Kapitel 4

Quadratische Funktionen in Anwendungen

Anmerkung 4.0.1. Im folgenden werden typische Aufgabentypen behandelt. Das Wissen um diese Aufgaben zu lösen wurde bereits in vergangen Kapiteln / Schuljahren erlernt. ⇒ Es werden nur Lösungsstrategien erarbeitet.

4.1 Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen

Merke 4.1.1. Ein lineares Gleichungssystem (LGS) mit drei Gleichungen und drei Variablen [a] kann man lösen, indem man es auf ein System mit zwei Gleichungen und zwei Variablen zurückführt.
Dies kann man in den folgenden Schritten machen[b]:

1. Eine der drei Gleichungen wird nach einer Variablen aufgelöst.
2. Aus den beiden andren Gleichungen wird diese Variable durch Einsetzen das sich ergebenden Terms eliminiert.
3. Das entstehende LGS mit zwei Gleichungen und zwei Variablen wird in der bekannten Weise gelöst.
4. Den Wer der eliminierten Variablen erhält man durch das Einsetzen der Lösungen in im ersten Schritt aufgelöste Gleichung.

[a] **Anmerkung** Ein Gleichungssystem mit drei Variablen und nur zwei Gleichungen lässt sich nicht vollständig lösen.
[b] Hier wird das Einsetzungsverfahren beschrieben.

Merke 4.1.2. Bei einem solchen LGS gibt es drei Fallunterscheidungen:

- Die Gleichungen ergeben drei konkrete Lösungen.
- Die Gleichungen sind nach Äquivalenzumformungen identisch. ⇒ unendlich viele Lösungen ⇒ Man sucht sich eine Variable aus und schreibt die anderen in Abhängigkeit von dieser.
- Die Gleichungen ergeben keine Lösungen.

Beispiel.

$$
\begin{aligned}
&\text{I)} && 2a - 8b + c = 6 \underset{\text{I'}}{\Longrightarrow} && c = 8b - 2a + 6\\
&\text{II)} && -a + 4b - 6c = -3 \xRightarrow[\text{II'}]{\text{I' in II}} && 6(8b - 2a + 6) = 4b - a + 3\\
& && && 11a = 44b + 33\\
& && && a = 4b + 3\\
&\text{III)} && 3a - b - c = 20 \xRightarrow[\text{III'}]{\text{I' in III}} && 3a - b - 8b + 2a + 6 = 20\\
& && && 5a - 9b = 14\\
& && \xRightarrow[\text{III''}]{\text{II' in III'}} && 5(4b + 3) - 9b = 14\\
& && && 11b = 11\\
& && && b = 1\\
&b \text{ in II')} && a = 4(1) + 3 = 7 &&\\
&b, a \text{ in I')} && c = 8(1) - 2(7) + 6 = 0 &&\\
& && (a, b, z) = (7, 1, 0) &&
\end{aligned}
$$

4.2 Funktionsterm einer quadratischen Funktion ermitteln

Um den Funktionsterm einer quadratischen Funktion zu bestimmen gibt es drei Varianten, für die man immer mindestens zwei Punkte braucht.

1. Sind drei beliebige Punkte $P_1(x_1 \mid y_1)$, $P_2(x_2 \mid y_2)$ und $P_3(x_3 \mid y_3)$, die auf der Parabel liegen, gegeben, so muss man ein LGS aufstellen.

$$
\begin{aligned}
&\text{I)} && y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c && (4.2.1)\\
&\text{II)} && y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c && (4.2.2)\\
&\text{III)} && y_3 = ax_3^2 + bx_3 + c && (4.2.3)
\end{aligned}
$$

   Durch Lösen erhält man die Werte für a, b und c. Damit kann man den Funktionsterm aufstellen.

2. Ist der Scheitelpunkt $S(x_1 \mid y_1)$ und ein (beliebiger) weiterer Punkt $P(x_2 \mid y_2)$, so kann man dies in die Scheitlpunktform einsetzen:

$$f(x) = a(x - x_1)^2 + y_1 \tag{4.2.4}$$

   Um den Parameter a zu bestimmen, muss man nur noch den zweiten Punkt P für x und $f(x)$ einsetzen, sodass man nach a umformen kann.

$$y_2 = a(x_2 - x_1)^2 + y_1 \tag{4.2.5}$$

3. Sind die Nullstellen x_1 und x_2 und ein Punkt $P(x_3 \mid y_3)$ gegeben so kann man die Nullstellen in die Nullstellenform einsetzen

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) \tag{4.2.6}$$

   Werden jetzt noch die Koordinaten des Punktes eingesetzt, kann man nach a umstellen.

$$y_3 = a(x_3 - x_1)(x_3 - x_1) \tag{4.2.7}$$

4.3 Extremwertprobleme

Anmerkung 4.3.1. Extremwertprobleme lassen sich schlecht verallgemeinern, da sie typische Textaufgaben, d.h. sie sind sehr situationsabhängig.

Bei Extremwertproblemen will man ein minimales bzw. ein maximales Ergebnis bestimmen. Dabei sind meistens zwei Größen Gegeben, bei denen die eine von der anderen Abhängig ist:

> A ist abhängig von x und y. Für x gilt meistens: $y = mx + t$. Bestimme x so, dass A möglichst groß / klein ist. [1]

Da A (nach Umformung) nur von einer Größe abhängt, kann man die Extremstelle mit der Formel

$$x_E = \frac{-b}{2a} \tag{4.3.1}$$

bestimmen und damit $A(x_E)$ berechnen.

Definition 4.3.1. Für die Lösungsmenge eines Extremwertproblems auf eine quadratische Funktion, so ist der Scheitelpunkt die Lösung.

Exkurs: Extremwertprobleme mit anderen Funktionen

Die Größe A wird beschrieben durch $A(x, y) = x + y$, dabei gilt $y = mx + t$. So gilt für A:

$$A = x + mx + t = x(m + 1) + t \tag{4.3.2}$$

Da diese Funktion linear ist, gilt: Umso größer die x ist, desto größer ist A. Abschließend kann man sagen:

> Für streng monotone Funktionen ist der Wert x_0 für die Funktion bei $x_0 \to \infty$ am größten und bei $x_0 \to -\infty$ am kleinsten.

[1] In der neunten Jahrgangsstufe betrachtet man nur lineare Zuordnungen, da wenn man sie mit der anderen Größe multipliziert erhält man eine quadratische Funktion: $A(x, y) = xy \Rightarrow A(x) = x(mx + t) = mx^2 + tx$

4.4 Schnittpunkt bestimmen

In diesen Aufgaben ist immer der Schnittpunkt zweier Funktion f und h gesucht. Entweder sind beide Funktionen quadratisch, oder eine ist quadratisch und die andere ist linear.

Definition 4.4.1. Ist der Schnittpunkt zweier Funktionen gesucht, so heißt, dass an einem bestimmten x-Wert der y-Wert beider Funktionen gleich ist. ⇒ Setzt man die beiden Funktionen gleich, [a] so liefert die Lösung dieser Gleichung den x-Wert. Der Wert muss dann nur noch in eine der beiden Funktionen eingesetzt werden, und so erhält man den y-Wert.

[a] Man stellt also eine Gleichung auf

1. **f und h sind quadratische Funktionen**
   Herleitung des x-Wertes, wenn

$$f(x) = ax^2 + bx + c \tag{4.4.1}$$
$$h(x) = dx^2 + ex + f \tag{4.4.2}$$

   Setzen wir diese beiden Funktionen gleich, so erhält man folgende Lösungsmenge für x:

$$ax^2 + bx + c = dx^2 + ex + f \tag{4.4.3}$$
$$0 = (a-d)x^2 + (b-e)x + (c-f) \tag{4.4.4}$$
$$x = \frac{-(b-e) \pm \sqrt{(b-e)^2 - 4(a-d)(c-f)}}{2(a-d)} \tag{4.4.5}$$

   Nun kann man x in $f(x)$ oder in $h(x)$ einsetzen und erhält den Schnittpunkt.

   Anmerkung 4.4.1. Auch hier spielt die Diskriminante eine Rolle, sie entscheidet darüber, wie viele Schnittpunkte die Parabeln haben.