MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE ET
DE LA JEUNESSE

Olympiades académiques de mathématiques

Académie de Paris

Mercredi 11 mars 2020

de 10 heures 10 à 12 heures 10

Exercices académiques

À traiter par les équipes candidates de voie générale ayant choisi la spécialité mathématiques

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux équipes candidates qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Chaque équipe traite les **deux exercices** et rend une **copie commune.**

Les échanges entre membres d'une même équipe sont autorisés, sans pour autant gêner le travail des autres équipes.

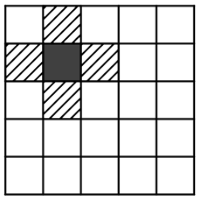
Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercice académique 1

(à traiter par toutes les équipes candidates)

Jardin fleuri

Dans un jardin carré quadrillé en carreaux, on dit que deux carreaux sont *adjacents* lorsqu'ils ont exactement un côté commun. Par exemple, dans le jardin carré ci-contre, les carreaux hachurés sont les carreaux adjacents au carreau noir.



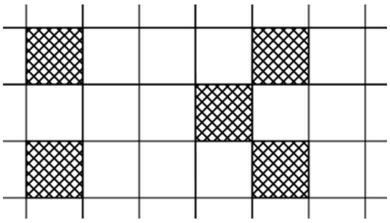
Dans ce jardin, on cherche à cultiver des fleurs un peu particulières.
Dans chaque carreau, il pousse au plus une fleur.
Dans tout l'exercice, toute case occupée par une fleur sera quadrillée.

Les deux parties sont indépendantes.

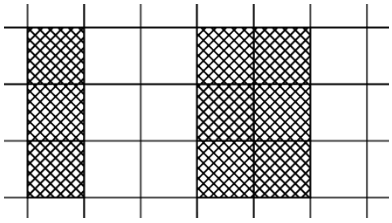
Partie A : un jardin déterministe

Dans cette partie, les fleurs du jardin carré obéissent, jour après jour, aux règles suivantes :

- S'il y a 2 ou 3 fleurs sur les carreaux adjacents à un carreau donné alors, le jour suivant, il naîtra une fleur dans ce carreau.

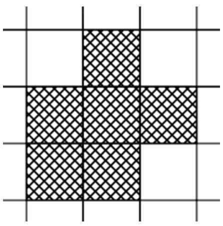


jour J

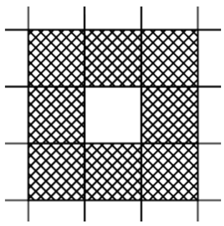


jour J + 1

- S'il y a 4 fleurs sur les carreaux adjacents à un carreau donné alors, le jour suivant, aucune fleur ne naîtra dans ce carreau et si une fleur y était, elle mourra. On notera que, sur d'autres carreaux, d'autres fleurs peuvent naître, comme dans l'exemple suivant :



jour J



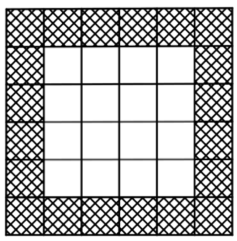
jour J + 1

- Enfin, les jardiniers s'assurent que la bordure est toujours complètement fleurie.

Au jour 0, on suppose que seuls les carreaux de la bordure contiennent une fleur.

1. On suppose dans cette question que le jardin est un carré de côté 6 carreaux.

a. À partir de la représentation ci-contre au jour 0, donner le jardin obtenu au jour 1 et au jour 2.
On pourra utiliser à cet effet les damiers fournis en annexe et les coller sur la copie.



jour 0

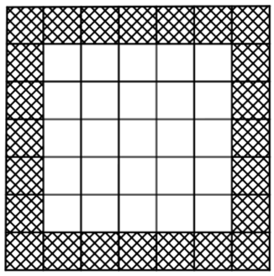
b. Justifier le fait que les jardins obtenus aux jours 3 et 5 sont dans la même configuration.
On pourra utiliser à cet effet les damiers fournis en annexe et les coller sur la copie.

c. Expliquer le comportement du jardin dans le futur.

2. On suppose dans cette question que le jardin est un carré de côté 7 carreaux.

a. À partir de la représentation ci-contre aux jour 0, donner le jardin obtenu au jour 1 et au jour 2.
On pourra utiliser à cet effet les damiers fournis en annexe.

b. Expliquer le comportement du jardin dans le futur.



jour 0

3. Est-il possible de considérer que, dans le cas général, le jardin garde toujours le même aspect à partir d'une certaine date ?

Partie B : un jardin probabiliste

On considère deux nombres réels p et q de l'intervalle $[0,1]$.
Le jardin est toujours considéré carré. Chaque carreau de la bordure contient chaque jour une fleur.
Dans cette partie, chaque case obéit à de nouvelle règles, aléatoires, qui remplacent celles vues en partie A :

- Pour chaque carreau ne contenant pas de fleur au jour J, une fleur naitra au jour $\mathrm{J}+1$ avec une probabilité p et ce indépendamment des autres carreaux.

- En dehors de ceux de la bordure, pour chaque carreau contenant une fleur au jour J, la fleur mourra au jour $\mathrm{J}+1$ avec une probabilité q et ce indépendamment des autres carreaux.

- Les valeurs p et q sont fixées une seule fois pour l'ensemble des cases et des jours étudiés.

Au jour 0, on suppose que seuls les carreaux de la bordure contiennent une fleur.

1. On suppose que $p = q = 1$.
On considère un jardin carré de n carreaux de côté, où n est un entier naturel non nul
Décrire l'évolution du jardin au fil des jours qui suivent le jour 0.

2. On suppose que $p = q = \frac{1}{2}$.
On considère un jardin carré de 6 carreaux de côté, combien de fleurs peut-on espérer voir de fleurs au jour 1 ? au jour 2 ? *On pourra utiliser un arbre pondéré.*

3. On fixe à présent deux valeurs quelconques de p et q dans l'intervalle $[0; 1]$.
On considère un jardin carré de 6 carreaux de côté. En fonction de p et q, à combien de fleurs en tout peut-on s'attendre en moyenne au jour 1 ? au jour 2 ?

Exercice Académique n°2
(à traiter par les équipes candidates de voie générale ayant choisi la spécialité mathématiques)

Les nombres préférés de Véra

Les deux propriétés suivantes pourront être utilisées dans cet exercice sans démonstration :

- *Propriété 1. Pour tout entier naturel n, on a $n < 2^n$;*
- *Propriété 2. Pour tout entier naturel n, il existe un unique entier a tel que $2^a \leq n < 2^{a+1}$.*

Dans tout l'exercice, tous les nombres considérés sont des entiers naturels.

Véra a des goûts particuliers en matière de nombres :

- **Règle 1** : elle préfère n'importe quelle puissance entière de 2 à n'importe quel autre nombre entier naturel, par exemple, Véra préfère le nombre 2 au nombre 7 ;
- **Règle 2** : de deux puissances entières de 2, Véra préférera toujours la plus grande, ainsi Véra préfère le nombre 64 au nombre 4.
- **Règle 3** : si deux nombres ne sont pas des puissances de 2, Véra préfère celui dont l'écart à la puissance de deux la plus proche est la plus faible.
  En cas d'égalité de ces écarts, elle choisira le plus grand des deux nombres.
  Ainsi, Véra préfère le nombre 5 au nombre 10, mais elle préfère au nombre 5, le nombre 9.
  En effet, en notant d_a la distance du nombre a à la puissance de 2 la plus proche,
  on a $d_5 = d_9 = 1$, tandis que $d_{10} = 2$.

Dans toute la suite, quand Véra préfère le nombre b au nombre a, on notera $a \ll b$.
Avec les exemples précédents, on a donc $7 \ll 2$; $4 \ll 64$; $10 \ll 5$ et $5 \ll 9$.

1. **a.** Quel nombre Véra préfère-t-elle entre le nombre 1 et le nombre 20 ?
Même question pour les nombres 127 et 254.
b. Justifier que l'on a, pour tout entier naturel a : $a \ll 2^a$.
c. À-t-on, pour tout entier naturel a, $a \ll 2a$?

2. Démontrer que, pour tout entiers naturels a, b, si $a \ll b$ et $b \ll a$, alors $a = b$.

3. Démontrer que, pour tout entiers naturels a, b, c, si $a \ll b$ et $b \ll c$, alors $a \ll c$.
On pourra alors écrire $a \ll b \ll c$, ou encore $a_1 \ll a_2 \ll \cdots \ll a_n$ pour n entiers naturels.

4. Ranger les entiers de 1 à 20 selon l'ordre de préférence (croissant) de Véra.

5. Soit p, un nombre entier naturel. Parmi les entiers naturels inférieurs ou égaux à p, on note ❤p le nombre préféré de Véra.

a. Déterminer ❤20 et ❤2020.
b. Soit k un entier naturel non nul. Exprimer en fonction de k les valeurs de ❤2^k et ❤$(2^k - 1)$.
c. Établir que, pour tout entier naturel p, il existe un unique naturel q vérifiant $2^q =$ ❤p.
On appelle le nombre q le « nombre associé au nombre p ».
d. Quel est le nombre q associé à 20 ? Celui associé à 2020 ?
e. Quel est l'ensemble des nombres p, entiers naturels, tel que ❤$p = p$?
f. Établir que pour tout entier naturel p, ❤$p <$ ❤$(2p)$. A-t-on aussi ❤$p \ll$ ❤$(2p)$?
g. Démontrer que, pour tout entiers naturels a et b, si $a \ll b$, alors ❤$a \ll$ ❤b.

Annexe – Exercice 1

Jardins carrés de côté 6 et 7.