Notatki z wykładów z Fizyki 1

Łukasz Kwinta

Spis treści

1 Wiadomości wstępne i wektory

W całych notatkach mogą pojawić się poniżej zdefiniowane wektory - a dokładniej wersory rozpinające przestrzenie $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$:

$\mathbb{R}^2$:

$$\hat{i} = (1,\ 0)$$

$$\hat{j} = (0,\ 1)$$

$\mathbb{R}^3$:

$$\hat{i} = (1,\ 0,\ 0)$$

$$\hat{j} = (0,\ 1,\ 0)$$

$$\hat{k} = (0,\ 0,\ 1)$$

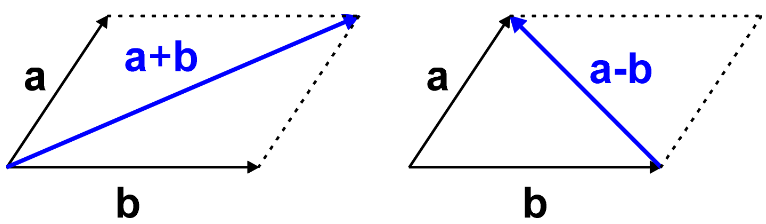
1.1 Suma wektorów

Niech:

$$\vec{a} := (a_1, a_2, a_3) \qquad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

Wtedy suma wektorów ma następującą postać:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ a_3 + b_3)$$



1.2 Iloczyn skalarny

Niech:

$$\vec{a} := (a_1, a_2, a_3) \qquad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

Wtedy iloczyn skalarny oznaczamy $\circ$ ma następującą postać:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Występuje również poniższa zależność:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \cdot \cos\left(\ \vec{a},\ \vec{b}\ \right)$$

1.3 Iloczyn wektorowy

Niech:

$$\vec{a} := (a_1, a_2, a_3) \qquad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

oraz:

$$\hat{i} := (1, 0, 0) \qquad \hat{j} = (0, 1, 0) \qquad \hat{k} = (0, 0, 1)$$

Wtedy, iloczyn wektorowy ma następującą postać:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \hat{i}(a_2b_3 - a_3b_2) + \hat{j}(a_3b_1 - a_1b3) + \hat{k}(a_1b_2 - a_2b_1) =$$

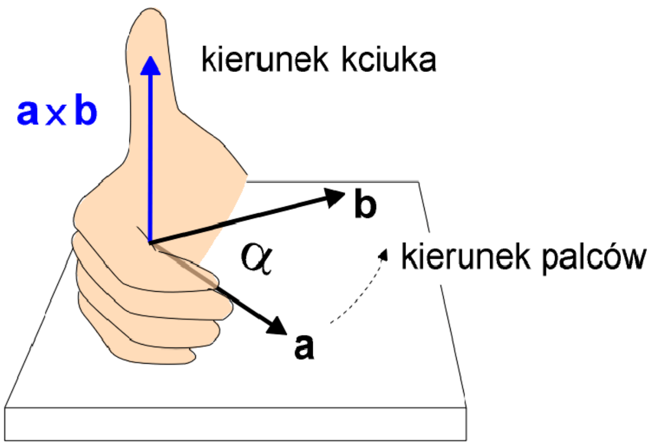
$$= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

Tak jak przy iloczynie skalarnym występuje zależność związana z kątem między wektorami:

$$||\vec{a} \times \vec{b}|| = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \cdot \sin\left(\ \vec{a},\ \vec{b}\ \right)$$

Kierunek iloczynu wektorowego $\vec{a} \times \vec{b}$ jest prostopadły do płaszczyzny stworzonej przez wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Natomiast zwrot tego wektora można określić stosując zasadę prawej dłoni:



1.4 Wersory

Wersor to inaczej wektor jednostkowy, czyli wektor o długości dokładnie 1. Jest to iloraz wektora oraz jego długości

Niech:

$$\vec{a} := (a_1, a_2, a_3)$$

Wtedy wersor $\hat{a}$ wektora $\vec{a}$ definiujemy w następujący sposób:

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{||\vec{a}||} = \frac{(a_1, a_2, a_3)}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

2 Podstawy kinematyki

2.1 Podstawowe pojęcia

Definicja: Ruch

Zmiana wzajemnego położenia ciał względem innych ciał wraz z upływem czasu.

Definicja: Układ odniesienia

Wybrane ciało lub ciało względem których wyznaczamy własności fizyczne takie jak położenie czy prędkość.

Definicja: Przemieszczenie

Zmiana położenia ciała względem jakiegoś układu odniesienia, zwykle punktu $(0,\ 0)$ *w układzie współrzednych. Wektor przemieszczenia oznaczamy* r. *Występuje poniższa zależność:*

$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z = (x,\ y,\ z)$$

gdzie:

– x *- współrzedna* x *wektora przemieszczenia*

– y *- współrzędna* y *wektora przemieszczenia*

– z *- współrzędna* z *wektora przemieszczenia*

Definicja: Punkt materialny

Punktem materialnym nazywamy obiekt obdarzony masą, których rozmiar (aka objętość) można zaniedbać.

2.2 Prędkość

Definicja: Prędkość

Prędkość to zmiana położenia w czasie:

$$\vec{v} = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

gdzie:

- $\Delta \vec{r}$ - *wektor przemieszczenia rozpięty pomiędzy poprzednim(x_0) a nowym(x) położeniem*
- Δt - *czas w jakim nastąpiła ta zmiana*

Bardziej ogólnie: ***pochodna drogi(położenia) po czasie***

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

gdzie $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ to funkcje opisujące zmianę położenia względem każdej z osi.

Definicja: Szybkość

Wielkość skalarna. Wartość wektora prędkości w danej chwili t. Czasami równa prędkości średniej.

Jeśli ciało znajdowało się w chwili t_0 w punkcie x_0, a w chwili t w punkcie x to:

$$x - x_0 = v(t - t_0)$$

Stąd ($\Delta x := x - x_0$ oraz $\Delta t := t - t_0$):

$$v = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Z definicji prędkość jest wielkością wektorową więc warto zwracać uwagę w zadaniach na oznaczenia. W zadaniach gdzie wektor prędkości nie ma stałego kierunku rozważa się składowe wektora prędkości dla uproszczenia zadania - na przykład przy rzucie ukośnym rozważa się składową pionową i poziomą prędkości.

Gdy wartość prędkości zmienia się w czasie nie możemy stosować powyższego wzoru - nabiera on wtedy sens *"Prędkości średniej"*. Korzystając z analizy matematycznej aby dokładnie opisać prędkość chwilową ciała należy dążyć ze zmianą czasu do 0. ($\Delta x \to 0$), a więc

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

A więc prędkość jest pierwszą pochodną położenia (drogi) po czasie.
Warto tutaj zwrówicić uwagę, że prawdziwa też jest operacja odwrotna ***(nie jest to do końca operacja poprawna stricte matematycznie lecz mająca sens fizyczny - w matematyce symbol pochodnej $\mathbf{\frac{df(x)}{dx}}$ traktujemy jako jedność, w fizyce nic nie stoi na przeszkodzie aby traktować to jako ułamek)***:

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \Longrightarrow \quad dx = v\,dt \quad \Longrightarrow \quad \int dx = \int v\,dt$$

$$x = \int v\,dt + \mathbf{C}$$

Należy pamiętać o stałej całkowania **C**, interpretowanej zwykle jako x_0 - położenie początkowe. W większości wypadków stałą będziemy wyliczali z warunków początkowych zadania, np. $x(0) = 0$.

Definicja: Prędkość średnia

Oszacowana wartość prędkości na danym odcinku. Oznaczana $\bar{v}$. Prędkość średnią wyznaczamy poprzez wzór:

$$\bar{v} = \frac{S_c}{t_c}$$

gdzie:

- S_c *- całkowity dystans przebyty w czasie* t_c
- t_C *- całkowity czas*

Potocznie: ***Cała droga przez cały czas***

Na przykład gdy interesuje nas prędkość średnia w przedziale $< t_0, t_k >$ możemy zastosować całkę oznaczoną by policzyć całkowitą drogę:

$$S_c = \int_{t_0}^{t_k} v \, dt$$

Średnia prędkość dana będzie wtedy wzorem:

$$\bar{v} = \frac{S_c}{t_k - t_0}$$

2.3 Przyspieszenie

Definicja: Przyspieszenie

Przyspieszenie to wielkość opisująca jak zmienia się prędkość ciała w czasie:

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v_0}}{t - t_0} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

gdzie:

– $\Delta \vec{v}$ - *wektor będący różnicą pomiędzy nowym a starym wektorem prędkości*

– Δt - *czas w jakim nastąpiła ta zmiana*

Bardziej ogólnie: ***pochodna prędkości po czasie***

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k} = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt}\right)$$

gdzie $v_x(t)$, $v_y(t)$, $v_z(t)$ *to funkcje opisujące prędkość względem każdej osi.*

Ze względu na wektor przyspieszenia wyróżniamy rodzaje ruchu:

– $a = 0$ - **jednostajny**

– $\vec{a} = \text{const}$[1] - **jednostajnie** opóźniony ($a < 0$) lub przyspieszony ($a > 0$)

– $a \neq \text{const}$ - **niejednostajnie** opóźniony ($a < 0$) lub przyspieszony ($a > 0$)[2]

Warto pamiętać, że:

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \Longrightarrow \quad dv = a\ dt \quad \Longrightarrow \quad \int dv = \int a\ dt$$

$$v = \int a\ dt + \mathbf{C}$$

gdzie **C** zwykle oznacza prędkość początkową ruchu.

[1]Warto zwrócić uwagę, że implikuje to stały kierunek i zwrot wektora przyspieszenia

[2]O wartości przyspieszenia mówimy w przedziale czasu

2.4 Ruch jednostajnie przyspieszony

Definicja: Ruch jednostajnie przyspieszony

Ruch w którym wektor przyspieszenia jest stały:

$$\vec{a} = const$$

Z ruchem **jednostajnie** przyspieszonym wiążą się pewne uogólnienia o których warto pamiętać. Wszystkie wynikają z ogólnych wzorów więc można je wyprowadzić.

Zależność prędkości od czasu możemy wyprowadzić korzystając z podstawowej zależności na przyspieszenie:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0} \overset{t_0=0}{=} \frac{v - v_0}{t} \qquad \Longrightarrow \qquad at = v - v_0$$

$$v(t) = v_0 + at$$

Podobnie korzystając z zależności na prędkość średnią możemy wyprowadzić zależność na położenie:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0} \overset{t_0=0}{=} \frac{x - x_0}{t} \qquad \Longrightarrow \qquad \bar{v}t = x - x_0$$

$$x(t) = x_0 + \bar{v}t$$

Liniowa zależność prędkości od czasu sprowadza średnią prędkość do średniej arytmetycznej:

$$\bar{v} = \frac{v + v_0}{2}$$

Łącząc trzy powyższe równania możemy wyprowadzić zależność na położenie od czasu dla ruchu **jednostajnie zmiennego**:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

2.5 Ruch złożony

Jest to rodzaj ruchu gdzie przemieszczenie odbywa się równocześnie względem osi OX i OY. Układy takie opisuje się stosując zestawy równań skalarnych względem obu osi osobno.

Rozważmy np. ruch jednostajnie przyspieszony względem obu osi.

$$\vec{a} = \text{const}$$

$$\vec{v} = \vec{v_o} + \vec{a}t$$

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{v_0}t + \frac{\vec{a}t}{2}$$

Znając wektor przyspieszenia jesteśmy wstanie stworzyć dwa zestawy **skalarnych** równań ruchu opisujące ruch wzdłuż prostopadłych do siebie osi.

Równania wzdłóż osi OX	Równania wzdłóż osi OY
$a_x = \text{const}$ $v_x = v_{x0} + a_x t$ $x = x_0 + v_{x0}t + \frac{a_x t^2}{2}$	$a_y = \text{const}$ $v_y = v_{y0} + a_y t$ $y = y_0 + v_{y0}t + \frac{a_y t^2}{2}$

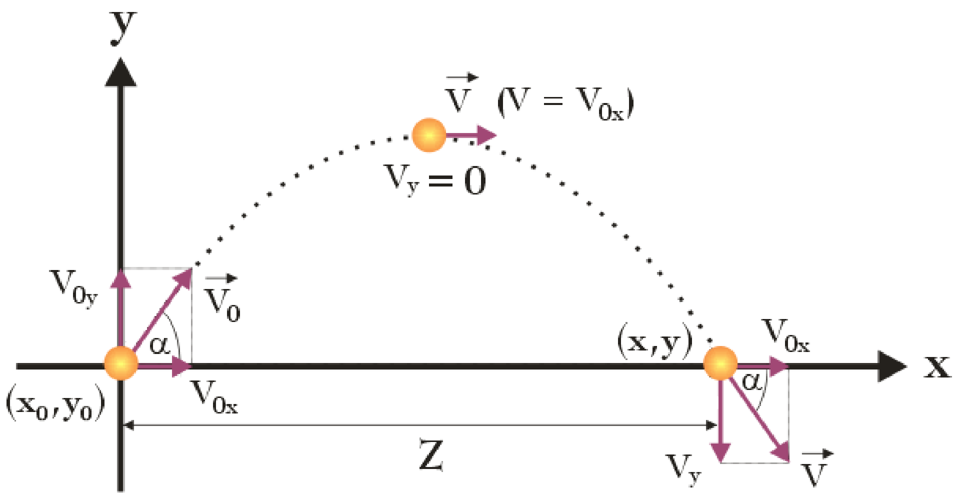
Rzut ukośny

Najbardziej oczywistym przykładem ruchu złożonego jest rzut ukośny. Rozważmy ciało wyrzucane z poziomu podłoża pod kątem α do podłoża z prędkością styczną równą v_0. Przyjmuję następujące oznaczenia:

– z odległość jaką przeleci ciało zanim uderzy w ziemię

– v_x pozioma składowa prędkości początkowej

– v_y pionowa składowa prędkości początkowej



Stosując podstawowe zależności trygonometryczne możemy rozłożyć wektor prędkości początkowej

$$v_{x0} = v_0 \cos(\alpha)$$

$$v_{y0} = v_0 \sin(\alpha)$$

Ponieważ ciało zostało rzucone swobodnie i zaniedbujemy opory ruchu w kierunku poziomym ciało porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym, a w kierunku pionowym jednostajnie opóźnionym (później przyspieszonym) wynikającym z siły grawitacji, **wektor przyspieszenia grawitacyjnego skierowany jest przeciwnie do wektora składowego prędkości początkowej w kierunku pionowym,**

więc g **idzie ze znakiem** $-$:

$$v_x = v_{x0} = v_0 \cos(\alpha)$$

$$v_y = v_{y0} - gt = v_0 \sin(\alpha) - gt$$

Teraz stosując twierdzenie pitagorasa możemy wyprowadzić zależność na prędkość **styczną do toru ruchu** od czasu:

$$v(t) = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)} = \sqrt{v_0 - 2v_0gtsin(\alpha) + g^2t^2}$$

Równania ruchu względem obu osi mają następującą postać:

$$x(t) = x_0(=0) + v_{x0}t = v_0 \cos(\alpha)t$$

$$y(t) = y_0(=0) + v_{y0}t - \frac{gt^2}{2} = v_0 \sin(\alpha)t - \frac{gt^2}{2}$$

Mając równania ruchu bardzo łatwo wyprowadzić zależnośc $y(x)$ pokazującą tor ruchu ciała:

$$x = v_0 \cos(\alpha)t \qquad \Longrightarrow \qquad t = \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)}$$

Podstawiając do równania $y(t)$ otrzymujemy:

$$y(x) = v_0 \sin(\alpha)\frac{x}{v_0 \cos(\alpha)} - \frac{g(\frac{x}{v_0 \cos(\alpha)})^2}{2}$$

upraszczając:

$$y(x) = x \tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)}x^2$$

Aby policzyć zasięg rzutu ukośnego potrzebujemy policzyć całkowity czas wznoszenia t_1 i opadania t_2. Można zauważyć, że pomijając opory ruchu czasy te będą sobie równe, a więc:

$$v_y(t_1) = 0$$

$$v_0 \sin(\alpha) - gt_1 = 0$$
$$t_1 = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g}$$
$$t_c = t_1 + t_2 = 2t_1$$
$$t_c = \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g}$$

Skoro mamy czas po jakim czasie ciało uderzy o ziemię, zasięg rzutu będzie równy odległości jaką ciało przebędzie w kierunku poziomym:

$$z = x(t_c) = v_0 \cos(\alpha) t_c = v_0 \cos(\alpha) \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g} \implies z = \frac{2v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$$

2.6 Ruch po okręgu

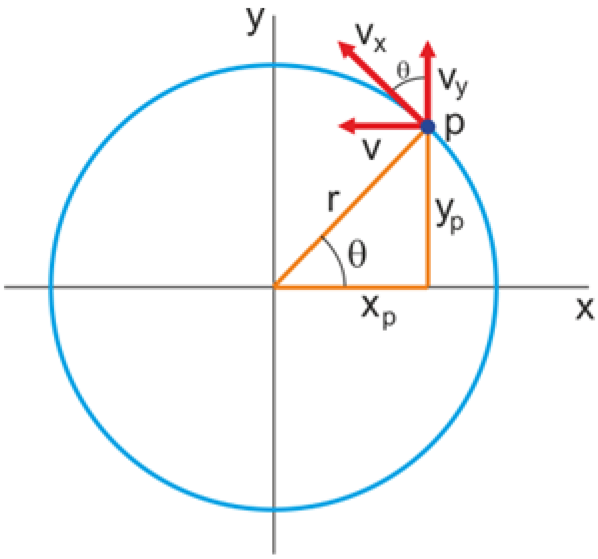
Definicja: Ruch po okręgu

Ruch w którym tor ruchu jest okrąg. Wektor prędkości v_s jest stycznyczny do okręgu. Występuje przyspieszenie radialne/normalne prostopadłe do wektora prędkości - oznaczamy a_r - gdy mówimy dokładnie o okręgu przyspieszenie to można nazwać przyspieszeniem dośrodkowym, lecz nazwać radialne/normalne jest bardziej ogólna.

Aby wyprowadzić zależności opisujące ruch po okręgu rozważmy chwilię gdy ciało znajduje się w punkcie P. Przyjmuję następujące oznaczenia:

- x_P i y_P współrzędne x i y punktu P
- $\vec{v}$ wektor prędkości stycznej do okręgu, v wartość wektora prędkości
- v_x i v_y pozioma i pionowa składowa wektora prędkości $\vec{v}$
- r promień okręgu po którym odbywa się ruch

– θ kąt pomiędzy osią OX a promieniem poprowadzonym między punktami $(0,\ 0)$ i P



Rysunek 1: Na rysunku pomylono $\vec{v_x}$ i $\vec{v}$

Zapisujemy równania zależności trygonometrycznych:

$$\sin\theta = \frac{y_P}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x_P}{r}$$

Rozkładamy prędkość styczną na składowe (składowa pozioma jest ujemna bo ciało porusza się "wstecz" osi OX):

$$\vec{v} = \hat{i}v_x + \hat{j}v_y = \hat{i}(-v\sin\theta) + \hat{j}(v\cos\theta)$$

$$\vec{v} = \hat{i}\left(-v\frac{y_P}{r}\right) + \hat{j}\left(v\frac{x_P}{r}\right)$$

Aby obliczyć przyspieszenie "dośrodkowe" wystarczy policzyć pochodną. v i r to stałe więc wystarczy policzyć pochodne $x_P(t)$ i $y_P(t)$.

$$\vec{a_r} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \hat{i}\left(-\frac{v}{r}\frac{dy_P}{dt}\right) + \hat{j}\left(\frac{v}{r}\frac{dx_P}{dt}\right) = \hat{i}\left(-\frac{v}{r}v_y\right) + \hat{j}\left(\frac{v}{r}v_x\right)$$

Wstawiając wzory na prędkość otrzymujemy:

$$\vec{a_r} = \hat{i}\left(-\frac{v^2}{r}\cos\theta\right) + \hat{j}\left(\frac{v^2}{r}\sin\theta\right)$$

Wartość przyspiesznenia otrzymujemy z tw. Pitagorasa:

$$a_r = \sqrt{\left(-\frac{v^2}{r}\cos\theta\right)^2 + \left(\frac{v^2}{r}\sin\theta\right)^2} = \sqrt{\frac{v^4}{r^2}(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \frac{v^2}{r}$$

Przyspieszenie radialne jest zwrócone prostopadle do toru ruchu czyli w tym wypadku do środka okręgu.

Prędkość styczną w ruchu po okręgu możemy wyrazić korzystając z okresu ruchu T. Jeśli pokonanie całego okręgu o długości $l = 2\pi r$ zajmuje ciału czas t_0 to czas ten nazywmay okresem i oznaczmay $T = t_0$ - oznacza to czas potrzeby na pokonanie **j**ednego okręgu. Wtedy prędkość v możemy wyrazić wzorem:

$$v = \frac{l}{T} = \frac{2\pi r}{T}$$

Korzystając z tego wzoru możemy wyrazić przyspieszenie dośrodkowe:

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

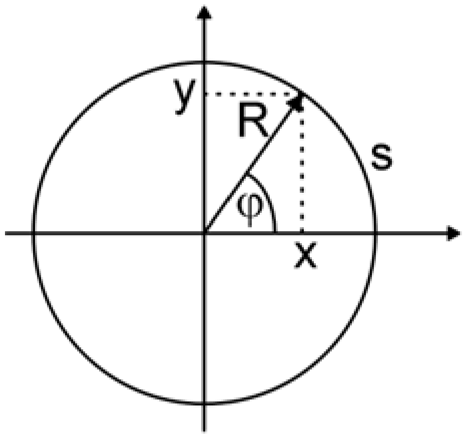
Przy ruchu po okręgu/ruchu obrotowym pojawiają się wielkości opisujące stricte obrót. Na potrzeby przyjmę następujące oznaczenia:

– s - długość łuku jakie zatoczyło ciało

– x i y - pozycja ciała względem osi układu współrzędnych

– $\vec{R}$ - wektor położenia względem środka układu współrzędnych, R jego wartość

– φ - kąt jaki zatoczyło ciało



Definicja: Droga kątowa

Jest to kąt jaki zatoczyło ciało. Jest to iloraz długości łuku przebytego przez ciało i promienia wodzącego. Wyrażamy w radianach.

$$\varphi = \frac{s(t)}{R}$$

Definicja: Szybkość kątowa

Jest to szybkość zmiany "kąta zatoczonego przez ciało". Analogicznie do zwykłej prędkości jest to iloraz drogi kątowej przebytej w czasie. Jednostka: $\frac{1}{s}$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{s(t)}{R} = \frac{v}{R}$$

Gdy prędkość styczna jest stała, szybkość kątowa wyraża się następująco:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Definicja: Przyspieszenie kątowa

Opisuje jak zmienia się szybkość kątowa w czasie. Analogicznie do przyspieszenia w ruchu postępowym(zwykłym) jest to pochodna z prędkości kątowej. Jednostka $\frac{1}{s^2}$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{v}{R} = \frac{a}{R}$$

Używając tych symboli możemy wyznaczyć wzory na podstawowe wielkości opisujące ruch po okręgu.

Dla stałej prędkości stycznej:

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \omega R$$

$$a_r = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = \omega^2 R$$

Uogólnienie:

Korzystając z poprzednego rysunku równania ruchu wyglądają następująco:

$$x(t) = R\cos\varphi(t) \qquad y(t) = R\sin\varphi(t) \qquad \text{gdzie: } \varphi(t) = \frac{s(t)}{R}$$

Możemy policzyć równania prędkości:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -R\frac{d\varphi}{dt}\sin\varphi = -R\omega\sin\varphi(t)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt}\cos\varphi = -R\omega\cos\varphi(t)$$

Teraz przyspieszenie:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -R\frac{d\omega}{dt}\sin\varphi - R\omega\frac{d\varphi}{dt}\cos\varphi = -R\alpha\sin\varphi - R\omega^2\cos\varphi$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = R\frac{d\omega}{dt}\cos\varphi - R\omega\frac{d\varphi}{dt}\sin\varphi = R\alpha\cos\varphi - R\omega^2\sin\varphi$$

Wstawiając równania prędkości i położenia:

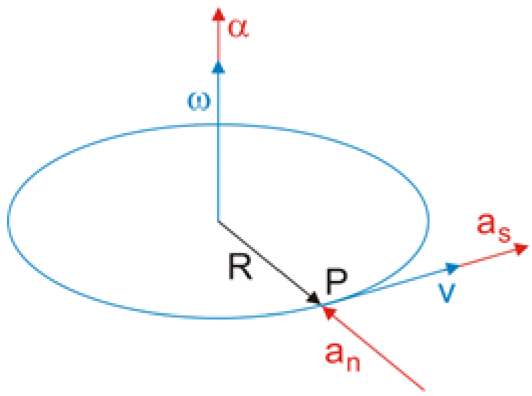
$$a_x = -R\alpha\sin\varphi - R\omega^2\cos\varphi = \frac{\alpha}{\omega}v_x - x\omega^2$$
$$a_y = R\alpha\cos\varphi - R\omega^2\sin\varphi = \frac{\alpha}{\omega}v_y - y\omega^2$$

Przechodząc do równania wektorowego:

$$\vec{a} = \hat{i}a_x + \hat{j}a_y = \hat{i}\left(\frac{\alpha}{\omega}v_x - x\omega^2\right) + \hat{j}\left(\frac{\alpha}{\omega}v_y - y\omega^2\right) =$$
$$= \frac{\alpha}{\omega}\left(\hat{i}v_x + \hat{j}v_y\right) - \omega^2\left(\hat{i}x + \hat{j}y\right)$$
$$\vec{a} = \frac{\alpha}{\omega}\vec{v} - \omega^2\vec{R}$$

W ten sposób wyprowadziliśmy wózór na wypadkowy wektor przyspieszenia w ruchu po okręgu.

$$\vec{a} = \vec{a_s} + \vec{a_n} = \frac{\alpha}{\omega}\vec{v} - \omega^2\vec{R}$$



Na powyższym rysunku zaznaczono też wektory szybkości kątowej ω i przyspieszenia kątowego α. Można opisać te wielkości przy pomocy wersorów, np:

$$\vec{\omega} = \frac{v}{r}\frac{\vec{v}\times\vec{r}}{||\vec{v}\times\vec{r}||} = \frac{v}{r}\frac{\vec{v}\times\vec{r}}{vr\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{\vec{v}\times\vec{r}}{r^2}$$

3 Dynamika

3.1 Wstęp

Dynamika to dział zajmujący się opisywaniem przyczyn ruchu. Istnieją 4 podstawowe oddziaływania z których wynikają wszystkie inne siły:

– **oddziaływanie grawitacyjne** - działa na dużą odległość i dotyczy mas ciał

– **oddziaływanie elektromagnetyczne** - działa na dużą odlgegłość i dotyczy ładunków elektrycznych i prądu

– **oddziaływanie jądrowe słabe** - działa na małą odległość i dotyczy atomów

– **oddziaływania jądrowe silne** - działa na małą odległości i dotyczy cząstek jądrowych

Definicja: Masa

Najprostszą definicją masy jest ***ilość materii zawartej w ciele****. Jest to jedna z pierwszych definicji masy.*
Newton definiował masę jako ***miarę bezwładności ciała****. Ma to podłoże w drugiej zasadzie dynamiki gdzie masę definiujemy jako iloraz siły i przyspieszenia.*

$$m = \frac{F}{a}$$

Masę jakiegość ciała możemy też odnieć do masy "wzorcowej" korzystając z zasady zachowania pędu. Gdy rozpędzimy ciało o masie wzorcowej do prędkości v_0 i zderzymy z ciałem o masie m (tak żeby ciało m_0 pozostawało w spoczynku po zderzeniu) to jeśli zmierzymy jego prędkość v to jego masa wyrażać się będzie wzorem:

$$\mathbf{m} = \mathbf{m_0}\frac{\mathbf{v_0}}{\mathbf{v}}$$

Wyprowadza się go z zasady zachowania pędu (o tym poniżej). Skoro ciało o masie m_0 porusza się z prędkością v_0 to jego pęd p_0 wynosi $p_0 = mv_0$. Natomiast po zderzeniu ciało o nieznanej masie m uzyska prędkość v, a więc jego pęd wyniesie $p = mv$. Skoro mówimy o zderzeniu idealnie niesprężystym możemy przyrówać te pędy:

$$p = p_0$$

$$mv = m_0v_0$$

$$m = m_0\frac{v_0}{v}$$

Definicja: Pęd

Pęd to iloczyn masy i prędkości.

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Definicja: Siła

Siłę definiujemy jako zmianę pędu w czasie.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

3.2 Zasady dynamiki Newtona

Definicja: Pierwsza zasada dynamiki - ***Zasada bezwładności***

Jeśli na ciało nie działa żadna siła lub siły działające równoważą się $\left(\vec{F_{wyp}} = \bar{0}\right)$.
To ciało pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem ***jednostajnym prostoliniowym****.*

Wynika z niej ***zasada zachowania pędu****:*

$$\sum \vec{F} = \vec{F_{wyp}} = \bar{0} \quad \Longrightarrow \begin{cases} \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{p} = const \\ \Longrightarrow \; m\vec{a} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{a} = 0 \end{cases}$$

Definicja: Druga zasada dyanmiki

Druga zasada dynamiki wiąże siłę wypadkową sił działających na ciało z przyspieszeniem z jakim się porusza.

$$\sum \vec{F} = \vec{F_{wyp}} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

gdzie:

- m *- masa ciała,* $m = const$
- $\vec{a}$ *- wektor przyspieszenia ciała*

Lub podstawiając $d\vec{p} = m\, d\vec{v}$ *możemy wyrazić ją w postaci pędowej:*

$$\vec{F_{wyp}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Definicja: Trzecia zasada dyanmiki - ***Zasada kontrakcji***

Gdy na ciało A oddziałuje na ciało B z siłą $F_{A \to B}$, to ciało B oddziałuje na ciało A siłą $F_{B \to A}$ o tej samej wartości i kierunku lecz przeciwnym zwrocie.

$$F_{A \to B} = -F_{B \to A}$$

Druga zasada dynamiki dla układu o zmiennej masie

Ogólna postać drugiej zasady dynamiki podana powyżej odnosi się tylko do układów w których masa pozostaje stała wraz z upływem czasu. Aby wyprowadzić wzór na drugą zasadę dynamiki dla układów o zmiennej masie korzystamy z postaci pędowej drugiej zasady dynamiki.

$$\vec{F_{wyp}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Wektor pędu możemy wyrazić jako $\vec{p}(t) = m(t)\vec{v}(t)$. Podstawiając:

$$\vec{F_{wyp}} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

Jako, że zarówno masa jak i prędkość są funkcjami czasu to korzystamy z pochodnej iloczynu funkcji.

$$\vec{F_{wyp}} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt}$$

W ten sposób wyprowadziliśmy wzór na ogólniejszą postać drugiej zasady dynamiki. Warto zauważyć, że gdy $m = \text{const}$ to $\frac{dm}{dt} = 0$ co sprowadza to równanie do klasycznej wersji drugiej zasady dynamiki.

Zderzenia

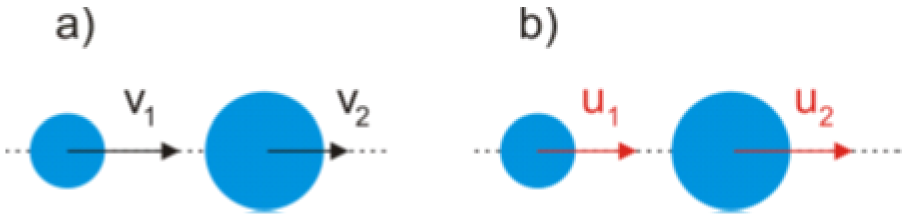
Jednym z ważniejszych zastosowań **zasady zachowania pędu** jest wyliczanie zachowania ciał podczas zderzenia. Nie możemy zmierzyć ani ustalić sił w czasie samego zderzenia ale korzystając z **zasady zachowania pędu** i **zasady zachownia energii całkowitej** jesteśmy w stanie policzyć zachowanie się ciała po zderzeniu. Wyróżniamy rodzaje zderzeń:

– **sprężyste (elastyczne)** - całkowicie zachowana zostaje energiia kinetyczna wukładu

– **niesprężyste (nielastyczne)** - działa tylko zasada zachowania pędu, część energii zostaje rozproszona

– **całkowice niesprężyste (nielastyczne)** - działa tylko zasada zachowania pędu ale po po zderzeniu oba ciała poruszają się ***"zlepione"*** w jedno, np. *pocisk trafił kulkę i w niej utknął i nadał prędkość.*

Przykład obliczeń dla zderzenia **idealnie sprężystego** w przestrzeni 1D.



Zapisujemy pęd i energię każdego ciała przed zderzeniem i po zderzeniu:

$$p_1 = m_1 v_1 \qquad p_2 = m_2 v_2 \qquad p_1' = m_1 u_1 \qquad p_2' = m_2 u_2$$

$$E_{k1} = \frac{m_1 v_1^2}{2} \qquad E_{k2} = \frac{m_2 v_2^2}{2} \qquad E_{k1}' = \frac{m_1 u_1^2}{2} \qquad E_{k2}' = \frac{m_2 u_2^2}{2}$$

Z zasady zachowania pędu:

$$p_c = p_c'$$

$$p_1 + p_2 = p_1' + p_2$$

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2$$

Z zasady zachowana energii:

$$E_c = E_c'$$

$$E_{k1} + E_{k2} = E_{k1}' + E_{k2}'$$

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2}$$

Zestawiając w układ równań:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = p_1' + p_2' \\ E_{k1} + E_{k2} = E_{k1}' + E_{k2}' \end{cases} \implies \begin{cases} m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2 \\ \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2} \end{cases}$$

Rozwiązując układ równań ze względu na u_1 i u_2 otrzymujemy:

$$u_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_1 + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)v_2$$

$$u_2 = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)v_1 + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)v_2$$

Szczególne przypadki tych równań:

– zderzenie identycznych ciał - $m_1 = m_2 = m \implies u_1 = v_1 \wedge u_2 = v_1$

– zderzenie lekkiego ciała z ciężkim nieruchomym - $m_1 \gg m_2 \wedge v_2 = 0$

$\implies u_1 = -v_1 \wedge u_2 = 0$

– zderzenie cięzkiego ciała z lekkim nieruchomym - $m_1 \ll m_2 \wedge v_2 = 0$

$\implies u_1 = v_1 \wedge u_2 = 2v_1$

3.3 Zasady dynamiki dla ruchu obrotowego

Zasady dynamiki w powyższej formie są dobre dla ruchu postępowego, lecz nie zawsze dla ruchu obrotowego. Możemy wprawić ciało w ruchu nawet w sytuacji gdy $F_{wyp} = 0$. Aby lepiej opisać ruch obrotowy względem jakiegoś punktu musimy zdefiniować nowe wielkości.

Definicja: Moment pędu

Odpowiednik pędu w ruchu obrotowym. Oznaczmy $\vec{L}$. *Wyrażamy go w* $\frac{kgm^2}{s}$. *Definiujemy go jako:*

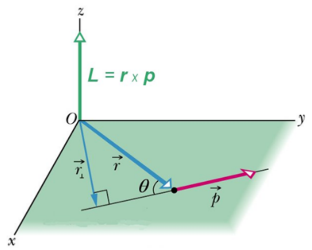
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

gdzie:

- $\vec{L}$ - *wektor momentu pędu prostopadły do płaszczyzny obrotu*
- $\vec{r}$ - *wektor położenia względem osi obrotu*
- $\vec{p}$ - *wektor pędu styczny do ruchu obrotowego*

Zwrot $\vec{L}$ *możemy wyznaczyć korzystając z zasady prawej ręki. Skalarnie zapisany wzór ma następującą postać:*

$$L = rp\sin(\vec{r},\ \vec{p})$$



Definicja: Moment siły

Odpowiednik sły w ruchu obrotowym. Oznaczamy poprzez literkę $\vec{M}$ lub $\vec{\tau}$. Wyrażamy go w Nm. Analogicznie do pędowej postaci drugiej zasady dynamiki moment siły możemy wyrazić jako iloraz zmiany momentu pędu i czasu w którym zaszła.

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

gdzie:

- $\vec{\tau_{wyp}}$ *- moment siły prostopadły do płaszczyzny obrotu*
- $\vec{L}$ *- wektor momentu pędu prostopadły do płaszczyzny obrotu*

Zwrot $\vec{\tau}$ możemy wyznaczyć korzystając z zasady prawej ręki na podstawie kierunku działania siły stycznej. Z powyższego wzoru wynika zależność wektorowa:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F_{wyp}}$$

a skalarnie:

$$\tau = rF_{wyp} \sin(\vec{r},\ \vec{F_{wyp}})$$

Aby wyprowadzić wektorową zależność z powyższej definicji wystarczy podstawić zależność na moment pędu.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$
$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \vec{p}\right)$$

Teraz możemy skorzystać z pochodnej iloczynu funkcji (dla ludzi małej wiary `https://en.wikipedia.org/wiki/Cross_product#Differentiation`):

$$\vec{\tau} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \vec{p}\right) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Teraz łatwo zauważyć, że pozostałe pochodne możemy podmienić bo:

$$\begin{cases} \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \\ \vec{F_{wyp}} = \frac{d\vec{p}}{dt} \end{cases} \implies \vec{\tau} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F_{wyp}}$$

Teraz wystarczy zauważyć, że:

$$\vec{p} = m\vec{v} \implies \vec{v} \parallel \vec{p} \implies \vec{v} \times \vec{p} = \bar{0}$$

A więc równanie na moment siły się upraszcza do postaci z definicji:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F_{wyp}}$$

Podobnie jak z drugiej zasady dynamiki możemy wyciągnąć wnioski o równowadze momentów pędu.

$$\vec{\tau_{wyp}} = \bar{0} \implies \frac{d\vec{L}}{dt} \implies \vec{L} = \text{const}$$

Wniosek ten nazywamy **zasadą zachowania momentu pędu**.

Wniosek: Zasady dynamiki

Aby ciało było w równowadzę suma sił zewnętrznych i momentów sił zewnętrznych musi być równa zero.

$$\vec{a} = \bar{0} \quad \wedge \quad \alpha = 0 \iff \sum \vec{F} = \vec{F_{wyp}} = \bar{0} \quad \wedge \quad \sum \vec{\tau} = \vec{\tau_{wyp}} = \bar{0}$$

3.4 Tarcie

Definicja: Tarcie statyczne

*Tarcie statycze to siła działająca na styku dwóch ciał. Wynika z **3 zasady dynamiki Newtona**. Działa gdy działamy siłą na ciało i próbujemy je poruszyć ale jeszcze się nie poruszymy.*

Szczególny przypadek to pojazd toczący się na kołach bez poślizgu - na styku koła i powierzchni ruchu $v_w = 0$***, więc działa tarcie statyczne.***

Maksymalną siłę tarcia statyczne T_s *możemy zdefiniować następująco:*

$$T_s = F_N \mu_s$$

gdzie:

– F_N *- siła nacisku*

– μ_s *- współczynnik tarcia statycznego*

T_s ***nie zależy w przybliżeniu od powierzcni styku ciał***

T_s ***jest proporcjonalna do siły nacisku na podłoże***

Wyznaczanie współczynnika tarcia statycznego

Zdefiniowany powyżej wzór na tarcie statyczne definiuje minimalną siłę potrzebną na wpawienie ciała w ruch. Nie jesteśmy w stanie w ładny sposób określić siły tarcia statycznego w każdym momencie. Jednym ze sposobów wyznaczenia współczynnika tarcia statycznego jest umieszczenia ciała o masie m na równi pochyłej ze zmiennym kątem nachylenia θ. Oznaczam:

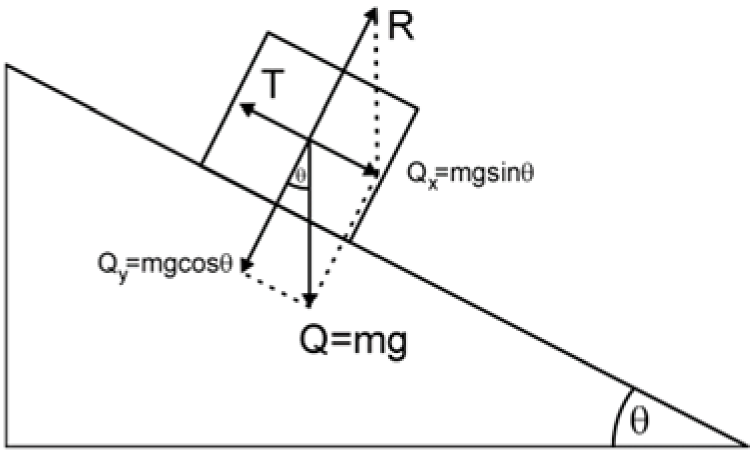
– Q - siła ciężkości działająca na ciało

– Q_x - składowa siły ciężkości równoległa do powierzchni równi

– Q_y - składowa siły ciężkości prostopadła do powierzchni równi

– T - wartość siły tarcia

– R - siła reakcji do siły nacisku na równię



Teraz musimy zauważyć, że dopóki:

$$T \neq T_{max} = F_N \mu_s$$

ciało pozostanie w spoczynku, więc zachodzi równowść:

$$T = Q_x$$

$$T(\theta) = mg \sin \theta$$

Jeśli oznaczymy minimalny kąt nachylenia przy którym cialo zaczyna się zsuwać jako θ_{max} (max bo jest to też największy możliwy kąt przy którym ciało nie będzie się zsuwać bo wszystkie siły się równoważą), to otrzymujemy zależność:

$$T = Q_x = T_{max} = F_N \mu_s = Q_y \mu_s$$

$$Q_y \mu_s = mg \sin \theta_{max}$$

$$mg \cos \theta_{max} \mu_s = mg \sin \theta_{max}$$

$$\mu_s = \frac{\sin \theta_{max}}{\cos \theta_{max}} = \tan \theta_{max}$$

Definicja: Tarcie kinetyczne

Jest to siła działająca na styku ciał gdy ciała poruszają się względem siebie. Siłę tarcia kinetycznego T_k można zdefiniować następująco:

$$T_k = F_N \mu_k$$

gdzie:

– F_N *- siła nacisku ciała na powierzchnię*

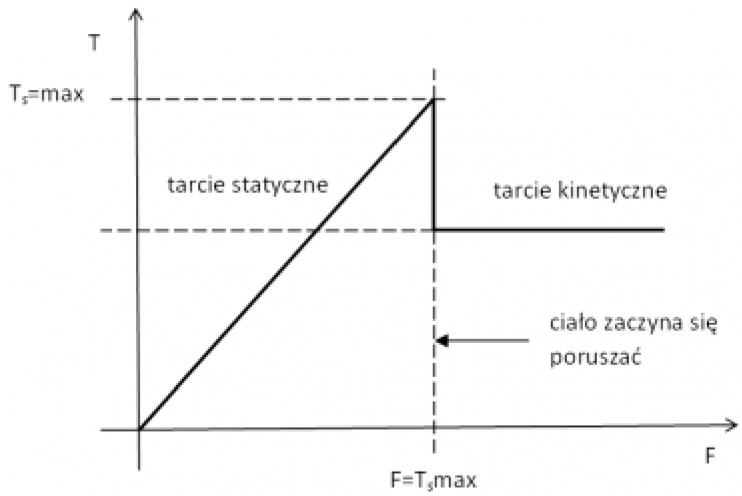
– μ_k *- współczynnik tarcia kinetycznego*

W przybliżeniu siła tarcia kinetycznego nie zależy od prędkości ruchu.

Jedną z ważniejszych własności tarcia jest to, że dla większości materiałów:

$$\mu_k \leq \mu_s$$

Objawia się to tym, że w istocie siła potrzebna do poruszenia ciała jest większa niż siła tarcia działająca na ciało gdy już zacznie się poruszać.



Na powyższym wykresie widać zależność, że gdy siła którą działamy na ciało zrówna się z maksymalną siłą tarcia statycznego ciało zaczyna się poruszać i występuje tarcie kinetyczne o mniejszej sile.

3.5 Układy inercjalne i nieinercjalne

Definicja: Układ inercjalny

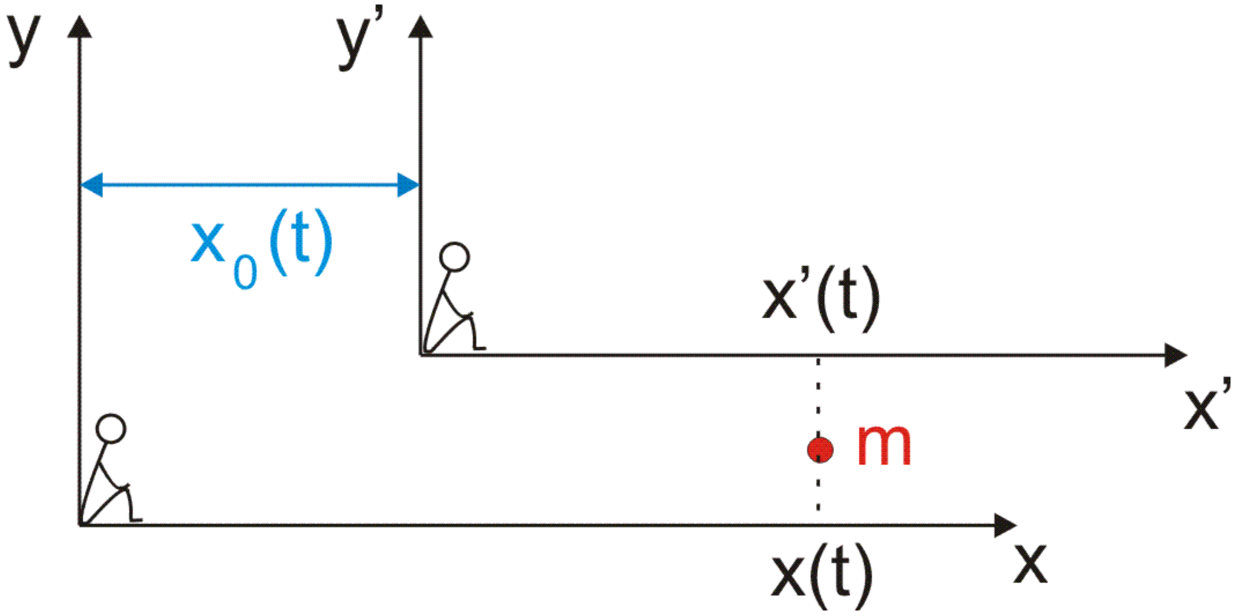
Jest to układ odniesienia definiowany przez pierwszą zasadę dynamiki. My jako obserwatorzy pozostajemy w spoczynku lub poruszamy się ruchem jednostajnym prostoliniowym. Większość zadań staramy się rozwiązać w tym właśnie układzie.
Nie występują pozorne siły bezwładności.

Definicja: Nieinercjalny układ odniesienia

*Jest to układ w którym obserwator porusza się ruchem przyspieszonym z **przyspieszeniem unoszenia** $\vec{a_0}$. Aby korzystać w nim z drugiej zasady dynamiki wprowadzamy **pozorną siłę bezwładności** $\vec{F_b}$ wyrażającą się wzorem:*

$$\vec{F_b} = -m\vec{a_0}$$

Aby wyprowadzić zasady działające w nieinercjalnym układzie odniesienia rozważmy ruch ciała o masie m wzdłóż osi OX układu współrzędnych względem dwóch obserwatorów.



Pierwszy obserwatory (w układzie $x(y)$) jest obserwatorem inercjalnym i pozostaje w spoczynku. Drugi obserwator (układ $x'(y')$) porusza się względem pierwszego wzdłuż osi OX. Niech:

– $x(t)$ - położenie ciała względem **pierwszego** obserwatora w chwili t

– $x'(t)$ - położenie ciała względem **drugiego** obserwatora w chwili t

– $x_0(t)$ - położenie **drugiego** obserwatora względem **pierwszego** w chwili t

Możemy zapisać równanie:

$$x(t) = x'(t) + x_0(t)$$

$$x'(t) = x(t) - x_0(t)$$

Liczymy drugą pochodną, aby uzyskać równanie wiążące przyspieszenie:

$$\frac{d^2}{dt^2}x'(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) - \frac{d^2}{dt^2}x_0(t)$$

$$a' = a - a_0$$

gdzie:

– a - przyspieszenie ciała względem **pierwszego** obserwatora

– a' - przyspieszenie ciała względem **drugiego** obserwatora

– a_0 - przyspieszenie **drugiego** obserwatora względem **pierwszego**

Możemy zauważyć, że gdy $a_0 = 0$ - operator drugi porusza się ruchem jednostajnym względem pierwszego, to $a' = a$ czyl przyspieszenia ciała względem obu układów są takie same, a więc dla $a_0 = 0$ **obserwator drugi jest obserwatorem inercjalnym!** Natomiast dla sytuacji gdy $a_0 \neq 0$ obserwator drugi jest **obserwatorem nieinercjalnym**. Teraz możemy wyprowadzić wzór na ***na pozorną siłę bezwładności***, a przyspieszenie a_0 nazywamy ***przyspieszeniem unoszenia***. Mnożąc obsutronnie przez m:

$$ma' = ma - ma_0$$

$$ma' = F - ma_0$$

Możemy zauważyć, że w **nieinercjalnym układzie odniesienia nie działają zasady dynamiki Newtona**, bo gdy:

– $F = 0$ - ciało nie pozostaje w spoczynku ani nie porusza się ruchem jednostajnym, tylko z przyspieszeniem o wartości $-a_0$

– $F \neq 0$ - siła nie jest równa iloczynowi masy i przyspieszenia

Jeśli chcemy skorzystać z drugiej zasady dynamiki w układzie nieinercjalnym to musimy wprowadzić sztuczną/pozorną siłę bezwładności.

Definicja: Siła bezwładności

Pozorna *siła występująca w układach* ***nieinercjalnych****. Wyraża się wzorem:*

$$\vec{F_b} = -m\vec{a_0}$$

gdzie:

– a_0 - *wektor przyspieszenie unoszenia (przyspieszenie z jakim porusza się obserwator)*

– m - *masa ciała*

Przykład w ruchu po okręgu

Rozważmy sytuację gdy siedzimy w aucie pokonującym zakręt. Poruszamy się z przyspieszeniem dośrodkowym:

$$a_d = a_n = \frac{v^2}{R}$$

Skoro rozważamy układ w którym obserwujemy ruch w środku samochodu poruszającego się z przyspieszeniem, to rozważamy układ nieinercjalny. Naszym przyspieszeniem unoszenia będzie przyspieszenie dośrodkowe:

$$a_0 = a_d = \frac{v^2}{R}$$

Z tego wniosek, że działa na nas pozorna siła bezwładności:

$$\vec{F_b} = -m\vec{a_0}$$

$$F_b = -ma_0 = -m\frac{v^2}{R} = F_{\text{odśr}}$$

Z tego wniosek, że siła bezwładności jest siłą "wyrzucającą" nas z zakrętu, przeciwną do przyspieszenia dośrodkowego. Nazwyamy ją ***siłą odśrodkową***.

3.6 Siła Coriolisa

Rozważmy ciało poruszające się od środka tarczy obracającej się tarczy do jej zewnętrza. Oznaczam:

– v_r - prędkość z którą ciało oddala się od środka tarczy ($\vec{v_r} \parallel \vec{r}$)

– v_s - prędkość styczna w punkcie A z jaką porusza się ciało (wynika z obrotu tarczy) ($\vec{v_s} \perp \vec{v_r}$)

– v_s' - prędkość styczna w punkcie A'

– Δv - zmiana prędkości między punktami

– r - odległość od środka okręgu

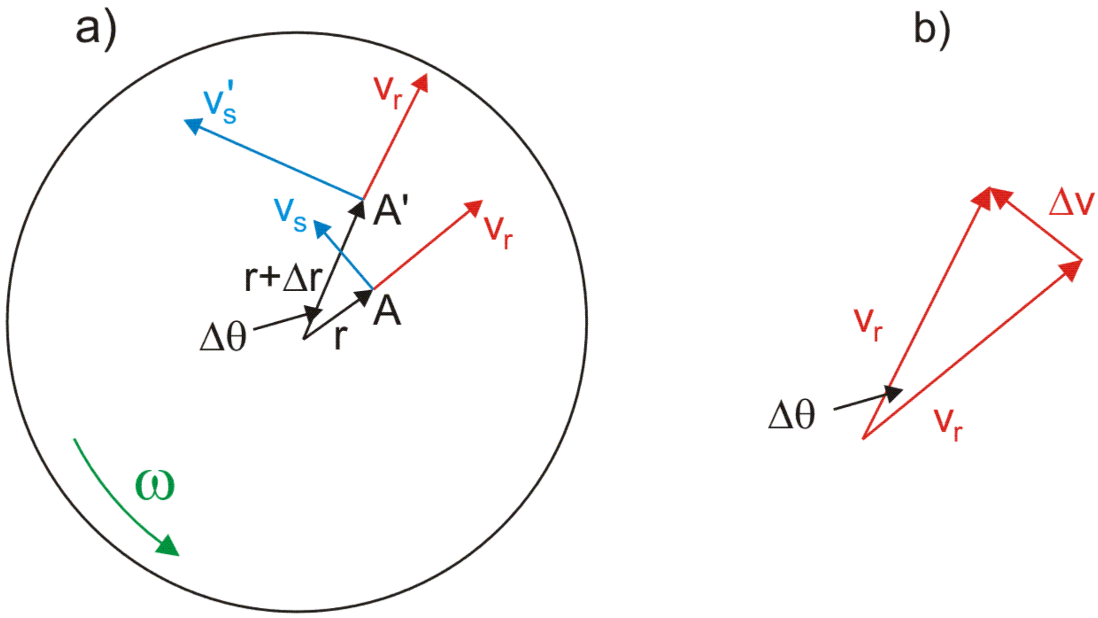
– Δr - zmiana odległości od środka okręgu między punktem A i A'

– $\Delta\theta$ - droga kątowa jaką przebyło ciało między punkami A i A'

– Δt - czas w którym ciało przemieściło się między punktami A i A'

– ω - szybkość kątowa z jaką obraca się tarcza

Na rysunku poniżej oznaczono punkt A i A' między którymi ciało przemieściło się w czasie Δt.



Aby wyprowadzić wzór na siłę Coriolisa zacznijmy od wyznaczenia składowej przyspieszenia wynikającej z oddalania się od okręgu a_r - wynika ona ze zmiany kierunku prędkości v_r, następnie musimy policzyć a_s - przyspieszenie wynikające ze zmiany prędkości stycznej spowodowanej zmianą odlegością od środka tarczy.

Zapiszmy zmianę prędkości v_r jako Δv_r (na rysunku (b) Δv). Nie zmienia ona swojej wartości lecz zmienia kierunek. Wystarczy skorzystać z twierdzenia cosinusów i tw. o małych kątach (finalnie będziemy liczyć pochodną więc kąt w istocie będzie mały). Zaczynamy od twierdzenia cosinusów:

$$(\Delta v_r)^2 = v_r^2 + v_r^2 - 2v_r v_r \cos(\Delta\theta) = 2v_r^2 - 2v_r^2 \cos(\Delta\theta) = 2v_r^2(1 - cos(\Delta\theta))$$

$$\Delta v_r = v_r\sqrt{2 - 2\cos(\Delta\theta)} = v_r\sqrt{4\sin^2\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)} = 2v_r \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)$$

Teraz możemy skorzystać z tw. o małych kątach:

$$\Delta v_r \approx 2v_r\frac{\Delta\theta}{2} = v_r\Delta\theta$$

Następnie dzielimy obustronnie przez Δt i przechodzimy do pochodnej:

$$\frac{\Delta v_r}{\Delta t} = v_r\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad \xrightarrow[\Delta t\to 0]{} \qquad \frac{dv_r}{dt} = v_r\frac{d\theta}{dt}$$

Teraz możemy zapisać końcową zależność na a_r:

$$a_r = v_r \omega$$

To przyspieszenie ma kierunek równoległy do prędkości stycznej - bo zmiana kierunku prędkości v_r ma kierunek równoległy do prędkości stycznej.

Aby policzyć a_s będziemy postępować analogicznie jak powyżej tzn. wyznaczymy zmianę prędkości stycznej Δv_s i policzymy pochodną. Aby wyznaczyć Δv_s oznaczmy v_s jako prędkość styczną w punkcie A, a v_s' jako prędkość styczną w punkcie A'.

$$\Delta v_s = v_s' - v_s$$

Korzystając ze wzorów łączących prędkość kątową i prędkość styczną otrzymujemy:

$$\begin{cases} v_s = \omega r \\ v_s' = \omega(r + \Delta r) \end{cases} \implies \Delta v_s = \omega(r + \Delta r) - \omega r$$

Co daje:

$$\Delta v_s = \omega \Delta r$$

Analogicznie jak poprzednio dzielimy przez Δt i obliczamy przechodzimy do pochodnej:

$$\frac{\Delta v_s}{\Delta t} = \omega \frac{\Delta r}{\Delta t} \quad \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \quad \frac{dv_s}{dt} = \omega \frac{dr}{dt}$$

Co daje końcową zależność w następującej postaci:

$$a_s = \omega v_r$$

Skoro oba przyspieszenia są w tym samym kierunku i mają tą samą wartość to możemy oba przyspieszenia dodać aby otrzymać całkowite przyspieszenie - ***przyspieszenie Coriolisa***.

$$a_c = a_s + a_r = 2\omega v_r$$

Teraz możemy przejść ogólnie na wektory:

$$\vec{a_c} = a_c \hat{v}_s$$

Korzystając z tego, że:

$$\vec{v_r} \times \vec{\omega} \quad \| \quad \hat{v}_s$$

gdzie:

$$\vec{\omega} = \frac{v_s}{r} \frac{\vec{v_s} \times \vec{r}}{||\vec{v_s} \times \vec{r}||} = \frac{v_s}{r} \frac{\vec{v_s} \times \vec{r}}{v_s r \sin\frac{\pi}{2}} = \frac{\vec{v_s} \times \vec{r}}{r^2}$$

Możemy zapisać iloczyn wektorowy $\vec{v_r} \times \vec{\omega}$ w postaci wersora:

$$\vec{a_c} = 2 v_r \omega \frac{\vec{v_r} \times \vec{\omega}}{v_r \omega \sin(\vec{v_r},\ \vec{\omega})}$$

Wiemy, że $\vec{v_r} \perp \vec{\omega} \quad \Longrightarrow \quad \sin(\vec{v_r},\ \vec{\omega}) = 1$, z tego wynika, że:

$$\vec{a_c} = 2\vec{v_r} \times \vec{\omega}$$

Korzystając ze wzoru na siłę bezwładności - poruszliśmy się w układzie inercjalnym - w końcu możemy zapisać wzór na siłę Coriolisa (znak minus uwzględnia iloczyn wektorowy):

$$F_c = 2m\vec{v_r} \times \vec{\omega}$$