



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL, ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO
PRIMERA EVALUACIÓN DE MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA LA INGENIERÍA

Alumno(a): Hernández Castañeros César Uriel

Número de Boleta: 2016602860 Grupo: 2CV4

19 de septiembre de 2017

Profesor: Marco Antonio Barranco Jimenez

Calificación

EXAMEN "XX"

NO SE PERMITE EL USO DE NINGÚN TIPO DE FORMULARIO NI CALCULADORA.
RESOLVER SÓLO TRES PROBLEMAS, DIJE TRES. APAGUE SU ... CELULAR,
GRACIAS.

- 1.- a) Encontrar todos los valores de z , y localizarlos en el plano complejo si

$$z^6 - 1 = 0$$

- b) Dada $u(x, y) = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$, encuentre una función $v(x, y)$ tal que la función $f(z) = u + iv$ sea analítica.

- 2 Muestre bajo qué condiciones, el mapeo de inversión $w = \frac{1}{z}$ mapea rectas del plano z en rectas o círculos en el plano w .

3. Para el mapeo $w = \frac{z+i}{z}$ encuentre las imágenes en el plano w de $\text{Re}(z) = 0$ y $\text{Im}(z) = 0$.

4. Muestre que las condiciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares están dadas por:

$$u_r = \frac{v_\theta}{r} \quad \& \quad v_r = -\frac{u_\theta}{r}$$

Es decir que las cond de Cauchy Riemann en coordenadas polares están dadas por

$$U_r = \frac{V_\theta}{r} \quad V_r = - \frac{U_\theta}{r}$$

• Recordemos que las CCR están dadas por:

$$U_x = V_y$$

$$U_y = -V_x$$

Haremos uso de la regla de la cadena de la siguiente manera:

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$U_\theta = U_x \left[\frac{\partial x}{\partial \theta} \right] + U_y \left[\frac{\partial y}{\partial \theta} \right] \quad \dots \quad (1) \quad (*)$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}$$

$$U_r = U_x \left[\frac{\partial x}{\partial r} \right] + U_y \left[\frac{\partial y}{\partial r} \right] \quad \dots \quad (2) \quad (* *)$$

Ahora bien, consideremos

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

Obtenemos las derivadas parciales correspondientes:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} [r \cos \theta] = \cos \theta \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin \theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} [r \sin \theta] = \sin \theta \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta$$

...duimos en \odot y \odot \odot de la siguiente manera

$$U_\theta = U_x \begin{bmatrix} -r \sin \theta \end{bmatrix} + U_y \begin{bmatrix} r \cos \theta \end{bmatrix} \dots \textcircled{1}$$

$$U_r = U_x \begin{bmatrix} \cos \theta \end{bmatrix} + U_y \begin{bmatrix} \sin \theta \end{bmatrix} \dots \textcircled{2}$$

• Multiplicamos por $\frac{1}{r}$ la ecuación uno:

$$\frac{U_\theta}{r} = -U_x \sin \theta + U_y \cos \theta$$

$$U_r = U_x \cos \theta + U_y \sin \theta$$

• Se da ~~resolución~~ solución al sistema de ecuaciones

$$\Delta S = \begin{vmatrix} -\sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{vmatrix} = -\sin^2 \theta - \cos^2 \theta = -1$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} \frac{U_\theta}{r} & \cos \theta \\ U_r & \sin \theta \end{vmatrix} = \frac{U_\theta}{r} \sin \theta - \cos \theta U_r$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} -\sin \theta & \frac{U_\theta}{r} \\ \cos \theta & U_r \end{vmatrix} = -U_r \sin \theta - \frac{U_\theta}{r} \cos \theta$$

bien, $V_x = \frac{\Delta x}{\Delta s}$

$$U_x = \frac{\frac{U_\theta}{r} \sin \theta - \cos \theta U_r}{(-1)} = \cos \theta U_r - \frac{U_\theta}{r} \sin \theta$$

$$U_y = U_r \sin \theta + \frac{U_\theta}{r} \cos \theta$$

• Análogamente se encuentra V_x, V_y , obteniendo lo siguiente

$$V_x = \cos \theta V_r - \frac{V_\theta}{r} \sin \theta$$

$$V_y = V_r \sin \theta + \frac{V_\theta}{r} \cos \theta$$

• Haciendo uso de las C-C-R e igualando, obtenemos:

$$U_x = V_y$$

$$U_y = -V_x$$

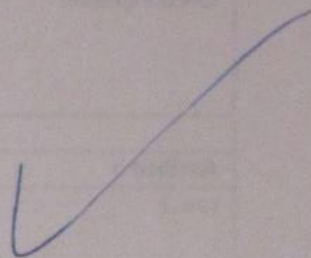
$$\cos \theta U_r - \frac{U_\theta}{r} \sin \theta = V_r \sin \theta + \frac{V_\theta}{r} \cos \theta$$

$$U_r \sin \theta + \frac{U_\theta}{r} \cos \theta = -\frac{V_\theta}{r} \sin \theta - \frac{V_r}{r} \cos \theta$$

$$\cos \theta [U_r] + \sin \theta \left[-\frac{U_\theta}{r} \right] = \sin \theta [V_r] + \cos \theta \left[\frac{V_\theta}{r} \right]$$

$$\sin \theta [U_r] + \cos \theta \left[\frac{U_\theta}{r} \right] = \sin \theta \left[\frac{V_\theta}{r} \right] + \cos \theta [-V_r]$$

$$\begin{aligned} U_r &= \frac{V_\theta}{r} \\ V_r &= -\frac{U_\theta}{r} \end{aligned}$$



$$w = \frac{z+i}{z}$$

$$\operatorname{Re}(z) = 0 \quad \operatorname{Im}(z) = 0$$

b

Obtenemos el mapeo inverso:

$$wz = z + i$$

$$wz - z = i$$

$$z(w-1) = i$$

$$z = \frac{i}{w-1}$$

$$x+iy = \frac{i}{(u+iv)-1}$$

• Multiplicamos por la unidad, para obtener la parte real e imaginaria

$$x+iy = \frac{i}{(u-1)+iv} \cdot \frac{(u-1)-iv}{(u-1)-iv}$$

$$x+iy = \frac{(u-1)-iv}{(u-1)^2 + v^2}$$

$$x+iy = \frac{u-1}{(u-1)^2 + v^2} - i \frac{v}{(u-1)^2 + v^2}$$

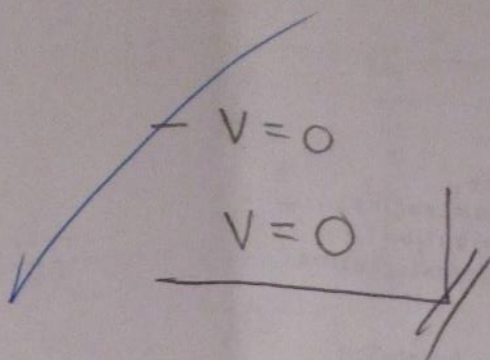
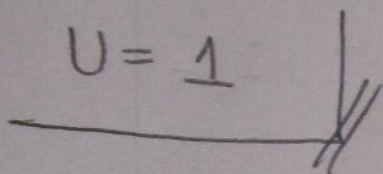
$$x = \frac{u-1}{(u-1)^2 + v^2} \quad ; \quad y = - \frac{v}{(u-1)^2 + v^2}$$

$$\frac{U-1}{(U-1)^2 + V^2} = 0$$

$$-\frac{V}{(U-1)^2 + V^2} = 0$$

$$U-1 = 0$$

$$U = \underline{1}$$



$$u(x, y) = e^{-x} (x \sinh y - y \cosh y)$$

$$u_x = v_y$$

$$u_y = -v_x$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [e^{-x} x \sinh y - e^{-x} y \cosh y]$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [e^{-x} x \sinh y - e^{-x} y \cosh y]$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \sinh y [e^{-x} + x e^{-x} (-1)] - y \cosh y [e^{-x} (-1)]$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \sinh y [e^{-x} - e^{-x} x] + y \cosh y e^{-x} =$$

$$= \sinh y e^{-x} [1 - x] + y \cosh y e^{-x} = e^{-x} [\sinh y (1 - x) + y \cosh y]$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}$$

$$e^{-x} [\sinh y (1 - x) + y \cosh y] = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\partial v = e^{-x} [\sinh y (1 - x) + y \cosh y] dy$$

$$v = \int e^{-x} [\sinh y (1 - x) + y \cosh y] dy$$

$$v = e^{-x} \int \sinh y (1 - x) dy + e^{-x} \int y \cosh y dy$$

$$v = e^{-x} (1 - x) (-\cosh y) + e^{-x} [y \sinh y - \int \sinh y dy]$$

$$v = e^{-x} (1 - x) (-\cosh y) + e^{-x} [y \sinh y - (-\cosh y)] + C(x)$$

$$v = e^{-x} (x - 1) \cosh y + e^{-x} [y \sinh y + \cosh y] + C(x)$$

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = -\left[\frac{\partial}{\partial x} [e^{-x} (x - 1) \cosh y + e^{-x} [y \sinh y + \cosh y]] + C'(x) \right]$$

$$u = y \quad dv = \cosh y$$

$$du = dy \quad v = \sinh y$$

$-\frac{\partial}{\partial x}$

$$-\frac{\partial}{\partial x} = - \left[\cos y \frac{\partial}{\partial x} e^{-x(x-1)} + (y \sin y + \cos y) \frac{\partial}{\partial x} e^{-x} + c'(x) \right]$$

$$= - \left[\cos y \left[e^{-x} (1) + (x-1) e^{-x} (-1) \right] + \left[y \sin y + \cos y \right] e^{-x} (-1) + c'(x) \right]$$

$$= - \left[\cos y \left[e^{-x} + (1-x) e^{-x} \right] - \left[y \sin y + \cos y \right] e^{-x} + c'(x) \right]$$

$$= \left[\left[y \sin y + \cos y \right] e^{-x} - \cos y \left[e^{-x} + (1-x) e^{-x} \right] - c'(x) \right]$$

$$= e^{-x} (y \sin y + \cos y) - \cos y (e^{-x} + e^{-x} - x e^{-x}) - c'(x)$$

$$= e^{-x} (y \sin y + \cos y) - \cos y e^{-x} (2-x) - c'(x)$$

$$= e^{-x} (y \sin y + \cos y - \cos y (2-x)) - c'(x)$$

$$= e^{-x} (y \sin y + \cos y - 2 \cos y - x \cos y) - c'(x)$$

$$= e^{-x} (y \sin y - \cos y - x \cos y) - c'(x) = e^{-x} (y \sin y - (x+1) \cos y) - c'(x)$$

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = e^{-x} (y \sin y - (x+1) \cos y) - C'(x)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} &= e^{-x} \left[x \cos y - \frac{\partial}{\partial y} y \cos y \right] = e^{-x} \left[x \cos y - [\cos y + y(-\sin y)] \right] \\ &= e^{-x} [x \cos y - \cos y + y \sin y] = e^{-x} [(x-1) \cos y + y \sin y] \end{aligned}$$

$$\cancel{e^{-x} y \sin y} - \cancel{e^{-x} (x+1) \cos y} - C'(x) = e^{-x} (x-1) \cos y + \cancel{e^{-x} y \sin y}$$

$$-e^{-x} (x+1) \cos y - C'(x) = e^{-x} (x-1) \cos y$$

$$C'(x) = -e^{-x} (x+1) \cos y + e^{-x} (x-1) \cos y$$

$$C'(x) = -1$$

$$\therefore V(x, y) = e^{-x} (y \sin y - (x+1) \cos y)$$