UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO
PROGRAMA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

JÓISON OLIVEIRA PEREIRA
LAURA LETÍCIA ARAUJO OLIVEIRA CAMPOS
WENDSON CARLOS SOUZA DA SILVA

MODELAGEM E IMPLEMENTAÇÃO DO PROBLEMA DE FLUXO MÁXIMO E PROBLEMA DO FLUXO DE CUSTO MÍNIMO

JOÃO PESSOA – PB
2021

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Pesquisa Operacional (PO) é uma área do conhecimento que estuda, desenvolve e aplica métodos analíticos para fazer com que as melhores decisões sejam tomadas, nos mais diversos tipos de situação. Utilizando técnicas avançadas de modelagem matemática e algoritmos computacionais eficientes, a PO auxilia na análise de variados aspectos e configurações de problemas, permitindo a tomada de decisões mais assertivas.

Essa área busca otimizar sistemas de variadas complexidades evitando desperdícios de tempo e recursos, melhorando a performance e aumentando a lucratividade no tempo. Entre os problemas abordados pela Pesquisa Operacional, estão aqueles descritos na forma de fluxo em redes, como os discutidos posteriormente no presente relatório.

1.1 MOTIVAÇÃO

Os problemas de fluxo em rede, assim como problemas de fluxo de multicomodidade, podem ser expressos como problemas de programação linear, que envolve o planejamento de atividades para obter um resultado ótimo, entre todas as alternativas viáveis. Esta técnica utiliza um modelo matemático para descrever o problema em questão no qual todas funções matemáticas são necessariamente funções lineares.

O modelo a ser utilizado, por sua vez, é definido pelos elementos descritos a seguir.

1. Variáveis: representam as decisões a serem tomadas;
2. Restrições: são as limitações do modelo que representam as características do sistema real, através de um conjunto de equações e inequações;
3. Função Objetivo: representa o objetivo do problema, ou seja, a obtenção de um resultado ótimo.

Os Problemas do Fluxo Máximo e do Fluxo de Custo Mínimo, abordados a seguir, visam determinar o maior valor de fluxo que poderá ser enviado de um nó a outro e a maneira mais barata de enviar uma certa quantidade de fluxo através de uma rede, respectivamente. Ambos consistem em redes de fluxos e, consequentemente, podem ser tratados como problemas de programação linear.

1.2 OBJETIVOS

Este trabalho tem como objetivo definir o Problema do Fluxo Máximo em função de uma rede qualquer, apresentando um exemplo de rede de fluxo viável, e descrever como é feita transformação deste para um caso particular do Problema do Fluxo de Custo Mínimo. Também visa desenvolver a implementação da mudança mencionada, através da linguagem Python, e solucionar a questão 9.4-3 do livro "Introdução à Pesquisa Operacional", dos autores Hillier e Lieberman.

2 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

O problema proposto nessa secção está associado a um fluxo de rede que é composto por um nó de entrada e um de saída com capacidades ligadas a cada ramo. Visa-se encontrar a quantidade máxima de fluxo que flui do vértice de entrada para um vértice de saída denominado, respectivamente, origem e escoadouro. O modelo descrito é conhecido como um **Problema do Fluxo Máximo (PFM)**. A formulação desse problema em uma rede qualquer é regido pelos seguintes itens:

1. O fluxo deve ser enviado através de uma rede direcionada e conectada, que se origina de um nó, chamado origem e termina em outro nó, chamado escoadouro.
2. Os demais nós da rede são denominados nós de transbordo.
3. O fluxo através de um arco entre dois nós é permitido apenas na direção indicada pela seta, e a quantidade máxima de fluxo é determinada pela capacidade daquele arco. Na origem, todos os arcos indicam para o fluxo se afastar do nó. No escoadouro, ocorre o inverso.
4. A soma de todos os fluxos que entram em um nó de transbordo, que possui uma demanda igual a zero, deve ser igual a soma de todos os fluxos que saem.
5. Todo fluxo que sai do nó de origem deve chegar ao nó de escoadouro.
6. Como só é permitida a existência de um único nó de origem e um único nó de escoadouro, em casos de múltiplas entradas ou múltiplos destinos, podem existir nós *fantasmas* para representar um nó único por onde todo fluxo sairá ou chegará.

Considerando uma rede direcionada e conectada no qual os n nós incluem um nó de suprimento e um nó de demanda, a formulação geral do modelo pode ser feita através da equações abaixo. Em relação as variáveis de decisão temos que,

Xij – fluxo que passa no arco (i,j), de i para j.

Uij – capacidade do arco (i,j).

Nó 1 – nó de origem.

Nó t – nó de escoadouro.

A equação (2.1) define a função objetivo Z que direciona para a solução ótima dentre as possíveis decisões. Busca-se maximizar o fluxo na rede e a igualdade evidência o equilíbrio necessário nos nós de transbordo encontra-se na equação (2.2). As restrições gerais de capacidade servirão para estabelecer os moldes sob o qual a solução deve está inserido, retratando assim um cenário de um sistema realista. Isso pode ser visto nas equações em (2.3) que limita o fluxo baseado na capacidade do arco (i,j) e impossibilita soluções negativas.

$$Maximizar \quad Z = \sum_j X_{1j} = \sum_i X_{it} \tag{2.1}$$

$$\sum_i X_{ik} = \sum_j X_{kj}, \; \forall \; k \neq 1 \;\; e \;\; k \neq t. \tag{2.2}$$

$$X_{ij} \leq U_{ij}, \; \forall \; i,j \quad e \quad X_{ij} \geq 0, \; \forall \; i,j \tag{2.3}$$

De maneira ilustrativa, selecionou-se uma rede qualquer que resume o comportamento de uma transportadora. É pretendido maximizar o volume de caixas enviadas de sua matriz a duas empresas, passando por algumas filiais em cidades distintas. A rede explicitada na figura (1) é composta por uma origem (M), os um escoadouros (E1 e E2) e as possíveis rotas entre os nós de transbordo (A, B, C e D). Além disso, é apresentado uma tabela com as capacidades máximas das caixas que podem ser transportada entre cada arco, ou seja, entre duas filias distintas.

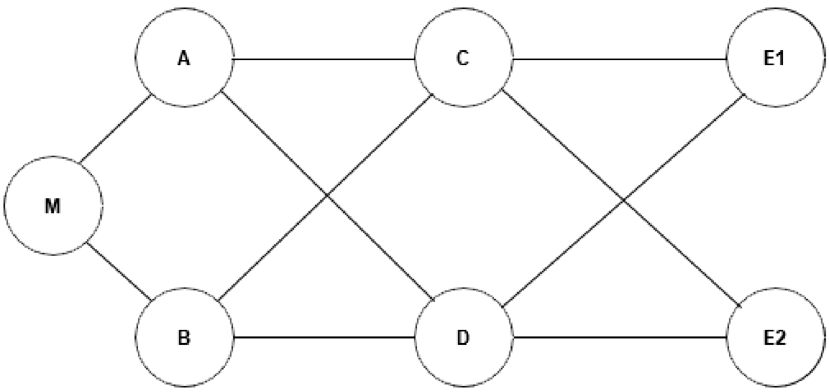

Figura 1 – Rede genérica para o problema

Tabela 1 – Capacidade máxima de fluxo entre os arcos

De / Para	A	B	De / Para	C	D	De / Para	E1	E2
M	50	60	A	40	60	C	50	80
			B	80	60	D	70	60

O problema acima para ser apresentado como um problema de fluxo máximo, é necessário atentar-se a algumas modificações. A princípio foi preciso criar um nó *fantasma* de destino, para que todo fluxo escoe em um único ponto, neste caso o nó *E*. Assim, *E1* e *E2* passará a ser nós de transbordo Em seguida, direcionar os arcos que representam as rotas entre os nós de transbordo. Todos os arcos foram posicionados no sentido da origem em direção ao escoadouro. Por fim, foram posicionadas todas as capacidades de fluxo em seus arcos correspondentes. O valor da capacidade fica posicionado à direita dos nós de onde o fluxo sairá, indicando que aquela é a sua capacidade residual. A nova rede formulada é ilustrada na figura (2)

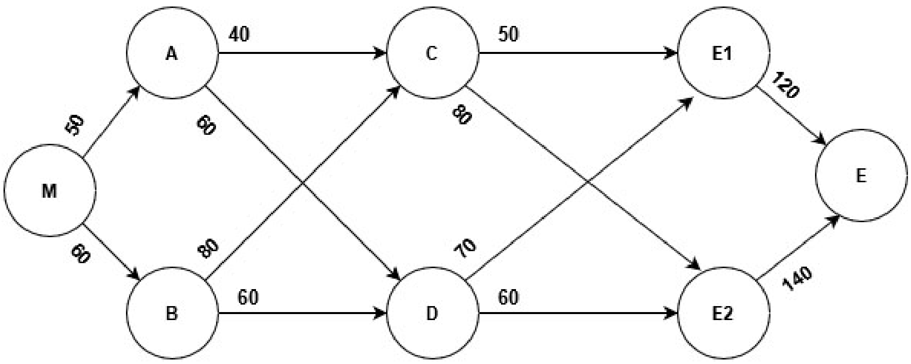

Figura 2 – Rede formulada para o problema do fluxo máximo

O modelo matemático é regido pelas função objetivo que busca maximizar *Z* = *Xma* + *Xmb*, equações de restrições e de não-negatividade como podem ser vistas a seguir

$$\begin{cases} X_{MA} = X_{AC} + X_{AD} \\ X_{MB} = X_{BC} + X_{BD} \\ X_{AD} = X_{DE1} + X_{DE2} \\ X_{BC} = X_{CE1} + X_{CE2} \\ X_{AC} = X_{CE2} + X_{CE1} \\ X_{BD} = X_{DE1} + X_{DE2} \\ X_{CE1} = X_{E1E} \\ X_{CE2} = X_{E2E} \\ X_{DE1} = X_{E1E} \\ X_{DE2} = X_{E2E} \end{cases} \qquad \begin{cases} X_{MA} \leq 50 \quad e \quad X_{MB} \leq 60 \\ X_{AD} \leq 60 \quad e \quad X_{BC} \leq 80 \\ X_{AC} \leq 40 \quad e \quad X_{BD} \leq 60 \\ X_{BC} \leq 80 \quad e \quad X_{CE1} \leq 50 \\ X_{CE2} \leq 80 \quad e \quad X_{DE1} \leq 70 \\ X_{DE2} \leq 60 \quad e \quad X_{E1E} \leq 120 \\ X_{E2E} \leq 140 \end{cases}$$

3 MODELAGEM

O **Problema do Fluxo de Custo Mínimo (PFCM)** visa encontrar uma solução que percorre um fluxo da origem ao escoadouro com menor custo possível. Para tal fim, e de forma análoga ao PFM, considerado-se o fluxo através de uma rede com capacidades de arcos limitadas. É considerado também um custo para o fluxo através de um arco, além da possibilidade de vários nós de origem e destino. A formulação desse problema é conduzida através das seguintes propriedades:

1. O fluxo deve ser enviado através de uma rede direcionada e conectada, que pode se originar de ao menos um nó de origem e chegar a ao menos um nó de demanda.
2. Os demais nós da rede, assim como no problema anterior, são denominados nós de transbordo.
3. O fluxo através de um arco entre dois nós é permitido apenas na direção indicada pela seta e a quantidade máxima de fluxo é determinada pela capacidade daquele arco.
4. O custo do fluxo através de cada arco é proporcional à quantidade desse fluxo, no qual o custo por fluxo unitário é conhecido.
5. Assim como no problema do fluxo máximo, pode haver a criação nós *fantasmas* para a resolução do problema.
6. Todo fluxo que sai dos nós de origem deve chegar aos nós de escoadouro.

Em relação ao equacionamento do PFCM, temos uma rede direcionada e conectada em que os *n* nós possuem ao menos um nó de origem e um nó de demanda. É necessário atentar-se ao fato de que quando o *Bij* for maior que zero, o nó é caracterizado como de suprimento. Caso seja menor que zero, o nó é de demanda. E, por fim, se for igual a zero é um nó de transbordo. A equação (3.3) delineia as restrições de capacidade que limita o fluxo que passará pelo arco, devendo este ser menor ou igual a capacidade do arco. Além disso, é importante delimitar a busca por solução positivas como determina equação de não-negatividade.

Xij – fluxo que passa no arco (i,j), de i para j.

Uij – capacidade do arco (i,j).

Cij – custo unitário do arco (i,j).

Bij – fluxo líquido gerado no nó *i*.

$$Minimizar \;\; Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij} \tag{3.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} - \sum_{j=1}^{n} X_{ji} = B_i, \; \forall \; i \tag{3.2}$$

$$X_{ij} \leq U_{ij}, \; \forall \;\; i, j \quad e \quad X_{ij} \geq 0, \; \forall \;\; i, j \tag{3.3}$$

De maneira à favorecer a construção do raciocínio relativo a transformação do problema do fluxo máximo para o problema do fluxo de custo mínimo, é apresentado uma rede exemplo que será construída ao decorrer das etapas de transformação. Deseja-se minimizar os custos de uma rede na qual se pretende enviar o máximo de fluxo da origem ao escoadouro. Tomando como exemplo o exercício a rede da Figura 2, temos que:

1º passo: Deve ser atribuída a ausência de custo para todos os arcos (Cij = 0).

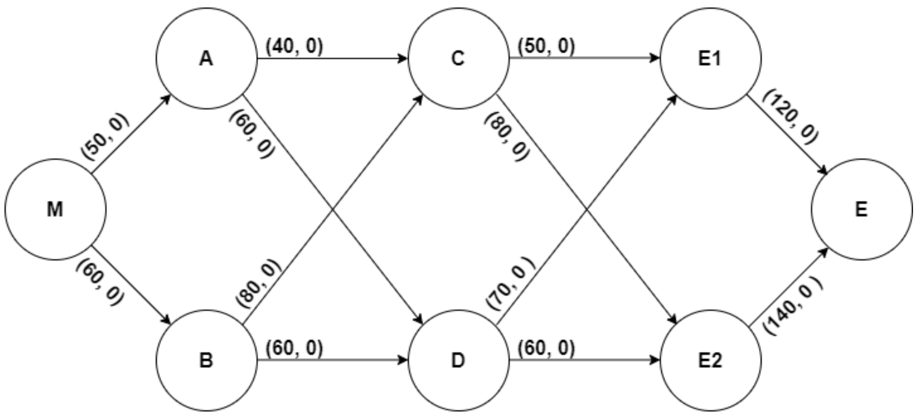

Figura 3 – Rede com a primeira alteração

O custo Cij deve ser igual a zero para todos os caminhos entre dois nós.

2º passo: Deve haver uma quantidade *F*, que será um limite superior ao fluxo viável máximo da rede, que é igual para os nós de origem e demanda. Também deve ser atribuída uma quantia de fluxo nula para todos os demais nós da rede.

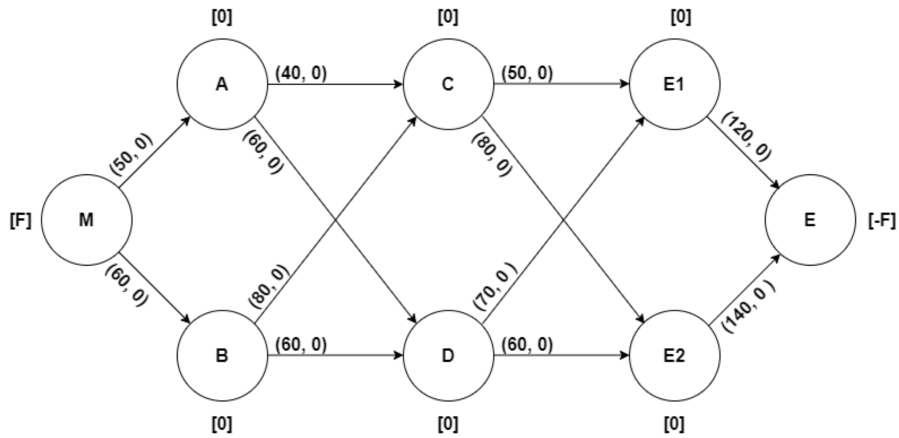

Figura 4 – Rede com a segunda alteração

Essa quantidade representa o fluxo líquido gerado nesses nós e, como definido anteriormente, deve ser positiva para o nó de suprimento e negativa para o nó de demanda. Para os nós de transbordo, esse fluxo Bij é igual a zero.

3ºpasso: Deve ser adicionado um novo arco conectando o nó de demanda ao nó de origem, com um custo unitário não nulo negativo (*Cij = -1*) e uma capacidade de arco infinita (*Uij* = ∞).

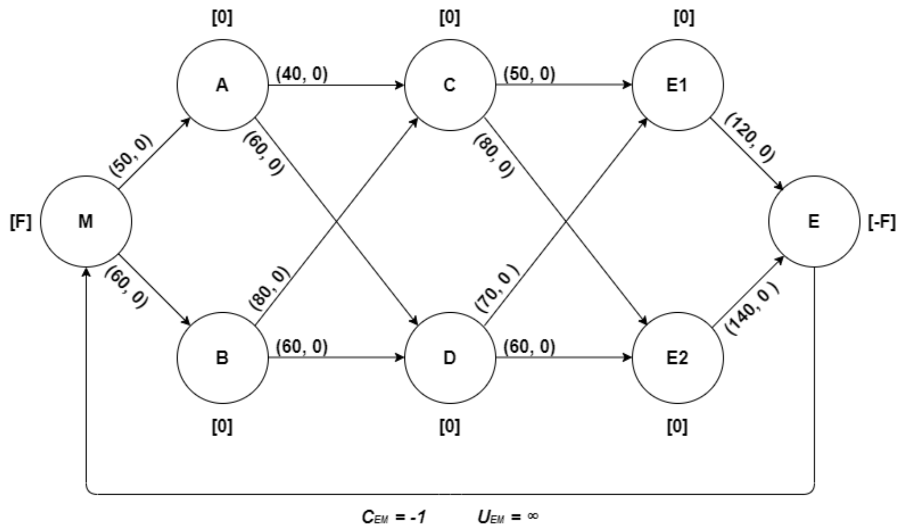

Figura 5 – Rede com a terceira alteração

Esta condição permite que o fluxo seja enviado integralmente através do novo arco adicionado, minimizando o custo da solução e maximizando o fluxo enviado pela rede. Isso ocorre devido ao custo unitário negativo do novo arco, consequência do sentido atribuído (do nó de demanda ao nó de origem). Como o fluxo Xij é diretamente proporcional ao custo Cij, quanto maior a quantidade de fluxo enviada pelo arco, mais negativa será a solução, minimizando o problema.

4 INSTRUÇÕES

4.1 MODELAGEM DO PROBLEMA

A modelagem de transformação do PFM em PFCM foi desenvolvida com o auxilio da biblioteca PuLP, um modelador de problemas de programação linear escrito em Python. Esse biblioteca possui a capacidade de integração com os principais solvers como o GUROBI, GLPK, COIN-OR CLP/CBC e CPLEX. O PuLP pode ser facilmente instalado utilizando o gerenciador de pacotes PIP a partir do seguinte comando:

```
pip install pulp
```

A biblioteca dispõe de classes e funções que estabelecem o modelo do problema e o configuram baseado nos parâmetros inseridos. No trecho de código abaixo é exibido a criação simplificada de um modelo genérico para otimização de um problema de fluxo em rede. Utilizou-se o solver CBC (Coin-or Branch and Cut) integrado ao PuLP para encontrar a solução ótima e os valores de cada arco.

```
#Criacao das variaveis do problema
for i in vList:
    for j in vList:
        if fluxo.existe_aresta(i, j):
            var[(i,j)]= LpVariable(name = f x{i}{j} , lowBound=0)
        else:
            continue
#Definicao do modelo
model2 = LpProblem("PFCM", LpMinimize)
#Adicao das restricoes
model2 += lpSum(lista_origem) - lpSum(lista_destino) == 0
for x in var.keys():
    if x != (no_transbordo, no_origem):
        model2 += var[x] <= fluxoCap.get_peso(x[0], x[1])
#Funcao objetivo
model2 += lpSum(lista_mult)
```

5 EXERCÍCIO

Nessa sessão será resolvido o item (a) da questão 9.4-3 do livro *Introdução à Pesquisa Operacional (LIEBERMAN, p.395)* proposto como parte desse trabalho. Na questão abordada é fornecida uma tabela correlacionado os vértices e as respectivas capacidades de fluxo que os interligam. A partir disso, criou-se um grafo direcionado que representa o problema do fluxo máximo. Como o problema apresentava três nós de origem, foi-se necessário criar um nó fantasma R conectado aos nós R1, R2 e R3. O nó de escoadouro é identificado pela letra T e os demais nós são de transbordo.

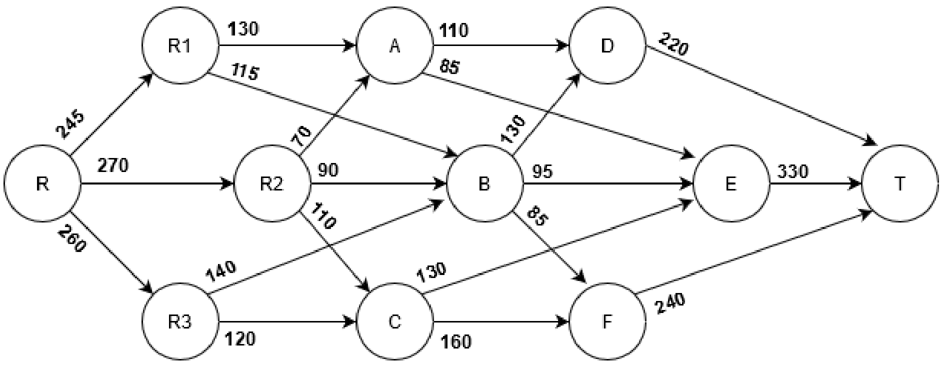

Figura 6 – Rede formulada a partir do problema de fluxo de máximo

Cada arco do problema é caracterizado por *Xij* sendo *i* o vértice de origem e *j* o vértice de destino. A ideia é maximizar o fluxo que chega no nó de destino. Dessa forma, temos que a função objetiva é:

$$Maximizar \quad Z = X_{DT} + X_{ET} + X_{FT}$$

Tem-se ainda as restrições do problema. É preciso respeitar a lei conservação do fluxo nos nós e a capacidade de cada arco.

$$
\begin{cases}
X_{RR1} = X_{R1A} + X_{R1B} \quad ; \quad X_{RR2} = X_{R2A} + X_{R2B} + X_{R2C} \quad ; \quad X_{RR3} = X_{R3B} + X_{R3C} \\
X_{R2B} = X_{BD} + X_{BE} + X_{BF} \quad ; \quad X_{R2C} = X_{CE} + X_{CF} \quad ; \quad X_{R3B} = X_{BD} + X_{BE} + X_{BF} \\
X_{R1A} = X_{AD} + X_{AE} \quad ; \quad X_{R1B} = X_{BD} + X_{BE} + X_{BF} \quad ; \quad X_{R2A} = X_{AD} + X_{AE} \\
X_{R3C} = X_{CE} + X_{CF} \quad ; \quad X_{AD} = X_{DT} \quad ; \quad X_{AE} = X_{ET} \\
X_{BD} = X_{DT} \quad ; \quad X_{BE} = X_{ET} \quad ; \quad X_{BF} = X_{FT} \\
X_{CE} = X_{CT} \quad ; \quad X_{CF} = X_{FT} \quad ;
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
X_{RR1} \le 245; \quad ; X_{RR2} \le 270; \quad X_{RR3} \le 260; \quad X_{R1A} \le 130; \\
X_{R1B} \le 115; \quad X_{R2A} \le 70; \quad X_{R2B} \le 90; \quad X_{R2C} \le 110; \\
X_{R3B} \le 140; \quad X_{R3C} \le 120; \quad X_{CE} \le 130; \quad X_{CF} \le 160; \\
X_{AD} \le 110; \quad X_{AE} \le 85; \quad X_{BD} \le 130; \quad X_{BF} \le 85; \\
X_{BE} \le 95; \quad X_{FT} \le 240; \quad X_{ET} \le 330; \quad X_{DT} \le 220;
\end{cases}
$$

REFERÊNCIAS

HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. Introdução à Pesquisa Operacional. 8. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2006.

O PROBLEMA DO FLUXO MÁXIMO. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/ pf/algoritmos_para_grafos/aulas/flow/>. Acesso em 26 abr. 2021.

PESQUISA OPERACIONAL: COMO UM RECURSO COM ORIGEM NA GUERRA PODE NOS AUXILIAR A TOMAR DECISÕES MAIS INTELIGENTES. Disponível em: <https://www.voitto.com.br/blog/artigo/pesquisa-operacional/>. Acesso em 26 abr. 2021.

PROBLEMA DE FLUXO DE CUSTO MÍNIMO. Disponível em: <https://www.ufjf.br/epd015/files/2010/06/fluxo_custo_minimo.pdf>. Acesso em 27 abr. 2021.

PULP 2.4. Disponível em: <https://pypi.org/project/PuLP/>. Acesso em 29 abr. 2021.