5. Die Diskrete Fouriertransformation

Einleitung

Eine äußerst nützliche Methode, Daten zu analysieren, besteht in der Umwandlung eines Datenvektors mit Hilfe der Fouriertransformation. Genauer gesagt werden wir hier die *Diskrete Fouriertransformation* (DFT) betrachten, welche gegeben ist durch:

$$\hat{x}_k = \frac{2}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \exp\left(-2\pi i \cdot \frac{jk}{n}\right) \cdot x_j, \quad 0 \le k < n$$

$\underline{x} = [x_1, ..., x_n]^T \in \mathbb{C}^n$ ist dabei ein komplexwertiger Datenvektor, dessen DFT berechnet werden soll, *n* die Anzahl seiner Komponenten und $i = \sqrt{-1}$ die imaginäre Einheit. Der Vektor $\underline{\hat{x}} = [\hat{x}_1, ..., \hat{x}_n]^T \in \mathbb{C}^n$ ist das Ergebnis der Transformation. Die Rücktransformation (Inverse Diskrete Fouriertransformation, IDFT) sieht fast genauso aus und ist gegeben durch:

$$x_k = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \exp\left(2\pi i \cdot \frac{jk}{n}\right) \cdot \hat{x}_j, \quad 0 \le k < n$$

Die hier angegebenen Vorfaktoren von $\frac{2}{n}$ und $\frac{1}{2}$ sind allerdings keineswegs zwingend. Die einzige Einschränkung ist, daß deren Produkt $\frac{1}{n}$ ergeben muß, damit der Originalvektor wieder exakt hergestellt werden kann. Die hier getroffene Wahl hat allerdings den

Vorteil, daß die Koeffizienten der Fouriertransformation auf eine natürlichere Weise die Parameter von Sinus-/Kosinuswellen enthalten, die im Ausgangsvektor enthaltenen sind.

Man sagt auch, daß die DFT ein Signal vom *Zeitbereich* in den *Frequenzbereich* überführt. Im Frequenzbereich werden dann oft Eigenschaften sichtbar, die man dem Signal im Zeitbereich nicht unbedingt angesehen hat. Eine recht nützliche Eigenschaft des Frequenzbereichs ist - daher der Name - daß sich viele Informationen über die verschiedenen Frequenzen, die sich im Signal befinden, gewinnen lassen. Um nicht zu sehr ins Detail zu gehen, hier nur kurz einige der wichtigsten Punkte, die man wissen sollte:

Parameterbestimmung

Enthält ein diskretes reelles Ausgangssignal der Länge *n*, das sich über einen Zeitraum von *T* Sekunden erstreckt, eine Kosinussignal der Form $a \cdot \cos(t \cdot f + \omega)$, mit $-\pi \leq \omega \leq \pi, 0 \leq t < n$ (jedes beliebige reine Sinus-/Kosinussignal läßt sich auf diese Weise darstellen), dann gilt:

i. **`Amplitudenbestimmung`**

   Ist $k = \frac{f \cdot n}{2\pi}$ mit $0 \leq k < n$ eine ganze Zahl, dann ist $|\hat{x}_k| = a$

ii. **`Phasenbestimmung`**

   Ist $k = \frac{f \cdot n}{2\pi}$ mit $0 \leq k < n$ eine ganze Zahl, dann gilt für $\alpha := \arccos\left(\frac{\Re(\hat{x}_k)}{|\hat{x}_k|}\right)$ und $\beta := \arcsin\left(\frac{\Im(\hat{x}_k)}{|\hat{x}_k|}\right)$:

   $$\omega = \begin{cases} \alpha & , falls \ \mathrm{sign}(\alpha) = \mathrm{sign}(\beta) \\ \beta & , sonst \end{cases}$$

iii. **`Frequenzbestimmung`**

Insbesondere gibt $|\hat{x}_k|$ für jedes $0 \leq k < n$ an, wie stark (mit welcher Amplitude) eine Kosinuswelle mit $f = 2\pi\frac{k}{n}$ im Ausgangssignal vorhanden ist. Die Frequenz dieser Welle beträgt $f \cdot \frac{1}{T}$ Hertz.

Die DFT hat enorm viele Anwendungsmöglichkeiten. Angefangen bei der schnellen Multiplikation großer Zahlen (beim *Schönhage-Strassen-Algorithmus* - der zu Zeit asymptotisch schnellste bekannte Multiplikationsalgorithmus - wird eine schnelle Variante der DFT, die *Fast Fourier Transformation*, eingesetzt), über Datenkompression bis hin zum Entrauschen und zur Frequenzanalyse von Signalen.

Da die DFT in der Signalverarbeitung eine sehr wichtige Rolle spielt und es auch einen Zusammenhang zu Neuronalen Netzen gibt, wollen wir sie uns mittels einiger Aufgaben etwas näher ansehen.