

# Notatki z wykładów z Fizyki 1

Łukasz Kwinta

## Spis treści

<b>1</b>	<b>Wiadomości wstępne i wektory</b>	<b>2</b>
1.1	Suma wektorów .....	2
1.2	Iloczyn skalarny .....	3
1.3	Iloczyn wektorowy .....	3
<b>2</b>	<b>Podstawy kinematyki</b>	<b>4</b>
2.1	Podstawowe pojęcia .....	4
2.2	Prędkość .....	5
2.3	Przyspieszenie .....	9
2.4	Ruch jednostajnie przyspieszony .....	10
2.5	Ruch złożony .....	11
2.6	Ruch po okręgu .....	14
<b>3</b>	<b>Dynamika</b>	<b>17</b>

# 1 Wiadomości wstępne i wektory

W całych notatkach mogą pojawić się poniżej zdefiniowane wektory - a dokładniej wersory rozpinające przestrzenie  $\mathbb{R}^2$  i  $\mathbb{R}^3$ :

$\mathbb{R}^2$ :

$$\vec{i} = (1, 0)$$

$$\vec{j} = (0, 1)$$

$\mathbb{R}^3$ :

$$\vec{i} = (1, 0, 0)$$

$$\vec{j} = (0, 1, 0)$$

$$\vec{k} = (0, 0, 1)$$

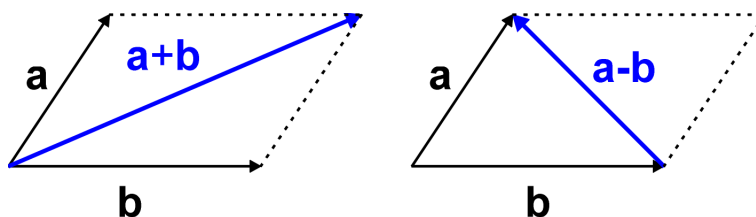
## 1.1 Suma wektorów

Niech:

$$\vec{a} := (a_1, a_2, a_3) \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

Wtedy suma wektorów ma następującą postać:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$



## 1.2 Iloczyn skalarny

Niech:

$$\vec{a} := (a_1, a_2, a_3) \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

Wtedy iloczyn skalarny oznaczamy  $\circ$  ma następującą postać:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Występuje również poniższa zależność:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos ( \vec{a}, \vec{b} )$$

## 1.3 Iloczyn wektorowy

Niech:

$$\vec{a} := (a_1, a_2, a_3) \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

oraz:

$$\vec{i} := (1, 0, 0) \quad \vec{j} = (0, 1, 0) \quad \vec{k} = (0, 0, 1)$$

Wtedy, iloczyn wektorowy ma następującą postać:

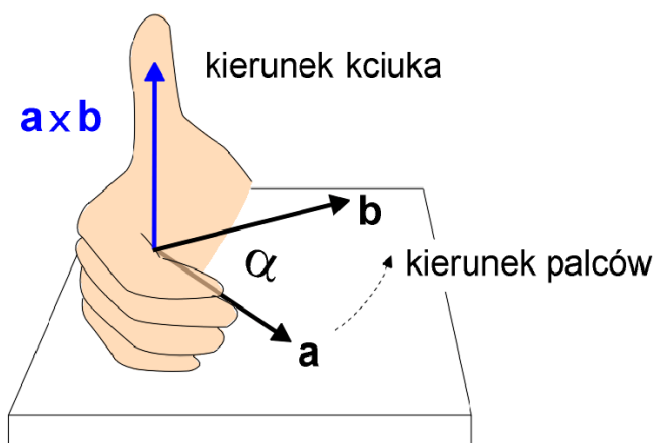
$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i}(a_2b_3 - a_3b_2) + \vec{j}(a_3b_1 - a_1b_3) + \vec{k}(a_1b_2 - a_2b_1) = \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \end{aligned}$$

Tak jak przy iloczynie skalarnym występuje zależność związana z kątem między wektorami:

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin ( \vec{a}, \vec{b} )$$

Kierunek iloczynu wektorowego  $\vec{a} \times \vec{b}$  jest prostopadły do płaszczyzny stworzonej przez wektory  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ .

Natomiast zwrot tego wektora można określić stosując zasadę prawej dłoni:



## 2 Podstawy kinematyki

### 2.1 Podstawowe pojęcia

Definicja: Ruch

*Zmiana wzajemnego położenia ciał względem innych ciał wraz z upływem czasu.*

Definicja: Układ odniesienia

*Wybrane ciało lub ciało względem których wyznaczamy własności fizyczne takie jak położenie czy prędkość.*

Definicja: Punkt materialny

*Punktem materialnym nazywamy obiekt obdarzony masą, których rozmiar (aka objętość) można zaniedbać.*

Definicja: Przemieszczenie

*Zmiana położenia ciała względem jakiegoś układu odniesienia, zwykle punktu (0, 0) w układzie współrzędnych. Wektor przemieszczenia oznaczamy  $r$ . Występuje poniższa zależność:*

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z = (x, y, z)$$

*gdzie:*

- $x$  - współrzędna  $x$  wektora przemieszczenia*
- $y$  - współrzędna  $y$  wektora przemieszczenia*
- $z$  - współrzędna  $z$  wektora przemieszczenia*

## 2.2 Prędkość

Definicja: Prędkość

*Prędkość to zmiana położenia w czasie:*

$$\vec{v} = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

*gdzie:*

- $\Delta \vec{r}$  - wektor przemieszczenia rozpięty pomiędzy poprzednim( $x_0$ ) a nowym( $x$ ) położeniem
- $\Delta t$  - czas w jakim nastąpiła ta zmiana

*Bardziej ogólnie: **pochodna drogi(położenia) po czasie***

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$$

*gdzie  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  to funkcje opisujące zmianę położenia względem każdej z osi.*

Definicja: Szybkość

*Wielkość skalarna. Wartość wektora prędkości w danej chwili  $t$ . Czasami równa prędkości średniej.*

Jeśli ciało znajdowało się w chwili  $t_0$  w punkcie  $x_0$ , a w chwili  $t$  w punkcie  $x$  to:

$$x - x_0 = v(t - t_0)$$

Stąd ( $\Delta x := x - x_0$  oraz  $\Delta t := t - t_0$ ):

$$v = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Z definicji prędkość jest wielkością wektorową więc warto zwracać uwagę w zadaniach na oznaczenia. W zadaniach gdzie wektor prędkości nie ma stałego kierunku

rozważa się składowe wektora prędkości dla uproszczenia zadania - na przykład przy rzucie ukośnym rozważa się składową pionową i poziomą prędkości.

Gdy wartość prędkości zmienia się w czasie nie możemy stosować powyższego wzoru - nabiera on wtedy sens *"Prędkości średniej"*. Korzystając z analizy matematycznej aby dokładnie opisać prędkość chwilową ciała należy dążyć ze zmianą czasu do 0. ( $\Delta x \rightarrow 0$ ), a więc

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

A więc prędkość jest pierwszą pochodną położenia (drogi) po czasie.

Warto tutaj zwrócić uwagę, że prawdziwa też jest operacja odwrotna (*nie jest to do końca operacja poprawna stricte matematycznie lecz mająca sens fizyczny - w matematyce symbol pochodnej  $\frac{df(x)}{dx}$  traktujemy jako jedność, w fizyce nic nie stoi na przeszkodzie aby traktować to jako ułamek*):

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \implies \quad dx = v dt \quad \implies \quad \int dx = \int v dt$$
$$x = \int v dt + C$$

Należy pamiętać o stałej całkowania  $C$ , interpretowanej zwykle jako  $x_0$  - położenie początkowe. W większości wypadków stałą będziemy wyliczali z warunków początkowych zadania, np.  $x(0) = 0$ .



Definicja: Prędkość średnia

Oszacowana wartość prędkości na danym odcinku. Oznaczana  $\bar{v}$ . Prędkość średnią wyznaczamy poprzez wzór:

$$\bar{v} = \frac{S_c}{t_c}$$

gdzie:

- $S_c$  - całkowity dystans przebyty w czasie  $t_c$
- $t_c$  - całkowity czas

Potocznie: **Cała droga przez cały czas**

Na przykład gdy interesuje nas prędkość średnia w przedziale  $< t_0, t_k >$  możemy zastosować całkę oznaczoną by policzyć całkowitą drogę:

$$S_c = \int_{t_0}^{t_k} v dt$$

Średnia prędkość dana będzie wtedy wzorem:

$$\bar{v} = \frac{S_c}{t_k - t_0}$$

## 2.3 Przyspieszenie

Definicja: Przyspieszenie

*Przyspieszenie to wielkość opisująca jak zmienia się prędkość ciała w czasie:*

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t - t_0} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

gdzie:

- $\Delta \vec{v}$  - wektor będący różnicą pomiędzy nowym a starym wektorem prędkości
- $\Delta t$  - czas w jakim nastąpiła ta zmiana

Bardziej ogólnie: **pochodna prędkości po czasie**

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} = \left( \frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt} \right)$$

gdzie  $v_x(t)$ ,  $v_y(t)$ ,  $v_z(t)$  to funkcje opisujące prędkość względem każdej osi.

Ze względu na wektor przyspieszenia wyróżniamy rodzaje ruchu:

- $a = 0$  - **jednostajny**
- $\vec{a} = \text{const}$ <sup>1</sup> - **jednostajnie** opóźniony ( $a < 0$ ) lub przyspieszony ( $a > 0$ )
- $a \neq \text{const}$  - **niejednostajnie** opóźniony ( $a < 0$ ) lub przyspieszony ( $a > 0$ )<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup>Warto zwrócić uwagę, że implikuje to stały kierunek i zwrot wektora przyspieszenia

<sup>2</sup>O wartości przyspieszenia mówimy w przedziale czasu

## 2.4 Ruch jednostajnie przyspieszony

Definicja: Ruch jednostajnie przyspieszony

*Ruch w którym wektor przyspieszenia jest stały:*

$$\vec{a} = \text{const}$$

Z ruchem **jednostajnie** przyspieszonym wiążą się pewne uogólnienia o których warto pamiętać. Wszystkie wynikają z ogólnych wzorów więc można je wyprowadzić.

Zależność prędkości od czasu możemy wyprowadzić korzystając z podstawowej zależności na przyspieszenie:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0} \stackrel{t_0=0}{=} \frac{v - v_0}{t} \implies at = v - v_0$$
$$v(t) = v_0 + at$$

Podobnie korzystając z zależności na prędkość średnią możemy wyprowadzić zależność na położenie:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0} \stackrel{t_0=0}{=} \frac{x - x_0}{t} \implies \bar{v}t = x - x_0$$
$$x(t) = x_0 + \bar{v}t$$

Liniowa zależność prędkości od czasu sprowadza średnią prędkość do średniej arytmetycznej:

$$\bar{v} = \frac{v + v_0}{2}$$

Łącząc trzy powyższe równania możemy wyprowadzić zależność na położenie od

czasu dla ruchu **jednostajnie zmiennego**:

$$x(t) = x_0 + v_0t + \frac{at^2}{2}$$

## 2.5 Ruch złożony

Jest to rodzaj ruchu gdzie przemieszczenie odbywa się równocześnie względem osi  $OX$  i  $OY$ . Układy takie opisuje się stosując zestawy równań skalarnych względem obu osi osobno.

Rozważmy np. ruch jednostajnie przyspieszony względem obu osi.

$$\vec{a} = \text{const}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$$

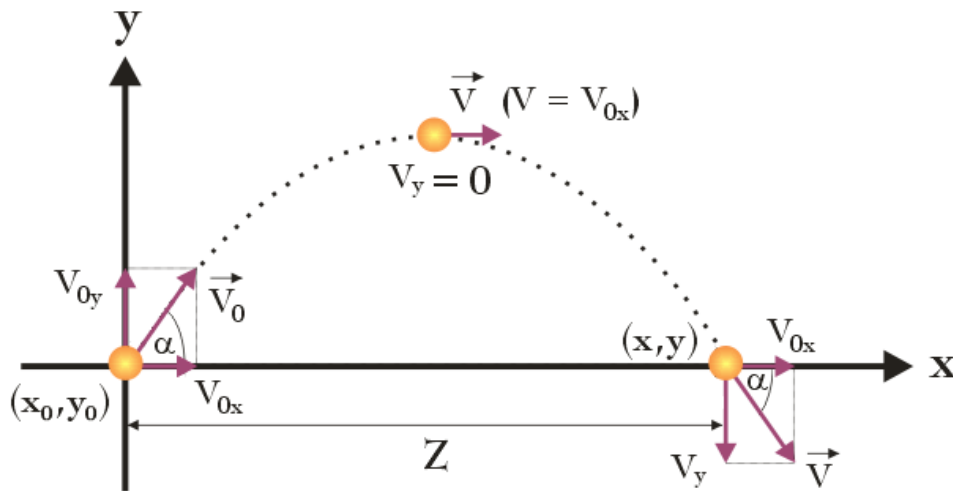
Znając wektor przyspieszenia jesteśmy w stanie stworzyć dwa zestawy **skalarnych** równań ruchu opisujące ruch wzdłuż prostopadłych do siebie osi.

Równania wzdłuż osi $OX$	Równania wzdłuż osi $OY$
$a_x = \text{const}$	$a_y = \text{const}$
$v_x = v_{x0} + a_xt$	$v_y = v_{y0} + a_yt$
$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{a_xt^2}{2}$	$y = y_0 + v_{y0}t + \frac{a_yt^2}{2}$

## Rzut ukośny

Najbardziej oczywistym przykładem ruchu złożonego jest rzut ukośny. Rozważmy ciało wyrzucane z poziomu podłoża pod kątem  $\alpha$  do podłoża z prędkością styczną równą  $v_0$ . Przyjmuję następujące oznaczenia:

- $z$  odległość jaką przeleci ciało zanim uderzy w ziemię
- $v_x$  pozioma składowa prędkości początkowej
- $v_y$  pionowa składowa prędkości początkowej



Stosując podstawowe zależności trygonometryczne możemy rozłożyć wektor prędkości początkowej

$$v_{x0} = v_0 \cos(\alpha)$$

$$v_{y0} = v_0 \sin(\alpha)$$

Ponieważ ciało zostało rzucone swobodnie i zaniedbujemy opory ruchu w kierunku poziomym ciało porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym, a w kierunku pionowym jednostajnie opóźnionym (później przyspieszonym) wynikającym z siły grawitacji, **wektor przyspieszenia grawitacyjnego skierowany jest przeciwnie do wektora składowego prędkości początkowej w kierunku pionowym,**

więc  $g$  idzie ze znakiem  $-$ :

$$v_x = v_{x0} = v_0 \cos(\alpha)$$

$$v_y = v_{y0} - gt = v_0 \sin(\alpha) - gt$$

Teraz stosując twierdzenie pitagorasa możemy wyprowadzić zależność na prędkość **styczną do toru ruchu** od czasu:

$$v(t) = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)} = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 g t \sin(\alpha) + g^2 t^2}$$

Równania ruchu względem obu osi mają następującą postać:

$$x(t) = x_0 (= 0) + v_{x0} t = v_0 \cos(\alpha) t$$

$$y(t) = y_0 (= 0) + v_{y0} t - \frac{gt^2}{2} = v_0 \sin(\alpha) t - \frac{gt^2}{2}$$

Mając równania ruchu bardzo łatwo wyprowadzić zależność  $y(x)$  pokazującą tor ruchu ciała:

$$x = v_0 \cos(\alpha) t \quad \implies \quad t = \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)}$$

Podstawiając do równania  $y(t)$  otrzymujemy:

$$y(x) = v_0 \sin(\alpha) \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)} - \frac{g \left( \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)} \right)^2}{2}$$

upraszczając:

$$y(x) = x \tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} x^2$$

Aby policzyć zasięg rzutu ukośnego potrzebujemy policzyć całkowity czas wznoszenia  $t_1$  i opadania  $t_2$ . Można zauważyć, że pomijając opory ruchu czasy te będą sobie równe, a więc:

$$v_y(t_1) = 0$$

$$v_0 \sin(\alpha) - gt_1 = 0$$

$$t_1 = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g}$$

$$t_c = t_1 + t_2 = 2t_1$$

$$t_c = \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g}$$

Skoro mamy czas po jakim czasie ciało uderzy o ziemię, zasięg rzutu będzie równy odległości jaką ciało przebędzie w kierunku poziomym:

$$z = x(t_c) = v_0 \cos(\alpha)t_c = v_0 \cos(\alpha) \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g} \implies z = \frac{2v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$$

## 2.6 Ruch po okręgu

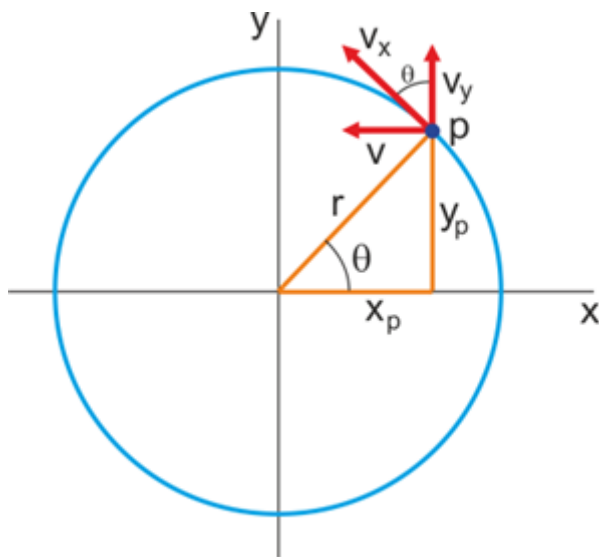
Definicja: Ruch po okręgu

*Ruch w którym tor ruchu jest okrąg. Wektor prędkości  $v_s$  jest styczny do okręgu. Występuje przyspieszenie radialne/normalne prostopadłe do wektora prędkości - oznaczamy  $a_r$  - gdy mówimy dokładnie o okręgu przyspieszenie to można nazwać przyspieszeniem dośrodkowym, lecz nazwać radialne/normalne jest bardziej ogólne.*

Aby wyprowadzić zależności opisujące ruch po okręgu rozważmy chwilę gdy ciało znajduje się w punkcie  $P$ . Przyjmuję następujące oznaczenia:

- $x_P$  i  $y_P$  współrzędne  $x$  i  $y$  punktu  $P$
- $\vec{v}$  wektor prędkości stycznej do okręgu,  $v$  wartość wektora prędkości
- $v_x$  i  $v_y$  pozioma i pionowa składowa wektora prędkości  $\vec{v}$
- $r$  promień okręgu po którym odbywa się ruch

- $\theta$  kąt pomiędzy osią  $OX$  a promieniem poprowadzonym między punktami  $(0, 0)$  i  $P$



Rysunek 1: Na rysunku pomyłono  $\vec{v}_x$  i  $\vec{v}$

Zapisujemy równania zależności trygonometrycznych:

$$\sin \theta = \frac{y_P}{r} \quad \cos \theta = \frac{x_P}{r}$$

Rozkładamy prędkość styczną na składowe (składowa pozioma jest ujemna bo ciało porusza się "wstecz" osi  $OX$ ):

$$\vec{v} = \vec{i}v_x + \vec{j}v_y = \vec{i}(-v \sin \theta) + \vec{j}(v \cos \theta)$$

$$\vec{v} = \vec{i}\left(-v\frac{y_P}{r}\right) + \vec{j}\left(v\frac{x_P}{r}\right)$$

Aby obliczyć przyspieszenie "dośrodkowe" wystarczy policzyć pochodną.  $v$  i  $r$  to stałe więc wystarczy policzyć pochodne  $x_P(t)$  i  $y_P(t)$ .

$$\vec{a}_r = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{i}\left(-\frac{v}{r}\frac{dy_P}{dt}\right) + \vec{j}\left(\frac{v}{r}\frac{dx_P}{dt}\right) = \vec{i}\left(-\frac{v}{r}v_y\right) + \vec{j}\left(\frac{v}{r}v_x\right)$$



Wstawiając wzory na prędkość otrzymujemy:

$$\vec{a}_r = \vec{i} \left( -\frac{v^2}{r} \cos \theta \right) + \vec{j} \left( \frac{v^2}{r} \sin \theta \right)$$

Wartość przyspieszenia otrzymujemy z tw. Pitagorasa:

### 3 Dynamika