Notatki z wykładów z Fizyki 1

Łukasz Kwinta

Spis treści

1 Wiadomości wstępne i wektory

W całych notatkach mogą pojawić się poniżej zdefiniowane wektory - a dokładniej wersory rozpinające przestrzenie $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$:

$\mathbb{R}^2$:

$$\vec{i} = (1,\ 0)$$

$$\vec{j} = (0,\ 1)$$

$\mathbb{R}^3$:

$$\vec{i} = (1,\ 0,\ 0)$$

$$\vec{j} = (0,\ 1,\ 0)$$

$$\vec{k} = (0,\ 0,\ 1)$$

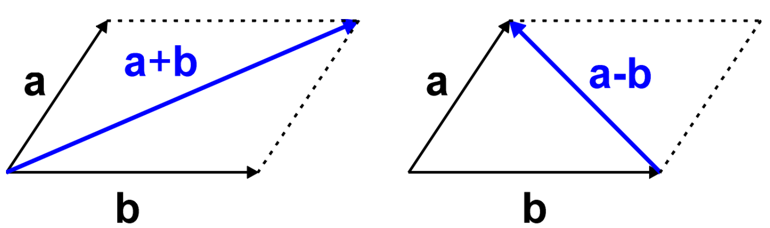
1.1 Suma wektorów

Niech:

$$\vec{a} := (a_1, a_2, a_3) \qquad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

Wtedy suma wektorów ma następującą postać:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ a_3 + b_3)$$



1.2 Iloczyn skalarny

Niech:

$$\vec{a} := (a_1, a_2, a_3) \qquad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

Wtedy iloczyn skalarny oznaczamy $\circ$ ma następującą postać:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Występuje również poniższa zależność:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \cdot \cos\left(\ \vec{a}, \ \vec{b} \ \right)$$

1.3 Iloczyn wektorowy

Niech:

$$\vec{a} := (a_1, a_2, a_3) \qquad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

oraz:

$$\vec{i} := (1, 0, 0) \qquad \vec{j} = (0, 1, 0) \qquad \vec{k} = (0, 0, 1)$$

Wtedy, iloczyn wektorowy ma następującą postać:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i}(a_2 b_3 - a_3 b_2) + \vec{j}(a_3 b_1 - a_1 b3) + \vec{k}(a_1 b_2 - a_2 b_1) =$$

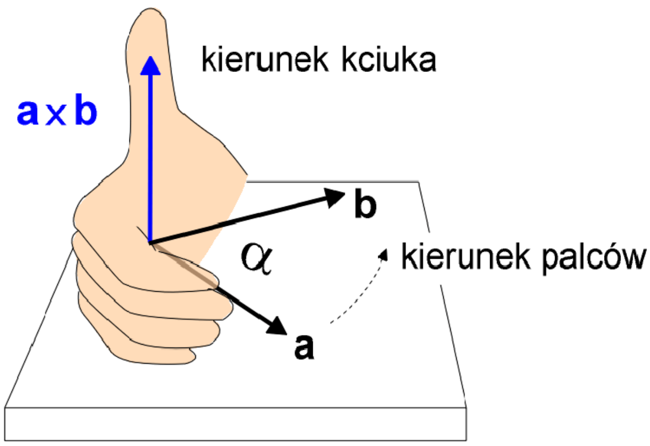
$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Tak jak przy iloczynie skalarnym występuje zależność związana z kątem między wektorami:

$$||\vec{a} \times \vec{b}|| = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \cdot \sin\left(\ \vec{a}, \ \vec{b} \ \right)$$

Kierunek iloczynu wektorowego $\vec{a} \times \vec{b}$ jest prostopadły do płaszczyzny stworzonej przez wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Natomiast zwrot tego wektora można określić stosując zasadę prawej dłoni:



2 Podstawy kinematyki

2.1 Podstawowe pojęcia

Definicja: Ruch

Zmiana wzajemnego położenia ciał względem innych ciał wraz z upływem czasu.

Definicja: Układ odniesienia

Wybrane ciało lub ciało względem których wyznaczamy własności fizyczne takie jak położenie czy prędkość.

Definicja: Punkt materialny

Punktem materialnym nazywamy obiekt obdarzony masą, których rozmiar (aka objętość) można zaniedbać.

Definicja: Przemieszczenie

Zmiana położenia ciała względem jakiegoś układu odniesienia, zwykle punktu $(0,\ 0)$ *w układzie współrzednych. Wektor przemieszczenia oznaczamy* r. *Występuje poniższa zależność:*

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z = (x,\ y,\ z)$$

gdzie:

- x *- współrzedna* x *wektora przemieszczenia*
- y *- współrzędna* y *wektora przemieszczenia*
- z *- współrzędna* z *wektora przemieszczenia*

2.2 Prędkość

Definicja: Prędkość

Prędkość to zmiana położenia w czasie:

$$\vec{v} = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

gdzie:

- $\Delta\vec{r}$ - *wektor przemieszczenia rozpięty pomiędzy poprzednim(x_0) a nowym(x) położeniem*
- Δt - *czas w jakim nastąpiła ta zmiana*

Bardziej ogólnie: ***pochodna drogi(położenia) po czasie***

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

gdzie $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ to funkcje opisujące zmianę położenia względem każdej z osi.

Jeśli ciało znajdowało się w chwili t_0 w punkcie x_0, a w chwili t w punkcie x to:

$$x - x_0 = v(t - t_0)$$

Stąd ($\Delta x := x - x_0$ oraz $\Delta t := t - t_0$):

$$v = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Z definicji prędkość jest wielkością wektorową więc warto zwracać uwagę w zadaniach na oznaczenia. W zadaniach gdzie wektor prędkości nie ma stałego kierunku rozważa się składowe wektora prędkości dla uproszczenia zadania - na przykład przy rzucie ukośnym rozważa się składową pionową i poziomą prędkości.

Gdy wartość prędkości zmienia się w czasie nie możemy stosować powyższego wzoru - nabiera on wtedy sens *"Prędkości średniej"*. Korzystając z analizy matematycznej aby dokładnie opisać prędkość chwilową ciała należy dążyć ze zmianą czasu do 0. ($\Delta x \to 0$), a więc

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

A więc prędkość jest pierwszą pochodną położenia (drogi) po czasie.

Warto tutaj zwrówicić uwagę, że prawdziwa też jest operacja odwrotna ***(nie jest to do końca operacja poprawna stricte matematycznie lecz mająca sens fizyczny - w matematyce symbol pochodnej*** $\mathbf{\frac{df(x)}{dx}}$ ***traktujemy jako jedność, w fizyce nic nie stoi na przeszkodzie aby traktować to jako ułamek)***:

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \Longrightarrow \quad dx = v\,dt \quad \Longrightarrow \quad \int dx = \int v\,dt$$

$$x = \int v\,dt + \mathbf{C}$$

Należy pamiętać o stałej całkowania **C**, interpretowanej zwykle jako x_0 - położenie początkowe. W większości wypadków stałą będziemy wyliczali z warunków początkowych zadania, np. $x(0) = 0$.

Definicja: Prędkość średnia

Oszacowana wartość prędkości na danym odcinku. Oznaczana $\bar{v}$. Prędkość średnią wyznaczamy poprzez wzór:

$$\bar{v} = \frac{S_c}{t_c}$$

gdzie:

– S_c *- całkowity dystans przebyty w czasie* t_c

– t_C *- całkowity czas*

Potocznie: ***Cała droga przez cały czas***

Na przykład gdy interesuje nas prędkość średnia w przedziale $< t_0, t_k >$ możemy zastosować całkę oznaczoną by policzyć całkowitą drogę:

$$S_c = \int_{t_0}^{t_k} v \, dt$$

Średnia prędkość dana będzie wtedy wzorem:

$$\bar{v} = \frac{S_c}{t_k - t_0}$$

2.3 Przyspieszenie

Definicja: Przyspieszenie

Przyspieszenie to wielkość opisująca jak zmienia się prędkość ciała w czasie:

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v_0}}{t - t_0} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

gdzie:

– $\Delta\vec{v}$ - *wektor będący różnicą pomiędzy nowym a starym wektorem prędkości*

– Δt - *czas w jakim nastąpiła ta zmiana*

Bardziej ogólnie: ***pochodna prędkości po czasie***

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt}\right)$$

gdzie $v_x(t)$, $v_y(t)$, $v_z(t)$ *to funkcje opisujące prędkość względem każdej osi.*

Ze względu na wektor przyspieszenia wyróżniamy rodzaje ruchu:

– $a = 0$ - **jednostajny**

– $\vec{a} = \text{const}$[1] - **jednostajnie** opóźniony ($a < 0$) lub przyspieszony ($a > 0$)

– $a \neq \text{const}$ - **niejednostajnie** opóźniony ($a < 0$) lub przyspieszony ($a > 0$)[2]

[1] Warto zwrócić uwagę, że implikuje to stały kierunek i zwrot wektora przyspieszenia

[2] O wartości przyspieszenia mówimy w przedziale czasu

2.4 Ruch jednostajnie przyspieszony

Definicja: Ruch jednostajnie przyspieszony

Ruch w którym wektor przyspieszenia jest stały:

$$\vec{a} = const$$

Z ruchem **jednostajnie** przyspieszonym wiążą się pewne uogólnienia o których warto pamiętać. Wszystkie wynikają z ogólnych wzorów więc można je wyprowadzić.

Zależność prędkości od czasu możemy wyprowadzić korzystając z podstawowej zależności na przyspieszenie:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0} \overset{t_0=0}{=} \frac{v - v_0}{t} \qquad \Longrightarrow \qquad at = v - v_0$$

$$v(t) = v_0 + at$$

Podobnie korzystając z zależności na prędkość średnią możemy wyprowadzić zależność na położenie:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0} \overset{t_0=0}{=} \frac{x - x_0}{t} \qquad \Longrightarrow \qquad \bar{v}t = x - x_0$$

$$x(t) = x_0 + \bar{v}t$$

Liniowa zależność prędkości od czasu sprowadza średnią prędkość do średniej arytmetycznej:

$$\bar{v} = \frac{v + v_0}{2}$$

Łącząc trzy powyższe równania możemy wyprowadzić zależność na położenie od czasu dla ruchu **jednostajnie zmiennego**:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

2.5 Ruch złożony

Jest to rodzaj ruchu gdzie przemieszczenie odbywa się równocześnie względem osi OX i OY. Układy takie opisuje się stosując zestawy równań skalarnych względem obu osi osobno.

Rozważmy np. ruch jednostajnie przyspieszony względem obu osi.

$$\vec{a} = \text{const}$$

$$\vec{v} = \vec{v_o} + \vec{a}t$$

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{v_0}t + \frac{\vec{a}t}{2}$$

Znając wektor przyspieszenia jesteśmy wstanie stworzyć dwa zestawy **skalarnych** równań ruchu opisujące ruch wzdłuż prostopadłych do siebie osi.

Równania wzdłóż osi OX	Równania wzdłóż osi OY
$a_x = \text{const}$ $v_x = v_{x0} + a_x t$ $x = x_0 + v_{x0}t + \frac{a_x t^2}{2}$	$a_y = \text{const}$ $v_y = v_{y0} + a_y t$ $y = y_0 + v_{y0}t + \frac{a_y t^2}{2}$

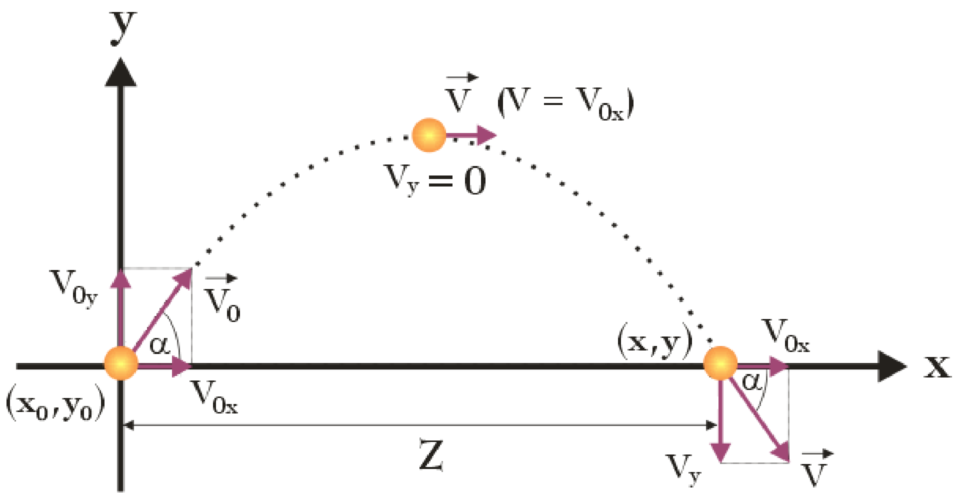
Rzut ukośny

Najbardziej oczywistym przykładem ruchu złożonego jest rzut ukośny. Rozważmy ciało wyrzucane z poziomu podłoża pod kątem α do podłoża z prędkością styczną równą v_0. Przyjmuję następujące oznaczenia:

– z odległość jaką przeleci ciało zanim uderzy w ziemię

– v_x pozioma składowa prędkości początkowej

– v_y pionowa składowa prędkości początkowej



Stosując podstawowe zależności trygonometryczne możemy rozłożyć wektor prędkości początkowej

$$v_{x0} = v_0 \cos(\alpha)$$

$$v_{y0} = v_0 \sin(\alpha)$$

Ponieważ ciało zostało rzucone swobodnie i zaniedbujemy opory ruchu w kierunku poziomym ciało porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym, a w kierunku pionowym jednostajnie opóźnionym (później przyspieszonym) wynikającym z siły grawitacji, **wektor przyspieszenia grawitacyjnego skierowany jest przeciwnie do wektora składowego prędkości początkowej w kierunku pionowym,**

więc g **idzie ze znakiem** $-$:

$$v_x = v_{x0} = v_0 \cos(\alpha)$$

$$v_y = v_{y0} - gt = v_0 \sin(\alpha) - gt$$

Teraz stosując twierdzenie pitagorasa możemy wyprowadzić zależność na prędkość **styczną do toru ruchu** od czasu:

$$v(t) = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)} = \sqrt{v_0 - 2v_0 gtsin(\alpha) + g^2t^2}$$

Równania ruchu względem obu osi mają następującą postać:

$$x(t) = x_0(=0) + v_{x0}t = v_0 \cos(\alpha)t$$

$$y(t) = y_0(=0) + v_{y0}t - \frac{gt^2}{2} = v_0 \sin(\alpha)t - \frac{gt^2}{2}$$

Mając równania ruchu bardzo łatwo wyprowadzić zależnośc $y(x)$ pokazującą tor ruchu ciała:

$$x = v_0 \cos(\alpha)t \qquad \Longrightarrow \qquad t = \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)}$$

Podstawiając do równania $y(t)$ otrzymujemy:

$$y(x) = v_0 \sin(\alpha)\frac{x}{v_0 \cos(\alpha)} - \frac{g(\frac{x}{v_0 \cos(\alpha)})^2}{2}$$

upraszczając:

$$y(x) = x \tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)}x^2$$

Aby policzyć zasięg rzutu ukośnego potrzebujemy policzyć całkowity czas wznoszenia t_1 i opadania t_2. Można zauważyć, że pomijając opory ruchu czasy te będą sobie równe, a więc:

$$v_y(t_1) = 0$$

$$v_0 \sin(\alpha) - g t_1 = 0$$

$$t_1 = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g}$$

$$t_c = t_1 + t_2 = 2t_1$$

$$t_c = \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g}$$

Skoro mamy czas po jakim czasie ciało uderzy o ziemię, zasięg rzutu będzie równy odległości jaką ciało przebędzie w kierunku poziomym:

$$z = x(t_c) = v_0 \cos(\alpha) t_c = v_0 \cos(\alpha) \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g} \implies z = \frac{2v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$$