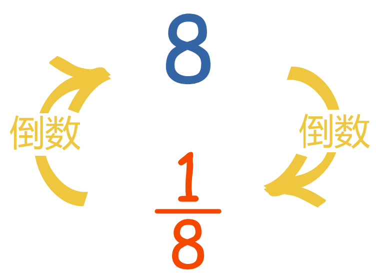
逆矩阵

请先去这里看 矩阵入门。

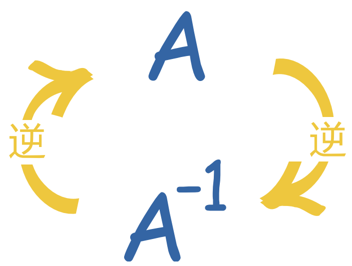
逆矩阵是什么?

数有 倒数:



数的倒数

逆矩阵也是相同的**概念**，但我们写为A^{-1}



为什么不写成 $^1/_A$? 因为我们不除以矩阵！而同时 $^1/_8$ 也可以写成 8^{-1}

还有其他相似之处:

把**数**与其**倒数相乘**的结果是 **1**

$$8 \times (^1/_8) = \mathbf{1}$$

当我们把**矩阵**与其**逆相乘**，结果是**单位矩阵**（就像是矩阵里的"1"）：

$$A \times A^{-1} = \mathbf{I}$$

把逆放在前面的结果是一样的：

$$(^1/_8) \times 8 = \mathbf{1}$$

$$A^{-1} \times A = \mathbf{I}$$

单位矩阵

上面我们讲到"单位矩阵"。它是矩阵里的 "1"：

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3x3 单位矩阵

- 它是个"方形"矩阵（相同数目的行和列），
- 在对角线是 **1**，在其他位置是 **0**。
- 符号是大写字母 **I**。

单位矩阵可以是 2×2、或 3×3、4×4 等等

定义

这是逆矩阵的定义：

A的 逆（矩阵）是 A^{-1}，仅当：

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = \mathbf{I}$$

但有些矩阵是没有逆矩阵的。

2x2 矩阵

好了，怎样求逆矩阵呢?

2x2 矩阵的逆是:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\underbrace{ad-bc}_{\text{行列式}}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

换句话说：**调换** a 和 d 的位置，把 **负号放在** b 和 c 前面，然后全部**除以矩阵的** 行列式 （ad-bc）。

看例子:

$$\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4\times6-7\times2} \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.6 & -0.7 \\ -0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$$

怎样知道答案是对的?

我们上面说过: $A \times A^{-1} = \mathbf{I}$

我们把矩阵与逆矩阵相乘来看看:

$$\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 & -0.7 \\ -0.2 & 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\times0.6 + 7\times-0.2 & 4\times-0.7 + 7\times0.4 \\ 2\times0.6 + 6\times-0.2 & 2\times-0.7 + 6\times0.4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2.4 - 1.4 & -2.8 + 2.8 \\ 1.2 - 1.2 & -1.4 + 2.4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

哈！真的得到单位矩阵！所以答案是对的。

$A^{-1} \times A = \mathbf{I}$ **也**是对的。

你自己来试试把它们相乘，看看可不可以也得到单位矩阵：

$$\begin{bmatrix} 0.6 & -0.7 \\ -0.2 & 0.4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}$$

我们为什么需要逆矩阵?

以为我们**不除**矩阵！在矩阵世界里是没有除的概念的。

但我们可以**乘以逆矩阵**，这和除是相同的。

假设我们不能除以数字。。。。。。

。。。。。。那我我们怎样"把10个苹果分给2个人"呢?

我们可以用 2 的 **倒数**（等于 0.5）：

$$\mathbf{10 \times 0.5 = 5}$$

每人得到 5 个苹果。

矩阵也可以做同样的：

假设我们知道矩阵 A 和 B，而需要求矩阵 X:

$$XA = B$$

如果可以每边除以 A （来得到 X=B/A）就最好了，但 **我们不能除矩阵。**

可是，把每边乘以 A^{-1} 呢?

$$XAA^{-1} = BA^{-1}$$

我们知道 $AA^{-1} = I$，所以：

$$XI = BA^{-1}$$

拿走 I （和把 "1" 从数子式子 1x = ab 拿走一样）：

$$X = BA^{-1}$$

得到答案了 (假设可以计算 A^{-1})

在这个例子中我们要非常小心去做矩阵相乘，因为在矩阵乘法，次序是重要的。AB 几乎永远都不会等于 BA.

实例：公交车与地铁

一帮人坐**公交车**，车费是小孩￥3，大人￥3.20，总共是￥118.40。

回程他们搭**地铁**，车费是小孩￥3.50，大人￥3.60，总共是￥135.20。

有几个小孩和几个大人？

我们先把矩阵编排好（小心不要把行和列弄错！）：

$$\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\text{儿童} & \text{成人}\end{array}\\ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\end{array} \begin{array}{c}\begin{array}{cc}\text{公车} & \text{火车}\end{array}\\ \begin{bmatrix} 3 & 3.5 \\ 3.2 & 3.6 \end{bmatrix}\end{array} = \begin{array}{c}\begin{array}{cc}\text{公车} & \text{火车}\end{array}\\ \begin{bmatrix} 118.4 & 135.2 \end{bmatrix}\end{array}$$

这和上面的例子一样：

$$XA = B$$

去解它我们需要 "A" 的逆：

$$\begin{bmatrix} 3 & 3.5 \\ 3.2 & 3.6 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3\text{x}3.6-3.5\text{x}3.2} \begin{bmatrix} 3.6 & -3.5 \\ -3.2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -9 & 8.75 \\ 8 & -7.5 \end{bmatrix}$$

算出逆矩阵后我们便可以这样解：

$$X = BA^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 118.4 & 135.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 & 8.75 \\ 8 & -7.5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 118.4 \times -9 + 135.2 \times 8 & 118.4 \times 8.75 + 135.2 \times -7.5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 & 22 \end{bmatrix}$$

有16个小孩和22个大人!

答案很奇妙的出现了。但计算是基于正确的数学逻辑的。

工程师用类似的计算（当然是用大得多的矩阵）来设计楼宇。类似的计算也应用在很多其他的领域，例如在电玩和电脑动画制作里用来显示三维物体。

这也是解线性方程组的一种方法。

计算在电脑中运算，但人必须要了解公式。

次序是重要的

假设我们要求 "X"：

$$AX = B$$

这和上面的例子不一样！ X 现在是在 A 的**后面**。

在矩阵乘法，次序通常会改变答案。千万不能假设 AB = BA，这几乎一定是错的。

那么我们怎样去解它？用同一方法，但把 A^{-1} 放在前面：

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

我们知道 $A^{-1}A = I$，所以：

$$IX = A^{-1}B$$

拿走 I：

$$X = A^{-1}B$$

得到答案了（假设我们可以计算 A^{-1}）

可以这样做，但小心怎样编排矩阵。

正确地编排AX = B是这样：

$$\begin{bmatrix} 3 & 3.2 \\ 3.5 & 3.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 118.4 \\ 135.2 \end{bmatrix}$$

很酷！我喜欢这个。

留意到与上面的例子比较，行与列调换了（"转置"了）

我们需要 "A" 的逆矩阵：

$$\begin{bmatrix} 3 & 3.2 \\ 3.5 & 3.6 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3x3.6-3.2x3.5} \begin{bmatrix} 3.6 & -3.2 \\ -3.5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -9 & 8 \\ 8.75 & -7.5 \end{bmatrix}$$

与上面的逆矩阵差不多，但
转置了（行与列调换位置）。

算出逆矩阵后我们便可以这样解：

$$X = A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 8 \\ 8.75 & -7.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 118.4 \\ 135.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9\times118.4 + 8\times135.2 \\ 8.75\times118.4 - 7.5\times135.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 22 \end{bmatrix}$$

答案没变：16个小孩和22个大人。

矩阵是强大的工具，但一定要编排得正确！

可能没有逆矩阵

首先，矩阵一定要是"方形"（行和列数目相同）才能有逆矩阵。

同时，**行列式不能是零**（不然便要除以零了）。看看这个：

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3\times8-4\times6}\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{24-24}\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

24-24? 等于 0， **1/0 是未定义的。**
不能继续做下去了！ 这矩阵没有逆矩阵。

这种矩阵叫 "降秩矩阵"，就是行列式为零的矩阵。

这合理。。。。。。来看数字：第二行不过是第一行的双倍，**没有新的信息。**

行列式就是告诉我们这个。

（假想在公交车例子里，地铁的车费全是比公交车贵一半：我们便不能找出大人和小孩的分别。一定要有某些东西来使他们不同，我们才可以算出小孩和大人的数量。）

更大的矩阵

计算 2x2 矩阵的逆是 **很容易的。**。。。。。与更大的矩阵相比（例如 3x3 和 4x4等）。

计算大矩阵的逆，我们可以用三个方法：

- 用初等行运算（高斯 - 若尔当）来求逆矩阵
- 用余子式、代数余子式和伴随来求逆矩阵
- 用电脑（例如矩阵计算器）

结论

- A 的逆矩阵是 A^{-1} 仅当 $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = \mathbf{I}$
- 求 2x2 矩阵的逆矩阵： **调换** a 和 d 的位置，把 **负号** 放在 b 和 c 前面，然后全部**除以** 矩阵的行列式 （ad-bc）。
- 有时候一个矩阵是没有逆矩阵的