Metody Numeryczne: Instrukcja 6

Z poprzednich zajęć wiemy, że równanie ruchu wygląda następująco:

$$M\ddot{x} = F - Sx$$

Policzmy „rozwiązanie ogólne równania jednorodnego". Tzn: jakie funkcje $x = f(t)\phi$ spełniają równanie bez sił:

$$M\ddot{x} = -Sx$$

$$\ddot{f}(t)M\phi = -f(t)S\phi$$

Jeśli znajdziemy takie ϕ, że:

$$M\phi = \lambda S\phi \tag{1}$$

to otrzymamy:

$$\lambda\ddot{f}(t) = -f(t) \quad \Rightarrow \quad f(t) = sin\left(t\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

To oznacza, że $sin(t\sqrt{\lambda})\phi$ jest oscylującym w czasie rozwiązaniem naszego równania dynamiki. Takie rozwiązanie nazywamy drganiem własnym układu. Równanie (1) nazywamy równaniem własnym.
Dziś skupimy się na znalezieniu zestawu wektorów ϕ i wartości λ dla naszej belki

1 Zacznijmy od największej λ

Zaczniemy od największej λ. Dobrze zauważyć, że największa wartość własna odpowiada najniższej częstotliwości. Są to drgania własne najmniej tłumione w fizycznym układzie i niosące zazwyczaj najwięcej energii w inżynierskich zastosowaniach.
Będziemy znajdywać nasz wektor ϕ iteracyjnie. Zauważmy, że wektor ϕ może być dowolnej długości. To znaczy: jeśli wektor ϕ spełnia równanie (1), to także 2ϕ go spełnia. Możemy więc arbitralnie wybrać „skale" wektora ϕ. Przyjmijmy, że $\phi^T M\phi = 1$, tzn: niesie on energię kinetyczną $\frac{1}{2}$.
Pomnóżmy równanie (1) przez S^{-1}. Otrzymamy:

$$\phi = \frac{1}{\lambda}S^{-1}M\phi$$

Na podstawie tego wzoru możemy skonstruować prostą iterację:

$$p = S^{-1}M\phi$$
$$\phi = p\frac{1}{\sqrt{p^T Mp}}$$

W pierwszym etapie liczymy wynik $S^{-1}M\phi$, a następnie go normalizujemy tak by $\phi^T M\phi = 1$. Jeśli odpowiednio długo będziemy wykonywać taką iterację, wektor własny odpowiadający największej wartości własnej zacznie dominować. Ostatecznie ϕ będzie składać się tylko z tego wektora, a $p^T Mp$ zbiegnie do największej λ.

Zadanie 1 *Znajdź wektor ϕ odpowiadający największej wartości własnej wg. następującego schematu iteracji:*

- *Oblicz $b = M \cdot phi$*
- *Rozwiąż układ $S \cdot p = b$*
- *Oblicz $Mp = M \cdot p$*
- *Oblicz $phi = \frac{1}{\sqrt{\langle p, Mp\rangle}}p$*

Zadanie 2 *Pokaż przemieszczenie ϕ przy pomocy funkcji* `draw`*. Zrób animację tego przemieszczenia przemnożonego przez $\sin t$.*

Zadanie 3 (Dla ciekawych) *By otrzymać bardziej płynną animację dodaj:*
```
static int pg=0;
setvisualpage(pg % 2);
```
na początku funkcji `animate` *w* `winbgi2.cpp`*. Zaś na końcu tej funkcji (przed* `return`*):*
```
pg++;
setactivepage(pg % 2);
```

2 A teraz następne λ

Chcemy by wektory własne (drgania własne) były niezależne w energii kinetycznej. To znaczy, żeby energia kinetyczna ich sumy była równa sumie ich energii kinetycznych („$E_k(\phi_0 + \phi_1) = E_k(\phi_0) + E_k(\phi_1)$”). To w połączeniu z naszą „skalą” daje nam bardzo ważny warunek:

$$\begin{cases} \phi_i^T M \phi_j = 0 & \text{dla} \quad i \neq j \\ \phi_i^T M \phi_j = 1 & \text{dla} \quad i = j \end{cases}$$

Mówiąc językiem numeryki: wektory te są do siebie ortonormalne względem macierzy M. Takiej ortonormalizacji możemy dokonać znaną z Analizy Matematycznej metodą Grama-Schmidta:

Ortonormalizacja Grama-Schmidta
Dla każdego i od 1 do n wykonaj:

- dla każdego i od 1 do $i-1$ wykonaj (dla $i = 1$ nic nie rób):
  - Oblicz $\phi_i = \phi_i - \phi_j \langle \phi_j, M\phi_i \rangle$
- Oblicz $\phi_i = \frac{1}{\sqrt{\langle \phi_i, M\phi_i \rangle}} \phi_i$

Po tej procedurze wszystkie wektory ϕ są ortogonalne i długości 1 względem macierzy M.

Zadanie 4 *Znajdź wektory ϕ_i odpowiadające 10ciu największym wartościom własnym wg. następującego schematu iteracji:*

- *Oblicz $b = M \cdot phi_j$*
- *Rozwiąż układ $S \cdot p_j = b$*
- *Przepisz $phi_i = p_i$*
- *Wykonaj ortonormalizację G-S wektorów phi*

Zadanie 5 *Zrób animację dla kolejnych przemieszczeń ϕ_i przemnożonych przez* $\sin t$.

Zadanie 6 *Wyznacz odpowiednie λ_i*