Datenreduktion durch PCA-Netze

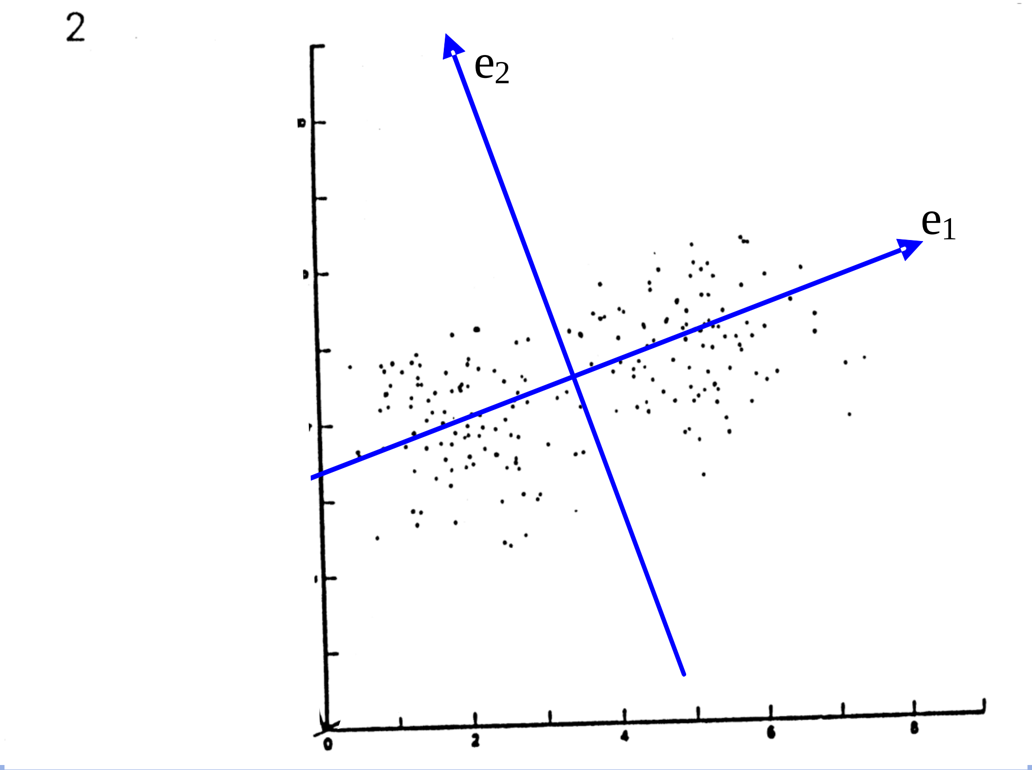
Praktikum Adaptive Systeme

Principal Component Analysis PCA

Zerlegung in orthogonale Eigenvektoren = Basisvektoren

„Hauptkomponentenanalyse“, „principal component analysis“, „Karhunen-Loéve-Entwicklung“, „Hotelling-Transformation“,...

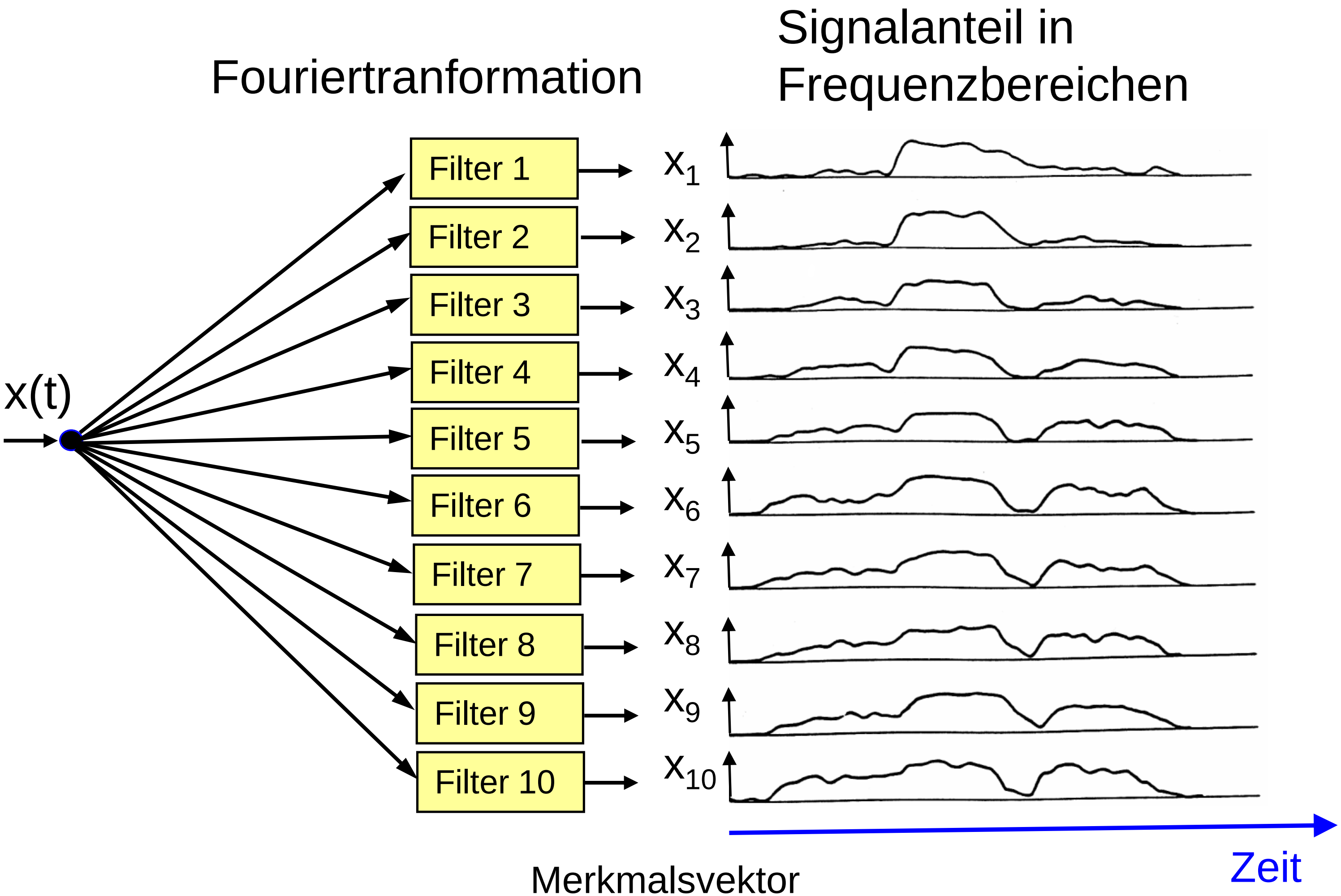
Eigenvektoren – Wozu?



Merkmals-transformation auf Hauptrichtungen

Transformation mit minimalem MSE

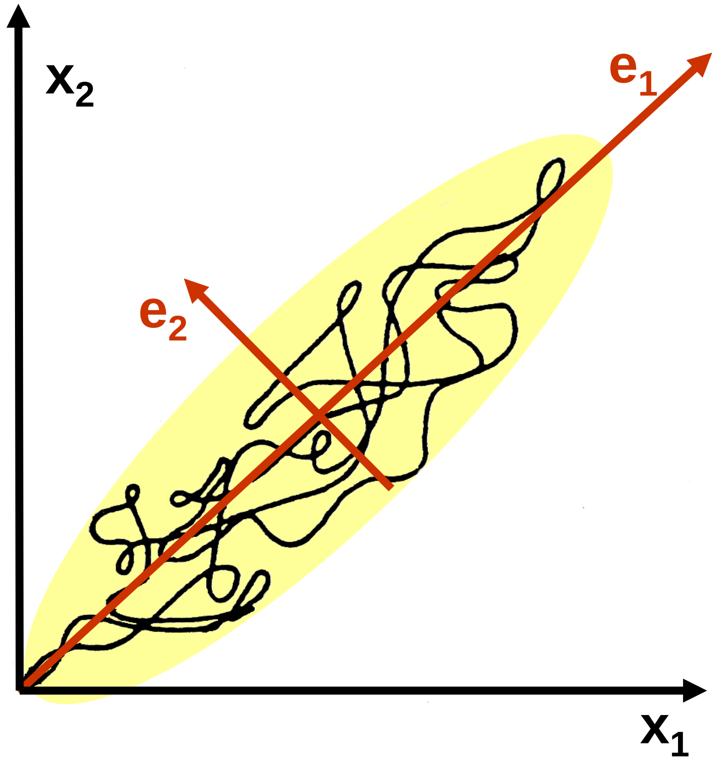
Beispiel: Sprachkodierung



Transformation mit minimalem MSE

Beispiel: Sprachkodierung mit *n*-dim Samples **x**, hier: n=2

- **Transformation** (Rotation) des Koordinatensystems auf Hauptachsen
- **Vernachlässigung** der Anteile des 2. Kanals: Ersatz des zweiten Kanals durch ersten



Beispiel: Bildkodierung

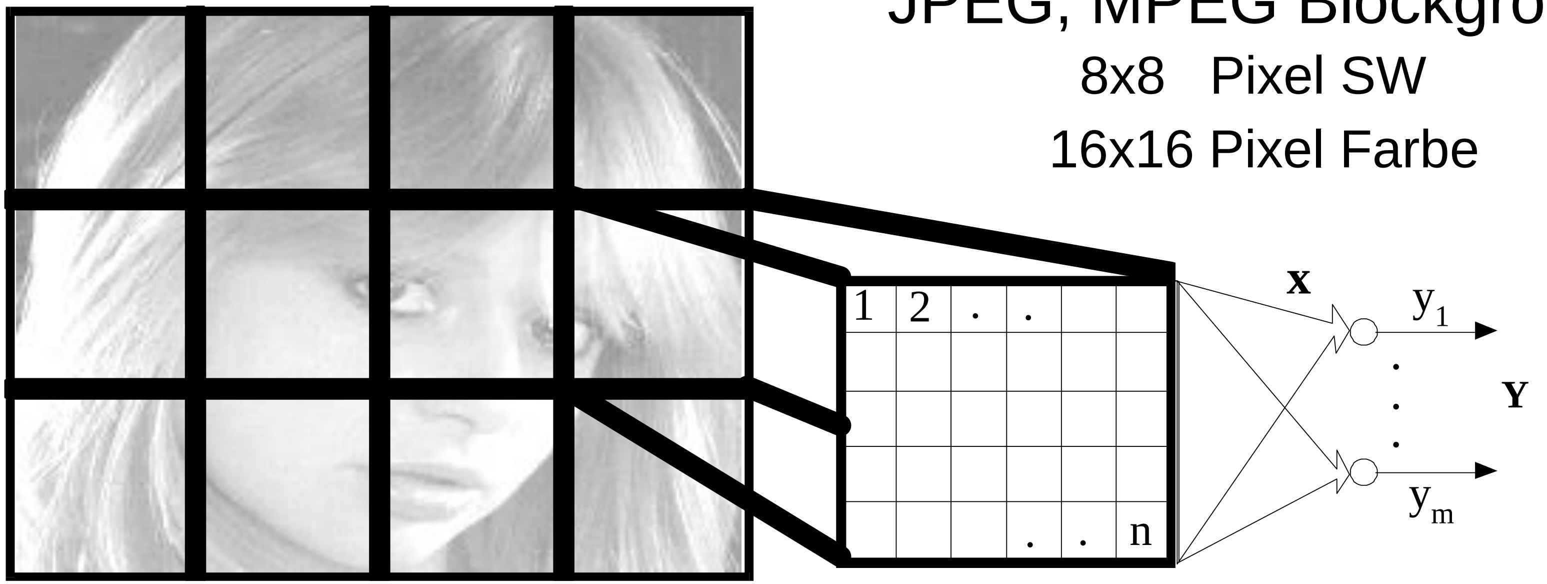
Bildaufteilung

Zerteilen in Blöcke, jeder Block = Mustervektor

JPEG, MPEG Blockgröße:

8x8 Pixel SW

16x16 Pixel Farbe



Principal Component Analysis (PCA)

Anwendungen – Datenkompression:

Vernachlässigen der Raumrichtungen mit kleiner Varianz (kleinem Eigenwert der Eigenvektoren)

Beispiel natürliche Bilder:

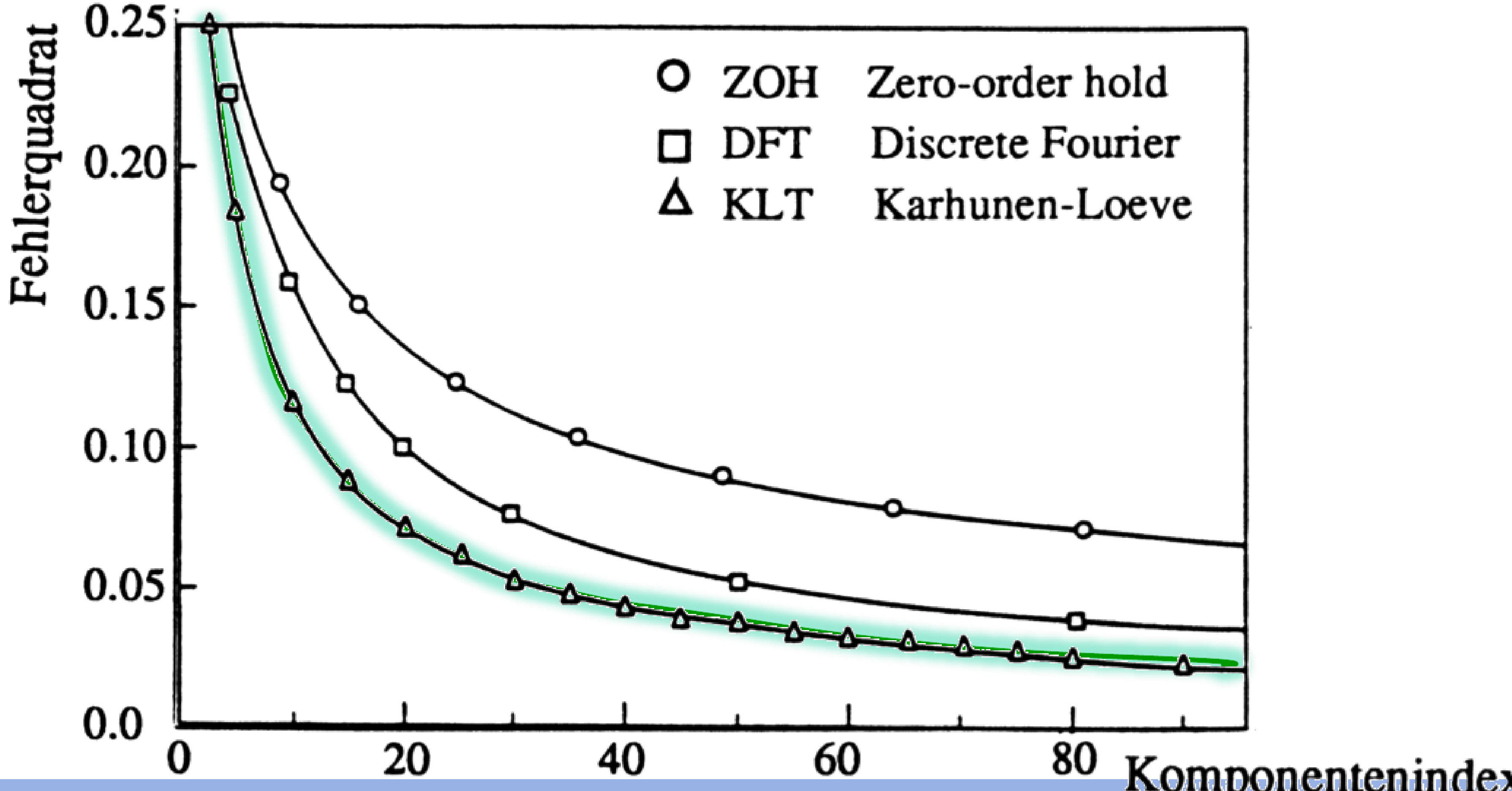
- Zerlege Bild in diskrete Blöcke aus 8x8 Pixel
- Fasse 8x8-Blöcke als Vektoren auf und berechne Eigenvektoren der Kovarianzmatrix
- Führe Rotation mit Matrix der Eigenvektoren aus und vernachlässige dabei Komponenten zu Eigenvektoren mit kleinem Eigenwert

Original | Rekonstruktion, 24 von 192 Koeffizienten | Rekonstruktion, 16 von 192 Koeffizienten

Eigenschaften natürlicher Bilder

Fehler beim Vernachlässigen höh. Komponenten

$n = 256 \times 256 = 65536$ Komponenten



Beispiel: Bildkodierung (transform coding)

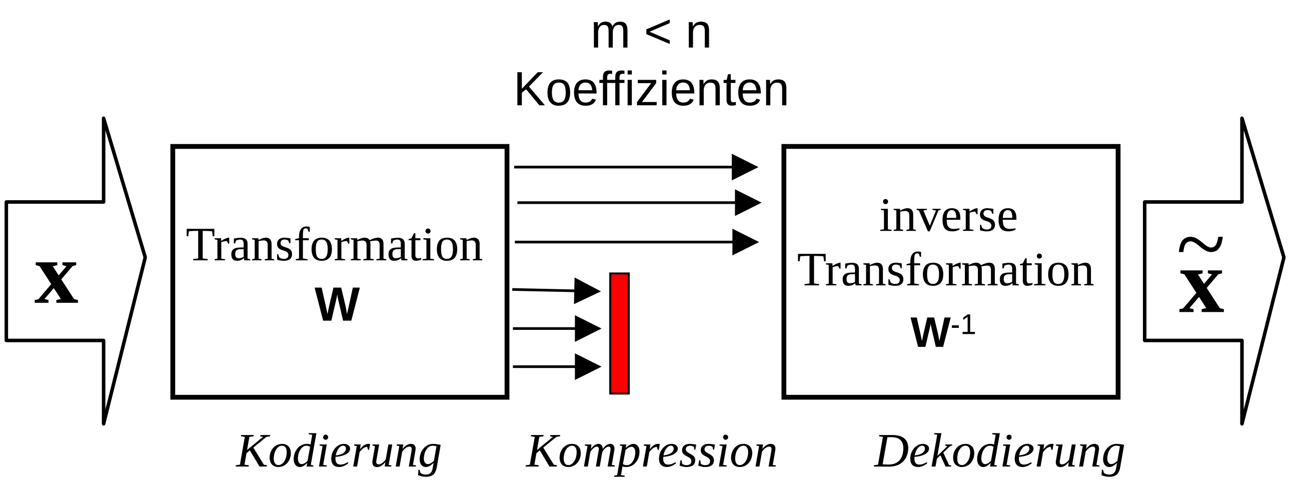
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

parallele Signale

Projektion auf wichtige Basisvektoren:

Wähle **W** so, dass $\sigma^2_i > \sigma^2_j =$ bei $i < j$

Rückprojektion: durch inverse Matrix $\mathbf{W}^{-1}$



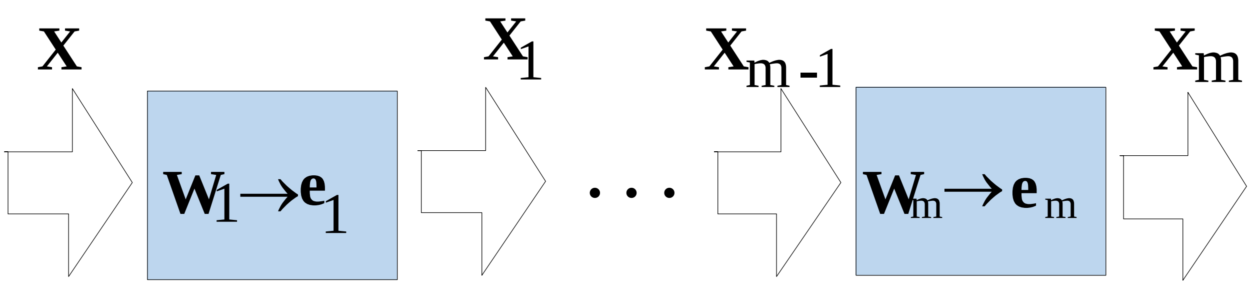
Sanger PCA-Netz

- **Vollständige Zerlegung von {x} in *n* Eigenvektoren** **(Gram-Schmidt) mit zentrierten Mustern**

  $\{x\}_0 = \{x\}$, i=1 *initiale Menge aller zentrierten Muster*

1. Suche die Richtung größter Varianz in $\{\mathbf{x}\}_{i-1}$. Dies ist $\mathbf{e}_i$.
2. Ziehe diese Richtung (Dimension) von $\{\mathbf{x}\}_{i-1}$ ab. Wir erhalten $\{\mathbf{x}\}_i$.
3. Wenn i<n, setze i := i+1, gehe zu 1.

Diskret für stochastisches x, w: Sanger-Netz



PCA Netze für geordnete Zerlegung

Sanger-Methode: *stochastischer* Algorithmus

Lernen: $\mathbf{w}_i(t) = \mathbf{w}_i(t-1) + \gamma(t)\, y_i \mathbf{x}_i$, $|\mathbf{w}_i(t)|=1$ ***"Generalisierte" Hebb-Regel***

Musterreduktion (Ausdünnen des Eingaberaums)

Stufe 1

$\mathbf{x}_2 := \mathbf{x}_1 - \mathbf{w}_1(t-1)y_1$ $\mathbf{x}_2 \perp \mathbf{w}_1$ **!!**

…

Stufe *k*

$\mathbf{x}_{k+1} := \mathbf{x}_k - \mathbf{w}_k(t-1)y_k$ und $x_1 := x$, $k = 1..i-1$

Lernen Stufe *k*

$$\rightarrow \mathbf{w}_k(t) = \mathbf{w}_k(t-1) + \gamma(t)\, y_k\Big(\mathbf{x}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \mathbf{w}_j y_j\Big)$$

stochastisches Lernen

PCA Netze für geordnete Zerlegung

Erwartungswert-Methode: **deterministischer** Algorithmus

Lernen: $\mathbf{w}_i(t) = \mathbf{w}_i(t-1) + \gamma(t) \langle \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T \rangle \mathbf{w}_i(t-1)$, $|\mathbf{w}_i(t)|=1$

mit der Korrelationsmatrix $\langle \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T \rangle = \mathbf{C}_{xx}$

Musterreduktion (Ausdünnen des Eingaberaums)

Stufe 1

$\{\mathbf{x}\}_2 := \{\mathbf{x}\}_1 - \mathbf{w}_1\{\mathbf{x}^T\mathbf{w}_1\}_1$ $\{\mathbf{x}\}_2 \perp \mathbf{w}_1$ **!!** und bilden von $\langle \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T \rangle = \mathbf{C}_{xx}(2)$
$\mathbf{x}_i \in \{\mathbf{x}\}_2$

…

Stufe *k*

$\{\mathbf{x}\}_{k+1} := \{\mathbf{x}\}_k - \mathbf{w}_k\{y\}_k$ und $x_1 := x$, $k = 1..i-1$

Lernen Stufe *k*

$\rightarrow \mathbf{w}_k(t) = \mathbf{w}_k(t-1) + \gamma(t) \langle \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T \rangle \mathbf{w}_k(t-1)$, $|\mathbf{w}_k(t)|=1$

Bilden der Korrelationsmatrix C_{xx}

- **Bilden des äußeren Produkts $\mathbf{xx}^T$**

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ x_n & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 x_1 & \dots & x_1 x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n x_1 & \dots & x_n x_n \end{bmatrix}$$

- **Bilden des Erwartungswertes $\langle \mathbf{xx}^T \rangle = \mathbf{C}_{xx}$**

$$\langle \mathbf{xx}^T \rangle = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i^T = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} x_1(i) x_1(i) & \cdots & \sum_{i=1}^{m} x_1(i) x_n(i) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} x_n(i) x_1(i) & \cdots & \sum_{i=1}^{m} x_n(i) x_n(i) \end{bmatrix}$$

Fragen ?