INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL, ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO
PRIMERA EVALUACIÓN DE MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA LA INGENIERÍA

Alumno(a): Hernández Castellanos César Uriel
Número de Boleta: 2016602860 Grupo: 2CV4 19 de septiembre de 2017
Profesor: Marco Antonio Darranco Jiménez Calificación
EXAMEN "XX"

NO SE PERMITE EL USO DE NINGÚN TIPO DE FORMULARIO NI CALCULADORA. RESOLVER <u>SÓLO TRES PROBLEMAS</u>, DIJE TRES. APAGUE SU ... CELULAR, GRACIAS.

1.- a) Encontrar todos los valores de z, y localizarlos en el plano complejo si

$$z^6 - 1 = 0$$

b) Dada $u(x,y) = e^{-x}(x\sin y - y\cos y)$, encuentre una función $v(x,y)$ tal que la función $f(z) = u + iv$ sea analítica.

2 Muestre bajo qué condiciones, el mapeo de inversión $w = \frac{1}{z}$ mapea rectas del plano z en rectas o círculos en el plano w.

3.- Para el mapeo $w = \frac{z+i}{z}$ encuentre las imágenes en el plano w de $\operatorname{Re}(z) = 0$ y $\operatorname{Im}(z) = 0$.

4.- Muestre que las condiciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares están dadas por:

$$u_r = \frac{v_\theta}{r} \quad \& \quad v_r = -\frac{u_\theta}{r}$$

...estre que las cond de Cauchy Riemann en coordenadas polares están dadas por

$$U_r = \frac{V_\theta}{r} \qquad V_r = -\frac{U_\theta}{r}$$

- Recordemos que las CCR están dados por:

$$U_x = V_y$$
$$U_y = -V_x$$

Haremos uso de la regla de la cadena de la siguiente manera:

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$U_\theta = U_x\left[\frac{\partial x}{\partial \theta}\right] + U_y\left[\frac{\partial y}{\partial \theta}\right] \quad --- \text{①} \quad (*)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$U_r = U_x\left[\frac{\partial x}{\partial r}\right] + U_y\left[\frac{\partial y}{\partial r}\right] \quad ---- \text{②} \quad (**)$$

Ahora bien, consideremos

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\,\text{sen}\,\theta$$

Obtenemos las derivadas parciales correspondientes:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left[r\cos\theta\right] = \cos\theta \qquad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\,\text{sen}\,\theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left[r\,\text{sen}\,\theta\right] = \text{sen}\,\theta \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$$

...tuimos en (*) y (*) (*) de la siguiente manera

$$U_\theta = U_x\left[-r\,\mathrm{sen}\theta\right] + U_y\left[r\cos\theta\right] \quad \text{---}\ (1)$$

$$U_r = U_x\left[\cos\theta\right] + U_y\left[\mathrm{sen}\theta\right] \quad \text{---}\ (2)$$

• Multiplicamos por $\frac{1}{r}$ la ecuación uno:

$$\frac{U_\theta}{r} = -U_x\,\mathrm{sen}\,\theta + U_y\cos\theta$$

$$U_r = U_x\cos\theta + U_y\,\mathrm{sen}\,\theta$$

• Se da ~~resolucion~~ solución al sistema de ecuaciones

$$\Delta s = \begin{vmatrix} -\mathrm{sen}\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \mathrm{sen}\theta \end{vmatrix} = -\mathrm{sen}^2\theta - \cos^2\theta = -1$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} \frac{U_\theta}{r} & \cos\theta \\ U_r & \mathrm{sen}\theta \end{vmatrix} = \frac{U_\theta}{r}\,\mathrm{sen}\theta - \cos\theta\,U_r$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} -\mathrm{sen}\theta & \frac{U_\theta}{r} \\ \cos\theta & U_r \end{vmatrix} = -U_r\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{U_\theta}{r}\cos\theta$$

bien, $U_x = \frac{\Delta x}{\Delta s}$

$$U_x = \frac{\frac{U_\theta}{r}\,\mathrm{sen}\,\theta - \cos\theta\, U_r}{(-1)} = \cos\theta\, U_r - \frac{U_\theta}{r}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$U_y = U_r\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{U_\theta}{r}\cos\theta$$

- Análogamente se encuentra V_x, V_y, Obteniendo lo siguiente

$$V_x = \cos\theta\, V_r - \frac{V_\theta}{r}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$V_y = V_r\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{V_\theta}{r}\cos\theta$$

- Haciendo uso de las C-C-R e igualando, obtenemos:

$$U_x = V_y$$
$$U_y = -V_x$$

$$\cos\theta\, U_r - \frac{U_\theta}{r}\,\mathrm{sen}\,\theta = V_r\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{V_\theta}{r}\cos\theta$$

$$U_r\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{U_\theta}{r}\cos\theta = \frac{V_\theta}{r}\,\mathrm{sen}\,\theta - \cos\theta\, V_r$$

$$\cos\theta\left[U_r\right] + \operatorname{sen}\theta\left[-\frac{U_\theta}{r}\right] = \operatorname{sen}\theta\left[V_r\right] + \cos\theta\left[\frac{V_\theta}{r}\right]$$

$$\operatorname{sen}\theta\left[U_r\right] + \cos\theta\left[\frac{U_\theta}{r}\right] = \operatorname{sen}\theta\left[\frac{V_\theta}{r}\right] + \cos\theta\left[-V_r\right]$$

$$\boxed{\begin{aligned} U_r &= \frac{V_\theta}{r} \\ V_r &= -\frac{U_\theta}{r} \end{aligned}}$$

$$w = \frac{z+i}{z}$$

$Re(z) = 0 \qquad Im(z) = 0$

Obtenemos el mapeo inverso:

$$wz = z + i$$

$$wz - z = i$$

$$z(w-1) = i$$

$$z = \frac{i}{w-1}$$

$$x + iy = \frac{i}{(u+iv)-1}$$

• Multiplicamos por la unidad, para obtener la parte real e imaginaria

$$x + iy = \frac{i}{(u-1)+iv} \cdot \frac{(u-1)-iv}{(u-1)-iv}$$

$$x + iy = \frac{(u-1)-iv}{(u-1)^2+v^2}$$

$$x + iy = \frac{u-1}{(u-1)^2+v^2} - i\,\frac{v}{(u-1)^2+v^2}$$

$$x = \frac{u-1}{(u-1)^2+v^2} \quad ; \quad y = -\frac{v}{(u-1)^2+v^2}$$

$$\frac{U-1}{(U-1)^2+V^2}=0$$

$$-\frac{V}{(U-1)^2+V^2}=0$$

$$U-1=0$$

$$U=\underline{1}$$

$$-V=0$$

$$V=0$$

$$U(x,y) = e^{-x}(x\,\text{sen}\,y - y\cos y)$$

$$U_x = V_y$$

$$U_y = -V_x$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[e^{-x}x\,\text{sen}\,y - e^{-x}y\cos y\right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}e^{-x}x\,\text{sen}\,y - \frac{\partial}{\partial x}e^{-x}y\cos y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \text{sen}\,y\left[e^{-x} + xe^{-x}(-1)\right] - y\cos y\left[e^{-x}(-1)\right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \text{sen}\,y\left[e^{-x} - e^{-x}x\right] + y\cos y\,e^{-x} =$$

$$= \text{sen}\,y\,e^{-x}\left[1-x\right] + y\cos y\,e^{-x} = e^{-x}\left[\text{sen}\,y(1-x) + y\cos y\right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$e^{-x}\left[\text{sen}\,y(1-x) + y\cos y\right] = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\partial v = e^{-x}\left[\text{sen}\,y(1-x) + y\cos y\right]\partial y$$

$$v = \int e^{-x}\left[\text{sen}\,y(1-x) + y\cos y\right]\partial y \qquad \begin{matrix} u=y & dv=\cos y \\ du=dy & v=\text{sen}\,y \end{matrix}$$

$$v = e^{-x}\int \text{sen}\,y(1-x)\,\partial y + e^{-x}\int y\cos y\,\partial y$$

$$v = e^{-x}(1-x)(-\cos y) + e^{-x}\left[y\,\text{sen}\,y - \int \text{sen}\,y\,dy\right]$$

$$v = e^{-x}(1-x)(-\cos y) + e^{-x}\left[y\,\text{sen}\,y - (-\cos y)\right] + c(x)$$

$$v = e^{-x}(x-1)\cos y + e^{-x}\left[y\,\text{sen}\,y + \cos y\right] + c(x)$$

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = -\left[\frac{\partial}{\partial x}\left[e^{-x}(x-1)\cos y + e^{-x}\left[y\,\text{sen}\,y + \cos y\right]\right] + c'(x)\right]$$

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = -\left[\cos y \frac{\partial}{\partial x} e^{-x}(x-1) + (y\,\text{sen}\,y + \cos y)\frac{\partial}{\partial x} e^{-x} + c'(x)\right]$$

$$= -\left[\cos y\left[e^{-x}(1) + (x-1)e^{-x}(-1)\right] + \left[y\,\text{sen}\,y + \cos y\right] e^{-x}(-1) + c'(x)\right]$$

$$= -\left[\cos y\left[e^{-x} + (1-x)e^{-x}\right] - \left[y\,\text{sen}\,y + \cos y\right] e^{-x} + c'(x)\right]$$

$$= \left[\left[y\,\text{sen}\,y + \cos y\right] e^{-x} - \cos y\left[e^{-x} + (1-x)e^{-x}\right] - c'(x)\right]$$

$$= e^{-x}(y\,\text{sen}\,y + \cos y) - \cos y\left(e^{-x} + e^{-x} - x e^{-x}\right) - c'(x)$$

$$= e^{-x}(y\,\text{sen}\,y + \cos y) - \cos y\, e^{-x}(2-x) - c'(x)$$

$$= e^{-x}\left(y\,\text{sen}\,y + \cos y - \cos y(2-x)\right) - c'(x)$$

$$= e^{-x}\left(y\,\text{sen}\,y + \cos y - 2\cos y - x\cos y\right) - c'(x)$$

$$= e^{-x}\left(y\,\text{sen}\,y - \cos y - x\cos y\right) - c'(x) = e^{-x}\left(y\,\text{sen}\,y - (x+1)\cos y\right) - c'(x)$$

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = e^{-x}\left(y\,\text{sen}\,y - (x+1)\cos y\right) - c'(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = e^{-x}\left[x\cos y - \frac{\partial}{\partial y} y\cos y\right] = e^{-x}\left[x\cos y - \left[\cos y + y(-\text{sen}\,y)\right]\right]$$

$$= e^{-x}\left[x\cos y - \cos y + y\,\text{sen}\,y\right] = e^{-x}\left[(x-1)\cos y + y\,\text{sen}\,y\right]$$

$$\cancel{e^{-x} y\,\text{sen}\,y} - e^{-x}(x+1)\cos y - c'(x) = e^{-x}(x-1)\cos y + \cancel{e^{-x} y\,\text{sen}\,y}$$

$$-e^{-x}(x+1)\cos y - c'(x) = e^{-x}(x-1)\cos y$$

$$c'(x) = -e^{-x}(x+1)\cos y + e^{-x}(x+1)\cos y$$

$$c'(x) = k$$

$$\therefore\ v(x,y) = e^{-x}\left(y\,\text{sen}\,y - (x+1)\cos y\right)$$