

توابع مثلثاتی و هایپربولیک:

برای عدد مختلط $z = x + yi$ توابع سینوس و کسینوس و سینوس هایپربولیک و کسینوس هایپربولیک را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sin(z) = \frac{e^{(zi)} - e^{(-zi)}}{2i}, \quad \cos(z) = \frac{e^{(zi)} + e^{(-zi)}}{2}.$$

$$\sinh(z) = \frac{e^{(z)} - e^{(-z)}}{2}, \quad \cosh(z) = \frac{e^{(z)} + e^{(-z)}}{2}.$$

توابع $\tan(z)$, $\cot(z)$, $\sec(z)$ و $\csc(z)$, $\tanh(z)$, $\coth(z)$, $\operatorname{sech}(z)$ و $\operatorname{csch}(z)$ هم مثل حالت حقیقی بر اساس تعریف توابع $\sin(z)$, $\cos(z)$, $\sinh(z)$ و $\cosh(z)$ تعریف می‌شوند.

توجه ۱. در حالت مختلط توابع $\sin(z)$ و $\cos(z)$ توابع کراندار نیستند.

توجه ۲. تمامی روابط و اتحادهای توابع مثلثاتی حقیقی برای توابع مثلثاتی و هایپربولیک مختلط هم برقرار هستند.

مثال ۱. مقدار $\sin(2 + i)$ را محاسبه کنید.

جواب.

$$\begin{aligned} \sin(2 + i) &= \frac{e^{(2+i)i} - e^{-(2+i)i}}{2i} = \frac{e^{(-1+2i)} - e^{(1-2i)}}{2i} = \frac{e^{-1}(\cos(2) + \sin(2)i) - e^1(\cos(2) - \sin(2)i)}{2i} \\ &= \frac{(e^{-1} - e^1)}{2i} \cos(2) + \frac{(e^{-1} + e^1)i}{2i} \sin(2) = \sinh(1) \cos(2)i + \cosh(1) \sin(2). \end{aligned}$$

توجه ۳. توابع $\sin(z)$, $\cos(z)$, $\sinh(z)$, $\cosh(z)$ پیوسته و تام هستند.

توجه ۴. نقاط تکین توابع $\sin(f(z))$, $\cos(f(z))$, $\sinh(f(z))$, $\cosh(f(z))$ برابر است با نقاط تکین $f(z)$.

توجه ۵.

$$۱) \sin(iy) = \frac{e^{-y} - e^y}{2i} = i \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} \right) = i \sinh(y)$$

$$۲) \cos(iy) = \cosh(y)$$

$$۳) \sin(z) = \sin(x) \cosh(y) + i \cos(x) \sinh(y),$$

$$۴) \cos(z) = \cos(x) \cosh(y) - i \sin(x) \sinh(y)$$

مثال ۲. نقاط تکین $\sinh(e^{iz} + z^3 + i)$

مثال ۳. ناحیه تحلیلی $f(z) = \frac{e^z + z^2}{\cos(z) - 2}$ را بیابید.

نقاط تکین = نقاط تکین صورت \cup نقاط تکین مخرج \cup ریشه های مخرج

$$\text{تکین صورت} = \text{تکین مخرج} = \emptyset$$

$$\cos(z) = 2 \Rightarrow \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2$$

$$e^{iz} = w \Rightarrow w + \frac{1}{w} = 4 \Rightarrow \frac{w^2 + 1}{w} = 4$$

$$\Rightarrow w^2 - 4w + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 4 = 12$$

$$w = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$e^{iz} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$1) iz = \log(2 + \sqrt{3}) = \ln(2 + \sqrt{3}) + i(0 + 2k\pi)$$

$$2) iz = \log(2 - \sqrt{3}) = \ln(2 - \sqrt{3}) + i(0 + 2k\pi)$$

$$\Rightarrow z_1 = \frac{1}{i} \left(\ln(2 + \sqrt{3}) + i(2k\pi) \right) = -i \ln(2 + \sqrt{3}) + 2k\pi$$

$$z_2 = \frac{1}{i} \left(\ln(2 - \sqrt{3}) + i(2k\pi) \right) = -i \ln(2 - \sqrt{3}) + 2k\pi$$

$$\text{ریشه های مخرج} = \{-i \ln(2 + \sqrt{3}) + 2k\pi, -i \ln(2 - \sqrt{3}) + 2k\pi\}$$

$$\text{نقاط تکین} = \emptyset \cup \{-i \ln(2 + \sqrt{3}) + 2k\pi, -i \ln(2 - \sqrt{3}) + 2k\pi\}$$

$$= \{-i \ln(2 + \sqrt{3}) + 2k\pi, -i \ln(2 - \sqrt{3}) + 2k\pi\}$$

$$\Rightarrow \text{ناحیه تحلیلی} = \mathbb{C} - \{-i \ln(2 + \sqrt{3}) + 2k\pi, -i \ln(2 - \sqrt{3}) + 2k\pi\}$$

روش دوم برای حل:

$$\cos(z) = 2 \Rightarrow \cos(x) \cosh(y) - i \sin(x) \sinh(y) = 2 = 2 + 0i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(x) \cosh(y) = 2, \\ \sin(x) \sinh(y) = 0 \Rightarrow \sin(x) = 0 \text{ یا } \sinh(y) = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{اگر } \sin(x) = 0 \Rightarrow x = k\pi \Rightarrow \cos(k\pi) \cosh(y) = 2,$$

$$k = 2n \Rightarrow \cosh(y) = 2 \Rightarrow y = \cosh^{-1}(2)$$

$$k = 2n + 1 \Rightarrow -\cosh(y) = 2 \rightarrow \text{غیر ممکن}$$

$$\text{اگر } \sinh(y) = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \cos(x) \cosh(0) = 2 \Rightarrow \cos(x) = 2 \rightarrow \text{غیر ممکن}$$

$$\text{ریشه های مخرج} = \{2n\pi + i \cosh^{-1}(2)\}$$

$$\Rightarrow \text{ناحیه تحلیلی} = \mathbb{C} - \{2n\pi + i \cosh^{-1}(2)\}$$

مثال ۴. معادله $\cosh(2z) = i$ را حل کنید.

جواب. طبق تعریف $\cosh(z)$ داریم:

$$\begin{aligned} \cosh 2(z) = i &\Rightarrow \frac{e^{(2z)} + e^{(-2z)}}{2} = i \\ w = e^{2z} &\Rightarrow w + \frac{1}{w} = 2i \Rightarrow w^2 + 1 = 2iw \\ w^2 - 2iw + 1 &= 0 \\ \Delta = 4i^2 - 4 &= -8 \\ \Rightarrow w &= \frac{2i \pm \sqrt{-8}}{2} = \frac{2i \pm 2\sqrt{2}i}{2} = i(1 \pm \sqrt{2}) \\ \Rightarrow w_1 &= i(1 + \sqrt{2}) \Rightarrow e^{2z} = i(1 + \sqrt{2}) \\ z &= \frac{1}{2} \left(\log(i(1 + \sqrt{2})) \right) = \frac{1}{2} \left(\ln(1 + \sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \right) \\ \Rightarrow w_2 &= i(1 - \sqrt{2}) \Rightarrow e^{2z} = i(1 - \sqrt{2}) \\ z &= \frac{1}{2} \left(\log(i(1 - \sqrt{2})) \right) = \frac{1}{2} \left(\ln(\sqrt{2} - 1) + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \right) \end{aligned}$$

تمرین ۱. معادلات زیر را حل کنید.

۱) $\sinh(z) = 0$

۲) $\cosh(z) = 0$

۳) $\cos(2iz) = 3i + 1$

۴) $\sin(z) = \cosh(4)$

تمرین ۲. نقاط تکین تابع زیر را بیابید.

$$۱) f(z) = \frac{e^{\cos(z) + \sin(z^2)}}{(\sin(z) + ۳)(z^2 + z + ۱)(e^z + ۱)}$$