

Notatki z wykładów z Fizyki 1

Łukasz Kwinta

Spis treści

1	Wiadomości wstępne i wektory	2
1.1	Suma wektorów	2
1.2	Iloczyn skalarny	3
1.3	Iloczyn wektorowy	3
2	Podstawy kinematyki	4
2.1	Podstawowe pojęcia	4
2.2	Prędkość	5
2.3	Przyspieszenie	9
2.4	Ruch jednostajnie przyspieszony	10
2.5	Ruch złożony	11
2.6	Ruch po okręgu	14
3	Dynamika	17

1 Wiadomości wstępne i wektory

W całych notatkach mogą pojawić się poniżej zdefiniowane wektory - a dokładniej wersory rozpinające przestrzenie \mathbb{R}^2 i \mathbb{R}^3 :

\mathbb{R}^2 :

$$\vec{i} = (1, 0)$$

$$\vec{j} = (0, 1)$$

\mathbb{R}^3 :

$$\vec{i} = (1, 0, 0)$$

$$\vec{j} = (0, 1, 0)$$

$$\vec{k} = (0, 0, 1)$$

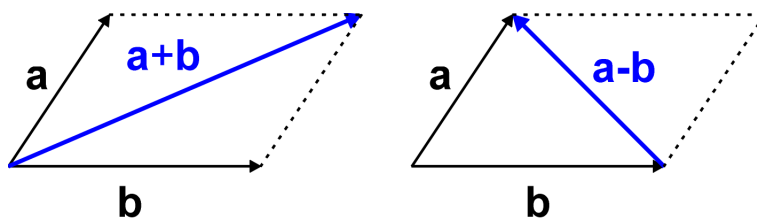
1.1 Suma wektorów

Niech:

$$\vec{a} := (a_1, a_2, a_3) \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

Wtedy suma wektorów ma następującą postać:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$



1.2 Iloczyn skalarny

Niech:

$$\vec{a} := (a_1, a_2, a_3) \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

Wtedy iloczyn skalarny oznaczamy \circ ma następującą postać:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Występuje również poniższa zależność:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \cdot \cos (\vec{a}, \vec{b})$$

1.3 Iloczyn wektorowy

Niech:

$$\vec{a} := (a_1, a_2, a_3) \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

oraz:

$$\vec{i} := (1, 0, 0) \quad \vec{j} = (0, 1, 0) \quad \vec{k} = (0, 0, 1)$$

Wtedy, iloczyn wektorowy ma następującą postać:

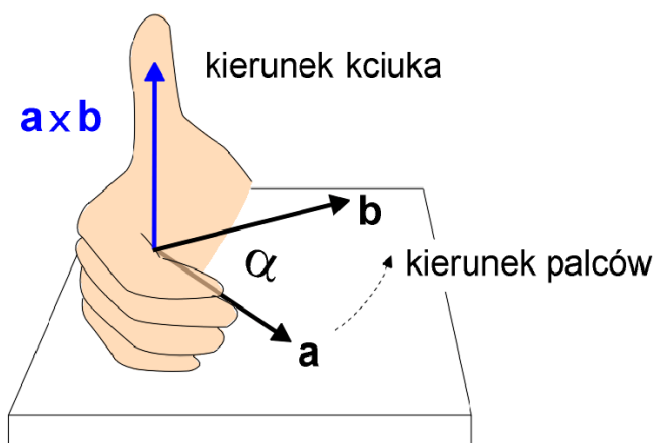
$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i}(a_2b_3 - a_3b_2) + \vec{j}(a_3b_1 - a_1b_3) + \vec{k}(a_1b_2 - a_2b_1) = \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \end{aligned}$$

Tak jak przy iloczynie skalarnym występuje zależność związana z kątem między wektorami:

$$||\vec{a} \times \vec{b}|| = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \cdot \sin (\vec{a}, \vec{b})$$

Kierunek iloczynu wektorowego $\vec{a} \times \vec{b}$ jest prostopadły do płaszczyzny stworzonej przez wektory \vec{a} i \vec{b} .

Natomiast zwrot tego wektora można określić stosując zasadę prawej dłoni:



2 Podstawy kinematyki

2.1 Podstawowe pojęcia

Definicja: Ruch

Zmiana wzajemnego położenia ciał względem innych ciał wraz z upływem czasu.

Definicja: Układ odniesienia

Wybrane ciało lub ciało względem których wyznaczamy własności fizyczne takie jak położenie czy prędkość.

Definicja: Punkt materialny

Punktem materialnym nazywamy obiekt obdarzony masą, których rozmiar (aka objętość) można zaniedbać.

Definicja: Przemieszczenie

Zmiana położenia ciała względem jakiegoś układu odniesienia, zwykle punktu (0, 0) w układzie współrzędnych. Wektor przemieszczenia oznaczamy r . Występuje poniższa zależność:

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z = (x, y, z)$$

gdzie:

- x - współrzędna x wektora przemieszczenia*
- y - współrzędna y wektora przemieszczenia*
- z - współrzędna z wektora przemieszczenia*

2.2 Prędkość

Definicja: Prędkość

Prędkość to zmiana położenia w czasie:

$$\vec{v} = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

gdzie:

- $\Delta \vec{r}$ - wektor przemieszczenia rozpięty pomiędzy poprzednim(x_0) a nowym(x) położeniem
- Δt - czas w jakim nastąpiła ta zmiana

*Bardziej ogólnie: **pochodna drogi(położenia) po czasie***

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$$

gdzie $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ to funkcje opisujące zmianę położenia względem każdej z osi.

Definicja: Szybkość

Wielkość skalarna. Wartość wektora prędkości w danej chwili t . Czasami równa prędkości średniej.

Jeśli ciało znajdowało się w chwili t_0 w punkcie x_0 , a w chwili t w punkcie x to:

$$x - x_0 = v(t - t_0)$$

Stąd ($\Delta x := x - x_0$ oraz $\Delta t := t - t_0$):

$$v = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Z definicji prędkość jest wielkością wektorową więc warto zwracać uwagę w zadaniach na oznaczenia. W zadaniach gdzie wektor prędkości nie ma stałego kierunku

rozważa się składowe wektora prędkości dla uproszczenia zadania - na przykład przy rzucie ukośnym rozważa się składową pionową i poziomą prędkości.

Gdy wartość prędkości zmienia się w czasie nie możemy stosować powyższego wzoru - nabiera on wtedy sens *"Prędkości średniej"*. Korzystając z analizy matematycznej aby dokładnie opisać prędkość chwilową ciała należy dążyć ze zmianą czasu do 0. ($\Delta x \rightarrow 0$), a więc

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

A więc prędkość jest pierwszą pochodną położenia (drogi) po czasie.

Warto tutaj zwrócić uwagę, że prawdziwa też jest operacja odwrotna (*nie jest to do końca operacja poprawna stricte matematycznie lecz mająca sens fizyczny - w matematyce symbol pochodnej $\frac{df(x)}{dx}$ traktujemy jako jedność, w fizyce nic nie stoi na przeszkodzie aby traktować to jako ułamek*):

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \implies \quad dx = v dt \quad \implies \quad \int dx = \int v dt$$
$$x = \int v dt + C$$

Należy pamiętać o stałej całkowania C , interpretowanej zwykle jako x_0 - położenie początkowe. W większości wypadków stałą będziemy wyliczali z warunków początkowych zadania, np. $x(0) = 0$.

Definicja: Prędkość średnia

Oszacowana wartość prędkości na danym odcinku. Oznaczana \bar{v} . Prędkość średnią wyznaczamy poprzez wzór:

$$\bar{v} = \frac{S_c}{t_c}$$

gdzie:

- S_c - całkowity dystans przebyty w czasie t_c
- t_c - całkowity czas

Potocznie: **Cała droga przez cały czas**

Na przykład gdy interesuje nas prędkość średnia w przedziale $< t_0, t_k >$ możemy zastosować całkę oznaczoną by policzyć całkowitą drogę:

$$S_c = \int_{t_0}^{t_k} v dt$$

Średnia prędkość dana będzie wtedy wzorem:

$$\bar{v} = \frac{S_c}{t_k - t_0}$$

2.3 Przyspieszenie

Definicja: Przyspieszenie

Przyspieszenie to wielkość opisująca jak zmienia się prędkość ciała w czasie:

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t - t_0} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

gdzie:

- $\Delta \vec{v}$ - wektor będący różnicą pomiędzy nowym a starym wektorem prędkości
- Δt - czas w jakim nastąpiła ta zmiana

Bardziej ogólnie: **pochodna prędkości po czasie**

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt} \right)$$

gdzie $v_x(t)$, $v_y(t)$, $v_z(t)$ to funkcje opisujące prędkość względem każdej osi.

Ze względu na wektor przyspieszenia wyróżniamy rodzaje ruchu:

- $a = 0$ - **jednostajny**
- $\vec{a} = \text{const}$ ¹ - **jednostajnie** opóźniony ($a < 0$) lub przyspieszony ($a > 0$)
- $a \neq \text{const}$ - **niejednostajnie** opóźniony ($a < 0$) lub przyspieszony ($a > 0$)²

¹Warto zwrócić uwagę, że implikuje to stały kierunek i zwrot wektora przyspieszenia

²O wartości przyspieszenia mówimy w przedziale czasu

2.4 Ruch jednostajnie przyspieszony

Definicja: Ruch jednostajnie przyspieszony

Ruch w którym wektor przyspieszenia jest stały:

$$\vec{a} = \text{const}$$

Z ruchem **jednostajnie** przyspieszonym wiążą się pewne uogólnienia o których warto pamiętać. Wszystkie wynikają z ogólnych wzorów więc można je wyprowadzić.

Zależność prędkości od czasu możemy wyprowadzić korzystając z podstawowej zależności na przyspieszenie:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0} \stackrel{t_0=0}{=} \frac{v - v_0}{t} \implies at = v - v_0$$
$$v(t) = v_0 + at$$

Podobnie korzystając z zależności na prędkość średnią możemy wyprowadzić zależność na położenie:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0} \stackrel{t_0=0}{=} \frac{x - x_0}{t} \implies \bar{v}t = x - x_0$$
$$x(t) = x_0 + \bar{v}t$$

Liniowa zależność prędkości od czasu sprowadza średnią prędkość do średniej arytmetycznej:

$$\bar{v} = \frac{v + v_0}{2}$$

Łącząc trzy powyższe równania możemy wyprowadzić zależność na położenie od

czasu dla ruchu **jednostajnie zmiennego**:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

2.5 Ruch złożony

Jest to rodzaj ruchu gdzie przemieszczenie odbywa się równocześnie względem osi OX i OY . Układy takie opisuje się stosując zestawy równań skalarnych względem obu osi osobno.

Rozważmy np. ruch jednostajnie przyspieszony względem obu osi.

$$\vec{a} = \text{const}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$$

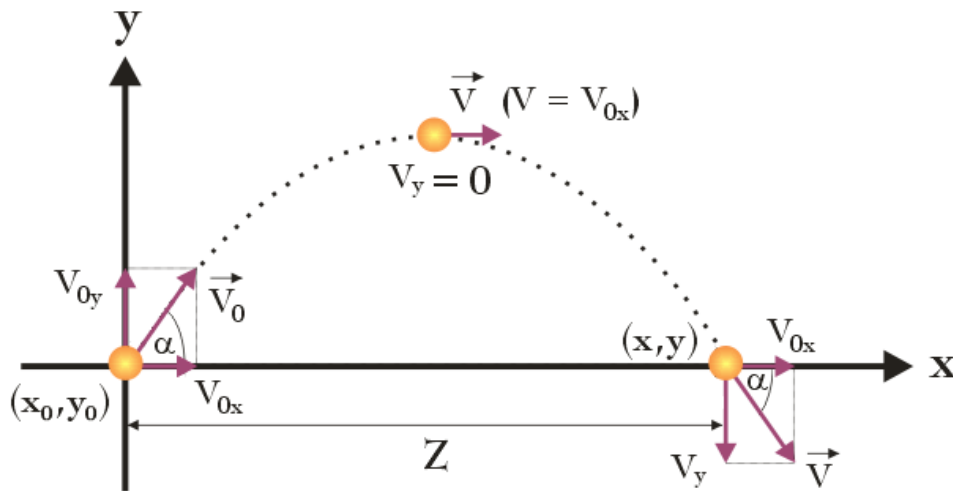
Znając wektor przyspieszenia jesteśmy w stanie stworzyć dwa zestawy **skalarnych** równań ruchu opisujące ruch wzdłuż prostopadłych do siebie osi.

Równania wzdłuż osi OX	Równania wzdłuż osi OY
$a_x = \text{const}$	$a_y = \text{const}$
$v_x = v_{x0} + a_x t$	$v_y = v_{y0} + a_y t$
$x = x_0 + v_{x0} t + \frac{a_x t^2}{2}$	$y = y_0 + v_{y0} t + \frac{a_y t^2}{2}$

Rzut ukośny

Najbardziej oczywistym przykładem ruchu złożonego jest rzut ukośny. Rozważmy ciało wyrzucane z poziomu podłoża pod kątem α do podłoża z prędkością styczną równą v_0 . Przyjmuję następujące oznaczenia:

- z odległość jaką przeleci ciało zanim uderzy w ziemię
- v_x pozioma składowa prędkości początkowej
- v_y pionowa składowa prędkości początkowej



Stosując podstawowe zależności trygonometryczne możemy rozłożyć wektor prędkości początkowej

$$v_{x0} = v_0 \cos(\alpha)$$

$$v_{y0} = v_0 \sin(\alpha)$$

Ponieważ ciało zostało rzucone swobodnie i zaniedbujemy opory ruchu w kierunku poziomym ciało porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym, a w kierunku pionowym jednostajnie opóźnionym (później przyspieszonym) wynikającym z siły grawitacji, **wektor przyspieszenia grawitacyjnego skierowany jest przeciwnie do wektora składowego prędkości początkowej w kierunku pionowym,**

więc g idzie ze znakiem $-$:

$$v_x = v_{x0} = v_0 \cos(\alpha)$$

$$v_y = v_{y0} - gt = v_0 \sin(\alpha) - gt$$

Teraz stosując twierdzenie pitagorasa możemy wyprowadzić zależność na prędkość **styczną do toru ruchu** od czasu:

$$v(t) = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)} = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 g t \sin(\alpha) + g^2 t^2}$$

Równania ruchu względem obu osi mają następującą postać:

$$x(t) = x_0 (= 0) + v_{x0} t = v_0 \cos(\alpha) t$$

$$y(t) = y_0 (= 0) + v_{y0} t - \frac{gt^2}{2} = v_0 \sin(\alpha) t - \frac{gt^2}{2}$$

Mając równania ruchu bardzo łatwo wyprowadzić zależność $y(x)$ pokazującą tor ruchu ciała:

$$x = v_0 \cos(\alpha) t \quad \implies \quad t = \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)}$$

Podstawiając do równania $y(t)$ otrzymujemy:

$$y(x) = v_0 \sin(\alpha) \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)} - \frac{g \left(\frac{x}{v_0 \cos(\alpha)} \right)^2}{2}$$

upraszczając:

$$y(x) = x \tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} x^2$$

Aby policzyć zasięg rzutu ukośnego potrzebujemy policzyć całkowity czas wznoszenia t_1 i opadania t_2 . Można zauważyć, że pomijając opory ruchu czasy te będą sobie równe, a więc:

$$v_y(t_1) = 0$$

$$v_0 \sin(\alpha) - gt_1 = 0$$

$$t_1 = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g}$$

$$t_c = t_1 + t_2 = 2t_1$$

$$t_c = \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g}$$

Skoro mamy czas po jakim czasie ciało uderzy o ziemię, zasięg rzutu będzie równy odległości jaką ciało przebędzie w kierunku poziomym:

$$z = x(t_c) = v_0 \cos(\alpha)t_c = v_0 \cos(\alpha) \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g} \implies z = \frac{2v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$$

2.6 Ruch po okręgu

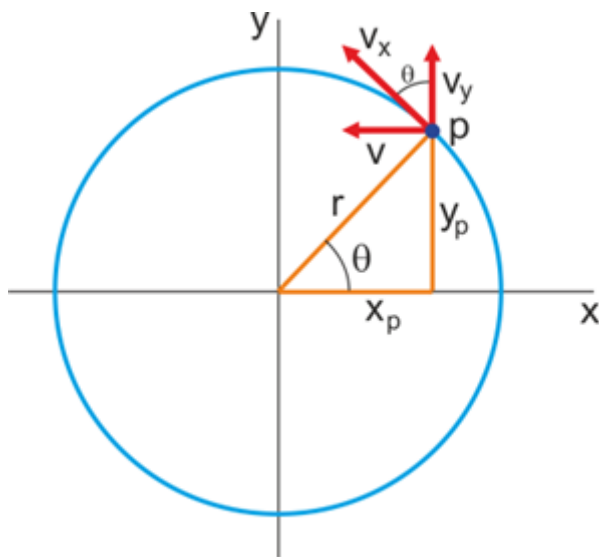
Definicja: Ruch po okręgu

Ruch w którym tor ruchu jest okrąg. Wektor prędkości v_s jest styczny do okręgu. Występuje przyspieszenie radialne/normalne prostopadłe do wektora prędkości - oznaczamy a_r - gdy mówimy dokładnie o okręgu przyspieszenie to można nazwać przyspieszeniem dośrodkowym, lecz nazwać radialne/normalne jest bardziej ogólne.

Aby wyprowadzić zależności opisujące ruch po okręgu rozważmy chwilę gdy ciało znajduje się w punkcie P . Przyjmuję następujące oznaczenia:

- x_P i y_P współrzędne x i y punktu P
- \vec{v} wektor prędkości stycznej do okręgu, v wartość wektora prędkości
- v_x i v_y pozioma i pionowa składowa wektora prędkości \vec{v}
- r promień okręgu po którym odbywa się ruch

- θ kąt pomiędzy osią OX a promieniem poprowadzonym między punktami $(0, 0)$ i P



Rysunek 1: Na rysunku pomyłono \vec{v}_x i \vec{v}

Zapisujemy równania zależności trygonometrycznych:

$$\sin \theta = \frac{y_P}{r} \quad \cos \theta = \frac{x_P}{r}$$

Rozkładamy prędkość styczną na składowe (składowa pozioma jest ujemna bo ciało porusza się "wstecz" osi OX):

$$\vec{v} = \vec{i}v_x + \vec{j}v_y = \vec{i}(-v \sin \theta) + \vec{j}(v \cos \theta)$$

$$\vec{v} = \vec{i}\left(-v\frac{y_P}{r}\right) + \vec{j}\left(v\frac{x_P}{r}\right)$$

Aby obliczyć przyspieszenie "dośrodkowe" wystarczy policzyć pochodną. v i r to stałe więc wystarczy policzyć pochodne $x_P(t)$ i $y_P(t)$.

$$\vec{a}_r = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{i}\left(-\frac{v}{r}\frac{dy_P}{dt}\right) + \vec{j}\left(\frac{v}{r}\frac{dx_P}{dt}\right) = \vec{i}\left(-\frac{v}{r}v_y\right) + \vec{j}\left(\frac{v}{r}v_x\right)$$

Wstawiając wzory na prędkość otrzymujemy:

$$\vec{a}_r = \vec{i} \left(-\frac{v^2}{r} \cos \theta \right) + \vec{j} \left(\frac{v^2}{r} \sin \theta \right)$$

Wartość przyspieszenia otrzymujemy z tw. Pitagorasa:

$$a_r = \sqrt{\left(-\frac{v^2}{r} \cos \theta \right)^2 + \left(\frac{v^2}{r} \sin \theta \right)^2} = \sqrt{\frac{v^4}{r^2} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = \frac{v^2}{r}$$

Przyspieszenie radialne jest zwrócone prostopadle do toru ruchu czyli w tym wypadku do środka okręgu.

Prędkość styczną w ruchu po okręgu możemy wyrazić korzystając z okresu ruchu T . Jeśli pokonanie całego okręgu o długości $l = 2\pi r$ zajmuje ciało czas t_0 to czas ten nazywamy okresem i oznaczmy $T = t_0$ - oznacza to czas potrzeby na pokonanie jednego okręgu. Wtedy prędkość v możemy wyrazić wzorem:

$$v = \frac{l}{T} = \frac{2\pi r}{T}$$

Korzystając z tego wzoru możemy wyrazić przyspieszenie dośrodkowe:

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(\frac{2\pi r}{T} \right)^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

3 Dynamika

Definicja: Masa

$$m = m_0 \frac{v_0}{v}$$