

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**  
**ФГАОУ ВО «УрФУ имени первого Президента России Б.Н. Ельцина»**  
Кафедра «школы бакалавриата (школа)»

Оценка работы \_\_\_\_\_  
Руководитель от УрФУ Перевалова Т.В.

Тема задания на практику

Производственная практика, научно-исследовательская работа

ОТЧЕТ

Вид практики Производственная практика

Тип практики Производственная практика, научно-исследовательская работа

Руководитель практики от предприятия (организации)

ФИО руководителя      Подпись

Студент Соломеин Л.Е.

ФИО студента

Специальность (направление подготовки) 02.03.01 Математика и компьютерные науки

Группа МЕН-390206

Екатеринбург 2021

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Основная часть</b>	<b>3</b>
2.1	Описание модели . . . . .	3
2.2	Временные ряды . . . . .	3
2.3	Лестница Ламерея . . . . .	8
2.4	Бифуркционная диаграмма . . . . .	11
2.5	Показатель Ляпунова . . . . .	11
2.6	Карта режимов . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Заключение</b>	<b>17</b>

# 1 Введение

В настоящее время задачи экологии имеют большое значение. Важно научиться применять методы для анализа математических моделей различных экологических систем.

Одна из основных задач экологии — изучение структуры системы и то, как она функционирует, поиск закономерностей. В качестве инструмента для анализа систем можно использовать методы из различных разделов математики, в частности нелинейной динамики.

В данной работе предложены некоторые выкладки по анализу дискретной модели Хасселя с эффектом Олли. Подобные модели широко используются в качестве общих моделей динамики популяции с дискретным временем и наличием конкуренции за ресурсы и внутривидовой конкуренции. Так же их используют для исследования различных явлений в динамике популяций.

При написании данной работы использовались следующие источники:

- Density-Dependence in Single-Species Populations [1]
- Элементы нелинейной динамики: от порядка к хаосу [2]
- Nonsmooth one-dimensional maps: some basic concepts and definitions [3]
- Inequality in resource allocation and population dynamics models [4]
- Chaotic Dynamics and Chaos Control of Hassell-Type Recruitment Population Model [5]

## 2 Основная часть

### 2.1 Описание модели

Одна из вариаций модели Хасселя имеет следующую математическую запись:

$$x_{t+1} = \frac{\alpha x_t^2}{(\beta + x_t)^6}. \quad (1)$$

В данной формуле  $x_i$  — количество особей в поколении с номером  $i$ . Параметр  $\alpha$  определяет скорость роста популяции, а параметр  $\beta$  определяет несущую способность окружающей среды.

Для упрощения задачи рассмотрим частный случай. Зафиксируем параметр  $\alpha = 1$ . Параметр  $\beta$  изменяется в диапазоне  $[0; 0.6]$ . Запишем формулу, по которой удобно находить равновесия:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\alpha x^2}{(\beta + x)^6} \\ 1 &= \frac{\alpha x}{(\beta + x)^6} \\ \alpha x &= (\beta + x)^6 \end{aligned} \quad (2)$$

Данную формулу можно рассмотреть как две функции. Построим графики функций  $y = \alpha x$  и  $y = (\beta + x)^6$ .

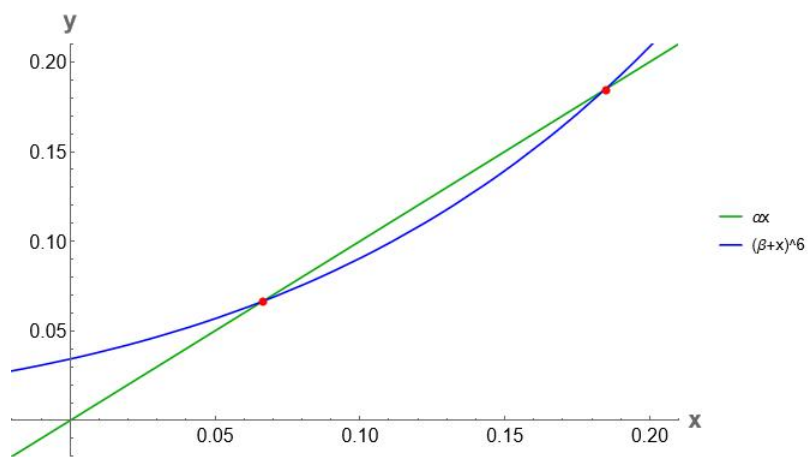
В зависимости от значений параметра  $\beta$  уравнение (2) может иметь ноль (при  $\beta > 0.582355932$ ), один (при  $\beta \approx 0.582355932$ ) или два корня (при  $\beta < 0.582355932$ ). На рисунках 1a, 1b и 1c можно увидеть все возможные варианты. При  $\beta = 0.582355932$  в модели наблюдается касательная бифуркации, сопровождающаяся появлением двух равновесий.

### 2.2 Временные ряды

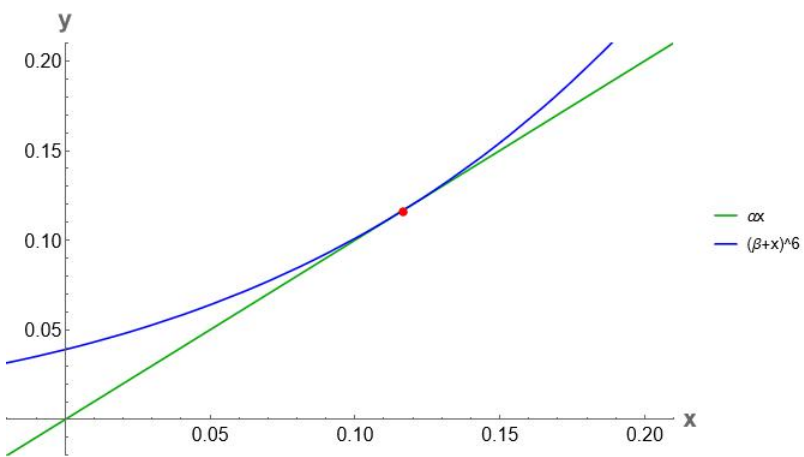
Для демонстрации поведения системы можно использовать временные ряды. Временной ряд позволяет наглядно показать как с течением времени изменяется численность популяции.

Далее рассмотрим подробнее все возможные ситуации. Для этого давайте зафиксируем параметр следующим образом:  $\beta = 0.56$ .

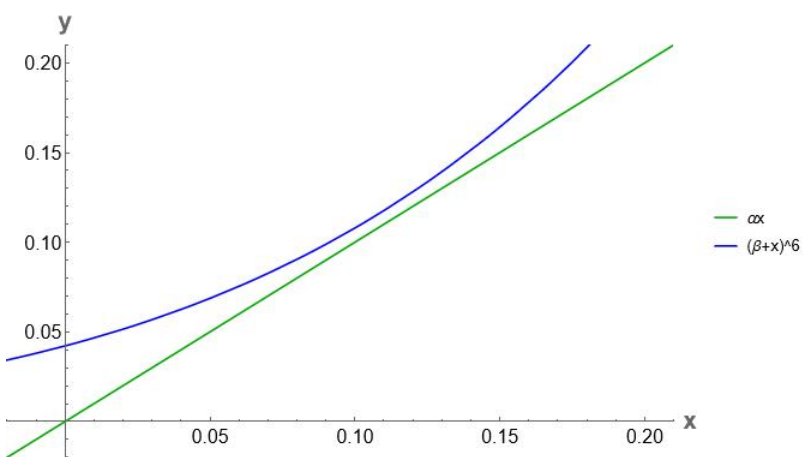
На 2 мы видим, что временные ряды, которые начинаются в  $x_0 = 0.04$  и в  $x_0 = 1.3$  сходятся к нулю. В биологическом смысле это означает, что популяция с течением времени вымирает.



(a)  $\beta = 0.57$



(b)  $\beta \approx 0.582355932$



(c)  $\beta = 0.59$

Рис. 1

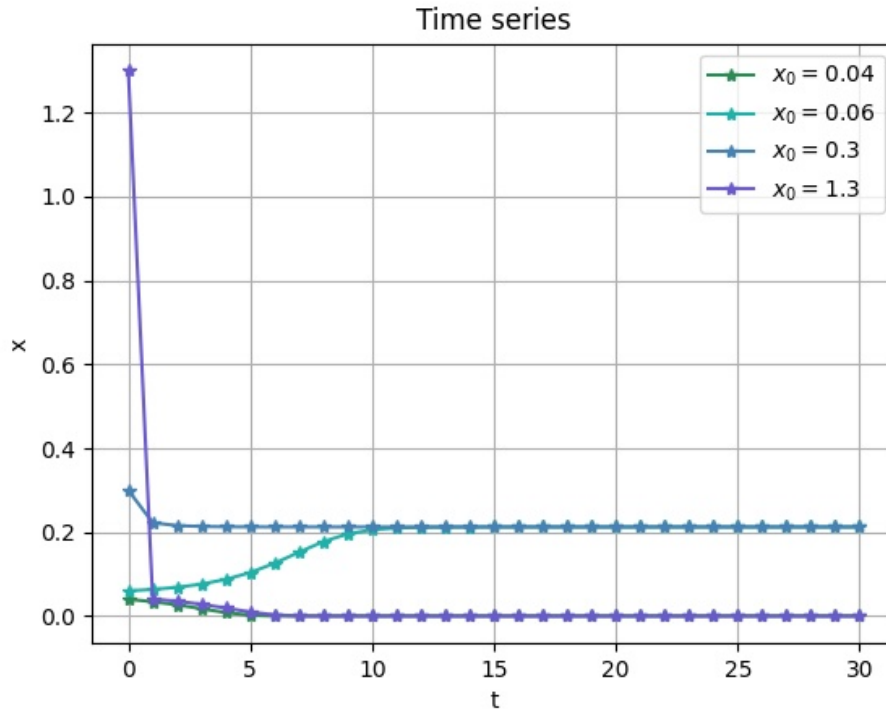


Рис. 2:  $\beta = 0.56$

А теперь зафиксируем начальную численность популяции на уровне  $x_0 = 0.06$ . На 2 видно, что при таких начальных условиях популяция увеличивается до некоторого значения. После достижения которого рост численности популяции прекращается. То есть популяция с течением времени стабилизируется.

Похожую ситуацию мы можем наблюдать на том же рисунке 2 при начальном значении  $x_0 = 0.3$ . Значения численности популяции тоже сходятся к устойчивому равновесию. Численность снова стабилизируется.

Рассмотрим ситуацию, когда  $\beta = 0.4$  и  $x_0 = 0.1$ . На рисунке 3 можно заметить, что элементы временного ряда принимают два значения. Это соответствуют циклу порядка 2, который можно увидеть на графике бифуркации 9.

Давайте теперь изменим значение параметра:  $\beta = 0.25$ . Начальная численность популяции:  $x_0 = 0.1$ . На рисунке 4 видно, что нет закономерности, по которой меняется численность популяции. Это поведение соответствует хаосу.

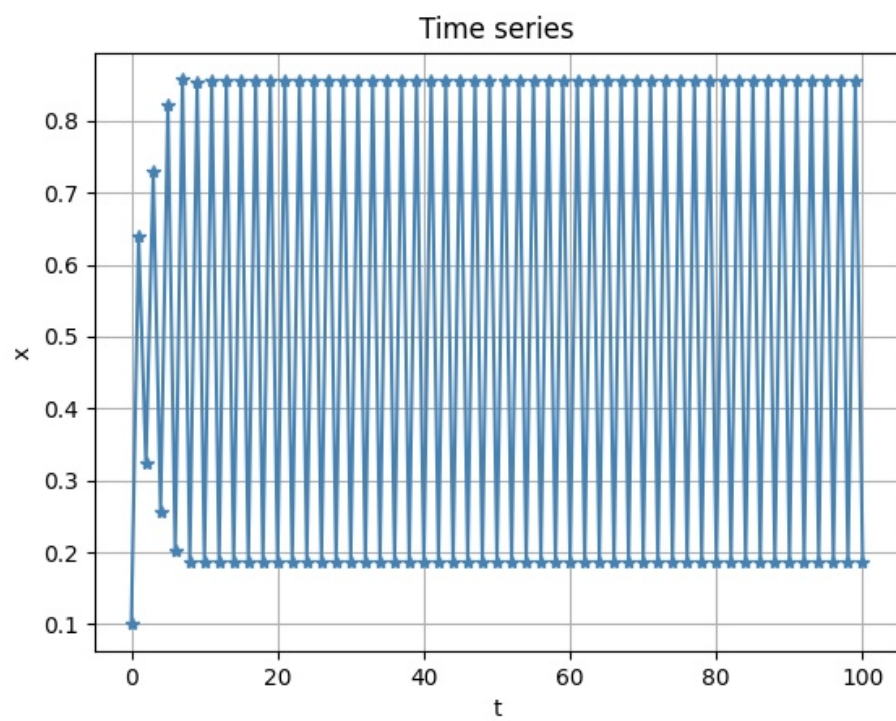


Рис. 3:  $x_0 = 0.1; \beta = 0.4$

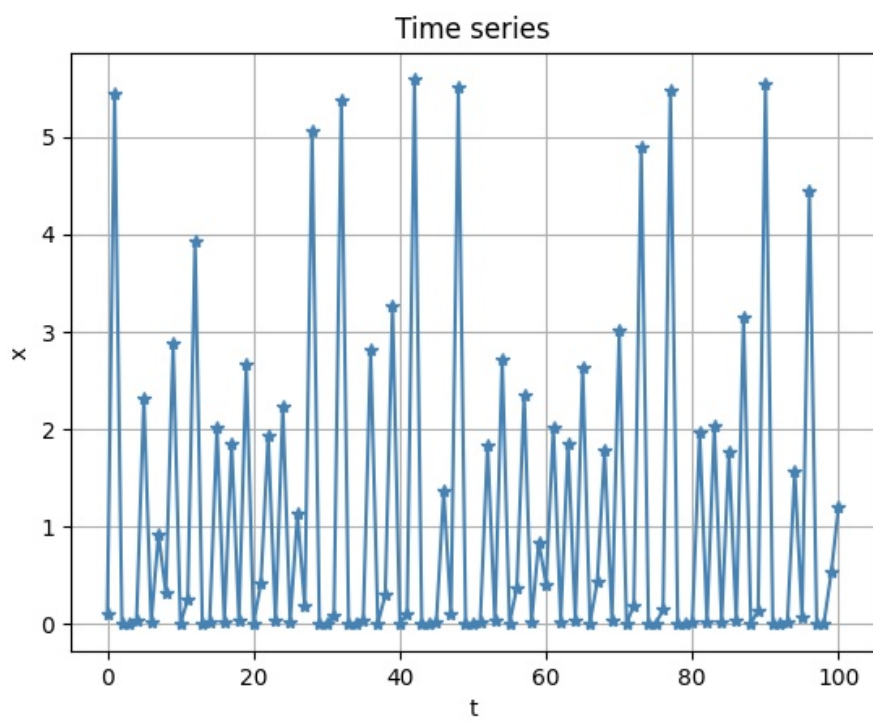


Рис. 4:  $x_0 = 0.1; \beta = 0.25$



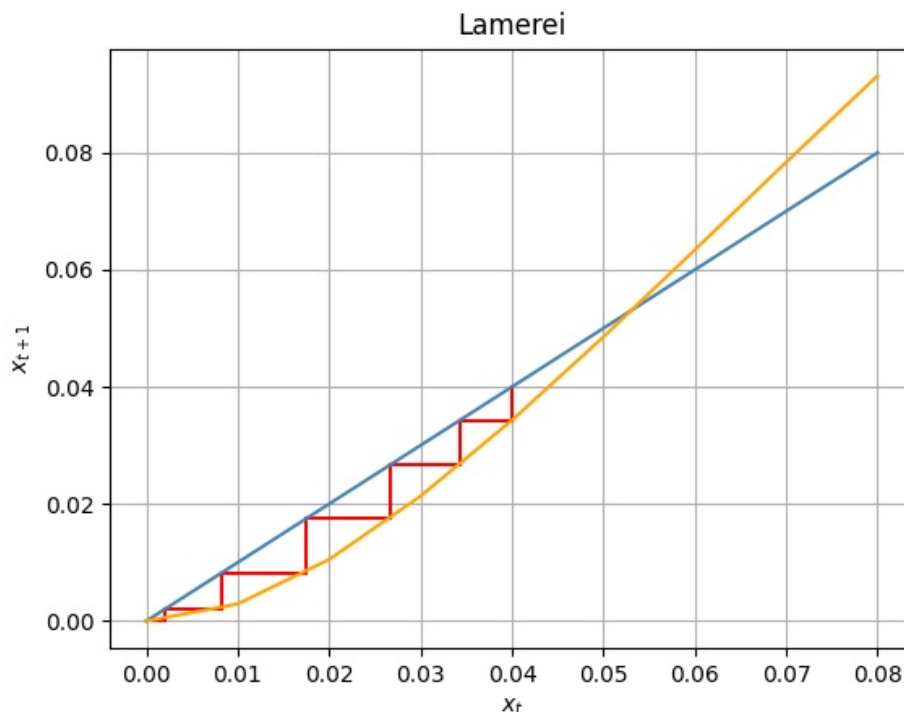


Рис. 5:  $x_0 = 0.04, \beta = 0.56$

### 2.3 Лестница Ламерея

Существует также инструмент визуализации решения отображения (2) называемый лестницей Ламерея. Этот метод аналогично временному ряду позволяет иллюстрировать то, как изменяется численность популяции с течением времени.

Опять же рассмотрим подробнее все возможные ситуации. Для этого зафиксируем параметр:  $\beta = 0.56$ .

Давайте зафиксируем начальную численность популяции  $x_0 = 0.04$ . На рисунке 5 мы видим, что траектория сходится к нулю. В биологическом смысле это означает, что популяция с течением времени вымирает.

А теперь зафиксируем начальную численность популяции на уровне  $x_0 = 0.06$ . На рисунке 6 видно, что при таких начальных условиях численность популяции сходится к  $x \approx 0.21$ .

Очень похожую ситуацию мы можем наблюдать на рисунке 7. Такой график построен при начальном значении  $x_0 = 0.3$ . Значения численности популяции тоже сходятся к устойчивому равновесию. Численность снова стабилизируется.

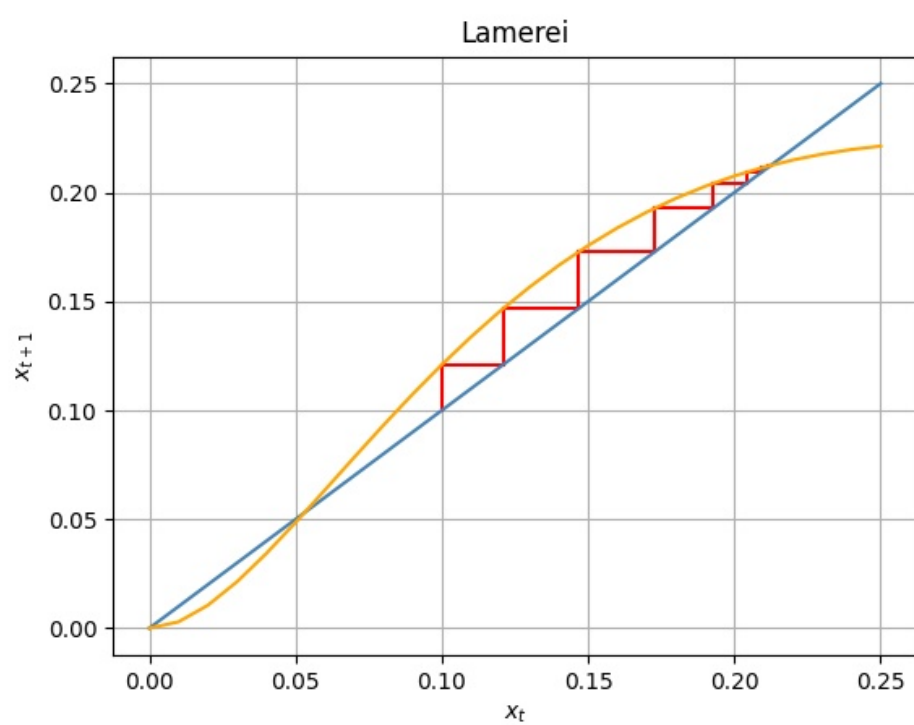


Рис. 6:  $x_0 = 0.1$

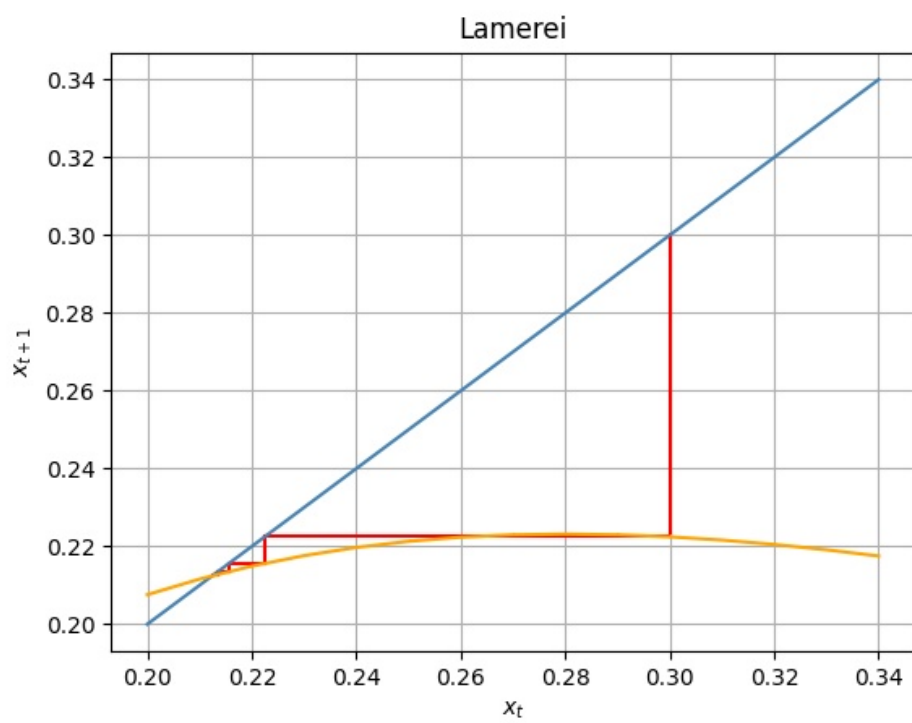


Рис. 7:  $x_0 = 0.3$

Теперь рассмотрим ситуацию, когда начальная численность популяции очень большая. Такая ситуация изображена на рисунках 8a и 8b. Мы видим, что популяция вымирает.

Таким образом, кроме маленького порогового значения численности популяции существует еще и большое значение, задающие интервал существования популяции. Вне этого интервала популяция вымирает.

## 2.4 Бифуркционная диаграмма

Для визуализации аттракторов при изменении бифуркационного параметра системы строится бифуркционная диаграмма. Бифуркционная диаграмма для модели (2) при  $\alpha = 1$  представлена на рисунке 9.

Бифуркционная диаграмма показывает в каком диапазоне изменяется численность популяции при конкретном значении параметра  $\beta$ .

Мы видим, что при  $\beta \in [0.44; 0.56]$  — аттрактором модели (2) является равновесие. Затем происходит раздвоение и при  $\beta \in [0.37; 0.44]$  видно, что аттрактором является цикл периода 2. На диапазоне  $\beta \in [0.36; 0.37]$  аттрактором является цикл периода 4. И т.д.

Рассмотренные выше интервалы диапазона значений  $\beta$  являются интервалами структурной устойчивости. При дальнейшем уменьшении значения параметра  $\beta$  зона каждого аттрактора становится все меньше и меньше.

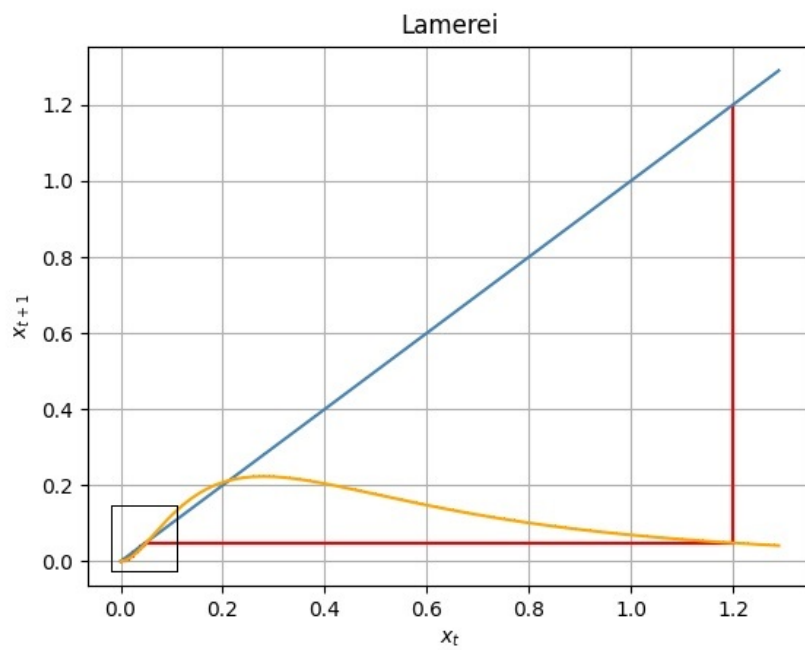
В модели реализуется каскад бифуркаций удвоения периода, приводящий к хаосу [2, стр. 33]. Когда наступает хаос, становится невозможным предсказание значения численности популяции в некоторый момент времени при известном начальном значении.

Также на бифуркационную диаграмму можно нанести линии, которые показывают границы хаоса, циклов и части равновесия. Такое можно увидеть на изображении 10. Также можно заметить, что численность популяции на участке хаоса и циклов не выходит за эти границы.

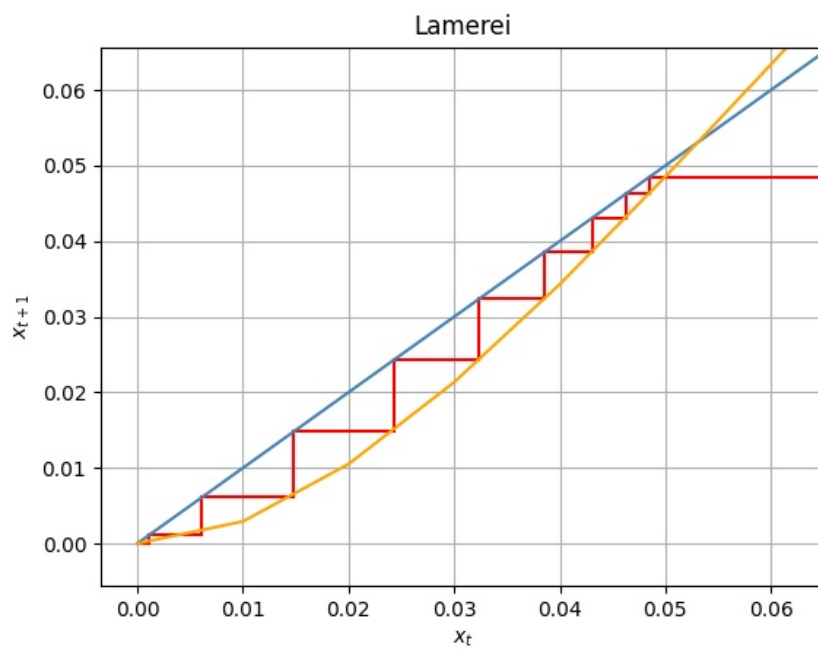
## 2.5 Показатель Ляпунова

Для определения устойчивости аттракторов часто используется показатель Ляпунова. Зависимость этого показателя для аттракторов модели (2) представлена на изображении 11.

На этом графике мы видим, что точки, где график показателя Ляпунова касается нуля точно соответствуют бифуркционным значениям, которые можно наблюдать на бифуркационной диаграмме представленной на рисунке (9).



(a)  $x_0 = 1.3$



(b) Дополнение к 8а

Рис. 8

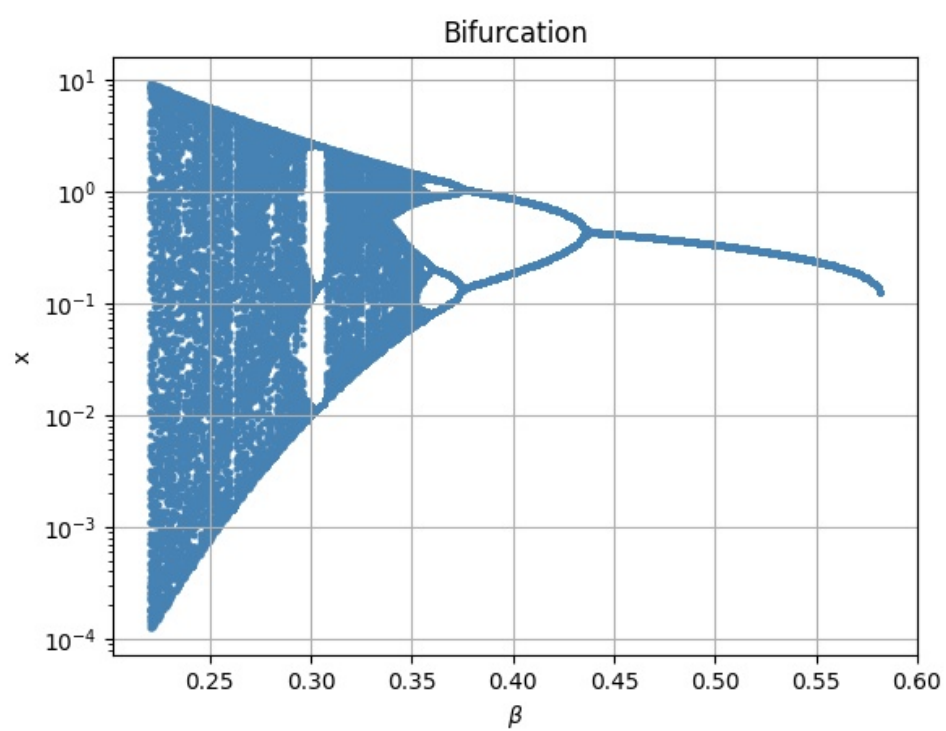


Рис. 9

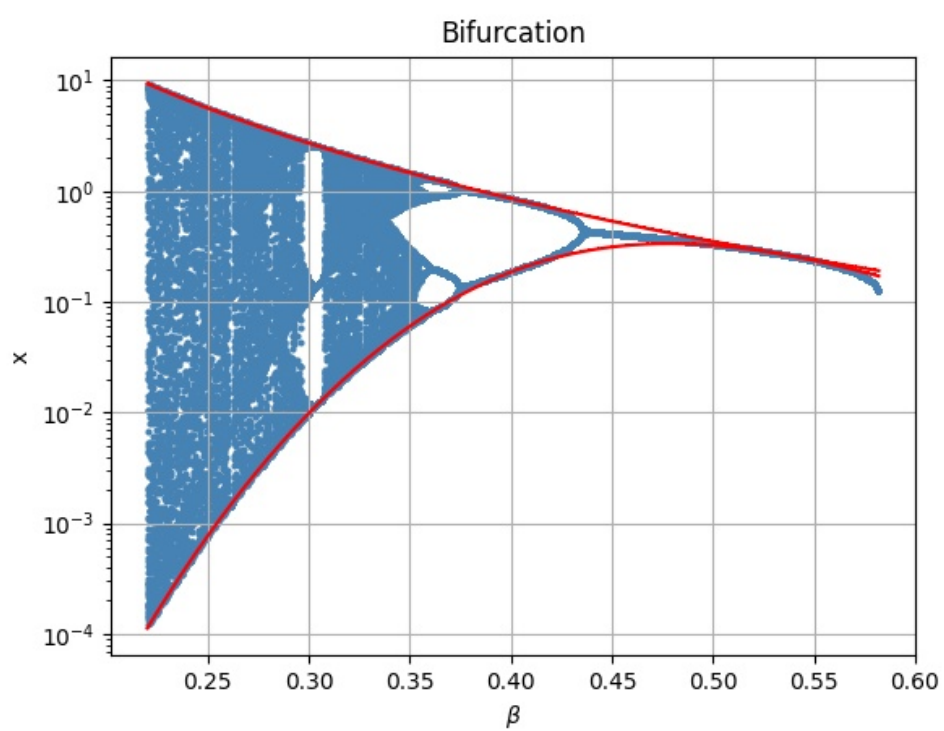


Рис. 10

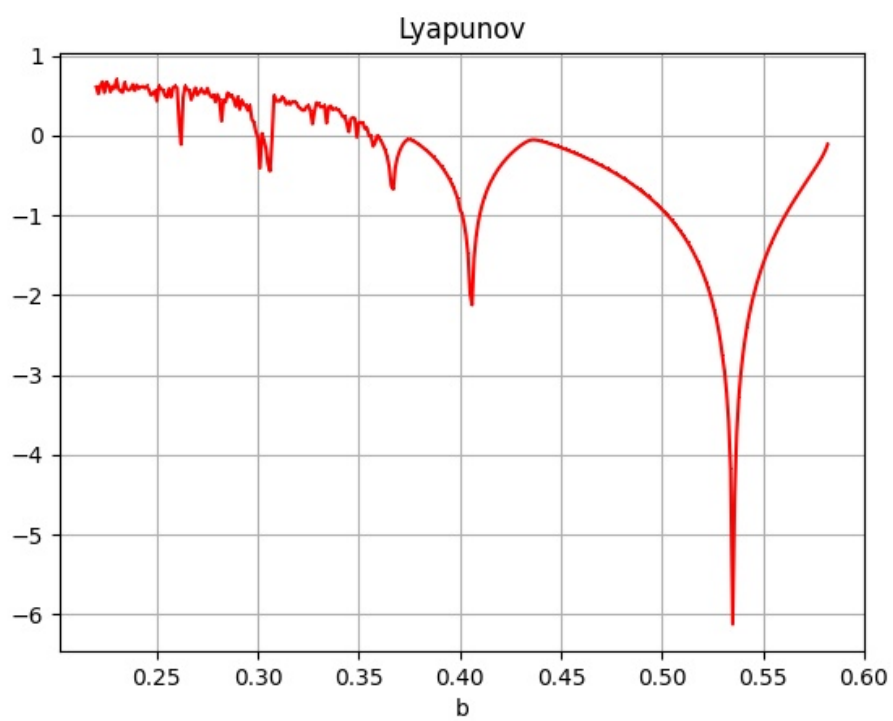


Рис. 11



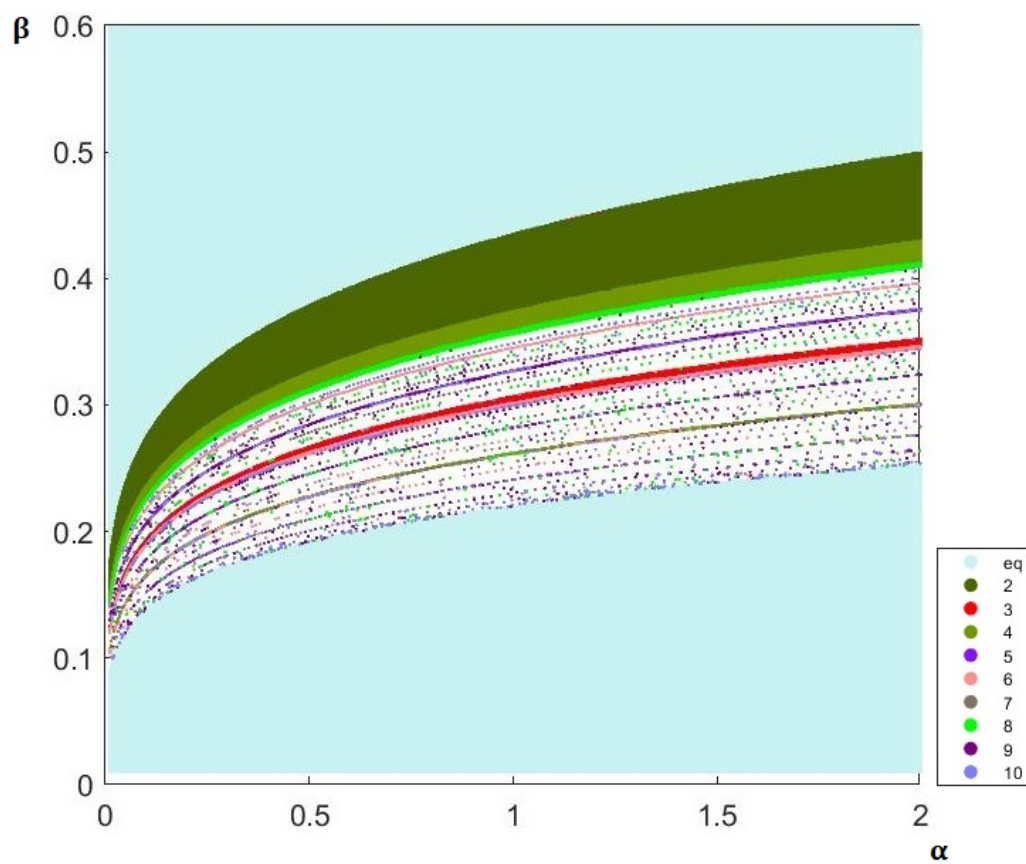


Рис. 12

## 2.6 Карта режимов

Карта режимов 12 позволяет исследовать поведение системы при определенных значениях параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , определенных на некотором диапазоне.

Например, можно заметить, что при любом значении параметра  $\alpha$  существует цикл степени 2. Чем меньше параметр  $\alpha$ , тем меньше интервал значений параметра  $\beta$ , при котором такой цикл существует.

### 3 Заключение

В работе представлены результаты компьютерного моделирования и анализа динамики численности популяции модели Хасселя. В рамках анализа с помощью методов численного моделирования были построены временные ряды, бифуркционные диаграммы, лестница Ламерея, показатель Ляпунова. Так же были найдены и изучены зоны сосуществования устойчивых равновесий и циклов.

Для визуализации использовались Python 3.9, matplotlib, GeoGebra и Wolfram Mathematica. Для вычислений — Python 3.9 и GeoGebra.

## Список литературы

- [1] Hassell M. P. Density-Dependence in Single-Species Populations // Journal of Animal Ecology. — 1975. — Vol. 44, no. 1. — P. 283–295. — Access mode: <http://www.jstor.org/stable/3863>.
- [2] Ряшко Л. Б. . . . Элементы нелинейной динамики: от порядка к хаосу. — 2006.
- [3] Sushko I., Gardini L., Avrutin V. Nonsmooth one-dimensional maps: some basic concepts and definitions // Journal of Difference Equations and Applications. — 2016. — Vol. 22, no. 12. — P. 1816–1870. — <https://doi.org/10.1080/10236198.2016.1248426>.
- [4] Anazawa M. Inequality in resource allocation and population dynamics models // Royal Society. — 2019. — Vol. 6, no. 7.
- [5] Feng G. Chaotic Dynamics and Chaos Control of Hassell-Type Recruitment Population Model // Discrete Dynamics in Nature and Society. — 2020. — Vol. 2020.