Vorgehen

Hinweise zu: Aufgabe 5.1 Aufgabe 5.2 Aufgabe 5.3
5.1a 5.1b

Hinweise zu Aufgabe 5.1

a. Testen Sie die DFT mit einem selbst erstellten Sinussignal. Beispielsweise wählen sie für das Signal $a + b \cdot \sin(2\pi f \cdot t + \varphi)$ eine Frequenz von f=100 Hz, Amplitude b=1, Mittelwert a=0, und Phase phi=0. Da die Nyquist-Frequenz für dieses Signal 200 Hz ist, um es noch darstellen zu können, wählen wir uns eine (höhere) Samplefrequenz , z.B. 1000 Hz. Damit haben die Abtastpunkte t = dt n einen zeitlichen Abstand von dt=1ms. Die ganze Sinuswelle hat bei f=100Hz eine Länge von 10ms, so dass n=10 ausreicht. Wir generieren uns also ein Feld von 10 Elementen und füllen es mit den Sinuswerten aus. Dann wenden wir die DFT an und erhalten zwei Felder (ein Felder für den Realteil und eins für den Imaginärteil) von je 10 Werten für 10 Frequenzen. Die obere Grenzfrequenz (max. Frequenz) liegt in der Feldmitte; der eine reelle Wert tritt an zwei Punkten symmetrisch um die Mitte auf und es gibt nur imaginäre Werte der Größe Null. Nun setzen Sie den Mittelwert ungleich null: In der nullten Real-Komponente (Feldindex null) erscheint ein Wert.

Setzen Sie auch die Phase ungleich null, so erscheinen auch Werte im Imaginärteil.
Bei der Berechnung der DFT können Sie die Identität $\exp(i \cdot a) = \cos(a) + i \cdot \sin(a)$ mit $i = \sqrt{-1}$ verwenden und komplexe Zahlen als Paare reeller Zahlen darstellen, damit Sie in ihrem Programm ausschließlich mit reellen Zahlen rechnen können.
Für die Überprüfung Ihrer selbst geschriebenen DFT können Sie eine DFT-Python-Bibliothek aus dem Internet verwenden.

nach oben

b. Verwenden Sie die DFT, um das Signal im Frequenzbereich darzustellen. Die Rauschanteile sind hier mit sehr kleinen Koeffizienten vertreten und über das ganze Frequenzspektrum verteilt. Da das Polynom, an dem wir interessiert sind, hauptsächlich im niederen Frequenzbereich vorhanden ist (es weist keine hochfrequenten Schwankungen auf) können Sie alle Koeffizienten, die zu Frequenzen oberhalb einer kleinen Schwelle θ gehören, auf Null setzen und das Signal dann mit der IDFT aus dem Frequenzbereich wieder in den Zeitbereich zurücktransformieren. Bei geeigneter Wahl von θ wird das Rauschen dann vollständig eliminiert sein.

   Geben Sie auch an, welche Koeffizienten der DFT Sie behalten haben. Beachten Sie dabei aber, daß die Koeffizienten im DFT-Spektrum (mit Ausnahme des ersten Koeffizienten, der zur Frequenz 0 gehört) gespiegelt vorhanden sind, da wir hier kein komplexwertiges, sondern nur ein reelles Signal transformieren.

nach oben

Hinweise zu Aufgabe 5.2

Schauen Sie sich die Formeln für die DFT und die IDFT an und folgern Sie, daß es sich um eine lineare Transformation handelt, die eine Darstellung als Matrix erlaubt:

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_0 \\ \vdots \\ \hat{x}_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{n}\mathrm{D}(0,0) & \cdots & \frac{2}{n}\mathrm{D}(n-1,0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{2}{n}\mathrm{D}(0,n-1) & \cdots & \frac{2}{n}\mathrm{D}(n-1,n-1) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{Dx}$$

mit $D(j,k) = \exp\left(-2\pi i \frac{jk}{n}\right)$

Überlegen Sie sich, wie die Hin- und die Rücktransformation, die Sie in der vorigen Aufgabe zum Entrauschen des Signals verwendet haben, in Matrixschreibweise aussehen und entwickeln Sie daraus eine einzige *reellwertige* Matrix für das Entrauschen, die als Gewichtsmatrix im Adaline-Netz eingesetzt werden kann (dabei kann die obige Identität der Exponentialfunktion hilfreich sein).

nach oben

Hinweise zu Aufgabe 5.3

Trainieren Sie das AdaLinE-Netz so, daß es in der Lage ist, unscharfe Bildblöcke auf scharfe Pixel abzubilden. Erstellen Sie dazu eine Trainingsmenge aus den Unterabschnitten (Blöcken) eines scharfen Bilds und den einer unscharfen Version davon. Die unscharfe Version können Sie durch Filtern mittels DFT oder aber durch diskrete Tiefpassfilter (z.B. Ersetzen eines Pixels durch die gewichtete Summe der Nachbarpixel) erzeugen.

Die Pixel am Rande des Fotos könnten Ihnen beim Schärfen des Bildes evtl. Probleme bereiten. Sie können sich aussuchen, wie Sie dieses Problem am besten handhaben.

Bemerkung: An dieser Stelle möchten wir nur kurz anmerken, daß zum Lösen dieses Problems lediglich *ein einziges* trainiertes Neuron erforderlich ist...

-

nach oben