $b = 2.05$; г — для $b = 2.3$

Размеры цикла по мере увеличения параметра b непрерывно возрастают. Рис. 21.8 демонстрирует для брюсселятора бифуркацию мягкого рождения цикла.

У модели Ван-дер-Поля (см. анализ системы первого приближения в примере 2 из § 19) потеря устойчивости точки покоя $\bar{x} = 0, \bar{y} = 0$ (см. рис. 21.9) происходит при $\delta_* = 0$.

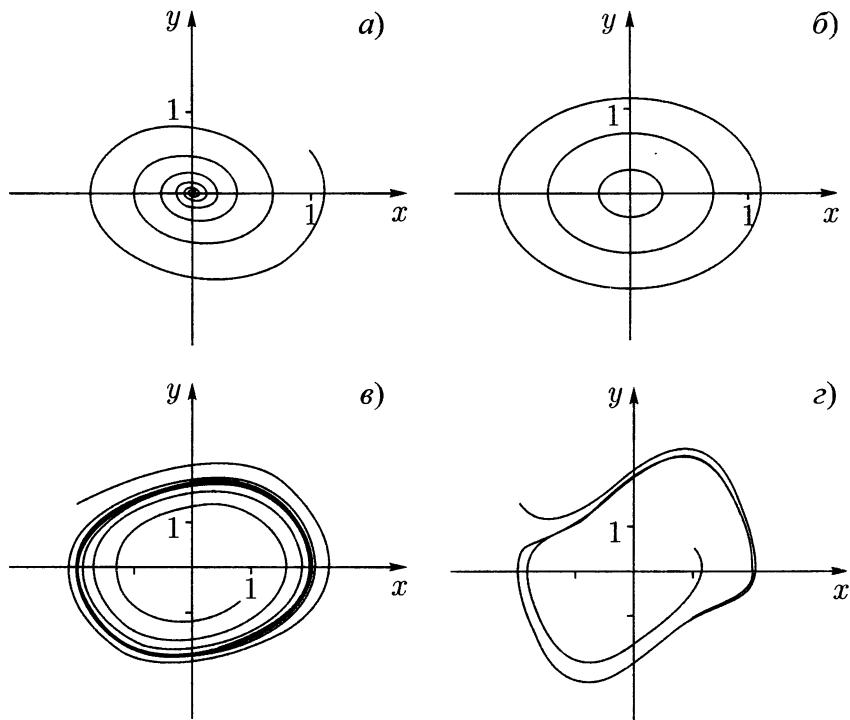


Рис. 21.9. Фазовые портреты модели Ван-дер-Поля: a — для $\delta = -0.2$; b — для $\delta = 0$; c — для $\delta = 0.2$; d — для $\delta = 1$

Для $\delta = 0$ уравнение Ван-дер-Поля вырождается в линейное с фазовым портретом типа центр. Фазовыми траекториями здесь являются окружности различных радиусов. Последнее означает возможность в данной системе гармонических колебаний любой амплитуды в зависимости от выбора начальных данных.

При переходе в область $\delta > 0$ на фазовом портрете остается единственная замкнутая фазовая кривая (цикл), близ-

кая при малых δ к окружности радиуса 2. Остальные фазовые кривые асимптотически, при $t \rightarrow +\infty$, приближаются к этому циклу. Фазовые портреты уравнения Ван-дер-Поля при $\delta = -0.2$, $\delta = 0$, $\delta = 0.2$, $\delta = 1$ представлены на рис. 21.9.

Наличие у системы устойчивого периодического решения с фиксированной частотой и амплитудой, не зависящей от выбора начальных данных, позволяет использовать это электронное устройство в качестве генератора электрических колебаний. Следует отметить, что подобные режимы, получившие название *автоколебаний*, возможны лишь в нелинейных системах.

21.3. Порядок и хаос в модели Лоренца. Отметим, что, наряду с решением $x(t), y(t), z(t)$, для модели Лоренца (17.6) всегда будет решением и набор функций $-x(t), -y(t), z(t)$. Поэтому фазовый портрет симметричен относительно оси OZ .

Рассмотрим для функции $v = x^2 + y^2 + (z - \sigma - r)^2$ производную в силу системы Лоренца

$$\dot{v} = -2w + \frac{b}{2}(\sigma + r)^2, \quad w = \sigma x^2 + y^2 + b \left(z - \frac{\sigma + r}{r} \right)^2.$$

При достаточно больших K $\left(K^2 \geq \frac{1}{4} + \frac{b}{4} \max \left(\frac{1}{\sigma}, 1 \right) \right)$ сфера $v = K^2(\sigma + r)^2$ целиком содержит эллипсоид $w = \frac{b}{4}(\sigma + r)^2$.

При этом во всех точках сферы выполняется неравенство $\dot{v} \leq 0$, означающее, что все фазовые траектории пересекают сферу снаружи вовнутрь и далее из нее не выходят.

Для любого решения след матрицы $F = \frac{\partial f}{\partial x}$ имеет постоянное отрицательное значение

$$\operatorname{tr} F = -(\sigma + b + 1) < 0,$$

что означает равномерное сжатие фазового объема (см. [5]). Таким образом, всякое притягивающее множество системы Лоренца имеет нулевой объем.

Проследим изменение фазового портрета в зависимости от параметра r .

При всех значениях параметров система Лоренца имеет точку покоя $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$, $\bar{z} = 0$. Характеристическое уравнение соответствующей системы первого приближения

$$(\lambda + b)(\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r)) = 0$$

имеет вещественные корни

$$\lambda_1 = -b, \quad \lambda_{2,3} = \frac{-(\sigma + 1) \pm \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4\sigma r}}{2}.$$

При $0 < r < 1$ все корни отрицательны и точка покоя $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z}$ асимптотически устойчива.

При $r > 1$ эта точка становится неустойчивой. В этом случае у системы появляются еще две точки покоя с координатами $\bar{x} = \bar{y} = \pm\sqrt{b(r - 1)}$ и $\bar{z} = r - 1$. В силу симметрии они имеют одинаковый тип. Соответствующее характеристическое уравнение

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2b\sigma(r - 1) = 0$$

в силу критерия Раяса – Гурвица приводит к условию устойчивости

$$r < r^* = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}.$$

При $r > r^*$ все три точки покоя становятся неустойчивыми. Для рассматриваемых здесь параметров $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$ бифуркационное значение $r^* = 24.737$.

При $r = 28$ Лоренц обнаружил притягивающее множество — странный аттрактор (см. рис. 17.6).

В модели Лоренца при дальнейшем увеличении параметра можно увидеть большое разнообразие как хаотических, так и периодических режимов.

Так, например, известно окно периодичности — интервал $99.524 < r < 100.795$. Этот интервал разбивается на подинтервалы $I_1 = (99.98, 100.795)$, $I_2 = (99.629, 99.98)$, $I_4 = = (99.547, 99.629)$, ..., I_{2^n} , ... с предельными циклами $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_4, \dots, \Gamma_{2^n}, \dots$ Здесь Γ_k — цикл, наблюдаемый на подинтервале I_k .

Переход параметра r из одного интервала в другой сопровождается бифуркациями удвоения периода. Так, например, при переходе из I_1 в I_2 цикл Γ_1 расщепляется и образуется 2-цикл Γ_2 , при переходе из I_2 в I_4 2-цикл Γ_2 расщепляется в 4-цикл Γ_4 и т. д. (рис. 21.10).

Наблюдаемые здесь бифуркации удвоения периода сопровождаются характерными изменениями мультипликаторов. Один из мультипликаторов, отражающий динамику возмущений вдоль цикла, всегда равен единице. Степень притяжения возмущенных траекторий к циклу характеризуется двумя оставшимися: ρ_1 и ρ_2 ($|\rho_1| \geq |\rho_2|$). Неравенство $|\rho_{1,2}| < 1$ является необходимым и достаточным условием экспоненциальной устойчивости цикла. В стандартном сценарии бифуркации удвоения периода старший мультипликатор ρ_1 меняется следующим образом. При переходе параметра r через точку бифуркации (границу между соседними интервалами I_k и I_{2k}) значение ρ_1 стремится к -1 , достигает -1 и после появления цикла с удвоенным периодом становится равным 1 . При этом модуль мультипликатора ρ_2 остается строго меньше единицы.

На интервалах $I_1, I_2, \dots, I_{2^n}, \dots$ выделим значения $r_1, r_2, \dots, r_{2^n}, \dots$ параметра r , соответствующие минимуму фун-

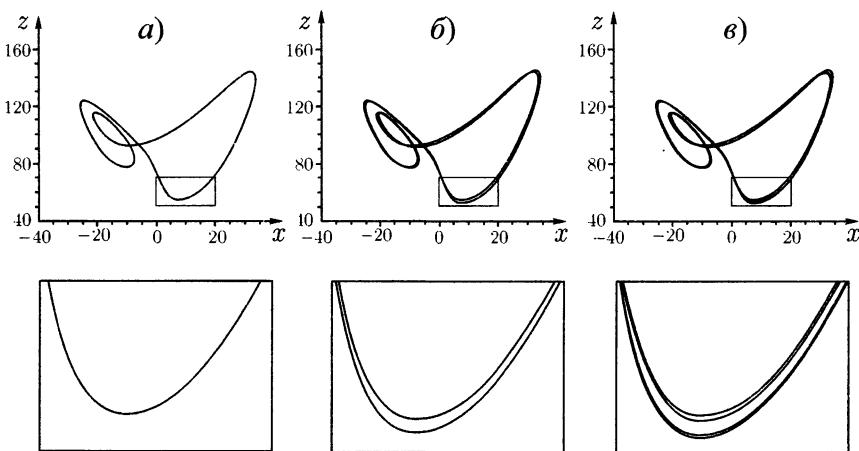


Рис. 21.10. Бифуркации удвоения периода: *а* — 1-цикл для $r = 100.563$; *б* — 2-цикл для $r = 99.803$; *в* — 4-цикл для $r = 99.5866$

кции $|\rho_1(r)|$:

$$r_k = \underset{r \in I_k}{\operatorname{argmin}} |\rho_1(r)|.$$

Предельный цикл для значения $r = r_k$ является наиболее устойчивым в классе k -циклов на интервале I_k . Такой цикл будем называть суперциклом. Для модели Лоренца $r_1 = 100.563$, $r_2 = 99.803$, $r_4 = 99.5866$. Суперциклы, отвечающие этим параметрам, представлены на рис. 21.10. На рис. 21.11 дан график функции $\rho_1(r)$. Здесь хорошо виден бифуркационный механизм. На каждом из интервалов I_1, I_2, I_4, \dots , при убывании параметра r , функция $\rho_1(r)$ монотонно убывает от $+1$ до -1 , имея скачки в точках бифуркации. Что касается мультиплликатора $\rho_2(r)$, то он практически не изменяется, сохраняя в данном диапазоне значение $|\rho_1(r)| \doteq 1.75 \cdot 10^{-2}$.

В поведении мультипликаторов необходимо отметить одну важную деталь. Функция $\rho_1(r)$, непрерывно изменяя свои значения на интервале I_k от $+1$ до -1 , не может принимать значение, равное нулю (матрица монодромии является всегда невырожденной). Обход нуля связан с выходом в комплексную плоскость.

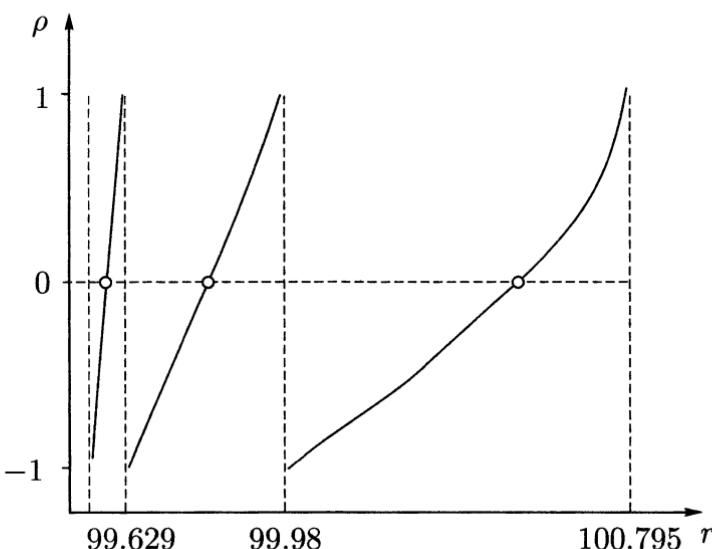


Рис. 21.11. График мультипликатора $\rho_1(r)$ в окне периодичности

Функция $\rho_1(r)$ (совместно с $\rho_2(r) = \bar{\rho}_1(r)$) становится комплекснозначной только в малой окрестности точки r_k . В остальной части интервала I_k она имеет вещественные значения. Символически эта деталь в поведении $\rho_1(r)$ изображена на рис. 21.11 маленькими окружностями. После каскада бифуркаций удвоения периода в системе наблюдается хаос. Поведение решения в проекции на плоскость xOz представлено на рис. 21.12.

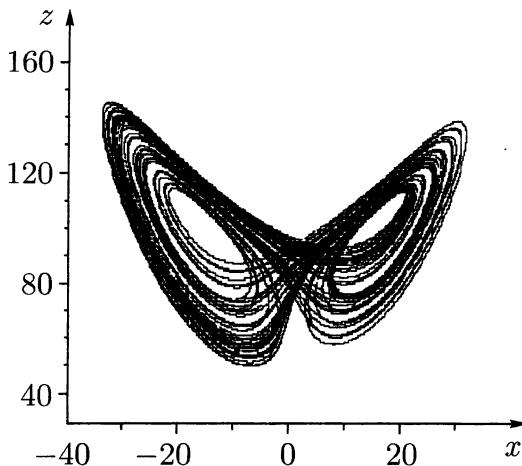


Рис. 21.12. Хаотический аттрактор системы Лоренца при $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$, $r = 99$

Упражнения

21.1. Найти интервалы структурной устойчивости и исследовать бифуркции в системах

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \alpha y \end{cases}; \quad \begin{cases} \dot{x} = x - \alpha y \\ \dot{y} = \alpha x - y \end{cases}.$$

21.2. Для системы «хищник – жертва» (с насыщением) в плоскости параметров a и b изобразить зоны структурной устойчивости. Выделить зону существования предельного цикла. Проиллюстрировать бифуркции рождения предельного цикла при пересечении границ этой зоны.

21.3. Для модели Лоренца ($\sigma = 10$, $b = 8/3$) при различных значениях $r \in (0, 28)$ найти решения $(x(t), y(t), z(t))$

и $(\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{z}(t))$, выходящие из близких точек $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$ и $\bar{x}(0) = 1 + 10^{-6}$, $\bar{y}(0) = 0$, $\bar{z}(0) = 0$. Изобразить $x(t)$ и $\bar{x}(t)$ на графике. Найти момент времени T , при котором $\|x(T) - \bar{x}(T)\| > 10$. Исследовать зависимость T от r .

21.4. Проследить бифуркации модели Лоренца для $\sigma = 10$, $b = 8/3$ при изменении r на интервалах а) $(0, 28)$; б) $(99.5, 100.7)$.

21.5. Исследовать зависимость мультипликаторов модели Лоренца для $\sigma = 10$, $b = 8/3$ от параметра r на интервале $(99.5, 100.7)$.

21.6. Для модели Ресслера (17.7) для $\alpha = 0.2$ проследить бифуркации при $\mu \in (2, 5)$.

Список литературы

- [1] А н д р о н о в А. А. Бифуркации динамических систем. — М.: Наука, 1962.
- [2] А н и щ е н к о В. С. Знакомство с нелинейной динамикой: Учеб. пособие. — Саратов: Изд-во Гос.УНЦ «Колледж». 2000.
- [3] А р н о л ь д В. И. Теория катастроф. М.: Наука, 1990.
- [4] Б а х в а л о в Н. С., Ж и д к о в Н. П., К о б е л ь к о в Г. Менные методы. — М.: Наука, 1987.
- [5] Б е р д ы ш е в В. И., П е т р а к Л. В. Аппроксимация функций, сжатие численной информации, приложения. — Екатеринбург: УрО РАН, 1999.
- [6] Б е р ж е П., П о м о И., В и д а л ь К. Порядок в хаосе. О детерминистическом подходе к турбулентности. — М.: Мир, 1991.
- [7] В у л Е. В., С и н а й Я. Г., Х а н и н К. М. Универсальность Фейгенбаума и термодинамический формализм // Успехи физических наук. — 1984. — Т. 39, № 9. — С. 3–37.
- [8] Г л а с с Л., М э к и М. От часов к хаосу. Ритмы жизни. — М.: Мир, 1991.
- [9] Д е м и д о в и ч Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.

- [10] Жигулев В. М. Динамика неустойчивостей (динанстика). — М.: Изд-во МФТИ, 1996.
- [11] Кузнецов А. П. Колебания, катастрофы, бифуркции, хаос. — Саратов: Изд-во Гос. УНЦ «Колледж», 2000.
- [12] Кузнецов С. П. Динамический хаос. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 2001. (Сер. Современная теория колебаний и волн).
- [13] Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и хаотическая динамика. — М.: Мир, 1984.
- [14] Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б. Современные проблемы нелинейной динамики. — М.: Эдиториал УРСС, 2000.
- [15] Неймарк Ю. И., Ланда П. С. Стохастические и хаотические колебания. — М.: Наука, 1987.
- [16] Пайтген Х. О., Рихтер П. Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. — М.: Мир, 1993.
- [17] Понtryagin L. S. Ordinary differential equations. M.: Nauka, 1974.
- [18] Смирнова А. Б. Итеративные методы решения нелинейных операторных уравнений 1 рода и их приложения: Дис.... канд. физ.-мат. наук. — Екатеринбург, 1995.
- [19] Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем // Успехи физических наук. — 1983. — Т. 141, № 2. — С. 343–374.
- [20] Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений: Нежесткие задачи. — М.: Мир, 1990.

- [21] Ч у л и ч к о в А. И. Математические методы нелинейной динамики. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 2000.
- [22] Ш р е д е р М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая / НИЦ «Регул. и хаотич. динамика». — Ижевск, 2001.
- [23] Ш у с т е р Г. Детерминированный хаос. Введение. — М.: Мир, 1988.
- [24] Briggs K. A precise calculation of the Feigenbaum constants // Math. Comput. — 1991. — Vol. 57, nr. 195. — P. 435–439.
- [25] Briggs K. Feigenbaum Scaling in Discrete Dynamical Systems. Dissertation of the Degree Doctor. — Melburne: University of Melburne, 1997.
- [26] Complex Dynamic System: Mathematics Behiend Mandelbrot and Julia Sets. Proc. Sympos. Appl. Math. (Held in Cincinnati, OHIO Jan 10-11. 1994) 1994. Vol. 49.
- [27] Hutchinson J. E. Fractals and selfsimilarity // Indian Univ. Math. J. — 1981. — Vol. 30, nr. 5. — P. 713–747.
- [28] Lanford O. E. A computer — assisted prof of the Feigenbaum conjectures // Bull. Amer. Math. Soc. — 1982. — Vol. 6, nr. 3. P. 427–434.
- [29] Mandelbrot B. B. Fractal aspects of the iteration of $z \rightarrow \lambda z(1 - z)$ for complex λ and z . In. Nonlinear Dynamics, Helleman R.H(ed). Annals New-York Acad. Sciences. — 1980. — Vol. 357. — P. 249–259.
- [30] Peitgen H. O., Jürgen H., Saupe D. Chaos and Fractals. New Frontiers of Science. N.Y. etc.: Springer-Verlag, 1992.

- [31] S i n g e r D. Stable orbits and bifurcation of maps on the interval // SIAM J. Appl. Math. Comput. — 1978. — Vol. 85, — nr. 2. — P. 260–267.
- [32] S m i r n o v a A. B., V a s i n V. V. Iterative approctimation of solutions of non–linear unstable problems in a Hilbert space // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. — 1993. — Vol. 8, nr. 2. P. 127–145.

Предметный указатель

- K*-цикл 18
N-фуркации системы 76
- Автоколебания 151
Аттрактор 33
— странный 34
- Бифуркационное значение параметра 26
Бифуркация 140
— рождения цикла 142
— жесткая 147
— мягкая 144
- Вторая универсальная константа 44
- Губка Серпинского 89
- Дендрит 75
Деформационная окружность 71
- Динамическая система (ДС) 9, 10
- Динамические фракталы 78
- Диск Зигеля 73
Домен 104
- Инвариант системы 18, 118
- Инвариантное множество, асимптотически устойчивое 20
— устойчивое по Ляпунову 20
- Интегральная кривая 117
- Канторово множество 85
Ковер Серпинского 87
Кольца Эрмана 74
Кривая Гильберта 89
Кривая Кох 85
- Матрица монодромии 136
Метод Рунге–Кутта 123
— Эйлера 122
- Метрика Хаусдорфа 96
Множества подобные 79
Множество Жюлиа 67
— Мандельброта 67
— Фату 67
— самоподобное 81
- Модель «хищник – жертва» 110
— Лоренца 115
— Ресслера 115
- Мультиплликатор 137
- Оператор Хатчинсона 82
Орбита точки 18

- Осциллятор линейный 111
— хаотический 115
— химический 113
— электронный 113
Отображение подобия 79
Параболический случай 72
Первая универсальная константа 39
Поворотные числа 76
Показатель Ляпунова 42
Поле направлений 117
Полуотклонение между множествами 95
Пыль Фату 75
Пятиугольник Дюрера 88
Размерность Хаусдорфа 83
— топологическая 82
— фрактальная 83
Регион 104
Решето Серпинского 86
Самоподобие 35, 37, 81, 91
Седло 120
Система первого приближения 127
Странный аттрактор 34
Суперцикл 51
Теорема Банаха 98
Точка k -периодическая 18
— покоя 18, 119
Точка бифуркации 140
Узел 120
Уравнение Ван-дер-Поля 113
— Цвitanовича – Фейгенбаума 54
— удвоения 53
Условие Липшица 96
Устойчивость асимптотическая 20, 118, 119
— по Ляпунову 20, 118, 119
— экспоненциальная 118, 120
— экспоненциально-орбитальная 134
Фазовая плоскость 117
— траектория 117
Фазовое пространство 117
Фазовый портрет 117
Фокус 120
Фрактал 84
— Давида 88
— Мандельброта – Гивена 86
— динамический 78
Фрактальная геометрия 11, 64
Хаос 36, 41
Характеристический показатель 137
Центр 120
Цикл 18, 119

*Васин Владимир Васильевич
Ряшко Лев Борисович*

**ЭЛЕМЕНТЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ:
ОТ ПОРЯДКА К ХАОСУ
УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ**

*Дизайнер М. В. Ботя
Технический редактор А. В. Широбоков
Компьютерная верстка Д. П. Вакуленко
Корректор Г. Г. Тетерина*

Подписано в печать 29.03.2006. Формат 60 × 84¹/₁₆.

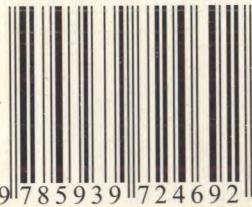
Печать офсетная. Усл. печ. л. 9,53. Уч. изд. л. 8,61.

Гарнитура Таймс. Бумага офсетная №1. Заказ №113.

Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

<http://rcd.ru> E-mail: mail@rcd.ru Тел./факс: (+73412) 500–295

ISBN 5-93972-469-8



A standard linear barcode representing the ISBN number 5-93972-469-8. The barcode is composed of vertical black bars of varying widths on a white background.

9 785939 724692