E.D.

- conjunción (y) $\wedge$
- disyunción (o) $\vee$
- Negación $\neg$

y

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

o

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$\begin{cases} p: \text{Hoy es viernes} \\ q: 3+2=5 \end{cases}$

$p \to q$: "si hoy es viernes, entonces $3+2=5$"

Implicación

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Bicondicional

p	q	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Disyunción exclusiva

p	q	$p \oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$p \Leftrightarrow q$: "Helar es condición necesaria y suficiente para que nieve"

si $p \to q$ es verdadera, q es una condición necesaria de p

$(p \to q) \wedge (q \to p) = (p \Leftrightarrow q)$

$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) = (p \oplus q)$

$p \to (q \wedge \neg r)$

"Puedes jugar en la selección española de futbol solo si tienes nacionalidad española y no has jugado con otra selección"

- Tautología: Formula que siempre es 1
- Contradicción: Formula que siempre es 0

$p \equiv q$ p y q toman exactamente los mismos valores de verdad

Escaneado con CamScanner

1.- $p \wedge 1 \equiv p$ $\quad p \vee 0 \equiv p$ Leyes de identidad

2.- $p \vee 1 \equiv 1$ $\quad p \wedge 0 \equiv 0$ Leyes de acotación

3.- $p \vee p \equiv p$ $\quad p \wedge p \equiv p$ Idempotencia

4.- $\neg\neg p = p$ Principio doble negación

5.- $p \wedge q \equiv q \wedge p$ $\quad p \vee q \equiv q \vee p$ Conmutatividad

6.- $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ Asociatividad

7.- $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ Doble distributividad

8.- $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ Ley de Morgan

9.- $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ Ley de absorción

$\boxed{p \to q = \neg p \vee q}$

10.- $p \vee \neg p \equiv 1$ $\quad p \wedge \neg p = 0$ Ley del complementario

Demostrar la igualdad:

$\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ y $\neg p \wedge \neg q$

- $\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \equiv \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q)$ 2º Ley de Morgan

$\equiv \neg p \wedge (\neg\neg p \vee \neg q)$ 1º Ley de Morgan

$\equiv \neg p \wedge (p \vee \neg q)$ Principio doble negación

$\equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ Distributividad

$\equiv 0 \vee (\neg p \wedge \neg q)$ 2º ley del complementario

$\equiv \neg p \wedge \neg q$ 2º Ley de identidad

- $(p \wedge q) \to (p \vee q) \equiv \neg(p \wedge q) \vee (p \vee q)$

$\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q)$ 1º ley Morgan

$\equiv (\neg p \vee p) \vee (\neg q \vee q)$ Asociativa y conmutativa

$\equiv 1 \vee 1$ 2º ley del complementario

$\equiv 1$ 1º Ley de acotación

$p \oplus q \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

Escaneado con CamScanner

1.- $p \to q \equiv \neg p \vee q$

2.- $\neg p \to \neg q \equiv p \to q$

3.- $\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$

4.- $p \to (q \wedge r) \equiv (p \to q) \wedge (p \to r)$

6.- $(p \wedge q) \to r \equiv (p \to r) \vee (q \to r)$

8.- $p \Leftrightarrow q \equiv \neg p \Leftrightarrow \neg q$

9.- $p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

10.- $\neg(p \Leftrightarrow q) \equiv p \Leftrightarrow \neg q$

Forma normal conjuntiva

Simplificación de cualquier formula a una conjunción de clausulas.

Cálculo de predicados

Sea $P(x)$ un predicado en la variable x. Introducimos las 2 nuevas fórmulas que siguen:

$$\forall x\, P(x) \quad ① \qquad\qquad \exists x\, P(x) \quad ②$$

① Esta formula es verdad si, y sólo si, todo valor de x hace verdadero el predicado $P(x)$.

② La formula es verdad si, y sólo si, existe al menos un valor de x que hace verdadero el predicado.

$\forall$: cuantificador universal
$\exists$: cuantificador existencial

- "Todos los alcalaimos son españoles"

$$\forall x\, (x \text{ es alcalaimos} \longrightarrow x \text{ es español})$$

- "Al menos un ciudadano español es pobre"

$$\exists x\, (x \text{ es ciudadano español} \wedge x \text{ es pobre})$$

- "todo objeto, miembro del conjunto A, posee la propiedad descrita por el predicado $P(x)$"

13

$$\forall x \in A : P(x)$$

"todo cuna tiene bicicleta"

$C(x)$ = x es cuna

$b(y)$ = y es una bicicleta

$P(x,y)$ = x posee y

$$\forall_x \left(C(x) \longrightarrow \exists_y \left(b(y) \wedge P(x,y) \right) \right)$$

• si en una formula x depende del valor de y, $(\forall x (x+y=x))$, entonces y es libre.

$$\overset{①}{\forall x \; \exists_y \; P(x,y)} \not\equiv \overset{②}{\exists_y \; \forall x \; P(x,y)}$$

① El valor de y puede depender del valor de x

"toda cerradura posee una llave"

Escribe la siguiente expresión lógica

"La suma de 2 enteros positivos es positiva"

$$\forall_x \forall_y \left(((x>0) \wedge (y>0)) \longrightarrow (x+y>0) \right)$$

"todo número real NO nulo posee inverso"

$$\forall x \left((x \neq 0) \rightarrow \exists_y (xy = 1) \right)$$

$P(x)$ x es un leon

$Q(x)$ x es fiero

$R(x)$ x toma cafe

$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ todos los leones son fieros

$\exists x (P(x) \wedge \neg R(x))$ Algunos leones no toman café

$\exists x (Q(x) \wedge \neg R(x))$ Algunos animales fieros no toman café

$A(x)$ $\neg C(x)$

Adjunción

$A(x) \wedge \neg C(x)$

Premisas ciertas y conclusión falsa

Inferencia

$$\frac{p}{\therefore\ p \vee q}$$ $p \to (p \vee q)$ Adición

---

$$\frac{p \wedge q}{\therefore\ p}$$ $(p \wedge q) \to p$ Simplificación

---

$$\frac{\begin{array}{c} p \\ q \end{array}}{\therefore\ p \wedge q}$$ $((p) \wedge (q)) \to (p \wedge q)$ Conjunción

---

$$\frac{\begin{array}{c} p \\ p \to q \end{array}}{\therefore\ q}$$ $(p \wedge (p \to q)) \to q$ Modus pomens

---

$$\frac{\begin{array}{c} \neg q \\ p \to q \end{array}}{\therefore\ \neg p}$$ $(\neg p \wedge (p \to q)) \to \neg p$ Modus tollens

---

$$\frac{\begin{array}{c} p \to q \\ q \to r \end{array}}{\therefore\ p \to r}$$ $\boxed{((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)}$ Silogismo

---

$$\frac{\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg p \end{array}}{\therefore\ q}$$ $((p \vee q) \wedge \neg p) \to q$ Silogismo disyuntivo

---

$$\frac{\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg p \vee r \end{array}}{\therefore\ q \vee r}$$ $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \to (q \vee r)$ Resolución

"$\overbrace{\text{Esta tarde está nublado}}^{p}$ y $\overbrace{\text{hace más frío que ayer}}^{q}$" "$\overbrace{\text{Iremos a nadar}}^{r}$ solo si no está nublado" "Si no vamos a nadar, $\underbrace{\text{daremos una vuelta en bici}}_{s}$" "Si damos la vueta en bici, $\underbrace{\text{estaremos en casa al anochecer}}_{t}$"

- $p \wedge q \xrightarrow{\text{simplificación}} p$
- $r \to \neg p \xrightarrow{\text{Modus tollens}} \neg r$
- $\neg r \to s$ Modos ponens $\to s$

$s \to t$ Modos pomens $\to$ t

si llueve, la tierra está verde
si estamos en Noviembre y hace frío entonces llueve
La tierra está verde, pero estamos en Noviembre

∴ No hace frío

$$p \to q$$
$$(r \wedge s) \to p$$
$$q \wedge r$$
$$\therefore \neg s$$

$p \to q$
$(r \wedge s) \to p$ — silogismo — $(r \wedge s) \to q$

$\neg r \vee \neg s \vee q$

$q \wedge r$

simplificación

r

silogismo disyuntivo

$\neg s \vee q$

[No hemos sido capaces de concluir la tesis a partir de las permisas]

Mostrar que la Hipotesis $(p \wedge q) \vee r$ y $r \to s$ implican $\underline{p \vee s}$

$C_1 = p \vee r$

$C_2 = q \vee r$

$C_3 = r \to s = \neg r \vee s$

C_1 y C_3 se deduce $\underline{p \vee s}$

Reglas de inferencia

- Generalización universal: $\forall_x P(x)$ es cierto si $P(c)$ es cierto para todos los elementos del dominio

- Especificación universal: si $P(c)$ verdad para cualquier elemento, entonces $\forall_x P(x)$ es cierta

$$\frac{\forall_x P(x)}{\therefore P(c)}$$ Especificación universal

$$\frac{P(c) \text{ para cualquier } c}{\therefore \forall_x P(x)}$$ generalización universal

$$\frac{\exists_x P(x)}{\therefore P(c) \text{ para algún elemento } c}$$ Especificación existencial

$$\frac{P(c) \text{ para algún elemento } c}{\therefore \exists_x P(x)}$$ Generalización existencial

"todos los leones son fieros" "Algunos leones no toman café"

$\exists_x (P(x) \land \neg R(x))$ Especificación existencial

$P(c) \land \neg R(c)$ → simplificación $P(c)$ y $\neg R(c)$

$\forall_x (P(x) \to Q(x))$ Especificación universal

$P(c) \to Q(c)$

$P(c) \to Q(c)$

$P(c)$ Modus ponens $Q(c)$

$Q(c) \land \neg R(c)$

$\exists_x (Q(x) \land \neg R(x))$

Prueba la validez del siguiente argumento

$$\frac{\begin{array}{l}\forall_x (A(x) \to \neg B(x)) \\ \forall_x (A(x) \land C(x))\end{array}}{\therefore \forall_x (C(x) \land \neg B(x))}$$

1	$\forall_x (A(x) \to \neg B(x))$	Premisa	
2	$\forall (A(x) \land C(x))$	Premisa	
3	$A(y) \to \neg B(y)$	Especificación universal	
4	$A(y) \land C(y)$	" "	
5	$A(y)$	simplificación	4
6	$\neg B(y)$	Modus ponens	3 y 5
7	$C(y)$	simplificación	4
8	$C(y) \land \neg B(y)$		7 y 6
9	$\forall_x (C(x) \land \neg B(x))$	Generalización universal	

Escaneado con CamScanner

Métodos de probar teoremas

- Pruebas directas

"si n es impar, entonces n^2 tambien lo es"

- Pruebas indirectas

  - puedo probar $p \to q$ porobando $\neg p \to \neg q$

- "Si $3n+2$ es un entero impar, entonces n también lo es"

- Pruebas por contradicción

  - si quiero demostrar $(\neg r \wedge r)$ alomejor encuentro una forma que lo pruebe, $\neg p \to (\neg r \wedge r)$

- Pruebas por casos

  - Para probar $(p_1 \vee p_2 .. \vee p_n) \to q$

    Podemos usar

$$((p_1 \vee p_2 ... \vee p_n) \to q) \Leftrightarrow ((p_1 \to q) \wedge (p_2 \to q) \wedge .. (p_n \to q))$$

- Pruebas de equivalencia

$p \to q$ y $q \to p$

- Pruebas de existencia

"Probar que existe un entero positivo que puede escribirse como suma de dos cubos en dos formas distintas"

$$1729 = 10^3 + 9^3 = 12^3 + 1^3$$

- Contraejemplos

La negación de $\forall x\, P(x)$ es $\exists x\, \neg P(x)$

$\Downarrow$

si quiero demostrar que $\forall x\, P(x)$ no es cierto, basta con verificar lo otro

p	q	$p \downarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

p	q	$p \mid q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$\downarrow$ NOR

$\mid$ NAN

$$p \mid q \equiv \neg(p \wedge q) \equiv \neg(q \wedge p) \equiv q \mid p$$

$$(p \mid q) \mid r \not\equiv p \mid (q \mid r)$$

- Usa cuantificadores y predicados

"Cada estudiante de esta clase ha seguido al menos un curso de inglés"

E := Estudiante de esta clase

I := Curso de ingles

P(x,y) := x sigue el curso y

$$\forall x \in E, \exists y \in I : P(x, y)$$

- Usa predicados, cuantificadores y conectivos lógicos

"todos los usuarios del campus tienen acceso a cualquier sitio web cuya extensión sea .es"

U := Usuarios del campus

W := sitio web

E(x) := x tiene extension .es

P(x,y) := x tiene acceso a y

$$\forall x \in U, \forall y \in W : (E(y) \longrightarrow P(x, y))$$

"todos usuario sólo tiene acceso a una única bandeja de correo"

U := Usuario

B := Bandeja de correo

P(x,y) := x tiene acceso a y

$$\forall x \in U, \exists y \in B : (P(x,y) \wedge (\forall (z \neq y) \rightarrow P(x, z))$$

"Hay un proceso que sigue en funcionamiento durante todas las condiciones de error sólo si el núcleo trabaja adecuadamente"

P := proceso

E := Error

H(y) := se ha producido el error y

S(x) := El proceso x funciona

$$\exists x \in P, \forall y \in E : ((H(y) \wedge S(x)) \longrightarrow S(\text{Núcleo}))$$

Tema - 2 -

Un grafo es una terna $G = (V, E, P)$ formada por 2 conjuntos y una aplicación.

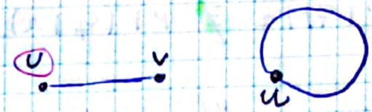
V: conjunto de vectores o nodos

E: Conjunto de aristas

p: aplicación

Vértice = punto
Arista = recta o curva

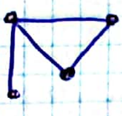
→ 1 ó 2 vértices



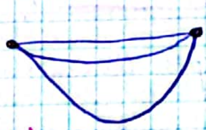
"El vértice U incide en esta arista" $P(a) = \{U, V\}$

* Una arista es paralela a otra si los puntos de inicio y fin son los mismos.

Grafo simple



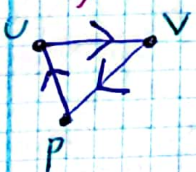
Aristas múltiples y paralelas



Grafos NO dirigidos

$\{U, V\}$

Grafos dirigidos



(U, V)

(V, P)

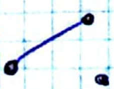
(P, U)

Es etiquetado si cada arista tiene un peso o una etiqueta

Grado

- NO dirigidos: Nº de aristas que inciden en ese vértice
- Dirigidos:
  - de salida: Nº de aristas que lo tienen como vértice inicial
  - de entrada: Nº de aristas que lo tienen como vértice final

Vertices aislados

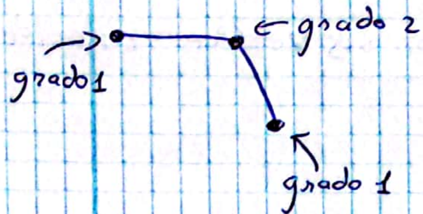


• su grado sería 0

Grafo NO dirigido

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = \underbrace{2|E|}$$

Doble del Nº de aristas



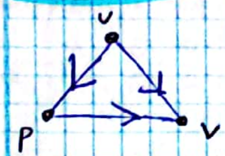
$\sum$ grados $= \boxed{4} = |E| \times 2 = 2$ aristas $\times 2$

* $\sum \delta^-(v)$ Entrada

* $\sum \delta^+(v)$ salida

Grados dirigidos

- $\sum \delta^-(v) = |E|$
- $\sum \delta^+(v) = |E|$



v { grado salida 2

p { grado salida 1, grado entrada 1

v { grado entrada 2

$\sum \delta^- = 3 = |E|$

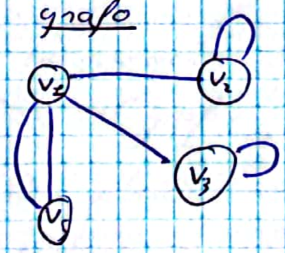
$\sum \delta^+ = 3 = |E|$

Subgrafo

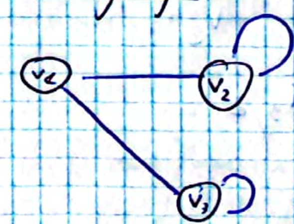
Dado un grafo $G = (V', E', p')$, se dice subgrafo de un grafo $G = (V, E, p)$ si, y sólo si, se verifican las condiciones:

$$\begin{cases} \bullet\ V' \subset V \\ \bullet\ E' \subset E \\ \bullet\ p' = p|E \end{cases}$$

grafo



subgrafo

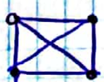


tipos grafos

- **Grafo completo**: si por cada par de vértices hay 1 arista entre ellos

K_n

K_3



K_4

Escaneado con CamScanner

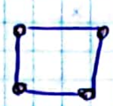
• Ciclos de n vertices $(n \geq 3)$: consta de n vértices y n aristas.

C_n

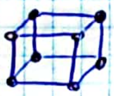
C_4

C_5

• Grafos regulares Cuando el grado de todos sus vertices coincide



• grafo cubo

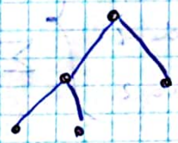


• grafo rueda A partir de un ciclo, añadir en el centro un vértice y hacer aristas con el resto de vértices.

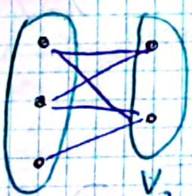
W_n, ...

W_5

• grafo arbol



• grafos bipartidos



V_1 y V_2 no pueden tener relaciones entre sí mismas

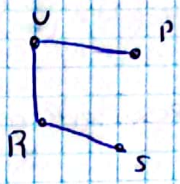
V_1 V_2

$K_{3,2}$

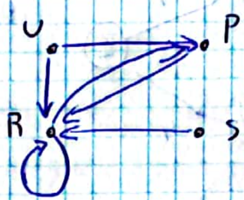
Representación de grafos

- **Lista de adyacencia**: forma de representar grafos sin aristas múltiples

Vertice	vertices adyacentes
U	P, R
P	
R	S
S	



- **Matrices de adyacencia**: Se basan en la adyacencia de vértices y van asociadas a una ordenación cualquiera en el conjunto de vértices



$$\begin{array}{c|c} & U \quad P \quad R \quad + \\ \begin{matrix} U \\ P \\ R \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

1° +, 2° +

$$\begin{array}{c|c} & U \quad P \quad S \quad R \\ \begin{matrix} U \\ P \\ S \\ R \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

- **Grafos isomorfos**

G_1 G_2

4 Vértices y 5 aristas los 2 ⇒ Isomorfos
* Mismo orden de grados *

Dada una matriz de adyacencia puedo obtener el nº de caminos posibles entre los vertices del grafo.

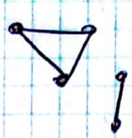
tengo que hacer la potencia de la matriz en función del Nº de caminos que me pidan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^3 = \begin{pmatrix} 28 & 48 & 18 \\ 48 & 40 & 32 \\ 18 & 32 & 13 \end{pmatrix}$$

⇒ Existen 48 caminos de longitud 3 entre el vertice 1 y 2

¿Número de caminos de longitud 3 que hay en todos los vértices?

• grafo conexión: si existe camino entre un par de vertices

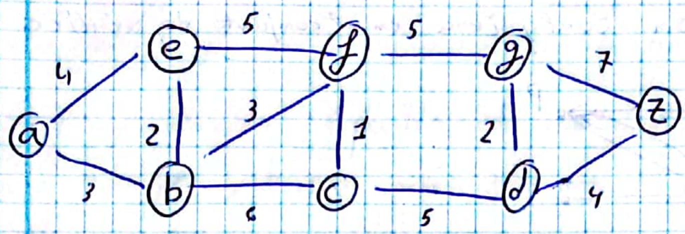


No existe pero sus componentes son conexas

• Peso en aristas: peso del grafo ó longitud del camino

• En los grafos ponderados, cada arista tiene un peso

• **Algoritmo Dijkstra**



Desde A — Z Hasta

P0

Igual en todos

$S_0 = \emptyset$ $\quad C_0(A) = \emptyset$

$L_0(A) = 0$

$L_0(\text{los demas}) = \infty$ $\quad C_0(\text{Los demas}) = \emptyset$

P1

$S_1 = \{A\}$

$L_1(e) = \min\{L_0(e), L_0(a) + w(a,e)\} = \min\{\infty, 4\} = 4$, etiqueta de e: 4(a)

$L_1(b) = \min\{L_0(b), L_0(a) + w(a,b)\} = \min\{\infty, 3\} = 3$, $\underbrace{\text{etiqueta de b: } 3(a)}_{\text{actualizan etiqueta}}$

P2

$S_2 = \{A, b\}$

$L_2(e) = \min\{L_1(e), L_1(b) + w(b,e)\} = \min\{4, 3+2\} = 4$, etiqueta de e: 4(a)

$L_2(f) = \min\{L_1(f), L_1(b) + w(b,f)\} = \min\{\infty, 3+3\} = 6$, etiqueta de f: 6(a, b)

$L_2(c) = \min\{L_1(c), L_1(b) + w(b,c)\} = \min\{\infty, 3+6\} = 9$, " de c: 9(a, b)

P3

$S_3 = \{A, b, e\}$

$L_3(f) = \min\{L_2(f), L_2(e) + w(e,f)\} = \min\{6, 4+5\} = 6$, etiqueta de f: 6(a, b)

$L_3(c) = \min\{L_2(c), L_2(e) + w(e,c)\} = \min\{9, 4+\infty\} = 9$, " de c: 9(a, b)

Escaneado con CamScanner

P4

$S_4 = \{a, b, e, f\}$

$L_4(g) = \min\{L_3(g), L_3(f) + w(f,g)\} = \min\{\infty, 6+5\} = 11$, etiqueta de $g: 11\,(a,b,f)$

$L_4(c) = \min\{L_3(c), L_3(f) + w(f,c)\} = \min\{9, 6+1\} = 7$, " de $c: 7\,(a,b,f)$

P5

$S_5 = \{a, b, e, f, c\}$

$L_5(g) = \min\{L_4(g), L_4(c) + w(c,g)\} = \min\{11, \infty\} = 11$, etiqueta de $g: 11\,(a,b,f)$

$L_5(d) = \min\{L_4(d), L_4(c) + w(c,d)\} = \min\{\infty, 7+5\} = 12$, " " $d: 12\,(a,b,f,c)$

P6

$S_6 = \{a, b, e, f, c, g\}$

$L_6(z) = \min\{L_5(z), L_5(g) + w(g,z)\} = \min\{\infty, 11+7\} = 18$, etiqueta de $z: 18\,(a,b,f,g)$

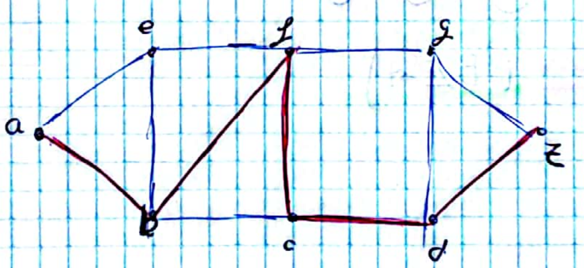
$L_6(d) = \min\{L_5(d), L_5(g) + w(g,d)\} = \min\{12, 11+2\} = 12$, " " $d: 12\,(a,b,f,c)$

P7

$S_7 = \{a, b, e, f, c, g, d\}$

$L_7(z) = \min\{L_6(z), L_6(d) + w(d,z)\} = \min\{18, 12+4\} = 16$, etiqueta $z: 16\,(a,b,f,c,d)$

El camino más corto es 16 a, b, f, c, d, z

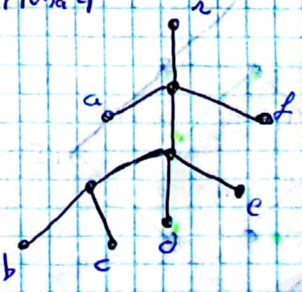


Arboles

- Grafo no dirigido, conexo y sin ciclos $T(V, E)$
- solo existe 1 camino entre 2 vértices
- arbol m-ario si todos los vértices internos tienen m vértices hijos

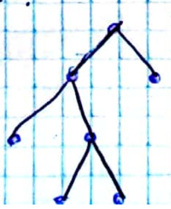
arbol binario
2-ario

3-ario y con altura 4



- m-ario completo si tiene exactamente m vértices hijos.

2-ario
Completo



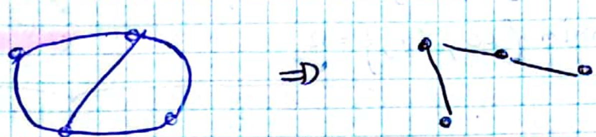
$$|E| = |V| - 1$$

aristas vértices

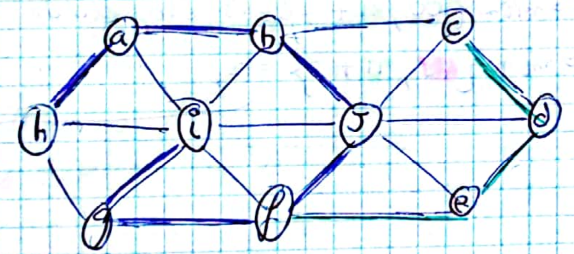
- Un arbol m-ario de altura h tiene, a lo sumo, m^h hojas
  - $|L|$ = Nº de hojas de T
  - $|L| \leq m^h$ hojas

Arbol generador

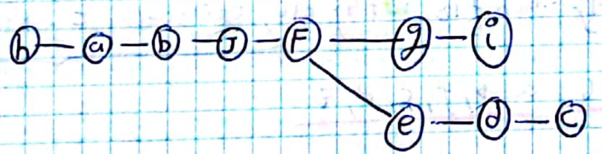
- Sea G un grafo simple. Un árbol generador de G es un subgrafo de G que es un arbol y contiene todos los vértices de G



Busqueda en profundidad (BEP)



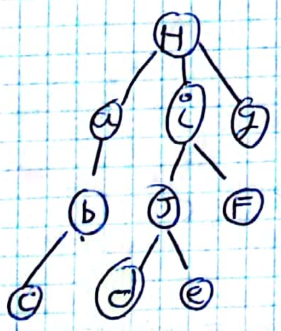
- Al azar, h
- Del final hacia el principio



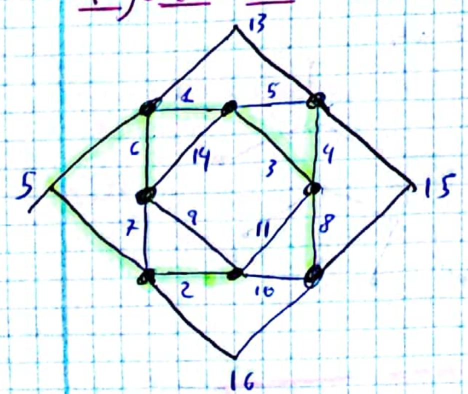
Busqueda en anchura (BEA)

Iteración

Ej. anterior



Algoritmo Kruskal → arbol generador



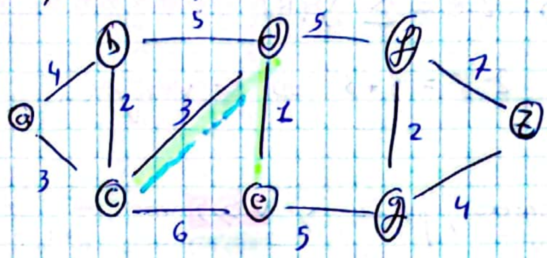
- Marcar ordenadamente las líneas de menor peso
- El peso total es de 29

$T_1 = \{ \quad \}$

$T_n = \ldots$

Algoritmo de prim → arbol generador

- Arbol generador de peso mínimo
- 1º se elige la arista de peso + pequeño
- Resto, + pequeño primero

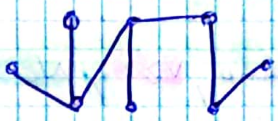


$T_1 = \{e, d\}$

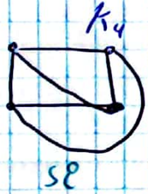
$T_2 = \{e, d\}, \{d, c\}$

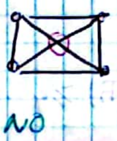
$T_{\dots}$

$T_7 = \{e, d\}, \{d, c\}, \{c, b\}, \{c, a\}, \{d, f\}, \{f, g\}, \{g, z\}$ // $w(T_G) = \cancel{50}$



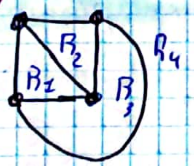
Grafo plano: Si admite una representación en el plano (Hoja)





- Si se cruzan 2 aristas ⇒ NO
- K_5, $K_{3,3}$ No son planos

Regiones:



Teorema de Euler:

- teniendo grafo plano, simple, conexo

⇓

$\boxed{V - e + r = 2}$

r = regiones
V = vertices
e = aristas

- Por que se verifique la formula, no implica ser un grafo plano
- Si no verifico la formula ⇒ garantizo que el grafo No es plano

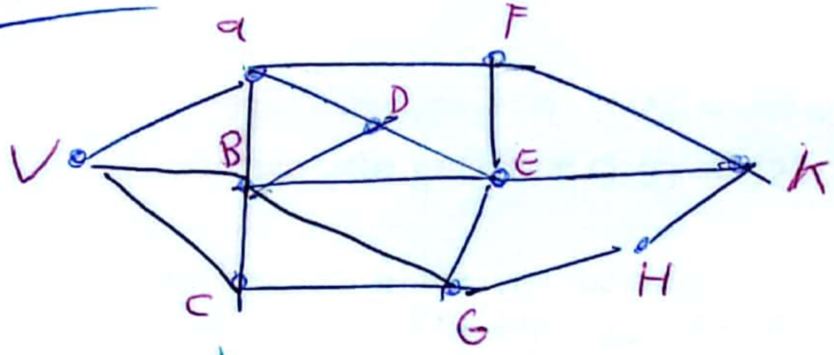
EJM

$\left.\begin{array}{l} r = 1 \\ e = 1 \\ V = 2 \end{array}\right\}$ $V - e + r = 2 - 1 + 2 = 2$ · (se cumple)

⇓

- se verifica

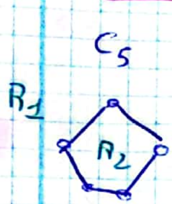
BEP



v	a	b	c	D	E	F	G	H	K
a	v	v	v	A	B	A	B	G	E
B	b	A	B	B	D	E	C	K	F
C	D	C	G	E	F	K	E		H
	F	D			G		H		
		E			K				
		G							

• El grado de una región $\delta(R)$:

$$\boxed{2e = \sum \delta(R)}$$



$\left.\begin{array}{l} R_1 \text{ grado} = 5 \\ R_2 \text{ grado} = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow 2e = \sum \delta(R)$

$2 \cdot 5 = 5 + 5 \Rightarrow$ se verifica

* [• Si tengo un grafo simple, conexo, plano y $V \geq 3$

⇓

cumple $\boxed{e \leq 3V - 6}$

* [• Si tengo un grafo, simple, conexo, plano, $V \geq 3$ y No tiene ciclos de longitud 3

⇓

verifica $\boxed{e \leq 2V - 4}$

⇓

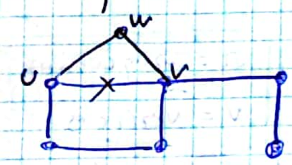
El grado de cada región $\delta(R) \geq 4$

Kuratowski

• Si un grafo contiene un K_5 o un $K_{3,3} \Rightarrow$ El grafo NO es plano

Grafo homeomorfo

• Si a partir de G consigo G' con divisiones elementales.



Elimino $E\{u, v\}$, añadiendo un nuevo vértice "w" y surgen 2 nuevas aristas

⇓

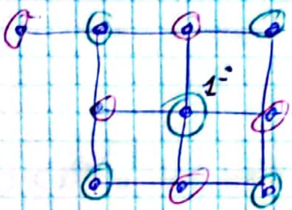
Es homeomorfo

Coloración de grafos

- Encontrar el menor número de coloraciones posibles
- Vértices adyacentes, colores distintos
- Número cromático $\chi(G)$

$\chi(C_3) = 3$

- **Algoritmo de coloración**
  - 1º decidir un orden $\{V_1, V_2, \dots V_n\}$
    - Del vértice con mayor grado hacia el menor
- Asigno color al 1º vértice y despues a todos los No adyacentes el mismo color

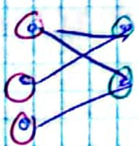


1º paso

2º Replico el paso anterior, Miro el máximo grado, marco ese y los No adyacentes

- En un grafo bipartido, el $\chi(G)$ siempre es 2

Grafo bipartido $K_{3,2}$ no completo

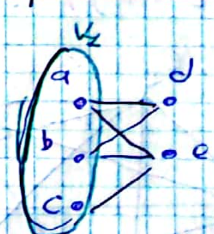


- Grafo conexo con grado de vertice como máximo "k"

$\Downarrow$

$\chi(G) \leq k+1$

- **Emparejamiento:** El emparejamiento de un grafo G es un subconjunto "M" del conjunto de aristas E con la propiedad de que 2 aristas de M nunca tienen un vértice en común.



- Emparejamiento máximo: $|M| \stackrel{=2}{\leq} |V_1|$
- Emparejamiento completo: si fuese =3 $|M| = |V_1|$

$M \leq E$

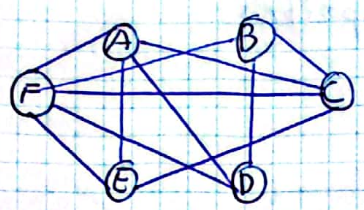
Parejas obtenidas $\begin{cases} a - d \\ c - e \end{cases}$

condición de hall

$\rightarrow T(A)$

$T(A) \geq A$

EJERCICIOS



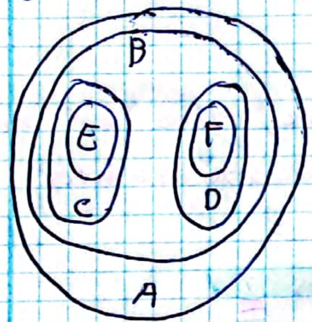
¿Es un grafo plano?, utiliza la fórmula de Euler

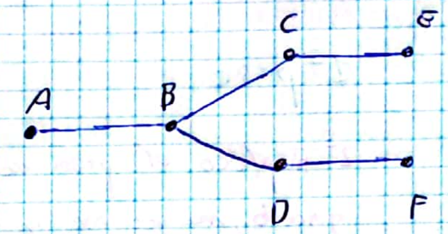
$$\boxed{V - e + r = 2}$$

Vértices = $V = 6$
Aristas = $e = 11$
$r = 7$

} Se verifica la fórmula de Euler $\Rightarrow$ es plano

¿Número cromático?

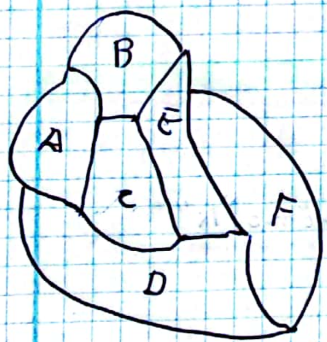


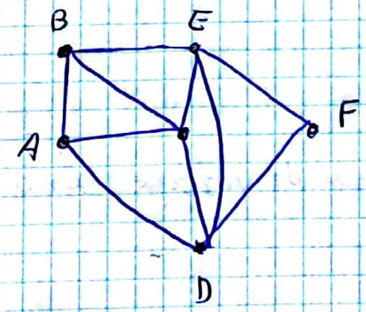


$\chi(G) = 2$

1º Asigno C_1 a "B" y al resto no adyacentes

2º " C_2 a "C" y " " " "

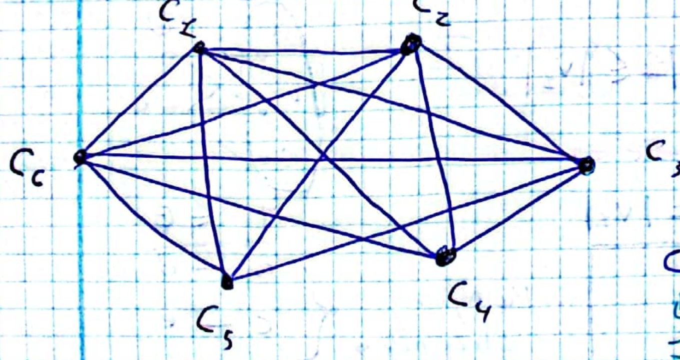




$\chi(G) = 3$

¿Mínimo Nº de reuniones? $\rightarrow$ coloración

$C_1\{a,b,z\}$ / $C_2\{b,l,r\}$ / $C_3\{a,r,z\}$ / $C_4\{l,r,z\}$ / $C_5\{a,b\}$ / $C_6\{b,r,z\}$

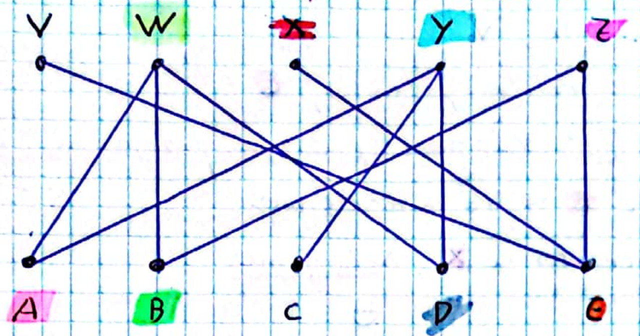


$\chi(G) = \underline{5}$

C_1	C_2	C_3	C_6	C_4	C_5
↓	↓	↓	↓	↓	↓
1	2	3	4	5	5

Algoritmo de Busqueda de caminos alternados

→ Emparejamiento completo
→ " Máximo



Busco en impares

- Partimos de un emparejamiento inicial $M_0 = \{W, b\}$

Paso 1

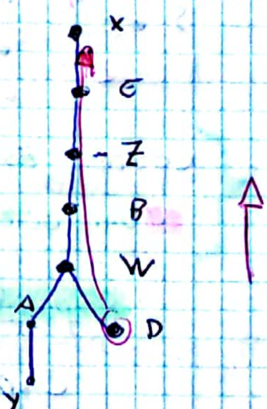
- Elegimos un vértice No adyacente a M_0, Y
  - Añadimos al 1º nivel del árbol los vertices adyacentes a Y
    a, c, d
    El primero de estos No es pareja en $M_0 \Rightarrow M_1 = M_0 \cup \{Y, A\}$

Paso 2

- Elejo el vértice Z
  - Añadimos al 1º nivel del arbol B, E
  - Añado al 2º nivel del arbol los vértices, que no están en el arbol, y que son pareja en M_1.
    - Vemos que "W" es pareja de "B", pero "E" no es pareja con M_1
      ⇓
      Añadimos nueva pareja $\{Z, E\} \Rightarrow M_2 = M_1 \cup \{Z, E\}$

Paso 3

Elijo otro vértice no adyacente, X
- Añado al 1º nivel del arbol los adyacentes E
- Añado al 2º nivel del arbol .... Z
- Añado al 3º nivel del arbol los adyacentes a Z, B
- " al 4º nivel " " " " a B, W
- " al 5º nivel " " " " a W, A, D



$M_3 = \{Y - A, X - E, Z - B, W - D\}$

Paso 4

Elijo otro vértice No adyacente, V

- Añado al 1º nivel del arbol los adyacentes, E
- " al 2º " " " vértices que son pareja en M_3,

Y vemos que X es pareja de E ⇒ lo añadimos

- Añado al 3º nivel, adyacentes a X, Ninguno

⇓

Se acaba el algoritmo

• El emparejamiento es máximo y está formado por 4 parejas

Red de transporte

• Es un grafo dirigido // capacidad (c)

• vértice inicial ⟶ Fuente

• " Final ⟶ Sumidero

• Lo que se suministra es un flujo (f)

Se verifica

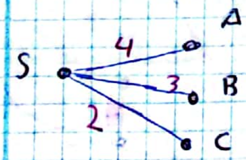
• Ley de viabilidad

$$f(u,v) \leq c(u,v)$$

• Ley de conservación

• Lo que entra sale

• En una red de transporte, a la suma de los flujos de las aristas que tienen como vértice inicial la fuente se denomina **Valor del flujo:**



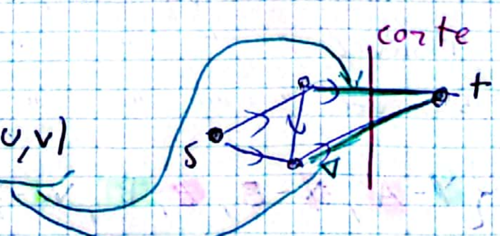
Valor del flujo = 9

Corte: Es una partición del conjunto de vértices

• Un corte está definido por 2 subconjuntos de vértices

Capacidad de corte

$$cap(s,t) = \sum c(u,v)$$



• Si su capacidad es la más pequeña posible

⇓

se le llama corte mínimo

$Valor(f) \leq Cap(s,t)$

$\Downarrow$

$Valor(f)$ Máximo $\leq$ Capacidad de corte mínimo

- Camino aumentante de flujo: camino formado por aristas cuyo flujo puede ser aumentado

- Teorema de flujo máximo y corte mínimo

  Flujo máximo = capacidad del corte mínimo

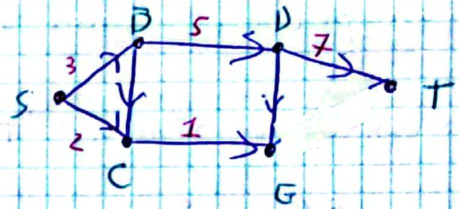
asigno flujo 0 a todas las aristas

Encontrar el flujo de una Red

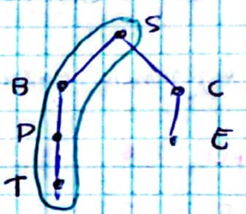
$\Downarrow$

Algoritmo de etiquetaje de flujo Máximo

- Partiendo de la fuente, aplico BEA



- Si el arbol llega a "t", se considera el "camino aumentante de flujo". Y se aumenta el valor del flujo



- La diferencia, de la 1° arista, de la capacidad y su flujo es 3
- La 2° arista 5
- La 3° arista 7

$\boxed{\alpha_1 = 3}$

$\alpha_2 = 5$

$\alpha_3 = 7$

es el valor mínimo del camino aumentante de flujo completo

entos

Puedo mejorar f a $f^* = \alpha_1$

$\downarrow$

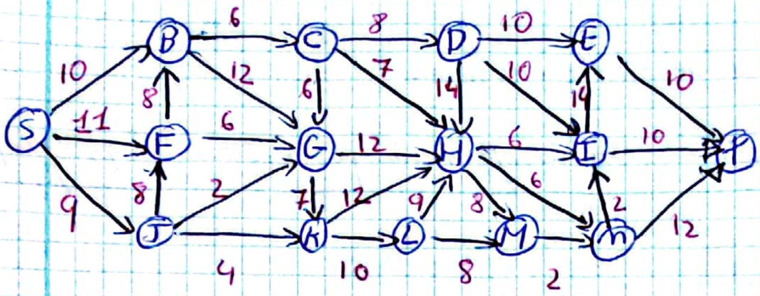
Al hacer esto, la capacidad de la 1° arista $(S-B) = 3$

$\Downarrow$

Esta arista no pertenecería a un camino aumentante de flujo posterior

EJM

Algoritmo búsqueda de camino aumentante de flujo completo



- Asigno flujo = 0 en todas las aristas

Paso 1

- Elijo "S" como raiz inicial del arbol
- Añado al 1º nivel del arbol los vértices adyacentes susceptibles de crear un camino de flujo aumentante B, F, J

B E A

⋮

- Añado al 5º nivel "t", al ser adyacente a "E"

El camino aumentante es: $S \xrightarrow[0]{10} B \xrightarrow[0]{6} C \xrightarrow[0]{8} D \xrightarrow[0]{10} E \xrightarrow[0]{10} t$

La diferencia entre la capacidad y el flujo es:

10	6	8	10	10
0	0	0	0	0
10	6	8	10	10

⇒ El valor mínimo $\alpha = 6$

Aumento el flujo inicial de las aristas de este camino aumentante de flujo

- Aplico tantas veces como haga falta este paso

Paso 7

- No es posible encontrar un camino aumentante de flujo completo. *
- Para definir el corte mínimo

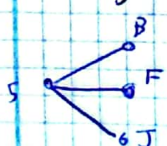
$S = \{S, F, J, B, G, K, H, L, M\}$

$t = \{C, D, E, I, N, t\}$

Valor de salida (f_6) = 10 + 6 + 4 = 20 y valor de entrada (f_6) = 6 + 6 + 8 = 20

y $C(s,t) = c(b,c) + c(h,i) + c(h,n) + c(m,n) = 6 + 6 + 6 + 2 = 20$

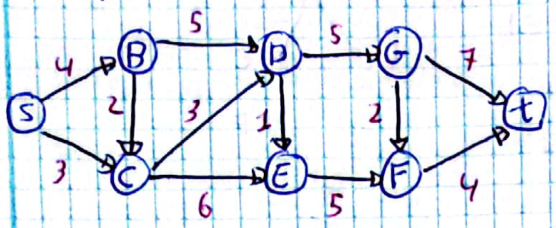
* tengo un arbol aumentante de flujo incompleto



El valor de salida es la suma de los flujos de estas aristas

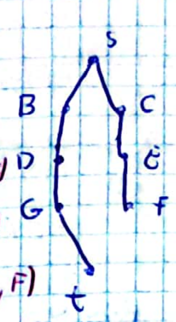
f_6 = iteración sexta

- Encontrar un flujo máximo y un corte mínimo en la siguiente red de transporte.



- Asigno el flujo de todas las aristas igual a 0

Paso 1



- Elijo "S" como vértice inicial del árbol
- Añado al 1º nivel del árbol los vértices adyacentes a "S" (B, C)
- " " 2º " " " " " " a "B" y "C" (D, E)
- " " 3º " " " " " " a "D" y "E" (G, F)
- " " 4º " " " " " " a "G" (t)

Hemos encontrado el camino aumentante de flujo

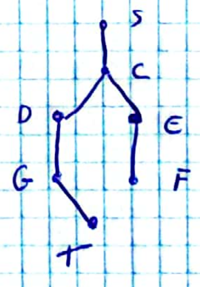
S ⟶ B ⟶ D ⟶ G ⟶ t

Capacidad	4	5	5	7
Flujo	0	0	0	0
Diferencia	4	5	5	7

- El nuevo flujo, $f_2 = f_1 + 4$ en las aristas de este camino

Paso 2

- S ⟶ B se ha saturado ⟹ No es posible formar parte del camino aumentante de flujo completo.



- Añado al 1º nivel del árbol los vértices adyacentes susceptibles de crear C. A. D. F. de "S" (C)
- Añado al 2º nivel . . . . de "C" (D, E)
- " " 3º " . . . . . . de "D" y "E" (G, F)
- " " 4º " . . . . . . de "G" (t)

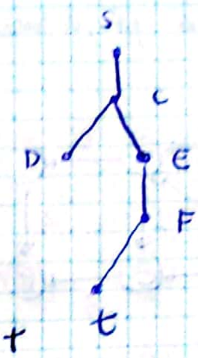
S ⟶ C ⟶ D ⟶ G ⟶ t

Capacidad	3	3	5	7
Flujo	0	0	4	4
Diferencia	3	3	1	3

- El nuevo flujo, $f_3 = f_2 + 1$ en las aristas de este camino

Paso 3

- Añado al 1º nivel ...... de "S" (C)
- " " 2º " ...... de "C" (D, E)
- " " 3º " ...... de "E" (F)
- " " 4º " ...... de "F" (t)



$$S \longrightarrow C \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow t$$

Capacidad	3	6	5	4
Flujo	1	0	0	0
Diferencia	2	6	5	4

- El nuevo flujo, $f_4 = f_3 + 2$ en las aristas de este camino

Paso 4

- Partiendo de S, no se puede elegir ningún vértice

$\Downarrow$

No es posible sacar más C.A.P.F.C.

- El corte mínimo calculado se corresponde con:

$S = \{s\}$

$t = \{B, C, D, E, F, G, t\}$

- Valor de salida $(f_4) = f_4(s,b) + f_4(s,c) = 4+3 = 7$
- Capacidad de corte $c(s,b) + c(s,c) = 4+3 = 7$

$\Big\}$ Se verifica

Busqueda de empanejamiento en un grafo Bi-partido

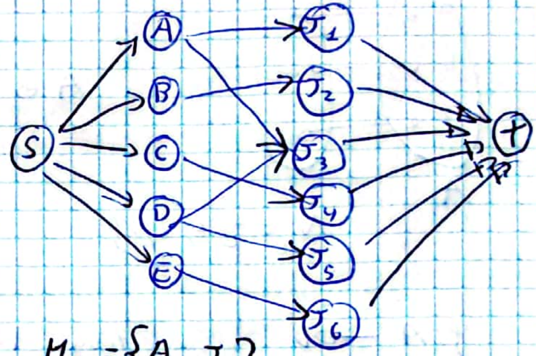
- Añadimos una fuente y aristas directas al primer subconjunto
- " " Sumidero " " " " Segundo "

- Se le asigna capacidad = 1 y flujo = 0 en estas aristas

⇓

Puedo aplicar el algoritmo de flujo máximo

EJM



paso 1

- Añado fuente y sumidero, aristas $C = 1$ y $f = 0$
- Añado al 1º nivel _ _ _ _ de "S"

- El camino aumentante de flujo es

$$S \xrightarrow{} \overset{1}{\underset{0}{A}} \longrightarrow \overset{1}{\underset{0}{J_1}} \longrightarrow \overset{1}{\underset{0}{t}}$$

$$M_1 = \{A, J_1\}$$

Paso 5

$M_5 = \{ \_ \_ \_ \}$ y como $|M_5| = 5 = |\{A, B, C, D, E\}|$ es completo

---

Tema - 2 - Técnicas de recuento

- **Aplicación**

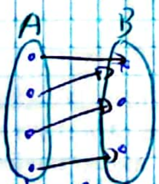
$f: A \longrightarrow B$

Al conjunto inicial le ha de corresponder solo 1 elemento del conjunto final.

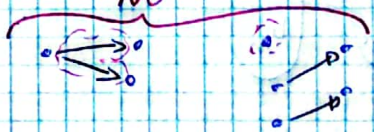
$f(a) = m$

Imagen de A

Original del m

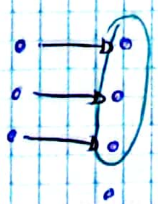


NO



- **Aplicación inyectiva**

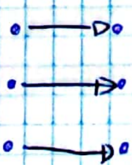
Los elementos que son imagen, les corresponde solo 1 original



Lo cumple ⟹ Es una aplicación inyectiva

- **Aplicación exahustiva**

Cuando $\underbrace{\text{cada elemento}}_{\text{Aunque No sean imágenes}}$ que es imagen, existe al menos un original

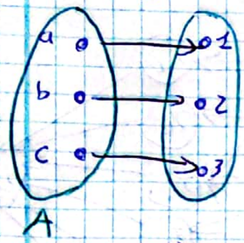


- **Aplicación Biyectiva**

  Si es a la vez inyectiva y exahustiva

Conjunto finito

- Si existe una biyección entre elementos de ese conjunto y un subconjunto de los Números naturales, A es finito



A es un conjunto finito

$N_3 = \{1, 2, 3\}$

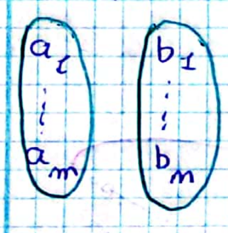
$f: A \longrightarrow B$ es inyectiva, $|A| \leq |B|$

$f: A \longrightarrow B$ es sobreyectiva, $|A| \geq |B|$

$|A \times B| = |A| \cdot |B| \rightsquigarrow |A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|$

$|A \cup B| = |A| + |B|$

¿Número de aplicaciones distintas posibles?



m^m

Problemas

② ¿De cuantas formas se puede asignar un nombre, dos o tres de una lista de 500 nombres?

$N_1 = 500$

$N_2 = 500 \times 499$

$N_3 = 500 \times 499 \times 498$

③ ¿Cuantas matrículas se pueden determinar si cada una consta de 4 letras y 3 dígitos?

- 27 letras
- 10 dígitos

$$\underbrace{\underline{10}\ \underline{10}\ \underline{10}}_{\text{Digitos}}\ \underbrace{\underline{27}\ \underline{27}\ \underline{27}\ \underline{27}}_{\text{letras}} = 10^3 \cdot 27^4$$

Digitos: se pueden repetir

letras: se puede repetir

④ Determinar cuantos números de 5 cifras existen que:

a) No contenga ninguna cifra repetida

_ _ _ _ _

↳ aquí no puede aparecer un 0 $\Rightarrow 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 =$

B) sean pares (Puedo repetir)

Deben acabar en 0, 2, 4, 6, 8

$\underline{9}\ \underline{10}\ \underline{10}\ \underline{10}\ \underline{\ }$

0 → $9 \cdot 10^3$

2 → $9 \cdot 10^3$

4 → $9 \cdot 10^3$

6 → $9 \cdot 10^3$

8 → $9 \cdot 10^3$

$\} \ 9 \cdot 10^3 \cdot 5$

↑ Nº de veces que se repite $(9 \cdot 10^3)$

c) contenga 3 nueves

- si empieza por 9

$\underline{9}$ _ _ _ _ (tengo 4 espacios y tengo que poner 2)

$$C_{4,2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} \Rightarrow \binom{4}{2} \cdot \underbrace{9 \cdot 9}_{\text{cifras que NO son 9}}$$

- si NO empieza por 9

_ _ _ _ _

8

$$\binom{4}{3} \cdot 9 \cdot 8$$

(14) ¿cuantos números de 6 cifras tienen un número impar de dígitos impares?

con repetición

1 digito impar $\longrightarrow \binom{6}{1} \cdot 5 \cdot 5^5$

opciones de la cifra impar $\{1,3,5,7,9\}$

3 " " $\longrightarrow \binom{6}{3} \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

5 " " $\longrightarrow \binom{6}{5}$

Sin Repe $\binom{6}{5} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5$

con Repe $\binom{6}{5} \cdot 5^5 \cdot \underbrace{5}_{\text{Digitos pares}}$

(15) Eleciones de 7 partidos y 5 diputados por partido (como mucho se pueden seleccionar a 5 diputados por persona) ¿De cuantas formas distintas puede votar una persona)

$$1 + \binom{35}{1} + \binom{35}{2} + \binom{35}{3} + \binom{35}{4} + \binom{35}{5} =$$

Boto en Blanco

¿y si no elijo más de 1 diputado por partido?

$$1 + \binom{7}{1} \cdot \binom{5}{1} + \binom{7}{2} \cdot 5^2 + \binom{7}{3} \cdot 5^3 + \binom{7}{4} \cdot 5^4 + \binom{7}{5} \cdot 5^5 =$$

(21) ¿cuantas formas hay de ordenar 10 mujeres y 5 hombres para que no haya 2 hombres juntos?

10 mujeres $\Rightarrow$ 11 huecos entre ellas

$$\underbrace{\binom{11}{5} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{\text{Hombres}} \cdot \underbrace{10!}_{\text{Mujeres}} =$$

(27) Número de divisores positivos de 176000 ¿cuantos pares?

176 000	2
88	2
44	2
22	2
11	11
1	

$176\,000 = 10^3 \cdot 2^4 \cdot 11 = 2^7 \cdot 5^3 \cdot 11$

$10^3 \Rightarrow 2^3 \cdot 5^3$

$\underbrace{2^a \cdot 5^b \cdot 11^c}$ | nº de opciones

$0 \leq a \leq 7 = 8$

$0 \leq b \leq 3 = 4$

$0 \leq c \leq 1 = 2$

$8 \cdot 4 \cdot 2 = 64$ divisores posibles (pares)

(22) Existen 20 asignaturas en 4º y 30 en 5º, debo elegir 4 en 4º y 6 en 5º

a) ¿De cuantas formas puedo hacerlo?

$$\binom{20}{4} \cdot \binom{30}{6} =$$

b) De 5º (A y B) y 4º (C, D) siguen:

- Si cojo A ⇒ cojo B
- " " B ⇒ " C
- " " C ⇒ " D

¿De cuantas formas puedo hacerlo?

• Si cojo ABCD	• Si cojo BCD	• Si cojo CD	• Si NO cojo ABCD	• Si cojo D
$\binom{28}{4} \cdot \binom{18}{2}$	$\binom{29}{5} \cdot \binom{18}{2}$	$\binom{28}{6} \cdot \binom{18}{2}$	$\binom{28}{6} \cdot \binom{18}{4}$	$\binom{28}{6} \cdot \binom{19}{3}$

porque A y B = 2
No las cojo

La suma de todos estos casos es el resultado

c) Se agrupan las asignaturas de 5º en grupos de 2, ¿como puedo hacerlo?

$$\binom{15}{6} \cdot 2^6 \cdot \binom{20}{4} =$$

→ cada pareja tiene "2" opciones, tengo que elegir una

---

(23) Un repartidor tiene 30 sobres, entra en un edificio de 20 viviendas ¿De cuantas formas puede hacerlo si deja al menos 1 por buzón?

• Dejo 1 por buzón ⇒ Me faltan por repartir 10

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{20} = 10$$

→ (lo que dejo en el buzón 1)

$\underbrace{\_\,|\,\_\,|\,\_\,|\,\_\,|\,\_\,|\,\_\,|\,\_\,|}\_ \ldots$

tendré $20 - 1 = 19$ barreras

↓

indican cambio de buzón

⇐

$\underline{19 \text{ barreras} + 10 \text{ sobres}} =$

$= 29 \rightarrow \binom{29}{10} =$

---

(25) Calcular Nº de enteros positivos menores de 1.000.000, tienen un dígito igual a "9" y la suma de dígitos es 15

$n < 10^6$ (1 millón)

$n \leq 999\,999$

$\sum x_i = 15$, si un $x_i = 9 \Rightarrow \underbrace{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}_{n = 5} = \underbrace{15 - 9}_{6}$

$$\binom{6+5}{6} = \binom{9}{6}$$

$\underbrace{\_\,|\,\_\,|\,\_\,|\,\_\,|\,\_}$

$n - 1 = 5 - 1 = 4$

Como máximo ha de ser 6

(30) Sea "S" un conjunto con m elementos. ¿Cuántos pares ordenados (A, B) existen tales que A y B son subconjuntos de S y $A \subseteq B$?

$A \subseteq S$ • Si un elemento está en A, entonces está en S

subconjunto de S

$\underbrace{P(A)}$ Partes de "A"

$A \subseteq S$

$\underbrace{111010\ldots0}_{\text{secuencia binaria}} \rightarrow \{a_1, a_2, a_3, a_5\} = A_1$

• $A, B \subseteq S$

$A \subseteq B$

$|B| = k, \quad 0 \leq k \leq m \Rightarrow$ ~~tendrá~~ 2^k

$P(S) = 2^m$

• de "m" elementos, cojo de "k" en "k" $\binom{m}{k}$

$|(A, B)|$

2^k "k" elementos

$$\sum_{k=0}^{m} 2^k \cdot \binom{m}{k}$$

---

(32) ¿Cuántas palabras del alfabeto $\{a, b, c\}$ contiene 8 "a", 3 "b", 5 "c"?

$8 + 3 + 5 = 16$

$\binom{16}{8} \cdot \binom{8}{3} \cdot \binom{5}{5} =$

*No importa el orden

b/ ¿Cuántas de entre las anteriores no contienen 2 "a" consecutivas?

5 "b" y 3 "c" = 8

$|\_|\_|\_|\_|\_|\_|\_|\_|$ 9 posibles sitios donde poner las "a" $\binom{16}{5} \cdot \binom{11}{3} \cdot \binom{9}{8}$

(36) 6 coches y 6 furgonetas (distintos cada uno) ¿De cuantas maneras puede organizarse si no pueden estar 2 furgonetas juntas?

• Formas en las que puedo ordenar los coches = 6!

Una vez colocados los coches, tengo que colocar las furgos

_ C_1 _ C_2 _ C_3 _ C_4 _ C_5 _ C_6 _

= 7 espacios y tengo que colocar 6 furgos, cada uno es diferente

$$\underbrace{\binom{7}{6} \cdot 6!}_{\text{furgos}} \cdot \underbrace{6!}_{\text{coches}} =$$

Teoría

• Regla de la suma

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3|$$

EJM

¿cuantas contraseñas de longitud 6, 7 y 8 está compuesta de letras y números? (al menos un dígito)

$$|C| = |C_6 \cup C_7 \cup C_8|$$

• Aplicando regla de la suma

• 37 caracteres = 27 letras + 10 números

$$|C| = |C_6| + |C_7| + |C_8|$$

$$|C_6| = 37^6 - \underbrace{27^6}_{\text{contraseñas que no tienen ningún dígito}}$$

$$|C| = (37^6 - 27^6) + (37^7 - 27^7) + (37^8 - 27^8) =$$

• Principio del palomar

si tenemos $k+1$ objetos a distribuir entre k cajas, al menos existirá 1 caja que recibirá 2 objetos.

EJM.- 3 canicas en 2 bolsas

• Regla de la diferencia

$$B = A \cup (B - A) \Rightarrow |B| = |A| + |B| - |A|$$

• Generalización principio del palomar

N objetos y k cajas $(N > k)$, al menos una caja recibirá $\underbrace{\lceil N/k \rceil}_{}$ objetos

Parte entera por exceso

EJM

¿cuantas cartas como mínimo para garantizar 3 del mismo palo? $\lceil N/4 \rceil \geq 3$

$$\text{si } N = 9 \Rightarrow \lceil 9/4 \rceil = \lceil 2'\ldots \rceil = 3 \geq 3$$

• Variaciones y Permutaciones

Si tenemos n elementos y tomamos m ordenados sin repetición

$$V(n,m) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Ej: ¿Cuantos Nº de 5 cifras, no repetidas, con números 1-9?

$\underline{9}\ \underline{8}\ \underline{7}\ \underline{6}\ \underline{5}$

$$V(9,5) = \frac{9!}{(9-5)!} = \dots$$

• Permutación: Reordenación de un conjunto de elementos

• Combinaciones

El número total de m combinaciones de un conjunto de n elementos

$$\boxed{C(n,m) = \binom{n}{m} = \frac{V(n,m)}{P(m)}}$$

Ej: ¿De cuantas formas agrupar este conjunto en grupos de 2 $\{A, B, C\}$?

$\{A\ B\} \to A, B$; B, A

$\{B, C\}$

$\{C, A\}$ $\underbrace{\quad - \quad -}_{2!}$

$$\Rightarrow C(3,2) = \frac{V_{3,2}}{2!} = \binom{3}{2}$$

Nº de variaciones de 3 elementos en grupos de 2

• Binomio de newton

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot y^k}$$

• Si n No es negativo

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

• Si n es negativo

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

• Identidad de Pascal

Si n y k son positivos y $n \geq k$

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}}$$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

- Variaciones y combinaciones generalizadas

- Variaciones con repetición

$$\overbrace{\underset{n}{\_}\ \underset{n}{\_}\ \underset{n}{\_}\ \underset{n}{\_}}^{m} = \boxed{n^m} \qquad \text{EJM} \quad \underset{9}{\_}\ \underset{9}{\_}\ \underset{9}{\_}\ \underset{9}{\_} = 9^4$$

- Combinaciones con repetición (CR)

- Si elegimos 3 elementos sin importar el orden del conjunto {A, B}

  (Existen 15 posibilidades, aaa, aab, abb, ...)

$$aab \Rightarrow \underbrace{1\ 1}_{aa}\ 0\ \underbrace{1}_{b}$$

3 elementos, 2 objetos − 1 =

$$\boxed{\binom{n+m-1}{m}} = \binom{2+3-1}{3}$$

$$\boxed{\binom{n+m-1}{n-1} = \binom{n+m-1}{m}} \qquad \binom{4}{1} = \binom{4}{3}$$

¿Cuantas soluciones tiene la ecuación (enteros, positivos)?

$$X_1 + X_2 + X_3 = 11$$

$$\Rightarrow \binom{3+11-1}{11} = \binom{13}{11} \qquad \begin{matrix} n = 3 \\ m = 11 \end{matrix}$$

n = conjunto de elementos

m = Nº de combinaciones

(n < m) por lo general

- Permutaciones con objetos indistinguibles

PATATA = 3 "A" 2 "T" 1 "P" = n = 6

$$\underbrace{\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1}}_{\text{No importa el orden}} = 60 \quad \text{Podemos generalizar} \quad \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} = 60$$

Escaneado con CamScanner

Lab ⑫ calcular el nº de reordenaciones posibles

a) PARBA

1 P
2 R
2 A

$$P_{5,2,2,1} = \frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!}$$

* Permutación indistingible

b) PERENNE

1 P
1 R
3 E
2 N

$$P_{7,3,2,1,1} = \frac{7!}{3! \cdot 2! \; 1! \; 1!}$$

㊺ ¿cuantas palabras de longitud 8 se pueden formar sin secuencia "baba"?

$\{a, b, c, d, e\}$ $\quad \underset{5}{\_}\ \underset{5}{\_}\ \underset{5}{\_}\ \underset{5}{\_} \cdots \underset{5}{\_} = 5^8$

$$|P_{no\ baba}| = 5^8 - |P_{baba}| = 5^8 - 5^5 =$$

$$|P_{baba}| = \_\ \_\ \underline{b}\,\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{a}\ \_\ \_$$ Me quedan 4 espacios

$$\hookrightarrow \underbrace{5}_{\text{Donde puedo poner baba}} \cdot 5^4 = 5^5$$

㊻ ¿cuantas formas de ordenar $\{A, E, M, O, U, Y\}$ sin aparecer "ME" y "YOU"? (sin orden)

$$|P_{ME} \cap P_{YOU}| = \underbrace{|P^c_{ME} \cap P^c_{YOU}|}_{\text{el complementario}} = \underbrace{|(P_{ME} \cup P_{YOU})^c|}_{\text{Morgan}} = |T_P - P_{ME} \cup P_{YOU}| =$$

total de palabras

$$= \underbrace{|T_P| - |P_{ME} \cup P_{YOU}|}_{\text{Regla diferencia}} = 6! - ((4! - 5!) + 3!)$$

$$-(\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$\alpha_1 = |P_{YOU}| + |P_{ME}| = 4! + 5!$$

$$\alpha_2 = |P_{YOU} \cap P_{ME}| = 3! \longrightarrow \underline{YOU}\ \underline{ME}\ \underline{W} = 3!$$

(40) Se quiere repartir 1 premio de 100.000 €, 2 de 50.000 € y 5 de 10.000 €. Hay 13 candidatos, ¿de cuantas formas se puede repartir?

$$\text{Total } \binom{13}{1}\cdot\binom{12}{2}\cdot\binom{10}{5} =$$

(39) Calcular el Nº de cadenas binarias

a) Contenga 8 ceros y 10 unos si cada cero le ha de seguir un uno.

$\underline{01}\ \underline{01}\ \underline{01}\ \underline{01}\ \underline{01}\ \underline{01}\ \underline{01}\ \underline{01}\ \underline{1}\ \underline{1}$

$\binom{10}{2}$ Para colocar los 2 unos

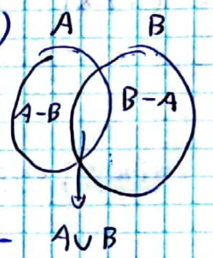
b) Contiene 5 ceros y 15 unos, cada 0 le siguen 2 unos

$\underline{011}\ \underline{011}\ \underline{011}\ \underline{011}\ \underline{011}\ \underline{1}\,\underline{1}\,\underline{1}\,\underline{1}\,\underline{1}$

$\binom{10}{5}$

Teoría

- <u>Principio de inclusión y Exclusión</u> (PIE)



$$|A\cup B| = \boxed{|A| + |B| - |A\cap B|}$$

- <u>PIE de m conjuntos que NO sean distintos</u>

$$|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_m| = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \ldots + (-1)^{m-1}\alpha_m$$

$\alpha_1 = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_m|$

$\alpha_2 = \sum |A_i\cap A_j|$

$\alpha_3 = \sum |A_i\cap A_j\cap A_k|$

$\vdots$

α_k

Por lo tanto

$$\boxed{\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \ldots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k}}$$

EJM

¿De cuantas formas podemos distribuir 6 juguetes entre 3 niños? todo niño ha de recibir al menos 1.

$A = \{j_1, \ldots, j_6\}$

$B = \{n_1, n_2, n_3\}$

Denotamos B_i al subconjunto de aplicaciones que no tienen a n_i como imagen ($1\le i\le 3$) y por B^A al conjunto de aplicaciones de A en B.

$$|B_1^c\cap B_2^c\cap B_3^c| = |(B_1\cup B_2\cup B_3)^c| = |B^A| - |B_1\cup B_2\cup B_3| =$$

$$= 3^6 - (\alpha_1 - \alpha_2 + (-1)^{3-1}\alpha_3)$$

$$\alpha_r = \binom{n}{r}(n-r)^m$$

Para cada $r\in\{1,2,3\} \longrightarrow \alpha_r\binom{3}{r}(3-r)^6$

Portanto

$$\boxed{3^6 - \binom{3}{1}(3-1)^6 + \binom{3}{2}(3-2)^6 + \binom{3}{3}(3-3)^6}$$

= n

= m

Tema 3- Técnicas avanzadas de recuento

$$G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

Suma

$$A(x) + B(x) = \sum (a_n + b_n) x^n$$

Producto

$$A(x) \cdot B(x) = (a_0 \cdot b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \dots$$

• **Función generadora**

(si todos los coeficientes son 1)

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = \frac{1}{1-x}$$

- si $0 \leq k \leq n \Rightarrow$ La función generadora es:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k = (1+x)^n$$

EJ 4

Repartir 15 libros entre 3 personas

1º al menos 3

2º y 3º al menos 2 $\qquad I_1 + I_2 + I_3 = 15$

$$3 \leq I_1 \leq 11 \qquad 2 \leq I_2 \leq 10 \qquad 2 \leq I_3 \leq 10$$

$$(x^3 + x^4 + \dots + x^{11}) \cdot (x^2 + \dots + x^{10}) \cdot (x^2 + \dots + x^{10}) = \dots$$

$\dots + 45x^{15} + \dots = 45$ formas distintas

• **Números binomiales extendidos**

$$\binom{u}{k} = \begin{cases} \dfrac{u(u-1)\cdots(u-k+1)}{k!} & k > 0 \\ 1 & k = 0 \end{cases}$$

- caso particular

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$$

- **Binomio extendido**

si $|x|<1$ y "u" es un número cualquiera

$$\boxed{(1-x)^{-m}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m+k-1}{k}x^k}$$

EJ

Distribuir 24 tareas entre 4 personas. Cada uno min 3 tareas.
" " max 8 "

$t_1+t_2+t_3+t_4=24$

$x^{t_1}\cdot x^{t_2}\cdot x^{t_3}\cdot x^{t_4}=x^{24}$ → Busco este coeficiente

$G(x)=(x^3+x^4+\dots+x^8)^4=\underbrace{x^{12}(1+x+x^2+\dots+x^5)^4}=\left(\frac{1-x^{5}\cdot x}{1-x}\right)^4=$

saco factor común de 3

$24-12=12$ es el coef. que busco

$=(1-x^6)^4\cdot(1-x)^{-4}$

$\underbrace{\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}(-x^6)^k}_{\text{Newton}}\cdot\underbrace{\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-4}{r}(-x)^r}_{\text{Extendido}}$

$\begin{cases}\text{si } k=0 \text{ y } r=12\\ \text{si } k=1 \text{ y } r=6\\ \text{si } k=2 \text{ y } r=0\end{cases}$

El coeficiente es: $\binom{4}{0}\binom{-4}{12}-\binom{4}{1}\binom{-4}{6}+\binom{4}{2}\binom{-4}{0}=$

$$\boxed{*\ \binom{-m}{k}=\binom{m+k-1}{k}(-1)^k}$$

$=\binom{-4}{12}-4\binom{-4}{6}+\binom{4}{2}=\binom{4+12-1}{12}(-1)^{12}-4\cdot\binom{4+6-1}{6}(-1)^6+\binom{4}{2}=125$

- **Función generadora exponencial**

EJ Ordenar palabra de tamaño 4 de (a,b,c), min 2 "a"

$\left.\begin{array}{l}a\to I_1\\ b\to I_2\\ c\to I_3\end{array}\right\}$ $2\le I_1\le 4$ $\qquad \frac{4!}{I_1!\,I_2!\,I_3!}$

$0\le I_2, I_3\le 2$

$I_1+I_2+I_3=4$

$$G(x)=\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right)^2$$

DEF

$$\boxed{*\ G(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\frac{x^k}{k!}}$$

Escaneado con CamScanner

• Particiones de un entero

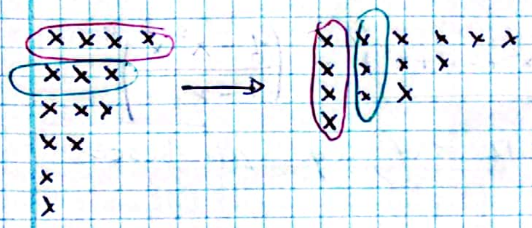
• Número de particiones de $n \rightarrow p(n)$

• Cuantas particiones de "n" con "r" partes

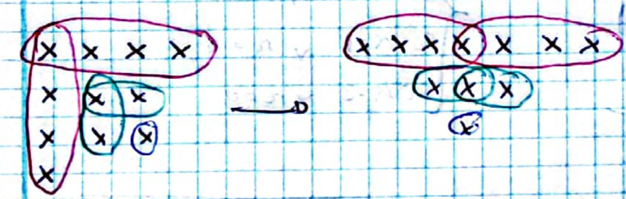
$n = 5$ y $r = 2$

x x x   x x x x   x x x x x
x x   x   o

- Particiones conjugadas



- Partición autoconjugada



• Función generadora

$$P(x) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - x^{i})^{-1}$$

$\prod$ (producto)

Lab

④ Supongamos que $A(x)$ es la función generadora de la sucesión (a_n) $n \geq 0$, ¿Cuáles son las funciones generadoras de las sucesiones...

i) $p_n = 5a_n$

$p_0 = 5a_0 \quad p_1 = 5a_1 \; \dots$

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 5a_n \cdot x^n = 5 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n}_{\text{Función generadora}} = 5A(x)$$

Saco factor común

$$\boxed{A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n}$$

ii) $q_n = a_n + 5$

$$Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + 5) \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 5 \cdot x^n = A(x) + 5 \sum_{n=0}^{\infty} x^n =$$

$$= A(x) + 5 \frac{1}{1-x}$$

iii) $r_n = a_{n+5}$

$$R(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+5} \cdot x^n \longrightarrow \underbrace{a_5 \cdot x^0 \cdot x^5 + a_6 \cdot x^1 \cdot x^5 + a_7 \cdot x^2 \cdot x^5}$$

$$x^5 \cdot R(x) \Rightarrow R(x) = \frac{A(x) - (a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 \dots + a_4 \cdot x^4)}{x^5}$$

---

⑥ "n" libros entre 4 personas

$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = n$

$x^{L_1} \cdot x^{L_2} \cdot x^{L_3} \cdot x^{L_4} = x^n \rightarrow$ Busco el coeficiente x^n

$(x^0 + x^1 + \dots) = F(x)$

• Mi función generadora será: $F(x) = (x^0 + x^1 + x^2 \dots)^4 = \left(\frac{1}{1-x}\right)^4 = (1-x)^{-4}$

Binomio extendido

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-4}{k} (-x)^k \longrightarrow \binom{-4}{k} (-1)^k \cdot x^n = \binom{4+n-1}{n} (-1)^n \cdot (-1)^n$$

7) 6 objetos elegidos con repetición de entre 3 clases (4 max de cada una)

$O_1 + O_2 + O_3 = 6$

$x^{O_1} \cdot x^{O_2} \cdot x^{O_3} = x^6$ → Busco este coeficiente

$(x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4)$

$$G(x) = (x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4)^3 = \left(\frac{1 - x^4 \cdot x}{1 - x}\right)^3 = \left(\frac{1 - x^5}{1 - x}\right)^3 = \underbrace{(1 - x^5)^3}_{} \cdot \underbrace{(1-x)^{-3}}_{}$$

$$\underbrace{\sum_{K=0}^{3} \binom{3}{K} \cdot (-x^5)^K}_{} \cdot \underbrace{\sum_{r=0}^{\infty} \binom{-3}{r} (-x)^r}_{}$$

Para obtener x^6

Si $K=0$ y $r=6$

Si $K=1$ y $r=1$

$K=0$ y $r=6$

$$\binom{3}{0} \cdot 1 \cdot \binom{-3}{6} \cdot (-1)^6 \cdot x^6 = \binom{3}{0}\binom{3+6-1}{6} \cdot (-1)^6 (-1)^6$$

$K=1$ y $r=1$

$$\binom{3}{1}(-1) \binom{-3}{1} (-1)^1 \cdot x^1 = \binom{3}{1}(-1) \cdot \binom{3+1-1}{1}(-1)^1 (-1)^1$$

$\bigcirc + \bigcirc$ = Resultado

7B) 3V ; 3B , 3A , 3N = r

$n_V + n_B + n_A + n_N = r$

$$G(x) = (1 + x + x^2 + x^3)^4 = \left(\frac{1 - x^3 \cdot x}{1 - x}\right)^4 = (1 - x^4)^4 (1-x)^{-4}$$

0 bolas

$$\sum_{K=0}^{4} \binom{4}{K} (-x^4)^K \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \binom{-4}{s} (-x)^s$$

Si $K=0$ y $S = r$

" $K=1$ y $S = r-4$

$K=2$ y $S = r-8$

$K=3$ y $S = r-12$

$K=4$ y $S = r-16$

$\sum$ todos

ej:

$$\binom{4}{0}(-x^4)^0 \cdot \binom{-4}{r} \cdot (-x)^r = \binom{4}{0}\binom{-4}{r}(-1)^r \cdot x^r$$

$$\binom{4}{1}(-x^4)^1 \cdot \binom{-4}{r-4} (-x)^{r-4} = \binom{4}{1}\binom{-4}{r-4}(-1)^1 (-1)^{r-4} \cdot x^r$$

⑨ seleccionan 25 entre 7 tipos distintos (entre 2 y 6)

$f_1+f_2 - - - + f_7 = 25$

$x^{f_1} \cdot x^{f_2} \cdots \cdot x^{f_7} = x^{25} \longrightarrow$ Busco este coeficiente

$$G(x) = (x^2+x^3+\dots+x^6)^7 = \left(\frac{x^2-x^6\cdot x}{1-x}\right)^7 = (x^2-x^7)^7 \cdot (1-x)^{-7} =$$

$$= x^{14}(1-x^5)^7 \cdot (1-x)^{-7} =$$

$x^{25} - x^{14} = \boxed{x^{11} \text{ Busco}}$

$$\sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}(-x^5)^k \cdot \sum_{r=0}^{\infty}\binom{-7}{r}(-x)^r$$

$\begin{cases} \text{si } k=0 \text{ y } r=11 \\ \text{si } k=1 \text{ y } r=6 \\ \text{si } k=2 \text{ y } r=1 \end{cases}$

$$\binom{7}{0}\binom{-7}{11}(-x)^{11} = 1\binom{7+11-1}{11}(-1)^{11}(-1)^{11} \cdot x^{11}$$

$$\binom{7}{1}\binom{-7}{6}(-x^5)^1(-x)^6 = \binom{7}{1}\binom{7+6-1}{6}(-1)^6(-1)(-1)^6 x^{11}$$

$$\binom{7}{2}\binom{-7}{1}(-x^5)^2(-x)^1 = \binom{7}{2}\binom{7+1-1}{1}(-1)^1(-1)^1 \cdot x^{11}$$

La suma de los 3 coeficientes es el resultado que Buscamos

$$G(x) = 1\cdot\binom{16}{11} + \binom{7}{1}\binom{12}{6} + \binom{7}{2}\binom{7}{1} = \underline{10983}$$

---

⑪ tiro 12 veces un dado ¿ suma = 30?

$t_1 + t_2 - - + t_{12} = 30 \Rightarrow$ Busco x^{30}

$$F(x) = (x^1+x^2+\dots+x^6)^{12} = \text{saco factor} = x^{12}(1+x^1+x^2 \dots + x^5)^{12} = \left(\frac{1-x^5\cdot x}{1-x}\right)^{12}$$

$$x^{12}\sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k}(-x^6)^k \cdot \sum_{r=0}^{\infty}\binom{-12}{r}(-x)^r$$

$x^{30} - x^{12} = \underline{x^{18} \text{ Busco}}$

$\begin{cases} \text{si } k=0 \text{ y } r=18 \\ k=1 \text{ y } r=12 \\ k=2 \text{ y } r=6 \\ k=3 \text{ y } r=0 \end{cases}$

$\begin{cases} \binom{12}{0}\binom{-12}{18}(-x)^{18} \\ \binom{12}{1}(-x^6)^1\binom{-12}{12}(-x)^{12} \\ \binom{12}{2}(-x^6)^2\binom{-12}{6}(-x)^6 \\ \binom{12}{3}(-x^6)^3\binom{-12}{0}(-x)^0 \end{cases}$ Suma de todos

(12) Números enteros no negativos (4 cifras), suma dígitos = 18

$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 18$

$F(x) = (x^1 + x^2 + x^3 + \dots + x^9)(1 + x^1 + x^2 + \dots + x^9)^3 = 18$

el 0

$F(x) = x(1 + x^1 + x^2 \dots + x^8)(1 + x^1 + x^2 \dots + x^9)^3 \Rightarrow$ tengo que buscar x^{17}

$$G(x) = \left(\frac{1-x^9}{1-x}\right)\left(\frac{1-x^{10}}{1-x}\right)^3 = (1-x^9)(1-x)^{-1} \cdot (1-x^{10})^3 \cdot (1-x)^{-3} =$$

$$= (1-x^9)(1-x)^{-4} \cdot (1-x^{10})^3 =$$

$$= (1-x)^{-4}(1-x^{10})^3 - x^9(1-x)^{-4}(1-x^{10})^3$$

$$\left\{ \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k}(-x^{10})^k \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-4}{r}(-x)^r \right.$$

$\begin{cases} k=0 \text{ y } r=17 \\ k=1 \text{ y } r=7 \end{cases}$ $\begin{cases} \binom{3}{0}(-x^{10})^0 \cdot \binom{-4}{17}(-x)^{17} \\ \binom{3}{1}(-x^{10})^1 \cdot \binom{-4}{7}(-x)^{7} \end{cases}$

$$\left\{ \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k}(-x^{10})^k \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-4}{r}(-x)^r \right.$$

$k=0$ y $r=6$ $\left\{ \binom{3}{0}(-x^{10})^0 \cdot \binom{-4}{6}(-x)^6 \right.$

La suma de todos estos, es el resultado

(9) Se venden 250 papeletas a 100 personas se sortean 6 premios.
50 personas compraron 3 papeletas
" " " 2 "

$$(1+x+x^2+x^3)^{50}(1+x+x^2)^{50} = G(x)$$

$$\left(\frac{1-x^4}{1-x}\right)^{50}\left(\frac{1-x^3}{1-x}\right)^{50} = G(x) \qquad \boxed{\text{Busco } x^6}$$

$$(1-x^4)^{50}(1-x^3)^{50}(1-x)^{-100} = G(x)$$

$$\sum_{k=0}^{50}\binom{50}{k}(-x^4)^{50}\cdot\sum_{s=0}^{50}\binom{50}{s}(-x^3)^{s}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-100}{n}(-x)^n = G(x)$$

$$\left\{\begin{array}{lll} k=0 & s=2 & n=0 \\ k=1 & s=0 & n=2 \\ k=0 & s=1 & n=3 \\ k=0 & s=0 & n=6 \end{array}\right.$$

---

(16) conjunto $I_{15}=\{1,2,\dots,15\}$, Número de subconjuntos de 4 elementos con ninguno consecutivo.

$$\left.\begin{array}{l} 1 \overset{2}{\frown} 3 \overset{2}{\frown} 5 \overset{2}{\frown} 7 \overset{8}{\frown} 15 \\ 1 \overset{3}{\frown} 4 \overset{3}{\frown} 7 \overset{3}{\frown} 10 \overset{5}{\frown} 15 \\ 1 \overset{4}{\frown} 5 \overset{4}{\frown} 9 \overset{4}{\frown} 13 \overset{2}{\frown} 15 \end{array}\right\} \begin{array}{l} =14 \\ =14 \\ =14 \end{array}$$

$\Rightarrow d_1+d_2+d_3+d_4+d_5=14$

- $d_1, d_5 \geq 0$
- $d_2, d_3, d_4 \geq 2$

$$F(x) = (1+x+x^2+\dots)^2\,(x^2+x^3+x^4\dots)^3$$

$$F(x) = (1+x+x^2+\dots)^2\,x^6(1+x+x^2\dots)^3$$

Busco el coeficiente $x^{14}-x^6=x^8$ en $F(x)$

$$G(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2\left(\frac{1}{1-x}\right)^3 = (1-x)^{-5}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-5}{k}(-x)^k = \binom{-5}{8}(-1)^8 = \binom{-5}{8} = \binom{12}{8}$$

(17) 10 preguntas = 100 puntos (al menos 5 y Máx 20)

$H(x) = (x^5 + x^6 + \cdots + x^{20})^{10}$

$H(x) = x^{50}(1 + x + x^2 \cdots + x^{15})^{10}$

$H(x) = x^{50}\left(\frac{1-x^{16}}{1-x}\right)^{10} = x^{50}(1-x^{16})^{10}(1-x)^{-10}$

Busco el coeficiente $x^{100} - x^{50} = x^{50}$ en $K(x)$

$K(x) = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k}(-x^{16})^k \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-10}{r}(-x)^r$

$\begin{cases} k=0 \text{ y } r=50 \\ k=1 \text{ y } r=34 \\ k=2 \text{ y } r=18 \\ k=3 \text{ y } r=2 \end{cases}$ Sumar todos

---

* Función generadora exponencial sí importa el orden

(22) 48 banderas 12 r, 12 V, 12 B, 12 N tienen.
se colocan 12 de estas (Importa el orden)

a) Nº par de "V" y de "N" impar ¿cuantas?

$F(x) = \left(\frac{x^0}{0!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)\left(\frac{x^1}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots\right)\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} \cdots\right)^2$

Resto

• tengo que buscar $\frac{x^{12}}{12!}$ en $F(x)$

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdots$

$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + - + - + - \cdots$

$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$ Pares

$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ Impares

$F(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \cdot \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \cdot e^{2x}$

$F(x) = \left(\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{4}\right) \cdot e^{2x}$

$F(x) = \frac{e^{4x} - e^0}{4} = \frac{e^{4x} - 1}{4} =$

$= \frac{1}{4}(e^{4x} - 1)$

Busco $\frac{x^{12}}{12!}$ en $F(x)$

$F(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{4x}{1!} + \frac{(4x)^2}{2!} + \cdots + \frac{(4x)^{12}}{12!} + \cdots\right)$

$\frac{1}{4} \cdot \frac{4^{12} \cdot x^{12}}{12!} = \frac{4^{12}}{4} \cdot \left(\frac{x^{12}}{12!}\right) = \boxed{\frac{4^{12}}{4}}$

(23) Determinar, con funciones generadoras, Nº palabras con 7 letras con $\{a,b,c,d,e\}$.
Cada palabra $a \geq 2$ y $b \geq 1$ (Importa el orden)

$$A(x)=\underbrace{\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)}_{a}\underbrace{\left(\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)}_{b}\underbrace{\left(1+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^3}_{Resto}$$

• Busco el coeficiente $\frac{x^7}{7!}$

$$K(x)=\left(e^x-\left(1+\frac{x}{1!}\right)\right)\cdot\left(e^x-1\right)\cdot e^{3x}$$

$$K(x)=\left((e^x-1)-x\right)\cdot(e^x-1)\cdot e^{3x}=\left[(e^x-1)^2-x(e^x-1)\right]\cdot e^{3x}$$

$$K(x)=\underbrace{(e^{2x}+1-2e^x)\cdot e^{3x}}-\underbrace{xe^{4x}+x\cdot e^{3x}}=e^{5x}+e^{3x}-2e^{4x}-x\cdot e^{4x}+x\cdot e^{3x}$$

$$5^7+3^7-2\cdot 4^7-4^6\cdot 7!+3^6\cdot 7!=$$

= Resultado

$4^6 \rightarrow$ un grado menos

---

(24) Determinar función generadora para ordenar letras
a) HAWAII

$H \to 1$
$A \to 2$
$I \to 2$
$W \to 1$

$$F(x)=\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^2\cdot\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^2$$

A, I — H, W

• tengo que buscar el coeficiente $\frac{x^n}{n!}$

---

como importa el orden al colocar las letras
⇓
exponencial

• Algunas funciones generadoras

U_n	$U(x)$
$P(n \mid$ las partes son distintas$)$	$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\dots$
$P(n \mid$ las partes son impares$)$	$(1-x)^{-1}(1-x^3)^{-1}(1-x^5)^{-1}(1-x^7)^{-1}\dots$
$P(n \mid$ las partes son pares$)$	$(1-x^2)^{-1}(1-x^4)^{-1}(1-x^6)^{-1}\dots$
$P(n \mid$ cada parte es $\leq m)$	$(1-x)^{-1}(1-x^2)^{-1}(1-x^3)^{-1}\dots$

• Para obtener la función generadora inversa, cambio + por −

$$Q(x)=(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\dots = 1+q_1x+q_2x^2+q_3x^3+\dots$$

$$\Downarrow$$

$$q_n \begin{cases} (-1)^m & \text{si } n=\frac{1}{2}m(3m\pm1), \quad (m\geq 1) \\ 0 & \text{Resto} \end{cases}$$

Despejando:

$$\boxed{P(n)=P(n-1)+P(n-2)-P(n-5)-P(n-7)+P(n-12)+P(n-15)}$$

• tabla para calcular $P(n)$

$P(0)=1$ $P(1)=1$ $P(2)=2$ $P(3)=3$ $P(4)=5$ $P(5)=7$ $P(6)=11$

Ej1

$$P(7)=P(7-1)+P(7-2)-P(7-5)-P(7-7)=$$
$$=11+7-2-1=15$$

Tema -4-

• Para definir una sucesión

$$a_n = n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 \Rightarrow a_n = n\cdot a_{n-1}$$

• Torres de Hanoi

• a_n número de movimientos para pasar n-discos de palo 1 a palo 2.

• Consideramos un tercer palo de apoyo

① a_{n-1} es el número de movimientos para pasar $(n-1)$-discos del 1º al 3º

② El disco del palo 1 se pasa al palo 2, para lo cual basta un movimiento

③ Ahora los $(n-1)$-discos del palo 3 se pasan al palo 2, para lo cual se necesitan a_{n-1} movimientos.

• Por tanto $a_n = 1 + 2a_{n-1} = 2^n - 1$

• Relación de recurrencia lineal de orden K con coeficientes constantes

$$a_n = C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + C_3 a_{n-3} + C_4 a_{n-4} + C_K a_{n-K} \quad n \geq K$$

De orden K

• Si $F(n) = 0 \Rightarrow$ se llama homogenea

• Si $a_n = r^n$

$$\Downarrow$$

$$\left. r^k - C_1 r^{k-1} - C_2 r^{k-2} - \cdots - C_{k-1} r - C_k = 0 \right\}$$ Ecuación característica

---

• Si $\left(a_n^{(P)}\right)$ es una solución particular de la relación de recurrencia lineal no homogenea con coeficientes constantes. $a_n = C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \cdots + F(n)$

– toda solución es $\left(a_n^{(h)} + a_n^{(P)}\right)$ por esto

* $a_n^{(h)}$ es la solución general de la relación de recurencia lineal homogenea asociada.

EJ4 Resolver la relacción de recurrencia dada junto con sus condiciones iniciales:

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} \quad \text{Para } n \geq 2 \qquad a_0 = 1 \quad a_1 = 0 \; (1)$$

• Se plantea y resuelve la ecuación característica:

$$a_n = r^n \Rightarrow \underbrace{r^n = 5r^{n-1} - 6r^{n-2}}_{\text{Divido todo entre la menor potencia } (r^{n-2})}$$

$$\Downarrow$$

$$r^2 = 5r + 6 \Rightarrow r^2 - 5r + 6 \Rightarrow r = \frac{+5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \underbrace{\begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}}_{\text{Raices}}$$

• Por lo que $\{2^n, 3^n\}$ constituye una base del conjunto de soluciones de (1).

$$\Downarrow$$

solución general de (1) $\Rightarrow$ $a_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n$

(A y B son constantes abiertas)

• Para hallar A y B, sustituyo los valores a_0 y a_1

— Sustituyendo para $n=0$, $a_0 = A \cdot 2^0 + B \cdot 3^0 \Longrightarrow 1 = A + B$

— " " $n=1$, $a_1 = A \cdot 2^1 + B \cdot 3^1 \Longrightarrow 0 = 2A + 3B$

$$\begin{cases} 1 = A + B \\ 0 = 2A + 3B \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$A = 3$ y $B = -2$ $\Rightarrow$ Sustituyo los valores en (1)

$$\Downarrow$$

$$a_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$$

EJ14 Resolver la relación de recurrencia dada junto con sus condiciones iniciales:

$$a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3} \quad \text{para } n \geq 3 \qquad \boxed{\begin{array}{l} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = -4 \end{array}}$$

- Se plantea y se resuelve la ecuación característica:

$$a_n = r^n \Longrightarrow r^n = 6r^{n-1} - 12r^{n-2} + 8r^{n-3}$$

(Divido todo entre la menor potencia (r^{n-3}))

$$r^3 = 6r^2 - 12r + 8$$
$$r^3 - 6r^2 + 12r - 8 = 0$$

	1	-6	+12	-8
2		2	-8	8
	1	-4	4	0
2		2	-4	
	1	-2	0	
2		2		
	1	0		

Raíz 2 con multiplicidad 3

$\Downarrow$

- Así $\{2^n, n\cdot 2^n, n^2\cdot 2^n\}$ constituye una base del conjunto de soluciones

$\Downarrow$

$$a_n = A\cdot 2^n + Bn\cdot 2^n + Cn^2\cdot 2^n$$

- Sustituyendo para $n=0$, $a_0 = A\cdot 2^0 + B\cdot 0\cdot 2^0 + C\cdot 0\cdot 2^0 \Longrightarrow 1 = A$
- " " $n=1$, $a_1 = A\cdot 2^1 + B\cdot 1\cdot 2^1 + C\cdot 1^2\cdot 2^1 \Longrightarrow 0 = 2A + 2B + 2C$
- " " $n=2$, $a_2 = A\cdot 2^2 + B\cdot 2\cdot 2^2 + C\cdot 2^2\cdot 2^2 \Longrightarrow -4 = 4A + 8B + 16C$

$$\begin{cases} 1 = A \\ 2A + 2B + 2C = 0 \\ 4A + 8B + 16C = -4 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = 0 \end{cases} \xRightarrow{\text{sustituyendo}} a_n = 2^n - n\cdot 2^n = (1-n)\,2^n$$

LAB (5) De ejemplos de particiones, determinar sus diagramas de Ferrers y hallar sus particiones conjugadas

• $11 = 7 + 3 + 1$

$\Longrightarrow$

Partición conjugada

$$p(11) = p(11-1) + p(11-2) - p(11-5) - p(11-7) =$$
$$= p(10) + p(9) - p(6) - p(4) =$$
$$= 42 + 30 - 11 - 5 = 56$$

Recondatoria $\Rightarrow$ $p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + p(n-15)$

---

(70) (b) Calcular $P_5(9)$

• nº de particiones de 9 en 5 partes

$$P_k(n) = P_k(n-k) + P_{k-1}(n-k) + P_{k-2}(n-k) + \dots + P_1(n-k)$$

$$P_5(9) = P_5(9-5) + P_4(9-5) + P_3(9-5) + P_2(9-5) + P_1(9-5) =$$
$$= P_5(4) + P_4(4) + P_3(4) + P_2(4) + P_1(4) =$$
$$= 0 + 1 + 1 + 2 + 1 = 5$$

$P_3(4)$: $2+1+1$

$P_2(4)$: $2+2$, $3+1$

(1.a) $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}$ $\quad n \geq 2 \quad a_0 = 0 \quad a_1 = 1$

• Se plantea y se resuelve la ecuación característica

$a_n = r^n \Rightarrow r^n = 7r^{n-1} - 10r^{n-2}$ (Divido todo entre la menor potencia $[r^{n-2}]$)

$r^2 = 7r - 10 \Rightarrow r^2 - 7r + 10 \to 5, \; 2$

• Por lo que $\{2^n, 5^n\}$ constituye una base del conjunto de soluciones

$a_n = A \cdot 2^n + B \cdot 5^n$

• Para hallar A, B, sustituyo los valores a_0 y a_1

$$\begin{cases} \text{• Si } a_0 \Rightarrow a_0 = A \cdot 2^0 + B \cdot 5^0 \Rightarrow \begin{cases} 0 = A + B \\ 1 = 2A + 5B \end{cases} \\ \text{• Si } A_1 \Rightarrow a_1 = A \cdot 2^1 + B \cdot 5^1 \end{cases} \qquad \boxed{B = 1/3} \quad \boxed{A = -1/3}$$

Sustituyo los valores

⇓

$$\boxed{a_n = -\frac{1}{2} \cdot 2^n + \frac{1}{3} \cdot 5^n}$$

(1.B) $a_n = 3a_{n-2} - 2a_{n-3}$ $\quad n \geq 3 \quad a_0 = 0 \quad a_1 = 1 \quad a_2 = 2$

$a_n = 0a_{n-1} + 3a_{n-2} - 2a_{n-3}$

• Se plantea y resuelve la ecuación característica $\quad a_n = r^n$

$r^n = 0r^{n-1} + 3r^{n-2} - 2r^{n-3}$

(Divido todo entre la menor potencia r^{n-3})

$r^3 = 0r^2 + 3r - 2 \Rightarrow r^3 - 3r + 2 = 0$

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	$\boxed{0}$
1		1	2	
	1	2	$\boxed{0}$	
-2		-2		
	1	$\boxed{0}$		

• Por lo que $\{1^n, n \cdot 1^n, -2^n\}$ constituye una base del conjunto de soluciones

$a_n = A \cdot 1^n + B \cdot n \cdot 1^n - C \cdot (-2)^n$

$$\begin{cases} \text{• Si } a_0 \Rightarrow 0 = A \cdot 1^0 + B \cdot 0 \cdot 1^0 - C \cdot (-2)^0 \Rightarrow \\ \text{• Si } a_1 \Rightarrow 1 = A \cdot 1^1 + B \cdot 1 \cdot 1^1 - C \, (-2)^1 \Rightarrow \\ \text{• Si } a_2 \Rightarrow 2 = A \cdot 1^2 + B \cdot 2 \cdot 1^2 - C \, (-2)^2 \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} 0 = A + C \\ 1 = A + B + 2C \\ 2 = A + 2B + 4C \end{cases} \qquad \boxed{\begin{matrix} A = 0 \\ C = 0 \\ B = 1 \end{matrix}}$$

⇓

$$\boxed{a_n = 1 \cdot n \cdot 1^n}$$

Escaneado con CamScanner

Teoría

- Si la relación de recurrencia es No homogenea y

$$F(n) = (b_t n^t + b_{n-1} n^{t-1} + \dots + b_1 n + b_0)\, s^n$$

- Si "s" no es raíz de la ecuación característica

$$(p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \dots + p_1 n + p_0)\cdot s^n$$

- Si "s" es raíz de la ecuación característica

$$n^m (p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \dots + p_1 n + p_0)\cdot s^n$$

→ Multiplicidad de la raiz

Ej:

$$a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3} + (1+n)\cdot 3^n$$

$a_0 = 1$
$a_1 = 0$
$a_2 = -3$

- Primer paso

- Busco la solución de la homogenea asociada
- Se plantea la ecuación característica $(a_n = r^n)$

$$r^n = 6r^{n-1} - 12r^{n-2} + 8r^{n-3}$$

- Divido todo entre la menor potencia (r^{n-3})

$$r^3 = 6r^2 - 12r + 8 \Rightarrow r^3 - 6r^2 + 12r - 8 = 0$$

- Raiz 2 con multiplicidad 3 -

- La solución general es:

$$a_n = A\cdot 2^n + B\cdot n\cdot 2^n + C\cdot n^2\cdot 2^n$$

- Segundo paso

$$F(n) = (1+n)\cdot 3^n$$

- Como 3 no es raíz de la ecuación característica, busco una solución particular de la forma:

$$a_n(p) = (D + En)\cdot 3^n$$

- Sustituyo $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}$ en la ecuación del enunciado

$$\begin{cases} a_n = (D+En)\cdot 3^n \\ a_{n-1} = (D+E(n-1))\cdot 3^{n-1} \\ a_{n-2} = (D+E(n-2))\cdot 3^{n-2} \\ a_{n-3} = (D+E(n-3))\cdot 3^{n-3} \end{cases} \xrightarrow{\text{Resolviendo}} \begin{cases} 27 - E = 0 \\ -D - 6E + 27 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} D = -135 \\ E = 27 \end{array}}$$

• De este modo, la solución parcial es:

$$a_n = (-135 + 27n)\cdot 3^n$$

• **3º paso**

La solución general es:

$$a_n = A\cdot 2^n + B\cdot n\cdot 2^n + C\cdot n^2\cdot 2^n + (-135 + 27n)\cdot 3^n$$

• **4º paso**

Sustituyo las condiciones iniciales

• Para $n=0$

$$a_0 = A\cdot 2^0 + B\cdot 0\cdot 2^0 + C\cdot 0^2\cdot 2^0 + (-135 + 27\cdot 0)\cdot 3^0$$

• Para $n=1$

$$a_1 = A\cdot 2^1 + B\cdot 1\cdot 2^1 + C\cdot 1^2\cdot 2^1 + (-135 + 27\cdot 1)\cdot 3^1$$

• Para $n=2$

$$\begin{cases} 1 = A - 135 \\ 0 = 2A + 2B + 2C - 324 \\ -3 = 4A + 8B + 16C - 729 \end{cases}$$

$\boxed{A = 136}$ $\boxed{B = 117/4}$ $\boxed{C = -\frac{13}{4}}$

• Sustituyo en la ecuación general

$$a_n = 136\cdot 2^n + \frac{117}{4}\cdot n\cdot 2^n - \frac{13}{4}\cdot n^2\cdot 2^n + (-135 + 27n)\cdot 3^n$$

Números complejos

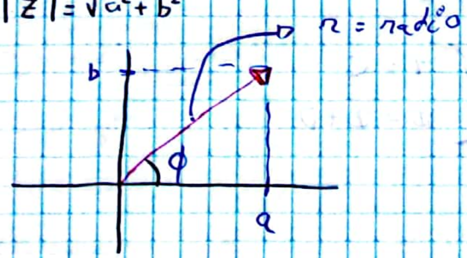
$Z = a + bi$

módulo $r = |Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\tan(\phi) = \frac{b}{a}$

$\cos(\phi) = \frac{a}{r}$

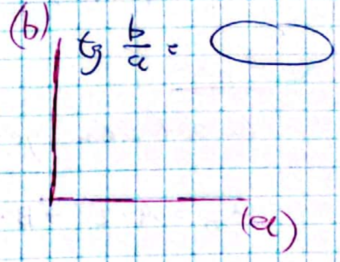
$\operatorname{sen}(\phi) = \frac{b}{r}$



α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
sen α	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$
tg α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Resolver la relación de recurrencia

$a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2} \quad n \geq 2 \quad a_0 = 1 \quad a_1 = 0$



• Se plantea la ecuación característica ($a_n = r^n$)

$r^n = 2r^{n-1} - 2r^{n-2}$

• Divido entre la menor potencia (r^{n-2})

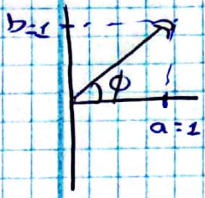
$r^2 = 2r - 2 \Rightarrow r^2 - 2r + 2 = 0$

$r = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} \Rightarrow \underbrace{r^2 - 2r + 1}_{(x-1)^2} = -1$

$(x-1)^2 = -1 \Rightarrow \begin{cases} 1 + i \\ 1 - i \end{cases}$ (a) (b)

$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

b
el coeficiente
de $1 + i = 1 \Rightarrow b = 1$



$tg\,\phi = \frac{b}{a} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{4} \Rightarrow$

$Z_1 = 1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$

$Z_2 = 1 - i = \sqrt{2} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}$

• La solución general es:

$a_n = A(1+i)^n + B(1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(Ae^{i\frac{\pi}{4}n} + Be^{-i\frac{\pi}{4}n}\right)$

• Alternativamente

$a_n = 2^{n/2}\left[C \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + D \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)\right]$

• Sustituyo los valore a_0 y a_1

$\begin{cases} \bullet\ n = 0 \Rightarrow a_0 = \_\_\_\_\_ \\ \bullet\ n = 1 \Rightarrow a_1 = \_\_\_\_\_ \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 = C \\ 1 = 1 + D \end{cases}$

• Resulta

$a_n = 2^{n/2} \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$

$\boxed{i^2 = -1}$

$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$

Resolver la relación de recurrencia

$$a_n = 4a_{n-1} - 6a_{n-2} + 6a_{n-3} - 5a_{n-4} + 2a_{n-5} \quad n \geq 5$$

$$a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0 \quad a_4 = 1$$

• se plantea y se resuelve la ecuación característica:

$$r^5 - 4r^4 + 6r^3 - 6r^2 + 5r - 2 = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0$$

tiene por raíces $\begin{cases} 2 \text{ simple} \\ 1 \text{ Doble} \end{cases}$ y $\overbrace{i \;(a)\; \text{y} \; -i \;(b)}$

$tg \frac{1}{0} = \infty \Rightarrow \frac{\pi}{2}$

$b = 1$, $a = 0$

• La solución general es:

$$a_n = A_1 \cdot 1^n + A_2\, n \cdot 1^n + A_3 \cdot 2^n + A_4 \cdot i^n + A_5 \cdot (-i)^n$$

si $z = i \Rightarrow |z| = 1$

- O bien

$$a_n = B_1 \cdot 1^n + B_2 \cdot 2n \cdot 2^n + B_3 \cdot 2^n + B_4 \cdot 1^n \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} n\right) + B_5 \cdot 1^n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} n\right)$$

• Aplicando las condiciones iniciales

$$a_n = -\frac{1}{2} n + \frac{1}{2} 2^n - \frac{1}{5} \cos\left(\frac{\pi}{2} n\right) + \frac{1}{10} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} n\right)$$

EJE ② Resolver la relación de recurrencia

$$a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2} + n^2 \cdot 3^n \qquad a_0 = 0 \quad a_1 = 1$$

1º paso

• se plantea y resuelve la ecuación característica ($a_n = r^n$)

$r^n = 7r^{n-1} - 10r^{n-2}$ Divido entre la potencia menor (r^{n-2})

$$r^2 = 7r - 10 \Rightarrow r^2 - 7r + 10 = 0 \quad \boxed{5} \; \boxed{2}$$

Por lo que $\{2^n, 5^n\}$ constituye una base del conjunto de soluciones

$$a_n^{(h)} = A \cdot 2^n + B \cdot 5^n$$

2º Paso

Busco la solución particular

$$F(n) = n^2 \cdot 3^n = (0 + 0n + 1n^2) \cdot 3^n$$

3 no es igual a ninguna raíz

$$a_n(P) = (b_0 + b_1 n + b_2 n^2) \cdot 3^n$$

• sustituyo la expresión en la ecuación del enunciado

$$(b_0 + b_1 n + b_2 n^2) \cdot 3^n = 7(b_0 + b_1(n-1) + b_2(n-1)^2) \cdot 3^{n-1} - 10(b_0 + b_1(n-2) + b_2(n-2)^2) \cdot 3^{n-2} + n^2 \cdot 3^n$$

Divido entre 3^{n-2}, la menor potencia

$$(b_0 + b_1 n + b_2 n^2) \cdot 3^2 = 7(b_0 + b_1(n-1) + b_2(n-1)^2) \cdot 3 - 10(b_0 + b_1(n-2) + b_2(n-2)^2) + n^2 \cdot 3^2$$

Escaneado con CamScanner

- simplifico

$$(b_0+b_1 n+b_2 n^2)\cdot 3^2=7(b_0+b_1 n-b_1+b_2 n^2-2b_2 n+b_2)\cdot 3-10(b_0+b_1 n-b_1+b_2 n^2-4b_2 n+4b_2)$$

$+n^2\cdot 3^2$

- Igualo los coeficientes del mismo grado de un lado y del otro

$$\begin{cases} 3^2\cdot b_0=21b_0-21b_1+21b_2-10b_0+10b_1-40b_2 \\ 3^2\cdot b_1=21b_1-42b_2-10b_1+40b_2 \\ 3^2\cdot b_2=21b_2-10b_2+3^2 \end{cases}$$

$$\boxed{b_2=-9/2} \Rightarrow 9b_1=21b_1-42\left(-\frac{9}{2}\right)-10b_1+40\left(-\frac{9}{2}\right)$$

$$\boxed{b_1=-\frac{9}{2}}$$

$$9b_0=21b_0-21\left(-\frac{9}{2}\right)+21\left(-\frac{9}{2}\right)-10b_0+10\left(-\frac{9}{2}\right)-40\left(-\frac{9}{2}\right)$$

$$\boxed{b_0=-4/5}$$

- la solución particular es:

$$a_n(p)=\left(-\frac{4}{5}-\frac{9}{2}n-\frac{9}{2}n^2\right)\cdot 3^n$$

3º paso

- Junto todo

$$a_n(g)=a_n(h)+a_n(p)=A\cdot 2^n+B\cdot 5^n+\left(-\frac{4}{5}-\frac{9}{2}n-\frac{9}{2}n^2\right)\cdot 3^n$$

- sustituyo los valores a_0 y a_1

$$n=0 \Rightarrow a_0=A+B+\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot 3^0 \Rightarrow A=\frac{62}{3}$$

$$n=1 \Rightarrow a_1=A\cdot 2+B\cdot 5+\left(-\frac{4}{5}-\frac{9}{2}-\frac{9}{2}\right)\cdot 3 \Rightarrow B=\frac{73}{3}$$

- solución general

$$a_n=\frac{62}{3}\cdot 2^n+\frac{73}{3}\cdot 5^n+\left(-\frac{4}{5}-\frac{9}{n}n-\frac{9}{n}n^2\right)\cdot 3^n$$

Escaneado con CamScanner

2.B $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2} + n^2 \cdot 5^n$ $\quad a_0 = 0 \quad a_1 = -2$

1º paso

• Planteo y resuelvo la ecuación característica ($a_n = r^n$)

$r^n = 7r^{n-1} - 10r^{n-2}$

- Divido entre la menor potencia (r^{n-2})

$r^2 = 7r - 10 \Rightarrow r^2 - 7r + 10 = 0 \to \boxed{2}, \boxed{5}$

Por lo que $\{2^n, 5^n\}$ constituye la base del conjunto de soluciones

$a_n^{(h)} = A \cdot 2^n + B \cdot 5^n$

2º Paso

Busco la solución particular

$F(n) = n^2 \cdot 5^n = (b_0 + b_1 n + b_2 n^2) \cdot 5^n$ → es una raiz de multiplicidad 1

$$a_n^{(p)} = n^1 (b_0 + b_1 n + b_2 n^2) \cdot 5^n$$

• lo sustituyo en la ecuación del enunciado

$$n(b_0 + b_1 n + b_2 n^2) \cdot 5^n = 7\left[(n-1)(b_0 + b_1(n-1) + b_2(n-1)^2) \cdot 5^{n-1}\right] - 10\left[(n-2)(b_0 + b_1(n-2) + b_2(n-2)^2) \cdot 5^{n-2}\right] + n^2 \cdot 5^n$$

Divido todo entre la menor potencia (5^{n-2})

$$n(b_0 + b_1 n + b_2 n^2) \cdot 5^2 = 7\left[(n-1)(b_0 + b_1(n-1) + b_2(n-1)^2) \cdot 5\right] - 10\left[(n-2)(b_0 + b_1(n-2) + b_2(n-2)^2)\right] + n^2 \cdot 5^2$$

⋮

$$\left.\begin{aligned} b_0 &= 0 \\ b_1 &= 0 \\ b_2 &= 0 \end{aligned}\right\} a_n^{(p)} = 0$$

Junto todo

$a_n^{(g)} = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = A \cdot 2^n + B \cdot 5^n + 0$

• Sustituyo los valores iniciales

$$\left.\begin{aligned} n = 0 &\Rightarrow a_0 = A + B \\ n = 1 &\Rightarrow a_1 = A \cdot 2 + B \cdot 5 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} A &= 2/3 \\ B &= -2/3 \end{aligned} \Rightarrow a_n^{(g)} = \frac{2}{3}(2^n - 5^n)$$

(*) Establecer la relacción de recurrencia para que un dron recorra n kilómetros, $n \geq 4$ y solo puede avanzar 1 o 3 kilómetros

- Denotamos a_n al número de formas de recorrer n kilómetros
- Si el dron empieza recorriendo 1 Km, le quedan a_{n-1}
- " " " " " 3 Km, le quedan a_{n-3}
- luego $a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$, de orden 3 y las condiciones iniciales son:

"a_1" = si en total hay 1 Km "=1" de cuantas formas puedo recorrer la distancia

$a_1 = 1$
$a_2 = 1$
$a_3 = 2$

Nº min de estudiantes para que al menos 6 reciban la misma nota

$0, 1, \ldots, 10 = 11$ posibilidades

Principio del palomar

$\frac{N}{11} = 6 \Rightarrow 11 \cdot 6 = 66$ entonces $N = 67$

- $\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \cdot e^{3x} = \left(\frac{e^{4x} - e^{2x}}{2}\right)$
- $\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 \cdot e^{2x} = \left(\frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4}\right) \cdot e^{2x} = \left(\frac{e^{4x} + e^0 + 2 \cdot e^{2x}}{4}\right)$
- $\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \cdot e^{3x} = \underbrace{\left(\frac{e^{4x} + e^{2x}}{2}\right)}_{\text{si busco } \frac{x^{15}}{15!}} \Rightarrow \left(\frac{4^{15} + 2^{15}}{2}\right)$

$p \wedge q \rightarrow r$
$q \wedge r \rightarrow p$
$\neg p$
$\therefore \neg r$

Premisas ciertas y conclusión falsa

$r = 1$	$0 \wedge 0 \rightarrow 1$	✓
$\neg p = 1$	$0 \wedge 1 \rightarrow 0$	✓
$q = 0$	1	✓
	$\therefore 0$	X

$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$

$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$ • Planteo y resuelvo la ecuación característica ($a_n = r^n$)

$r^{n+2} = 2r^{n+1} - r^n$ • Divido todo entre la menor potencia (r^n)

$r^2 = 2r - 1$

$(n-1)^2 = n^2 + 1 - 2n$

$(n-2)^2 = n^2 + 4 - 4n$

Escaneado con CamScanner

$F(n) = 8^{n-1}$

$= \frac{1}{8} \cdot 8^n = (b_0) \cdot 8^n$

Demuestre que entre $n+1$ números enteros hay al menos 2 cuya diferencia es divisible por "n"

- Hacemos la división de los Z_i por n.
- $Z_i = c_i \cdot n + r_i$

- Como máximo podremos tener n restos distintos y como tenemos $n+1$ números.

$\Downarrow$

Podemos afirmar por el principio del palomar existen al menos 2 con el mismo resto y serán divisibles por n