Conditions aux limites non homogènes

Nous avons vu précédemment comment résoudre le problème modèle avec des conditions aux limites homogènes (c'est-à-dire nulle) de Dirichlet ou de Neumann. Nous allons ici généraliser l'approche de façon à pouvoir résoudre des problèmes avec des conditions aux limites plus générales de Dirichlet ou de Neumann non homogènes ou bien des conditions dites de Fourier.

Question 1. Conditions de Dirichlet non-homogènes.
La prise en compte de conditions aux limites de Dirichlet non-homogènes du type $u = g$ sur $\partial\Omega$ (voire sur une partie du bord) se fait en "relevant la condition aux limites".
On considère donc le problème modèle

$$\begin{cases} u - \Delta u = f \text{ dans } \Omega, \\ \qquad u = g \text{ sur } \partial\Omega; \end{cases} \tag{1}$$

dans lequel la donnée au bord est g.
Pour résoudre, la démarche est assez simple. On écrit u sous la forme $u = u_* + \tilde{u}$ où $u_* = g$ sur $\partial\Omega$ et $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$. Écrire la formulation variationnelle du problème (sur $\tilde{u}$).

Application, résoudre le problème

$$\begin{cases} u - \Delta u = x + 3\sin(x)\sin(y) \text{ dans } \Omega, \\ \qquad u = x \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

sur $\Omega =]0, 2\pi[^2$ et dont la solution est

$$u(x, y) = x + \sin(x)\sin(y)\,.$$

On vérifiera la qualité de l'approximation en P_1 et P_2.

Remarque : Il pourra être utile de créer une structure `ef.lblDdl` (resp. un dictionnaire `ef['lblDdl']`) contenant le label de chacun des degrés de libertés (en les identifiant aux labels géométriques des éléments du maillage). Ceci peut permettre de trouver directement les degrés de liberté où il faut imposer une condition de Dirichlet.

Question 2. Conditions de Neumann non-homogènes.
Là, c'est beaucoup plus complexe. La condition de Neumann provenant d'une intégration par partie, il va falloir calculer une intégrale de bord. A titre d'exemple (très général néanmoins), on considère le problème de Neumann non homogène suivant :

$$\begin{cases} u - \Delta u = f \text{ dans } \Omega, \\ \qquad \dfrac{\partial u}{\partial n} = g \text{ sur } \partial\Omega\,. \end{cases} \tag{3}$$

Montrer que la formulation variationnelle du problème est :
Trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que $\forall v \in H^1(\Omega)$

$$\int_\Omega (uv + \nabla u \cdot \nabla v) dx = \int_\Omega f v dx + \int_{\partial\Omega} gv\, ds.$$

Dans ce cas, il y a une intégrale de bord à calculer pour modifier le second membre du système à résoudre.

Question 3. (Délicate.) En s'inspirant du programme `FEspace`, écrire une routine qui permet de calculer l'intégrale de bord intervenant dans le second membre. La difficulté provient du fait que l'on utilise une formule d'intégration 1D (sur les segments du bord) et qu'il faut par conséquent fabriquer une matrice du type `ef.u` (resp. `ef['u']`) qui à partir de l'élément fini global, renvoie les valeur de u aux points d'intégration du maillage 1D. Il faut également pouvoir le faire en P_k (on pourra néanmoins commencer par $k = 1$ si c'est plus simple).

Question 4. La matrice précédente permet également de résoudre des problèmes avec condition de Fourier du type

$$\begin{cases} u - \Delta u = f \text{ dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g \text{ sur } \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{4}$$

où $\alpha > 0$. Écrire la nouvelle formulation variationnelle du problème. Montrer qu'il apparaît (dans la forme bilinéaire) un terme de la forme

$$\int_{\partial\Omega} uvds$$

que l'on peut calculer avec la matrice précédente.

Résoudre de cette façon le problème

$$\begin{cases} u - \Delta u = f \text{ dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + u = 1 \text{ sur } \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{5}$$

où Ω est le disque de centre 0 et de rayon 1. Vérifier que la solution est radiale.

Question 5. Un problème de magnétostatique.
On considère $B = \{(r, z) \in [0, 2[\times] - 2, 2[\}$ et $\Omega = \{(r, z) \text{ tel que } r^2 + z^2 < \frac{1}{4}\}$. On souhaite résoudre étant donné une fonction $m : \Omega \to \mathbb{R}^2$ (l'aimantation) le champ magnétique H qu'elle génère. Sans entrer dans les détails, ce champ magnétique se calcule en posant $H = \nabla\phi$ et en résolvant la formulation variationnelle sur ϕ et pour toute fonction test ψ

$$\int_B \nabla\phi \cdot \nabla\psi\, dx = \int_\Omega m \cdot \nabla\psi\, dx\,.$$

On écrira un programme pour résoudre ce problème et on tracera le champ magnétique pour $m = (0, 1)^t$.

Il y a potentiellement deux difficultés dans cet exercice :

- Le problème n'a de solution qu'à une constante additive près pour ϕ. Comme H ne dépend pas de cette constante on pourra rendre le problème coercif en résolvant

$$\int_B \nabla\phi \cdot \nabla\psi \, dx + \eta \int_B \phi\psi \, dx = \int_\Omega m \cdot \nabla\psi \, dx \,,$$

  avec η petit.

- L'intégrale du membre de droite n'est à prendre que sur Ω. Il faudra donc labelliser les triangles de B et faire attention à ne calculer l'intégrale que sur les triangles possédant les bons labels.

  Remarque : Avec Python nous n'avons pas le label des triangles. On porra par exemple calculer le centre de gravité des triangles et ainsi déterminer s'ils sont dans Ω ou pas pour leur affecter un label.

Enfin, on pourra tracer le champ de vecteurs H grâce à la commande `quiver`.