

Éléments de solution

Exercice 1 (pour tous)

1., 2. et 3.

n	6	101	361	2 021
Les diviseurs de n	1; 2; 3; 6	1; 101	1; 19; 361	1, 43; 47; 2 021
$S(n)$	12	102	381	2 112
$2S(n)$	24	204	762	4 224
$(n + 1)N(n)$	28	204	1 086	8 088

4. *a.* Chaque diviseur de n figure deux fois dans la somme $T(n)$, donc $T(n) = 2S(n)$.

b. $ab - a - b + 1 = (a - 1)(b - 1)$ fait apparaître $ab - a - b + 1$ comme produit de nombres positifs, d'où le résultat.

c. Application au cas $dq = n$.

d. Dans l'écriture de $T(n)$, on regroupe les termes par deux, et on « somme » les inégalités obtenues pour obtenir l'inégalité générale.

5. *a.* La seule façon de faire qu'une somme de termes tous positifs tous majorés par le même nombre soit égale au produit de ce majorant par le nombre de termes est que chaque terme soit égal à ce majorant. On a donc, pour chaque diviseur de n : $(d - 1)(q - 1) = 0$.

b. Les seules valeurs admissibles pour d sont donc 1 ou n . n est donc un nombre premier.

c. Réciproquement, si n est premier, ses diviseurs sont 1 et n , leur somme est $n + 1$ et leur effectif 2, donc l'égalité (*) est satisfaite.

Exercice 2 (spécialistes)

A. Quelques exemples

1. *a.* $7 = 2 + 5$ et $7^2 = 2 \times 22 + 5$, donc 7 est 22-décomposable.

On peut essayer les décompositions possibles de 7 en sommes d'entiers inférieurs :

$0 \times 10 + 7 = 7$, $1 \times 10 + 8 = 18$, $2 \times 10 + 5 = 25$, $3 \times 10 + 4 = 34$, $4 \times 10 + 3 = 43$, 5×10 , 6×10 et 7×10 sont supérieurs à 49. Donc 7 n'est pas 10-décomposable.

b. $45 = 20 + 25$ et $2\,025 = 20 \times 100 + 25$ donc 45 est 100-décomposable.

2. *a.* Dire que a est 1-décomposable, c'est dire qu'il existe des entiers q et r tels que $a = q + r$

et $a^2 = q \times 1 + r$, ce qui nécessite $a = a^2$. 0 et 1 sont donc les seuls possibles, et ils possèdent effectivement la propriété, les couples associés étant (0, 0) et (1, 0) (et aussi (0, 1)).

b. Dire que a est 2-décomposable, c'est dire qu'il existe des entiers q et r tels que $a = q + r$ et $a^2 = 2q + r$, ce qui nécessite que $a(a - 1) = q$. Comme $q \leq a$ et qu'on parle d'entiers positifs, il s'ensuit que $a - 1 \leq 1$. Les trois possibilités sont donc 2, 1 et 0. On vérifie comme précédemment que ces trois valeurs conviennent.

3. *a.* $N^2 = N \times N = 0$ donne la réponse, N est N -décomposable.

b. $(N - 1)^2 = (N - 2) \times N + 1$ donne la réponse : $(N - 1)$ est N -décomposable.

c. Une égalité telle que $4 = a \times N + b$ ne saurait avoir lieu que pour $a = 0$, sinon le second membre est strictement supérieur au premier, et pour $a = 0$, on obtient $4 = 2$.

B. Une étude des nombres N -décomposables

1. *a.* Si k est N -décomposable, il existe des entiers q et r tels que $k = q + r$ et $k^2 = q \times N + r$. Comme q et r sont inférieurs ou égaux à k , on en déduit $k^2 \leq k(N + 1)$, et $k \leq N + 1$.

Est-il possible que k soit égal à $N + 1$?

Si cela était, il existerait un entier a tel que $(N+1)^2 = aN + (N+1-a)$, ou encore $N(N+1) = a(N-1)$, qui conduit à $a > N+1$, impossible dans notre hypothèse. Donc $k \leq N$.

b. Les entiers 3-décomposables sont inférieurs ou égaux à 3 d'après ce qui précède, et les résultats de la partie A permettent de conclure positivement pour 3 et 2. 1 et 0 sont, quel que soit N , N -décomposables (avec les couples $(0,0)$ et $(0,1)$).

La partie A a aussi résolu le cas de 2 comme non 4-décomposable. Il ne reste donc que 4, 3, 1 et 0 qui le soient.

2. Supposons que pour un couple (k, N) , il existe deux entiers p et q tels que :

$$\begin{cases} k^2 = pN + k - p \\ k^2 = qN + k - q \end{cases}$$

Nécessairement, $(N-1)(p-q) = 0$ et comme $N \geq 2$ l'unicité est démontrée.

3. a. On peut écrire $k^2 = qN + k - q$ (en utilisant directement $k = q + r$), ou encore $k^2 - k - q(N-1) = 0$. L'existence du couple (q, r) induit le fait que k est solution de cette équation.

b. Réciproquement, s'il existe un entier q compris entre 0 et k tel que k soit solution de cette équation, alors en posant $r = k - q$, on revient bien au système (S).

c. Essayons d'écrire différemment k et $N-1$ pour faire apparaître l'équation précédente :

$$\begin{aligned} k^2 - k &= 2^{2p-2}(2^p - 1)^2 - 2^{p-1}(2^p - 1) = 2^{p-1}(2^p - 1)(2^{2p-1} - 2^{p-1} - 1) \\ k^2 - k &= 2^{p-1}(2^p - 1)(2^{2p-1} - 2^p + 2^{p-1} - 1) = 2^{p-1}(2^p - 1)(2^p + 1)(2^{p-1} - 1) \\ k^2 - k &= 2^{p-1}(2^{p-1} - 1)(2^{2p} - 1) \end{aligned}$$

Dans cette dernière égalité, on reconnaît le facteur $N-1$, précédé de $2^{p-1}(2^{p-1} - 1)$, entier inférieur à k .

4. Calculons $(N-k)^2 - (N-k) = N(N-1) + k^2 - k - 2Nk + 2k = (N-1)(N-2k+q)$ (la lettre q qui apparaît dans cette dernière expression est liée précédemment à k). Le dernier facteur est bien inférieur à $N-k$ (c'est $N-k-(k-q)$).

5. Posons $N = 2k$ et écrivons la condition nécessaire et suffisante établie plus haut : il existe un entier q compris entre 0 et k tel que $k^2 - k - q(2k-1) = 0$. On a donc $k(k-1) = q(2k-1)$, qui assure que $k(k-1)$ est un multiple de $2k-1$. D'où on tire que $4k(k-1)$, qui est égal à $(2k-1)^2 - 1$ est lui aussi un multiple de $(2k-1)$ et donc 1 en est un aussi. Impossible.

6. On a montré que les entiers N -décomposables sont inférieurs à N . D'après la question précédente, $\frac{N}{2} - 1$ un entier dans le cas où N est pair - ne l'est pas. Par ailleurs, si k est N -décomposable, $N-k$ l'est aussi. On peut donc regrouper les entiers N -décomposables par paire $\{k, N-k\}$. Il y en a donc un nombre pair.

7. Posons $N-1 = p$. La condition nécessaire et suffisante : il existe un entier q inférieur ou égal à k tel que $k(k-1) - qp = 0$ indique que p divise $k(k-1)$, et comme p est un nombre premier, il divise un des deux facteurs. Les possibilités sont $k = 0, k = 1, k = N-1, k = N$.

8. La condition $k(k-1) = qN$. Montre que les nombres N tels que k soit N -décomposable sont des diviseurs de $k(k-1)$. Il y en a donc un nombre fini.

Exercice 3 (non spécialistes)

1. a. proposition fausse car, par exemple, $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} = \frac{2}{1}$ et ce n'est pas une fraction égyptienne.

b. proposition vraie car pour tous les entiers n et p non nuls, $\frac{1}{n} \times \frac{1}{p} = \frac{1}{np}$ et np est un entier non nul.

c. proposition fausse car, par exemple, $\frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{1}$ et ce n'est pas une fraction égyptienne.

2. a. On peut proposer les deux décompositions $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ et $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. On en déduit qu'il peut ne pas y avoir unicité de la décomposition égyptienne d'un nombre rationnel.

b. $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$ et $\frac{9}{10} = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$

3. a. Comme la base de la pyramide SABCD est un carré et ses faces sont des triangles isocèles en S , la somme des longueurs des arêtes de cette pyramide SABCD est $4AB + 4SA$.

Donc $4AB + 4SA = \frac{4}{30} + \frac{4}{20} = \frac{2}{15} + \frac{1}{5} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ qui est une fraction égyptienne. On en déduit que SABCD est une pyramide égyptienne.

b. Pour les mêmes raisons que dans le cas particulier de la question **a.**, $4AB + 4SA = \frac{4}{p} + \frac{4}{q}$.

Si $p < 4$ ou $q < 4$, alors, puisque les nombres considérés sont strictement positifs, on a $\frac{4}{p} > 1$ ou $\frac{4}{q} > 1$ et, dans les deux cas, $4AB + 4SA > 1$. Donc $4AB + 4SA$ ne peut pas être une fraction égyptienne (qui est nécessairement strictement inférieure à 1) donc SABCD n'est pas une pyramide égyptienne.

On en déduit que si SABCD est une pyramide égyptienne alors $p \geq 4$ et $q \geq 4$.

c. SABCD est une pyramide égyptienne si et seulement s'il existe un entier naturel non nul n tel que $4AB + 4SA = \frac{1}{n}$.

Or, en réduisant au même dénominateur, $4AB + 4SA = \frac{4}{p} + \frac{4}{q} = \frac{4p+4q}{pq}$

Donc SABCD est une pyramide égyptienne si et seulement s'il existe un entier naturel non nul n tel que $n = \frac{pq}{4p+4q}$.

d. Par ce qui précède, SABCD est une pyramide égyptienne si et seulement s'il existe un entier naturel non nul n tel que $n = \frac{pq}{4p+4q}$ qui s'écrit $4n(p+q) = pq$.

Pour tous entiers naturels p et q non nuls, $4n(p+q)$ est un nombre pair.

Si p et q sont des nombres impairs alors pq est aussi un nombre impair.

L'égalité $4n(p+q) = pq$ est impossible si p et q sont impairs.