1 Introduction

La méthode des éléments finis est une méthode de choix pour résoudre les problèmes de mécaniques des milieux continus. Dans cet enseignement d'approfondissement, nous allons voir comment programmer effectivement la méthode.
Le principe de la méthode des éléments finis a été présenté pendant les cours de MAP411 et MAP431. Aussi, nous ne reviendrons pas sur la théorie. Nous rappellerons juste les résultats essentiels à connaître en vue du travail que nous devons effectuer.
Toute la partie programmation sera faite en Matlab ou en Python. Pour Matlab, nous fournirons juste un mailleur (écrit en C) qui permet de générer des maillages de formes complexes. Ce mailleur, `triangle` a été interfacé, de sorte qu'on peut l'appeler depuis Matlab. Dans le cas de Python, il faudra simplement importer la librairie `triangle`.

Éléments finis en dimension 1 d'espace

2 Le problème

Dans ce TP, nous allons programmer la méthode en dimension 1. Pour cela, nous résoudrons l'équation modèle:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \text{ sur }]0,1[, \\ \quad u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

où f est une fonction définie sur $]0,1[$ que l'on supposera de classe L^2.

Question 1. Calculer la solution exacte de ce problème.

Question 2. La méthode des éléments finis consiste à résoudre la *formulation variationnelle* du problème. On l'obtient en multipliant l'équation par une fonction test v quelconque et en intégrant par parties. En supposant que $v(0) = v(1) = 0$ vérifier que la solution u du problème précédent satisfait

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx. \tag{2}$$

C'est cette formulation que l'on va résoudre de manière approchée.

3 Discrétisation

Question 3. Soit la *triangulation* de $]0,1[$

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} = 1. \tag{3}$$

On introduit l'espace V_h discret

$$V_h = \left\{ u \in \mathcal{C}^0([0,1]) \text{ t.q. } u(0) = u(1) = 0 \text{ et } u|_{[x_i, x_{i+1}]} \text{ est affine.} \right\} . \qquad (4)$$

Montrer que V_h est un sous espace de dimension N de $H_0^1(]0,1[)$ et déterminer les fonctions de base $(\phi_i)_{1 \le i \le N}$ de V_h définies par

$$\phi_i(x_j) = \delta_{i,j} \text{ pour } 1 \le i, j \le N,$$

où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker.

Question 4. On remplace la formulation variationnelle continue (2) par la formulation variationnelle discrète

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ t.q. } \forall v_h \in V_h, \int_0^1 u_h'(x) v_h'(x)\, dx = \int_0^1 f(x) v_h(x)\, dx. \qquad (5)$$

En écrivant

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{N} u_{h,j} \phi_i(x)$$

et en prenant successivement $v_h = \phi_i$ pour $i = 1, \cdots, N$, montrer que le vecteur

$$U_h = \begin{pmatrix} u_{h,1} \\ \vdots \\ u_{h,N} \end{pmatrix}$$

vérifie un système linéaire de la forme $AU_h = F$ où l'on donnera une formule pour les coefficients de A ainsi que pour ceux de F. On remarquera en particulier :

- que A est creuse (et même tridiagonale ici);
- que A est symétrique.

4 Programmation

La démarche paraît simple à première vue. Il s'agit

- D'assembler la matrice A.
- D'assembler le vecteur second membre F.
- De résoudre le système linéaire $AU_h = F$.
- D'afficher la solution.

Question 5. Écrire une fonction `calc_A` qui prend un vecteur `x` en entrée (le maillage ($0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} = 1$) et renvoie en sortie la matrice <u>creuse</u> A.

Question 6. On prend dans cette question $f(x) = 1$. De même que précédemment, écrire une fonction `calc_F` qui prend un vecteur `x` en entrée (le maillage) et renvoie en sortie le vecteur F.

Question 7. Écrire un programme principal qui fabrique un maillage, assemble la matrice A et le second membre F, résout le système puis affiche sur un même graphique la solution approchée u_h et la solution exacte que l'on aura préalablement calculée.

<u>**Vérification.**</u> Pour la discrétisation utilisée ci-dessus et $f(x) = 1$, la solution discrète u_h est égale à la solution continue u aux points x_i. Vérifier graphiquement cette égalité. Afficher également l'erreur $e_h = \max |u(x_i) - u_{h,i}|$. Tester pour une discrétisation en x non homogène.

---

5 Améliorations

Félicitations ! Vous avez écrit votre premier programme d'éléments finis. Toutefois, il possède quelques inconvénients :

- Il ne marche que pour résoudre le cas $f(x) = 1$.
- Il ne permet pas de changer d'équations.
- Il nécessite de calculer une matrice qui est assez laborieuse à calculer. Le programme `calc_A` est source de bugs car il est (relativement) complexe ...

Nous allons donc améliorer le programme précédent.

Question 8. Pour la matrice A, nous allons procéder d'une manière différente (plus compliquée au premier abord, mais plus simple en pratique). On remarque que

$$\int_0^1 u_h'(x)v_h'(x)\,dx = \sum_{i=0}^{N} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u_h'(x)v_h'(x)\,dx\,.$$

Or, sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, $u_h'(x) = \dfrac{u_{h,i+1} - u_{h,i}}{x_{i+1} - x_i}$ et $v_h'(x) = \dfrac{v_{h,i+1} - v_{h,i}}{x_{i+1} - x_i}$. Construire la matrice creuse UX de taille $(N+1) \times N$ telle que

$$UX \begin{pmatrix} u_{h,1} \\ \vdots \\ u_{h,N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u_{h,1}-0}{x_1-x_0} \\ \frac{u_{h,2}-u_{h,1}}{x_2-x_1} \\ \vdots \\ \frac{u_{h,N}-u_{h,N-1}}{x_N-x_{N-1}} \\ \frac{0-u_{h,N}}{x_{N+1}-x_N} \end{pmatrix}.$$

Construire également la matrice creuse D de taille $(N+1) \times (N+1)$ telle que

$$D_{ii} = (x_i - x_{i-1}).$$

Vérifier ensuite que

```
A = UX' D UX
```

Question 9. Pour le second membre F, on procède de la même manière

$$\int_0^1 f(x) v_h(x)\, dx = \sum_{i=0}^{N} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) v_h(x)\, dx\,.$$

Maintenant, nous faisons l'approximation

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) v_h(x)\, dx \approx (x_{i+1} - x_i) \left(\frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2} \right) \left(\frac{v_{h,i+1} + v_{h,i}}{2} \right).$$

Construire la matrice U de taille $(N+1) \times N$ telle que

$$U \begin{pmatrix} u_{h,1} \\ \vdots \\ u_{h,N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u_{h,1}+0}{2} \\ \frac{u_{h,2}+u_{h,1}}{2} \\ \vdots \\ \frac{u_{h,N}+u_{h,N-1}}{2} \\ \frac{0+u_{h,N}}{2} \end{pmatrix}$$

Construire enfin une approximation du second membre sous la forme $F \approx U' D \tilde{F}$ avec $\tilde{F}$ un vecteur bien choisi.

Vérification. Pour $f(x) = x$, on a maintenant $u(x) = x(1-x^2)/6$. La solution discrète u_h n'est maintenant plus égale à u mais converge vers u quand le nombre de points augmente. Vérifier graphiquement cette convergence et afficher l'erreur $e_h = \max |u(x_i) - u_{h,i}|$ correspondante. Tester avec une discrétisation non régulière en x.

---

6 Un peu plus difficile ...

On considère maintenant le problème

$$\begin{cases} -\varepsilon u''(x) + u'(x) = 1 \text{ sur }]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

qui a pour solution $u(x) = x - \dfrac{\exp\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - 1}{\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) - 1}$.

Résoudre le problème par la méthode exposée précédemment et comparer avec la solution exacte dans les deux cas suivants :

- $x_i = \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\}$
- $x_i = \{0, 0.75, 0.875, 0.9375, 0.96875, 0.984375, 1\}$