$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Θέλουμε να βρούμε το 'λ' για το οποίο μεγιστοποιείται η $P(\lambda / X)$, όπου X το σύνολο των παρατηρήσεων. Επειδή αυτό είναι δύσκολο, παίρνουμε τον κανόνα του Bayes, όπου

$$P(\lambda / X) = \frac{P(X|\lambda) \cdot P(\lambda)}{P(X)}$$

. Δεν έχουμε καμία πληροφορία για το λ ή το X, θεωρούμε οι παρατηρήσεις είναι ανεξάρτητες. Επομένως μπορούμε να μεγιστοποιήσουμε την $P(X|\lambda)$

$$P(X|\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda \cdot e^{-\lambda x_i} = \lambda^n \cdot \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda x_i} = \lambda^n \cdot e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

Άρα η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι:

$$L(\lambda) = \lambda^n \cdot e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

Είναι πιο εύκολο να δουλέψουμε με την $\log(L(\lambda))$.

$$LL(\lambda) = \ln\left(\lambda^n \cdot e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i}\right) = \ln(\lambda^n) + \ln\left(e^{-\lambda \sum x_i}\right) =$$

$$= n \ln(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Πρέπει να βρούμε που μηδενίζεται η παράγωγος.

$$\frac{dLL(\lambda)}{d\lambda} = n \frac{1}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{n}{\sum x_i} \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}}.$$