

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**  
**ФГАОУ ВО «УрФУ имени первого Президента России Б.Н. Ельцина»**  
Кафедра «школы бакалавриата (школа)»

Оценка работы \_\_\_\_\_  
Руководитель от УрФУ Перевалова Т. В.

Тема задания на практику

Производственная практика, научно-исследовательская работа

ОТЧЕТ

Вид практики Производственная практика

Тип практики Производственная практика, научно-исследовательская работа

Руководитель практики от предприятия (организации) Перевалова Т. В.

ФИО руководителя

Подпись

Студент Соломеин Л.Е.

ФИО студента

Специальность (направление подготовки) 02.03.01 Математика и компьютерные науки

Группа МЕН-390206

Екатеринбург 2022

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Основная часть</b>	<b>3</b>
2.1	Описание модели . . . . .	3
2.2	Временные ряды . . . . .	3
2.3	Лестница Ламерея . . . . .	7
2.4	Бифуркционная диаграмма . . . . .	9
2.5	Показатель Ляпунова . . . . .	14
2.6	Карта режимов . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Заключение</b>	<b>16</b>

# 1 Введение

В настоящее время задачи экологии имеют большое значение. Важно научиться применять методы для анализа математических моделей различных экологических систем.

Одна из основных задач экологии — изучение структуры системы и то, как она функционирует, поиск закономерностей. В качестве инструмента для анализа систем можно использовать методы из различных разделов математики, в частности нелинейной динамики.

В данной работе предложены некоторые выкладки по анализу дискретной модели Хасселя с эффектом Олли [1], [2]. Подобные модели широко используются в качестве общих моделей динамики популяции с дискретным временем и наличием конкуренции за ресурсы и внутривидовой конкуренции. Так же их используют для исследования различных явлений в динамике популяций.

## 2 Основная часть

### 2.1 Описание модели

Одна из вариаций модели Хасселя [1] имеет следующую математическую запись:

$$x_{t+1} = \frac{\alpha x_t^2}{(\beta + x_t)^6}. \quad (1)$$

В данной формуле  $x_i$  — количество особей в поколении с номером  $i$ . Параметр  $\alpha$  определяет скорость роста популяции, а параметр  $\beta$  определяет несущую способность окружающей среды.

Для упрощения задачи рассмотрим частный случай. Зафиксируем параметр  $\alpha = 1$ . Параметр  $\beta$  изменяется в диапазоне  $[0; 0.6]$ . Для нахождения равновесий требуется решить следующее уравнение:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\alpha x^2}{(\beta + x)^6} \\ 1 &= \frac{\alpha x}{(\beta + x)^6} \\ \alpha x &= (\beta + x)^6 \end{aligned} \quad (2)$$

Построим графики функций  $y = \alpha x$  и  $y = (\beta + x)^6$ .

В зависимости от значений параметра  $\beta$  уравнение (2) может иметь ноль (при  $\beta > 0.582355932$ ), один (при  $\beta \approx 0.582355932$ ) или два корня (при  $\beta < 0.582355932$ ). На рисунках 1a, 1b и 1c можно увидеть все возможные варианты. При  $\beta = 0.582355932$  в модели наблюдается касательная бифуркации, сопровождающаяся появлением двух равновесий.

### 2.2 Временные ряды

Для демонстрации поведения системы можно использовать временные ряды. Временной ряд позволяет наглядно показать как с течением времени изменяется численность популяции.

Далее рассмотрим подробнее основные типичные ситуации. Для этого давайте зафиксируем параметр следующим образом:  $\beta = 0.56$ .

На рисунке 2 мы видим, что временные ряды, которые начинаются в  $x_0 = 0.04$  и в  $x_0 = 1.3$  сходятся к нулю. В биологическом смысле это означает, что популяция с течением времени вымирает.

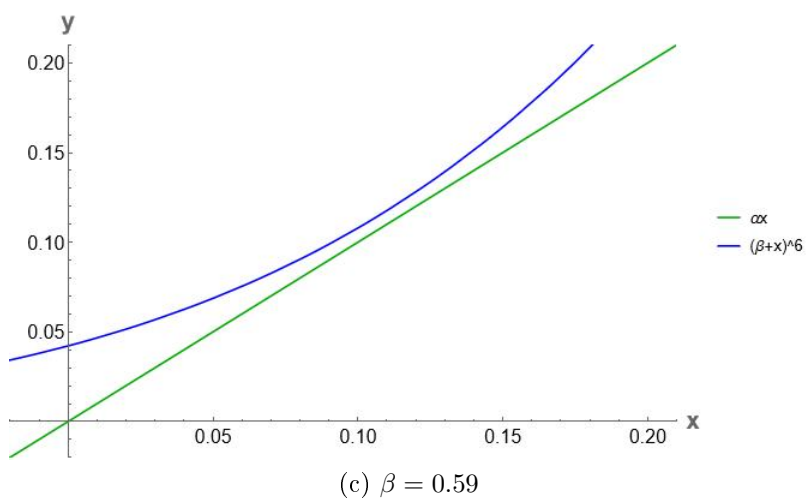
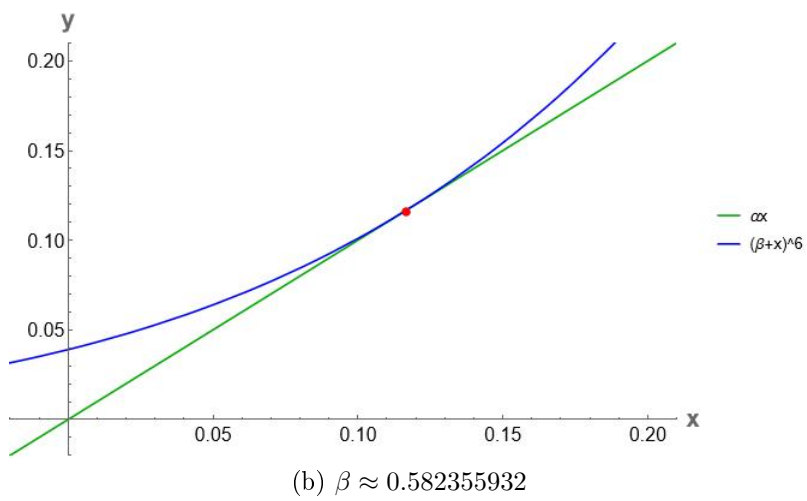
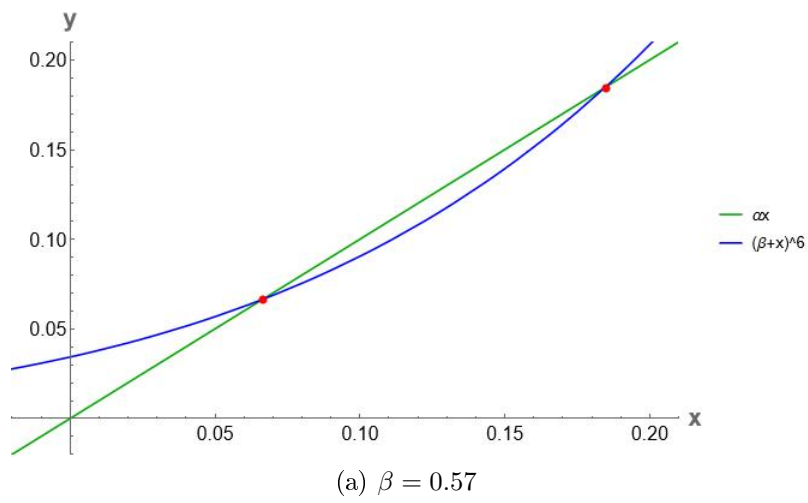


Рис. 1: Решения уравнения (2) для разных значений параметра  $\beta$

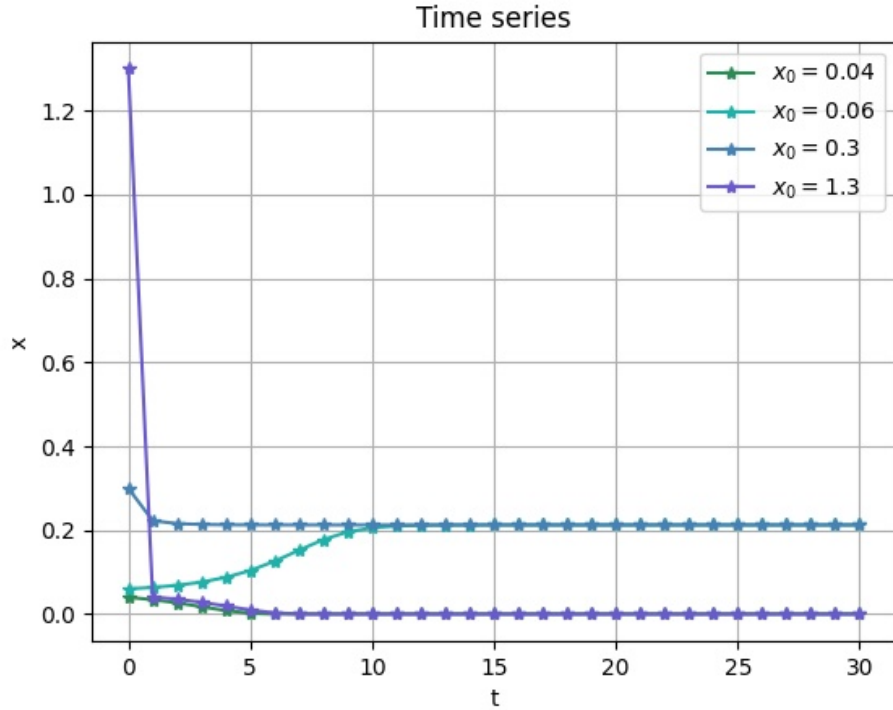


Рис. 2: Временные ряды модели (1) для  $\beta = 0.56$  при различных начальных значениях

А теперь зафиксируем начальную численность популяции на уровне  $x_0 = 0.06$ . На рисунке 2 видно, что при таких начальных условиях популяция увеличивается до некоторого значения. После достижения которого рост численности популяции прекращается. То есть популяция с течением времени стабилизируется.

Похожую ситуацию мы можем наблюдать на том же рисунке 2 при начальном значении  $x_0 = 0.3$ . Значения численности популяции тоже сходятся к устойчивому равновесию. Численность снова стабилизируется.

Рассмотрим ситуацию, когда  $\beta = 0.4$  и  $x_0 = 0.1$ . На рисунке 3 можно заметить, что элементы временного ряда принимают два значения. Это соответствуют циклу порядка 2, который можно увидеть на бифуркационной диаграмме, которую можно увидеть на рисунке 7.

Давайте теперь изменим значение параметра:  $\beta = 0.25$ . Начальная численность популяции:  $x_0 = 0.1$ . На рисунке 4 видно, что нет закономерности, по которой меняется численность популяции. Это поведение

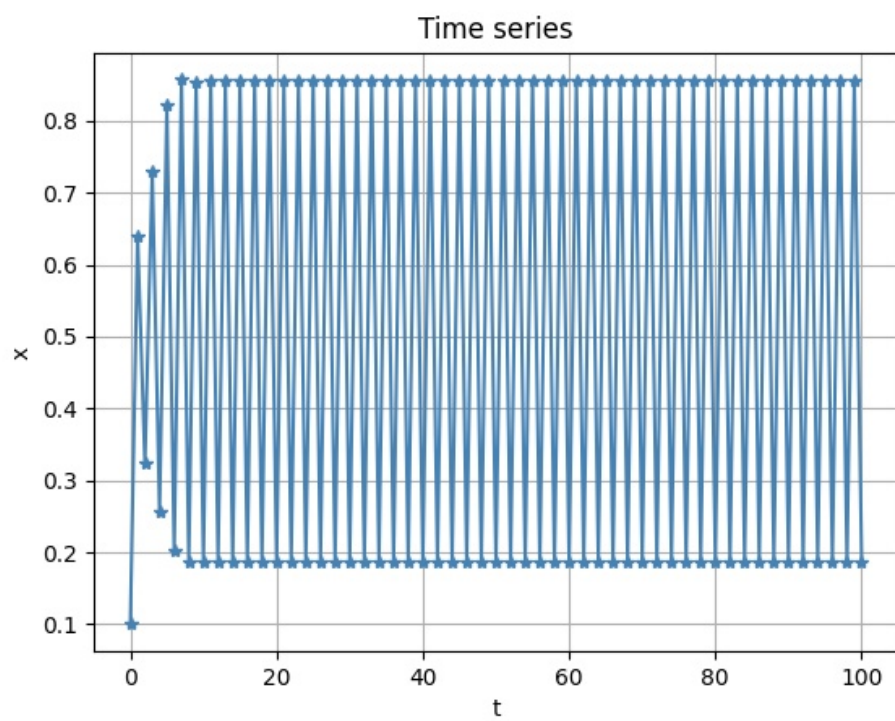


Рис. 3: Временной ряд модели (1) для  $\beta = 0.4$  и  $x_0 = 0.1$

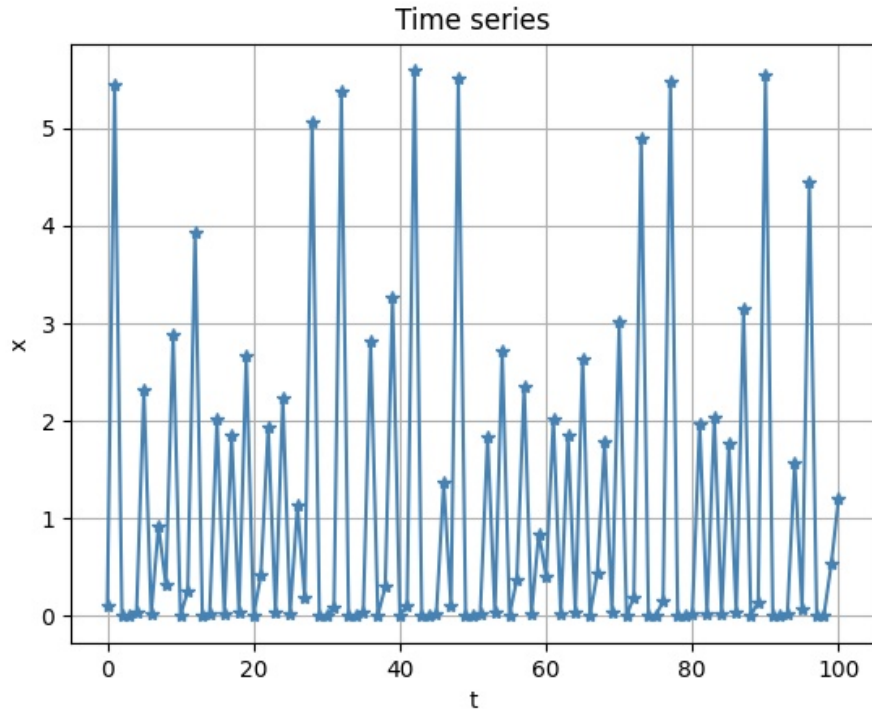


Рис. 4: Временной ряд модели (1) для  $\beta = 0.25$  и  $x_0 = 0.1$

соответствуют хаосу.

### 2.3 Лестница Ламерея

Существует также инструмент визуализации решения отображения (2) называемый лестницей Ламерея. Этот метод аналогично временному ряду позволяет иллюстрировать то, как изменяется численность популяции с течением времени.

Опять же рассмотрим подробнее основные типичные ситуации. Для этого зафиксируем параметр:  $\beta = 0.56$ .

Давайте зафиксируем начальную численность популяции  $x_0 = 0.03$ . На рисунке 5 мы видим, что траектория сходится к нулю. В биологическом смысле это означает, что популяция с течением времени вымирает.

А теперь зафиксируем начальную численность популяции на уровне  $x_0 = 0.06$ . На рисунке 5 видно, что при таких начальных условиях численность популяции сходится к  $x \approx 0.21$ .

Очень похожую ситуацию мы можем наблюдать на рисунке 5. Такой



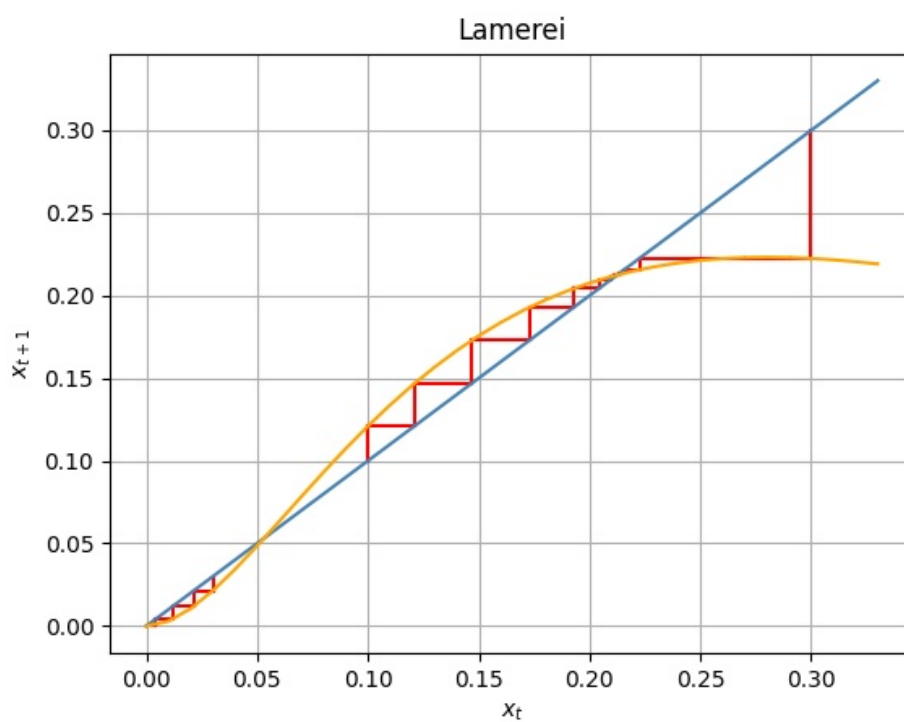


Рис. 5: Лестница Ламерея модели (1) для  $\beta = 0.56$  и  $x_0 = 0.03$ ,  $x_0 = 0.1$  и  $x_0 = 0.3$

график построен при начальном значении  $x_0 = 0.3$ . Значения численности популяции тоже сходятся к устойчивому равновесию. Численность снова стабилизируется.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда начальная численность популяции очень большая. Такая ситуация изображена на рисунках 6а и 6б. Мы видим, что популяция вымирает.

Таким образом, кроме маленького порогового значения численности популяции существует еще и большое значение, задающие интервал существования популяции. Вне этого интервала популяция вымирает.

## 2.4 Бифуркционная диаграмма

Для визуализации аттракторов при изменении бифуркационного параметра системы строится бифуркационная диаграмма. Бифуркционная диаграмма для модели (1) при  $\alpha = 1$  представлена на рисунке 7.

Бифуркационная диаграмма показывает в каком диапазоне изменяется численность популяции при конкретном значении параметра  $\beta$ .

Мы видим, что при  $\beta \in [0.44; 0.56]$  — аттрактором модели (1) является равновесие. Затем происходит удвоение периода и при  $\beta \in [0.37; 0.44]$  видно, что аттрактором является цикл периода 2. На диапазоне  $\beta \in [0.36; 0.37]$  аттрактором является цикл периода 4. И т.д.

Рассмотренные выше интервалы диапазона значений  $\beta$  являются интервалами структурной устойчивости. При дальнейшем уменьшении значения параметра  $\beta$  зона каждого аттрактора становится все меньше и меньше.

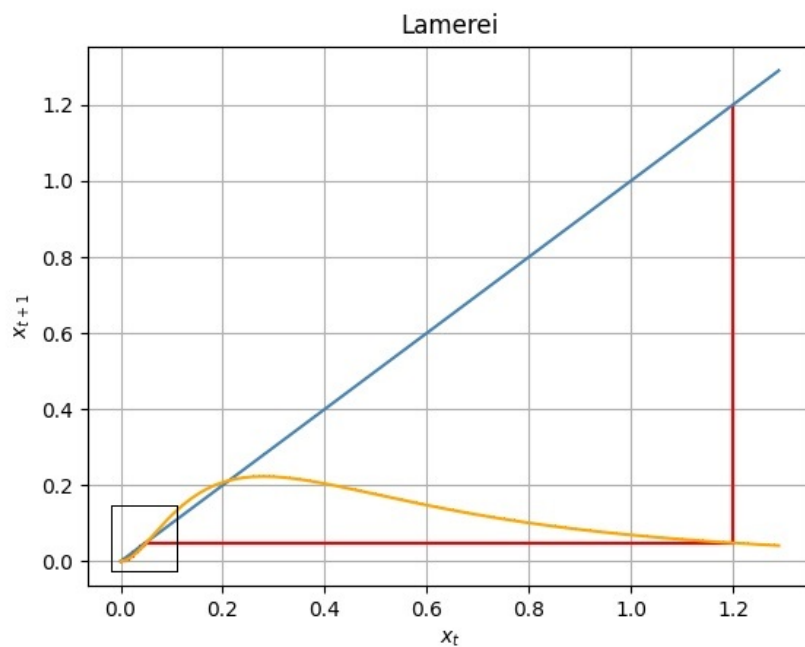
В модели реализуется каскад бифуркаций удвоения периода, приводящий к хаосу [3, стр. 33]. Когда наступает хаос, становится невозможным предсказание значения численности популяции в некоторый момент времени при известном начальном значении.

Также на бифуркационную диаграмму можно нанести линии, которые показывают границы хаоса, циклов и части равновесия, опираясь на теорию критических точек [4]. Такое можно увидеть на рисунке 8. Также можно заметить, что численность популяции на участке хаоса и циклов не выходит за эти границы.

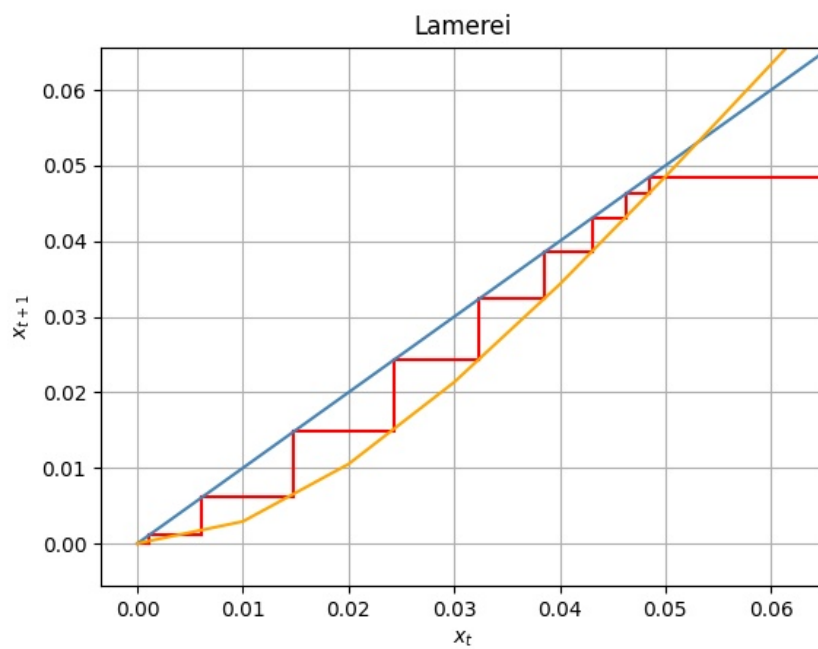
На рисунке 9 изображена бифуркационная диаграмма, равновесия и образ одного из равновесий.

Заметим, что на интервале от  $\beta_3$  до  $\beta_2$  устойчивое равновесие совпадает с аттрактором [3].

Если начальное значение траектории находится в интервале от  $x_1^*$  до  $x_{1,-1}^*$ , то она сойдется на равновесие  $x_2^*$ . В случае, если траектория



(a) Общий вид лестницы Ламерея



(b) Дополнение к 6а

Рис. 6: Лестница Ламерея модели (1) для  $\beta = 0.56$  и  $x_0 = 1.3$

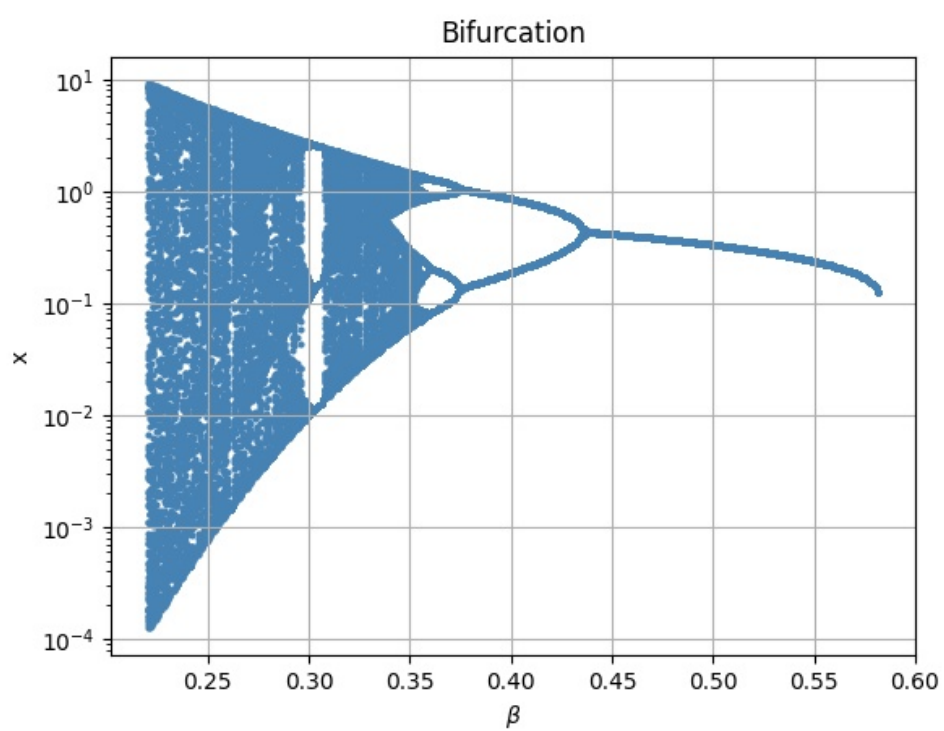


Рис. 7: Бифуркационная диаграмма модели 1

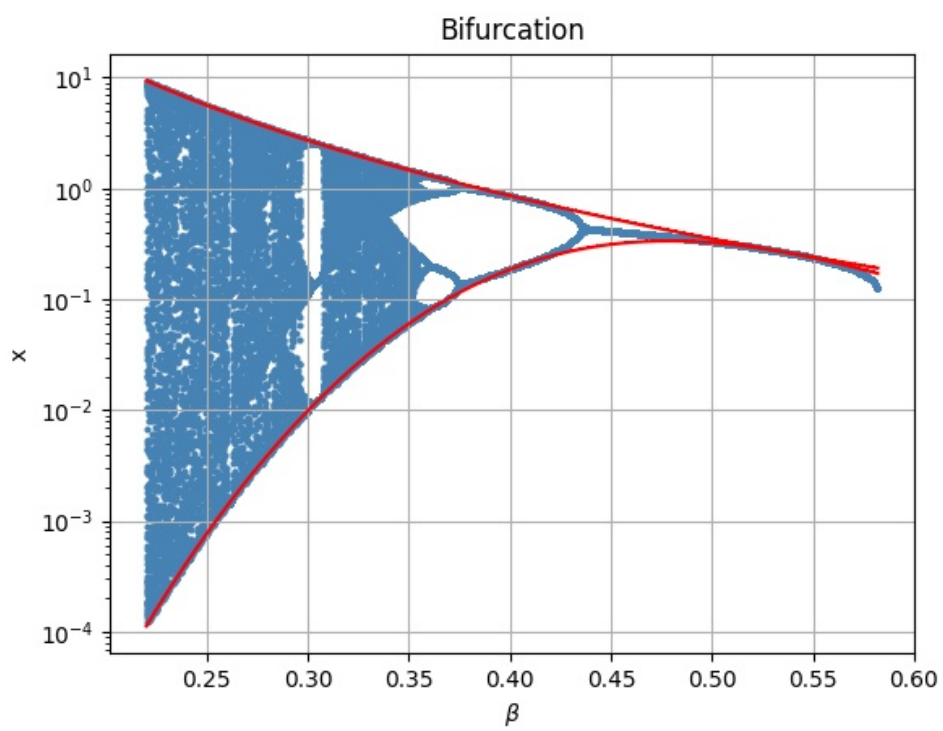


Рис. 8: Бифуркационная диаграмма модели (1) — синим представлены аттракторы модели, красным — критические линии

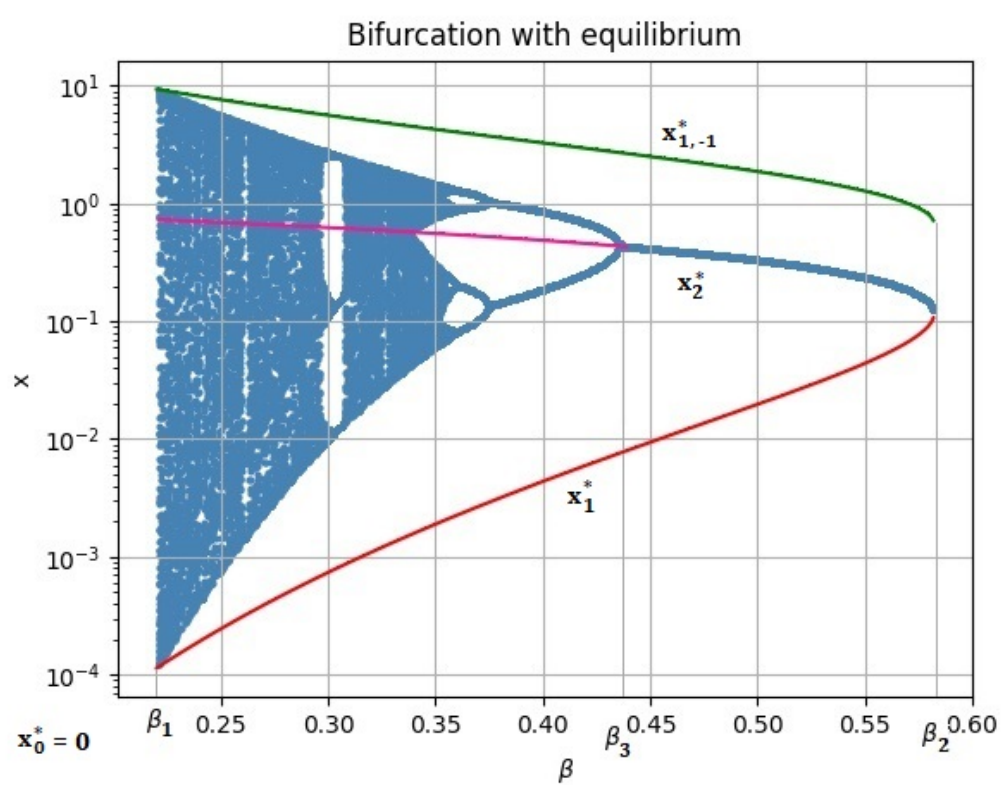


Рис. 9: Бифуркационная диаграмма модели (1) с равновесиями и образом равновесия  $x_1^*$

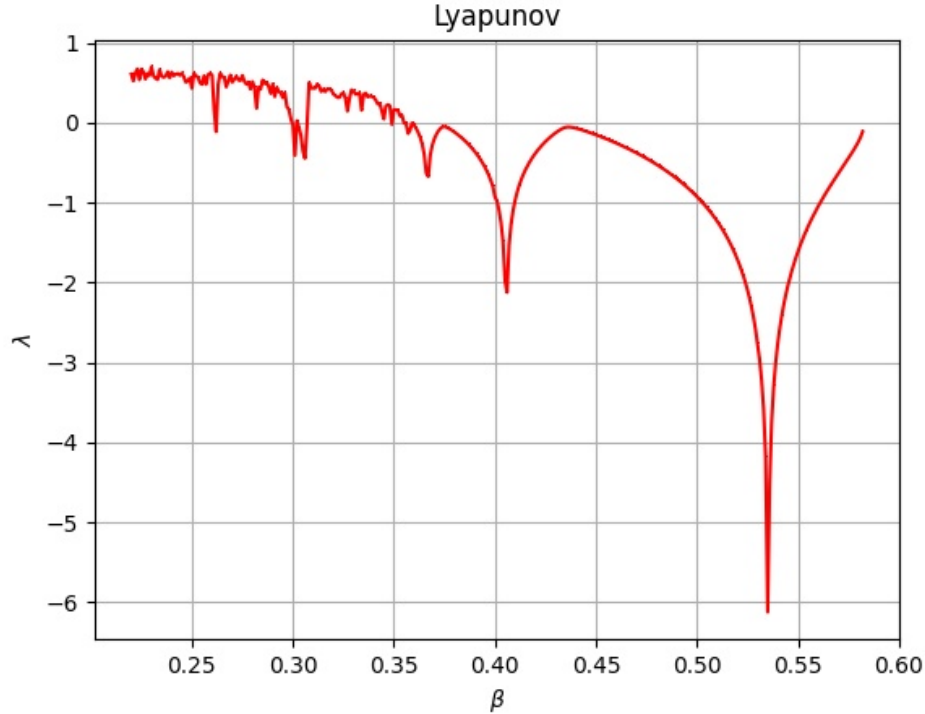


Рис. 10: Показатель Ляпунова для модели (1)

начинается за пределом этого интервала, то она сойдется на нулевое равновесие.

Такую ситуацию мы также можем наблюдать при построении временных рядов. На рисунке 2 можно увидеть, что если начальное значение  $x_0 = 0.04$  или  $x_0 = 1.3$ , то численность популяции сойдется на нулевое равновесие. Эти значения  $x_0$  лежат вне интервала от  $x_1^*$  до  $x_{1,-1}^*$ .

Рассмотрим временные ряды, которые в качестве начальных значений принимают  $x_0 = 0.06$  и  $x_0 = 0.3$ . Такие временные ряды сходятся к значению  $x_2^*$ , потому что эти значения лежат в бассейне притяжения.

Исходя из вышесказанного, можно сделать вывод о том, что равновесия  $x_0^*$  и  $x_2^*$  являются устойчивыми, а равновесие  $x_1^*$  — неустойчивым.

## 2.5 Показатель Ляпунова

Для определения устойчивости аттракторов часто используется показатель Ляпунова. Зависимость этого показателя для аттракторов модели (1) представлена на рисунке 10.

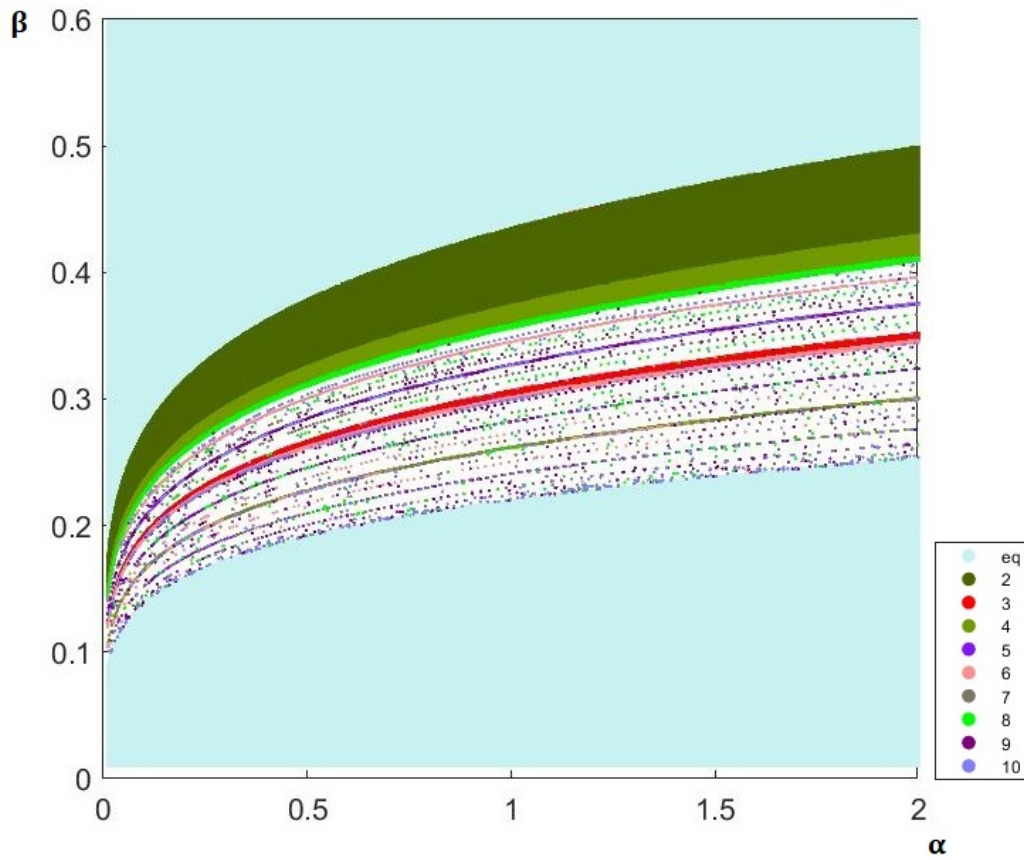


Рис. 11: Карта режимов модели (1)

На этом графике мы видим, что точки, где график показателя Ляпунова касается нуля точно соответствуют бифуркционным значениям, которые можно наблюдать на бифуркационной диаграмме представленной на рисунке 7.

## 2.6 Карта режимов

Карта режимов, представленная на рисунке 11, позволяет показать возникающие динамические режимы системы при определенных значениях параметров  $\alpha$  и  $\beta$ .

Можно заметить, что при любом значении параметра  $\alpha$  существует цикл периода 2. Чем меньше параметр  $\alpha$ , тем меньше интервал значений параметра  $\beta$ , при котором такой цикл существует.



### 3 Заключение

В работе представлены результаты компьютерного моделирования и анализа динамики численности популяции модели Хасселя. В рамках анализа с помощью методов численного моделирования были построены временные ряды, бифуркционные диаграммы, лестница Ламерея, показатель Ляпунова и карта режимов. Были найдены и изучены зоны сосуществования различных аттракторов.

Для визуализации использовались Python 3.9, matplotlib, GeoGebra и Wolfram Mathematica. Для вычислений — Python 3.9 и GeoGebra.

## Список литературы

- [1] Hassell M. P. Density-Dependence in Single-Species Populations // Journal of Animal Ecology. — 1975. — Vol. 44, no. 1. — P. 283–295. — Access mode: <http://www.jstor.org/stable/3863>.
- [2] Anazawa M. Inequality in resource allocation and population dynamics models // Royal Society. — 2019. — Vol. 6, no. 7.
- [3] Ряшко Л. Б. . . . Элементы нелинейной динамики: от порядка к хаосу. — 2006.
- [4] Sushko I., Gardini L., Avrutin V. Nonsmooth one-dimensional maps: some basic concepts and definitions // Journal of Difference Equations and Applications. — 2016. — Vol. 22, no. 12. — P. 1816–1870. — <https://doi.org/10.1080/10236198.2016.1248426>.