JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

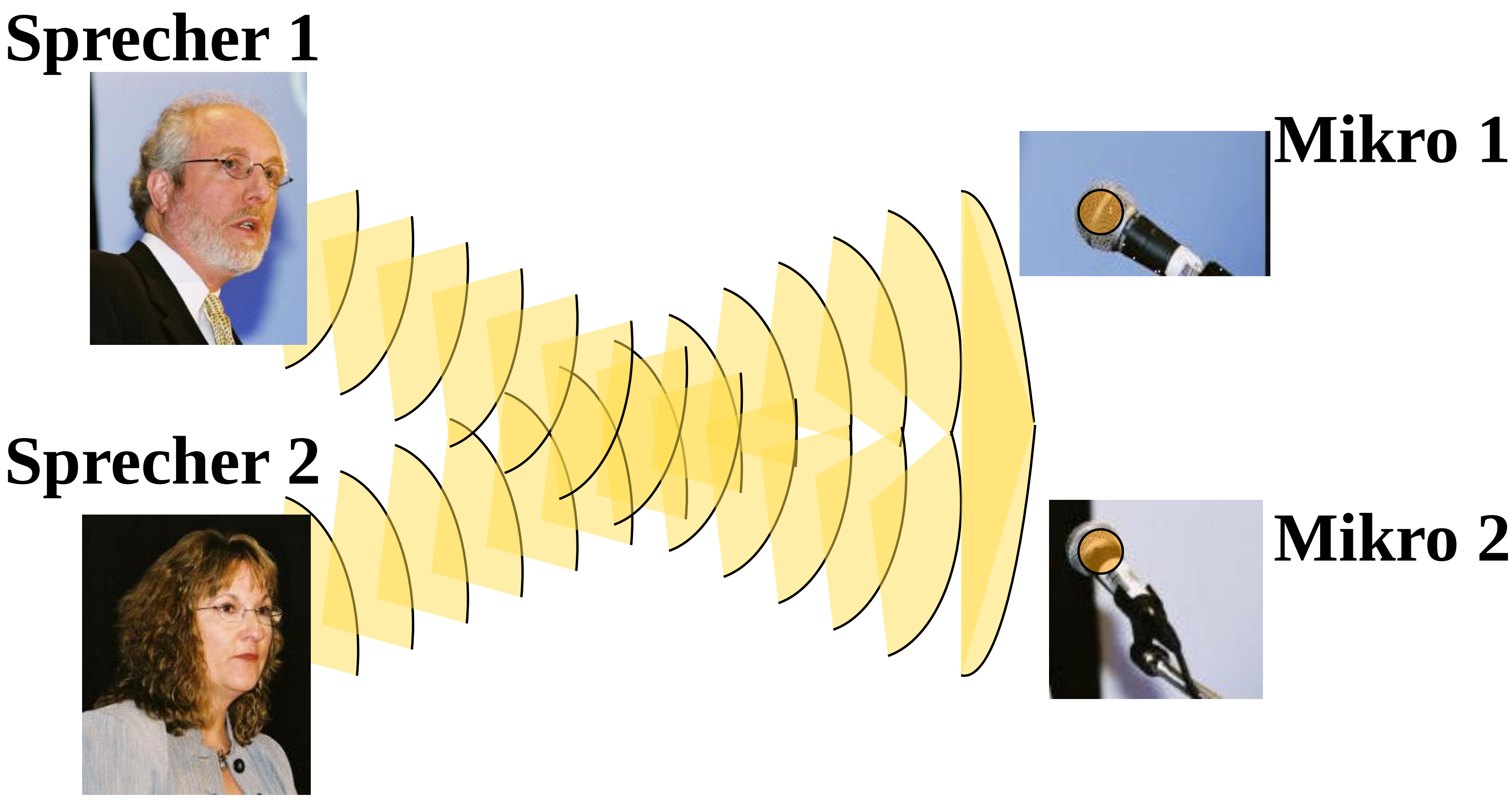
www.uni-frankfurt.de

Abhängigkeitsanalyse ICA

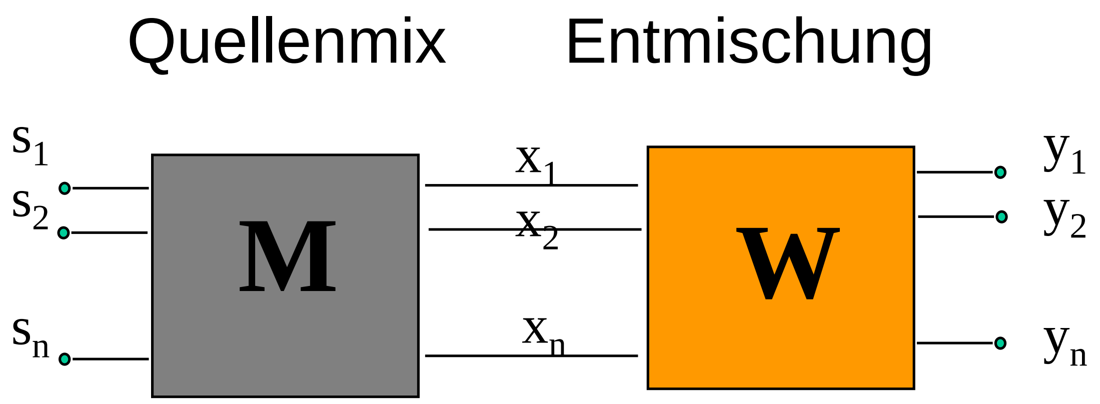
Praktikum Adaptive Systeme

Einleitung

- **Lineare Mischung unabhängiger Quellen**



Lineares ICA-Modell



Ziel: $\mathbf{W \rightarrow M^{-1}}$

$\mathbf{y \rightarrow s}$

mit $p(\mathbf{y}) = p(y_1,..,y_n) = p(y_1)..p(y_n)$ *unabhängige Kanäle*

Unabhängigkeit notwendig zur Quellentrennung.

Yelling,Weinstein (1994): auch hinreichend!

Lineare Koordinatentransformationen

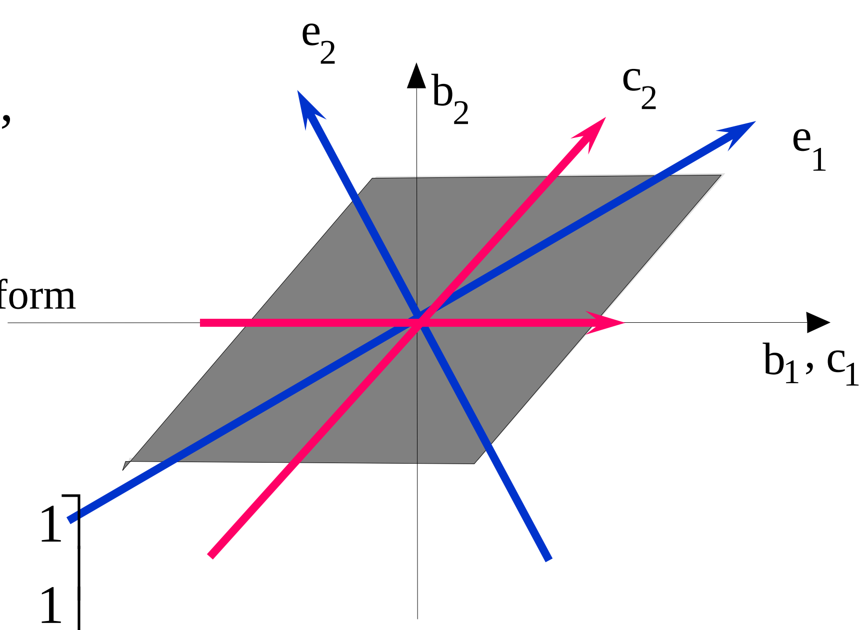
Beispiel:

- PCA-Hauptkomponentenanalyse *Richtung stärkster Varianz*
- ICA- Unabhängigkeitsanalyse *statistische Unabhängigkeit*

Beispiel:

$x = x_1 + x_2$,
$y = x_2$

mit x_1, x_2
zufällig uniform
aus [-1,+1]



$c_1 := x - y$, $c_2 := y$
also $c_1 = x_1$ unabh.
von $c_2 = x_2$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ICA-Einschränkungen

- **Quellenzahl = Mischzahl**

  M **muß regulär sein** $\Leftrightarrow$ **nur dann ex.** M^{-1}

- **Ausgabereihenfolge unbestimmt**

  Reihenfolge in $p(y_1)..p(y_n)$ **ist unwichtig** => M^{-1} **bis auf Permutation P bestimmbar:** $M^{-1} \to M^{-1} P$

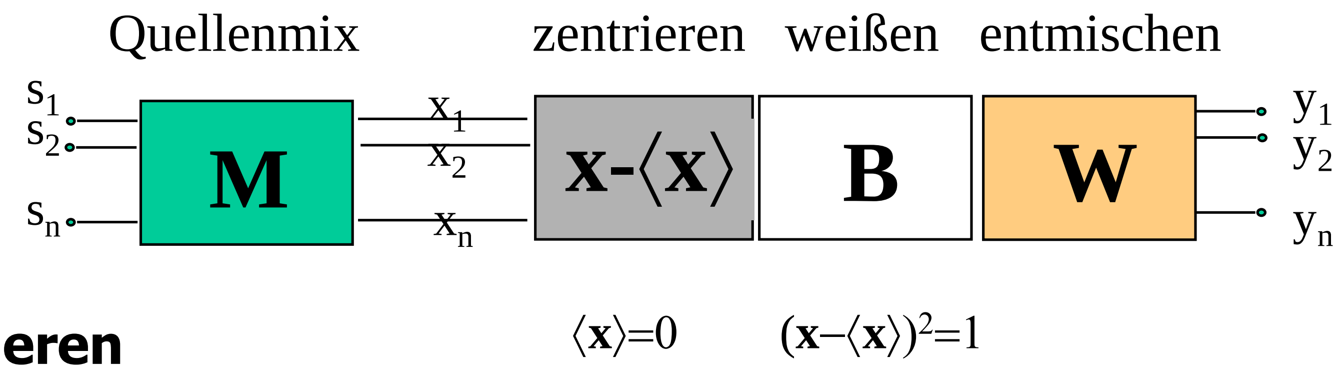
- **2 Gaußsche Quellen lassen sich nicht trennen**

  $\Rightarrow$ **max 1 Gaußsche Quelle**

- **Unbekannte Skalierung**

  $\Rightarrow \sigma_i := 1$

ICA-Algorithmen: Vorbearbeitungsfolge



- **Zentrieren**
  - Mittelwertbildung, z.B. iterativ durch $w_0(t+1) = w_0(t) - \gamma\,(w_0 - x)$, $\gamma = 1/t$
- **Weißen**
  - PCA durchführen: $\mathbf{w}_i$ Eigenvektoren von $C = \langle \mathbf{x}\mathbf{x}^T \rangle$ mit $|\mathbf{w}_i| = 1$ und Eigenwerten λ_i
  - Gewichtsvektoren $\mathbf{w}_i$ normieren zu $\mathbf{w}_i / \lambda_i^{1/2}$. Dies führt zu $\langle y^2 \rangle = \mathbf{w}_i^T \langle \mathbf{x}\mathbf{x}^T \rangle \mathbf{w}_i = \mathbf{w}_i^T \lambda_i \mathbf{w}_i = 1$
- **Entmischen**
  - ICA Algorithmen, z.B. minimale Transinformation, maximale Kurtosis etc.
  - *Speziell*: dekorrelierte **x** benötigen nur eine orthogonale Matrix **W** (Vereinfachung)

Statist. Momente und Kurtosis

JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

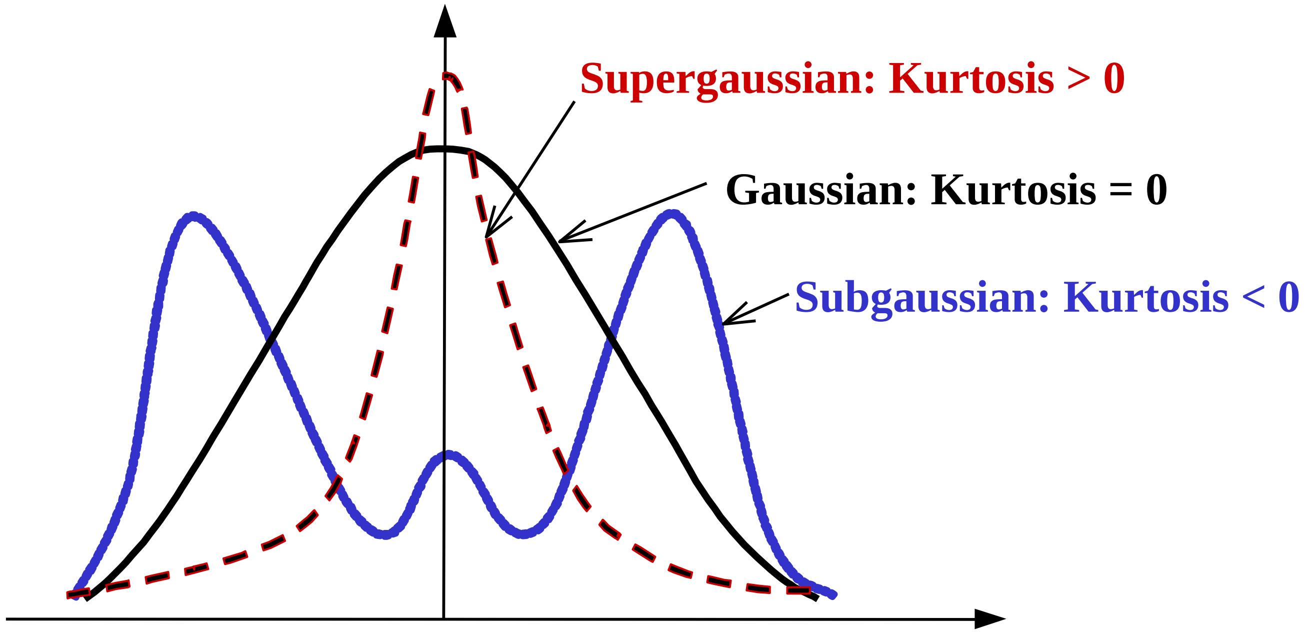
- **Momente** einer Zufallsvariablen **x** :

  $\alpha_i = \langle x \rangle_i$, z.B. $\alpha_1 = \langle x \rangle$ Mittelwert

- **Zentrale Momente** einer Zufallsvariablen **x**:

  $m_k = \langle (x-\alpha_1)^k \rangle$, z.B. $m_2 = \langle (x-\alpha_1)^2 \rangle$ Varianz

- **Wölbungsmaß Kurtosis:** $\text{kurt}(x) = [\langle (x-\alpha_1) \rangle^4 - 3m_2^2]/m_2^2$

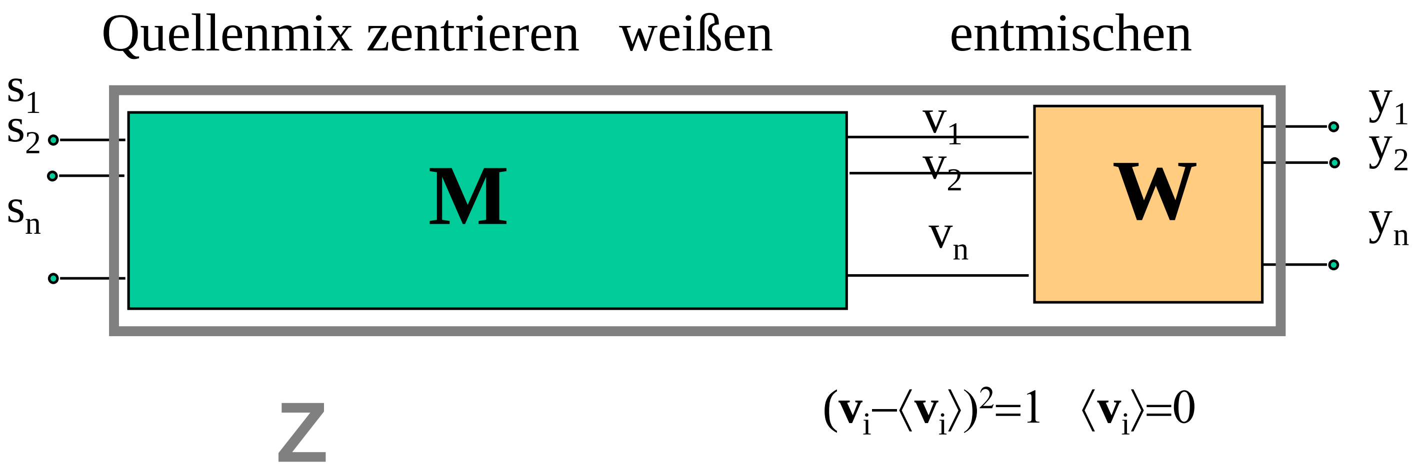


ICA - Algorithmen

Ziel: extremale Kurtosis (Delfosse, Loubaton 1995)

Extrema bei s_j = **unabh**. Komp, und $z_j = +/-1$

$$\text{kurt}(y) = \text{kurt}(\mathbf{w}^T\mathbf{v}) = \text{kurt}(\mathbf{w}^T\mathbf{M}\mathbf{s}) = \text{kurt}(\mathbf{z}^T\mathbf{s}) = \sum_{j=1}^{n} z_j^4 \text{kurt}(s_j)$$



$$(\mathbf{v}_i - \langle \mathbf{v}_i \rangle)^2 = 1 \quad \langle \mathbf{v}_i \rangle = 0$$

ICA - Algorithmen

- **Ziel:** maximale (minimale) Kurtosis bei $y = \mathbf{w}^T\mathbf{v}$

$$K(\mathbf{w}) = \langle(\mathbf{w}^T\mathbf{v})^4\rangle - 3\,\langle\,(\mathbf{w}^T\mathbf{v})^2\rangle^2 \; = \min$$

$$\mathbf{w}(t+1) = \mathbf{w}(t) + \gamma \text{ grad } K(\mathbf{w})$$

$$= \mathbf{w}(t) + \gamma\, 4\, (\langle(\mathbf{w}^T\mathbf{v})^3\mathbf{v}\rangle - 3|\mathbf{w}|^2\, \mathbf{w})$$

Bei $|\mathbf{w}| = 1$ ist die Richtung gegeben durch

$$\mathbf{w}(t+1) = \alpha(\langle(\mathbf{w}^T\mathbf{v})^3\mathbf{v}\rangle - \beta\mathbf{w})$$

Lernalgorithmus für einzelnes Neuron (Hyvarinen, Oja 1996)

$$\mathbf{w}(t+1) = \langle(\mathbf{w}^T\mathbf{v})^3\mathbf{v}\rangle - 3\,\mathbf{w}$$

mit $|\mathbf{w}| = 1$ **Fixpunktalgorithmus**

ICA - Algorithmen

- **Sequentielle Extraktion aller Komponenten**

Gegeben: Trainingsmenge {**v**(0)}

$$\mathbf{w}_1(t+1) = \langle(\mathbf{w}_1{}^T\mathbf{v})^3\mathbf{v}\rangle - 3\,\mathbf{w}_1 \quad \text{mit } |\mathbf{w}_1| = 1$$

Konvergenz zum 1. ICA-Vektor.

Dann neue Trainingsmenge durch $\mathbf{v}(1) = \mathbf{v}(0) - \mathbf{w}_1 y_1$

$$\mathbf{w}_2(t+1) = \langle(\mathbf{w}_2{}^T\mathbf{v})^3\mathbf{v}\rangle - 3\,\mathbf{w}_2 \quad \text{mit } |\mathbf{w}_2| = 1$$

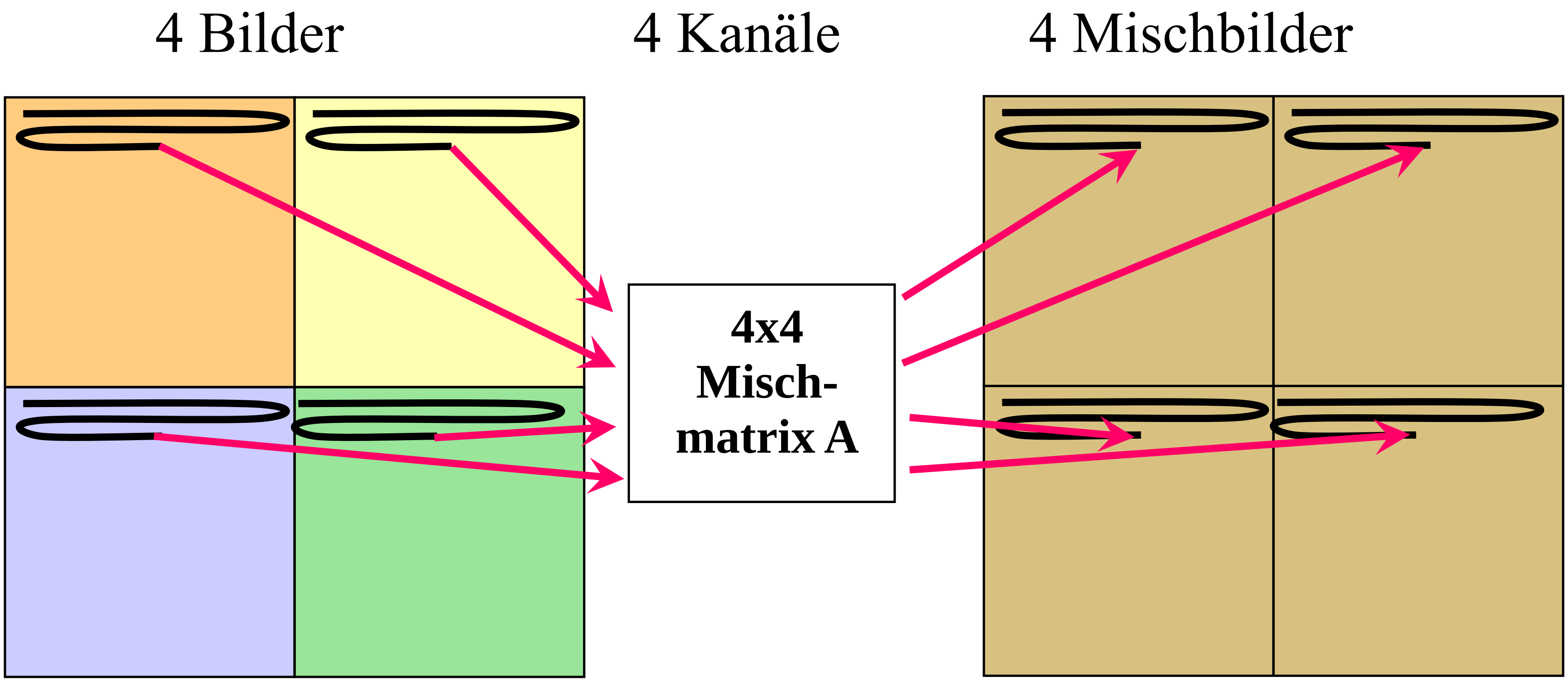
Konvergenz zum 2. ICA-Vektor, usw.

- **Schnellere Konvergenz: Orthogonalisierung**

$$\mathbf{w}_i(t+1) = \mathbf{w}_i(t) - \sum_{j=1}^{i-1} (\mathbf{w}_i\,\mathbf{w}_j)\,\mathbf{w}_j \qquad j < i$$

ICA Anwendung: Bildentmischung

4 Bilder, sequentiell gerastert = 4 Quellen *(Hyvarinen, Oja 1996)*

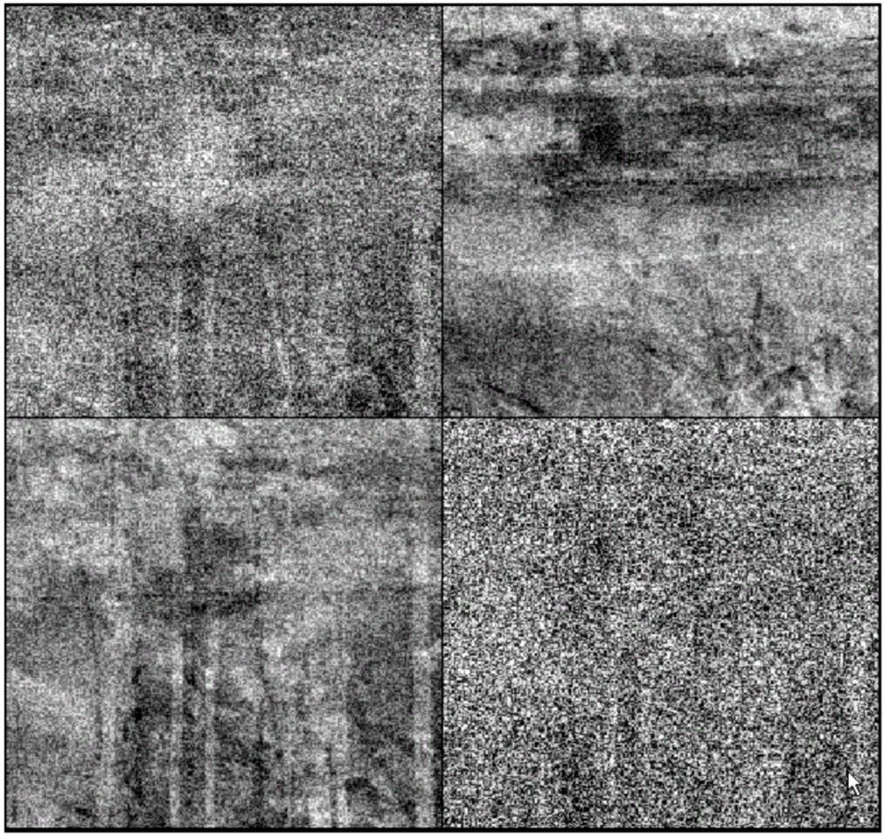


Automatische Entmischung ?

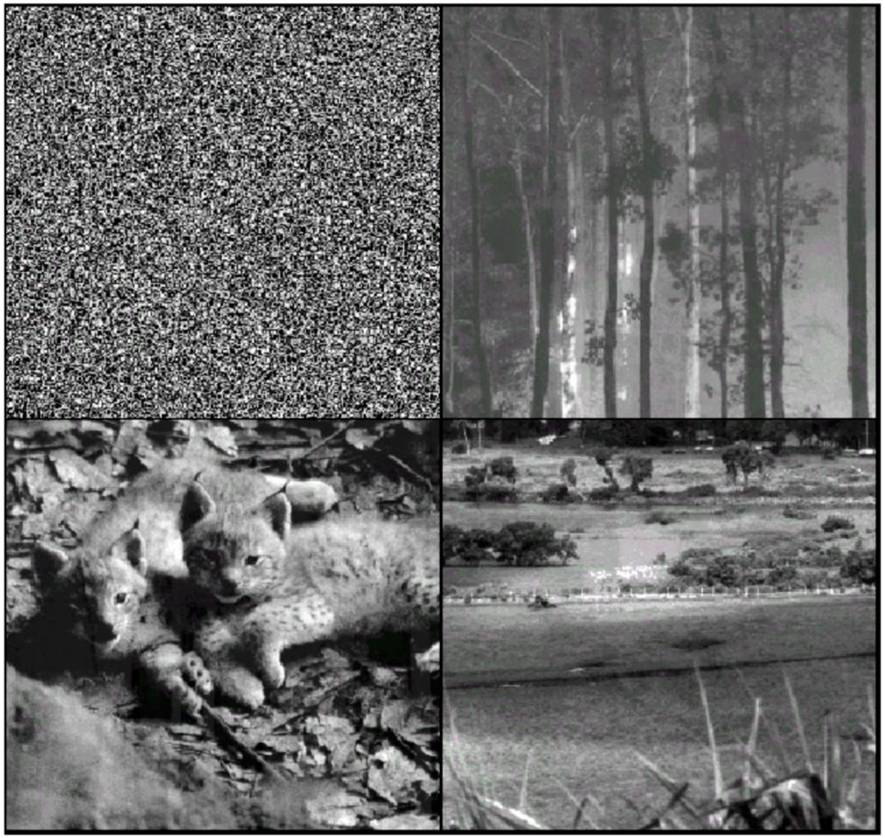
ICA Ergebnisse - Bildentmischung

4 Bilder, sequentiell gerastert = 4 Kanäle *(Hyvarinen, Oja 1996)*

Mischbilder



entmischte Bilder



ICA Ergebnisse -Audioanalyse

2 speakers

mixed sources / demixed sources

Fragen ?