Notatki z wykładów z Fizyki 1

Łukasz Kwinta

Spis treści

1 Wiadomości wstępne i wektory

W całych notatkach mogą pojawić się poniżej zdefiniowane wektory - a dokładniej wersory rozpinające przestrzenie $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$:

$\mathbb{R}^2$:

$$\hat{i} = (1,\ 0)$$

$$\hat{j} = (0,\ 1)$$

$\mathbb{R}^3$:

$$\hat{i} = (1,\ 0,\ 0)$$

$$\hat{j} = (0,\ 1,\ 0)$$

$$\hat{k} = (0,\ 0,\ 1)$$

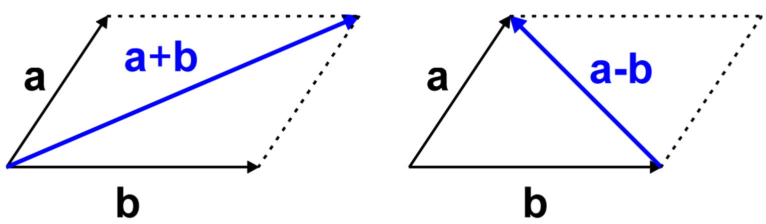
1.1 Suma wektorów

Niech:

$$\vec{a} := (a_1, a_2, a_3) \qquad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

Wtedy suma wektorów ma następującą postać:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ a_3 + b_3)$$



1.2 Iloczyn skalarny

Niech:

$$\vec{a} := (a_1, a_2, a_3) \qquad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

Wtedy iloczyn skalarny oznaczamy $\circ$ ma następującą postać:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Występuje również poniższa zależność:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \cdot \cos\left(\ \vec{a},\ \vec{b}\ \right)$$

1.3 Iloczyn wektorowy

Niech:

$$\vec{a} := (a_1, a_2, a_3) \qquad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

oraz:

$$\hat{i} := (1, 0, 0) \qquad \hat{j} = (0, 1, 0) \qquad \hat{k} = (0, 0, 1)$$

Wtedy, iloczyn wektorowy ma następującą postać:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \hat{i}(a_2 b_3 - a_3 b_2) + \hat{j}(a_3 b_1 - a_1 b3) + \hat{k}(a_1 b_2 - a_2 b_1) =$$

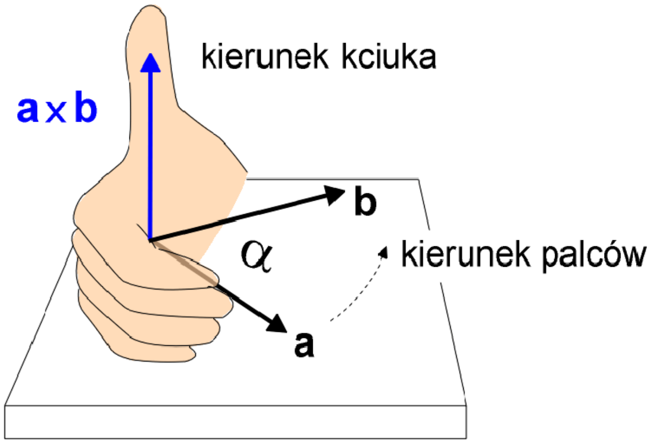
$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Tak jak przy iloczynie skalarnym występuje zależność związana z kątem między wektorami:

$$||\vec{a} \times \vec{b}|| = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \cdot \sin\left(\ \vec{a},\ \vec{b}\ \right)$$

Kierunek iloczynu wektorowego $\vec{a} \times \vec{b}$ jest prostopadły do płaszczyzny stworzonej przez wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Natomiast zwrot tego wektora można określić stosując zasadę prawej dłoni:



2 Podstawy kinematyki

2.1 Podstawowe pojęcia

Definicja: Ruch

Zmiana wzajemnego położenia ciał względem innych ciał wraz z upływem czasu.

Definicja: Układ odniesienia

Wybrane ciało lub ciało względem których wyznaczamy własności fizyczne takie jak położenie czy prędkość.

Definicja: Punkt materialny

Punktem materialnym nazywamy obiekt obdarzony masą, których rozmiar (aka objętość) można zaniedbać.

Definicja: Przemieszczenie

Zmiana położenia ciała względem jakiegoś układu odniesienia, zwykle punktu $(0,\ 0)$ *w układzie współrzednych. Wektor przemieszczenia oznaczamy* r*. Występuje poniższa zależność:*

$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z = (x,\ y,\ z)$$

gdzie:

– x *- współrzedna* x *wektora przemieszczenia*

– y *- współrzędna* y *wektora przemieszczenia*

– z *- współrzędna* z *wektora przemieszczenia*

2.2 Prędkość

Definicja: Prędkość

Prędkość to zmiana położenia w czasie:

$$\vec{v} = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

gdzie:

- $\Delta\vec{r}$ - *wektor przemieszczenia rozpięty pomiędzy poprzednim(x_0) a nowym(x) położeniem*
- Δt - *czas w jakim nastąpiła ta zmiana*

Bardziej ogólnie: ***pochodna drogi(położenia) po czasie***

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

gdzie $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ to funkcje opisujące zmianę położenia względem każdej z osi.

Definicja: Szybkość

Wielkość skalarna. Wartość wektora prędkości w danej chwili t. Czasami równa prędkości średniej.

Jeśli ciało znajdowało się w chwili t_0 w punkcie x_0, a w chwili t w punkcie x to:

$$x - x_0 = v(t - t_0)$$

Stąd ($\Delta x := x - x_0$ oraz $\Delta t := t - t_0$):

$$v = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Z definicji prędkość jest wielkością wektorową więc warto zwracać uwagę w zadaniach na oznaczenia. W zadaniach gdzie wektor prędkości nie ma stałego kierunku rozważa się składowe wektora prędkości dla uproszczenia zadania - na przykład przy rzucie ukośnym rozważa się składową pionową i poziomą prędkości.

Gdy wartość prędkości zmienia się w czasie nie możemy stosować powyższego wzoru - nabiera on wtedy sens *"Prędkości średniej"*. Korzystając z analizy matematycznej aby dokładnie opisać prędkość chwilową ciała należy dążyć ze zmianą czasu do 0. ($\Delta x \to 0$), a więc

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

A więc prędkość jest pierwszą pochodną położenia (drogi) po czasie.
Warto tutaj zwrówicić uwagę, że prawdziwa też jest operacja odwrotna ***(nie jest to do końca operacja poprawna stricte matematycznie lecz mająca sens fizyczny - w matematyce symbol pochodnej $\frac{\mathbf{df(x)}}{\mathbf{dx}}$ traktujemy jako jedność, w fizyce nic nie stoi na przeszkodzie aby traktować to jako ułamek)***:

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \Longrightarrow \quad dx = v\,dt \quad \Longrightarrow \quad \int dx = \int v\,dt$$

$$x = \int v\,dt + \mathbf{C}$$

Należy pamiętać o stałej całkowania **C**, interpretowanej zwykle jako x_0 - położenie początkowe. W większości wypadków stałą będziemy wyliczali z warunków początkowych zadania, np. $x(0) = 0$.

Definicja: Prędkość średnia

Oszacowana wartość prędkości na danym odcinku. Oznaczana $\bar{v}$. Prędkość średnią wyznaczamy poprzez wzór:

$$\bar{v} = \frac{S_c}{t_c}$$

gdzie:

– S_c *- całkowity dystans przebyty w czasie* t_c

– t_C *- całkowity czas*

Potocznie: ***Cała droga przez cały czas***

Na przykład gdy interesuje nas prędkość średnia w przedziale $< t_0, t_k >$ możemy zastosować całkę oznaczoną by policzyć całkowitą drogę:

$$S_c = \int_{t_0}^{t_k} v\,dt$$

Średnia prędkość dana będzie wtedy wzorem:

$$\bar{v} = \frac{S_c}{t_k - t_0}$$

2.3 Przyspieszenie

Definicja: Przyspieszenie

Przyspieszenie to wielkość opisująca jak zmienia się prędkość ciała w czasie:

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v_0}}{t - t_0} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

gdzie:

- $\Delta \vec{v}$ - *wektor będący różnicą pomiędzy nowym a starym wektorem prędkości*
- Δt - *czas w jakim nastąpiła ta zmiana*

Bardziej ogólnie: ***pochodna prędkości po czasie***

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k} = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt}\right)$$

gdzie $v_x(t)$, $v_y(t)$, $v_z(t)$ to funkcje opisujące prędkość względem każdej osi.

Ze względu na wektor przyspieszenia wyróżniamy rodzaje ruchu:

- $a = 0$ - **jednostajny**
- $\vec{a} = \text{const}$[1] - **jednostajnie** opóźniony ($a < 0$) lub przyspieszony ($a > 0$)
- $a \neq \text{const}$ - **niejednostajnie** opóźniony ($a < 0$) lub przyspieszony ($a > 0$)[2]

Warto pamiętać, że:

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \Longrightarrow \quad dv = a\ dt \quad \Longrightarrow \quad \int dv = \int a\ dt$$

$$v = \int a\ dt + \mathbf{C}$$

gdzie **C** zwykle oznacza prędkość początkową ruchu.

[1] Warto zwrócić uwagę, że implikuje to stały kierunek i zwrot wektora przyspieszenia

[2] O wartości przyspieszenia mówimy w przedziale czasu

2.4 Ruch jednostajnie przyspieszony

Definicja: Ruch jednostajnie przyspieszony

Ruch w którym wektor przyspieszenia jest stały:

$$\vec{a} = const$$

Z ruchem **jednostajnie** przyspieszonym wiążą się pewne uogólnienia o których warto pamiętać. Wszystkie wynikają z ogólnych wzorów więc można je wyprowadzić.

Zależność prędkości od czasu możemy wyprowadzić korzystając z podstawowej zależności na przyspieszenie:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0} \overset{t_0=0}{=} \frac{v - v_0}{t} \qquad \Longrightarrow \qquad at = v - v_0$$

$$v(t) = v_0 + at$$

Podobnie korzystając z zależności na prędkość średnią możemy wyprowadzić zależność na położenie:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0} \overset{t_0=0}{=} \frac{x - x_0}{t} \qquad \Longrightarrow \qquad \bar{v}t = x - x_0$$

$$x(t) = x_0 + \bar{v}t$$

Liniowa zależność prędkości od czasu sprowadza średnią prędkość do średniej arytmetycznej:

$$\bar{v} = \frac{v + v_0}{2}$$

Łącząc trzy powyższe równania możemy wyprowadzić zależność na położenie od czasu dla ruchu **jednostajnie zmiennego**:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

2.5 Ruch złożony

Jest to rodzaj ruchu gdzie przemieszczenie odbywa się równocześnie względem osi OX i OY. Układy takie opisuje się stosując zestawy równań skalarnych względem obu osi osobno.

Rozważmy np. ruch jednostajnie przyspieszony względem obu osi.

$$\vec{a} = \text{const}$$

$$\vec{v} = \vec{v_o} + \vec{a}t$$

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{v_0}t + \frac{\vec{a}t}{2}$$

Znając wektor przyspieszenia jesteśmy wstanie stworzyć dwa zestawy **skalarnych** równań ruchu opisujące ruch wzdłuż prostopadłych do siebie osi.

Równania wzdłóż osi OX	Równania wzdłóż osi OY
$a_x = \text{const}$ $v_x = v_{x0} + a_x t$ $x = x_0 + v_{x0}t + \frac{a_x t^2}{2}$	$a_y = \text{const}$ $v_y = v_{y0} + a_y t$ $y = y_0 + v_{y0}t + \frac{a_y t^2}{2}$

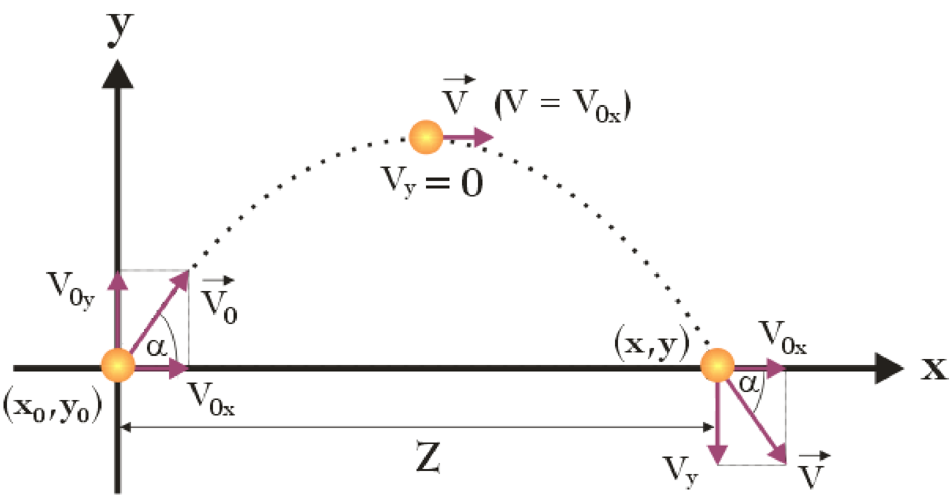
Rzut ukośny

Najbardziej oczywistym przykładem ruchu złożonego jest rzut ukośny. Rozważmy ciało wyrzucane z poziomu podłoża pod kątem α do podłoża z prędkością styczną równą v_0. Przyjmuję następujące oznaczenia:

– z odległość jaką przeleci ciało zanim uderzy w ziemię

– v_x pozioma składowa prędkości początkowej

– v_y pionowa składowa prędkości początkowej



Stosując podstawowe zależności trygonometryczne możemy rozłożyć wektor prędkości początkowej

$$v_{x0} = v_0 \cos(\alpha)$$

$$v_{y0} = v_0 \sin(\alpha)$$

Ponieważ ciało zostało rzucone swobodnie i zaniedbujemy opory ruchu w kierunku poziomym ciało porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym, a w kierunku pionowym jednostajnie opóźnionym (później przyspieszonym) wynikającym z siły grawitacji, **wektor przyspieszenia grawitacyjnego skierowany jest przeciwnie do wektora składowego prędkości początkowej w kierunku pionowym,**

więc g **idzie ze znakiem** $-$:

$$v_x = v_{x0} = v_0 \cos(\alpha)$$

$$v_y = v_{y0} - gt = v_0 \sin(\alpha) - gt$$

Teraz stosując twierdzenie pitagorasa możemy wyprowadzić zależność na prędkość **styczną do toru ruchu** od czasu:

$$v(t) = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)} = \sqrt{v_0 - 2v_0gtsin(\alpha) + g^2t^2}$$

Równania ruchu względem obu osi mają następującą postać:

$$x(t) = x_0(=0) + v_{x0}t = v_0 \cos(\alpha)t$$

$$y(t) = y_0(=0) + v_{y0}t - \frac{gt^2}{2} = v_0 \sin(\alpha)t - \frac{gt^2}{2}$$

Mając równania ruchu bardzo łatwo wyprowadzić zależnośc $y(x)$ pokazującą tor ruchu ciała:

$$x = v_0 \cos(\alpha)t \qquad \Longrightarrow \qquad t = \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)}$$

Podstawiając do równania $y(t)$ otrzymujemy:

$$y(x) = v_0 \sin(\alpha)\frac{x}{v_0 \cos(\alpha)} - \frac{g(\frac{x}{v_0 \cos(\alpha)})^2}{2}$$

upraszczając:

$$y(x) = x \tan\alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)}x^2$$

Aby policzyć zasięg rzutu ukośnego potrzebujemy policzyć całkowity czas wznoszenia t_1 i opadania t_2. Można zauważyć, że pomijając opory ruchu czasy te będą sobie równe, a więc:

$$v_y(t_1) = 0$$

$$v_0 \sin(\alpha) - gt_1 = 0$$
$$t_1 = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g}$$
$$t_c = t_1 + t_2 = 2t_1$$
$$t_c = \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g}$$

Skoro mamy czas po jakim czasie ciało uderzy o ziemię, zasięg rzutu będzie równy odległości jaką ciało przebędzie w kierunku poziomym:

$$z = x(t_c) = v_0 \cos(\alpha) t_c = v_0 \cos(\alpha) \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g} \implies z = \frac{2v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$$

2.6 Ruch po okręgu

Definicja: Ruch po okręgu

Ruch w którym tor ruchu jest okrąg. Wektor prędkości v_s jest stycznyczny do okręgu. Występuje przyspieszenie radialne/normalne prostopadłe do wektora prędkości - oznaczamy a_r - gdy mówimy dokładnie o okręgu przyspieszenie to można nazwać przyspieszeniem dośrodkowym, lecz nazwać radialne/normalne jest bardziej ogólna.

Aby wyprowadzić zależności opisujące ruch po okręgu rozważmy chwilię gdy ciało znajduje się w punkcie P. Przyjmuję następujące oznaczenia:

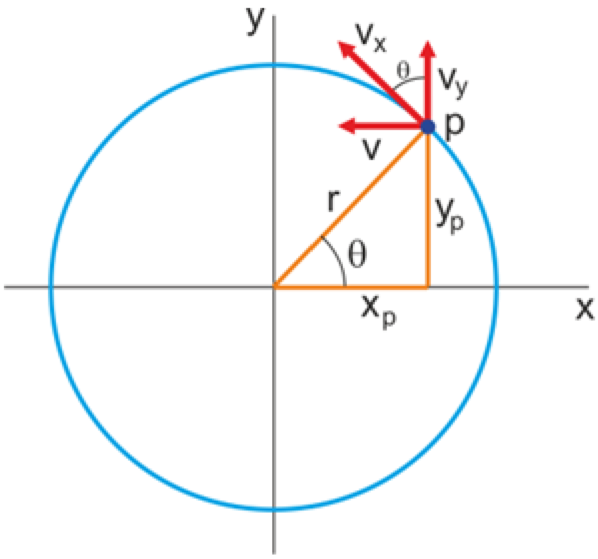
– x_P i y_P współrzędne x i y punktu P

– $\vec{v}$ wektor prędkości stycznej do okręgu, v wartość wektora prędkości

– v_x i v_y pozioma i pionowa składowa wektora prędkości $\vec{v}$

– r promień okręgu po którym odbywa się ruch

– θ kąt pomiędzy osią OX a promieniem poprowadzonym między punktami $(0,\ 0)$ i P



Rysunek 1: Na rysunku pomylono $\vec{v_x}$ i $\vec{v}$

Zapisujemy równania zależności trygonometrycznych:

$$\sin\theta = \frac{y_P}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x_P}{r}$$

Rozkładamy prędkość styczną na składowe (składowa pozioma jest ujemna bo ciało porusza się ”wstecz” osi OX):

$$\vec{v} = \hat{i}v_x + \hat{j}v_y = \hat{i}(-v\sin\theta) + \hat{j}(v\cos\theta)$$

$$\vec{v} = \hat{i}\left(-v\frac{y_P}{r}\right) + \hat{j}\left(v\frac{x_P}{r}\right)$$

Aby obliczyć przyspieszenie ”dośrodkowe” wystarczy policzyć pochodną. v i r to stałe więc wystarczy policzyć pochodne $x_P(t)$ i $y_P(t)$.

$$\vec{a_r} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \hat{i}\left(-\frac{v}{r}\frac{dy_P}{dt}\right) + \hat{j}\left(\frac{v}{r}\frac{dx_P}{dt}\right) = \hat{i}\left(-\frac{v}{r}v_y\right) + \hat{j}\left(\frac{v}{r}v_x\right)$$

Wstawiając wzory na prędkość otrzymujemy:

$$\vec{a_r} = \hat{i}\left(-\frac{v^2}{r}\cos\theta\right) + \hat{j}\left(\frac{v^2}{r}\sin\theta\right)$$

Wartość przyspiesznenia otrzymujemy z tw. Pitagorasa:

$$a_r = \sqrt{\left(-\frac{v^2}{r}\cos\theta\right)^2 + \left(\frac{v^2}{r}\sin\theta\right)^2} = \sqrt{\frac{v^4}{r^2}(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \frac{v^2}{r}$$

Przyspieszenie radialne jest zwrócone prostopadle do toru ruchu czyli w tym wypadku do środka okręgu.

Prędkość styczną w ruchu po okręgu możemy wyrazić korzystając z okresu ruchu T. Jeśli pokonanie całego okręgu o długości $l = 2\pi r$ zajmuje ciału czas t_0 to czas ten nazywmay okresem i oznaczmay $T = t_0$ - oznacza to czas potrzeby na pokonanie **j**ednego okręgu. Wtedy prędkość v możemy wyrazić wzorem:

$$v = \frac{l}{T} = \frac{2\pi r}{T}$$

Korzystając z tego wzoru możemy wyrazić przyspieszenie dośrodkowe:

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

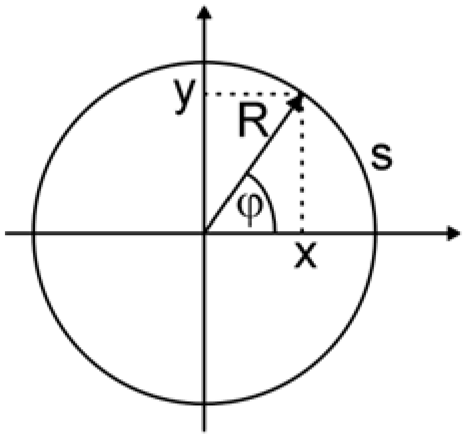
Przy ruchu po okręgu/ruchu obrotowym pojawiają się wielkości skalarne opisujące stricte obrót. Są to wielkości **skalarne**. Na potrzeby przyjmę następujące oznaczenia:

– s - długość łuku jakie zatoczyło ciało

– x i y - pozycja ciała względem osi układu współrzędnych

– $\vec{R}$ - wektor położenia względem środka układu współrzędnych, R jego wartość

– φ - kąt jaki zatoczyło ciało



Definicja: Droga kątowa

Jest to kąt jaki zatoczyło ciało. Jest to iloraz długości łuku przebytego przez ciało i promienia wodzącego. Wyrażamy w radianach.

$$\varphi = \frac{s(t)}{R}$$

Definicja: Prędkość kątowa

Jest to szybkość zmiany "kąta zatoczonego przez ciało". Analogicznie do zwykłej prędkości jest to iloraz drogi kątowej przebytej w czasie. Jednostka: $\frac{1}{s}$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{s(t)}{R} = \frac{v}{R}$$

Gdy prędkość styczna jest stała, szybkość kontowa wyraża się następująco:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Definicja: Przyspieszenie kątowa

Opisuje jak zmienia się prędkość kątowa w czasie. Analogicznie do przyspieszenia w ruchu postępowym(zwykłym) jest to pochodna z prędkości kątowej. Jednostka $\frac{1}{s^2}$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{v}{R} = \frac{a}{R}$$

Używając tych symboli możemy wyznaczyć wzory na podstawowe wielkości opisujące ruch po okręgu.

Dla stałej prędkości stycznej:

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \omega R$$

$$a_r = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = \omega^2 R$$

Uogólnienie:

Korzystając z poprzednego rysunku równania ruchu wyglądają następująco:

$$x(t) = R\cos\varphi(t) \qquad y(t) = R\sin\varphi(t) \qquad \text{gdzie: } \varphi(t) = \frac{s(t)}{R}$$

Możemy policzyć równania prędkości:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -R\frac{d\varphi}{dt}\sin\varphi = -R\omega\sin\varphi(t)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt}\cos\varphi = -R\omega\cos\varphi(t)$$

Teraz przyspieszenie:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -R\frac{d\omega}{dt}\sin\varphi - R\omega\frac{d\varphi}{dt}\cos\varphi = -R\alpha\sin\varphi - R\omega^2\cos\varphi$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = R\frac{d\omega}{dt}\cos\varphi - R\omega\frac{d\varphi}{dt}\sin\varphi = R\alpha\cos\varphi - R\omega^2\sin\varphi$$

Wstawiając równania prędkości i położenia:

$$a_x = -R\alpha \sin\varphi - R\omega^2 \cos\varphi = \frac{\alpha}{\omega} v_x - x\omega^2$$

$$a_y = R\alpha \cos\varphi - R\omega^2 \sin\varphi = \frac{\alpha}{\omega} v_y - y\omega^2$$

Przechodząc do równania wektorowego:

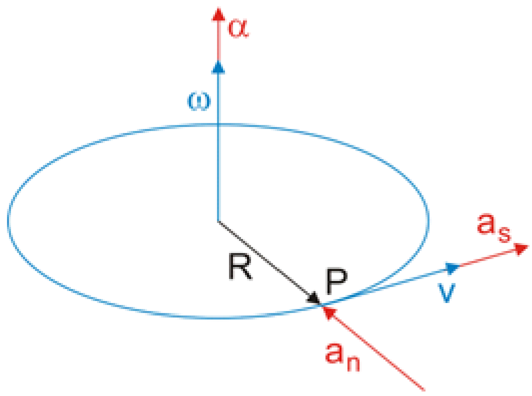
$$\vec{a} = \hat{i} a_x + \hat{j} a_y = \hat{i}\left(\frac{\alpha}{\omega} v_x - x\omega^2\right) + \hat{j}\left(\frac{\alpha}{\omega} v_y - y\omega^2\right) =$$

$$= \frac{\alpha}{\omega}\left(\hat{i} v_x + \hat{j} v_y\right) - \omega^2\left(\hat{i} x + \hat{j} y\right)$$

$$\vec{a} = \frac{\alpha}{\omega}\vec{v} - \omega^2 \vec{R}$$

W ten sposób wyprowadziliśmy wózór na wypadkowy wektor przyspieszenia w ruchu po okręgu.

$$\vec{a} = \vec{a_s} + \vec{a_n} = \frac{\alpha}{\omega}\vec{v} - \omega^2 \vec{R}$$



Na powyższym rysunku zaznaczono też "wektory" prędkości kątowej ω i przyspieszenia kątowego α lecz wciąż należy pamiętać, że nie są to właściwe wektory, a raczej zwyczajowe oznaczenie na rysunku w którą stronę się obracamy (z zasady prawej dłoni na podstawie wektora prędkości stycznej). **Są to wielkości skalarne**.

3 Dynamika

3.1 Wstęp

Dynamika to dział zajmujący się opisywaniem przyczyn ruchu. Istnieją 4 podstawowe oddziaływania z których wynikają wszystkie inne siły:

– **oddziaływanie grawitacyjne** - działa na dużą odległość i dotyczy mas ciał

– **oddziaływanie elektromagnetyczne** - działa na dużą odlgegłość i dotyczy ładunków elektrycznych i prądu

– **oddziaływanie jądrowe słabe** - działa na małą odległość i dotyczy atomów

– **oddziaływania jądrowe silne** - działa na małą odległości i dotyczy cząstek jądrowych

Definicja: Masa

Najprostszą definicją masy jest ***ilość materii zawartej w ciele****. Jest to jedna z pierwszych definicji masy.*
Newton definiował masę jako ***miarę bezwładności ciała****. Ma to podłoże w drugiej zasadzie dynamiki gdzie masę definiujemy jako iloraz siły i przyspieszenia.*

$$m = \frac{F}{a}$$

Masę jakiegość ciała możemy też odnieć do masy "wzorcowej" korzystając z zasady zachowania pędu. Gdy rozpędzimy ciało o masie wzorcowej do prędkości v_0 i zderzymy z ciałem o masie m (tak żeby ciało m_0 pozostawało w spoczynku po zderzeniu) to jeśli zmierzymy jego prędkość v to jego masa wyrażać się będzie wzorem:

$$\mathbf{m = m_0 \frac{v_0}{v}}$$

Wyprowadza się go z zasady zachowania pędu (o tym poniżej). Skoro ciało o masie m_0 porusza się z prędkością v_0 to jego pęd p_0 wynosi $p_0 = mv_0$. Natomiast po zderzeniu ciało o nieznanej masie m uzyska prędkość v, a więc jego pęd wyniesie $p = mv$. Skoro mówimy o zderzeniu idealnie niesprężystym możemy przyrówać te pędy:

$$p = p_0$$

$$mv = m_0 v_0$$

$$m = m_0 \frac{v_0}{v}$$

Definicja: Pęd

Pęd to iloczyn masy i prędkości.

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Definicja: Siła

Siłę definiujemy jako zmianę pędu w czasie.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

3.2 Zasady dynamiki Newtona

Definicja: Pierwsza zasada dynamiki - ***Zasada bezwładności***

Jeśli na ciało nie działa żadna siła lub siły działające równoważą się $\left(\vec{F_{wyp}} = \bar{0}\right)$. *To ciało pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem* ***jednostajnym prostoliniowym****.*

Wynika z niej ***zasada zachowania pędu****:*

$$\sum \vec{F} = \vec{F_{wyp}} = \bar{0} \quad \Longrightarrow \begin{cases} \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{p} = const \\ \Longrightarrow \; m\vec{a} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{a} = 0 \end{cases}$$

Definicja: Druga zasada dyanmiki

Druga zasada dynamiki wiąże siłę wypadkową sił działających na ciało z przyspieszeniem z jakim się porusza.

$$\sum \vec{F} = \vec{F_{wyp}} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

gdzie:

– m *- masa ciała,* $m = const$

– $\vec{a}$ *- wektor przyspieszenia ciała*

Lub podstawiając $d\vec{p} = m\ d\vec{v}$ *możemy wyrazić ją w postaci pędowej:*

$$\vec{F_{wyp}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Definicja: Trzecia zasada dyanmiki - ***Zasada kontrakcji***

Gdy na ciało A oddziałuje na ciało B z siłą $F_{A\to B}$, to ciało B oddziałuje na ciało A siłą $F_{B\to A}$ o tej samej wartości i kierunku lecz przeciwnym zwrocie.

$$F_{A\to B} = -F_{B\to A}$$

Druga zasada dynamiki dla układu o zmiennej masie

Ogólna postać drugiej zasady dynamiki podana powyżej odnosi się tylko do układów w których masa pozostaje stała wraz z upływem czasu. Aby wyprowadzić wzór na drugą zasadę dynamiki dla układów o zmiennej masie korzystamy z postaci pędowej drugiej zasady dynamiki.

$$\vec{F_{wyp}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Wektor pędu możemy wyrazić jako $\vec{p}(t) = m(t)\vec{v}(t)$. Podstawiając:

$$\vec{F_{wyp}} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

Jako, że zarówno masa jak i prędkość są funkcjami czasu to korzystamy z pochodnej iloczynu funkcji.

$$\vec{F_{wyp}} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt}$$

W ten sposób wyprowadziliśmy wzór na ogólniejszą postać drugiej zasady dynamiki. Warto zauważyć, że gdy $m = \text{const}$ to $\frac{dm}{dt} = 0$ co sprowadza to równanie do klasycznej wersji drugiej zasady dynamiki.

Zderzenia

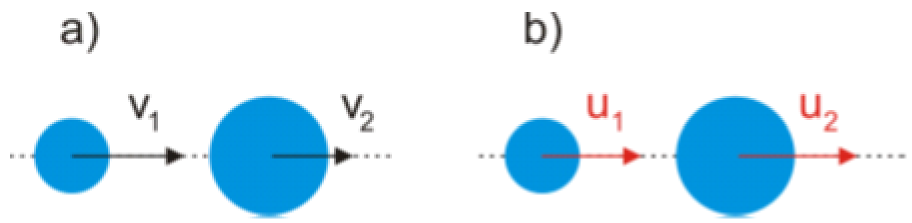
Jednym z ważniejszych zastosowań **zasady zachowania pędu** jest wyliczanie zachowania ciał podczas zderzenia. Nie możemy zmierzyć ani ustalić sił w czasie samego zderzenia ale korzystając z **zasady zachowania pędu** i **zasady zachownia energii całkowitej** jesteśmy w stanie policzyć zachowanie się ciała po zderzeniu. Wyróżniamy rodzaje zderzeń:

– **sprężyste (elastyczne)** - całkowicie zachowana zostaje energiia kinetyczna wukładu

– **niesprężyste (nielastyczne)** - działa tylko zasada zachowania pędu, część energii zostaje rozproszona

– **całkowice niesprężyste (nielastyczne)** - działa tylko zasada zachowania pędu ale po po zderzeniu oba ciała poruszają się ***"zlepione"*** w jedno, np. *pocisk trafił kulkę i w niej utknął i nadał prędkość.*

Przykład obliczeń dla zderzenia **idealnie sprężystego** w przestrzeni 1D.



Zapisujemy pęd i nergię każdego ciała przed zderzeniem i po zderzeniu:

$$p_1 = m_1 v_1 \qquad p_2 = m_2 v_2 \qquad p_1' = m_1 u_1 \qquad p_2' = m_2 u_2$$

$$E_{k1} = \frac{m_1 v_1^2}{2} \qquad E_{k2} = \frac{m_2 v_2^2}{2} \qquad E_{k1}' = \frac{m_1 u_1^2}{2} \qquad E_{k2}' = \frac{m_2 u_2^2}{2}$$

Z zasady zachowania pędu:

$$p_c = p_c'$$

$$p_1 + p_2 = p_1' + p_2$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

Z zasady zachowana energii:

$$E_c = E_c'$$

$$E_{k1} + E_{k2} = E_{k1}' + E_{k2}'$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}$$

Zestawiając w układ równań:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = p_1' + p_2' \\ E_{k1} + E_{k2} = E_{k1}' + E_{k2}' \end{cases} \implies \begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \\ \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} \end{cases}$$

Rozwiązując układ równań ze względu na u_1 i u_2 otrzymujemy:

$$u_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_1 + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) v_2$$

$$u_2 = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_1 + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) v_2$$

Szczególne przypadki tych równań:

– zderzenie identycznych ciał - $m_1 = m_2 = m \implies u_1 = v_1 \wedge u_2 = v_1$

– zderzenie lekkiego ciała z ciężkim nieruchomym - $m_1 \gg m_2 \wedge v_2 = 0$

$\implies u_1 = -v_1 \wedge u_2 = 0$

– zderzenie ciezkiego ciała z lekkim nieruchomym - $m_1 \ll m_2 \wedge v_2 = 0$

$\implies u_1 = v_1 \wedge u_2 = 2v_1$

3.3 Zasady dynamiki dla ruchu obrotowego

Zasady dynamiki w powyższej formie są dobre dla ruchu postępowego, lecz nie zawsze dla ruchu obrotowego. Możemy wprawić ciało w ruchu nawet w sytuacji gdy $F_{wyp} = 0$. Aby lepiej opisać ruch obrotowy względem jakiegoś punktu musimy zdefiniować nowe wielkości.

Definicja: Moment pędu

Odpowiednik pędu w ruchu obrotowym. Oznaczmy $\vec{L}$. Wyrażamy go w $\frac{kgm^2}{s}$. Definiujemy go jako:

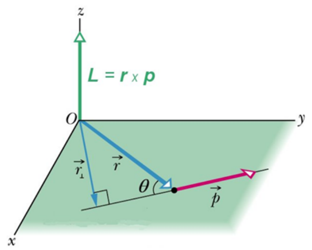
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

gdzie:

- $\vec{L}$ - *wektor momentu pędu prostopadły do płaszczyzny obrotu*
- $\vec{r}$ - *wektor położenia względem osi obrotu*
- $\vec{p}$ - *wektor pędu styczny do ruchu obrotowego*

Zwrot $\vec{L}$ możemy wyznaczyć korzystając z zasady prawej ręki. Skalarnie zapisany wzór ma następującą postać:

$$L = rp\sin(\vec{r},\ \vec{p})$$



Definicja: Moment siły

Odpowiednik sły w ruchu obrotowym. Oznaczamy poprzez literkę $\vec{M}$ lub $\vec{\tau}$. Wyrażamy go w Nm. Analogicznie do pędowej postaci drugiej zasady dynamiki moment siły możemy wyrazić jako iloraz zmiany momentu pędu i czasu w którym zaszła.

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

gdzie:

- $\vec{\tau_{wyp}}$ *- moment siły prostopadły do płaszczyzny obrotu*
- $\vec{L}$ *- wektor momentu pędu prostopadły do płaszczyzny obrotu*

Zwrot $\vec{\tau}$ możemy wyznaczyć korzystając z zasady prawej ręki na podstawie kierunku działania siły stycznej. Z powyższego wzoru wynika zależność wektorowa:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F_{wyp}}$$

a skalarnie:

$$\tau = rF_{wyp} \sin(\vec{r},\ \vec{F_{wyp}})$$

Aby wyprowadzić wektorową zależność z powyższej definicji wystarczy podstawić zależność na moment pędu.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$
$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p})$$

Teraz możemy skorzystać z pochodnej iloczynu funkcji (dla ludzi małej wiary `https://en.wikipedia.org/wiki/Cross_product#Differentiation`):

$$\vec{\tau} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Teraz łatwo zauważyć, że pozostałe pochodne możemy podmienić bo:

$$\begin{cases} \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \\ \vec{F_{wyp}} = \frac{d\vec{p}}{dt} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\tau} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F_{wyp}}$$

Teraz wystarczy zauważyć, że:

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad \Longrightarrow \quad \vec{v} \parallel \vec{p} \quad \Longrightarrow \quad \vec{v} \times \vec{p} = \bar{0}$$

A więc równanie na moment siły się upraszcza do postaci z definicji:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F_{wyp}}$$

Podobnie jak z drugiej zasady dynamiki możemy wyciągnąć wnioski o równowadze momentów pędu.

$$\vec{\tau_{wyp}} = \bar{0} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \Longrightarrow \quad \vec{L} = \text{const}$$

Wniosek ten nazywamy **zasadą zachowania momentu pędu**.

Wniosek: Zasady dynamiki

Aby ciało było w równowadzę suma sił zewnętrznych i momentów sił zewnętrznych musi być równa zero.

$$\vec{a} = \bar{0} \quad \wedge \quad \alpha = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum \vec{F} = \vec{F_{wyp}} = \bar{0} \quad \wedge \quad \sum \vec{\tau} = \vec{\tau_{wyp}} = \bar{0}$$

3.4 Tarcie

Definicja: Tarcie statyczne

Tarcie statycze to siła działająca na styku dwóch ciał. Wynika z ***3 zasady dynamiki Newtona****. Działa gdy działamy siłą na ciało i próbujemy je poruszyć ale jeszcze się nie poruszymy.*
Szczególny przypadek to pojazd toczący się na kołach bez poślizgu - na styku koła i powierzchni ruchu $v_w = 0$***, więc działa tarcie statyczne.***
Maksymalną siłę tarcia statyczne T_s *możemy zdefiniować następująco:*

$$T_s = F_N \mu_s$$

gdzie:

- F_N *- siła nacisku*
- μ_s *- współczynnik tarcia statycznego*

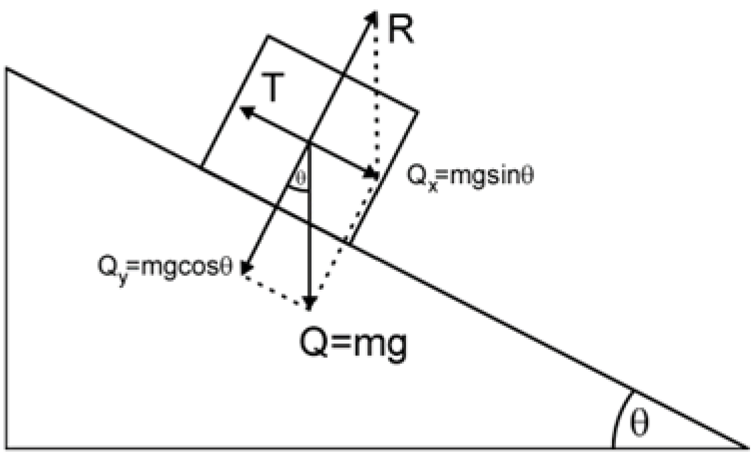
Wyznaczanie współczynnika tarcia statycznego

Zdefiniowany powyżej wzór na tarcie statyczne definiuje minimalną siłę potrzebną na wpawienie ciała w ruch. Nie jesteśmy w stanie w ładny sposób określić siły tarcia statycznego w każdym momencie. Jednym ze sposobów wyznaczenia współczynnika tarcia statycznego jest umieszczenia ciała o masie m na równi pochyłej ze zmiennym kątem nachylenia θ. Oznaczam:

- Q - siła ciężkości działająca na ciało
- Q_x - składowa siły ciężkości równoległa do powierzchni równi
- Q_y - składowa siły ciężkości prostopadła do powierzchni równi

– T - wartość siły tarcia

– R - siła reakcji do siły nacisku na równię



Teraz musimy zauważyć, że dopóki:

$$T \neq T_{max} = F_N \mu_s$$

ciało pozostanie w spoczynku, więc zachodzi równowść:

$$T = Q_x$$

$$T(\theta) = mg \sin \theta$$

Jeśli oznaczymy minimalny kąt nachylenia przy którym cialo zaczyna się zsuwać jako θ_{max} (max bo jest to też największy możliwy kąt przy którym ciało nie będzie się zsuwać bo wszystkie siły się równoważą), to otrzymujemy zależność:

$$T = Q_x = T_{max} = F_N \mu_s = Q_y \mu_s$$

$$Q_y \mu_s = mg \sin \theta_{max}$$

$$mg \cos \theta_{max} \mu_s = mg \sin \theta_{max}$$

$$\mu_s = \frac{\sin \theta_{max}}{\cos \theta_{max}} = \tan \theta_{max}$$

Definicja: Tarcie kinetyczne