1 Wyprowadzenie sformułowania słabego

Założenia:

$$-\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du(x)}{dx}\right) = 100x$$

$$u(2) = 0$$

$$\frac{du(0)}{dx} + u(0) = 20$$

$$k(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} x \in [0,1] \\ 2x & \text{dla} x \in (1,2] \end{cases}$$

$$u : [0,2] \ni x \mapsto u(x) \in \mathbb{R}$$

Wyprowadzenie sformułowania słabego zaczynam od obustronnego całkowania równania razem z przemnożeniem go przez funkcję testującą ϕ:

$$-\int_0^2 (ku')'\phi dx = \int_0^2 100x\phi dx$$

Całkując lewą stronę przez części można ją uprościć:

$$-\int_0^2 (ku')'\phi dx = -\left[ku'\phi\right]_0^2 + \int_0^2 ku'\phi' dx = -k(2)u'(2)\phi(2) + k(0)u'(0)\phi(0) + \int_0^2 ku'\phi' dx = ...$$

Korzystając z warunku Dirichleta na prawym brzegu, wiemy że $\phi(2) = 0$ co zeruje jeden człon brzegowy:

$$... = k(0)u'(0)\phi(0) + \int_0^2 ku'\phi' dx = ...$$

Następnie korzystając z warunku Cauchego na lewym brzegu upraszczam drugi człon brzegowy:

$$u'(0) = 20 - u(0)$$

$$... = k(0)(20 - u(0))\phi(0) + \int_0^2 ku'\phi' dx = 20k(0)\phi(0) - k(0)u(0)\phi(0) + \int_0^2 ku'\phi' dx = ...$$

Na koniec pozostało podstawić funkcję $k(x)$:

$$... = 20\phi(0) - u(0)\phi(0) + \int_0^1 u'\phi' dx + \int_1^2 2xu'\phi' dx$$

Wracając do początkowego równania przenoszę człony niezależące od u, na prawą stronę:

$$20\phi(0) - u(0)\phi(0) + \int_0^1 u'\phi' dx + \int_1^2 2xu'\phi' dx = \int_0^2 100x\phi dx$$

$$-u(0)\phi(0) + \int_0^1 u'\phi' dx + \int_1^2 2xu'\phi' dx = \int_0^2 100x\phi - 20\phi(0) dx$$

Niech:

$$B(u,\phi) = -u(0)\phi(0) + \int_0^1 u'\phi' dx + \int_1^2 2xu'\phi' dx$$

$$L(\phi) = \int_0^2 100x\phi - 20\phi(0) dx$$

Teraz mogę zapisać sformułowanie słabe (wariacyjne). Niech

$$V := \left\{ f \in H^1 : f(2) = 0 \right\}$$

$$\text{Szukamy:} \quad u \in V \quad \text{takiego, że:} \quad B(u,\phi) = L(\phi) \qquad \forall \phi \in V$$

2 Dyskretyzacja problemu

Jako, że $\dim V = \inf$ nie możemy rozwiązać takiego równania. Dlatego wybieramy podprzestrzeń liniową $V_h \subset V$

$$V_h = span\{e_0, e_1, e_2, ..., e_n\}$$

Gdzie funkcje z bazy podprzestrzeni są funkcjami generowanymi przez wzór:

$$e_i = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{dla} x \in [0, 1] \\ 2x & \text{dla} x \in (1, 2] \\ 0 & \end{cases}$$

3 Wyprowadzenie sformułowania słabego

Założenia:

$$-\frac{d}{dx}\left(E(x)\frac{du(x)}{dx}\right) = 0$$

$$u(2) = 3$$

$$\frac{du(0)}{dx} + u(0) = 10$$

$$E(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla} \quad x \in [0,1] \\ 6 & \text{dla} \quad x \in (1,2] \end{cases}$$

$$u : [0,2] \ni x \mapsto u(x) \in \mathbb{R}$$

$$u = \bar{u} + w$$

$$V = \left\{f \in H^1 : f(2) = 0\right\}$$

$$w, v \in V$$

Wyprowadzenie sformułowania słabego zaczynam od obustronnego całkowania równania razem z przemnożeniem go przez funkcję testującą v:

$$-\int_0^2 (Eu')'vdx = 0$$

Całkując lewą stronę przez części:

$$-\int_0^2 (Eu')'vdx = -\left[Eu'v\right]_0^2 + \int_0^2 Eu'v'dx = -E(2)u'(2)v(2) + E(0)u'(0)v(0) + \int_0^2 Eu'v'dx = ...$$

Wiemy, że na prawym brzegu spełniony jest warunek Dirichleta, więc $v(2) = 0$, co upraszcza jeden z członów brzegowych.

$$... = E(0)u'(0)v(0) + \int_0^2 Eu'v'dx = ...$$

Następnie korzystając z warunku Cauch'ego upraszczam drugi człon brzegowy:

$$u'(0) = 10 - u(0)$$

$$... = E(0)(10 - u(0))v(0) + \int_0^2 Eu'v'dx = 10E(0)v(0) - E(0)u(0)v(0) + \int_0^2 Eu'v'dx = ...$$

Pozostało podstawić funkcję $E(x)$

$$... = 20v(0) - 2u(0)v(0) + \int_0^1 2u'v'dx + \int_1^2 6u'v'dx$$

Wracając do początkowego równania:

$$-2u(0)v(0) + \int_0^1 2u'v'dx + \int_1^2 6u'v'dx = -20v(0)$$

Niech

$$B(u,v) = -2u(0)v(0) + \int_0^1 2u'v'dx + \int_1^2 6u'v'dx L(v) = -20v(0)$$

$$B(u,v) = L(v)$$

Lecz powyższe równanie nie spełnia założeń sformułowania słabego gdyż $u \notin V$, podstawiamy więc $u = \bar{u} + w$ do równania:

$$B(\bar{u} + w, v) = L(v)$$

$$-2(\bar{u}(0) + w(0))v(0) + \int_0^1 2(\bar{u}' + w')v'dx + \int_1^2 2(\bar{u}' + w')v'dx = -20v(0)$$

Upraszczamy równanie separując zmienne:

$$-2\bar{u}(0)v(0) - 2w(0)v(0) + \int_0^1 2\bar{u}'v'dx + \int_0^1 2w'v'dx + \int_1^2 6\bar{u}'v'dx + \int_1^2 6w'v'dx = -20v(0)$$

$$-2w(0)v(0) + \int_0^1 2w'v'dx + \int_1^2 6w'v'dx = -20v(0) + 6\bar{u}(0)v(0) - \int_0^1 2\bar{u}'v'dx - \int_1^2 6\bar{u}'v'dx$$

Teraz potrzebujemy dopasować funkcję $\bar{u}$:

$$u = \bar{u} + w \qquad u(2) = 3 \qquad w(2) = 0$$

Najprostszą funkcją jaką możemy wziąć, która spełnia powyższe założenia jest:

$$\bar{u}(x) = 3\frac{x - (2 - \frac{2}{N})}{\frac{2}{N}}$$

Upraszcza nam to powyższe zadanie do postaci:

$$\bar{u}'(x) = \frac{3N}{2}$$

$$\bar{u}(0) = \frac{-(2 - \frac{2}{N})}{\frac{2}{N}} = 3\frac{2 - 2N}{2} = 3(1 - N)$$

$$-2w(0)v(0) + \int_0^1 2w'v'dx + \int_1^2 6w'v'dx = -20v(0) + 18(1 - N)v(0) - \int_0^1 3Nv'dx - \int_1^2 9Nv'dx$$