Metody Numeryczne: Instrukcja 1

Na dzisiejszych zajęciach dobierzemy wektor grubości elementów $\theta =$ `thick`, tak by ugięcie belki było jak najmniejsze. Jedynym elementem który zależy od θ jest macierz sztywności:

$$S(\theta)x = F$$

A dokładniej: macierz sztywności jest sumą macierzy elementów przemnożonych przez elementy θ. Dla późniejszej poprawy zbieżności dołożymy potęgę $\gamma = 3$ do tej zależności:

$$S(\theta) = \sum_i \theta_k^\gamma K^k$$

Będziemy chcieli zoptymalizować przesunięcie węzła w którym przyłożyliśmy siłę. Stwórzmy wektor g, który ma -1 w miejscu tego przemieszczenia, a resztę wartości ma zerową. Teraz nasza funkcja celu to $J = -\langle x, g\rangle$. Potraktujmy nasze równanie statyki jako więz i rozpiszmy funkcję celu powiększoną o mnożniki Lagrange:

$$-\sum_i x_i g_i + \sum_j \lambda_j (\sum_i S_{ji}(\theta)x_i - F_j)$$

Optymalne rozwiązanie powinno zerować pochodne po x, λ i θ:

$$\begin{cases} -g_i + \sum_j \lambda_j S_{ji}(\theta) & = 0 \\ \sum_i S_{ji}(\theta)x_i - F_j & = 0 \\ \sum_{ij} \lambda_j \frac{\partial}{\partial\theta_k} S_{ji}(\theta)x_i & = 0 \end{cases}$$

Drugie równanie to nasze równanie statyki. Pierwsze równanie to równanie sprzężone (adjoint):

$$S^T(\theta)\lambda = g$$

Trzecie równanie to równanie ma gradient funkcji celu względem parametrów:

$$\frac{d}{d\theta_k} J = \sum_{ij} \lambda_j \frac{\partial}{\partial\theta_k} S_{ji}(\theta)x_i = \gamma\theta_k^{\gamma-1} \sum_{ij} K_{ji}^k(\theta)\lambda_j x_i$$

Zadanie 1 *Wprowadź w funkcji mnożącej przez macierz sztywności* `SMult` *parametr* $\gamma = 3$ *(*`gamma`*) podnosząc* `thick` *do potęgi* `gamma`*. Zdefiniuj zmienną* `frac` $= 0.5$ *i ustaw początkowe* θ *(*`thick`*) na równe* `frac`*.*

Zadanie 2 *Zdefiniuj wektor* g *i rozwiąż równanie sprzężone (zauważ że* S *jest symetryczna).*

Zadanie 3 *Zdefiniuj funkcję* `calc_grad(int n, double * x, double * lambda, double * grad)`*. Skopiuj do niej zawartość funkcji mnożącej* `SMult` *i zmień:*
`r[♢] += x[♠]*pow(thick[♣],gamma)*♡;`
na:
`grad[♣] += gamma*pow(thick[♣],gamma-1)*lambda[♢]*x[♠]*♡;`
Wyświetl tak policzony gradient. Pamiętaj, że gradient ma taką samą długość jak `thick`*, czyli* `mx*my`*. Pamiętaj także by wyzerować* `grad` *i wyciąć część murującą stopnie swobody.*

1 Optymalizacja

Gradient wskazuje nam w jakim kierunku powinniśmy przesuwać nasze wartości parametrów by uzyskać lepszy wynik. Pierwszym nasuwającym się schematem postępowania byłoby:
`thick[i] += grad[i];`

Zadanie 4 *Dodaj gradient do parametrów* `thick[i] += grad[i];`*. Iteruj taką procedurę, oglądając wyniki.*

Tak ustawiony problem optymalizacyjny jest nieograniczony. Chcemy jednak uzyskać najmniejsze ugięcie przy ustalonej „masie" belki. Tzn: chcemy zachować sumę parametrów θ: $\sum_i$ `thick[i]` $=$ `frac*mx*my`. Możemy łatwo nałożyć ten więz na `grad`:

Zadanie 5 *Odejmij od wektora* `grad` *jego sumę.*

W kolejnych iteracjach grad ma różną skalę. Na początku jest duży, a później mały. Typową techniką w takich wypadkach jest normalizacja:

Zadanie 6 *Zdefiniuj zmienną* `move = 0.05`*. Podziel* `grad` *przez jego największy element i pomnóż przez* `move*5`*.*

Na nasz projekt musimy jednak narzucić bardziej istotne warunki. Po pierwsze nigdzie grubość nie może przekroczyć 1, i musi być powyżej 0. Ponadto zazwyczaj chcemy, by zmiana w pojedynczej iteracji nie przekroczyła `move`. Te warunki dość trudno pogodzić z warunkiem stałej sumy elementów.

Zadanie 7 *Wynik dodania gradientu do parametrów wstaw do nowego wektora* `nt[i] = thick[i] + grad[i];`. *Dla danego parametru* `scale` *oblicz* `thick[i] = scale * nt[i];`. *Na tak obliczone* `thick` *narzuć powyżej opisane 4 warunki, obcinając za duże, bądź za małe wartości.*

Zadanie 8 *Zsumuj wartości* `thick` *po poprzedniej procedurze. Dobierz* `scale` *metodą bisekcji tak by* $\sum_i$ `thick[i]` $=$ `frac*mx*my`.

Zadanie 9 *Przetestuj program dla różnych obciążeń, ustawień parametru* `move` *i ustawień maksymalnej liczby iteracji w metodze gradientów sprzężonych.*