

Mathematik

Note (NP): _____

Aufgaben zu **Mathematik 9. Skript.**

Alle Aufgaben sind sauber, ordentlich und mit ausführlichem Rechenweg zu bearbeiten.

Lukas Semrau <lukas@lukas-semrau.de>

Inhaltsverzeichnis

1	Reelle Zahlen	2
2	Satzgruppe des Pythagoras	4
3	Quadratische Funktionen und Gleichungen	6
4	Wahrscheinlichkeit bei mehrstufigen Zufallsexperimenten	8
5	Trigonometrie	9

Name _____

1 Reelle Zahlen

Aufgabe 1.1: Definitionsmengen angeben.....9BE

Geben sie jeweils die maximale Definitionsmenge D der jeweiligen Terme an.

- (a) $\sqrt{x^2}$ (c) $\sqrt{4-x^2}$ (e) $\sqrt[n]{x}$ mit $n \in \mathbb{N}$
 (b) $(\sqrt{x})^2$ (d) $\sqrt[3]{x}$

zu den Punkten: Teilaufgabe (a) bis (d) werden jeweils mit 1Be bewertet, (e) wird aufgrund der Verallgemeinerung mit 2Be bewertet.

Aufgabe 1.2: Betragsstriche.....7BE

- (a) Müssen Betragsstriche gesetzt werden? Kreuzen Sie an, wenn diese gesetzt werden müssen. ☐ $\sqrt{x^2}$ ☐ $\sqrt{x^2}$ ☐ $\sqrt{x^3}$ 3

zu den Punkten: Jedes Kästchen wird mit 1Be bewertet, wird die richtige Antwort gegeben, erhält man diese Bewertungseinheit.

- (b) Begründen Sie, weshalb folgender Satz nicht gilt: Für eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ gilt: $\sqrt{a^2} = a$. 2
 (c) Vereinfachen Sie. (Setzen Sie nur dann Betragsstriche, wenn sie unbedingt nötig sind!) 8

i. $\sqrt{16x^2}$ ii. $\sqrt{3u^3} : \sqrt{u}$ iii. $\sqrt{(-x-1)^2}$ iv. $\sqrt{3a} \cdot \sqrt{3a}$

zu den Punkten: Es können je 2Be erreicht werden.

Aufgabe 1.3: Die Menge der reellen Zahlen / Zahlenmengen.....10BE

- (a) Welche Rechenoperationen sind in der jeweiligen Zahlenmengen (zusätzlich zur vorherigen) möglich? 6
 i. natürliche Zahlen: _____
 ii. ganze Zahlen: _____
 iii. rationale Zahlen: _____
 iv. reelle Zahlen: _____

zu den Punkten: Jede richtige Rechenoperation ergibt 1Be.

- (b) Welche Aussagen sind wahr? Kreuzen Sie jede richtige an. 4
☐ $0 \in \mathbb{N}$ ☐ $\sqrt{-3^2} \notin \mathbb{R}$ ☐ $-1.6\overline{34} \in \mathbb{Q}$ ☐ $\sqrt{121} \in \mathbb{N}$

zu den Punkten: Jedes Kästchen wird mit 1Be bewertet, wird die richtige Antwort gegeben, erhält man diese Bewertungseinheit.

Aufgabe 1.4: Umformungen und Vereinfachen 9BE

- (a) Welche Paare haben den gleichen Wert?

(Notieren Sie die Ergebnisse wie folgt: X - Y - Z)

3

A. $\sqrt{112}$ B. $\sqrt{7} \cdot \sqrt{28}$ C. $9\sqrt{7} - \sqrt{63}$ D. $42\sqrt{7} : 3\sqrt{7}$ E. $42/\sqrt{7}$
 F. $\sqrt{4 \cdot 2 \cdot 14}$ G. $(\sqrt{7})^2 \cdot (\sqrt{2})^2$

zu den Punkten: Jedes korrekte Paar wird mit einer Bewertungseinheit bewertet.

- (b) Vereinfache. (machen Sie den Nenner ggf. rational; schreiben Sie immer als Wurzel, falls idese benötigt wird)

9

i. $(\sqrt{a-1} - \sqrt{a+1})(\sqrt{a+1} + \sqrt{a-1})$

ii. $1/\sqrt{a}$

iv. $\sqrt[n]{\sqrt[3]{a}}$

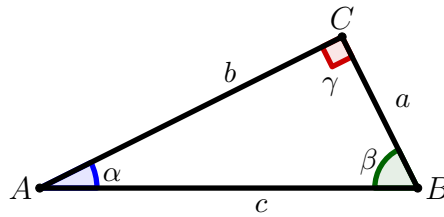
iii. $(a-1) : (\sqrt{a}+1)$

v. $\left(\sqrt[3]{2^4}\right)^{\frac{1}{2}}$

zu den Punkten: i, iii - v: 2Be // ii: 1Be

2 Satzgruppe des Pythagoras

Abbildung 1: Das folgende rechtwinklige Dreieck wird im folgenden immer wieder betrachtet.



Aufgabe 2.1: Satz des Pythagoras 9BE

- (a) In einem gleichschenkligen Dreieck mit 16 langer Basis misst die Höhe auf die Basis 15. Wie lange ist der Schenkel dieses Dreiecks. Fertige eine Skizze an. 2
- (b) Die Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks betragen 60° , die Länge der Basis beträgt 5cm. Welche Länge hat die Höhe auf die Basis? 3
- (c) Von einem Rechteck ist der Flächeninhalt $A = 117.6$ und eine Seitenlänge $b = 10.5$ gegeben. Berechnen Sie die Diagonale d des Rechtecks. 2
- (d) In einem Prospekt ist angegeben: "LCD-Fernseher 16:9, 80cm" Dabei gibt 16:9 das Verhältnis der Seitenlängen an. Passt der Bildschirm in eine Schranknische der Länge 75cm? Begründen Sie. 3
- (e) Zeichnen die Punkte P und Q jeweils in ein Koordinatensystem. Und bestimmen Sie ihren Abstand durch Rechnung. 6
 - i. $P(2 \mid 1)$; $Q(5 \mid 5)$
 - ii. finden Sie eine allgemeine Formel: $P(x_1 \mid y_1)$; $Q(x_2 \mid y_2)$

zu den Punkten: Für das korrekte KS: 1Be; für das Zeichnen der Punkte: 1Be; für die Rechnung in i: 1Be und in ii: 2Be.

Aufgabe 2.2: Kehrsatz zum Satz des Pythagoras 7BE

- (a) Prüfen Sie, ob ein Dreieck mit den Seitenlängen (a, b, c) Rechtwinklig ist. 3
 - i. $(28, 45, 53)$
 - ii. $(16, 62, 64)$
 - iii. $(286, 290, 48)$

zu den Punkten: Je Teilaufgabe 1Be.

- (b) Es gelten folgende Verhältnisse: $m^2 - n^2$, $b = 2mn$ und $c = m^2 + n^2$. Beweisen Sie folgende Aussage: Für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n$ ist das Dreieck rechtwinklig. 4

Name: _____

Aufgabe 2.3: Berechnungen von Seitenlängen.....10BE

Berechne die fehlenden Größen.¹

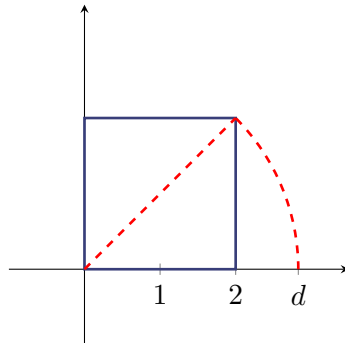
	a	b	c	p	q	h	A
a				1.6	10.0		
b				4.0		6.0	39.0

Tabelle 1: Tabelle zur Aufgabe 2.3

Aufgabe 2.4: Berechnungen an Figuren und Körpern.....9BE

(a) Bestimmen Sie d .

2



(b) Es wird eine Elfmeter auf ein Tor mit den Maßen $732\text{cm} \times 244\text{cm}$. Der Ball wird im oberen rechten Eck versenkt. Berechnen Sie den Weg, der den Ball zurückgelegt hat.

6

¹Ein Beispieldreieck finden Sie unter www.lukas-semrau.de/hohensatz-dreieck/

3 Quadratische Funktionen und Gleichungen

Aufgabe 3.1: Parabeln verschieben 9BE

- (a) Bestimmen Sie den Funktionsterm einer Normalparabel, die
- ... um 2 nach links und 3 nach oben verschoben ist.
 - ... um 3 nach unten und um 4 nach rechts verschoben ist.

2

zu den Punkten: Je korrekten Term: 1Be

- (b) Geben Sie den Funktionsterm an.

3

i. $S(-3 \mid 0)$

ii. $S(2.7 \mid \sqrt{2})$

iii. $S(-0.8 \mid 2)$

zu den Punkten: Je korrekten Term: 1Be

- (c) Prüfen Sie, ob die Parabel $x \mapsto x^2 - 12 + 36$ eine in x -Richtung verschobene Normalparabel ist.

4

Aufgabe 3.2: Scheitel / Nullstellen 7BE

Bestimme den Scheitelpunkt und die Nullstellen des Graphens von G_f .

(a) $f_1(x) = (x + 2)^2 - 9$

(b) $f_2(x) = t^2 + 3t$

(c) $f_3(x) = x^2 + 6x + 4$

Aufgabe 3.3: Textaufgaben 10BE

- (a) Das Produkt zweier positiven Zahlen, die sich um 6 unterscheiden, beträgt 6075. Wie lauten die beiden Zahlen?
- (b) Das Produkt zweier aufeinander folgender natürlicher Zahlen ist um 461 größer als ihre Summe.
- (c) Wurde in der Rechnung wirklich ein Fehler gemacht? Begründen Sie.

3

4

3

$ \begin{aligned} 2x^2 - 8x &= 0 & : x \\ 2x - 8 &= 0 \\ x &= 4 \\ L &= \{4\} \quad \mathbf{f.} \end{aligned} $
--

Aufgabe 3.4: Lineare Gleichungssystem mit drei Variablen 9BE

Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{cases}
 x + 4z &= 4y \\
 2x + 3z &= 5y \\
 x &= y + z
 \end{cases} \quad (3.1)$$

Aufgabe 3.5: Funktionsterm bestimmen 4BE

Bestimmen Sie die Gleichung einer Parabel, die durch folgende Punkte geht:

$$P_1(-1 \mid 0), \quad P_2(2 \mid 0) \quad \text{und} \quad P_3(3 \mid 2)$$

Aufgabe 3.6: Extremwertprobleme.....10BE

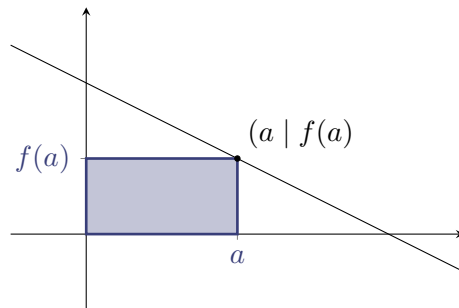
- (a) Für welche ganze Zahl ist das Produkt aus Vorgänger und Nachfolger am kleinsten. 2
- (b) Für welche reelle Zahl ist das Produkt aus Vorgänger und Nachfolger am kleinsten. 2
- (c) Gegeben ist eine Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 2. \quad (3.2)$$

Für $a \in]0; 4[$ mit $a \in \mathbb{R}$ werden folgende Punkte definiert: $O(0 \mid 0)$, $P(a \mid f(a))$, $P_1(0 \mid f(a))$ und $P_2(a \mid 0)$.

Wann ist der Flächeninhalt des Rechtecks OP_2PP_1 am größten?

6

**Aufgabe 3.7: Schnittprobleme.....??BE**

- (a) Geben Sie die Schnittpunkte der Funktionen

6

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad g(x) = x - 1.5 \quad \text{an.}$$

- (b) Gegeben sind die Funktionen $f : x \mapsto -x^2 + 4x - 3$ und $h_a : x \mapsto ax$. 9
- i. Untersuchen Sie für welche $a \in \mathbb{R}$ die Graphen einen, zwei oder keinen Schnittpunkt haben.
- ii. Bestimmen Sie die Koordinaten des Berührungspunktes B von h_a und f .

4 Wahrscheinlichkeit bei mehrstufigen Zufallsexperimenten

Aufgabe 4.1: Urnen 9BE

Eine Urne enthält zwei (identische) blaue Kugeln mit der Aufschrift “T” und zwei (identische) rote Kugeln mit der Aufschrift “O”. Renate zieht aus der Urne zufällig die vier Kugeln.

- (a) Zeichne ein Baumdiagramm, das den Sachverhalt erklärt. 4
- (b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $p(\text{“Otoo”})$, dass das Wort “Otto” gezogen wird. 1

Aufgabe 4.2: Playlists 7BE

In einer Playlist eines Smartphones befinden sich 20 Lieder, darunter genau fünf mit deutschsprachigem Text. Die 20 Lieder werden in zufälliger Reihenfolge ohne Wiederholung abgespielt. p ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ersten drei gespielten Lieder einen deutschsprachigen Text haben.

Erläutern Sie, warum der Ansatz $p = (1/4)^3$ falsch ist, und geben Sie einen richtigen Ansatz zur Berechnung von p an.

Aufgabe 4.3: Basketballspiel 10BE

Bei einem Basketballspieler sinkt die Trefferwahrscheinlichkeit bei einem Freiwurf während des 40-minütigen Spiels linear von anfänglich 70% bis 50%. Er bekommt nach der 8., 22., 38. Spielminute je einen Freiwurf zugesprochen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit verwandelt er alle einen/zwei/drei Freiwürfe.

Aufgabe 4.4: Würfelwurf 9BE

Ein normaler Würfel wird 6-mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden lauter verschiedene Augenzahlen geworfen.

5 Trigonometrie

Aufgabe 5.1: Berechnungen an Dreiecken. 9BE

Berechnen Sie die fehlenden Seiten und Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks ABC mit Hypotenuse c und den Katheten a und b . (Geben Sie dabei immer den vollständigen Rechenweg an.)

- (a) $b = 4.8$; $\beta = 42^\circ$ (b) $c = 7.3$; $\alpha = 72^\circ$ (c) $c = 3.3$; $\alpha = 5.7^\circ$

Aufgabe 5.2: Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus und Tangens. 7BE

Vereinfachen Sie folgende Terme.

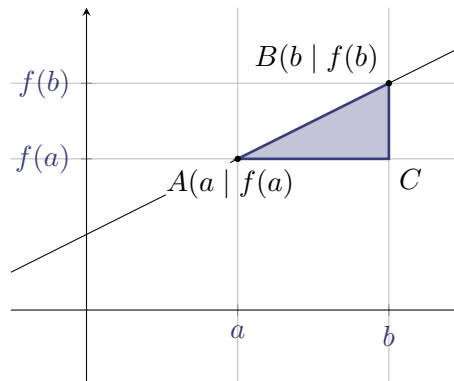
- (a) $\sin \alpha - \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha$ (b) $\frac{\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}$ (c) $1 - \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

zu den Punkten: (a) 2; (b) 3; (c) 2

Aufgabe 5.3: Steigung 10BE

Eine lineare Funktion besitzt den Funktionsterm $f : x \mapsto mx + t$. Die Steigung m wird durch die Gleichung

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (5.1)$$



- (a) Zeigen Sie: $\tan \alpha = m$ 2
 (b) Berechne jeweils den Steigungswinkel der Geraden: 2

i. $y = 2x + 5$

ii. $y = \sqrt{3}x - 2$

zu den Punkten: Je 1Be

- (c) Bestimme die Gleichung der Geraden, die durch den Punkt P geht und den Steigungswinkel α hat. 6

i. $P(1 \mid 2)$ und $\alpha = 30^\circ$

ii. $P(-2 \mid -3)$ und $\alpha = 60^\circ$

zu den Punkten: Je 3Be