Le projet est un travail personnel qui fournira la note du module. Il est demandé aux étudiants de traiter au choix certaines parties proposées ci-dessous et de rendre un rapport de 15 à 20 pages expliquant les conclusions et résultats numériques qu'ils ont obtenus. Préférablement, le rapport sera écrit en LaTeX. Le rapport devra être posté sur le Moodle du cours avant le 19 mars 2019. Le sujet proposé contient plusieurs parties. Il ne convient pas forcément de tout traiter, mais il faut plutôt considérer qu'il s'agit d'un cadre dans lequel il est demandé à l'étudiant de s'exprimer. Ainsi, il pourra laisser une part importante à des recherches personnelles et au traitement de questions qu'il se sera posées ainsi qu'à des discussions de points techniques qui lui ont paru importants. Une large part peut être laissée à son initiative, s'il le souhaite.

Projet

Le but de ce projet est d'appliquer la méthode des éléments finis pour résoudre les équations de la mécanique des fluides à bas nombre de Reynolds. Ce type d'écoulements est régi par les équations de Stokes

$$\begin{cases} -\nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}\,, \\ \qquad \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

où l'on adjoint des conditions aux limites adaptées (de type Dirichlet ou Neumann).
Dans les équations précédentes, ν est la viscosité du fluide, $\mathbf{u}$ représente sa vitesse et p sa pression. Les forces extérieures (par exemple le poids) sont représentées par $\mathbf{f}$. La densité du fluide sera prise égale à 1.

On rappelle que, si $\mathbf{u}$ est un vecteur et σ une matrice,

$$\Delta\mathbf{u} = (\Delta u_i)_{1\le i\le N}\,, \qquad \nabla\mathbf{u} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)_{1\le i,j\le N}$$

et que la divergence de σ est le vecteur de composantes

$$(\operatorname{div}(\sigma))_i = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij} = \operatorname{div}(\sigma_i)\,,$$

où l'on a noté σ_i le vecteur formé de la i-ème ligne de σ.

1 Origine des équations de Stokes

Les équations de Stokes proviennent des équations de Navier-Stokes en régime incompressible, lorsque l'inertie est négligeable. Du point de vue de leur dérivation mécanique, elles proviennent de l'écriture

$$-\operatorname{div}(\sigma(\mathbf{u})) = \mathbf{f}\,, \tag{2}$$

dans laquelle le tenseur des contraintes (qui est une matrice symétrique) est donné par

$$\sigma(\mathbf{u}) = \nu(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^t) - p\,\mathrm{Id}\,.$$

En termes de composantes, on écrira

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}) = \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - p\, \delta_{ij}$$

où δ_{ij} représente le symbole de Kronecker.

Question 1. Vérifier que

$$-\mathrm{div}(\sigma(\mathbf{u})) = -\nu \Delta \mathbf{u} - \nu \nabla(\mathrm{div}(\mathbf{u})) + \nabla p\,,$$

de sorte que l'on retrouve les équations de Stokes (1) à partir de (2) et de la contrainte d'incompressibilité $\mathrm{div}(\mathbf{u}) = 0$.

Remarque : Puisque les équations de Stokes sont linéaires, nous prendrons à partir de maintenant systématiquement la viscosité ν égale à 1.

Question 2. (Intégration par parties : formules de Green)
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^1$. Considérons w une fonction de $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$. Alors elle vérifie la formule de Green

$$\int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_i}(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} w(x) n_i(x)\, ds, \tag{G$_1$}$$

où n_i est la i-ème composante de la normale extérieure unité $\mathbf{n}$ à $\partial\Omega$. À partir de cette formule, montrer :

$$\int_\Omega v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\, dx + \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) u(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} v(x) u(x) n_i(x)\, ds, \qquad \forall v, u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}). \tag{G$_2$}$$

En déduire

$$\int_\Omega v(x) \mathrm{div}\mathbf{u}(x)\, dx + \int_\Omega \nabla v(x) \cdot \mathbf{u}(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} v(x) \mathbf{u}(x) \cdot \mathbf{n}(x)\, ds, \qquad \forall v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}), \mathbf{u} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})^N, \tag{G$_3$}$$

puis

$$\int_\Omega v(x) \Delta u(x)\, dx + \int_\Omega \nabla v(x) \cdot \nabla u(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} v(x) \frac{\partial u}{\partial n}(x)\, ds, \qquad \forall v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}), u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}), \tag{G$_4$}$$

où $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)_{1 \le i \le N}$ est le vecteur gradient de u et $\frac{\partial u}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \nabla u$.

Question 3. Montrer que la somme des forces exercées sur toute partie $\omega \subset \Omega$ d'un fluide modélisé par les équations (2) dans Ω est nulle. On rappelle que par définition du tenseur des contraintes, la force exercée sur ω par le reste du fluide est $\int_{\partial\omega} \sigma(\mathbf{u}) \mathbf{n}\, ds$ où $\mathbf{n}$ est la normale extérieure unitaire à $\partial\omega$.

2 Formulations variationnelles

L'étude mathématique de l'existence de solutions aux équations de Stokes se fait en considérant la formulation variationnelle du problème. Or, ici, il en existe deux suivant la condition de Neumann que l'on souhaite utiliser.

En ce qui concerne la condition de Dirichlet, nous prendrons systématiquement $\mathbf{u} = 0$ au bord du fluide qui est en contact avec un solide au repos (cette condition est souvent appelée *condition de non-glissement*). On considère donc Γ_D une partie du bord sur laquelle on souhaite imposer la condition de Dirichlet $\mathbf{u} = 0$ et Γ_N le bord libre (typiquement la surface libre du fluide) sur lequel on n'impose aucune condition. On propose ainsi les deux formulations variationnelles suivantes qui sont toutes les deux du type

$$\begin{aligned}&\text{Trouver } (\mathbf{u}, p) \in V \times M \text{ tel que } \forall (\mathbf{v}, q) \in V \times M,\\ &a((\mathbf{u}, p), (\mathbf{v}, q)) = l((\mathbf{v}, q)),\end{aligned}$$

mais dans lesquelles on prend respectivement :

- Pour la première
$$a((\mathbf{u}, p), (\mathbf{v}, q)) = \int_\Omega \nabla\mathbf{u} : \nabla\mathbf{v}\, dx - \int_\Omega p\, \mathrm{div}(\mathbf{v})\, dx - \int_\Omega q\, \mathrm{div}(\mathbf{u})\, dx.$$

- Pour la seconde
$$a((\mathbf{u}, p), (\mathbf{v}, q)) = \int_\Omega (\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^t) : \nabla\mathbf{v}\, dx - \int_\Omega p\ \mathrm{div}(\mathbf{v})\, dx - \int_\Omega q\ \mathrm{div}(\mathbf{u})\, dx\,.$$

(On note pour deux matrices A et B, $A : B = \sum_{i,j} A_{ij} B_{ij}$.)

Pour la forme linéaire, on prendra toujours

$$l((\mathbf{v}, q)) = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\, dx$$

et en général on prendra pour $\mathbf{f}$ la force de gravité.

En ce qui concerne les espaces fonctionnels, on prend généralement :

$$V = \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^2),\ \mathbf{u}|_{\Gamma_D} = 0\}$$

pour la vitesse et

$$M = \{p \in L^2(\Omega),\ \int_\Omega p = 0\}$$

pour la pression (remarquer que la pression n'est déterminée qu'à une constante additive près dans l'équation).

Question 4. En intégrant par parties les formulations variationnelles, montrer qu'elles conduisent aux mêmes équations dans Ω mais que l'on a respectivement sur le bord libre

- $(\nabla\mathbf{u} - p\mathrm{Id})\,\mathbf{n} = 0$ pour la première ;

- $((\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t) - p\mathrm{Id})\,\mathbf{n} = 0$ pour la seconde.

Question 5. Programmer, en dimension 2, les deux formulations variationnelles respectivement. A cette fin, on écrira trois variables : u_1, u_2 et p et on assemblera la matrice du système global.

On étudiera la solution du cas test suivant :

- $\Omega = (0,1)^2$,
- $\mathbf{u} = 0$ sur les bords verticaux du carré,
- $u_1 = 0$ sur le bord horizontal bas du carré, et $u_2(x) = x(1-x)$ sur ce même bord (c'est un profil dit de Poiseuille),
- le bord du haut est laissé libre.

On fera l'étude pour deux types d'éléments finis :

- u_1, u_2 et p sont $\mathbb{P}_1$;
- u_1, u_2 sont $\mathbb{P}_2$ et p est $\mathbb{P}_1$.

La théorie prévoit que seul le second cas produit un calcul stable. On observera que le premier cas fournit des oscillations non physiques.

Enfin, on comparera le profil de vitesse obtenu avec chacune des deux formulations variationnelles dans ce second cas sur le bord supérieur du carré.

Important : La matrice du système est de la forme (il y a trois inconnues, u_1, u_2 et p)

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

où l'on explicitera chacune des matrice A_{ij} en fonction des matrices `ef.u`, `ef.dxu`, `ef.dyu` (resp. `ef['u']`, `ef['dxu']`, `ef['dyu']`) et de la matrice des points d'intégration. On portera une attention particulière au fait qu'il y a deux espaces d'éléments finis (et donc deux jeux de matrices `ef.u`, `ef.dxu`, `ef.dyu` (resp. `ef['u']`, `ef['dxu']`, `ef['dyu']`)) ainsi qu'aux conditions de Dirichlet non homogènes qui portent sur la vitesse mais pas sur la pression.

3 Evolution d'un fluide visqueux - bougé de maillage

Le modèle de Stokes représente l'écoulement d'un fluide dans lequel la viscosité domine et l'inertie est négligeable. On peut ainsi représenter l'évolution d'un fluide soumis à la gravité en faisant "évoluer" le domaine de la façon suivante :

- On calcule la vitesse $\mathbf{u}$ correspondant à la configuration courante.
- On fait évoluer le domaine en bougeant les points du maillage de $\mathbf{u}\delta t$ où δt est un petit paramètre à choisir.
- On recommence.

Question 6. On considère dans cette partie le cas test d'un cube de fluide (très) visqueux posé sur une table. On reprend donc le carré considéré dans la question précédente et on applique le schéma précédent de bougé de maillage. Mettre en place la boucle d'évolution du maillage et faire le calcul itératif. Repérer qu'à un certain moment de l'évolution, certains triangles du maillage se "retournent". On ne peut plus faire le calcul à partir de ce moment là. Proposer une stratégie de résolution qui permette de poursuivre le calcul.

Question 7. Commenter les dynamiques obtenues pour chacune des deux conditions aux limites de Neumann. Que constatez-vous sur la forme du liquide lorsqu'il passe en dessous du niveau de la table ?

Question 8. Expliquer pourquoi les résultats obtenus avec la seconde formulation donnent des comportements plus réalistes.

Dans toute la suite du projet, on travaillera avec la seconde formulation.

4 Prise en compte d'un obstacle

On considère dans cette partie qu'une bille B immobile, de rayon 0.25, est plongée dans un fluide au centre d'une boîte $\Omega = [0,1] \times [0,1]$. On impose un écoulement de Poiseuille sur les deux bords horizontaux et des conditions de non glissement sur les bords verticaux.

Question 9. Faire un maillage du domaine fluide dans lequel la bille est représentée par un trou. Résoudre le problème et tracer le champ de vitesse obtenu.

Question 10. On rappelle que la force exercée par le fluide sur la bille est

$$F = \int_{\partial B} \sigma(\mathbf{u})\mathbf{n}\, ds,$$

où $\mathbf{n}$ est la normale extérieure à B. En effectuant une intégration par parties, montrer qu'on peut calculer cette force en remplaçant l'intégration surfacique par une intégration volumique dans le domaine fluide. Calculer numériquement cette force.

Question 11. Refaire le calcul précédent, en maillant l'obstacle cette fois mais en imposant la contrainte de vitesse nulle dans B grâce à une méthode dite de pénalisation. Pour cela, on résout le problème de Stokes dans tout le domaine $\Omega = [0,1] \times [0,1]$. La contrainte dans B est imposée en ajoutant le terme

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_B |\mathbf{u}|^2\, dx$$

dans l'énergie minimisée. Ainsi, pour ε tendant vers 0, la quantité $\|\mathbf{u}\|_{L^2}$ tend elle aussi vers 0 et à la limite, la contrainte est vérifiée. Ajouter ce terme dans l'énergie revient à ajouter le terme

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_B \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\, dx$$

dans la formulation variationnelle. Mailler le domaine Ω en entier et résoudre la nouvelle formulation variationnelle. Comparer avec les résultats précédents. A maillage fixé, vérifier la convergence de la norme L^2 de $\mathbf{u}$ dans B quand ε tend vers zéro. Estimer graphiquement l'ordre de convergence de la méthode en ε.

5 Interactions fluide-solide

On considère dans cette partie qu'un solide est plongé dans le fluide. Le solide a une densité supérieure à celle du fluide. On veut reproduire un cas test de sédimentation dans lequel une bille tombe dans du liquide sous l'action de son poids. Numériquement, on prendra une bille circulaire de diamètre 0.5 dans un vase de largeur 2 et de hauteur égale à 10. Le vase est rempli de liquide mais la surface en haut du vase est laissée libre.

Question 12. Faire un maillage du domaine fluide dans lequel la bille est représentée par un trou. Mettre en place un schéma numérique permettant de bouger la bille et de constater son évolution au cours du temps. On fera partir la bille à vitesse nulle, puis on mesurera et représentera sa vitesse au cours du temps.

Attention : Dans la question précédente, il faudra résoudre le problème de Stokes en imposant pour le fluide sur le bord de la bille, une condition aux limites $\mathbf{u} = Cte$ dans laquelle la constante n'est pas connue. Elle sera déterminée par la force totale appliquée sur la bille

$$\int_{\partial B} \sigma(\mathbf{u})\mathbf{n}\, ds = \rho \mathbf{g} |B|$$

formule dans laquelle ρ est la densité du solide, $\mathbf{g}$ la constante de gravité et $|B|$ le volume de la bille.

Question 13. La méthode précédente n'a été possible que parce qu'il n'y avait qu'une inconnue réelle (en fait deux, les deux composantes) : la vitesse de la particule. De manière plus générale, on peut mettre en place une méthode de pénalisation de manière à imposer que la vitesse $\mathbf{u}$ soit constante dans B. Pour cela, on maille le domaine Ω tout entier et on ajoute à la formulation variationnelle le terme

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_B \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}\, dx.$$

Mettre en place ce nouveau schéma et comparer aux résultats obtenus dans la question précédente.

Question 14. Dans le cas général d'un écoulement de particules dans un fluide, les particules peuvent tourner. La vitesse dans la particule n'est donc pas constante mais rigide (somme d'une translation et d'une rotation). Montrer que la vitesse dans B est un mouvement rigide si et seulement si le tenseur des déformations $D(\mathbf{u}) = \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t$ est nul dans B. Ainsi, on peut résoudre le problème fluide-particule en maillant Ω tout entier et en ajoutant dans la formulation variationnelle le terme

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_B (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t) \cdot \nabla \mathbf{v}\, dx.$$

Utiliser cette méthode pour simuler la chute de deux particules dans une boîte remplie de fluide. On supposera qu'initialement, les deux particules sont situées l'une au dessus de l'autre, légèrement décalées.