MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE LA JEUNESSE ET DES SPORTS
Liberté
Égalité
Fraternité

ACADÉMIE DE PARIS
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2021

Exercices académiques - Académie de Paris

La partie académique se déroule en deux heures.

Les candidats traitent par équipe les deux exercices.

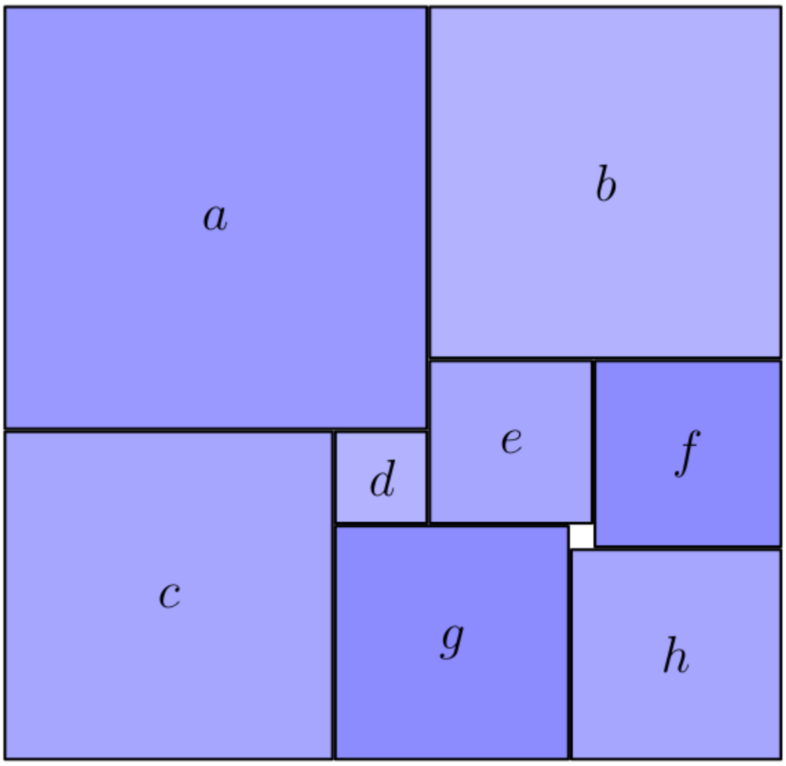
Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre. Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition. Chaque équipe éventuellement constituée rend une seule copie.

Exercice 1

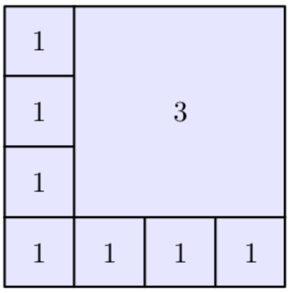
Quadrature du carré

1. On a découpé un rectangle en petits carrés. Le plus petit carré (blanc) a pour côté 1. Montrer que le rectangle ci-dessous, découpé en carrés, n'est pas un carré.

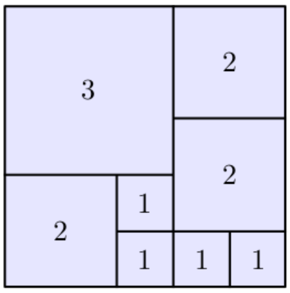


2. Le problème de **la quadrature du carré** consiste à découper un carré avec des carrés plus petits (mais pas forcément de la même taille). On souhaite de plus que **tous les côtés des carrés du découpage soient des nombres entiers** (les plus petits possibles). La **dimension de la quadrature** sera la taille du carré découpé.

   Par exemple : Voici deux découpages différents d'un carré en 8 carrés :



Quadrature de dimension 4.



Quadrature de dimension 5.

   Est-il possible de découper un carré en 7 carrés plus petits (mais pas forcément de la même taille) ? en 6 carrés ? en 5 carrés ?

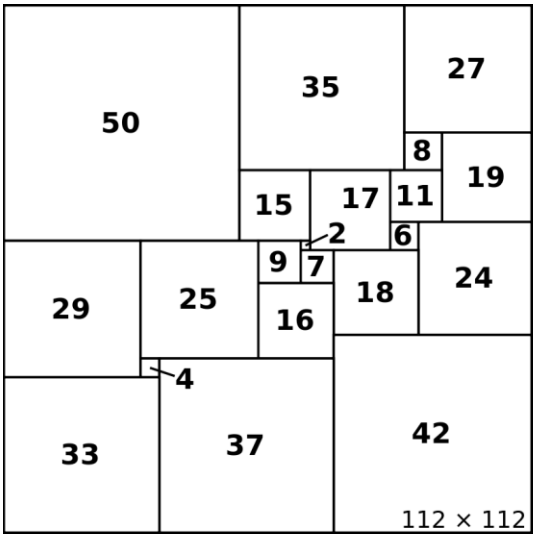
3. Montrer que si l'on peut découper un carré en ***n*** carrés alors il est possible de découper un carré en ***n+3*** carrés. La réciproque est-elle vraie ?

4. Représenter **quatre** partages différents d'un carré en 9 carrés et donner la dimension de chaque quadrature (deux partages constitués des mêmes carrés, mais placés différemment, sont considérés comme identiques).

5. **a)** Prouver qu'il est possible de découper un carré en 2021 carrés.

   b) En explicitant un partage en 2021 carrés, donner la dimension de cette quadrature.

6. On dit que le découpage est **parfait** quand les carrés sont tous de dimensions différentes.
   En 1939, R. Sprague (1894-1967) trouve un découpage parfait d'un carré en **55 carrés**. De plus, la dimension de cette quadrature est 4205.
   En 1978, A. Duijvestijn (1927-1998) a découvert un découpage parfait d'un carré en **21 carrés** (voir figure ci-dessous). De plus, la dimension de cette quadrature est 112.



   Il a été démontré depuis que l'on ne peut pas faire moins que 21.

   a) On suppose qu'il existe un découpage parfait d'un carré en ***n*** carrés et un découpage parfait d'un carré en ***m*** carrés. Démontrer que l'on peut construire un découpage parfait en ***n+m-1*** carrés.

   b) Prouver qu'il existe un découpage parfait d'un carré en 2021 carrés.

Exercice 2

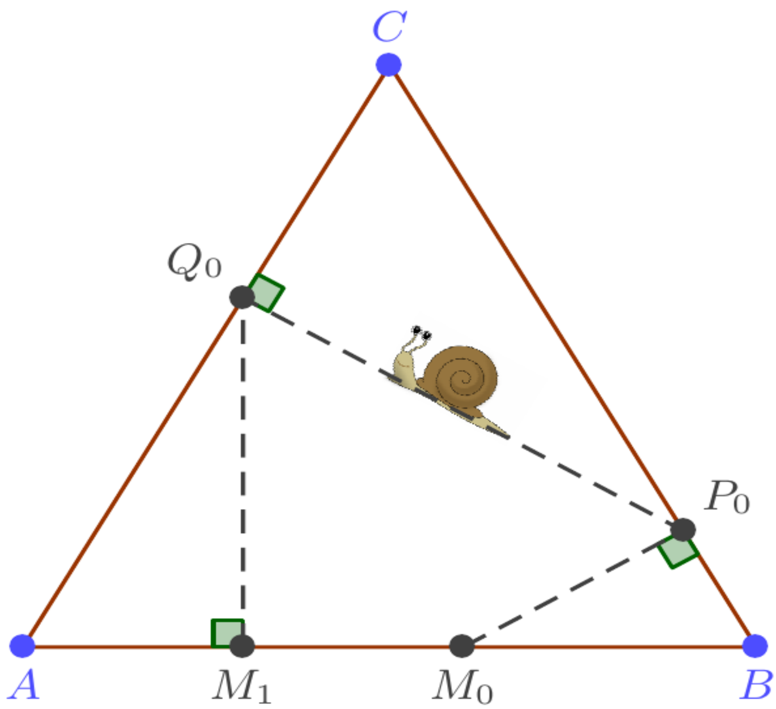
Les balades de Stan l'escargot

Stan l'escargot se déplace en ligne droite à l'intérieur d'une place qui a la forme d'un triangle équilatéral *ABC* de côté 10 mètres.

1. Le **lundi,** Stan part d'un point quelconque M_0 sur *[AB],* il se déplace parallèlement à *(AC)* pour atteindre *[BC]* en P_0, il repart parallèlement à *(AB)* pour atteindre *[AC]* en Q_0, puis il continue parallèlement à *(BC)* pour atteindre *[AB]* en M_1. En poursuivant ainsi, on construit ainsi une suite de points M_0 , M_1 , M_2 , …
   a) Dans cette question, $AM_0 = 2$ mètres. Sur une figure (échelle 2 m $\leftrightarrow$ 1 cm), représenter les points M_0, M_1 et M_2 .
   b) Si $AM_0 = x$ avec x dans [0;10], déterminer la longueur AM_{2021} .

2. Le **mardi**, Stan part du point M_0 sur *[AB]* tel que $AM_0 = 2$ mètres.
   Il va atteindre *[BC]* en P_0 puis *[AC]* en Q_0 pour revenir en M_0 .
   Un peu fatigué de son trajet de la veille, Stan souhaite faire un trajet **le plus court possible**.
   Sans calcul, représenter le chemin de Stan (échelle 2 m $\leftrightarrow$ 1 cm).

3. Le **mercredi**, trouvant son trajet un peu monotone, Stan décide de modifier ses déplacements.
   Il part d'un point M_0 sur *[AB]*. Il se dirige en ligne droite en suivant le plus court chemin vers *[BC]* pour atteindre P_0, puis vers *[AC]* pour atteindre Q_0 et revient sur *[AB]* en M_1.
   En poursuivant ainsi, on construit ainsi une suite de points M_0 , M_1 , M_2 , …



   a) Le trajet idéal de Stan serait de revenir à son point de départ après un tour, c'est-à-dire que le trajet idéal serait d'avoir $M_1 = M_0$.
   Où doit-on placer le point M_0 (on notera *I* ce point M_0) pour que le trajet soit idéal ?
   Que peut-on dire de ce trajet ?

b) Stan désire revenir à son point de départ après deux tours. Est-ce possible ?

c) Stan part d'un point quelconque M_0 sur *[AB],* au *n*-ième tour, il se retrouve au point M_n .
Démontrer que les points M_n sont de plus en plus proches du point *I.*

4. Le **jeudi**, Stan se place à l'intérieur de la place au point *D*, il se déplace toujours en ligne droite en suivant le plus court chemin.

   Il va d'abord vers *[AB]* et revient en *D*, puis vers *[BC]* et revient en *D* et enfin, il va vers *[AC]* et revient en *D* (il fait donc trois aller-retours).

   Y a-t-il un emplacement pour *D* qui minimise ce trajet ?