سری تیلور و مکلورن

تعریف ۱. سری تیلور: فرض کنید تابع $f(z)$ روی ناحیه‌ی D تعریف شده باشد و $z_۰ \in D$. به سری زیر سری تیلور (بسط تیلور) تابع f حول $z_۰$ می‌گوییم:

$$f(z) = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_۰)}{n!} (z - z_۰)^n.$$

توجه ۱. اگر تابع f در $z_۰$ تحلیلی باشد آنگاه سری تیلور تابع f حول $z_۰$ قابل تعریف و یکتاست و در یک دایره به مرکز $z_۰$ به تابع همگرا است.

تعریف ۲. سری مکلورن: اگر در سری تیلور $z_۰ = ۰$ باشد آنگاه سری را سری مکلورن تابع f می‌نامیم.

توجه ۲. چند سری مکلورن مهم و ناحیه‌ی همگرایی آنها به صورت زیر هستند:

$$۱)\ \frac{۱}{۱-z} = \sum_{n=۰}^{\infty} z^n = ۱ + z + z^۲ + \cdots, \qquad |z| < ۱.$$

$$۲)\ e^z = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = ۱ + z + \frac{z^۲}{۲!} + \cdots, \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

$$۳)\ \sin(z) = \sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n \frac{z^{(۲n+۱)}}{(۲n+۱)!} = z - \frac{z^۳}{۳!} + \frac{z^۵}{۵!} - \cdots, \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

$$۴)\ \sinh(z) = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{z^{(۲n+۱)}}{(۲n+۱)!} = z + \frac{z^۳}{۳!} + \frac{z^۵}{۵!} + \cdots, \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

$$۵)\ \cos(z) = \sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n \frac{z^{(۲n)}}{(۲n)!} = ۱ - \frac{z^۲}{۲!} + \frac{z^۴}{۴!} - \cdots, \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

$$۶)\ \cosh(z) = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{z^{(۲n)}}{(۲n)!} = ۱ + \frac{z^۲}{۲!} + \frac{z^۴}{۴!} + \cdots, \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

مثال ۱. سری مکلورن و ناحیه‌ی همگرایی سری را برای توابع زیر بیابید.

$$۱)\ f(z) = \frac{۱}{۱+z}.$$

جواب. برای این مثال می‌توانیم از سری مکلورن تابع $\frac{۱}{۱-z}$ که در توجه ۱ بیان شد استفاده کنیم. یعنی:

$$f(z) = \frac{۱}{۱+z} = \frac{۱}{۱-(-z)}.$$

حال کافی است که در سری مکلورن تابع $\frac{۱}{۱-z}$ به جای همه‌ی z ها $-z$ را قرار دهیم:

$$f(z) = \frac{۱}{۱+z} = \sum_{n=۰}^{\infty} (-z)^n = ۱ - z + z^۲ - \cdots.$$

از طرفی برای پیدا کردن ناحیه‌ی همگرایی سری هم از ناحیه‌ی همگرایی سری مکلورن تابع $\frac{۱}{۱-z}$ استفاده می‌کنیم:

$$|-z| < ۱ \Rightarrow |z| < ۱.$$

پس ناحیه‌ی همگرایی این سری $|z| < ۱$ است.

$$۲)\ f(z) = \frac{۱}{z^۲ - ۱}.$$

جواب. برای این مثال هم از سری مکلورن تابع $\frac{۱}{۱-z}$ که در توجه ۱ بیان شد استفاده می‌کنیم:

$$f(z) = \frac{۱}{z^۲ - ۱} = \frac{-۱}{۱-(z^۲)}.$$

حال کافی است که در سری مکلورن تابع $\frac{۱}{۱-z}$ به جای همه‌ی z ها $z^۲$ را قرار دهیم و کل سری را در منفی ضرب کنیم (به خاطر وجود -۱ در صورت کسر):

$$f(z) = \frac{۱}{z^۲ - ۱} = -\sum_{n=۰}^{\infty} (z^۲)^n = -\sum_{n=۰}^{\infty} z^{(۲n)} = -۱ - z^۲ - z^۴ - \cdots.$$

از طرفی برای پیدا کردن ناحیه‌ی همگرایی سری هم از ناحیه‌ی همگرایی سری مکلورن تابع $\frac{۱}{۱-z}$ استفاده می‌کنیم:

$$|z^۲| < ۱ \Rightarrow |z|^۲ < ۱ \Rightarrow |z| < ۱.$$

پس ناحیه‌ی همگرایی این سری $|z| < ۱$ است.

$$۳)\ f(z) = \frac{۱}{(z-i)(z+i)}.$$

جواب. این تابع در واقع تابع $\frac{۱}{z^۲+۱}$ است. پس:

$$\frac{۱}{z^۲+۱} = \frac{۱}{۱-(-z^۲)} = \sum_{n=۰}^{\infty} (-z^۲)^n = \sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n z^{۲n} = ۱ - z^۲ + z^۴ - \cdots,$$

از طرفی برای پیدا کردن ناحیه‌ی همگرایی سری هم از ناحیه‌ی همگرایی سری مکلورن تابع $\frac{۱}{۱-z}$ استفاده می‌کنیم:

$$|-z^۲| = |z^۲| < ۱ \Rightarrow |z|^۲ < ۱ \Rightarrow |z| < ۱.$$

پس ناحیه‌ی همگرایی این سری هم $|z| < ۱$ است.

$$۴)\ f(z) = \frac{z}{(z-۱)(z+۲)}.$$

جواب. برای حل این مثال اول از تجزیه‌ی کسرها استفاده می‌کنیم:

$$\frac{z}{(z-۱)(z+۲)} = \frac{A}{z-۱} + \frac{B}{z+۲} = \frac{A(z+۲)+B(z-۱)}{(z-۱)(z+۲)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=۱, \\ ۲A-B=۰, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{۱}{۳}, \\ B=\frac{۲}{۳}, \end{cases}$$

پس می‌توانیم بنویسیم:

$$f(z) = \frac{z}{(z-۱)(z+۲)} = \frac{\frac{۱}{۳}}{z-۱} + \frac{\frac{۲}{۳}}{z+۲} = \frac{\frac{-۱}{۳}}{۱-z} + \frac{\frac{۲}{۳}}{۲(۱-(-\frac{z}{۲}))} = \frac{-۱}{۳}\left(\frac{۱}{۱-z}\right) + \frac{۱}{۳}\left(\frac{۱}{۱-(-\frac{z}{۲})}\right)$$

حال با استفاده از سری مکلورن تابع $\frac{۱}{۱-z}$ که در توجه ۱ بیان شد داریم:

$$f(z) = \frac{-۱}{۳}\sum_{n=۰}^{\infty} z^n + \frac{۱}{۳}\sum_{n=۰}^{\infty}\left(\frac{-z}{۲}\right)^n = \frac{-۱}{۳}\sum_{n=۰}^{\infty}\left(۱ - \frac{(-۱)^n}{۲^n}\right)z^n = \frac{-۱}{۳}\left(\frac{۳}{۲}z + \frac{۳}{۴}z^۲ + \frac{۹}{۸}z^۳ + \cdots\right).$$

برای پیدا کردن ناحیه‌ی همگرایی هم باید از ناحیه‌ی همگرایی سری مکلورن تابع $\frac{1}{1-z}$ استفاده کنیم:

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \cap \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \left|\frac{-z}{2}\right| < 1\right\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}.$$

پس ناحیه‌ی همگرایی این سری هم $|z| < 1$ است.

$$5)\; f(z) = \frac{1+i}{(z+i)(z-1)}.$$

جواب. برای حل این تمرین اول از تجزیه‌ی کسرها استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1+i}{(z+i)(z-1)} = \frac{A}{z+i} + \frac{B}{z-1} = \frac{A(z-1)+B(z+i)}{(z+i)(z-1)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0, \\ -A+Bi = 1+i, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1, \\ B=1, \end{cases}$$

پس می‌توانیم بنویسیم:

$$f(z) = \frac{1+i}{(z+i)(z-1)} = \frac{-1}{z+i} + \frac{1}{z-1} = \frac{-1}{i\left(1+\frac{z}{i}\right)} + \frac{-1}{1-z} = \frac{i}{1-\left(-\frac{z}{i}\right)} + \frac{-1}{1-z}.$$

حال با استفاده از سری مکلورن تابع $\frac{1}{1-z}$ که در توجه ۱ بیان شد داریم:

$$f(z) = i \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{i}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

برای پیدا کردن ناحیه‌ی همگرایی هم باید از ناحیه‌ی همگرایی سری مکلورن تابع $\frac{1}{1-z}$ استفاده کنیم:

$$\left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \left|-\frac{z}{i}\right| < 1\right\} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < |i| = 1\} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}.$$

پس ناحیه‌ی همگرایی این سری هم $|z| < 1$ است.

$$6)\; f(z) = z\sin(z^2).$$

جواب. برای این مثال از سری مکلورن تابع $\sin(z)$ که در توجه ۱ بیان شد استفاده می‌کنیم. یعنی در سری مکلورن تابع $\sin(z)$ به جای همه‌ی z ها قرار می‌دهیم z^2 و سپس کل سری را در z ضرب می‌کنیم:

$$f(z) = z\sin(z^2) = z\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z^2)^{(2n+1)}}{(2n+1)!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{(4n+3)}}{(2n+1)!} = z^3 - \frac{z^7}{3!} + \frac{z^{11}}{5!} - \cdots.$$

از طرفی چون ناحیه‌ی همگرایی سری مکلورن تابع $\sin(z)$ کل صفحه‌ی مختلط است پس ناحیه‌ی همگرایی این سری هم همه‌ی $z \in \mathbb{C}$ است.

$$7)\; f(z) = z^2\, e^{(-z+2)}.$$

جواب. برای این تابع داریم:

$$z^2\, e^{(-z)}\, e^2 = e^2\, z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!} = e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{(n+2)} = e^2\left(z^2 - z^3 + \frac{1}{2!}z^4 - \cdots\right),$$

از طرفی چون ناحیه‌ی همگرایی سری مکلورن تابع e^z کل صفحه‌ی مختلط است پس ناحیه‌ی همگرایی این سری هم همه‌ی $z \in \mathbb{C}$ است.

$$۸)\ f(z) = \cos(i\,z^{۲} + ۲).$$

جواب. برای این تابع داریم:

$$\cos(i\,z^{۲}+۲) = \cos(i\,z^{۲})\cos(۲) - \sin(i\,z^{۲})\sin(۲)$$

$$\cos(iz^{۲}) = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^n (iz^{۲})^{۲n}}{(۲n)!} = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^n (i^{۲})^n (z^{۲})^{۲n}}{(۲n)!} = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{z^{۴n}}{(۲n)!}$$

$$\sin(iz^{۲}) = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^n (iz^{۲})^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!} = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^n (i^{۲})^n\, i\,(z^{۲})^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!} = \sum_{n=۰}^{\infty} i\frac{z^{۴n+۲}}{(۲n+۱)!}$$

$$\Longrightarrow \cos(i\,z^{۲}+۲) = \cos(i\,z^{۲})\cos(۲) - \sin(i\,z^{۲})\sin(۲) = \cos(۲)\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{z^{۴n}}{(۲n)!} - \sin(۲)\sum_{n=۰}^{\infty} i\frac{z^{۴n+۲}}{(۲n+۱)!}$$

از طرفی چون ناحیه‌ی همگرایی سری مکلورن تابع $\cos(i\,z^{۲}+۲)$ کل صفحه‌ی مختلط است پس ناحیه‌ی همگرایی این سری هم همه‌ی $z \in \mathbb{C}$ است.

تمرین ۱. سری مکلورن توابع زیر را بیابید.

$$۱)\ f(z) = \frac{۰/۵ + i}{(z-۲i)(z+۱)}, \qquad ۲)\ f(z) = z^{۳}\ \cosh(z^{۲}i).$$