

# Notatki z wykładów z Fizyki 1

Łukasz Kwinta

## Spis treści

<b>1</b>	<b>Wiadomości wstępne i wektory</b>	<b>2</b>
1.1	Suma wektorów .....	2
1.2	Iloczyn skalarny .....	3
1.3	Iloczyn wektorowy .....	3
<b>2</b>	<b>Podstawy kinematyki</b>	<b>4</b>
2.1	Podstawowe pojęcia .....	4
2.2	Prędkość .....	5
2.3	Przyspieszenie .....	9
2.4	Ruch jednostajnie przyspieszony .....	10
2.5	Ruch złożony .....	11
2.6	Ruch po okręgu .....	14
<b>3</b>	<b>Dynamika</b>	<b>20</b>
3.1	Wstęp .....	20
3.2	Zasady dynamiki Newtona .....	22
3.3	Zasady dynamiki dla ruchu obrotowego .....	26
3.4	Tarcie .....	28

# 1 Wiadomości wstępne i wektory

W całych notatkach mogą pojawić się poniżej zdefiniowane wektory - a dokładniej wersory rozpinające przestrzenie  $\mathbb{R}^2$  i  $\mathbb{R}^3$ :

$\mathbb{R}^2$ :

$$\hat{i} = (1, 0)$$

$$\hat{j} = (0, 1)$$

$\mathbb{R}^3$ :

$$\hat{i} = (1, 0, 0)$$

$$\hat{j} = (0, 1, 0)$$

$$\hat{k} = (0, 0, 1)$$

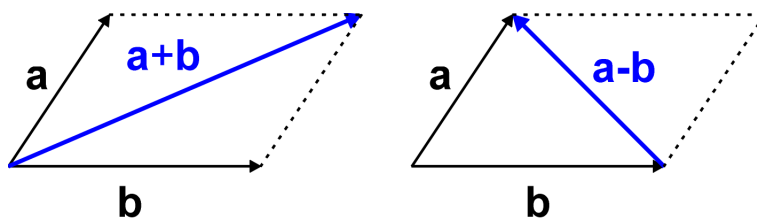
## 1.1 Suma wektorów

Niech:

$$\vec{a} := (a_1, a_2, a_3) \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

Wtedy suma wektorów ma następującą postać:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$



## 1.2 Iloczyn skalarny

Niech:

$$\vec{a} := (a_1, a_2, a_3) \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

Wtedy iloczyn skalarny oznaczamy  $\circ$  ma następującą postać:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Występuje również poniższa zależność:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

## 1.3 Iloczyn wektorowy

Niech:

$$\vec{a} := (a_1, a_2, a_3) \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

oraz:

$$\hat{i} := (1, 0, 0) \quad \hat{j} = (0, 1, 0) \quad \hat{k} = (0, 0, 1)$$

Wtedy, iloczyn wektorowy ma następującą postać:

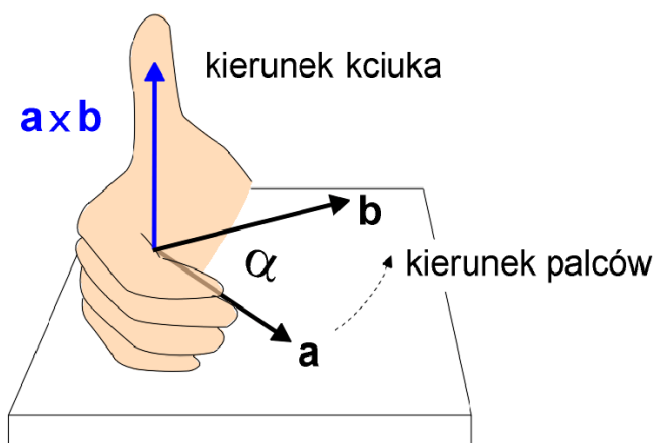
$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \hat{i}(a_2b_3 - a_3b_2) + \hat{j}(a_3b_1 - a_1b_3) + \hat{k}(a_1b_2 - a_2b_1) = \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \end{aligned}$$

Tak jak przy iloczynie skalarnym występuje zależność związana z kątem między wektorami:

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$$

Kierunek iloczynu wektorowego  $\vec{a} \times \vec{b}$  jest prostopadły do płaszczyzny stworzonej przez wektory  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ .

Natomiast zwrot tego wektora można określić stosując zasadę prawej dłoni:



## 2 Podstawy kinematyki

### 2.1 Podstawowe pojęcia

Definicja: Ruch

*Zmiana wzajemnego położenia ciał względem innych ciał wraz z upływem czasu.*

Definicja: Układ odniesienia

*Wybrane ciało lub ciało względem których wyznaczamy własności fizyczne takie jak położenie czy prędkość.*

Definicja: Punkt materialny

*Punktem materialnym nazywamy obiekt obdarzony masą, których rozmiar (aka objętość) można zaniedbać.*

Definicja: Przemieszczenie

*Zmiana położenia ciała względem jakiegoś układu odniesienia, zwykle punktu (0, 0) w układzie współrzędnych. Wektor przemieszczenia oznaczamy  $r$ . Występuje poniższa zależność:*

$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z = (x, y, z)$$

*gdzie:*

- $x$  - współrzędna  $x$  wektora przemieszczenia*
- $y$  - współrzędna  $y$  wektora przemieszczenia*
- $z$  - współrzędna  $z$  wektora przemieszczenia*

## 2.2 Prędkość

Definicja: Prędkość

*Prędkość to zmiana położenia w czasie:*

$$\vec{v} = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

*gdzie:*

- $\Delta \vec{r}$  - wektor przemieszczenia rozpięty pomiędzy poprzednim( $x_0$ ) a nowym( $x$ ) położeniem
- $\Delta t$  - czas w jakim nastąpiła ta zmiana

*Bardziej ogólnie: **pochodna drogi(położenia) po czasie***

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$$

*gdzie  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  to funkcje opisujące zmianę położenia względem każdej z osi.*

Definicja: Szybkość

*Wielkość skalarna. Wartość wektora prędkości w danej chwili  $t$ . Czasami równa prędkości średniej.*

Jeśli ciało znajdowało się w chwili  $t_0$  w punkcie  $x_0$ , a w chwili  $t$  w punkcie  $x$  to:

$$x - x_0 = v(t - t_0)$$

Stąd ( $\Delta x := x - x_0$  oraz  $\Delta t := t - t_0$ ):

$$v = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Z definicji prędkość jest wielkością wektorową więc warto zwracać uwagę w zadaniach na oznaczenia. W zadaniach gdzie wektor prędkości nie ma stałego kierunku

rozważa się składowe wektora prędkości dla uproszczenia zadania - na przykład przy rzucie ukośnym rozważa się składową pionową i poziomą prędkości.

Gdy wartość prędkości zmienia się w czasie nie możemy stosować powyższego wzoru - nabiera on wtedy sens *"Prędkości średniej"*. Korzystając z analizy matematycznej aby dokładnie opisać prędkość chwilową ciała należy dążyć ze zmianą czasu do 0. ( $\Delta x \rightarrow 0$ ), a więc

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

A więc prędkość jest pierwszą pochodną położenia (drogi) po czasie.

Warto tutaj zwrócić uwagę, że prawdziwa też jest operacja odwrotna (*nie jest to do końca operacja poprawna stricte matematycznie lecz mająca sens fizyczny - w matematyce symbol pochodnej  $\frac{df(x)}{dx}$  traktujemy jako jedność, w fizyce nic nie stoi na przeszkodzie aby traktować to jako ułamek*):

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \implies \quad dx = v dt \quad \implies \quad \int dx = \int v dt$$
$$x = \int v dt + C$$

Należy pamiętać o stałej całkowania  $C$ , interpretowanej zwykle jako  $x_0$  - położenie początkowe. W większości wypadków stałą będziemy wyliczali z warunków początkowych zadania, np.  $x(0) = 0$ .



Definicja: Prędkość średnia

Oszacowana wartość prędkości na danym odcinku. Oznaczana  $\bar{v}$ . Prędkość średnią wyznaczamy poprzez wzór:

$$\bar{v} = \frac{S_c}{t_c}$$

gdzie:

- $S_c$  - całkowity dystans przebyty w czasie  $t_c$
- $t_c$  - całkowity czas

Potocznie: **Cała droga przez cały czas**

Na przykład gdy interesuje nas prędkość średnia w przedziale  $< t_0, t_k >$  możemy zastosować całkę oznaczoną by policzyć całkowitą drogę:

$$S_c = \int_{t_0}^{t_k} v dt$$

Średnia prędkość dana będzie wtedy wzorem:

$$\bar{v} = \frac{S_c}{t_k - t_0}$$

## 2.3 Przyspieszenie

Definicja: Przyspieszenie

*Przyspieszenie to wielkość opisująca jak zmienia się prędkość ciała w czasie:*

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t - t_0} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

gdzie:

- $\Delta \vec{v}$  - wektor będący różnicą pomiędzy nowym a starym wektorem prędkości
- $\Delta t$  - czas w jakim nastąpiła ta zmiana

Bardziej ogólnie: **pochodna prędkości po czasie**

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k} = \left( \frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt} \right)$$

gdzie  $v_x(t)$ ,  $v_y(t)$ ,  $v_z(t)$  to funkcje opisujące prędkość względem każdej osi.

Ze względu na wektor przyspieszenia wyróżniamy rodzaje ruchu:

- $a = 0$  - **jednostajny**
- $\vec{a} = \text{const}^1$  - **jednostajnie** opóźniony ( $a < 0$ ) lub przyspieszony ( $a > 0$ )
- $a \neq \text{const}$  - **niejednostajnie** opóźniony ( $a < 0$ ) lub przyspieszony ( $a > 0$ )<sup>2</sup>

Warto pamiętać, że:

$$a = \frac{dv}{dt} \implies dv = a dt \implies \int dv = \int a dt$$
$$v = \int a dt + \mathbf{C}$$

gdzie  $\mathbf{C}$  zwykle oznacza prędkość początkową ruchu.

<sup>1</sup>Warto zwrócić uwagę, że implikuje to stały kierunek i zwrot wektora przyspieszenia

<sup>2</sup>O wartości przyspieszenia mówimy w przedziale czasu

## 2.4 Ruch jednostajnie przyspieszony

Definicja: Ruch jednostajnie przyspieszony

*Ruch w którym wektor przyspieszenia jest stały:*

$$\vec{a} = \text{const}$$

Z ruchem **jednostajnie** przyspieszonym wiążą się pewne uogólnienia o których warto pamiętać. Wszystkie wynikają z ogólnych wzorów więc można je wyprowadzić.

Zależność prędkości od czasu możemy wyprowadzić korzystając z podstawowej zależności na przyspieszenie:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0} \stackrel{t_0=0}{=} \frac{v - v_0}{t} \implies at = v - v_0$$
$$v(t) = v_0 + at$$

Podobnie korzystając z zależności na prędkość średnią możemy wyprowadzić zależność na położenie:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0} \stackrel{t_0=0}{=} \frac{x - x_0}{t} \implies \bar{v}t = x - x_0$$
$$x(t) = x_0 + \bar{v}t$$

Liniowa zależność prędkości od czasu sprowadza średnią prędkość do średniej arytmetycznej:

$$\bar{v} = \frac{v + v_0}{2}$$

Łącząc trzy powyższe równania możemy wyprowadzić zależność na położenie od

czasu dla ruchu **jednostajnie zmiennego**:

$$x(t) = x_0 + v_0t + \frac{at^2}{2}$$

## 2.5 Ruch złożony

Jest to rodzaj ruchu gdzie przemieszczenie odbywa się równocześnie względem osi  $OX$  i  $OY$ . Układy takie opisuje się stosując zestawy równań skalarnych względem obu osi osobno.

Rozważmy np. ruch jednostajnie przyspieszony względem obu osi.

$$\vec{a} = \text{const}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$$

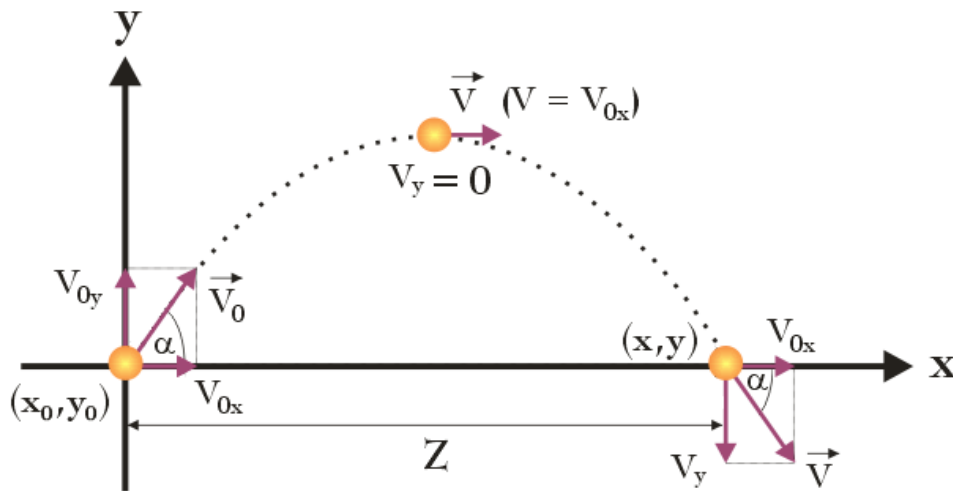
Znając wektor przyspieszenia jesteśmy w stanie stworzyć dwa zestawy **skalarnych** równań ruchu opisujące ruch wzdłuż prostopadłych do siebie osi.

Równania wzdłuż osi $OX$	Równania wzdłuż osi $OY$
$a_x = \text{const}$	$a_y = \text{const}$
$v_x = v_{x0} + a_x t$	$v_y = v_{y0} + a_y t$
$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{a_x t^2}{2}$	$y = y_0 + v_{y0}t + \frac{a_y t^2}{2}$

## Rzut ukośny

Najbardziej oczywistym przykładem ruchu złożonego jest rzut ukośny. Rozważmy ciało wyrzucane z poziomu podłoża pod kątem  $\alpha$  do podłoża z prędkością styczną równą  $v_0$ . Przyjmuję następujące oznaczenia:

- $z$  odległość jaką przeleci ciało zanim uderzy w ziemię
- $v_x$  pozioma składowa prędkości początkowej
- $v_y$  pionowa składowa prędkości początkowej



Stosując podstawowe zależności trygonometryczne możemy rozłożyć wektor prędkości początkowej

$$v_{x0} = v_0 \cos(\alpha)$$

$$v_{y0} = v_0 \sin(\alpha)$$

Ponieważ ciało zostało rzucone swobodnie i zaniedbujemy opory ruchu w kierunku poziomym ciało porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym, a w kierunku pionowym jednostajnie opóźnionym (później przyspieszonym) wynikającym z siły grawitacji, **wektor przyspieszenia grawitacyjnego skierowany jest przeciwnie do wektora składowego prędkości początkowej w kierunku pionowym,**

więc  $g$  idzie ze znakiem  $-$ :

$$v_x = v_{x0} = v_0 \cos(\alpha)$$

$$v_y = v_{y0} - gt = v_0 \sin(\alpha) - gt$$

Teraz stosując twierdzenie pitagorasa możemy wyprowadzić zależność na prędkość **styczną do toru ruchu** od czasu:

$$v(t) = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)} = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 g t \sin(\alpha) + g^2 t^2}$$

Równania ruchu względem obu osi mają następującą postać:

$$x(t) = x_0 (= 0) + v_{x0} t = v_0 \cos(\alpha) t$$

$$y(t) = y_0 (= 0) + v_{y0} t - \frac{gt^2}{2} = v_0 \sin(\alpha) t - \frac{gt^2}{2}$$

Mając równania ruchu bardzo łatwo wyprowadzić zależność  $y(x)$  pokazującą tor ruchu ciała:

$$x = v_0 \cos(\alpha) t \quad \implies \quad t = \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)}$$

Podstawiając do równania  $y(t)$  otrzymujemy:

$$y(x) = v_0 \sin(\alpha) \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)} - \frac{g \left( \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)} \right)^2}{2}$$

upraszczając:

$$y(x) = x \tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} x^2$$

Aby policzyć zasięg rzutu ukośnego potrzebujemy policzyć całkowity czas wznoszenia  $t_1$  i opadania  $t_2$ . Można zauważyć, że pomijając opory ruchu czasy te będą sobie równe, a więc:

$$v_y(t_1) = 0$$

$$v_0 \sin(\alpha) - gt_1 = 0$$

$$t_1 = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g}$$

$$t_c = t_1 + t_2 = 2t_1$$

$$t_c = \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g}$$

Skoro mamy czas po jakim czasie ciało uderzy o ziemię, zasięg rzutu będzie równy odległości jaką ciało przebędzie w kierunku poziomym:

$$z = x(t_c) = v_0 \cos(\alpha)t_c = v_0 \cos(\alpha) \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g} \implies z = \frac{2v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$$

## 2.6 Ruch po okręgu

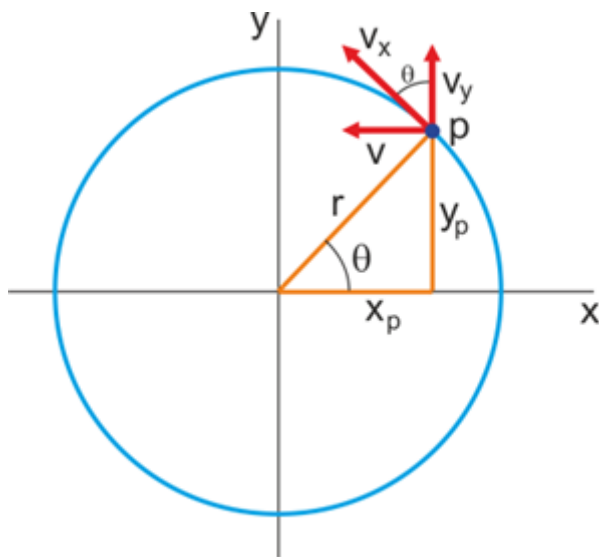
Definicja: Ruch po okręgu

*Ruch w którym tor ruchu jest okrąg. Wektor prędkości  $v_s$  jest styczny do okręgu. Występuje przyspieszenie radialne/normalne prostopadłe do wektora prędkości - oznaczamy  $a_r$  - gdy mówimy dokładnie o okręgu przyspieszenie to można nazwać przyspieszeniem dośrodkowym, lecz nazwać radialne/normalne jest bardziej ogólne.*

Aby wyprowadzić zależności opisujące ruch po okręgu rozważmy chwilę gdy ciało znajduje się w punkcie  $P$ . Przyjmuję następujące oznaczenia:

- $x_P$  i  $y_P$  współrzędne  $x$  i  $y$  punktu  $P$
- $\vec{v}$  wektor prędkości stycznej do okręgu,  $v$  wartość wektora prędkości
- $v_x$  i  $v_y$  pozioma i pionowa składowa wektora prędkości  $\vec{v}$
- $r$  promień okręgu po którym odbywa się ruch

- $\theta$  kąt pomiędzy osią  $OX$  a promieniem poprowadzonym między punktami  $(0, 0)$  i  $P$



Rysunek 1: Na rysunku pomyłono  $\vec{v}_x$  i  $\vec{v}$

Zapisujemy równania zależności trygonometrycznych:

$$\sin \theta = \frac{y_P}{r} \quad \cos \theta = \frac{x_P}{r}$$

Rozkładamy prędkość styczną na składowe (składowa pozioma jest ujemna bo ciało porusza się "wstecz" osi  $OX$ ):

$$\vec{v} = \hat{i}v_x + \hat{j}v_y = \hat{i}(-v \sin \theta) + \hat{j}(v \cos \theta)$$

$$\vec{v} = \hat{i} \left( -v \frac{y_P}{r} \right) + \hat{j} \left( v \frac{x_P}{r} \right)$$

Aby obliczyć przyspieszenie "dośrodkowe" wystarczy policzyć pochodną.  $v$  i  $r$  to stałe więc wystarczy policzyć pochodne  $x_P(t)$  i  $y_P(t)$ .

$$\vec{a}_r = \frac{d\vec{v}}{dt} = \hat{i} \left( -\frac{v}{r} \frac{dy_P}{dt} \right) + \hat{j} \left( \frac{v}{r} \frac{dx_P}{dt} \right) = \hat{i} \left( -\frac{v}{r} v_y \right) + \hat{j} \left( \frac{v}{r} v_x \right)$$



Wstawiając wzory na prędkość otrzymujemy:

$$\vec{a}_r = \hat{i} \left( -\frac{v^2}{r} \cos \theta \right) + \hat{j} \left( \frac{v^2}{r} \sin \theta \right)$$

Wartość przyspieszenia otrzymujemy z tw. Pitagorasa:

$$a_r = \sqrt{\left( -\frac{v^2}{r} \cos \theta \right)^2 + \left( \frac{v^2}{r} \sin \theta \right)^2} = \sqrt{\frac{v^4}{r^2} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = \frac{v^2}{r}$$

Przyspieszenie radialne jest zwrócone prostopadle do toru ruchu czyli w tym wypadku do środka okręgu.

Prędkość styczną w ruchu po okręgu możemy wyrazić korzystając z okresu ruchu  $T$ . Jeśli pokonanie całego okręgu o długości  $l = 2\pi r$  zajmuje ciało czas  $t_0$  to czas ten nazywamy okresem i oznaczmy  $T = t_0$  - oznacza to czas potrzeby na pokonanie jednego okręgu. Wtedy prędkość  $v$  możemy wyrazić wzorem:

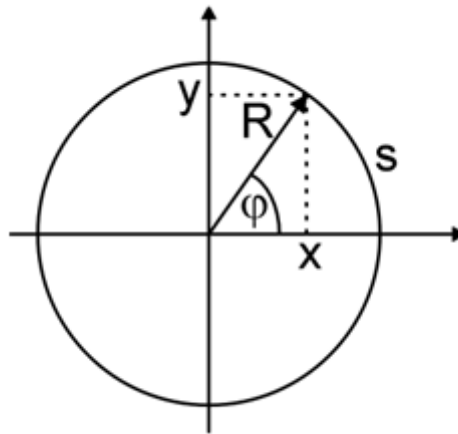
$$v = \frac{l}{T} = \frac{2\pi r}{T}$$

Korzystając z tego wzoru możemy wyrazić przyspieszenie dośrodkowe:

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{\left( \frac{2\pi r}{T} \right)^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

Przy ruchu po okręgu/ruchu obrotowym pojawiają się wielkości skalarne opisujące stricte obrót. Są to wielkości **skalarne**. Na potrzeby przyjmę następujące oznaczenia:

- $s$  - długość łuku jakie zatoczyło ciało
- $x$  i  $y$  - pozycja ciała względem osi układu współrzędnych
- $\vec{R}$  - wektor położenia względem środka układu współrzędnych,  $R$  jego wartość
- $\varphi$  - kąt jaki zatoczyło ciało



Definicja: Droga kątowna

*Jest to kąt jaki zatoczyło ciało. Jest to iloraz długości łuku przebytego przez ciało i promienia wodzącego. Wyrażamy w radianach.*

$$\varphi = \frac{s(t)}{R}$$

Definicja: Prędkość kątowna

*Jest to szybkość zmiany "kąta zatoczonego przez ciało". Analogicznie do zwykłej prędkości jest to iloraz drogi kątowej przebytej w czasie. Jednostka:  $\frac{1}{s}$*

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{s(t)}{R} = \frac{v}{R}$$

*Gdy prędkość styczna jest stała, szybkość kątowa wyraża się następująco:*

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Definicja: Przyspieszenie kątowne

*Opisuje jak zmienia się prędkość kątowna w czasie. Analogicznie do przyspieszenia w ruchu postępowym(zwykłym) jest to pochodna z prędkości kątowej. Jednostka  $\frac{1}{s^2}$*

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{v}{R} = \frac{a}{R}$$

Używając tych symboli możemy wyznaczyć wzory na podstawowe wielkości opisujące ruch po okręgu.

**Dla stałej prędkości stycznej:**

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \omega R$$

$$a_r = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = \omega^2 R$$

**Uogólnienie:**

Korzystając z poprzedniego rysunku równania ruchu wyglądają następująco:

$$x(t) = R \cos \varphi(t) \quad y(t) = R \sin \varphi(t) \quad \text{gdzie: } \varphi(t) = \frac{s(t)}{R}$$

Możemy policzyć równania prędkości:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -R \frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi = -R\omega \sin \varphi(t)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt} \cos \varphi = R\omega \cos \varphi(t)$$

Teraz przyspieszenie:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -R \frac{d\omega}{dt} \sin \varphi - R\omega \frac{d\varphi}{dt} \cos \varphi = -R\alpha \sin \varphi - R\omega^2 \cos \varphi$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} \cos \varphi - R\omega \frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi = R\alpha \cos \varphi - R\omega^2 \sin \varphi$$

Wstawiając równania prędkości i położenia:

$$a_x = -R\alpha \sin \varphi - R\omega^2 \cos \varphi = \frac{\alpha}{\omega}v_x - x\omega^2$$

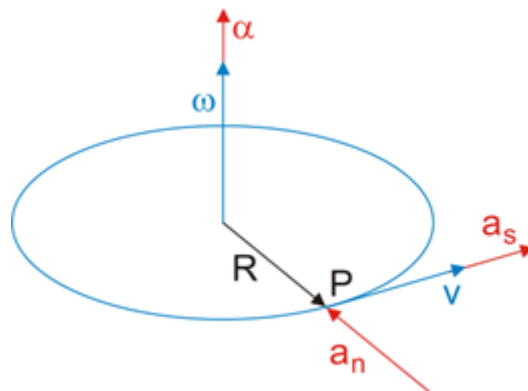
$$a_y = R\alpha \cos \varphi - R\omega^2 \sin \varphi = \frac{\alpha}{\omega}v_y - y\omega^2$$

Przechodząc do równania wektorowego:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \hat{i}a_x + \hat{j}a_y = \hat{i} \left( \frac{\alpha}{\omega}v_x - x\omega^2 \right) + \hat{j} \left( \frac{\alpha}{\omega}v_y - y\omega^2 \right) = \\ &= \frac{\alpha}{\omega} (\hat{i}v_x + \hat{j}v_y) - \omega^2 (\hat{i}x + \hat{j}y) \\ \vec{a} &= \frac{\alpha}{\omega} \vec{v} - \omega^2 \vec{R}\end{aligned}$$

W ten sposób wyprowadziliśmy wzór na wypadkowy wektor przyspieszenia w ruchu po okręgu.

$$\vec{a} = \vec{a}_s + \vec{a}_n = \frac{\alpha}{\omega} \vec{v} - \omega^2 \vec{R}$$



Na powyższym rysunku zaznaczono też "wektory" prędkości kątowej  $\omega$  i przyspieszenia kątowego  $\alpha$  lecz wciąż należy pamiętać, że nie są to właściwe wektory, a raczej zwyczajowe oznaczenie na rysunku w którą stronę się obracamy (z zasady prawej dłoni na podstawie wektora prędkości stycznej). **Są to wielkości skalarne.**

## 3 Dynamika

### 3.1 Wstęp

Dynamika to dział zajmujący się opisywaniem przyczyn ruchu. Istnieją 4 podstawowe oddziaływania z których wynikają wszystkie inne siły:

- **oddziaływanie grawitacyjne** - działa na dużą odległość i dotyczy mas ciał
- **oddziaływanie elektromagnetyczne** - działa na dużą odległość i dotyczy ładunków elektrycznych i prądu
- **oddziaływanie jądrowe słabe** - działa na małą odległość i dotyczy atomów
- **oddziaływania jądrowe silne** - działa na małą odległość i dotyczy cząstek jądrowych

Definicja: Masa

*Najprostszą definicją masy jest **ilość materii zawartej w ciele**. Jest to jedna z pierwszych definicji masy.*

*Newton definiował masę jako **miarę bezwładności ciała**. Ma to podłoże w drugiej zasadzie dynamiki gdzie masę definiujemy jako iloraz siły i przyspieszenia.*

$$m = \frac{F}{a}$$

Masę jakiegocześcia możemy też odnieść do masy "wzorcowej" korzystając z zasady zachowania pędu. Gdy rozpędzimy ciało o masie wzorcowej do prędkości  $v_0$  i zderzymy z ciałem o masie  $m$  (tak żeby ciało  $m_0$  pozostawało w spoczynku po zderzeniu)

to jeśli zmierzmy jego prędkość  $v$  to jego masa wyrażać się będzie wzorem:

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 \frac{v_0}{v}$$

Wyprowadza się go z zasady zachowania pędu (o tym poniżej). Skoro ciało o masie  $m_0$  porusza się z prędkością  $v_0$  to jego pęd  $p_0$  wynosi  $p_0 = mv_0$ . Natomiast po zderzeniu ciało o nieznannej masie  $m$  uzyska prędkość  $v$ , a więc jego pęd wyniesie  $p = mv$ . Skoro mówimy o zderzeniu idealnie niesprężystym możemy przyrównać te pędy:

$$p = p_0$$

$$mv = m_0v_0$$

$$m = m_0 \frac{v_0}{v}$$

Definicja: Pęd

*Pęd to iloczyn masy i prędkości.*

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Definicja: Siła

*Siłę definiujemy jako zmianę pędu w czasie.*

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

## 3.2 Zasady dynamiki Newtona

Definicja: Pierwsza zasada dynamiki - **Zasada bezwładności**

*Jeśli na ciało nie działa żadna siła lub siły działające równoważą się ( $F_{wyp}^{\vec{}} = \vec{0}$ ). To ciało pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem **jednostajnym prostoliniowym**.*

Wynika z niej **zasada zachowania pędu**:

$$\sum \vec{F} = F_{wyp}^{\vec{}} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 & \Longrightarrow & \vec{p} = const \\ \Longrightarrow & m\vec{a} = 0 & \Longrightarrow & \vec{a} = 0 \end{cases}$$

Definicja: Druga zasada dynamiki

*Druga zasada dynamiki wiąże siłę wypadkową sił działających na ciało z przyspieszeniem z jakim się porusza.*

$$\sum \vec{F} = F_{wyp}^{\vec{}} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

gdzie:

- $m$  - masa ciała,  $m = const$
- $\vec{a}$  - wektor przyspieszenia ciała

Lub podstawiając  $d\vec{p} = m d\vec{v}$  możemy wyrazić ją w postaci pędowej:

$$F_{wyp}^{\vec{}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Definicja: Trzecia zasada dynamiki - **Zasada kontrakcji**

*Gdy na ciało A oddziałuje na ciało B z siłą  $F_{A \rightarrow B}$ , to ciało B oddziałuje na ciało A siłą  $F_{B \rightarrow A}$  o tej samej wartości i kierunku lecz przeciwnym zwrocie.*

$$F_{A \rightarrow B} = -F_{B \rightarrow A}$$

## Druga zasada dynamiki dla układu o zmiennej masie

Ogólna postać drugiej zasady dynamiki podana powyżej odnosi się tylko do układów w których masa pozostaje stała wraz z upływem czasu. Aby wyprowadzić wzór na drugą zasadę dynamiki dla układów o zmiennej masie korzystamy z postaci pędowej drugiej zasady dynamiki.

$$\vec{F}_{wyp} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Wektor pędu możemy wyrazić jako  $\vec{p}(t) = m(t)\vec{v}(t)$ . Podstawiając:

$$\vec{F}_{wyp} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

Jako, że zarówno masa jak i prędkość są funkcjami czasu to korzystamy z pochodnej iloczynu funkcji.

$$\vec{F}_{wyp} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt}$$

W ten sposób wyprowadziliśmy wzór na ogólniejszą postać drugiej zasady dynamiki. Warto zauważyć, że gdy  $m = \text{const}$  to  $\frac{dm}{dt} = 0$  co sprowadza to równanie do klasycznej wersji drugiej zasady dynamiki.



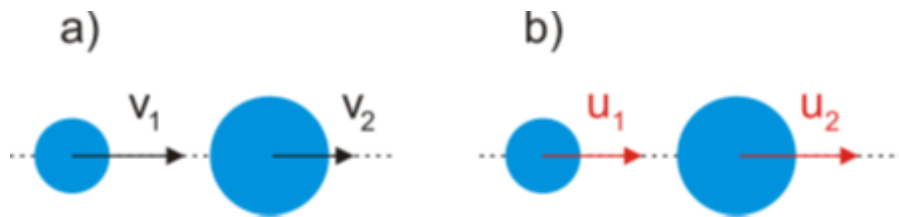
## Zderzenia

Jednym z ważniejszych zastosowań **zasady zachowania pędu** jest wyliczanie zachowania ciał podczas zderzenia. Nie możemy zmierzyć ani ustalić sił w czasie samego zderzenia ale korzystając z **zasady zachowania pędu** i **zasady zachowania energii całkowitej** jesteśmy w stanie policzyć zachowanie się ciała po zderzeniu.

Wyróżniamy rodzaje zderzeń:

- **sprężyste (elastyczne)** - całkowicie zachowana zostaje energia kinetyczna układu
- **niesprężyste (nieelastyczne)** - działa tylko zasada zachowania pędu, część energii zostaje rozproszona
- **całkowicie niesprężyste (nieelastyczne)** - działa tylko zasada zachowania pędu ale po zderzeniu oba ciała poruszają się **"zlepione"** w jedno, np. *pocisk trafił kulkę i w niej utknął i nadał prędkość.*

Przykład obliczeń dla zderzenia **idealnie sprężystego** w przestrzeni 1D.



Zapisujemy pęd i energię każdego ciała przed zderzeniem i po zderzeniu:

$$\begin{array}{cccc} p_1 = m_1 v_1 & p_2 = m_2 v_2 & p'_1 = m_1 u_1 & p'_2 = m_2 u_2 \\ E_{k1} = \frac{m_1 v_1^2}{2} & E_{k2} = \frac{m_2 v_2^2}{2} & E'_{k1} = \frac{m_1 u_1^2}{2} & E'_{k2} = \frac{m_2 u_2^2}{2} \end{array}$$

Z zasady zachowania pędu:

$$p_c = p'_c$$

$$p_1 + p_2 = p'_1 + p_2$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

Z zasady zachowania energii:

$$E_c = E'_c$$

$$E_{k1} + E_{k2} = E'_{k1} + E'_{k2}$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}$$

Zestawiając w układ równań:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2 \\ E_{k1} + E_{k2} = E'_{k1} + E'_{k2} \end{cases} \implies \begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \\ \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} \end{cases}$$

Rozwiązując układ równań ze względu na  $u_1$  i  $u_2$  otrzymujemy:

$$u_1 = \left( \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_1 + \left( \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) v_2$$

$$u_2 = \left( \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_1 + \left( \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) v_2$$

Szczególne przypadki tych równań:

- zderzenie identycznych ciał -  $m_1 = m_2 = m \implies u_1 = v_1 \wedge u_2 = v_1$
- zderzenie lekkiego ciała z ciężkim nieruchomym -  $m_1 \gg m_2 \wedge v_2 = 0$   
 $\implies u_1 = -v_1 \wedge u_2 = 0$
- zderzenie ciężkiego ciała z lekkim nieruchomym -  $m_1 \ll m_2 \wedge v_2 = 0$   
 $\implies u_1 = v_1 \wedge u_2 = 2v_1$

### 3.3 Zasady dynamiki dla ruchu obrotowego

Zasady dynamiki w powyższej formie są dobre dla ruchu postępowego, lecz nie zawsze dla ruchu obrotowego. Możemy wprowadzić ciało w ruch nawet w sytuacji gdy  $F_{wyp} = 0$ . Aby lepiej opisać ruch obrotowy względem jakiegoś punktu musimy zdefiniować nowe wielkości.

Definicja: Moment pędu

Odpowiednik pędu w ruchu obrotowym. Oznaczmy  $\vec{L}$ . Wyrażamy go w  $\frac{kgm^2}{s}$ . Definiujemy go jako:

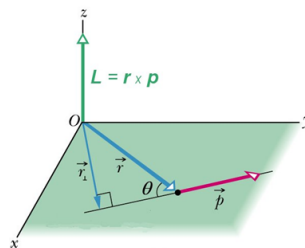
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

gdzie:

- $\vec{L}$  - wektor momentu pędu prostopadły do płaszczyzny obrotu
- $\vec{r}$  - wektor położenia względem osi obrotu
- $\vec{p}$  - wektor pędu styczny do ruchu obrotowego

Zwrot  $\vec{L}$  możemy wyznaczyć korzystając z zasady prawej ręki. Skalarnie zapisany wzór ma następującą postać:

$$L = rp \sin(\vec{r}, \vec{p})$$



### Definicja: Moment siły

Odpowiednik siły w ruchu obrotowym. Oznaczamy poprzez literkę  $\vec{M}$  lub  $\vec{\tau}$ . Wyrażamy go w Nm. Analogicznie do pędowej postaci drugiej zasady dynamiki moment siły możemy wyrazić jako iloraz zmiany momentu pędu i czasu w którym zaszła.

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

gdzie:

- $\tau_{wyp}^{\vec{}}$  - moment siły prostopadły do płaszczyzny obrotu
- $\vec{L}$  - wektor momentu pędu prostopadły do płaszczyzny obrotu

Zwrot  $\vec{\tau}$  możemy wyznaczyć korzystając z zasady prawej ręki na podstawie kierunku działania siły stycznej. Z powyższego wzoru wynika zależność wektorowa:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}_{wyp}$$

a skalarnie:

$$\tau = r F_{wyp} \sin(\vec{r}, \vec{F}_{wyp})$$

Aby wyprowadzić wektorową zależność z powyższej definicji wystarczy podstawić zależność na moment pędu.

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} \\ \vec{\tau} &= \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p})\end{aligned}$$

Teraz możemy skorzystać z pochodnej iloczynu funkcji (dla ludzi małej wiary [https://en.wikipedia.org/wiki/Cross\\_product#Differentiation](https://en.wikipedia.org/wiki/Cross_product#Differentiation)):

$$\vec{\tau} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Teraz łatwo zauważyć, że pozostałe pochodne możemy podmienić bo:

$$\begin{cases} \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \\ F_{wyp}^{\vec{}} = \frac{d\vec{p}}{dt} \end{cases} \implies \vec{\tau} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times F_{wyp}^{\vec{}}$$

Teraz wystarczy zauważyć, że:

$$\vec{p} = m\vec{v} \implies \vec{v} \parallel \vec{p} \implies \vec{v} \times \vec{p} = \vec{0}$$

A więc równanie na moment siły się upraszcza do postaci z definicji:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times F_{wyp}^{\vec{}}$$

Podobnie jak z drugiej zasady dynamiki możemy wyciągnąć wnioski o równowadze momentów pędu.

$$\tau_{wyp}^{\vec{}} = \vec{0} \implies \frac{d\vec{L}}{dt} \implies \vec{L} = \text{const}$$

Wniosek ten nazywamy **zasadą zachowania momentu pędu**.

Wniosek: Zasady dynamiki

*Aby ciało było w równowadze suma sił zewnętrznych i momentów sił zewnętrznych musi być równa zero.*

$$\vec{a} = \vec{0} \quad \wedge \quad \alpha = 0 \quad \iff \quad \sum \vec{F} = F_{wyp}^{\vec{}} = \vec{0} \quad \wedge \quad \sum \vec{\tau} = \tau_{wyp}^{\vec{}} = \vec{0}$$

### 3.4 Tarcie

Definicja: Tarcie statyczne

*Tarcie statyczne to siła działająca na styku dwóch ciał. Wynika z **3 zasady dynamiki Newtona**. Działa gdy działamy siłą na ciało i próbujemy je poruszyć ale jeszcze się nie poruszamy.*

*Szczególny przypadek to pojazd toczący się na kołach bez poślizgu - na styku koła i powierzchni ruchu  $v_w = 0$ , więc działa tarcie statyczne.*

*Maksymalną siłę tarcia statyczne  $T_s$  możemy zdefiniować następująco:*

$$T_s = F_N \mu_s$$

*gdzie:*

- $F_N$  - siła nacisku*
- $\mu_s$  - współczynnik tarcia statycznego*

*$T_s$  nie zależy w przybliżeniu od powierzchni styku ciał*

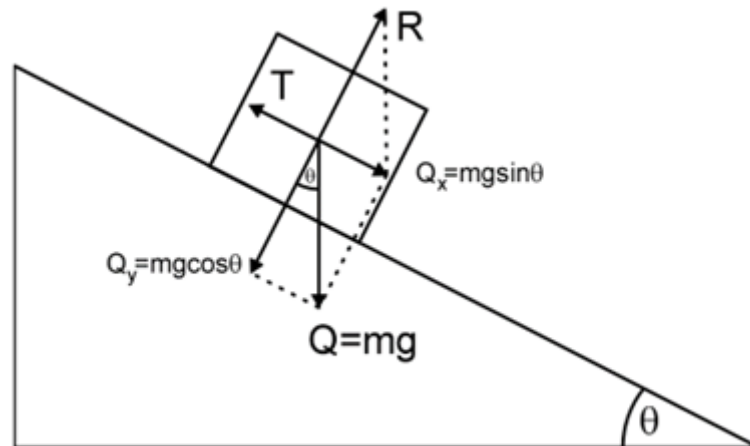
*$T_s$  jest proporcjonalna do siły nacisku na podłoże*

**Wyznaczanie współczynnika tarcia statycznego**

Zdefiniowany powyżej wzór na tarcie statyczne definiuje minimalną siłę potrzebną na wpawienie ciała w ruch. Nie jesteśmy w stanie w ładny sposób określić siły tarcia statycznego w każdym momencie. Jednym ze sposobów wyznaczenia współczynnika tarcia statycznego jest umieszczenia ciała o masie  $m$  na równi pochyłej ze zmiennym kątem nachylenia  $\theta$ . Oznaczam:

- $Q$  - siła ciężkości działająca na ciało*
- $Q_x$  - składowa siły ciężkości równoległa do powierzchni równi*

- $Q_y$  - składowa siły ciężkości prostopadła do powierzchni równi
- $T$  - wartość siły tarcia
- $R$  - siła reakcji do siły nacisku na równię



Teraz musimy zauważyć, że dopóki:

$$T \neq T_{max} = F_N \mu_s$$

ciało pozostanie w spoczynku, więc zachodzi równość:

$$T = Q_x$$

$$T(\theta) = mg \sin \theta$$

Jeśli oznaczymy minimalny kąt nachylenia przy którym ciało zaczyna się zsuwać jako  $\theta_{max}$  (max bo jest to też największy możliwy kąt przy którym ciało nie będzie się zsuwać bo wszystkie siły się równoważą), to otrzymujemy zależność:

$$T = Q_x = T_{max} = F_N \mu_s = Q_y \mu_s$$

$$Q_y \mu_s = mg \sin \theta_{max}$$

$$mg \cos \theta_{max} \mu_s = mg \sin \theta_{max}$$

$$\mu_s = \frac{\sin \theta_{max}}{\cos \theta_{max}} = \tan \theta_{max}$$

Definicja: Tarcie kinetyczne

*Jest to siła działająca na styku ciał gdy ciała poruszają się względem siebie. Siłę tarcia kinetycznego  $T_k$  można zdefiniować następująco:*

$$T_k = F_N \mu_k$$

gdzie:

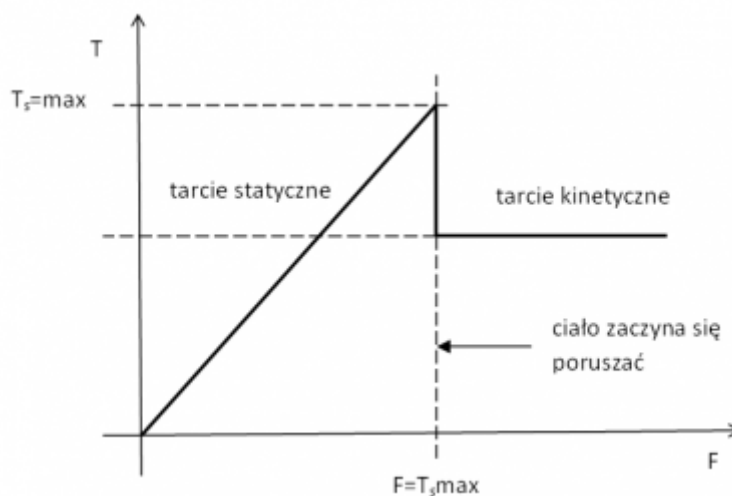
- $F_N$  - siła nacisku ciała na powierzchnię
- $\mu_k$  - współczynnik tarcia kinetycznego

***W przybliżeniu siła tarcia kinetycznego nie zależy od prędkości ruchu.***

Jedną z ważniejszych własności tarcia jest to, że dla większości materiałów:

$$\mu_k \leq \mu_s$$

Objawia się to tym, że w istocie siła potrzebna do poruszenia ciała jest większa niż siła tarcia działająca na ciało gdy już zacznie się poruszać.





Na powyższym wykresie widać zależność, że gdy siła którą działamy na ciało zrówna się z maksymalną siłą tarcia statycznego ciało zaczyna się poruszać i występuje tarcie kinetyczne o mniejszej sile.