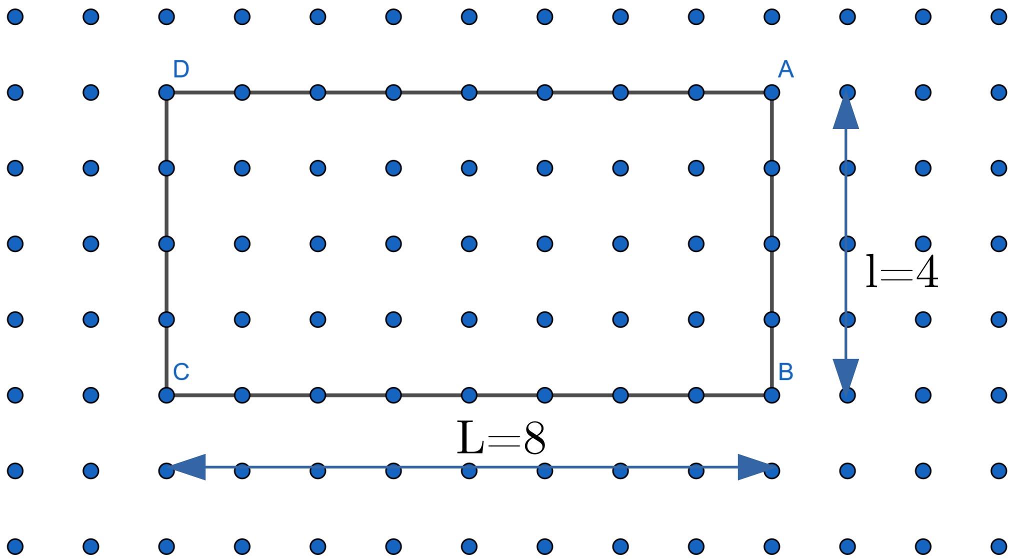
Exercice I. (formule de Pick)

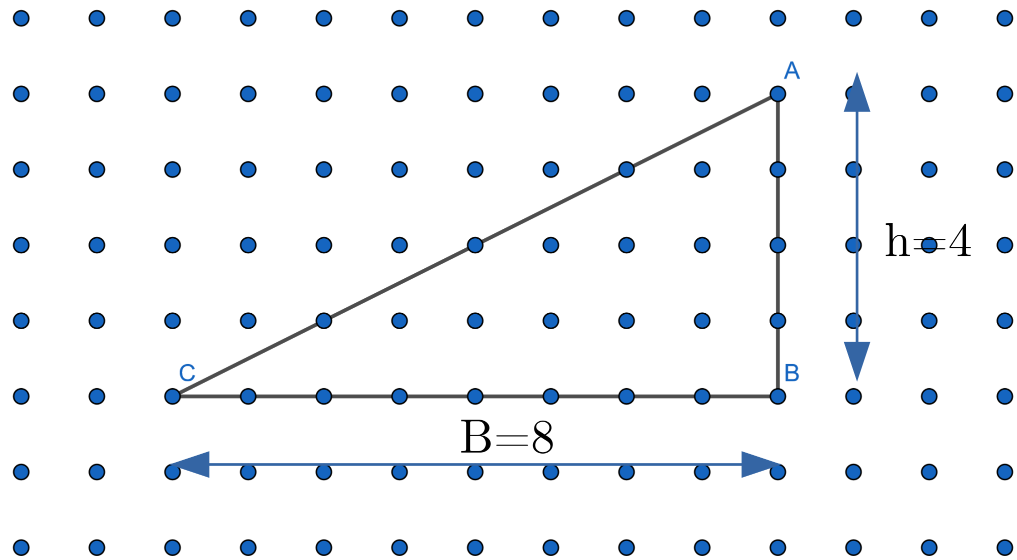
1. Calculer l'aire des figures suivantes :

   a. le rectangle ABCD,



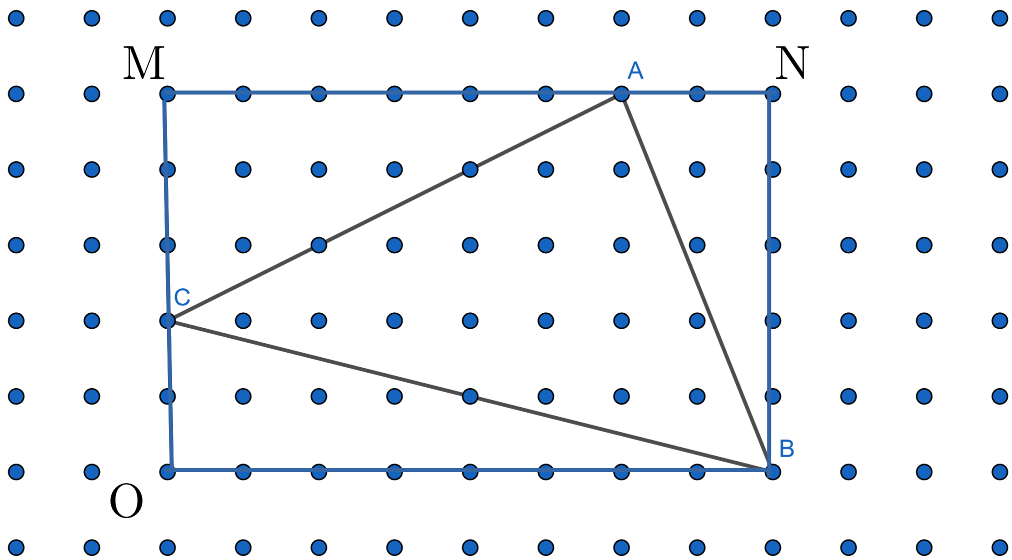
L'aire du rectangle ABCD est : $A_{ABCD}=L\times l=8\times 4=32$.

   b. le triangle ABC rectangle en B,



L'aire du triangle rectangle en B ABCest : $A_{ABC} = \frac{B \times h}{2} = 8 \times 4 = 16$.

c. le triangle quelconque ABC (on pourra inscrire ce triangle dans un grand rectangle et faire apparaître trois triangles rectangles).



L'aire du triangle ABC est : $A_{ABC}=A_{MNBO}-A_{MAC}-A_{ANB}-A_{CBO}$.

$A_{ABC}=8\times5-\frac{6\times3}{2}-\frac{2\times5}{2}-\frac{8\times2}{2}=18$.

Formule de Pick : $S=\frac{b}{2}+i-1$, où i est le nombre de points intérieurs et b est le nombre de points du bord.

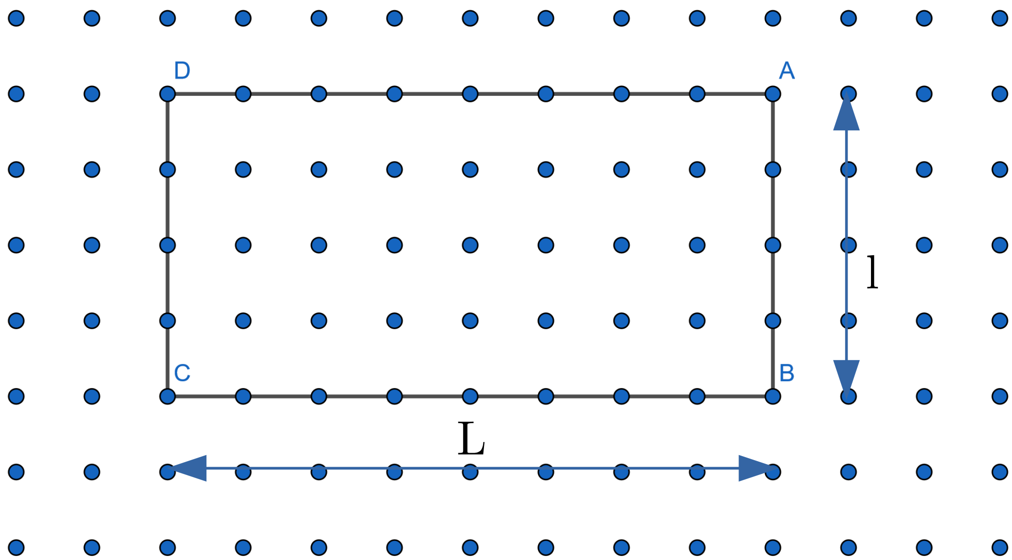
2. Vérifier que la formule de Pick est vraie pour les figures des questions 1.a, 1.b et 1.c.

- Pour le rectangle ABCD : i=21 et b=24. Par suite : $S_{ABCD}=\frac{24}{2}+21-1=32$.
- Pour le triangle rectangle ABC : i=9 et b=16. Par suite : $S_{ABC}=\frac{16}{2}+9-1=16$.
- Pour le triangle quelconque ABC : i=16 et b=6. Par suite : $S_{ABC}=\frac{6}{2}+16-1=18$.

  Conclusion : la formule de Pick est vraie pour les figures des questions 1.a, 1.b et 1.c.

3. Démontrer la formule de Pick pour :

   a. les rectangles dont les côtés suivent les points du quadrillage (du type de la question 1.a).



L'aire du rectangle ABCD est : $A_{ABCD}=L.l$.

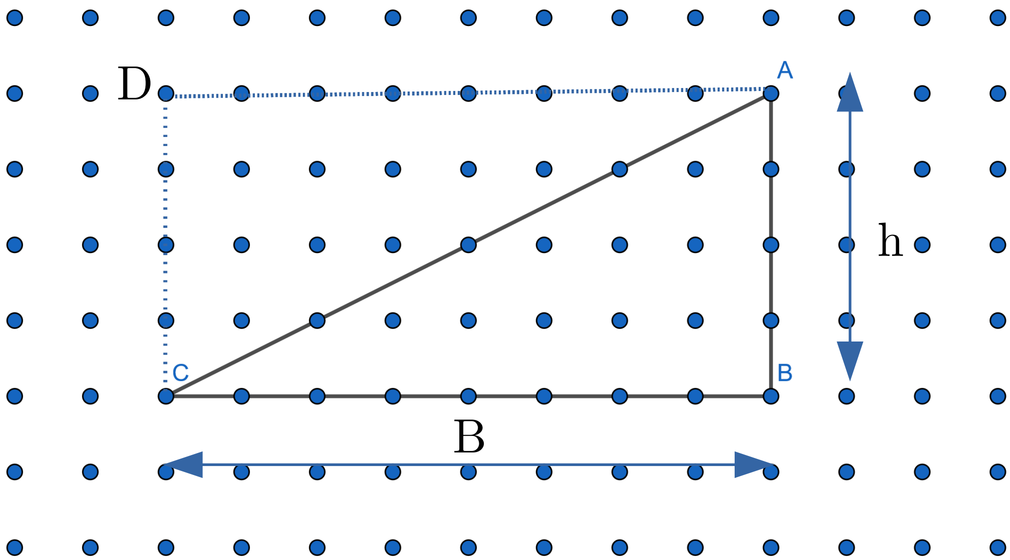
On a :

- i=(L-1)(l-1)=Ll-l-L+1,
- b=2(L+1)+2(l-1)=2L+2l.

Donc : $i+\frac{b}{2}-1=L.l-l-L+1+\frac{2(L+l)}{2}-1=L.l=A_{ABCD}$.

Conclusion : la formule de Pick est vraie pour les rectangles dont les côtés suivent le quadrillage.

b. les triangles rectangles dont les côtés perpendiculaires suivent les points du quadrillage (du type de la question 1.b),



On a : $A_{ABC}=\frac{B.h}{2}$.

Soit D le symétrique de B par rapport au milieu de l'hypoténuse de ABC : ABCD est un rectangle dont ABC constitue une moitié.

Dans le triangle ABC : on note i_{ABC} le nombre de points à son intérieur et $b_{ABC}=c_{ABC}+d_{ABC}$ le nombre de points sur son bord (c_{ABC} étant le nombre de points sur les cathètes et d_{ABC} le nombre de points sur l'hypoténuse auxquels on a retiré les 2 points extrémaux).

Dans le rectangle ABDC : on note i_{ABCD} le nombre de points à son intérieur et b_{ABCD} le nombre de points sur son bord.

On a alors :

- $i_{ABCD}=2.i_{ABC}+d_{ABC}$ (le nombre de points intérieurs au triangles ABC et ADC – soit deux fois le nombres de points intérieurs à ABC augmentés de ceux de l'hypoténuse),
- $b_{ABCD}=2.c_{ABC}-2$ (deux fois le nombre de points sur les cathètes auxquels on retire les deux sommets en commun).

Ainsi : $A_{ABC}=\frac{1}{2}A_{ABCD}$,

$A_{ABC}=\frac{1}{2}(i_{ABCD}+\frac{b_{ABCD}}{2}-1)$,

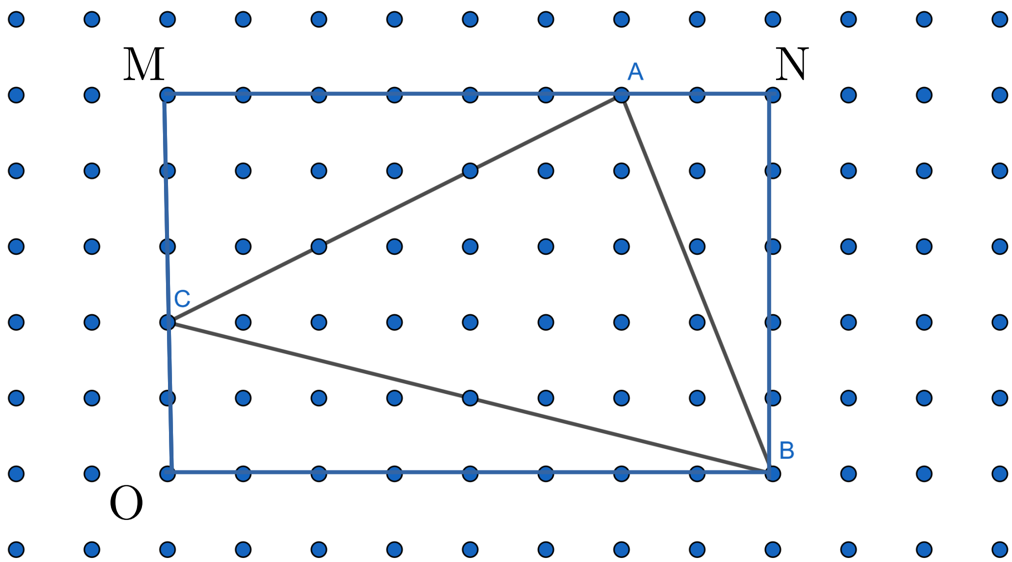
$A_{ABC}=\frac{1}{2}(2.i_{ABC}+d_{ABC}+\frac{2c_{ABC}-2}{2}-1)$,

$A_{ABC}=i_{ABC}+\frac{d_{ABC}}{2}+\frac{c_{ABC}-1}{2}-\frac{1}{2}$,

$A_{ABC}=i_{ABC}+\frac{d_{ABC}+c_{ABC}}{2}-\frac{2}{2}$,

$A_{ABC}=i_{ABC}+\frac{b_{ABC}}{2}-1$, qui est le résultat voulu.

c. les triangles quelconques (du type de la question 1.c).



On a : $A_{ABC}=A_{MNBO}-A_{MAC}-A_{ANB}-A_{CBO}=A_{MNBO}-(A_{MAC}+A_{ANB}+A_{CBO})$.

Reprenant les notations précédentes, il vient :

$A_{ABC}=(i_{MNBO}+\frac{b_{MNBO}}{2}-1)-(i_{ANB}+\frac{b_{ANB}}{2}+i_{BOC}+\frac{b_{BOC}}{2}+i_{CMA}+\frac{b_{CMA}}{2}-3)$;

$A_{ABC}=(i_{MNBO}+\frac{b_{MNBO}}{2}-1)-(i_{ANB}+i_{BOC}+i_{CMA}+\frac{c_{ANB}+c_{BOC}+c_{CMA}+d_{ANB}+d_{BOC}+d_{CMA}}{2}-3)$.

Utilisant :

- $i_{MNBO}=i_{ABC}+i_{ANB}+i_{BOC}+i_{CMA}+d_{ANB}+d_{BOC}+d_{CMA}$,
- $b_{MNBO}=c_{ANB}+c_{BOC}+c_{CMA}-3$.

il vient :

$A_{ABC}=i_{ABC}+i_{ANB}+i_{BOC}+i_{CMA}+d_{ANB}+d_{BOC}+d_{CMA}+\frac{c_{ANB}+c_{BOC}+c_{CMA}-3}{2}-1$

$-i_{ANB}-i_{BOC}-i_{CMA}-\frac{c_{ANB}+c_{BOC}+c_{CMA}+d_{ANB}+d_{BOC}+d_{CMA}}{2}+3$

et :

$$A_{ABC}=i_{ABC}+i_{ANB}+i_{BOC}+i_{CMA}+d_{ANB}+d_{BOC}+d_{CMA}-\frac{3}{2}$$;
$$-i_{ANB}-i_{BOC}-i_{CMA}-\frac{d_{ANB}+d_{BOC}+d_{CMA}}{2}+2$$

$$A_{ABC}=i_{ABC}+\frac{d_{ANB}+d_{BOC}+d_{CMA}-3}{2}+2$$;

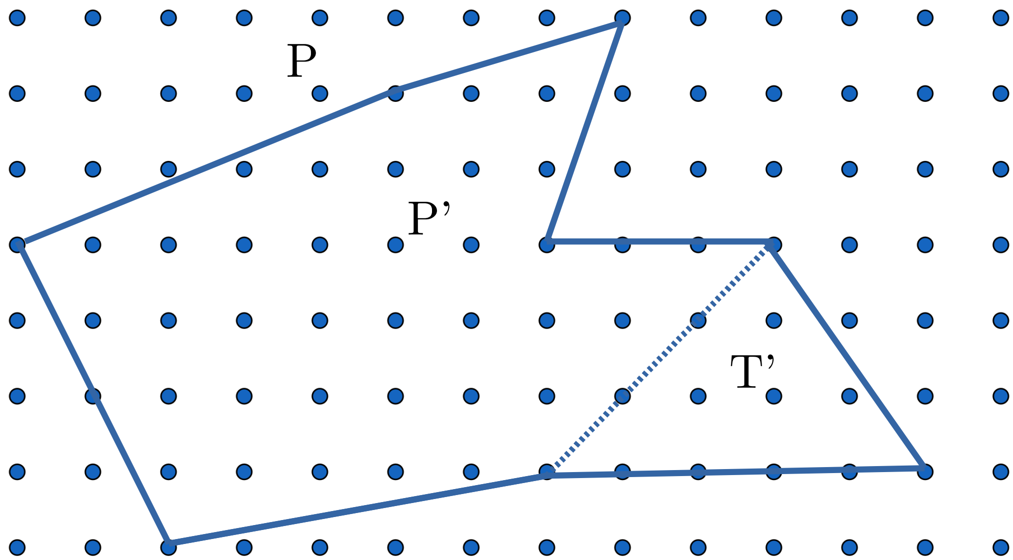
$$A_{ABC}=i_{ABC}+\frac{d_{ANB}+d_{BOC}+d_{CMA}-3+4}{2}$$;
$$A_{ABC}=i_{ABC}+\frac{d_{ANB}+d_{BOC}+d_{CMA}+1}{2}$$;
$$A_{ABC}=i_{ABC}+\frac{d_{ANB}+d_{BOC}+d_{CMA}+3-2}{2}$$;
$$A_{ABC}=i_{ABC}+\frac{d_{ANB}+d_{BOC}+d_{CMA}+3}{2}-1$$;

et finalement, la formule $A_{ABC}=i_{ABC}+\frac{b_{ABC}}{2}-1$ est vraie pour un triangle quelconque.

4. Il n'est pas possible de construire un triangle équilatéral dont les sommets se situent sur les points du quadrillage initial :
   Par l'absurde :
   Soit a la mesure du côté de ce triangle.
   D'une part : $A_{triangle}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(=\frac{base\times hauteur}{2}=\frac{a\times a\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}\right)$ et d'autre part :
   $A_{triangle}=i_{triangle}+\frac{b_{triangle}}{2}-1$.
   Il vient : $4i_{triangle}+2b_{triangle}-4=a^2\sqrt{3}$ et donc $\sqrt{3}=\frac{4i_{triangle}+2b_{triangle}-4}{a^2}$, donc $\sqrt{3}$ serait un rationnel, ce qui est absurde ; d'où le résultat.

5. En déduire la formule de Pick pour les polygones quelconques.

Soit P un polygone quelconque dont les sommets sont des points du quadrillage.



On découpe P : en un polygone P' et un triangle T' dont les sommets sont des points du quadrillages et ayant un côté commun reliant deux sommets de P.
On a alors, notant c le nombre de points en commun entre P' et T' :

- $i_P = i_P{}' + i_T{}' + c - 2$,
- $b_P = b_P{}' + b_T{}' - 2(c-2) - 2$.

Ainsi :

- $i_P{}' + i_T{}' = i_P - (c-2)$,
- $b_P{}' + b_T{}' = b_P + 2(c-2) + 2$.

Ainsi, si la formule de Pick est vraie pour P' et T' :

$A_P = A_P{}' + A_T{}'$,

$A_P = \left(i_P{}' + \frac{b_P{}'}{2} - 1\right) + \left(i_T{}' + \frac{b_T{}'}{2} - 1\right)$,

$A_P = (i_P{}' + i_T{}') + \frac{1}{2}(b_P{}' + b_T{}') - 2$,

$A_P = i_P - (c-2) + \frac{1}{2}(b_P + 2(c-2) + 2) - 2$,

$A_P = i_P + \frac{b_P}{2} - 1$.

Ainsi, si la formule de Pick est vraie pour P' et T', elle est vraie pour P.
D'après 3.c, elle est vraie pour T'.
Concernant P', on le décompose en un polygone P'' et un triangle T''.
Comme précédemment, la formule pour P' est vraie si elle l'est pour P''.

On recommence pour P''.
On obtient ainsi une suite de polygones P', P'', P''', P'''',..., $P^{(n)}$. A partir d'un certain n, $P^{(n)}$ est un triangle pour lequel la formule de Pick est vraie.
Elle devient donc vraie pour $P^{(n-1)}$,...,P'''',P''',P'',P' et par suite P.