Metody Numeryczne:
Instrukcja 2

Wprowadzenie

Niniejszą instrukcją rozpoczynamy cykl laboratoriów, z których każde kolejne będzie rozwinięciem poprzedniego i wnioski z poprzedniego będą stanowiły motywację do zastosowania kolejnych metod. Tym samym należy zadbać o to, aby zadania z każdego laboratorium były wykonywane do końca, czy to na zajęciach czy w domu. Dziś zaznajomimy się ze sformułowaniem metody elementów skończonych dla jednego elementu czworokątnego. Dla uproszczenia nie będziemy stosować transformacji geometrycznych występujących w rzeczywistym sformułowaniu metody elementów skończonych, więc faktycznie będziemy operować zawsze na jednostkowych elementach kwadratowych.

1 Sformułowanie algebraiczne dla jednego elementu

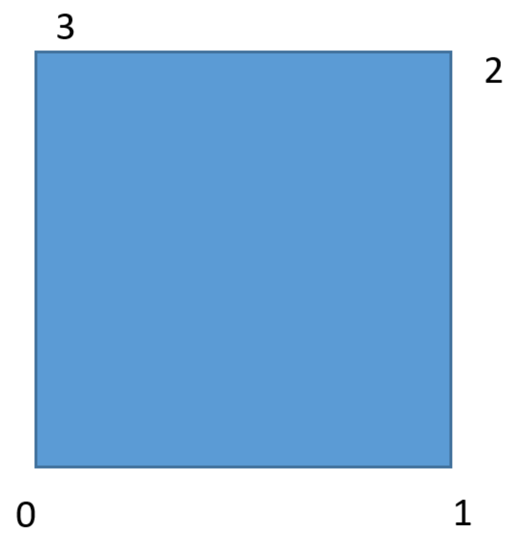
Zagadnienie wytrzymałości konstrukcji dla jednego elementu skończonego ma następujące sformułowanie algebraiczne: Elementowi skończonemu przypisana jest tzw. macierz sztywności K reprezentująca jego sztywność na poszczególne rodzaje odkształceń (przesunięć jego wierzchołków), wektor przesunięć $\vec{d}$, jakim ulegną poszczególne wierzchołki elementu pod obciążeniem oraz wektor sił węzłowych $\vec{F}$ reprezentujący odpowiednio przeliczone siły (bądź obciążenia ciągłe) przyłożone do węzłów elementu.

$$K\vec{d} = \vec{F}$$

Wektor przesunięć (ang. *displacement*) zawiera odpowiednio przesunięcia względem osi x oraz y kolejnych węzłów elementu (numeracja węzłów pokazana jest na Rysunku 1). Wektor sił węzłowych $\vec{F}$ ma analogiczną postać. Poniżej przedstawiona jest również macierz sztywności K.

$$\vec{d} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} \qquad \vec{F} = \begin{bmatrix} F_{x_0} \\ F_{y_0} \\ F_{x_1} \\ F_{y_1} \\ F_{x_2} \\ F_{y_2} \\ F_{x_3} \\ F_{y_3} \end{bmatrix}$$

$$K = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\begin{matrix}
\frac{1}{2} - \frac{\nu}{6} & \frac{1}{8} + \frac{\nu}{8} & -\frac{1}{4} - \frac{\nu}{12} & -\frac{1}{8} + \frac{3}{8}\nu & -\frac{1}{4} + \frac{\nu}{12} & -\frac{1}{8} - \frac{\nu}{8} & \frac{\nu}{6} & \frac{1}{8} \\
\frac{1}{8} + \frac{\nu}{8} & \frac{1}{2} - \frac{\nu}{6} & \frac{1}{8} - \frac{3}{8}\nu & \frac{\nu}{6} & -\frac{1}{8} - \frac{\nu}{8} & -\frac{1}{4} + \frac{\nu}{12} & -\frac{1}{8} + \frac{3}{8}\nu & -\frac{1}{4} \\
-\frac{1}{4} - \frac{\nu}{12} & \frac{1}{8} - \frac{3}{8}\nu & \frac{1}{2} - \frac{\nu}{6} & -\frac{1}{8} - \frac{\nu}{8} & \frac{\nu}{6} & -\frac{1}{8} + \frac{3}{8}\nu & -\frac{1}{4} + \frac{\nu}{12} & \frac{1}{8} \\
-\frac{1}{8} + \frac{3}{8}\nu & \frac{\nu}{6} & -\frac{1}{8} - \frac{\nu}{8} & \frac{1}{2} - \frac{\nu}{6} & \frac{1}{8} - \frac{3}{8}\nu & -\frac{1}{4} - \frac{\nu}{12} & \frac{1}{8} + \frac{\nu}{8} & -\frac{1}{4} \\
-\frac{1}{4} + \frac{\nu}{12} & -\frac{1}{8} - \frac{\nu}{8} & \frac{\nu}{6} & \frac{1}{8} - \frac{3}{8}\nu & \frac{1}{2} - \frac{\nu}{6} & \frac{1}{8} + \frac{\nu}{8} & -\frac{1}{4} - \frac{\nu}{12} & -\frac{1}{8} \\
-\frac{1}{8} - \frac{\nu}{8} & -\frac{1}{4} + \frac{\nu}{12} & -\frac{1}{8} + \frac{3}{8}\nu & -\frac{1}{4} - \frac{\nu}{12} & \frac{1}{8} + \frac{\nu}{8} & \frac{1}{2} - \frac{\nu}{6} & \frac{1}{8} - \frac{3}{8}\nu & \\
\frac{\nu}{6} & -\frac{1}{8} + \frac{3}{8}\nu & -\frac{1}{4} + \frac{\nu}{12} & \frac{1}{8} + \frac{\nu}{8} & -\frac{1}{4} - \frac{\nu}{12} & \frac{1}{8} - \frac{3}{8}\nu & \frac{1}{2} - \frac{\nu}{6} & - \\
\frac{1}{8} - \frac{3}{8}\nu & -\frac{1}{4} - \frac{\nu}{12} & \frac{1}{8} + \frac{\nu}{8} & -\frac{1}{4} + \frac{\nu}{12} & -\frac{1}{8} + \frac{3}{8}\nu & \frac{\nu}{6} & -\frac{1}{8} - \frac{\nu}{8} & \frac{1}{2}
\end{matrix} \right.$$



Rysunek 1: Lokalna indeksacja węzłów elementu skończonego.

Macierz sztywności elementu K, dopóki nie zostaną na układ narzucone więzy unieruchamiające układ w przestrzeni jako ciało sztywne, jest osobliwa. Aby móc obliczyć przemieszczenia węzłów elementu pod działaniem określonych sił, nakładamy najpierw więzy. Załóżmy, że w naszym przypadku będą to więzy zamurowania lewego brzegu elementu, tzn. $x_0 = y_0 = x_3 = y_3 = 0$. W postaci macierzowej powyższe cztery równania są równoznaczne z zastąpieniem wierszy o indeksach 0, 1, 6 i 7 jedynkami na głównej diagonali macierzy i przypisaniu zer na tych indeksach w wektorze prawej strony. Po narzuceniu więzów macierz nie jest już osobliwa i można rozwiązać układ choćby procedurą Gaussa.

Zadania

1. Napisz program, w którym zaalokujesz miejsce na macierz sztywności elementu, wektor przemieszczeń węzłowych oraz wektor prawych stron. Wykorzystaj tablicę `fix[]` (opis poniżej) do narzucenia warunków brzegowych i rozwiąż zagadnienie procedurą Gaussa. Jako wymuszenie przyłóż siłę ciągnącą w dół prawy dolny węzeł.

2. Zmodyfikuj w programie obciążenie: przyłóż siłę skierowaną pionowo w dół do obu węzłów na prawej krawędzi. Rozwiąż zadanie. Następnie rozciągnij element. Sprawdź wpływ współczynnika Poissona na rozwiązanie. Pobaw się programem, aby zaznajomić się z zadawaniem obciążeń i ruchami poszczególnych stopni swobody.

3. Zmień sposób zamurowania na inny. Sprawdź, co się stanie z rozwiązaniem, gdy w ogóle nie narzucisz warunków brzegowych lub nie w pełni odbierzesz sztywne stopnie swobody układu.

4. Spróbuj stworzyć teraz belkę składającą się z dwóch elementów skończonych.

2 Wskazówki implementacyjne

- Elementy w belce mają być indeksowane od 0 do $m_x * m_y - 1$, poczynając od elementu w lewym dolnym rogu i indeksując je po kolei w prawo. Po dojściu do końca belki, zaczynamy od lewego brzegu analogicznie indeksować kolejnymi liczbami elementy w pasie położonym o jeden element wyżej niż dopiero co poindeksowany pas. W identyczny sposób indeksowane są węzły. Takiego indeksowania wymaga uproszczenie implementacji (brak transformacji geometrycznej macierzy sztywności) oraz prostota obecnej funkcji do rysowania całego układu.

- `mx` i `my` oznaczają odpowiednio liczbę elementów w poziomie i w pionie w prostokątnej belce. Muszą to być zmienne globalne.

- Funkcja do rysowania wymaga użycia globalnej tablicy `int fix[2*(mx+1)*(my+1)]` o długości równej liczbie stopni swobody w siatce. Jeśli na danej pozycji w tablicy stoi zero, przyjmujemy, że ten stopień swobody ulega przemieszczeniom. Wpisanie na danym miejscu wartości 1, oznacza, że stopień swobody o tym indeksie jest odebrany (tak układ zostanie narysowany przez procedurę rysującą `draw`). Oczywiście poprawność sformułowania matematycznego tak przyjętej konwencji i definicji tablicy `fix[]` leży w pełni po stronie użytkownika. Takie zdefiniowanie tablicy `fix` bardzo ułatwia implementację warunków brzegowych.

- Początek głównego pliku z kodem programu powinien mieć następującą postać, aby uniknąć problemów z kolejnością definicji, nagłówkami i linkowaniem. Poniższy przykład pokazuje też sposób użycia biblioteki `MesLib.h` w celu narysowania rozwiązanego układu.

```
#include <stdio.h>
#include "winbgi2.h"

const int mx = 1;
const int my = 1;

int fix[2*(mx+1)*(my+1)];

#include "MesLib.h"

int main()
{
   // Tu stworz caly program

   // Narysuj uklad
   graphics(700, 700);
   scale(0, 0.5*(my - mx - 3), mx + 3, 0.5*(my + mx + 3));
   title("X", "Y", "MES");
   draw(d, F);
```

```
    wait();

    // Zakoncz
    return 0;
}
```

3 Krótka dokumentacja biblioteki *MesLib.h*

Biblioteka *MesLib.h* została stworzona na potrzeby laboratorium, aby uprościć i przyspieszyć implementację i zawiera szereg prostych i przydatnych funkcji oraz macierz sztywności i macierz masową pojedynczego elementu. Poniżej krótko opiszemy poszczególne funkcje:

- `int P(int x, int y, int z)` - funkcja, która zwraca globalny indeks stopnia swobody przy założeniu, że x to jego indeks w kierunku x (liczony od 0 na lewej krawędzi), y to jego indeks w kierunku osi y (liczony od 0 na dolnej powierzchni belki), a z to 0 lub 1 zależnie od tego, czy interesuje nas stopień swobody w kierunku poziomym czy pionowym.
- `int Q(int x, int y)` - funkcja zwracająca globalny indeks elementu przy założeniu, że jest to element o indeksie x w kierunku poziomym i o indeksie y w kierunku pionowym.
- `int DOF(int elidx, int elidy, int locdofid)` - funkcja zwracająca globalny indeks stopnia swobody przy założeniu, że *elidx* oznacza indeks elementu w kierunku poziomym, *elidy* indeks elementu w kierunku pionowym, a *locdofid* to liczba od 0 do 7 oznaczająca lokalny indeks danego stopnia swobody. Lokalna indeksacja stopni swobody jest następująca: w węźle o indeksie 0 przesunięcia w kierunku poziomym i pionowym to odpowiednio $0 - wy$ i $1 - szy$ stopień swobody, w węźle o indeksie 1 występują 2. i 3. stopień swobody itd.
- Lokalna macierz sztywności jest zdefiniowana w dwuwymiarowej tablicy `K[8][8]`. Przy składaniu macierzy sztywności powinna być w programie przemnożona przez czynnik `Md` zawierający wpływ modułu Younga oraz współczynnika Poissona oraz przez grubość elementu.
- Lokalna macierz masowa jest zdefiniowana w dwuwymiarowej tablicy `M[8][8]`. Przy składaniu globalnej macierzy masowej powinna być w programie przemnożona przez czynnik `Mm` zawierający wpływ gęstości materiału oraz dodatkowo należy ją przemnożyć przez grubość elementu.
- `void Gauss(int n, double **M, double *f, double *x)` - procedura eliminacji Gaussa rozwiązująca układ równań o macierzy zapisanej w dynamicznie zaalokowanej dwuwymiarowej tablicy `M` o wymiarze `n`, i wektorze prawej strony `f`. Wynik zostanie wpisany do miejsc w pamięci wskazywanych przez wskaźnik `*x`.
- `void draw(double *p, double *f)` - funkcja rysująca cały układ odkształconych elementów. `p` to wektor przesunięć poszczególnych stopni swobody, a `f` to wektor sił węzłowych w tych stopniach swobody. Ponadto funkcja wykorzystuje globalnie zadeklarowaną tablicę `fix`, z której czerpie informację, które stopnie swobody układu są odebrane.