Examen 3 de Probabilidad y estadística.

Profesora: Leticia Cañedo Suárez.

11 de diciembre de 2017

Nombre: Hernández Castellanos César Uriel

Gpo: 2CM9

10

Excelente!

1

1._ Supón que la v. a. bidimensional (X, Y) está distribuida uniformemente en el cuadrante cuyos vértices son (1,0) (0,1) (-1,0) (0,-1). Encuentra las marginales $f_X(x)$ y $f_y(y)$.

1

2._ Supón que la f. d. p conjunta de (X, Y) está dada por $f_{X,Y}(x,y) = e^{-y}$ para $x > 0, y > x$ Encuentra $P(X > 2|y < 4)$

1

3._ Sea $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ una m.a de una f.d.p dada por $f_Y(y;\alpha,\theta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} y^{\alpha-1} e^{-y/\theta}$ con $y > 0$. Encuentra el estimador máximo verosímil para θ si α es conocida.

1

4._ Cierto tipo de componente electrónico tiene una duración X en horas, con f.d.p $f_X(x;\theta) = \frac{1}{\theta^2} x e^{-x/\theta}$ con $x > 0$. Sea $\hat{\theta}$ el estimador máximo verosímil de θ. Supón que tres componentes al probarlos de manera independiente presentan duración de 120, 130 y 128 hrs.

a) ¿Cuál es la estimación máximo verosímil de θ?

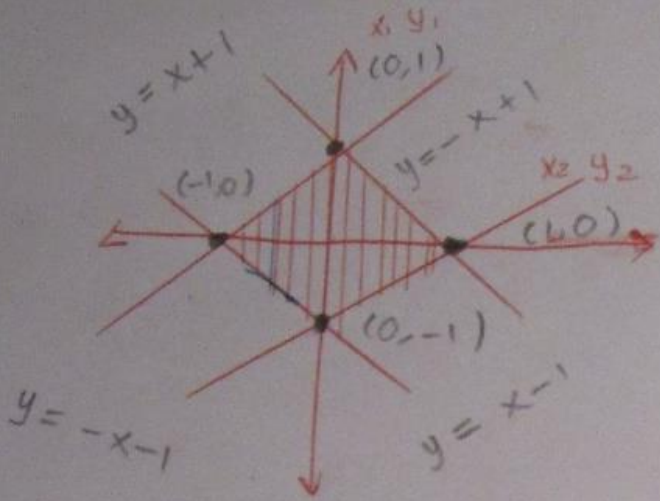
b) ¿Cuánto valen la esperanza y la varianza del estimador?

la defin.

1

Hdez Castellanos

César Uriel



$$\vec{r} = \vec{r_2} + t(\vec{r_2} - \vec{r_1})$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-1}{1-0} = -1$$

$$y = mx + b$$

$$y = -1x + 1$$

$$\int_{y=-x-1}^{x+1} \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}x \Big|_{-x-1}^{x+1}$$

$$= \frac{1}{2}\left[x+1+x+1\right] = \frac{\cancel{2}(x+1)}{\cancel{2}} \quad (*)$$

$$\int_{x-1}^{-x+1} \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}x \Big|_{x-1}^{-x+1} = \frac{1}{2}\left(-x+1-x\ldots\right.$$

$$= \frac{1}{2}\left[-2x+2\right] = 1-x \quad (**)$$

De (*) y (**)

$$f_x(x) = \begin{cases} (*)\ 1+x & ; \ x \in [-1,0] \\ (**)\ 1-x & ; \ x \in [0,1] \end{cases}$$

· Análogamente para $f_y(y)$

$$f_y(y) = \begin{cases} 1+y & ; \ y \in [-1,0] \\ 1-y & ; \ y \in [0,1] \end{cases}$$

Por la definición del VALOR ABSOLUTO

$$\boxed{\therefore\ f_x(x) = 1 - |x|}$$

$$\boxed{\therefore\ f_y(y) = 1 - |y|}$$

Hdez Castellanos César Uriel

$f_{x,y}(x,y) = e^{-y}$ $\quad x>0,\ y>x$ $\quad$ Por transitividad

$y > x > 0 \qquad y>0$

• Usando la definición de la probabilidad condicional

$x>0 \;\therefore\; y>0$

$$P(x>2 \mid y<4) = \frac{P(x>2,\ y<4)}{P(y<4)}$$

• Acumulada de una conjunta

$$F(x,y) = P(X\le x,\ Y\le y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f_{x,y}(x,y)\,dx\,dy$$

(*)

$$P(y\le 3) = e^{6}$$

(**)

$$P(x>2,\ y<4) = P(x\ge 1,\ y\le 3) = e^{4} - 3e^{2}$$

De (*) y (**)

$$P(x>2 \mid y<4) = \frac{e^{4}-3e^{2}}{e^{6}} = \frac{e^{4}}{e^{6}} - \frac{3e^{2}}{e^{6}} = \boxed{e^{-2} - 3e^{-4}}$$

(3)

Hdez Castellanos César Oriel

$$f_y(y;\alpha,\theta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}} y^{\alpha-1} e^{-y/\theta}$$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}} y_i^{\alpha-1} e^{-y_i/\theta} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}} y_i^{\alpha-1} e^{-y_i/\theta}$$

- Desarrollamos el producto

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}} y_1^{\alpha-1} e^{-y_1/\theta} \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}} y_2^{\alpha-1} e^{-y_2/\theta} \cdots \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}} y_n^{\alpha-1} e^{-y_n/\theta}$$

- Simplificamos, usando las propiedades de los EXPONENTES.

$$= \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}}\right]^n \prod_{i=1}^{n} y_i^{\alpha-1} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} y_i}$$

- Se aplica el logaritmo natural en ambos lados, ya que el máximo de ambas funciones coinciden, y usando la siguiente propiedades de los logaritmos

$$\ln[L(\theta)] = \ln\left[\frac{1}{\Gamma^n(\alpha)}\right] + \ln\left[\frac{1}{\theta^{\alpha n}}\right] + \ln\left[\prod_{i=1}^{n} y_i^{\alpha-1}\right] - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\ln[ab] = \ln(a) + \ln(b)$$

- Derivamos con respecto a teta ambos lados, considerando α como constante, por lo que se nos reducirá a dos términos.

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln[L(\theta)] = \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\ln\left[\theta^{-\alpha n}\right]\right] - \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{\theta}\right]$$

- Aplicamos la regla de la cadena, y la siguiente regla de derivación $\frac{d}{du}u^n = nu^{n-1}\frac{d}{du}u$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln[L(\theta)] = \theta^{\alpha n}(-\alpha n)\theta^{-\alpha n-1} - \sum_{i=1}^{n} y_i\,(-1)\,\theta^{-2}$$

4

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln\left[L(\theta)\right] = \theta^{\alpha n-\alpha n-1}(-\alpha n) + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

• Aplicamos las leyes de los exponentes

• Simplificando

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln\left[L(\theta)\right] = \frac{1}{\theta}(-\alpha n) + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} y_i - \frac{\alpha n}{\theta}$$

• Al igualar a cero nuestro θ pasa a ser $\hat{\theta}$

$$\frac{\alpha n}{\hat{\theta}} = \frac{1}{\hat{\theta}^2}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

• Haciendo álgebra . . .

$$\frac{\hat{\theta}^2}{\hat{\theta}} = \frac{1}{\alpha n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\hat{\theta} = \frac{1}{\alpha n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\boxed{\hat{\theta} = \frac{\bar{y}}{\alpha}}$$

:)

4

Hdez Castellanos César Uriel

$$f_x(x;\theta) = \frac{1}{\theta^2} x e^{-x/\theta}$$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta^2} X_i e^{-X_i/\theta}$$

• Desarrollamos el producto

$$L(\theta) = \frac{1}{\theta^2} X_1 e^{-X_1/\theta} \cdot \frac{1}{\theta^2} X_2 e^{-X_2/\theta} \cdots \frac{1}{\theta^2} X_n e^{-X_n/\theta}$$

• Simplificando

$$L(\theta) = \frac{1}{\theta^{2n}} \prod_{i=1}^{n} X_i \; e^{-\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} X_n}$$

• Aplicando logaritmo natural en ambos lados de la igualdad

$$\ln[L(\theta)] = \ln\left[\frac{1}{\theta^{2n}}\right] + \ln\left[\prod_{i=1}^{n} X_i\right] - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} X_n$$

• Derivando con respecto a teta ambos lados de la igualdad

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln[L(\theta)] = \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\ln \theta^{-2n}\right] - \sum_{i=1}^{n} X_n \frac{\partial}{\partial\theta} \frac{1}{\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln[L(\theta)] = \theta^{2n}(-2n)\theta^{-2n-1} - \sum_{i=1}^{n} X_n (-1)\theta^{-2}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\ln L(\theta)\right] = \theta^{2n-2n-1}(-1)(2n) + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_n$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\ln\left[L(\theta)\right]\right] = \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_n - \frac{2n}{\theta}$$

- Al igualar a cero nuestro θ pasa a ser $\hat{\theta}$

$$\frac{1}{\hat{\theta}^2}\sum_{i=1}^{n} x_n = \frac{2n}{\hat{\theta}}$$

- Haciendo álgebra

$$\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} x_n = \frac{\hat{\theta}^2}{\hat{\theta}}$$

$$\boxed{\hat{\theta} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} x_n}$$

A) Sustituyendo los datos dados, obtenemos:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{2(3)}\left[120 + 130 + 128\right] = 63$$

B) $Sesgo(\theta) = E(\hat{\theta}) - \theta$

$E(\hat{\theta}) - \theta = 0$

$$\boxed{\therefore\ E(\hat{\theta}) = \theta}$$

$$\boxed{V(\hat{\theta}) = \frac{\theta^2}{2n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta^2}{2n} = 0$$

$\therefore$ Es consistente