Metoda Elementów Skończonych
Transfer ciepła

Łukasz Kwinta

1 Wyprowadzenie sformułowania słabego

Założenia:

$$-\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du(x)}{dx}\right) = 100x$$

$$u(2) = 0$$

$$\frac{du(0)}{dx} + u(0) = 20$$

$$k(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} x \in [0,1] \\ 2x & \text{dla} x \in (1,2] \end{cases}$$

$$u : [0,2] \ni x \mapsto u(x) \in \mathbb{R}$$

Wyprowadzenie sformułowania słabego zaczynam od obustronnego całkowania równania razem z przemnożeniem go przez funkcję testującą ϕ:

$$-\int_0^2 (ku')'\phi dx = \int_0^2 100x\phi dx$$

Całkując lewą stronę przez części można ją uprościć:

$$-\int_0^2 (ku')'\phi dx = -\left[ku'\phi\right]_0^2 + \int_0^2 ku'\phi' dx = -k(2)u'(2)\phi(2) + k(0)u'(0)\phi(0) + \int_0^2 ku'\phi' dx = ...$$

Korzystając z warunku Dirichleta na prawym brzegu, wiemy że $\phi(2) = 0$ co zeruje jeden człon brzegowy:

$$... = k(0)u'(0)\phi(0) + \int_0^2 ku'\phi' dx = ...$$

Następnie korzystając z warunku Cauchego na lewym brzegu upraszczam drugi człon brzegowy:

$$u'(0) = 20 - u(0)$$

$$... = k(0)(20 - u(0))\phi(0) + \int_0^2 ku'\phi' dx = 20k(0)\phi(0) - k(0)u(0)\phi(0) + \int_0^2 ku'\phi' dx = ...$$

Na koniec pozostało podstawić funkcję $k(x)$:

$$... = 20\phi(0) - u(0)\phi(0) + \int_0^1 u'\phi' dx + \int_1^2 2xu'\phi' dx$$

Wracając do początkowego równania przenoszę człony niezależące od u, na prawą stronę:

$$20\phi(0) - u(0)\phi(0) + \int_0^1 u'\phi' dx + \int_1^2 2xu'\phi' dx = \int_0^2 100x\phi dx$$

$$-u(0)\phi(0) + \int_0^1 u'\phi' dx + \int_1^2 2xu'\phi' dx = \int_0^2 100x\phi dx - 20\phi(0)$$

Niech:

$$B(u,\phi) = -u(0)\phi(0) + \int_0^1 u'\phi' dx + \int_1^2 2xu'\phi' dx$$

$$L(\phi) = \int_0^2 100x\phi dx - 20\phi(0)$$

Teraz mogę zapisać sformułowanie słabe (wariacyjne). Niech

$$V := \left\{ f \in H^1 : f(2) = 0 \right\}$$

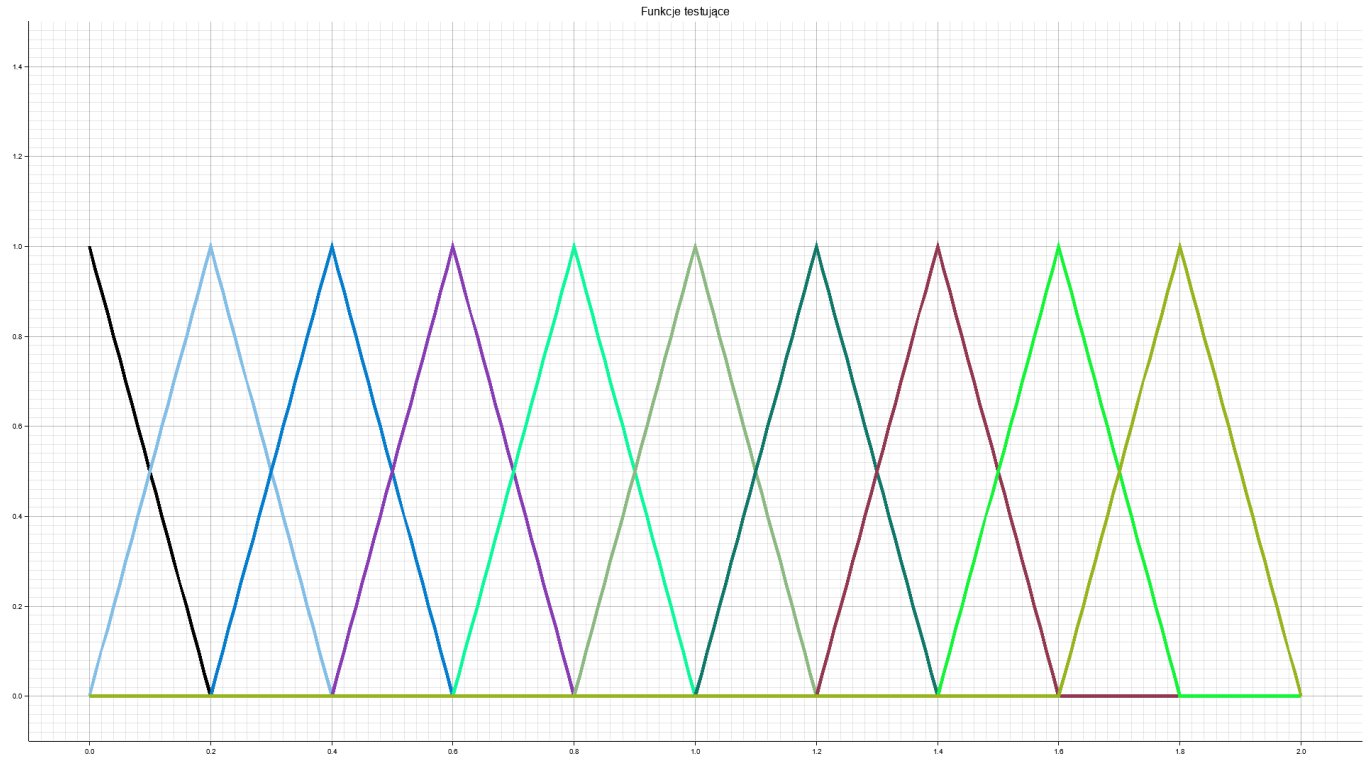
$$\text{Szukamy:} \quad u \in V \quad \text{takiego, że:} \quad B(u,\phi) = L(\phi) \qquad \forall \phi \in V$$

2 Dyskretyzacja problemu

Jako, że $\dim V = \inf$ nie możemy rozwiązać takiego równania. Dlatego wybieramy podprzestrzeń liniową $V_h \subset V$

Jako bazę podprzestrzeni V_h bierzemy funkcje dane poniższym wzore

$$e_i = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & \text{dla} \quad x \in [0,1] \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} & \text{dla} \quad x \in (1,2] \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$



Rysunek 1: Funkcje bazowe e_i dla $N = 10$

Jako, że na prawym brzegu mamy warunek Dirichleta, to odrzucamy funkcję e_n i nasza podprzestrzeń będzie generowana przez następujący zbiór funkcji:

$$V_h = span\,\{e_0, e_1, e_2, ..., e_{n-1}\}$$

Sformułowanie słabe dla naszej przestrzeni dyskretnej będzie następujące:

$$\text{Szukamy:} \quad u_h \in V_h \quad \text{takiego, że:} \quad B(u_h, \phi) = L(\phi) \qquad \forall \phi \in V_h$$

Naszą szukaną funkcję możemy więc zapisać jako kombinację liniową funkcji z bazy podprzestrzeni:

$$u \cong u_h = \sum_{i=0}^{n-1} e_i w_i \qquad \text{gdzie} \qquad w_i \in \mathbb{R}$$

Sformułowanie słabe możemy teraz zapisać korzystając z funkcji z bazy:

$$\forall_{j \in 0,1,2,...,n-1} : B(\sum_{i=0}^{n-1} e_i w_i, e_j) = L(e_j)$$

Co można uprościć poprzez wyciągnięcie sumy z formy dwuliniowej:

$$\forall_{j \in 0,1,2,...,n-1} : \sum_{i=0}^{n-1} w_i B(e_i, e_j) = L(e_j)$$

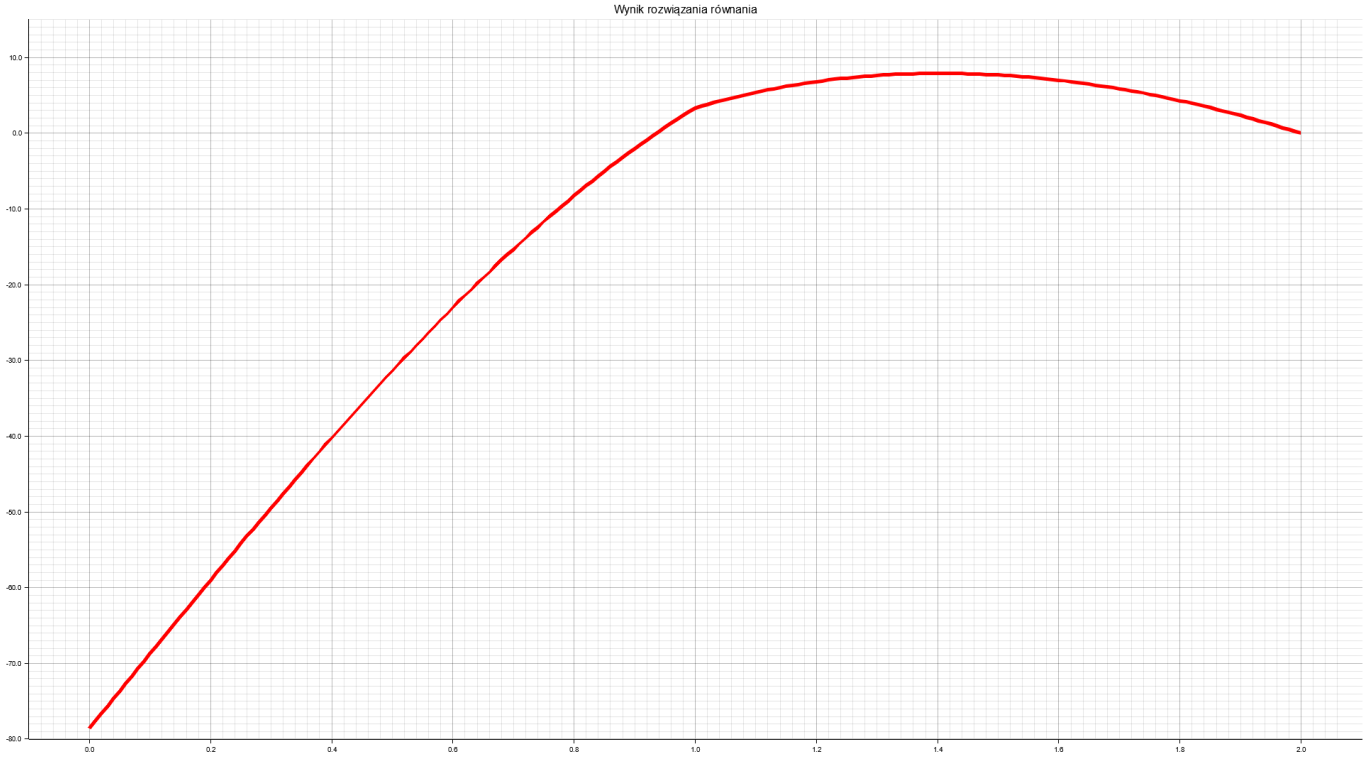
Jak łatwo zauważyć, powyższe równanie jest zapisem układu równań liniowych. Można więc zapisać je w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} B(e_0,e_0) & B(e_1,e_0) & B(e_2,e_0) & \cdots & B(e_{n-1},e_0) \\ B(e_0,e_1) & B(e_1,e_1) & B(e_2,e_1) & \cdots & B(e_{n-1},e_1) \\ B(e_0,e_2) & B(e_1,e_2) & B(e_2,e_2) & \cdots & B(e_{n-1},e_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ B(e_0,e_{n-2}) & B(e_1,e_{n-2}) & B(e_2,e_{n-2}) & \cdots & B(e_{n-1},e_{n-2}) \\ B(e_0,e_{n-1}) & B(e_1,e_{n-1}) & B(e_2,e_{n-1}) & \cdots & B(e_{n-1},e_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{n-2} \\ w_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(e_0) \\ L(e_1) \\ L(e_2) \\ \vdots \\ L(e_{n-2}) \\ L(e_{n-1}) \end{bmatrix}$$

Rozwiązując powyższy układ równań jesteśmy w stanie wyznaczyć wagi funkcji testujących co pozwala uzyskać przybliżone rozwiązanie problemu.

3 Wyniki

Po zaimplementowaniu algorytmu w języku Rust jako rozwiązanie przedstawionego problemu uzyskałem następującą funkcję:



Rysunek 2: Szukana funkcja $u(x)$ dla $N = 1000$

Do obliczania całek korzystałem z kwadratury Gaussa-Legendre'a dla 3 punktów. Do rozwiązywania układu równań liniowych urzyłem biblioteki będącej bindingie do biblioteki LAPACK.