Tangentengleichung bestimmen

Lukas Semrau

23. Januar 2022

Beispiel 1 (Aus dem Abitur 2013 [Bay13]). Gegeben ist die Funktion $g : x \mapsto \sqrt{3x+9}$ mit maximaler Definitionsmenge D. Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von g im Punkt $P(0 \mid 3)$.

Im Analysis Teil des Abiturs geht es oft um Tangenten an einem Punkt bzgl. des Funktionsgraphen. Es ist also ein wichtiger Teil, der einem oft Punkte retten kann, wenn man das Aufstellen von Tangentengleichung beherrscht.

Was ist eine Tangente - eine geometrische einführung

In der siebten Klasse lernt man die Begriffe *Tangente, Sekante* und *Passante*. Wir betrachten zunächst die drei Geraden an einem Kreis.

Definition 1 (Passante und Sekante)**.** Eine Gerade ist genau dann eine Passante, wenn sie den Kreis in keinem Punkt schneidet.
Eine Gerade ist genau dann eine Sekante, wenn sie den Kreis in zwei Punkten schneidet. Wir betrachten nun Abbildung 1. Die Grüne gerade ist eine Sekante, die blaue eine passante.

Definition 2 (Tangente)**.** Eine Gerade ist genau dann eine Tangente, wenn sie den Kreis in genau einem Punkt schneidet. In Abbildung 1 wird eine Tangente durch die rot Gerade dargestellt.

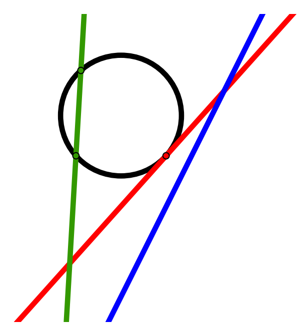

Abbildung 1: Sekante (grün), Passante (blau) und Tangente (rot)

Tangenten in der Analysis

Da es sich aber im Analysisteil des Abiturs wohl kaum um Geometrie handelt, betrachten wir nun solche Geraden an Funktionsgraphen. Wir betrachten zunächst eine Parabel, die Stoff der neunten Klasse ist.

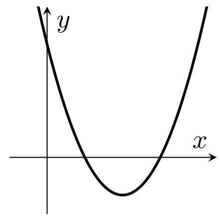

Abbildung 2: betrachtete Parabel

Da wir bestimmte Geraden (lineare Funktion) betrachten, handelt es sich also um ein Schnittproblem. Da wir uns nur für die Anzahl der Schnitte interessieren, betrachten wir die Diskriminante. Wir betrachten die Funktionen $f(x) = ax^2 + bx + c$ (Parabel) und $h(x) = mx + t$ (Gerade).

$$\begin{aligned} f(x) &= h(x) \\ ax^2 + bx + c &= mx + t \\ 0 &= ax^2 + (b-m)x + (c-t) \end{aligned} \tag{1}$$

Die Diskriminante ist also

$$D = (b-m)^2 - 4a(c-t). \tag{2}$$

Wer hier Probleme hat, kann dies unter [PP07] nachlesen.

Ist diese Diskriminante größer als 0, gibt es zwei Lösungen der Gleichung, es handelt sich also um eine Sekante. Für $D = 0$ ist die Gerade eine Tangente und für $D < 0$ ist es eine Passante.

Der Punkt an dem die Ableitung ins Spiel kommt.

Beispiel 2 (Aus dem Abitur 2016 [Bay16].). Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$ mit maximalem Definitionsbereich D. Ermitteln Sie die x-Koordinate des Punktes, in dem der Graph von f eine waagrechte Tangente hat.

Satz 1. *Eine Tangente zu einem Graphen G_h an einem Punkt $f(x_0)$ hat die gleiche Steigung, wie der Punkt $f(x_0)$.*

Zunächst betrachten wir wieder eine Parabel. Aus Satz 1 geht hervor, dass der Punkt $(x_0 \mid f(x_0))$ die gleiche Steigung hat, wie die (waagrechte) Tangente. Eine waagrechte gerade hat immer die Steigung 0, d.h. der Punkt x_0 hat die Steigung 0 und ist somit eine lokales / globales Maximum.

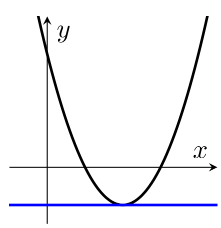

Abbildung 3: Parabel mit waagerechter Tangente

Tangentengleichung bestimmen.

Wir wollen den Funktionsterm der Tangente T_{x_0} an einem Punkt $P(x_0 \mid f(x_0)$ bestimmen. Wir wissen, dass die Tangente die Selbe Steigung besitzt wie der Punkt P bzgl. f. Um den Funktionsterm der Geraden zu bestimmen machen wir also folgendes:

1) Wir bestimmen den Funktionswert $f(x_0)$ an der Stelle x_0.
2) Wir bilden die Ableitungsfunktion $f'(x)$ und bestimmen $f'(x_0)$, also die Steigung am Punkt x_0.
3) Wir setzen $f'(x_0)$ in $T_{x_0} = mx + k$ ein.
4) Da P auf f und auf T_{x_0} liegt, setzen wir den Punkt $P(x_0 \mid f(x_0)$ in die Gleichung ein.

$$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + k \tag{3}$$

5) Nach k umformen und Geradengleichung aufstellen.

Lösung der Beispiele

Lösung zu Bsp. 1:

Wir wollen die Tangentengleichung der Funktion $g : x \mapsto \sqrt{3x+9}$ am Punkt $P(0 \mid 3)$.

Lösung. Zunächst prüfen wir, ob P auf g liegt:

$$\begin{aligned} 3 &= \sqrt{3 \cdot 0 + 9} \\ \Leftrightarrow 3 &= \sqrt{9} \\ \Leftrightarrow 3 &= 3 \end{aligned} \tag{4}$$

Jetzt können wir mit den Standard-Schritten beginnen:

(1) Wir kennen bereits $g(3) = 0$.

(2) Jetzt bilden wir die Ableitung von g:

$$\begin{aligned} g(x) &= (3x+9)^{1/2} = [f(x)]^{1/2} \\ \Rightarrow \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3x+9}} \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \\ &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3x+9}} \cdot 3 \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3x+9}} \\ g'(0) &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{5}$$

(3) Wir können also folgenden Term aufstellen:

$$T_0(x) = 0.5x + k \tag{6}$$

(4) Jetzt können wir P einsetzen

$$3 = 0.5 \cdot 0 + k \tag{7}$$

(5) Jetzt können wir nach k umstellen und den Funktionsterm aufstellen:

$$k = 3 \tag{8}$$

$$\Longrightarrow T_0(x) = \frac{1}{2}x + 3 \tag{9}$$

■

Lösung zu Bsp. 2:

Wir wollen die Stelle x_0 bestimmen, an dem die Tangente waagrecht ist, also die Steigung 0 ist.

Beweis. Zunächst bilden wir die Ableitung f' mit der Quotientenregel:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{1 - 2 \cdot \ln x}{x^3} \tag{10}$$

A.: Zeigen Sie den Rechenweg der Rechnung.

Damit die Steigung der Tangente 0 ist, muss die Ableitung 0 sein. Wir berechnen also die Nullstellen der Ableitungsfunktion:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1 - 2 \cdot \ln x}{x^3} \\ \Leftrightarrow x &= x_0 = \sqrt{e} \end{aligned} \tag{11}$$

An $x_0 = \sqrt{e}$ ist die Tangente waagrecht, ■

Literatur

[Bay13] Bayrisches Kultusministerium. *Abiturprüfung 2013 Mathematik: Analysis I (Aufgabengruppe I): Aufgabe 1b*. PDF. Bayern, 2013. URL: `https://www.isb.bayern.de/download/12830/abiturpruefung_mathematik_2013.pdf`.

[Bay16] Bayrisches Kultusministerium. *Abiturprüfung 2016 Mathematik: Analysis I (Aufgabengruppe A I): Aufgabe 1b*. PDF. Bayern, 2016. URL: `https://www.isb.bayern.de/download/17845/abiturpruefung_mathematik_2016_pruefungsteil_a.pdf`.

[PP07] Prof. August Schmid und Prof. Dr. Ingo Weidig. *Lambacher Schweizer 9: Mathematik für Gymnasien*. 1. Aufl. Bd. 5. Stuttgart und Leipzig: Ernst Klett Verlag, 2007, 83 und 108. ISBN: 978-3-12-731760-2.