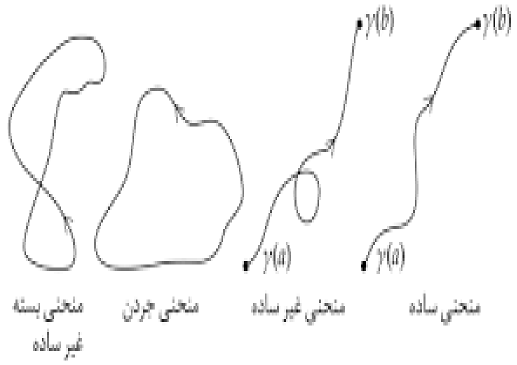
انتگرال روی خم:

تعریف ۱. هر خم در صفحه مختلط به صورت $\gamma(t)=x(t)+iy(t)$ ، $a\leq t\leq b$ است که $x(t)$ و $y(t)$ توابعی حقیقی و پیوسته هستند. $\gamma(a)$ را نقطه ابتدایی و $\gamma(b)$ را نقطه انتهایی خم می نامند.

تعریف ۲. ۱) اگر نقاط آغازی و پایانی بر هم منطبق باشند، یعنی $\gamma(b)=\gamma(a)$ خم را بسته گوییم.
۲) اگر خم خودش را قطع نکند (بجز احتمالا درنقطه ابتدایی و انتهایی) خم را ساده گوییم.
۳) خم بسته و ساده را ژردان (جردن) گوییم.



شکل ۱.۱: انواع منحنی

توجه ۱. جهت مثبت خم ژردان پادساعتگرد است (در خلاف جهت عقربه های ساعت) که به آن جهت مثلثاتی گوییم.
جهت منفی خم ساعتگرد است (در جهت عقربه های ساعت)
وقتی به جهت خم اشاره نشود، منظورهمان جهت مثلثات است.

تعریف ۳. خم $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ را قطعه به قطعه هموار گوییم، هرگاه افرازی از $[a,b]$ مانند $P=\{t_0,t_1,...,t_n\}$ وجود داشته باشد که $a=t_0<t_1<...<t_n=b$ و تابع γ روی هر یک از زیربازه های $[t_0,t_1],\ [t_1,t_2],\ ...[t_{n-1},t_n]$ مشتق پذیر با مشتق پیوسته و مخالف صفر باشد.

تعریف ۴. انتگرال روی خم: فرض کنید $\gamma(t)=x(t)+iy(t)$ و $a\leq t\leq b$ خمی قطعه به قطعه هموار و f تابعی پیوسته روی γ باشد در این صورت

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

مثال ۱. $\int_C Re(z)dz$ را حساب کنید که C خمی است از نقطه $(0,0)$ تا $(1,1)$

جواب.

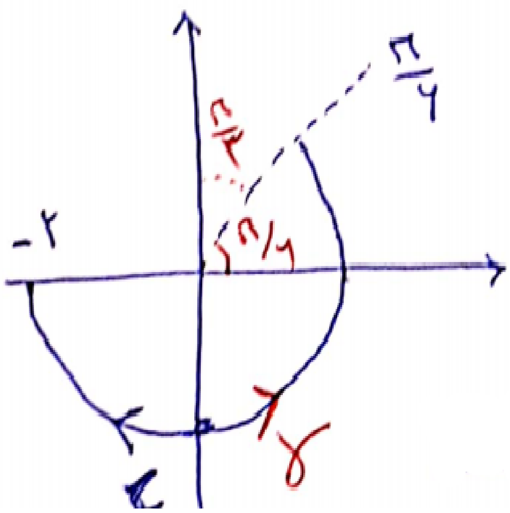
$$\begin{aligned}
&z=x+iy\Rightarrow Ree(z)=x\\
&C:y=x\Rightarrow z=x+ix=x(1+i)\\
&\Rightarrow dz=(1+i)dx\ \ 0\leq x\leq 1\\
&\int_C Re(z)dz=\int_0^1 x(1+i)dx\\
&=(1+i)\int_0^1 xdx=\frac{1+i}{2}
\end{aligned}$$

قضیه ۱. *اگر $-C$ همانخم C در خلاف جهت مثلثات باشد آنگاه*

$$\int_{-C} f dz = -\int_C f\, dz$$

مثال ۲.

$$\int_C (z + \frac{۱}{z}) d\bar{z}$$



جواب. توجه: قرمزهای شکل جزو جواب است.

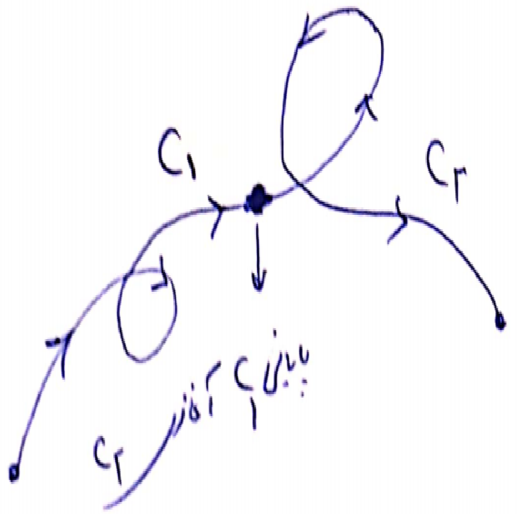
$$\xrightarrow{\gamma = -C} \quad \int_C (z + \frac{۱}{z}) d\bar{z} = -\int_\gamma (z + \frac{۱}{z}) d\bar{z}$$

$$\gamma : \begin{cases} z = ۲e^{i\theta} \\ \bar{z} = ۲e^{-i\theta} \\ dz = ۲ie^{i\theta} d\theta \qquad \pi \leq \theta \leq ۲\pi + \frac{\pi}{۶} \ \ (\text{یا} \quad -\pi \leq \theta \leq \frac{\pi}{۶}) \\ \frac{۱}{z} = \frac{۱}{۲} e^{-i\theta} \\ d\bar{z} = -۲ie^{-i\theta} d\theta \end{cases}$$

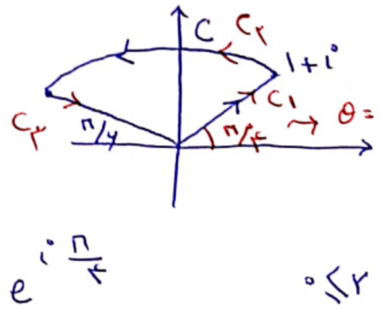
$$-\int_{\gamma}(z+\frac{۱}{z})d\bar{z} = -\int_{\pi}^{۲\pi+\frac{\pi}{۶}}(۲e^{i\theta}+\frac{۱}{۲}e^{-i\theta})\times -۲ie^{-i\theta}d\theta$$
$$= ۲i\int_{\pi}^{۲\pi+\frac{\pi}{۶}}(۲+\frac{۱}{۲}e^{-۲i\theta})d\theta$$
$$= ۲i(۲\theta-\frac{۱}{۴i}e^{-۲i\theta})\Big|_{\pi}^{۲\pi+\frac{\pi}{۶}}$$
$$= ۲i\Big(۲(۲\pi+\frac{\pi}{۶}-\pi)-\frac{۱}{۴i}(e^{-۲(۲\pi+\frac{\pi}{۶})i}-e^{-۲i\pi})\Big)$$
$$= ۲i\Big(\frac{۷\pi}{۶}\times ۲+\frac{i}{۴}(\cos(-(۴\pi+\frac{\pi}{۳}))+i\sin(-(۴\pi+\frac{\pi}{۳}))-(\cos(-۲\pi)+i\sin(-۲\pi))\Big)$$
$$= ۲i(\frac{۷\pi}{۳}-\frac{۱}{۸}i+\frac{۱}{۸}\sqrt{۳})$$

قضیه ۲. *اگر $C_۱$ و $C_۲$ خم‌های قطعه به قطعه هموار باشند که نقطه پایانی $C_۱$ همان نقطه آغازی $C_۲$ است آنگاه*

$$\int_{C_۱\cup C_۲} f(z)dz = \int_{C_۱} f(z)dz + \int_{C_۲} f(z)dz$$

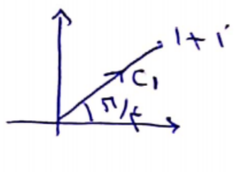


مثال: $\int_C \bar{z}\, dz$

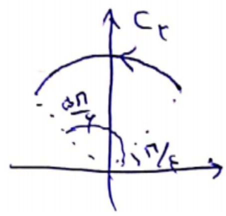


$\rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{۱}{۱} = \frac{\pi}{۴}$

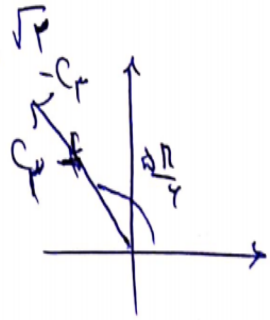
حل: $C_۱: \begin{cases} z = re^{i\frac{\pi}{۴}} \\ dz = e^{i\pi/۴}\, dr \\ \bar{z} = re^{-i\pi/۴} \end{cases}$ $\quad ۰ \leq r \leq \sqrt{۲} \quad (1+i \Rightarrow r=\sqrt{۲})$



$$C_2:\begin{cases} z=\sqrt{2}\; e^{i\theta} & \frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{5\pi}{6}\\ dz=i\sqrt{2}\; e^{i\theta}\,d\theta \\ \bar{z}=\sqrt{2}\; e^{-i\theta}\end{cases}$$



$$-C_3:\begin{cases} z=r\,e^{i\frac{5\pi}{6}} & 0\le r\le\sqrt{2}\\ dz=e^{i\frac{5\pi}{6}}\,dr \\ \bar{z}=r\,e^{-i\frac{5\pi}{6}}\end{cases}$$



$$\int_{C_1}\bar{z}\,dz=\int_0^{\sqrt{2}} r\,e^{-i\pi/4}\times e^{i\pi/4}\,dr=\int_0^{\sqrt{2}} r\,dr$$

$$=\frac{r^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{2}}=1$$

$$\int_{C_2}\bar{z}\,dz=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{6}}\sqrt{2}\;e^{-i\theta}\times i\sqrt{2}\;e^{i\theta}\,d\theta$$

$$=2i\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{6}}d\theta=2i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$2i\times\frac{14\pi}{24}=\frac{7\pi i}{6}$$

$$\int_{C_3} \bar{z}\, dz = -\int_0^{\sqrt{2}} r e^{-i\frac{5\pi}{4}} \times e^{i\frac{5\pi}{4}}\, dr$$

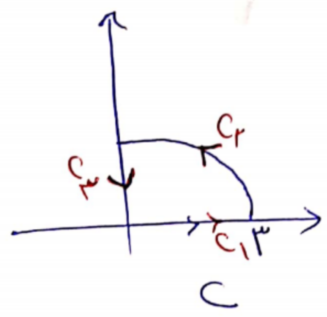
$$= \int_0^{\sqrt{2}} r\, dr = \frac{r^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{2}} = -1$$

$$\int_C \bar{z}\, dz = \int_{C_1} \bar{z}\, dz + \int_{C_2} \bar{z}\, dz + \int_{C_3} \bar{z}\, dz$$

$$= \frac{7\pi}{4} i$$

مثال:

$$\int_C z^3 (1+|z|^2)\, d\bar{z}$$



$$C_1: \begin{cases} z = r e^{i\times 0} = r & 0 \leq r \leq 3 \\ |z|^2 = r^2 \\ \bar{z} = r \Rightarrow d\bar{z} = dr \end{cases}$$

$$\int_{C_1} z^3 (1+|z|^2)\, d\bar{z} = \int_0^3 r^3 (1+r^2)\, dr$$

$$= \int_0^3 (r^3 + r^5)\, dr = \frac{3^4}{4} + \frac{3^6}{6} \quad (1)$$

$$C_{۲} : \begin{cases} z = ۳ e^{i\theta} \qquad ۰ \leq \theta \leq \frac{\pi}{۲} \qquad \left(\text{توجه} : |e^{i\theta}| = ۱ \right) \\ |z|^{۲} = ۹ \\ \bar{z} = ۳ e^{-i\theta} \Rightarrow d\bar{z} = -۳ i \, e^{-i\theta} \, d\theta \end{cases}$$

$$\int_{C_{۲}} z^{۳}(۱+|z|^{۲})\, d\bar{z} = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} ۳^{۳} e^{۳i\theta} (۱+۹) \times -۳i \, e^{-i\theta} \, d\theta$$

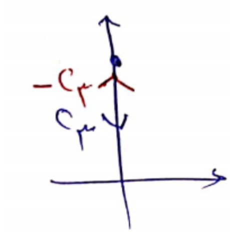
$$= ۲۷۰ \times -۳i \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} e^{۲i\theta} \, d\theta = ۸۱۰\, i \times \frac{۱}{۲i} e^{۲i\theta} \Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}$$

$$= -۸۱۰\, i \times \frac{۱}{۲i} \left(\underbrace{e^{\pi i}}_{-۱} - \underbrace{e^{۰}}_{۱} \right)$$

$$= -\frac{۸۱۰}{۲} \times -۲ = ۸۱۰ \qquad ۲$$

ادامه حل:

$$\int_{C_{۳}} z^{۳}(۱+|z|^{۲})\, d\bar{z} \tag{۰.۱}$$



$$-C_{۳} : \begin{cases} z = r e^{\frac{i\pi}{۲}}, \quad ۰ \leq r \leq ۳ \\ |z|^{۲} = r^{۲} \\ \bar{z} = r e^{-\frac{i\pi}{۲}} \\ d\bar{z} = e^{-\frac{i\pi}{۲}} \, dr \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(۰.۱)} \int_{C_۲} z^۳(۱+|z|^۲)\, d\bar{z}$$
$$= -\int_۰^۳ r^۳ e^{\frac{۳i\pi}{۲}}(۱+r^۲) \times e^{-\frac{i\pi}{۲}}\, dr$$
$$= -e^{\frac{۲i\pi}{۲}} \int_۰^۳ (r^۳+r^۵)\, dr = -\underbrace{e^{i\pi}}_{-۱}(\frac{۳^۴}{۴}+\frac{۳^۶}{۶}) = \frac{۳^۴}{۴}+\frac{۳^۶}{۶}$$

$$\Longrightarrow \int_C z^۳(۱+|z|^۲)\, d\bar{z}$$
$$= \int_{C_۱} z^۳(۱+|z|^۲)\, d\bar{z} + \int_{C_۲} z^۳(۱+|z|^۲)\, d\bar{z} + \int_{-C_۳} z^۳(۱+|z|^۲)\, d\bar{z} = \frac{۳^۴}{۲}+\frac{۳^۶}{۳}+۸۱۰$$

روش دوم برای حل مثال قبل: برای مسیرهای $C_۱$ و $C_۲$ در مثال قبل می توان به شیوه زیر نیز عمل کرد که ساده تر است. بقیه حل شبیه قبل است.

$$C_۱ : \begin{cases} \overbrace{z = x+iy}^{y=۰} = x, \quad ۰ \leq x \leq ۳ \\ |z|^۲ = x^۲ \\ \bar{z} = x \\ d\bar{z} = dx \end{cases}$$

$$\int_{C_۱} z^۳(۱+|z|^۲)\, d\bar{z} = \int_۰^۳ x^۳(۱+x^۲)\, dx = \frac{۳^۴}{۴}+\frac{۳^۶}{۶}$$

$$C_۲ : \begin{cases} \overbrace{z = x+iy}^{x=۰} = iy, \quad ۰ \leq y \leq ۳ \\ |z|^۲ = y^۲ \\ \bar{z} = -iy \\ d\bar{z} = -idy \end{cases}$$

$$\int_{C_۲} z^۳(۱+|z|^۲)\, d\bar{z} = -\int_۰^۳ i^۳ y^۳(۱+y^۲)\; -idy = \frac{۳^۴}{۴}+\frac{۳^۶}{۶},$$

......

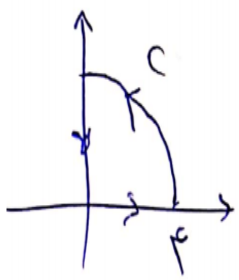
تمرین ۱. حاصل انتگرال های زیر را بیابید.

۱) $\int_C (\bar{z}+|z|)\, dz, \qquad C :$ مسیری روی دایره‌ی به شعاع $\sqrt{۲}$ از $\sqrt{۲}$ تا $۱+i$.

۲) $\int_C (۳\bar{z}-|z|)\, dz, \qquad C :$ مسیری روی دایره‌ی به شعاع ۲ از $\sqrt{۳}+i$ تا $-۱+\sqrt{۳}i$.

تمرین:

$$\int_C \bar{z}^2 \,(1+|z|)\, dz$$



قضیه ۳. *فرض کنید C یک خم ساده باشد که ابتدای آن در z_1 و انتهای آن در z_2 است و $z_2 \neq z_1$. برای حل انتگرال $\int_C f(z)dz$: اگر برای تابع f یک تابع اولیه مثل $F(z)$ موجود باشد بطوری که F روی C تحلیلی باشد آنگاه:*

$$\int_C f(z)dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z)|_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1).$$

در این حالت چون تابع اولیه‌ی تحلیلی وجود دارد پس انتگرال به مسیر بستگی ندارد.

مثال ۳. مقدار انتگرال زیر را در مسیر داده شده بیابید.

$$\int_C z\, dz, \qquad C:$$ خط قائم از 1 تا $1+i$ و سپس خط افقی از $1+i$ تا $2+i$.

جواب. در این مثال تابع $f(z) = z$ تابع اولیه‌ی $F(z) = \frac{1}{2}z^2$ را دارد. پس

$$\int_C zdz = \frac{1}{2}z^2\Big|_1^{2+i} = \frac{(2+i)^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 1 + 2i.$$