Metody Numeryczne: Instrukcja 5

Na tych laboratoriach skupimy się na scałkowaniu równania ruchu:

$$M\ddot{x} = F - Sx$$

Gdzie x to odkształcenie, M to macierz masowa, zaś S to macierz sztywności. Na początek przez y oznaczmy prędkość odkształcenia, czyli $y = \dot{x}$. Teraz mamy układ równań pierwszego rzędu:

$$\begin{cases} M\dot{y} &= F - Sx \\ \dot{x} &= y \end{cases}$$

Zastępując pochodną po lewej stronie przez różnice skończoną mamy:

$$\begin{cases} M\frac{y_{n+1}-y_n}{\mathrm{dt}} &= F - Sx \\ \frac{x_{n+1}-x_n}{\mathrm{dt}} &= y \end{cases}$$

Po prawej stronie równania możemy użyć x i y z nowej $(n+1)$, bądź starej (n) iteracji. W zależności co użyjemy otrzymamy mniej lub bardziej uwikłane równanie, a schemat będzie jawny (explicit) bądź niejawny (implicit).
Uwaga: by porównać różne schematy, każdy schemat napisz w nowej funkcji, która powinna brać następujące argumenty: `void Dynamics(int n, double * x, double * y, double T, double dt);`, gdzie `x` i `y` to początkowe wartości x i y, `T` to całkowity czas całkowania, a `dt` to krok czasowy.

1 Schemat prawie jawny (almost explicit)

Na początek wstawmy po prawej stronie wartości ze starej iteracji. Otrzymamy:

$$\begin{cases} My_{n+1} &= My_n + \mathrm{dt}(F - Sx_n) \\ x_{n+1} &= x_n + \mathrm{dt}y_n \end{cases}$$

Zadanie 1 *Napisz funkcję mnożącą przez macierz masową. W pliku* `MesLib.h` *jest ona zdefiniowana w analogiczny sposób jak macierz sztywności: przez macierz M i stałą Mm. UWAGA: W mnożeniu przez macierz masową, należy także zamrozić wybrane stopnie swobody.*

Zadanie 2 *Napisz funkcję całkującą równanie ruchu układu wg. następującego schematu:*

- *Oblicz $b = My + dt(F - Sx)$*
- *Oblicz $x = x + dty$*
- *Rozwiąż układ: $My = b$*
- *Co 10-tą iterację wyświetl belkę.*

Zadanie 3 *Przeanalizuj dla jakich dt układ jest stabilny, a dla jakich nie.*

Zadanie 4 *Jak wygląda wzór na całkowitą energię układu (energia potencjalna sprężystości + praca sił + energia kinetyczna)? Zróżniczkuj ją po t i pokaż, że jest stała*

Zadanie 5 *Wydrukuj w konsoli jak zmienia się całkowita energia układu w czasie.*

2 Schemat pół niejawny (semi-implicit)

Prostą modyfikacją jest użycie po prawej stronie x ze starej iteracji i y z nowej, otrzymując:

$$\begin{cases} My_{n+1} &= My_n + \mathrm{dt}(F - Sx_n) \\ x_{n+1} &= x_n + \mathrm{dt}y_{n+1} \end{cases}$$

Zadanie 6 *Zmodyfikuj kod rozwiązując układ na y przed modyfikacją x-a.*

Zadanie 7 *Przeanalizuj dla jakich dt układ jest stabilny. Wydrukuj zmienność energii.*

3 Schemat niejawny (fully-implicit)

Możemy także po prawej stronie wziąć obie wartości z nowej iteracji, otrzymując:

$$\begin{cases} My_{n+1} &= My_n + \mathrm{dt}(F - Sx_{n+1}) \\ x_{n+1} &= x_n + \mathrm{dt}y_{n+1} \end{cases}$$

Wstawiając drugie równanie do pierwszego otrzymujemy:

$$My_{n+1} = My_n + \mathrm{dt}(F - S(x_n + \mathrm{dt}y_{n+1}))$$

Przekształcając:

$$(M+\mathrm{dt}^2 S)y_{n+1} = My_n + \mathrm{dt}(F - Sx_n)$$

Zadanie 8 *Napisz funkcję mnożącą przez $M + dt^2 S$*

Zadanie 9 *Zmodyfikuj kod, by realizował schemat w pełni niejawny, zamieniając macierz M na $M + dt^2 S$ w obliczeniu y-ka*

Zadanie 10 *Przeanalizuj dla jakich dt układ jest stabilny. Wydrukuj zmienność energii.*

4 W pół kroku (midpoint)

Ostatnia z omówionych metod bierze po prawej stronie średnią z wartości w nowej i starej iteracji:

$$\begin{cases} My_{n+1} & = My_n + \mathrm{dt}(F - S\frac{x_{n+1}+x_n}{2}) \\ x_{n+1} & = x_n + \mathrm{dt}\frac{y_{n+1}+y_n}{2} \end{cases}$$

Po wstawieniu drugiego równania do pierwszego mamy:

$$My_{n+1} = My_n + \mathrm{dt}(F - S\frac{x_n + \mathrm{dt}\frac{y_{n+1}+y_n}{2} + x_n}{2})$$

Przekształcając:

$$My_{n+1} = My_n + \mathrm{dt}(F - S(x_n + \mathrm{dt}\frac{y_{n+1}+y_n}{4})$$

Ostatecznie:

$$(M + \frac{\mathrm{dt}^2}{4}S)y_{n+1} = My_n + \mathrm{dt}(F - S(x_n + \mathrm{dt}\frac{y_n}{4})$$

Zadanie 11 *Napisz funkcję mnożącą przez $M + \frac{dt^2}{4}S$*

Zadanie 12 *Napisz funkcję całkującą równanie ruchu układu wg. następującego schematu:*

- *Oblicz $x = x + \frac{dt}{4}y$*
- *Oblicz $b = My + dt(F - Sx)$*
- *Oblicz $x = x + \frac{dt}{4}y$*
- *Rozwiąż układ: $(M + \frac{dt^2}{4}S)y = b$*
- *Oblicz $x = x + \frac{dt}{2}y$*
- *Co 10-tą iterację wyświetl belkę.*

Zadanie 13 *Przeanalizuj dla jakich dt układ jest stabilny. Wydrukuj zmienność energii.*

Zadanie 14 *Udowodnij, że metoda pół kroku zachowuje energię układu.*[1]

[1] Podpowiedz: tak jak $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ to $x_{n+1}^T Mx_{n+1} - x_n^T Mx_n = (x_{n+1} - x_n)^T M(x_{n+1} + x_n)$