

Notatki z wykładów z Fizyki 1

Łukasz Kwinta

Spis treści

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Wiadomości wstępne i wektory | 2 |
| 1.1 | Suma wektorów | 2 |
| 1.2 | Iloczyn skalarny | 3 |
| 1.3 | Iloczyn wektorowy | 3 |
| 2 | Podstawy kinematyki | 4 |
| 2.1 | Podstawowe pojęcia | 4 |
| 2.2 | Prędkość | 5 |
| 2.3 | Przyspieszenie | 9 |
| 2.4 | Ruch jednostajnie przyspieszony | 10 |
| 2.5 | Ruch złożony | 11 |
| 2.6 | Ruch po okręgu | 14 |
| 3 | Dynamika | 20 |
| 3.1 | Wstęp | 20 |
| 3.2 | Zasady dynamiki Newtona | 22 |
| 3.3 | Zasady dynamiki dla ruchu obrotowego | 24 |

1 Wiadomości wstępne i wektory

W całych notatkach mogą pojawić się poniżej zdefiniowane wektory - a dokładniej wersory rozpinające przestrzenie \mathbb{R}^2 i \mathbb{R}^3 :

\mathbb{R}^2 :

$$\hat{i} = (1, 0)$$

$$\hat{j} = (0, 1)$$

\mathbb{R}^3 :

$$\hat{i} = (1, 0, 0)$$

$$\hat{j} = (0, 1, 0)$$

$$\hat{k} = (0, 0, 1)$$

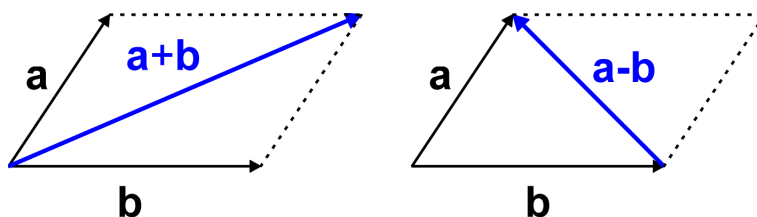
1.1 Suma wektorów

Niech:

$$\vec{a} := (a_1, a_2, a_3) \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

Wtedy suma wektorów ma następującą postać:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$



1.2 Iloczyn skalarny

Niech:

$$\vec{a} := (a_1, a_2, a_3) \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

Wtedy iloczyn skalarny oznaczamy \circ ma następującą postać:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Występuje również poniższa zależność:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

1.3 Iloczyn wektorowy

Niech:

$$\vec{a} := (a_1, a_2, a_3) \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

oraz:

$$\hat{i} := (1, 0, 0) \quad \hat{j} = (0, 1, 0) \quad \hat{k} = (0, 0, 1)$$

Wtedy, iloczyn wektorowy ma następującą postać:

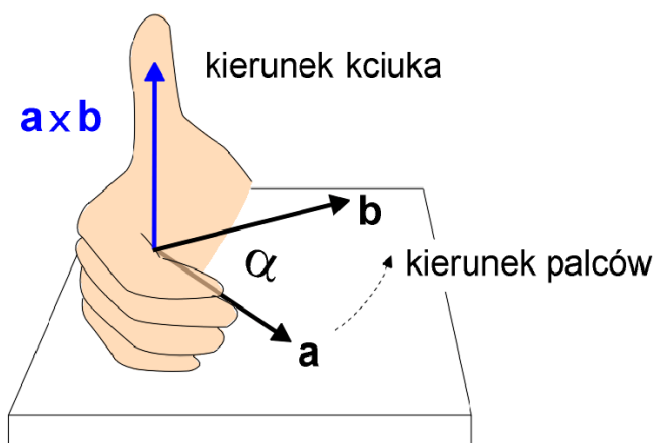
$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \hat{i}(a_2b_3 - a_3b_2) + \hat{j}(a_3b_1 - a_1b_3) + \hat{k}(a_1b_2 - a_2b_1) = \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \end{aligned}$$

Tak jak przy iloczynie skalarnym występuje zależność związana z kątem między wektorami:

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$$

Kierunek iloczynu wektorowego $\vec{a} \times \vec{b}$ jest prostopadły do płaszczyzny stworzonej przez wektory \vec{a} i \vec{b} .

Natomiast zwrot tego wektora można określić stosując zasadę prawej dłoni:



2 Podstawy kinematyki

2.1 Podstawowe pojęcia

Definicja: Ruch

Zmiana wzajemnego położenia ciał względem innych ciał wraz z upływem czasu.

Definicja: Układ odniesienia

Wybrane ciało lub ciało względem których wyznaczamy własności fizyczne takie jak położenie czy prędkość.

Definicja: Punkt materialny

Punktem materialnym nazywamy obiekt obdarzony masą, których rozmiar (aka objętość) można zaniedbać.

Definicja: Przemieszczenie

Zmiana położenia ciała względem jakiegoś układu odniesienia, zwykle punktu (0, 0) w układzie współrzędnych. Wektor przemieszczenia oznaczamy r . Występuje poniższa zależność:

$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z = (x, y, z)$$

gdzie:

- x - współrzędna x wektora przemieszczenia*
- y - współrzędna y wektora przemieszczenia*
- z - współrzędna z wektora przemieszczenia*

2.2 Prędkość

Definicja: Prędkość

Prędkość to zmiana położenia w czasie:

$$\vec{v} = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

gdzie:

- $\Delta \vec{r}$ - wektor przemieszczenia rozpięty pomiędzy poprzednim(x_0) a nowym(x) położeniem
- Δt - czas w jakim nastąpiła ta zmiana

*Bardziej ogólnie: **pochodna drogi(położenia) po czasie***

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$$

gdzie $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ to funkcje opisujące zmianę położenia względem każdej z osi.

Definicja: Szybkość

Wielkość skalarna. Wartość wektora prędkości w danej chwili t . Czasami równa prędkości średniej.

Jeśli ciało znajdowało się w chwili t_0 w punkcie x_0 , a w chwili t w punkcie x to:

$$x - x_0 = v(t - t_0)$$

Stąd ($\Delta x := x - x_0$ oraz $\Delta t := t - t_0$):

$$v = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Z definicji prędkość jest wielkością wektorową więc warto zwracać uwagę w zadaniach na oznaczenia. W zadaniach gdzie wektor prędkości nie ma stałego kierunku

rozważa się składowe wektora prędkości dla uproszczenia zadania - na przykład przy rzucie ukośnym rozważa się składową pionową i poziomą prędkości.

Gdy wartość prędkości zmienia się w czasie nie możemy stosować powyższego wzoru - nabiera on wtedy sens *"Prędkości średniej"*. Korzystając z analizy matematycznej aby dokładnie opisać prędkość chwilową ciała należy dążyć ze zmianą czasu do 0. ($\Delta x \rightarrow 0$), a więc

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

A więc prędkość jest pierwszą pochodną położenia (drogi) po czasie.

Warto tutaj zwrócić uwagę, że prawdziwa też jest operacja odwrotna (*nie jest to do końca operacja poprawna stricte matematycznie lecz mająca sens fizyczny - w matematyce symbol pochodnej $\frac{df(x)}{dx}$ traktujemy jako jedność, w fizyce nic nie stoi na przeszkodzie aby traktować to jako ułamek*):

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \implies \quad dx = v dt \quad \implies \quad \int dx = \int v dt$$
$$x = \int v dt + C$$

Należy pamiętać o stałej całkowania C , interpretowanej zwykle jako x_0 - położenie początkowe. W większości wypadków stałą będziemy wyliczali z warunków początkowych zadania, np. $x(0) = 0$.

Definicja: Prędkość średnia

Oszacowana wartość prędkości na danym odcinku. Oznaczana \bar{v} . Prędkość średnią wyznaczamy poprzez wzór:

$$\bar{v} = \frac{S_c}{t_c}$$

gdzie:

- S_c - całkowity dystans przebyty w czasie t_c
- t_c - całkowity czas

Potocznie: **Cała droga przez cały czas**

Na przykład gdy interesuje nas prędkość średnia w przedziale $< t_0, t_k >$ możemy zastosować całkę oznaczoną by policzyć całkowitą drogę:

$$S_c = \int_{t_0}^{t_k} v dt$$

Średnia prędkość dana będzie wtedy wzorem:

$$\bar{v} = \frac{S_c}{t_k - t_0}$$

2.3 Przyspieszenie

Definicja: Przyspieszenie

Przyspieszenie to wielkość opisująca jak zmienia się prędkość ciała w czasie:

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t - t_0} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

gdzie:

- $\Delta \vec{v}$ - wektor będący różnicą pomiędzy nowym a starym wektorem prędkości
- Δt - czas w jakim nastąpiła ta zmiana

Bardziej ogólnie: **pochodna prędkości po czasie**

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k} = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt} \right)$$

gdzie $v_x(t)$, $v_y(t)$, $v_z(t)$ to funkcje opisujące prędkość względem każdej osi.

Ze względu na wektor przyspieszenia wyróżniamy rodzaje ruchu:

- $a = 0$ - **jednostajny**
- $\vec{a} = \text{const}^1$ - **jednostajnie** opóźniony ($a < 0$) lub przyspieszony ($a > 0$)
- $a \neq \text{const}$ - **niejednostajnie** opóźniony ($a < 0$) lub przyspieszony ($a > 0$)²

Warto pamiętać, że:

$$a = \frac{dv}{dt} \implies dv = a dt \implies \int dv = \int a dt$$
$$v = \int a dt + \mathbf{C}$$

gdzie \mathbf{C} zwykle oznacza prędkość początkową ruchu.

¹Warto zwrócić uwagę, że implikuje to stały kierunek i zwrot wektora przyspieszenia

²O wartości przyspieszenia mówimy w przedziale czasu

2.4 Ruch jednostajnie przyspieszony

Definicja: Ruch jednostajnie przyspieszony

Ruch w którym wektor przyspieszenia jest stały:

$$\vec{a} = \text{const}$$

Z ruchem **jednostajnie** przyspieszonym wiążą się pewne uogólnienia o których warto pamiętać. Wszystkie wynikają z ogólnych wzorów więc można je wyprowadzić.

Zależność prędkości od czasu możemy wyprowadzić korzystając z podstawowej zależności na przyspieszenie:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0} \stackrel{t_0=0}{=} \frac{v - v_0}{t} \implies at = v - v_0$$
$$v(t) = v_0 + at$$

Podobnie korzystając z zależności na prędkość średnią możemy wyprowadzić zależność na położenie:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0} \stackrel{t_0=0}{=} \frac{x - x_0}{t} \implies \bar{v}t = x - x_0$$
$$x(t) = x_0 + \bar{v}t$$

Liniowa zależność prędkości od czasu sprowadza średnią prędkość do średniej arytmetycznej:

$$\bar{v} = \frac{v + v_0}{2}$$

Łącząc trzy powyższe równania możemy wyprowadzić zależność na położenie od

czasu dla ruchu **jednostajnie zmiennego**:

$$x(t) = x_0 + v_0t + \frac{at^2}{2}$$

2.5 Ruch złożony

Jest to rodzaj ruchu gdzie przemieszczenie odbywa się równocześnie względem osi OX i OY . Układy takie opisuje się stosując zestawy równań skalarnych względem obu osi osobno.

Rozważmy np. ruch jednostajnie przyspieszony względem obu osi.

$$\vec{a} = \text{const}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$$

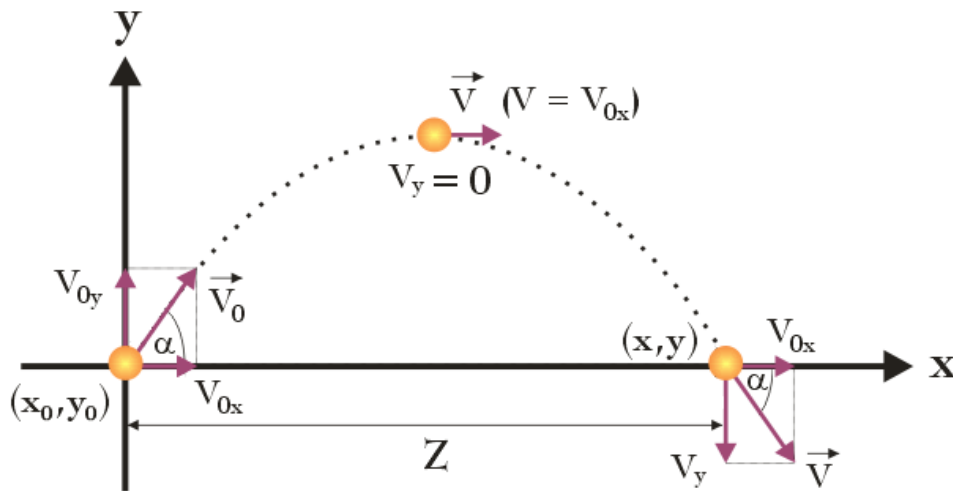
Znając wektor przyspieszenia jesteśmy w stanie stworzyć dwa zestawy **skalarnych** równań ruchu opisujące ruch wzdłuż prostopadłych do siebie osi.

| Równania wzdłuż osi OX | Równania wzdłuż osi OY |
|--|--|
| $a_x = \text{const}$ | $a_y = \text{const}$ |
| $v_x = v_{x0} + a_xt$ | $v_y = v_{y0} + a_yt$ |
| $x = x_0 + v_{x0}t + \frac{a_xt^2}{2}$ | $y = y_0 + v_{y0}t + \frac{a_yt^2}{2}$ |

Rzut ukośny

Najbardziej oczywistym przykładem ruchu złożonego jest rzut ukośny. Rozważmy ciało wyrzucane z poziomego podłoża pod kątem α do podłoża z prędkością styczną równą v_0 . Przyjmuję następujące oznaczenia:

- z odległość jaką przeleci ciało zanim uderzy w ziemię
- v_x pozioma składowa prędkości początkowej
- v_y pionowa składowa prędkości początkowej



Stosując podstawowe zależności trygonometryczne możemy rozłożyć wektor prędkości początkowej

$$v_{x0} = v_0 \cos(\alpha)$$

$$v_{y0} = v_0 \sin(\alpha)$$

Ponieważ ciało zostało rzucone swobodnie i zaniedbujemy opory ruchu w kierunku poziomym ciało porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym, a w kierunku pionowym jednostajnie opóźnionym (później przyspieszonym) wynikającym z siły grawitacji, **wektor przyspieszenia grawitacyjnego skierowany jest przeciwnie do wektora składowego prędkości początkowej w kierunku pionowym,**

więc g idzie ze znakiem $-$:

$$v_x = v_{x0} = v_0 \cos(\alpha)$$

$$v_y = v_{y0} - gt = v_0 \sin(\alpha) - gt$$

Teraz stosując twierdzenie pitagorasa możemy wyprowadzić zależność na prędkość **styczną do toru ruchu** od czasu:

$$v(t) = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)} = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 g t \sin(\alpha) + g^2 t^2}$$

Równania ruchu względem obu osi mają następującą postać:

$$x(t) = x_0 (= 0) + v_{x0} t = v_0 \cos(\alpha) t$$

$$y(t) = y_0 (= 0) + v_{y0} t - \frac{gt^2}{2} = v_0 \sin(\alpha) t - \frac{gt^2}{2}$$

Mając równania ruchu bardzo łatwo wyprowadzić zależność $y(x)$ pokazującą tor ruchu ciała:

$$x = v_0 \cos(\alpha) t \quad \implies \quad t = \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)}$$

Podstawiając do równania $y(t)$ otrzymujemy:

$$y(x) = v_0 \sin(\alpha) \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)} - \frac{g \left(\frac{x}{v_0 \cos(\alpha)} \right)^2}{2}$$

upraszczając:

$$y(x) = x \tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} x^2$$

Aby policzyć zasięg rzutu ukośnego potrzebujemy policzyć całkowity czas wznoszenia t_1 i opadania t_2 . Można zauważyć, że pomijając opory ruchu czasy te będą sobie równe, a więc:

$$v_y(t_1) = 0$$

$$v_0 \sin(\alpha) - gt_1 = 0$$

$$t_1 = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g}$$

$$t_c = t_1 + t_2 = 2t_1$$

$$t_c = \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g}$$

Skoro mamy czas po jakim czasie ciało uderzy o ziemię, zasięg rzutu będzie równy odległości jaką ciało przebędzie w kierunku poziomym:

$$z = x(t_c) = v_0 \cos(\alpha)t_c = v_0 \cos(\alpha) \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g} \implies z = \frac{2v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$$

2.6 Ruch po okręgu

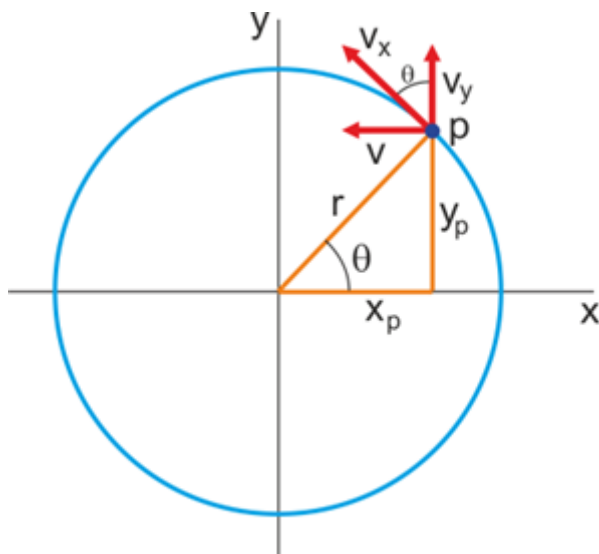
Definicja: Ruch po okręgu

Ruch w którym tor ruchu jest okrąg. Wektor prędkości v_s jest styczny do okręgu. Występuje przyspieszenie radialne/normalne prostopadłe do wektora prędkości - oznaczamy a_r - gdy mówimy dokładnie o okręgu przyspieszenie to można nazwać przyspieszeniem dośrodkowym, lecz nazwać radialne/normalne jest bardziej ogólne.

Aby wyprowadzić zależności opisujące ruch po okręgu rozważmy chwilę gdy ciało znajduje się w punkcie P . Przyjmuję następujące oznaczenia:

- x_P i y_P współrzędne x i y punktu P
- \vec{v} wektor prędkości stycznej do okręgu, v wartość wektora prędkości
- v_x i v_y pozioma i pionowa składowa wektora prędkości \vec{v}
- r promień okręgu po którym odbywa się ruch

- θ kąt pomiędzy osią OX a promieniem poprowadzonym między punktami $(0, 0)$ i P



Rysunek 1: Na rysunku pomyłono \vec{v}_x i \vec{v}

Zapisujemy równania zależności trygonometrycznych:

$$\sin \theta = \frac{y_P}{r} \quad \cos \theta = \frac{x_P}{r}$$

Rozkładamy prędkość styczną na składowe (składowa pozioma jest ujemna bo ciało porusza się "wstecz" osi OX):

$$\vec{v} = \hat{i}v_x + \hat{j}v_y = \hat{i}(-v \sin \theta) + \hat{j}(v \cos \theta)$$

$$\vec{v} = \hat{i} \left(-v \frac{y_P}{r} \right) + \hat{j} \left(v \frac{x_P}{r} \right)$$

Aby obliczyć przyspieszenie "dośrodkowe" wystarczy policzyć pochodną. v i r to stałe więc wystarczy policzyć pochodne $x_P(t)$ i $y_P(t)$.

$$\vec{a}_r = \frac{d\vec{v}}{dt} = \hat{i} \left(-\frac{v}{r} \frac{dy_P}{dt} \right) + \hat{j} \left(\frac{v}{r} \frac{dx_P}{dt} \right) = \hat{i} \left(-\frac{v}{r} v_y \right) + \hat{j} \left(\frac{v}{r} v_x \right)$$

Wstawiając wzory na prędkość otrzymujemy:

$$\vec{a}_r = \hat{i} \left(-\frac{v^2}{r} \cos \theta \right) + \hat{j} \left(\frac{v^2}{r} \sin \theta \right)$$

Wartość przyspieszenia otrzymujemy z tw. Pitagorasa:

$$a_r = \sqrt{\left(-\frac{v^2}{r} \cos \theta \right)^2 + \left(\frac{v^2}{r} \sin \theta \right)^2} = \sqrt{\frac{v^4}{r^2} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = \frac{v^2}{r}$$

Przyspieszenie radialne jest zwrócone prostopadle do toru ruchu czyli w tym wypadku do środka okręgu.

Prędkość styczną w ruchu po okręgu możemy wyrazić korzystając z okresu ruchu T . Jeśli pokonanie całego okręgu o długości $l = 2\pi r$ zajmuje ciało czas t_0 to czas ten nazywamy okresem i oznaczmy $T = t_0$ - oznacza to czas potrzeby na pokonanie jednego okręgu. Wtedy prędkość v możemy wyrazić wzorem:

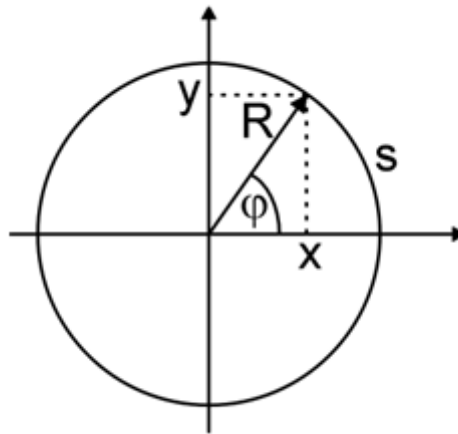
$$v = \frac{l}{T} = \frac{2\pi r}{T}$$

Korzystając z tego wzoru możemy wyrazić przyspieszenie dośrodkowe:

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(\frac{2\pi r}{T} \right)^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

Przy ruchu po okręgu/ruchu obrotowym pojawiają się wielkości skalarne opisujące stricte obrót. Są to wielkości **skalarne**. Na potrzeby przyjmę następujące oznaczenia:

- s - długość łuku jakie zatoczyło ciało
- x i y - pozycja ciała względem osi układu współrzędnych
- \vec{R} - wektor położenia względem środka układu współrzędnych, R jego wartość
- φ - kąt jaki zatoczyło ciało



Definicja: Droga kątowna

Jest to kąt jaki zatoczyło ciało. Jest to iloraz długości łuku przebytego przez ciało i promienia wodzącego. Wyrażamy w radianach.

$$\varphi = \frac{s(t)}{R}$$

Definicja: Prędkość kątowna

Jest to szybkość zmiany "kąta zatoczonego przez ciało". Analogicznie do zwykłej prędkości jest to iloraz drogi kątownej przebytej w czasie. Jednostka: $\frac{1}{s}$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{s(t)}{R} = \frac{v}{R}$$

Gdy prędkość styczna jest stała, szybkość kątowa wyraża się następująco:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Definicja: Przyspieszenie kątowne

Opisuje jak zmienia się prędkość kątowna w czasie. Analogicznie do przyspieszenia w ruchu postępowym(zwykłym) jest to pochodna z prędkości kątowej. Jednostka $\frac{1}{s^2}$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{v}{R} = \frac{a}{R}$$

Używając tych symboli możemy wyznaczyć wzory na podstawowe wielkości opisujące ruch po okręgu.

Dla stałej prędkości stycznej:

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \omega R$$

$$a_r = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = \omega^2 R$$

Uogólnienie:

Korzystając z poprzedniego rysunku równania ruchu wyglądają następująco:

$$x(t) = R \cos \varphi(t) \quad y(t) = R \sin \varphi(t) \quad \text{gdzie: } \varphi(t) = \frac{s(t)}{R}$$

Możemy policzyć równania prędkości:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -R \frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi = -R\omega \sin \varphi(t)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt} \cos \varphi = R\omega \cos \varphi(t)$$

Teraz przyspieszenie:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -R \frac{d\omega}{dt} \sin \varphi - R\omega \frac{d\varphi}{dt} \cos \varphi = -R\alpha \sin \varphi - R\omega^2 \cos \varphi$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} \cos \varphi - R\omega \frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi = R\alpha \cos \varphi - R\omega^2 \sin \varphi$$

Wstawiając równania prędkości i położenia:

$$a_x = -R\alpha \sin \varphi - R\omega^2 \cos \varphi = \frac{\alpha}{\omega}v_x - x\omega^2$$

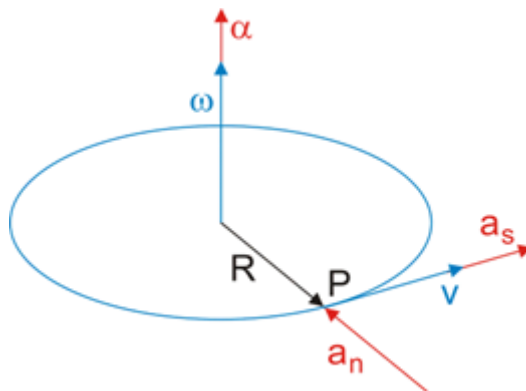
$$a_y = R\alpha \cos \varphi - R\omega^2 \sin \varphi = \frac{\alpha}{\omega}v_y - y\omega^2$$

Przechodząc do równania wektorowego:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \hat{i}a_x + \hat{j}a_y = \hat{i} \left(\frac{\alpha}{\omega}v_x - x\omega^2 \right) + \hat{j} \left(\frac{\alpha}{\omega}v_y - y\omega^2 \right) = \\ &= \frac{\alpha}{\omega} (\hat{i}v_x + \hat{j}v_y) - \omega^2 (\hat{i}x + \hat{j}y) \\ \vec{a} &= \frac{\alpha}{\omega} \vec{v} - \omega^2 \vec{R}\end{aligned}$$

W ten sposób wyprowadziliśmy wzór na wypadkowy wektor przyspieszenia w ruchu po okręgu.

$$\vec{a} = \vec{a}_s + \vec{a}_n = \frac{\alpha}{\omega} \vec{v} - \omega^2 \vec{R}$$



Na powyższym rysunku zaznaczono też "wektory" prędkości kątowej ω i przyspieszenia kątowego α lecz wciąż należy pamiętać, że nie są to właściwe wektory, a raczej zwyczajowe oznaczenie na rysunku w którą stronę się obracamy (z zasady prawej dłoni na podstawie wektora prędkości stycznej). **Są to wielkości skalarne.**

3 Dynamika

3.1 Wstęp

Dynamika to dział zajmujący się opisywaniem przyczyn ruchu. Istnieją 4 podstawowe oddziaływania z których wynikają wszystkie inne siły:

- **oddziaływanie grawitacyjne** - działa na dużą odległość i dotyczy mas ciał
- **oddziaływanie elektromagnetyczne** - działa na dużą odległość i dotyczy ładunków elektrycznych i prądu
- **oddziaływanie jądrowe słabe** - działa na małą odległość i dotyczy atomów
- **oddziaływania jądrowe silne** - działa na małą odległość i dotyczy cząstek jądrowych

Definicja: Masa

*Najprostszą definicją masy jest **ilość materii zawartej w ciele**. Jest to jedna z pierwszych definicji masy.*

*Newton definiował masę jako **miarę bezwładności ciała**. Ma to podłoże w drugiej zasadzie dynamiki gdzie masę definiujemy jako iloraz siły i przyspieszenia.*

$$m = \frac{F}{a}$$

Masę jakiegociał możemy też odnieść do masy "wzorcowej" korzystając z zasady zachowania pędu. Gdy rozpędzimy ciało o masie wzorcowej do prędkości v_0 i zderzymy z ciałem o masie m (tak żeby ciało m_0 pozostawało w spoczynku po zderzeniu)

to jeśli zmierzmy jego prędkość v to jego masa wyrażać się będzie wzorem:

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 \frac{v_0}{v}$$

Wyprowadza się go z zasady zachowania pędu (o tym poniżej). Skoro ciało o masie m_0 porusza się z prędkością v_0 to jego pęd p_0 wynosi $p_0 = mv_0$. Natomiast po zderzeniu ciało o nieznanej masie m uzyska prędkość v , a więc jego pęd wyniesie $p = mv$. Skoro mówimy o zderzeniu idealnie niesprężystym możemy przyrównać te pędy:

$$p = p_0$$

$$mv = m_0v_0$$

$$m = m_0 \frac{v_0}{v}$$

Definicja: Pęd

Pęd to iloczyn masy i prędkości.

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Definicja: Siła

Siłę definiujemy jako zmianę pędu w czasie.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

3.2 Zasady dynamiki Newtona

Definicja: Pierwsza zasada dynamiki - **Zasada bezwładności**

*Jeśli na ciało nie działa żadna siła lub siły działające równoważą się ($F_{wyp}^{\vec{}} = \vec{0}$). To ciało pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem **jednostajnym prostoliniowym**.*

Wynika z niej zasada zachowania pędu:

$$\sum \vec{F} = F_{wyp}^{\vec{}} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 & \Longrightarrow & \vec{p} = const \\ \Longrightarrow & m\vec{a} = 0 & \Longrightarrow & \vec{a} = 0 \end{cases}$$

Definicja: Druga zasada dynamiki

Druga zasada dynamiki wiąże siłę wypadkową sił działających na ciało z przyspieszeniem z jakim się porusza.

$$\sum \vec{F} = F_{wyp}^{\vec{}} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

gdzie:

- m - masa ciała, $m = const$
- \vec{a} - wektor przyspieszenia ciała

Lub podstawiając $d\vec{p} = m d\vec{v}$ możemy wyrazić ją w postaci pędowej:

$$F_{wyp}^{\vec{}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Definicja: Trzecia zasada dynamiki - **Zasada kontrakcji**

Gdy na ciało A oddziałuje na ciało B z siłą $F_{A \rightarrow B}$, to ciało B oddziałuje na ciało A siłą $F_{B \rightarrow A}$ o tej samej wartości i kierunku lecz przeciwnym zwrocie.

$$F_{A \rightarrow B} = -F_{B \rightarrow A}$$

Druga zasada dynamiki dla układu o zmiennej masie

Ogólna postać drugiej zasady dynamiki podana powyżej odnosi się tylko do układów w których masa pozostaje stała wraz z upływem czasu. Aby wyprowadzić wzór na drugą zasadę dynamiki dla układów o zmiennej masie korzystamy z postaci pędowej drugiej zasady dynamiki.

$$\vec{F}_{wyp} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Wektor pędu możemy wyrazić jako $\vec{p}(t) = m(t)\vec{v}(t)$. Podstawiając:

$$\vec{F}_{wyp} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

Jako, że zarówno masa jak i prędkość są funkcjami czasu to korzystamy z pochodnej iloczynu funkcji.

$$\vec{F}_{wyp} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt}$$

W ten sposób wyprowadziliśmy wzór na ogólniejszą postać drugiej zasady dynamiki. Warto zauważyć, że gdy $m = \text{const}$ to $\frac{dm}{dt} = 0$ co sprowadza to równanie do klasycznej wersji drugiej zasady dynamiki.

3.3 Zasady dynamiki dla ruchu obrotowego

Zasady dynamiki w powyższej formie są dobre dla ruchu postępowego, lecz nie zawsze dla ruchu obrotowego. Możemy wprowadzić ciało w ruch nawet w sytuacji gdy $F_{wyp} = 0$. Aby lepiej opisać ruch obrotowy względem jakiegoś punktu musimy zdefiniować nowe wielkości.

Definicja: Moment pędu

Odpowiednik pędu w ruchu obrotowym. Oznaczmy \vec{L} . Wyrażamy go w $\frac{kgm^2}{s}$. Definiujemy go jako:

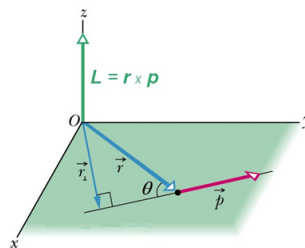
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

gdzie:

- \vec{L} - wektor momentu pędu prostopadły do płaszczyzny obrotu
- \vec{r} - wektor położenia względem osi obrotu
- \vec{p} - wektor pędu styczny do ruchu obrotowego

Zwrot \vec{L} możemy wyznaczyć korzystając z zasady prawej ręki. Skalarnie zapisany wzór ma następującą postać:

$$L = rp \sin(\vec{r}, \vec{p})$$



Definicja: Moment siły

Odpowiednik siły w ruchu obrotowym. Oznaczamy poprzez literkę \vec{M} lub $\vec{\tau}$. Wyrażamy go w Nm. Analogicznie do pędowej postaci drugiej zasady dynamiki moment siły możemy wyrazić jako iloraz zmiany momentu pędu i czasu w którym zaszła.

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

gdzie:

- $\tau_{wyp}^{\vec{}}$ - moment siły prostopadły do płaszczyzny obrotu
- \vec{L} - wektor momentu pędu prostopadły do płaszczyzny obrotu

Zwrot $\vec{\tau}$ możemy wyznaczyć korzystając z zasady prawej ręki na podstawie kierunku działania siły stycznej. Z powyższego wzoru wynika zależność wektorowa:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}_{wyp}$$

a skalarnie:

$$\tau = r F_{wyp} \sin(\vec{r}, \vec{F}_{wyp})$$

Aby wyprowadzić wektorową zależność z powyższej definicji wystarczy podstawić zależność na moment pędu.

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} \\ \vec{\tau} &= \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p})\end{aligned}$$

Teraz możemy skorzystać z pochodnej iloczynu funkcji (dla ludzi małej wiary https://en.wikipedia.org/wiki/Cross_product#Differentiation):

$$\vec{\tau} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Teraz łatwo zauważyć, że pozostałe pochodne możemy podmienić bo:

$$\begin{cases} \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \\ F_{wyp}^{\vec{}} = \frac{d\vec{p}}{dt} \end{cases} \implies \vec{\tau} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times F_{wyp}^{\vec{}}$$

Teraz wystarczy zauważyć, że:

$$\vec{p} = m\vec{v} \implies \vec{v} \parallel \vec{p} \implies \vec{v} \times \vec{p} = \vec{0}$$

A więc równanie na moment siły się upraszcza do postaci z definicji:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times F_{wyp}^{\vec{}}$$

Podobnie jak z drugiej zasady dynamiki możemy wyciągnąć wnioski o równowadze momentów pędu.

$$\tau_{wyp}^{\vec{}} = \vec{0} \implies \frac{d\vec{L}}{dt} \implies \vec{L} = \text{const}$$

Wniosek ten nazywamy **zasadą zachowania momentu pędu**.

Wniosek: Zasady dynamiki

Aby ciało było w równowadze suma sił zewnętrznych i momentów sił zewnętrznych musi być równa zero.

$$\vec{a} = \vec{0} \quad \wedge \quad \alpha = 0 \quad \iff \quad \sum \vec{F} = F_{wyp}^{\vec{}} = \vec{0} \quad \wedge \quad \sum \vec{\tau} = \tau_{wyp}^{\vec{}} = \vec{0}$$