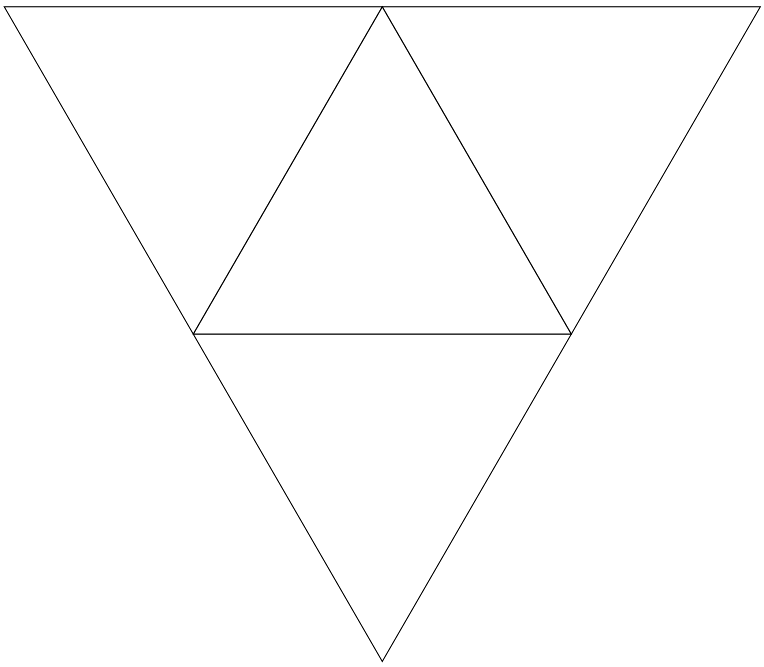
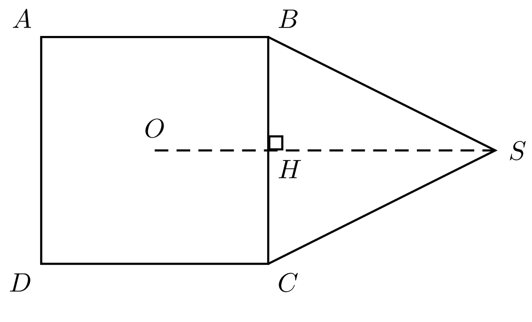
Exercice 2 : Pointe de Platon

1. (a) Patron d'un tétraèdre régulier dont les arêtes mesurent 5 cm



   (b) Le patron d'un tétraèdre régulier est celui d'une 3-pointe de Platon : la base est un triangle équilatéral donc un polygone régulier à 3 côtés, ses faces latérales sont des triangles équilatéraux identiques et toutes ses arêtes ont la même longueur. Il est donc possible de construire une 3-pointe de Platon.

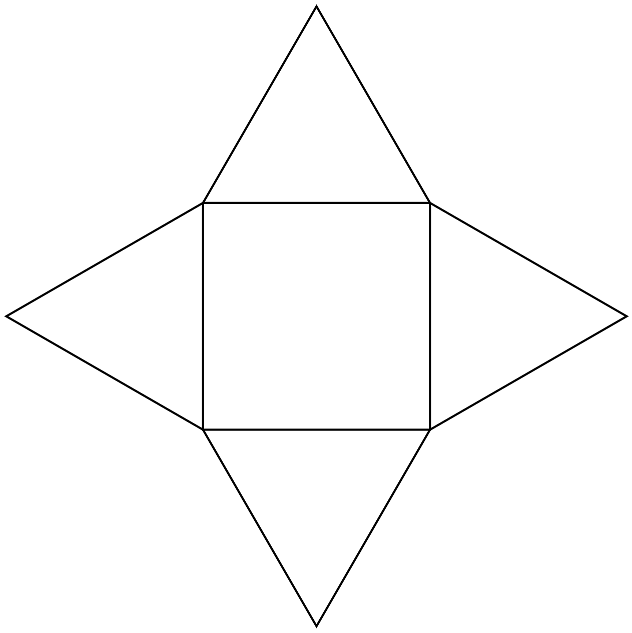
2. **Étude de la 4-pointe de Platon**



   (a) On note H le pied de la hauteur issue de S dans le triangle BCS et O le centre du carré $ABCD$.
   Le triangle BCS étant isocèle en S, le point H est aussi le milieu du segment $[BC]$.
   On complète cette figure en construisant à l'extérieur du carré les points S_2, S_3 et S_4 tels que les triangles ABS_2, DAS_3 et DCS_4 soient des triangles égaux au triangle BCS.
   La figure ainsi obtenue est un patron d'une pyramide régulière à base carrée si et seulement si en repliant le triangle BCS, on parvient à placer le point S de telle sorte que la droite (SO) soit perpendiculaire à la face $ABCD$, c'est-à-dire si et seulement si $SH > OH$ soit $h > \frac{a}{2}$.

   (b) Une telle pyramide régulière est une 4-pointe de Platon si et seulement si le triangle BCS est équilatéral. Or la hauteur d'un triangle équilatéral de côté a est $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ (à retrouver éventuellement en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle BHS rectangle en H) et $\frac{a\sqrt{3}}{2} > \frac{a}{2}$ car $\sqrt{3} > 1$ donc il est possible de construire une 4-pointe de Platon.

(c)



3. **Étude de la 5-pointe de Platon**

   (a) Notons H_1 le pied de la hauteur issue de S_1 dans le triangle S_1BC.
   Le triangle BCS_1 étant isocèle en S_1, le point H_1 est aussi le milieu du segment $[BC]$.
   De même que dans la question précédente, la figure complète est un patron d'une pyramide régulière de base $ABCDE$ si et seulement si $h > OH_1$.
   Or $h > OH_1 \iff h^2 > OH_1^2$ car $h > 0$ et $OH_1 > 0$
   $h > OH_1 \iff h^2 + H_1C^2 > OH_1^2 + H_1C^2$
   $h > OH_1 \iff l^2 > OC^2$ d'après le théorème de Pythagore appliqué aux triangles rectangles OH_1C et SH_1C
   $h > OH_1 \iff l > OC$ car $h > 0$ et $OC > 0$
   Le pentagone $ABCDE$ est un pentagone régulier donc les triangles OBC, OBA, OAE, OED et ODC sont des triangles égaux et $\widehat{BOC} = \dfrac{360°}{5} = 72°$.
   De plus, le triangle BOC est un triangle isocèle en O donc la droite (OH_1) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BOC}$ et $\widehat{COH_1} = \dfrac{72°}{2} = 36°$.

   Dans le triangle COH_1 rectangle en H_1, on a donc $\sin\widehat{COH_1} = \dfrac{H_1C}{OC}$ d'où $OC = \dfrac{\frac{a}{2}}{\sin 36°} = \dfrac{a}{2\sin 36°}$
   On en déduit que la figure complète est un patron d'une pyramide régulière de base $ABCDE$ si et seulement si $l > \dfrac{a}{2\sin 36°}$

   (b) Une telle pyramide régulière est une 5-pointe de Platon si et seulement si $l = a$
   Or $a > \dfrac{a}{2\sin 36°}$ car $\dfrac{1}{2\sin 36°} \approx 0,85$ donc il est possible de construire une 5-pointe de Platon.

4. **Étude générale de la n-pointe de Platon**

   Par un raisonnement analogue à celui de la question précédente, on peut construire une n-pointe de Platon si et seulement si $a > \dfrac{a}{2\sin\left(\dfrac{180°}{n}\right)}$ c'est-à-dire si et seulement si $\dfrac{1}{2\sin\left(\dfrac{180°}{n}\right)} < 1$ soit $\sin\left(\dfrac{180°}{n}\right) > \dfrac{1}{2}$: les seules valeurs de n qui conviennent sont $n = 3$, $n = 4$ et $n = 5$.