چند تابع مهم مختلط

در این بخش چند تابع مختلط مقدماتی را معرفی می کنیم.

تابع نمایی:

برای عدد مختلط $z = x + yi$، تابع نمایی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(z) = e^z = e^{(x+yi)} = e^x(\cos(y) + \sin(y)i).$$

بنابراین

$$u = e^x \cos(y), \qquad v = e^x \sin(y)$$

چون u و v همه جا پیوسته اند پس e^z نیز در کل $\mathbb{C}$ پیوسته است.

مثال ۱. آیا e^z تام است؟ مشتق آنراحساب کنید.

$$\begin{aligned}
&u = e^x \cos(y), \qquad v = e^x \sin(y) \\
&\Rightarrow u_x = e^x \cos(y), \quad u_y = -e^x \sin(y), \quad v_x = e^x \sin(y), \quad v_y = e^x \cos(y) \\
&\Rightarrow u_x = v_y, \quad u_y = -v_x
\end{aligned}$$

بنابراین u, v در شرایط کوشی ریمان صدق می کند و دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته اند. پس همه جا مشتق پذیر و در همه جا تحلیلی است و بنابراین تابعی تام است.

$$(e^z)' = u_x + iv_x = e^x(\cos(y) + \sin(y)i) = e^z$$

توجه ۱. برای تابع نمایی در فضای مختلط داریم:

۱) تابع نمایی مختلط e^z برخلاف تابع نمایی حقیقی همیشه مثبت نیست.

$$\begin{aligned}
&۲)\ e^{(x+۰i)} = e^x. \\
&۳)\ |e^z| = e^x \neq ۰ \\
&۴)\ e^z \neq ۰ \\
&۵)\ e^z = e^w \Rightarrow z = w + ۲k\pi i \\
&۶)\ e^{z_۱+z_۲} = e^{z_۱}e^{z_۲}
\end{aligned}$$

مثال ۲. معادله‌ی $e^z = -۱$ را حل کنید.

جواب.

$$e^z = -۱ \quad \Rightarrow e^{(x+yi)} = -۱ = e^{\pi i} \quad \Rightarrow \begin{cases} e^x = ۱ \Rightarrow x = ۰. \\ e^{yi} = e^{\pi i} \quad \Rightarrow y = ۲k\pi + \pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

پس جواب معادله $z = (۲k + ۱)\pi i$ برای $k \in \mathbb{Z}$ است.

مثال ۳. معادله‌ی $e^z = -۱ + i$ را حل کنید.

جواب.

$$e^z = -۱ + i \quad \Rightarrow e^{(x+yi)} = -۱ + i = \sqrt{۲}e^{\left(\frac{۳\pi}{۴}\right)i} \quad \Rightarrow \begin{cases} e^x = \sqrt{۲} \Rightarrow x = \ln(\sqrt{۲}) = \frac{۱}{۲}\ln(۲). \\ e^{yi} = e^{\left(\frac{۳\pi}{۴}\right)i} \quad \Rightarrow y = ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۴}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

پس جواب معادله $z = \frac{۱}{۲}\ln(۲) + \left(۲k + \frac{۳}{۴}\right)\pi i$ برای $k \in \mathbb{Z}$ است.

مثال ۴. معادله‌ی $e^z = ۱ - \sqrt{۳}i$ را حل کنید.

جواب.

$$e^z = ۱ - \sqrt{۳}i \quad \Rightarrow e^{(x+yi)} = ۱ - \sqrt{۳}i = ۲e^{\left(-\frac{\pi}{۳}\right)i} \quad \Rightarrow \begin{cases} e^x = ۲ \Rightarrow x = \ln(۲). \\ e^{yi} = e^{\left(-\frac{\pi}{۳}\right)i} \quad \Rightarrow y = ۲k\pi - \frac{\pi}{۳}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

پس جواب معادله $z = \ln(۲) + \left(۲k - \frac{۱}{۳}\right)\pi i$ برای $k \in \mathbb{Z}$ است.

توجه ۲. تمام معادلات فوق لگاریتم گرفتن از طرفین نیز می تواند حل شود. که در بخش لگاریتم آن را توضیح می دهیم.

تمرین ۱. معادله‌ی $e^z = -\frac{۱}{\sqrt{۳}}i$ را حل کنید.

قضیه ۱. *اگر $f(z)$ تابعی مشتق پذیر باشد آنگاه*

$$(e^{f(z)})' = f'(z)e^{f(z)}$$

نتیجه ۱. نقاط تحلیلی و نقاط تکین تابع $f(z)$ و $e^{f(z)}$ یکی است.

مثال: ناحیه تحلیلی $f(z) = e^{z^۲+i\bar{z}}$ را بیابید.

جواب. میدانیم که $\bar{z}$ هیچ جا تحلیلی نیست. پس $z^۲ + i\bar{z}$ هیچ جا تحلیلی نیست. پس ناحیه تحلیلی $e^{z^۲+i\bar{z}} = \emptyset$

تابع لگاریتم طبیعی:

برای عدد مختلط $z = re^{\theta i}$ که در آن $r \neq ۰$ تابع لگاریتم طبیعی را به صورتی تعریف می‌کنیم که معکوس تابع e^z باشد. بدین منظور تعریف می‌کنیم:

$$\log(z) = \log(re^{\theta i}) = \ln(r) + \theta i.$$

توجه ۳. اگر زاویه‌ی θ را در بازه‌ی $-\pi < \theta \leq \pi$ درنظر بگیریم آنگاه $\log(z)$ را شاخه‌ی اصلی لگاریتم می‌نامیم و با $Log(z)$ نشان می دهیم. پس داریم:

$$\begin{aligned} \log(z) &= \ln(r) + i(\theta + ۲k\pi) \\ Log(z) &= ln(r) + i\theta = ln(r) + iArg(z) \end{aligned}$$

پس

$$u = \ln(r), \quad v = \theta$$

توجه ۴. دامنه‌ی تابع مختلط $\log(z)$ برخلاف تابع لگاریتمی حقیقی شامل اعداد حقیقی منفی هم هست.

مثال ۵. شاخه‌ی اصلی لگاریتم $z = -۱ + i$ را محاسبه کنید.

جواب.

$$z = -۱ + i \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^۲ + y^۲} = \sqrt{(-۱)^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۲}, \\ \theta = \tan^{-۱}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-۱}\left(\frac{۱}{-۱}\right) = \tan^{-۱}(-۱) = \frac{۳\pi}{۴} \text{ یا } \frac{۳\pi}{۴} - \pi, \end{cases}$$

حال چون در z علامت x منفی و علامت y مثبت است پس z در ربع دوم قرار دارد. درنتیجه $\theta = \frac{۳\pi}{۴}$ پس:

$$Log(z) = Log(-۱ + i) = \ln(\sqrt{۲}) + \frac{۳\pi}{۴}i$$

مثال ۶. مقدار $Log(-۱)$ را محاسبه کنید.

جواب.

$$z=-۱ \Rightarrow \begin{cases} r=\sqrt{x^۲+y^۲}=\sqrt{(-۱)^۲+۰^۲}=۱, \\ \theta=\tan^{-۱}\left(\frac{y}{x}\right)=\tan^{-۱}\left(\frac{۰}{-۱}\right)=\tan^{-۱}(۰^-)=\pi, \end{cases} \Rightarrow Log(z)=Log(-۱)=\ln(۱)+\pi i=\pi i.$$

تمرین ۲. مقدار شاخه‌ی اصلی لگاریتم را برای اعداد $z_۱=-۲-۲\sqrt{۳}i$ و $z_۲=\pi e^{\left(-\frac{۳\pi}{۲}i\right)}$ محاسبه کنید.

توجه ۵. قبلا برای حل معادلاتی شبیه $e^z=-۲$ روشی را ارائه کردیم. به روش معکوس آن یعنی لگاریتم هم میتوانیم مساله را حل کنیم.

$$e^z=-۲ \Rightarrow z=log(-۲)=ln(۲)+i(\pi+۲k\pi)$$

مثال ۷. معادله‌ی $e^{iz}=۱-\sqrt{۳}i$ را حل کنید.

جواب.

$$\begin{aligned} &۱-\sqrt{۳}i \Rightarrow r=۲, \quad \theta=-\frac{\pi}{۳} \\ &e^{iz}=۱-\sqrt{۳}i \Rightarrow iz=log(۱-\sqrt{۳}i) \Rightarrow z=\frac{۱}{i}log(۱-\sqrt{۳}i) \\ &\Rightarrow z=\frac{۱}{i}\left(ln(۲)+i\left(۲k\pi-\frac{\pi}{۳}\right)\right) \\ &\Longrightarrow z=\frac{۱}{i}ln(۲)+\left(۲k\pi-\frac{\pi}{۳}\right)=-iln(۲)+\left(۲k\pi-\frac{\pi}{۳}\right) \end{aligned}$$

تمرین ۳. معادله $e^{iz}+\sqrt{۳}i+۱=۰$ را حل کنید.

قضیه ۲. *فرض کنید $z, z_۱, z_۲$ سه عدد مختلط غیر صفر باشند و n عددی صحیح باشد در این صورت:*

$$\begin{aligned} &۱)\ e^{log(z)}=\{z\}, \quad ۲)\ log(e^z)=\{z+۲k\pi i; k\in\mathbb{Z}\} \\ &۳)\ log(z_۱z_۲)=log(z_۱)+log(z_۲) \\ &۴)\ log(\frac{z_۱}{z_۲})=log(z_۱)-log(z_۲) \\ &۵)\ log(z^n)=nlog(z)+۲k\pi i \end{aligned}$$

توجه ۶. اگر در قضیه فوق $log(z)$ را به $Log(z)$ تبدیل کنیم، روابط لزوما برقرار نیستند

مثال ۸. آیا رابطه $Log(i(-۱+i))=Log(i)+Log(-۱+i)$ برقرار است؟

جواب.

$$\begin{aligned} &Log(i(-۱+i))=Log(-i-۱)=ln(\sqrt{۲})-\frac{۳\pi}{۴}i \\ &Log(i)=\frac{\pi}{۲}i, \quad Log(-۱+i)=ln(\sqrt{۲})+\frac{۳\pi}{۴}i \\ &ln(\sqrt{۲}+\frac{۳\pi}{۴}i\neq\frac{\pi}{۲}i,+ln(\sqrt{۲})-\frac{۳\pi}{۴}i \end{aligned}$$

مثال ۹. مشتق پذیری $Log(z)$ را بررسی کنید.

جواب. می‌دانیم که برای این تابع $u(r,\theta)=\ln(r)$ و $v(r,\theta)=\theta$ هستند. واضح است که تابع u در همه‌ی $\mathbb{C}$ به جز مبدا پیوسته است. همچنین در فصل قبل نشان دادیم که تابع v در قسمت منفی محور حقیقی حد ندارد و درنتیجه پیوسته نیست. برای بقیه‌ی نقاط شرایط کوشی ریمان را به شکل زیر داریم:

$$u_r=\frac{1}{r}=\frac{1}{r}v_\theta, \qquad v_r=0=-\frac{1}{r}u_\theta,$$

پس این تابع در همه‌ی صفحه‌ی مختلط به جز مبدا و قسمت منفی محور حقیقی مشتق پذیر است و

$$f'(z)=e^{-\theta i}\ (u_r+v_r i)=e^{-\theta i}\left(\frac{1}{r}+0i\right)=\frac{1}{z}.$$

نتیجه ۲.

$$\text{ناحیه تحلیلی } Log(z)=\{(r,\theta);\ r>0,\ \ -\pi<\theta<\pi\}$$
$$=\mathbb{C}-\{(x,y);\ x\le 0,\ y=0\}$$

$$\Longrightarrow \text{نقاط تکین } Log(z)=\{(x,y);\ x\le 0,\ y=0\}$$

توجه ۷.

$$\text{ناحیه تحلیلی } Log(g(z))=D_1\cap D_2$$

که

$$D_1=\{\text{ناحیه تحلیلی } g(z)\},$$
$$D_2=\mathbb{C}-\{(x,y);\ u\le 0,\ v=0\}$$

و برای نقاط تکین $Log(g(z))$ از فرمول زیر استفاده می کنیم:

$$\text{نقاط تکین } Log(g(z))=D_1\cup D_2$$

$$D_1=\{\text{نقاط تکین } g(z)\},$$
$$D_2=\{(x,y);\ u\le 0,\ v=0\}$$

که در آن $u,\ v$ توابع مولفه ای $g(z)$هستند یعنی

$$g(z)=u+iv$$

مثال ۱۰. ناحیه تحلیلی $Log(1+z^2)$ را بدست آورید.

جواب.

$$1+z^2=1+(x+yi)^2=1+x^2-y^2+2xyi$$

$$\begin{cases} u\le 0, \\ v=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+x^2-y^2\le 0, \\ 2xy=0 \ \Rightarrow\ x=0 \text{ یا } y=0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$x=0\ \Rightarrow\ 1-y^2\le 0\ \Rightarrow\ y^2\ge 1\ \Rightarrow\ y\le -1 \text{ یا } y\ge 1,$$

$$y=0\ \Rightarrow\ 1+x^2\le 0\ \Rightarrow\ x^2\le -1\ \rightarrow \text{غیر ممکن}.$$

$$D_1 = \{ \text{ناحیه تحلیلی } 1+z^2 \} = \mathbb{C}$$

$$D_2 = \mathbb{C} - \{(x,y);\ u \leq 0,\ v = 0\} = \mathbb{C} - \{(x,y):\ x = 0, \quad y \leq -1 \text{ یا } y \geq 1\},$$

$$\{ \text{ناحیه تحلیلی } Log(1+z^2) \} = D_1 \cap D_2 = \mathbb{C} - \{(x,y):\ x = 0, \quad y \leq -1 \text{ یا } y \geq 1\},$$

و

$$\{ \text{نقاط تکین } Log(1+z^2) \} = D_1 \cup D_2 = \{(x,y):\ x = 0, \quad y \leq -1 \text{ یا } y \geq 1\},$$

مثال ۱۱. نقاط تکین $f(z) = Log(e^{z+i})$ را بدست آورید.

جواب.

$$D_1 = \text{تکین} e^{z+i} = \emptyset$$
$$e^{z+i} = e^{x+i(y+1)} = e^x\, e^{(y+1)i}$$
$$= e^x \Big(\cos(y+1) + i \sin(y+1) \Big)$$

$$\Rightarrow u = e^x \cos(y+1) \quad v = e^x \sin(y+1)$$

$$\begin{cases} u \leq 0, \\ v = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1)\ e^x \cos(y+1) \leq 0, \\ 2)\ e^x \sin(y+1) = 0 \ \Rightarrow\ \sin(y+1) = 0 \Rightarrow y+1 = k\pi \Rightarrow y = k\pi - 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$1)\ e^x \cos(k\pi - 1 + 1) \leq 0 \Rightarrow e^x(-1)^k \leq 0$$

$$\text{زوج } k = 2n \Rightarrow e^x \leq 0 \Rightarrow \text{غیر ممکن}$$
$$\text{فرد } k = 2n+1 \Rightarrow -e^x \leq 0 \Rightarrow e^x \geq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow D_2 = \{(x,y):\ x \in \mathbb{R},\ y = (2n+1)\pi - 1,\ n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\text{نقاط تکین} = D_1 \cup D_2 = \{(x,y):\ x \in \mathbb{R},\ y = (2n+1)\pi - 1,\ n \in \mathbb{Z}\}$$

تمرین ۴. ناحیه تحلیلی $Log(2zi - (1+3i))$ رابیابید.

مثال ۱۲. نقاط تکین $\dfrac{Log(z+4)}{z^2+i}$ را بدست آورید.

جواب.

نقاط تکین = نقاط تکین صورت $\cup$ نقاط تکین مخرج $\cup$ ریشه های مخرج

تکین مخرج $= \emptyset$

$z + ۴ = x + ۴ + iy$

$$\begin{cases} u \leq ۰, \\ v = ۰, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + ۴ \leq ۰, \\ y = ۰ \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ تکین صورت $= \{(x, y) :\ x \leq -۴,\ y = ۰\}$

$z^۲ + i = ۰ \Rightarrow z = \sqrt{-i}$

$r = ۱, \theta = -\frac{\pi}{۲},\ n = ۲$

$w_k = \cos\left(\frac{-\frac{\pi}{۲} + ۲k\pi}{۲}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{۲} + ۲k\pi}{۲}\right),\ k = ۰, ۱$

$w_۰ = \cos(-\frac{\pi}{۴}) + i\sin(-\frac{\pi}{۴}) = \frac{\sqrt{۲}}{۲} - i\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

$w_۱ = -\frac{\sqrt{۲}}{۲} + i\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

ریشه های مخرج $= \{\frac{\sqrt{۲}}{۲} - i\frac{\sqrt{۲}}{۲}, -\frac{\sqrt{۲}}{۲} + i\frac{\sqrt{۲}}{۲}\}$

نقاط تکین $= \{\frac{\sqrt{۲}}{۲} - i\frac{\sqrt{۲}}{۲}, -\frac{\sqrt{۲}}{۲} + i\frac{\sqrt{۲}}{۲}\} \cup \{(x, y) :\ x \leq -۴,\ y = ۰\}$

توابع توانی:

فرم کلی یک تابع توانی به صورت زیر است

$$f(z)^{g(z)} = e^{g(z)Log(f(z))}$$

مثال ۱۳. $(i + ۱)^i$ را به فرم یک عدد مختلط بنویسید.

جواب.

$$\begin{aligned} (i + ۱)^i &= e^{iLog(i+۱)} = e^{i(ln(\sqrt{۲})+i\frac{\pi}{۴}))} \\ &= e^{iln(\sqrt{۲})-\frac{\pi}{۴}} = e^{-\frac{\pi}{۴}}\Big(\cos(ln(\sqrt{۲})) + i\sin(ln(\sqrt{۲}))\Big) \end{aligned}$$

توجه ۸.

تکین f^g =تکین $gLog(f)$ =تکین $g \cup$ تکین $Log(f)$ = تکین $g \cup$ تکین $f \cup D$

که

$$D = \{(x,y):\ u \le 0,\ v = 0\},\quad f(z) = u + iv$$

مثال ۱۴. ناحیه تحلیلی $\sqrt{e^z+1}$ را بیابید.

جواب.

$$\sqrt{e^z+1} = \left(e^z+1\right)^{\frac{1}{2}}$$

ین ,تکین $e^z + 1 = \emptyset$

$$e^z + 1 = e^{x+iy} + 1 = e^x\cos(y) + 1 + ie^x\sin(y)$$

$$\begin{cases} u \le 0, \\ v = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1)\ e^x\cos(y) + 1 \le 0, \\ 2)\ e^x\sin(y) = 0 \end{cases}$$

$$2)\ \Rightarrow y = k\pi$$

$$1)\ \Rightarrow e^x\cos(k\pi) + 1 \le 0 \Rightarrow e^x(-1)^k + 1 \le 0$$

زوج $k = 2n \Rightarrow e^x + 1 \le 0 \Rightarrow$ غیر ممکن

فرد $k = 2n+1 \Rightarrow -e^x + 1 \le 0 \Rightarrow e^x \ge 1 \Rightarrow x \ge 0$

$$y = (2n+1)\pi,\ \ x \ge 0 \Rightarrow D = \{(x,y):\ x \ge 0,\ y = (2n+1)\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$$

نقاط تکین $= \emptyset \cup \emptyset \cup D = \{(x,y):\ x \ge 0,\ y = (2n+1)\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$

مثال ۱۵. نقاط تکین تابع $f(z) = z^{Log(z^2+4)}$ را بیابید.

جواب.

تکین $z = \emptyset$، تکین $z^2 + 4 = \emptyset$

$$z^2 + 4 = x^2 - y^2 + 4 + i2xy$$

$$\begin{cases} u \le 0, \\ v = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1)\ x^2 - y^2 + 4 \le 0, \\ 2)\ 2xy = 0 \ \Rightarrow\ x = 0 \text{ یا } y = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$x = 0 \ \Rightarrow\ -y^2 + 4 \le 0 \ \Rightarrow\ y^2 \ge 4 \ \Rightarrow\ y \le -2$ یا $y \ge 2,$

$y = 0 \ \Rightarrow\ 4 + x^2 \le 0 \ \rightarrow$ غیر ممکن.

$\Rightarrow$ تکین $Log(z^2+4) =$ تکین $z^2 + 4 \cup \{u \le 0, v = 0\} = \emptyset \cup \{x = 0,\ |y| \ge 2\} = \{(x,y) : x = 0,\ |y| \ge 2\}$

تکین $Log(z) = \{(x,y) : x \le 0, y = 0\}$

$$\Longrightarrow \text{تکین } f = \{(x,y) : x \leq ۰, y = ۰\} \cup \{(x,y) : x = ۰,\ |y| \geq ۲\}$$

تمرین ۵. نقاط تکین توابع زیر را بنویسید.

$$
\begin{aligned}
&۱\ (z^{۲} - ۴)^{Log(z^{۲}+۱)}\\
&۲)\ Log(\bar{z}^{۲} + iz)\\
&۳)\ \frac{z^{۲} + e^{z^{۳}}}{(e^{z} + ۳)(z^{۲} + z + ۱)}\\
&۴)\ e^{|z|^{۲}}\\
&۵)\ \frac{Log(z^{۲} + ۹)}{z^{۲} + ۴}\\
&۶)\ (z - \frac{۱}{z})^{Log(z^{۲}+۴)}
\end{aligned}
$$