ادامه‌ی سری تیلور

مثال ۱. سری تیلور و ناحیه‌ی همگرایی آن را برای توابع داده شده در نقطه‌ی خواسته شده بیابید.

$$۱)\ f(z) = \frac{۱}{z}, \qquad z_{\circ} = ۱.$$

جواب. چون در این سوال $z_{\circ} = ۱$ است پس در سری تیلور تابع باید عامل $(z-۱)$ داشته باشیم. برای ایجاد این عامل عدد یک را به مخرج تابع اضافه و از آن کم می‌کنیم:

$$f(z) = \frac{۱}{z} = \frac{۱}{(z-۱)+۱} = \frac{۱}{۱-(-(z-۱))}.$$

حال از سری مکلورن تابع $\frac{۱}{۱-z}$ استفاده می‌کنیم. یعنی در سری مکلورن تابع $\frac{۱}{۱-z}$ به جای همه‌ی z ها قرار می‌دهیم $(-(z-۱))$:

$$f(z) = \sum_{n=\circ}^{\infty} (-(z-۱))^n = ۱-(z-۱)+(z-۱)^۲ - \cdots .$$

از طرفی طبق ناحیه‌ی همگرایی سری مکلورن تابع $\frac{۱}{۱-z}$ باید $|-(z-۱)| < ۱$ باشد. یعنی ناحیه‌ی همگرایی این سری $|z-۱| < ۱$ است.

$$۲)\ f(z) = \frac{۱}{۱+z}, \qquad z_{\circ} = i.$$

جواب. باید عامل $z-i$ را ایجاد کنیم:

$$\frac{۱}{۱+z} = \frac{۱}{۱+(z-i)+i} = \frac{۱}{(۱+i)\left(۱+\frac{z-i}{۱+i}\right)} = \frac{۱-i}{۲}\,\frac{۱}{۱-\frac{-(۱-i)}{۲}(z-i)}$$

$$= \frac{۱-i}{۲}\sum_{i=\circ}^{\infty}\left(\frac{-(۱-i)}{۲}(z-i)\right)^n = \sum_{i=\circ}^{\infty}(-۱)^n\left(\frac{۱-i}{۲}\right)^{(n+۱)}(z-i)^n,$$

از طرفی ناحیه‌ی همگرایی این سری به صورت:

$$\left|-\frac{۱-i}{۲}(z-i)\right| < ۱ \Rightarrow \left|\frac{۱-i}{۲}\right|\,|z-i| < ۱ \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{۲}}|z-i| < ۱ \Rightarrow |z-i| < \sqrt{۲}.$$

$$۳)\ f(z) = \frac{۳}{z(z-۳)}, \qquad z_{\circ} = i.$$

جواب. در این مثال هم اول کسر را تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{۳}{z(z-۳)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-۳} = \frac{A(z-۳)+Bz}{z(z-۳)} \Rightarrow \begin{cases} A+B = \circ, \\ -۳A = ۳, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -۱, \\ B = ۱, \end{cases}$$

پس می‌توانیم بنویسیم:

$$f(z) = \frac{۳}{z(z-۳)} = \frac{-۱}{z} + \frac{۱}{z-۳}.$$

از طرفی چون سری تیلور حول نقطه‌ی $z_0 = i$ خواسته شده پس باید در مخرج کسرها عامل $(z-i)$ را به وجود بیاوریم. یعنی:

$$f(z) = \frac{-1}{z} + \frac{1}{z-3} = \frac{-1}{(z-i)+i} + \frac{1}{(z-i)+i-3} = \frac{-1}{i\left(1+\frac{(z-i)}{i}\right)} + \frac{1}{(i-3)\left(1+\frac{(z-i)}{(i-3)}\right)}$$

$$= \frac{-1}{i}\left(\frac{1}{1-\left(-\frac{(z-i)}{i}\right)}\right) + \frac{1}{i-3}\left(\frac{1}{1-\left(-\frac{(z-i)}{(i-3)}\right)}\right)$$

$$= i\left(\frac{1}{1-(i(z-i))}\right) + \frac{-3-i}{10}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{(3+i)}{10}(z-i)\right)}\right)$$

حال با استفاده از سری مکلورن تابع $\frac{1}{1-z}$ داریم:

$$f(z) = i\sum_{n=0}^{\infty}(i(z-i))^n + \frac{-3-i}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(3+i)}{10}(z-i)\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(i^{(n+1)} - \left(\frac{3+i}{10}\right)^{(n+1)}\right)(z-i)^n$$

$$= \left(i - \frac{3+i}{10}\right) + \left(-1 - \left(\frac{3+i}{10}\right)^2\right)(z-i) + \left(-i - \left(\frac{3+i}{10}\right)^3\right)(z-i)^2 + \cdots.$$

در نهایت با استفاده از ناحیه‌ی همگرایی سری مکلورن تابع $\frac{1}{1-z}$ ناحیه‌ی همگرایی این سری برابر است با:

$$\{z\in\mathbb{C} \mid |i(z-i)|<1\} \cap \left\{z\in\mathbb{C} \;\middle|\; \left|\frac{(3+i)}{10}(z-i)\right|<1\right\} = \{z\in\mathbb{C} \mid |z-i|<1\}$$

تمرین ۱. سری تیلور و ناحیه‌ی همگرایی آن را برای تابع $f(z) = \frac{1}{z-1}$ حول نقطه‌ی $z_0 = -i$ پیدا کنید.

توجه ۱. همانطور که مشاهده کردید، ناحیه‌ی همگرایی سری تیلور همیشه یک دایره به مرکز z_0 است. پس برای پیدا کردن ناحیه‌ی همگرایی سری تیلور کافی است شعاع این دایره را پیدا کنیم. معمولا این شعاع را با نماد R نشان می‌دهند و درنتیجه ناحیه‌ی همگرایی سری تیلور به صورت $|z-z_0|<R$ است.

می‌خواهیم بدون نوشتن سری تیلور یک تابع شعاع همگرایی آن را پیدا کنیم. برای این منظور از توجه زیر استفاده می‌کنیم:

توجه ۲. فرض کنید f یک تابع مختلط باشد که در z_0 تحلیلی است. شعاع همگرایی سری تیلور تابع f حول z_0 برابر است با مینیمم فاصله‌ی z_0 با تمام نقاط غیر تحلیلی تابع f.

مثال ۲. شعاع همگرایی سری تیلور تابع زیر را حول نقطه‌ی داده شده محاسبه کنید.

$$f(z) = \frac{z+1}{(z^2+1)(z^2+4z+5)}, \qquad z_0 = -1.$$

جواب. نقاط غیر تحلیلی این تابع ریشه‌های مخرج یعنی $z = \pm i, -2\pm i$ هستند. فاصله‌ی همه‌ی این نقاط تا نقطه‌ی $z_0 = -1$ یکسان است. پس:

$$R = |-1-i| = \sqrt{2}.$$

تمرین ۲. شعاع همگرایی سری تیلور تابع $f(z) = \frac{\ln(z+1)}{(z^2-4)\cos(z)}$ را حول نقطه‌ی $z_0 = \frac{i}{3}$ محاسبه کنید.

سری لوران

توجه ۳. اگر تابع f در z_0 تحلیلی نباشد، آنگاه سری تیلور f حول z_0 وجود ندارد.

تعریف ۱. سری لوران: فرض کنید f تابعی مختلط باشد که در ناحیه‌ی $R_1 < |z - z_0| < R_2$ تحلیلی است و C مسیر ساده‌ی بسته‌ای باشد که در جهت مثبت حول z_0 در این ناحیه قرار دارد. سری لوران تابع f برای هر نقطه‌ی z که در این ناحیه قرار دارد را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \qquad R_1 < |z - z_0| < R_2,$$

که در آن

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

توجه ۴.

۱) اگر f در z_0 تحلیلی باشد آنگاه سری لوران f همان سری تیلور است.

۲) برای پیدا کردن سری لوران لازم نیست انتگرال‌های بالا را محاسبه کنیم و از همان سری‌های تیلور شناخته شده استفاده می‌کنیم.

۳) برخلاف سری تیلور، سری لوران یکتا نیست و ممکن است در ناحیه‌های مختلف سری لوران تابع متفاوت باشد.

مثال ۳. سری لوران توابع زیر را حول نقاط داده شده بدست آورید.

$$1)\ f(z) = e^{\left(\frac{1}{z}\right)}, \qquad z_0 = 0.$$

جواب. چون $z_0 = 0$ نقطه‌ی تحلیلی تابع f نیست پس سری تیلور تابع وجود ندارد. از طرفی تابع برای هر $z \neq 0$ تحلیلی است پس در ناحیه‌ی $|z| > 0$ سری لوران آن حول $z_0 = 0$ قابل تعریف است. برای نوشتن سری لوران تابع از سری مکلورن تابع e^z استفاده می‌کنیم. یعنی در سری مکلورن تابع e^z به جای همه‌ی z ها $\frac{1}{z}$ را قرار می‌دهیم:

$$e^{\left(\frac{1}{z}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots, \qquad |z| > 0.$$

$$2)\ f(z) = \frac{\cosh(z)}{z^3}, \qquad z_0 = 0.$$

جواب. با توجه به توضیحات مثال قبل و سری مکلورن تابع $\cosh(z)$ سری لوران تابع f در $z_0 = 0$ به صورت زیر است:

$$\frac{\cosh(z)}{z^3} = \frac{1}{z^3}\cosh(z) = \frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{(2n)}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{(2n-3)}}{(2n)!} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2!z} + \frac{z}{4!} + \frac{z^3}{6!} + \cdots, \qquad |z| > 0.$$

$$3)\ f(z) = \sin\left(\frac{1}{z-1}\right), \qquad z_0 = 1.$$

جواب. در این تابع هم $z_0 = 1$ یک نقطه‌ی غیر تحلیلی تابع است. با توجه به سری مکلورن تابع $\sin(z)$ می‌توانیم سری لوران این تابع در ناحیه‌ی $|z-1| > 0$ را به صورت زیر بنویسیم:

$$\sin\left(\frac{1}{z-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{z-1}\right)^{(2n+1)}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!(z-1)^{(2n+1)}}$$

$$= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{3!(z-1)^3} + \frac{1}{5!(z-1)^5} - \cdots, \qquad |z-1| > 0.$$

$$4)\ f(z) = z^2 \sinh\left(\frac{1}{z^2}\right), \qquad z_0 = 0.$$

جواب. چون $z_0 = 0$ نقطه‌ی تحلیلی تابع f نیست پس سری تیلور تابع وجود ندارد. از طرفی تابع برای هر $z \neq 0$ تحلیلی است پس در ناحیه‌ی $|z| > 0$ سری لوران آن حول $z_0 = 0$ قابل تعریف است. برای نوشتن سری لوران تابع از سری مکلورن تابع $\sinh(z)$ استفاده می‌کنیم. یعنی در سری مکلورن تابع $\sinh(z)$ به جای همه‌ی z ها $\frac{1}{z^2}$ را قرار می‌دهیم:

$$z^2 \sinh\left(\frac{1}{z^2}\right) = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{z^2}\right)^{(2n+1)}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{4n}\,(2n+1)!} = 1 + \frac{1}{3!\,z^4} + \frac{1}{5!\,z^8} + \cdots, \qquad |z| > 0.$$

$$5)\ f(z) = z \sin\left(\frac{1}{z-1}\right), \qquad z_0 = 1.$$

جواب. با توجه به مثال قبل سری لوران تابع $\sin\left(\frac{1}{z-1}\right)$ را داریم. برای پیدا کردن سری لوران تابع f دقت کنید که در این سری همه‌ی عوامل باید به صورت توان‌های مثبت یا منفی $(z-1)$ باشند. پس تابع z را به صورت $(z-1)+1$ می‌نویسیم یعنی:

$$z \sin\left(\frac{1}{z-1}\right) = ((z-1)+1)\sin\left(\frac{1}{z-1}\right) = ((z-1)+1)\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!(z-1)^{(2n+1)}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!(z-1)^{(2n)}} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!(z-1)^{(2n+1)}}$$

$$= 1 + \frac{1}{z-1} - \frac{1}{3!(z-1)^2} - \frac{1}{3!(z-1)^3} + \cdots, \qquad |z-1| > 0.$$

تمرین ۳. سری لوران توابع زیر را حول نقاط داده شده بدست آورید.

$$1)\ f(z) = z^3 \cos\left(\frac{1}{z}\right), \qquad z_0 = 0. \qquad\qquad 2)\ f(z) = z^2 e^{\left(\frac{1}{z+1}\right)}, \qquad z_0 = -1.$$