Kapitel 3

Quadratische Funktionen und Gleichungen

3.1 Was ist eine quadratische Funktion / Gleichung

Definition 3.1.1. Eine Funktion in deren Funktionsterm ein Quadrat vorkommt heißt **quadratische Funktion**. Sie wird durch den Funktionsterm (3.1.1) beschrieben. a, b, c sind dabei sog. Parameter, also einfache Zahlenwerte. Eine Gleichung ist dann quadratisch, wenn sie die Form (3.1.2) annimmt.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \tag{3.1.1}$$

$$0 = ax^2 + bx + c \tag{3.1.2}$$

Beispiel. Für eine Funktion $f(x) = 2x^2 + 4x + 12$ ist $a = 2,\ b = 4,\ c = 12$.

Definition 3.1.2. Der Graph einer quadratischen Funktion heißt **Parabel**. Der Graph einer Funktion

$$y = x^2 \tag{3.1.3}$$

heißt **Normalparabel** (s. Abb. 3.1), da sie der Graph der ëinfachsten quadratischen Funktion der Welt ist.

Definition 3.1.3. Der unterste / höchste Punkt bzw. der Punkt an dem sich die Parabel spiegelt heißt **Scheitelpunkt** $S(x_E \mid y)$ mit x_E als **Extremstelle**. [a]

[a] In der Infinitesimalrechnung kann man auch sagen: *Der Scheitelpunkt einer Funktion y ist der Punkt, an dem die Ableitung eine Nullstelle besitzt, also der Punkt einer Parabel mit Steigung 0.*

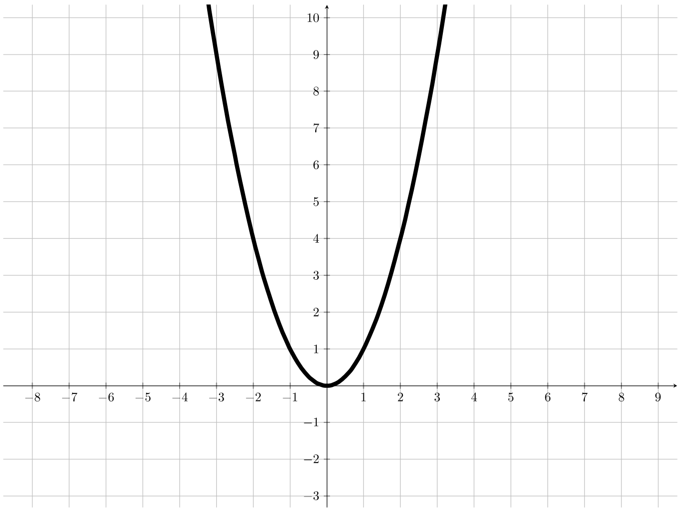

Abbildung 3.1: Graph einer Normalparbel

3.2 Verschiebung von Normalparabeln

3.2.1 Verschiebung in y-Richtung

Eine lineare Funktion $y = mx + t$ lässt sich durch den Parameter t, also der ohne Verbindung mit x, nach oben / unten verschieben. Ähnlich ist dies auch bei quadratischen Funktionen $y = ax^2 + bx + c$. Hier hängt der Parameter c mit keinem x, weshalb dieser für die Verschiebung in y-Richtung ist.

Eine quadratische Funktion ist dann in y-richtung Verschoben, wenn der Parameter c geändert wird. (s. Abb. 3.1)

Definition 3.2.1. Eine Funktion nach oben/unten verschobene Normaplparabel wird immer durch den Funktionsterm (3.2.1)

$$y = x^2 + c \tag{3.2.1}$$

beschrieben. Der Scheitelpunkt liegt bei $S(0 \mid c)$

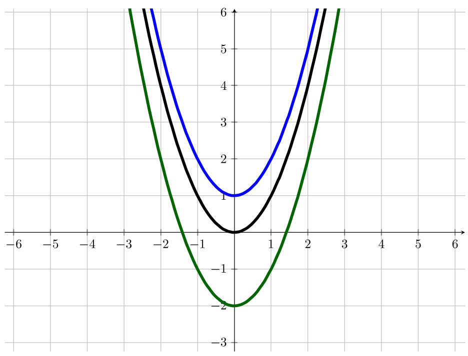

Abbildung 3.2: Die Parabeln $f(x) = x^2 - 2$ (grün), $g(x) = x^2$ (schwarz), $h(x) = x^2 + 1$ (blau).

3.2.2 Verschiebung in x-Richtung

Für die Verschiebung einer Parabel in $x-$ *Richtung* wird eine neue Art von Funktionsterm (3.2.1) in Abhängigkeit eines Parameters d eingeführt

Definition 3.2.2. . Diese Form heißt auch **Scheitelpunktform**.

$$y = (x+d)^2 \Leftrightarrow y = x^2 + 2dx + d^2 \tag{3.2.2}$$

Hier ist die Parabel um $-d$ nach links / rechts verschoben (s. Abb. 3.3). Der Scheitelpunkt liegt dann bei $S(-d \mid 0)$

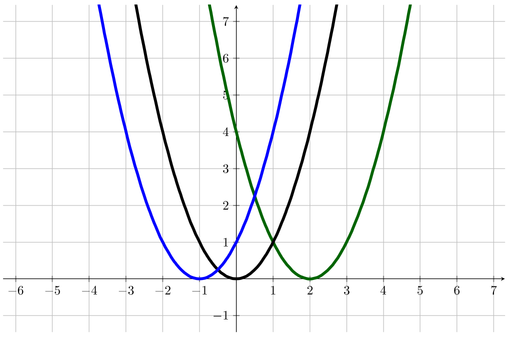

Abbildung 3.3: Die Parabeln $f(x) = (x-2)^2$ (grün), $g(x) = x^2$ (schwarz), $h(x) = (x+1)^2$ (blau).

3.2.3 Beliebiges Verschieben von Parabeln

Definition 3.2.3. Um Parabeln beliebig zu verschieben muss ein neuer Parameter e zur Scheitelpunktform (3.2.3) hinzukommen. Dieser verschiebt um x-verschobene Parabeln zusätzlich nach oben/unten. Soll die Parabel noch gestreckt bzw. gestaucht werden muss der Parameter a verwendet werden. siehe (3.2.4)

$$y = (x+d)^2 + e = x^2 + 2dx + d^2 + e \tag{3.2.3}$$

$$y = a(x+d^2) + e = ax^2 + \underbrace{2adx}_{bx} + \underbrace{ad^2 + e}_{c} \tag{3.2.4}$$

Um eine Parabel um 3 nach links und 4 nach oben zu verschieben, müssen die Parameter d und e geändert werden. (s. Abb. 3.4)
d verschiebt nach links / rechts $\Rightarrow d = 3$, während e nach oben / unten verschiebt. $\Rightarrow$ $e = 4$ Der Funktionsterm ist also

$$y = (x+3)^2 + 4 = x^2 + 6x + 13$$

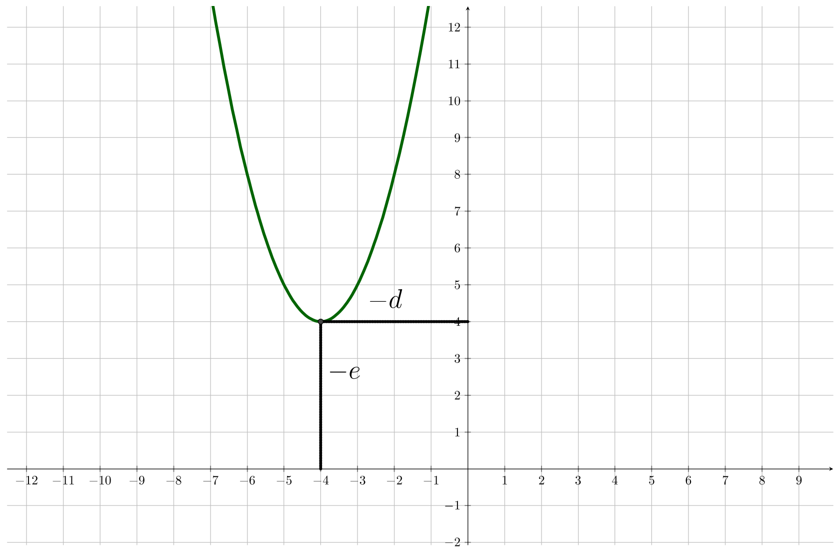

Abbildung 3.4: Hier wird die Funktion aus dem Beispiel gezeigt. Diese hat die Parameter $d = 3$ und $e = 4$

3.3 Nullstellen und lösen quadratischer Gleichungen

3.3.1 Funktionen der Form $y = ax^2 + bx$

Eine Funktion der Form $y = ax^2 + bx$ hat die Extremstelle $x_E = \frac{-b}{2a}$ und die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = -\frac{b}{a}$, da sich der Funktionsterm zu (3.3.1) umformen lässt.

$$y = ax^2 + bx = x(ax + b) \tag{3.3.1}$$

Auf die Schreibweise kann man dann die **Regel vom Nullprodukt** anwenden.

Definition 3.3.1. Die Regel vom Nullprodukt besagt, dass eine Produkt 0 ist, sobald einer der Faktoren null ist.

$$p_1 = 0 \vee ... \vee p_n = 0 \Rightarrow p = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n = 0$$

3.3.2 Funktionen allgemeiner Form

Definition 3.3.2. Für die Nullstellen einer quadratischen Funktion $y = ax^2 + bx + c$ bzw. die Lösung einer quadratischen Gleichung $0 = ax^2 + bx + c$ gibt es folgende (wichtige) Lösungsformel (3.3.2).

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{3.3.2}$$

Anmerkung 3.3.1. Es gibt immer zwei Lösungen, da $\pm$ bedeutet, dass man $+$ und $-$ rechnet.

3.4 Zusatz: Gleichungen mit höheren Potenzen lösen.

Definition 3.4.1.

1. Eine Gleichung der Form $ax^3 + bx^2 + cx = 0$ kann durch die Regel vom Nullprodukt gelöst werden (s. 3.1).

$$0 = x(ax^2 + bx + c). \tag{3.4.1}$$

Dann steht in den Klammern eine quadratische Gleichung $0 = ax^2 + bx + c$ und außerhalb der Klammer gilt $x = 0$.

2. Eine Gleichung der Form $ax^4 + bx^2 + c = 0$ kann dadurch gelöst werden, dass man ein u definiert für das

$$u := x^2 \tag{3.4.2}$$

gilt. Setzt man jetzt u ein, so erhält man eine normale quadratische Gleichung mit der Variable u. Ist diese gelöst muss man jetzt noch u in x umformen.

$$u = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{u} \tag{3.4.3}$$