2CV4

10

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL, ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO
2ª Evaluación de MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA LA INGENIERÍA
Nombre del alumno(a): Hernández Castellanos César Uriel 16/10/2017.

RESOLVER SOLO 3 PROBLEMAS.

NO SE PERMITE NINGUN TIPO DE FORMULARIO NI CALCULADORA.

1(I).- Para la función $w = \dfrac{z}{(z-1)(z-2)}$ escriba dos desarrollos en series de potencias; uno de Taylor y otro de Laurent, indicando la región de validez en cada desarrollo:

1(D).- Dada la función $f(z) = \dfrac{1}{(z-2i)(z-4)}$

a) Escriba un desarrollo en serie de potencias en la región $4 < |z|$.

b) Escriba un desarrollo en serie de Taylor alrededor de un punto donde la función sea analítica, indicando el dominio de validez de dicho desarrollo.

2(I).- Resolver una, dije **una** de las siguientes integrales,

i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)(x^2+\beta^2)}$; $\alpha > \beta > 0$ y ii) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{\cos(\theta)}{1+\frac{1}{4}\cos(\theta)} d\theta$,

2(D).- Resolver solo **una** de las siguientes integrales,

i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x sen(ax)}{x^2+k^2} dx$; $a > 0$ & $k > 0$ y ii) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{sen(\theta)}{4+sen(\theta)} d\theta$,

3.- Calcule la siguiente integral,

I) $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{sen(\pi z)}{(z-i)^6} dz$ D) $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{\cos(\pi z)}{(z-i)^7} dz$

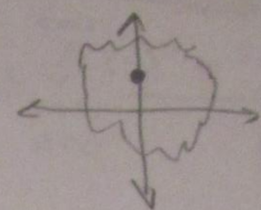
Siendo γ cualquier contorno cerrado que encierre a la singularidad.

NO USAR LA FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY, APLIQUE EL TEOREMA DEL RESIDUO, CALCULANDO EL RESIDUO HACIENDO EL DESARROLLO EN SERIES LAURENT RESPECTIVO.

4(I&D).- i) Encuentre las series de potencia de $f(z) = \dfrac{5z-2}{z(z-1)}$ alrededor de $z_0 = 0$ y $z_0 = 1$ indicando los dominios en cada desarrollo.

ii) Calcule la siguiente integral $\displaystyle\int_C \frac{5z-2}{z(z-1)} dz$, donde el contorno C, es cualquier contorno que encierra los polos de la función. Obsérvese que el resultado es inmediato si identifica los residuos de los desarrollos en series de potencia en el inciso i).

$$\int_{\gamma} \frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{(z-i)^6}\, dz = 2\pi i \left[\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) \right]$$



Si $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen}(\pi z)}{(z-i)^6} = \dfrac{1}{(z-i)^6} \cdot \operatorname{sen}(\pi z) \cdot \dfrac{1}{(z-i)^6}\ h_1(z)$

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^6} \operatorname{sen}(\pi(z+i-i)) = \frac{1}{(z-i)^6} \operatorname{sen}\left(\pi\left((z-i)+i\right)\right)$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^6} \operatorname{sen}\left(\pi(z-i) + i\pi\right)$$

Recordemos la siguiente identidad

$\operatorname{sen}(A \pm B) = \operatorname{sen}(A)\cos(B) \pm \operatorname{sen}(B)\cos(A)$, siendo $A = \pi(z-i)$ y $B = \pi i$

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^6}\left[\operatorname{sen}(\pi(z-i))\cos(\pi i) + \operatorname{sen}(\pi i)\cos(\pi(z-i))\right]$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^6}\left[\cos(\pi i)\operatorname{sen}(\pi(z-i)) + \operatorname{sen}(\pi i)\cos(\pi(z-i))\right]$$

Recordemos que

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\alpha)^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad ; \quad \cos(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\alpha)^{2n}}{(2n)!}$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^6}\left[\cos(\pi i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\pi(z-i))^{2n+1}}{(2n+1)!} + \operatorname{sen}(\pi i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\pi(z-i))^{2n}}{(2n)!}\right]$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^6}\left[\cos(\pi i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1} (z-i)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \operatorname{sen}(\pi i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n} (z-i)^{2n}}{(2n)!}\right]$$

$$(z) = \left[\cos(\pi i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1} (z-i)^{2n-5}}{(2n+1)!} + \text{sen}(\pi i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n} (z-i)^{2n-6}}{(2n)!} \right]$$

$$\int_\gamma \frac{\text{sen}(\pi z)}{(z-i)^6}\, dz = 2\pi i \left[\cos(\pi i) \left[\frac{(-1)^2 \pi^{2(2)+1}}{5!} \right] \right]$$

$$\int_\gamma \frac{\text{sen}(\pi z)}{(z-i)^6}\, dz = 2\pi i \left[\cos(\pi i) \frac{\pi^5}{5!} \right]$$

$$\int_\gamma \frac{\text{sen}(\pi z)}{(z-i)^6}\, dz = \frac{2 \cos(\pi i) \pi^6 i}{5!} = \frac{\cancel{2} \pi^6 \cos(\pi i)\, i}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}$$

$$\int_\gamma \frac{\text{sen}(\pi z)}{(z-i)^6}\, dz = \frac{\pi^6 \cos(\pi i)\, i}{60}$$

Probaremos nuestro resultado por la F.I.C

$$\int_{\gamma} \frac{sen(\pi z)}{(z-i)^6}\, dz = \int_{\gamma} \frac{sen(\pi z)}{(z-i)^{5+1}}\, dz = \frac{2\pi i}{5!} \left.\frac{d^5}{dz^5} sen(\pi z)\right|_{z=i}$$

$f(z) = sen(\pi z)$

$f'(z) = cos(\pi z) \cdot \pi$

$f''(z) = -sen(\pi z)\pi^2$

$f^3(z) = -cos(\pi z)\pi 3$

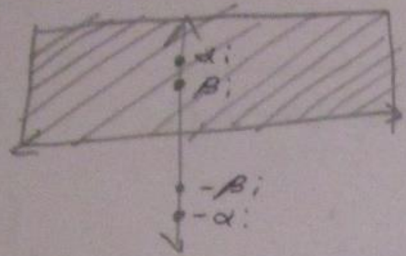
$f^4(z) = sen(\pi z)\pi^4$

$f^5(z) = cos(\pi z)\pi^5$

$$\int_{\gamma} \frac{sen(\pi z)}{(z-i)^6}\, dz = \frac{2\pi i}{5!} \left.\left[cos(\pi z)\pi^5\right]\right|_{z=i}$$

$$= \frac{2\pi i}{5!}\left[cos(\pi i)\pi^5\right] = \frac{\cancel{2}\pi^6 cos(\pi i)\, i}{5\cdot 4\cdot 3\cdot \cancel{2}} = \frac{\pi^6 cos(\pi i)\, i}{60}$$

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+\alpha^2)(x^2+\beta^2)}=\int_{SPS}\frac{dz}{(z^2+\alpha^2)(z^2+\beta^2)}=\int_{SPS}\frac{dz}{(z+\alpha i)(z-\alpha i)(z+\beta i)(z-\beta i)}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+\alpha^2)(x^2+\beta^2)}=2\pi i\left[\operatorname*{Res}_{z=\alpha i} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=\beta i} f(z)\right]$$

Usando la sig fórmula
$$\operatorname*{Res}_{z=z_n} f(z)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_n}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-z_n)\,f(z)$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\alpha i} f(z)=\lim_{z\to\alpha i}\cancel{(z-\alpha i)}\cdot\frac{1}{\cancel{(z-\alpha i)}(z+\alpha i)(z+\beta i)(z-\beta i)}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\alpha i} f(z)=\frac{1}{2\alpha i(\alpha+\beta)i(\alpha-\beta)i}=\frac{1}{2\alpha(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)i^3}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\alpha i} f(z)=-\frac{1}{2\alpha(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)i}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\beta i} f(z) = \lim_{z \to \beta i} \cancel{(z-\beta i)} \cdot \frac{1}{(z-\alpha i)(z+\alpha i)(z+\beta i)\cancel{(z-\beta i)}}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\beta i} f(z) = \frac{1}{i(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)i(2\beta i)} = \frac{1}{2\beta(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)\,i^3}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\beta i} f(z) = -\frac{1}{2\beta(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)\,i}$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)(x^2+\beta^2)} = -\cancel{2}\pi \cancel{i}\left[\frac{1}{\cancel{2}\cancel{i}\alpha(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)} + \frac{1}{\cancel{2}\cancel{i}\beta(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)}\right]$$

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)(x^2+\beta^2)} = -\pi\left[\frac{1}{\alpha(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)} - \frac{1}{\beta(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}\right]$$

$$I = -\pi\left[\frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}\right]$$

$$w = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$$

• Apliquemos fracciones parciales

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2}$$

$$z = A(z-2) + B(z-1)$$

$$z = (A+B)z - 2A - B$$

$$A + B = 1$$

$$-2A - B = 0$$

$$A = 1 - B$$

$$-2(1-B) + B = 0$$

$$-2 + 2B - B = 0$$

$$-2 + B = 0$$

$$B = 2$$

$$A = -1$$

De Taylor

$$w = -\frac{1}{z-1} + \frac{2}{z-2} \quad (*)$$

- Recordemos la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n = \frac{1}{1-\lambda}$$

- Hagamos el desarrollo para $z_0 = i$

Para la expresión uno

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-1+i-i} = \frac{1}{(z-i)+(i-1)} = \frac{1}{(i-1)\left[1+\frac{z-i}{i-1}\right]}$$

Válido para

$|z-i| < |i-1|$

$|z-i| < \sqrt{2}$

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{i-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{(i-1)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{(i-1)^{n+1}}$$

Para la segunda expresión

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z-2+i-i} = \frac{1}{(z-i)+(i-2)} = \frac{1}{(i-2)\left[1+\frac{z-i}{i-2}\right]}$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{i-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{(i-2)^{n}}$$

Válido para

$|z-i| < |i-2|$

$|z-i| < \sqrt{5}$

$$\frac{1}{z-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{(i-2)^{n+1}}$$

$$\therefore \quad w = \frac{z}{(z-1)(z-2)} = -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{(i-1)^{n+1}} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{(i-2)^{n+}}$$

$$w = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-i)^n}{(i-2)^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{(i-1)^{n+1}}(-1)^n$$

$$w = \frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{2}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{2}{z-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2)^n$$

Hagamos el desarrollo en serie de laurent alrededor de $z_0 = 2$

$$w = \frac{1}{z-2} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{1}{z-2} \; h_1(z) \cdot h_2(z)$$

Siendo $h_1(z) = z$, $h_2(z) = \frac{1}{z-1}$

$$w = \frac{1}{z-2}\left[\frac{1}{z-1+2-2}\right] \cdot \left[z+2-2\right] = \frac{1}{z-2}\left[\frac{1}{(z-2)+1}\right]\left[(z-2)+2\right]$$

Usando la "geométrica"

$$w = \frac{1}{z-2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (z-2)^n\right]\left[(z-2)+2\right]$$

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^{n-1} \quad z = \quad z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^{n-1}$$

Válido para $|z-2| < 1$

$|z-2| < 2$