<u>Deux nouvelles opérations d'addition et de multiplication</u>
<u>dans l'ensemble des nombres réels : corrigé</u>

Partie 1 : quelques calculs avec les nouvelles opérations

1. On a $3 \otimes 4 = 3 \times 4 - 3 - 4 + 2 = 12 - 5 = 7$, donc $3 \otimes 4 = 7$
et $5 \otimes 6 = 30 - 5 - 6 + 2 = 21$, donc $5 \otimes 6 = 21$.

2. On a pour tout x réel, $x \oplus 7 = 11 \Leftrightarrow x + 7 - 1 = 11 \Leftrightarrow x = 5$,
donc l'équation admet pour unique solution 5.

3. On a pour tout x réel , $x \otimes 8 = 13 \Leftrightarrow 8x - 8 - x + 2 = 13 \Leftrightarrow 7x = 19 \Leftrightarrow x = \frac{19}{7}$,
donc la seule solution de l'équation est $\frac{19}{7}$.

4. Pour tous réels x et y,
$(x-1)(y-1) + 1 = xy - x - y + 1 + 1 = xy - x - y + 2 = x \otimes y$,
soit $x \otimes y = (x-1)(y-1) + 1$.

5. Pour tous réels x et y, on a, d'après la question 4,
$\begin{cases} x \oplus y = 5 \\ x \otimes y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 1 = 5 \\ (x-1)(y-1) + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 1 = 5 \\ (x-1)(y-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 1 = 5 \\ x = 1 \; ou \; y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} x = 1 \; et \; y = 5 \\ ou \\ x = 5 \; et \; y = 1 \end{cases}$,
on peut donc prendre $x = 1$ et $y = 5$ ou $x = 5$ et $y = 1$.

Partie 2 : des propriétés algébriques des nouvelles opérations

1. Pour tous les réels x et y, $x \oplus y = x + y - 1 = y + x - 1 = y \oplus x$, donc $x \oplus y = y \oplus x$,
et $x \otimes y = xy - x - y + 2 = yx - y - x + 2 = y \otimes x$, donc $x \otimes y = y \otimes x$.

2. Pour tous les réels x, y et z,
$(x \oplus y) \oplus z = (x + y - 1) \oplus z = (x + y - 1) + z - 1 = x + (y + z - 1) - 1$
$\qquad = x + y \oplus z - 1 = x \oplus (y \oplus z)$,
donc, $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$,
$(x \otimes y) \otimes z = (xy - x - y + 2)z - (xy - x - y + 2) - z + 2$
$\qquad = xyz - xz - yz + 2z - xy + x + y - 2 - z + 2$
$\qquad = xyz - xz - xy + 2x - x - yz + y + z - 2 + 2$
$\qquad = x(yz - z - y + 2) - x - (yz - y - z + 2) + 2$
$\qquad = x(y \otimes z) - x - y \otimes z + 2 = x \otimes (y \otimes z)$,
donc$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$.

3. Pour tout réel $x, x \oplus 1 = x + 1 - 1 = x = 1 + x - 1 = 1 \oplus x$, donc $x \oplus 1 = 1 \oplus x = x$,
et $x \otimes 2 = 2x - x - 2 + 2 = x$ et $x \otimes 2 = 2 \otimes x$ d'après la question 1,
donc $x \otimes 2 = 2 \otimes x = x$.

4. Pour tous réels x et y, $x \oplus y = 1 \Leftrightarrow x + y - 1 = 1 \Leftrightarrow y = 2 - x$, donc grâce à la question 1,
pour tout réel x, il existe un unique réel y tel que $x \oplus y = y \oplus x = 1$.

5. Grâce à la question 1, pour tout réel x tel que $x \neq 1$, tout réel y,
$x \otimes y = y \otimes x = 2 \Leftrightarrow x \otimes y = 2 \Leftrightarrow xy - x - y + 2 = 2 \Leftrightarrow xy - x - y = 0$

$\Leftrightarrow y(x-1) = x \Leftrightarrow y = \frac{x}{x-1}$,
Donc pour tout réel x tel que $x \neq 1$, il existe un unique réel y tel que $x \otimes y = y \otimes x = 2$.

Partie 3 : un peu d'algorithmique en langage Python

suite(7,3) renvoie $(7 \otimes 3; 2 \otimes 7 \otimes 7 \otimes 7)$ c'est-à-dire $(7 \otimes 3; 7 \otimes 7 \otimes 7)$

Partie 4 : nouvelles opérations et relation d'ordre

1. Pour tous les réels x, y et z, $x \geqslant y \Leftrightarrow x + z - 1 \geqslant y + z - 1 \Leftrightarrow x \oplus z \geqslant y \oplus z$,
donc $x \geqslant y$ si et seulement si $x \oplus z \geqslant y \oplus z$.

2. Pour tous les réels x, y et z, si $x \geqslant y$ et $z \geqslant 1$, alors, comme $z - 1 \geqslant 0, x(z-1) \geqslant y(z-1)$
$xz - x \geqslant yz - y$,
$xz - x - z + 2 \geqslant yz - y - z + 2$,
donc $x \otimes z \geqslant y \otimes z$.

3. Pour tous réels x et a, avec $a > 1$, tout entier naturel n , comme $a - 1 > 0$, on a :
$n \otimes a \geqslant x \Leftrightarrow na - n - a + 2 \geqslant x \Leftrightarrow n(a-1) \geqslant x + a - 2 \Leftrightarrow n \geqslant \frac{x+a-2}{a-1}$, il suffit donc de choisir un entier naturel supérieur ou égal à $\frac{x+a-2}{a-1}$.

Partie 5 : divisibilité et nombres premiers avec la nouvelle multiplication

1. On cherche d entier supérieur ou égal à 1 tel que $26 \otimes d = 76$, soit $26d - 26 - d + 2 = 76$,
soit $25d = 100$, soit d=4, donc $26 \otimes 4 = 76$.

2. Liste des nombres premiers au sens de la multiplication $\otimes$, inférieurs ou égaux à 10 :
3 ; 4 ; 6 ; 8.
Liste établie par test pour chaque entier inférieur ou égal à 10.
On a $1 \otimes 3 = 3 - 1 - 3 + 2 = 1$, donc 1 n'est pas premier.
Le nombre 2 n'est pas distinct de lui-même, donc 2 n'est pas premier.
Pour tous d et e, entiers supérieurs ou égaux à 1, on a, d'après la question A] 4,
$e \otimes d = 3 \Leftrightarrow (e-1)(d-1) + 1 = 3 \Leftrightarrow (e-1)(d-1) = 2$,
donc $e - 1 = 1$ et $d - 1 = 2$, soit $e = 2$ et $d = 3$, ou $e - 1 = 2$ et $d - 1 = 1$,
soit $e = 3 \; et \; d = 2$,
donc 3 est premier au sens de la multiplication$\otimes$, donc 3 est le plus petit nombre premier au sens de la multiplication $\otimes$.

3. Pour tous d et e entiers supérieurs ou égaux à 1, on a, d'après la question P1-Q4,
$e \otimes d = 46 \Leftrightarrow (e-1)(d-1) + 1 = 45 \Leftrightarrow (e-1)(d-1) = 45$,
donc $e = 6$ et $d = 10$ conviennent ;
Pour tous x et y entiers supérieurs ou égaux à 1,
$x \otimes y = 6 \Leftrightarrow (x-1)(y-1) + 1 = 6 \Leftrightarrow (x-1)(y-1) = 5$,
donc $x = 2$ et $y = 6$, ou $x = 6$ et $y = 2$, donc 6 est premier au sens de la multiplication$\otimes$;
en outre, pour tous x et y entiers supérieurs ou égaux à 1,
$x \otimes y = 10 \Leftrightarrow (x-1)(y-1) + 1 = 10 \Leftrightarrow (x-1)(y-1) = 9$, donc $x = y = 4$ convient ;
de plus , pour tous x et y entiers supérieurs ou égaux à 1,
$x \otimes y = 4 \Leftrightarrow (x-1)(y-1) + 1 = 4 \Leftrightarrow (x-1)(y-1) = 3$,
donc $x = 4 \; et \; y = 2$, ou $x = 2$ et $y = 4$, donc 4 est premier au sens de la multiplication $\otimes$.
D'où $46 = 4 \otimes 4 \otimes 6$.

On établit de même que $71 = 3 \otimes 6 \otimes 8$.

Les bougies de Leonhard

Partie 1 : Quelques résultats de géométrie

1. En prenant $[AB]$pour base :$2 \times A(ABC) = AB \times AC$
   En prenant $[BC]$pour base : $2 \times A(ABC) = AH \times BC$
   On en déduit alors l'égalité demandée $AB \times AC = AH \times BC$

2. En élevant au carré l'égalité obtenue ci-dessus en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en A : $AB^2 \times AC^2 = AH^2(AB^2 + AC^2)$.
En divisant par $AB^2 \times AC^2 \times AH^2$, on obtient : $\frac{1}{AH^2} = \frac{AB^2+AC^2}{AB^2AC^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AB^2}$.

Partie 2

1. La valeur indiquée est proportionnelle au carré de la distance séparant la bougie du capteur, donc est de la forme $k \times \frac{1}{d^2}$ où d est la distance en mètres de la bougie au capteur.
Si $d = 1$m, la valeur affichée est de 1 on en déduit que $k = 1$.

2. Lorsque les 3 bougies sont allumées, l'intensité affichée par le capteur est égale à :

$$\frac{1}{CL_1^2} + \frac{1}{CL_2^2} + \frac{1}{CL_3^2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

En notant d la distance entre le capteur et la bougie qui doit remplacer les 3 premières bougies :

$$\frac{1}{d^2} = \frac{5}{2} \qquad \text{d'où} \quad d = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

Leonhard peut donc placer la bougie n'importe où sur le cercle de centre Cet de rayon d.

3. a. Le cercle a une circonférence de 2 m, donc un diamètre de $\frac{2}{\pi}$ m.
Par conséquent $V_{capteur} = \frac{\pi^2}{4}$.

b. Le triangle CL_1L_2est rectangle en C. En utilisant la question 2) de la partie A :

$$\frac{1}{CL_1^2} + \frac{1}{CL_2^2} = \frac{1}{CL_0^2}.$$

Le capteur affichera donc la même valeur que dans 3.a).

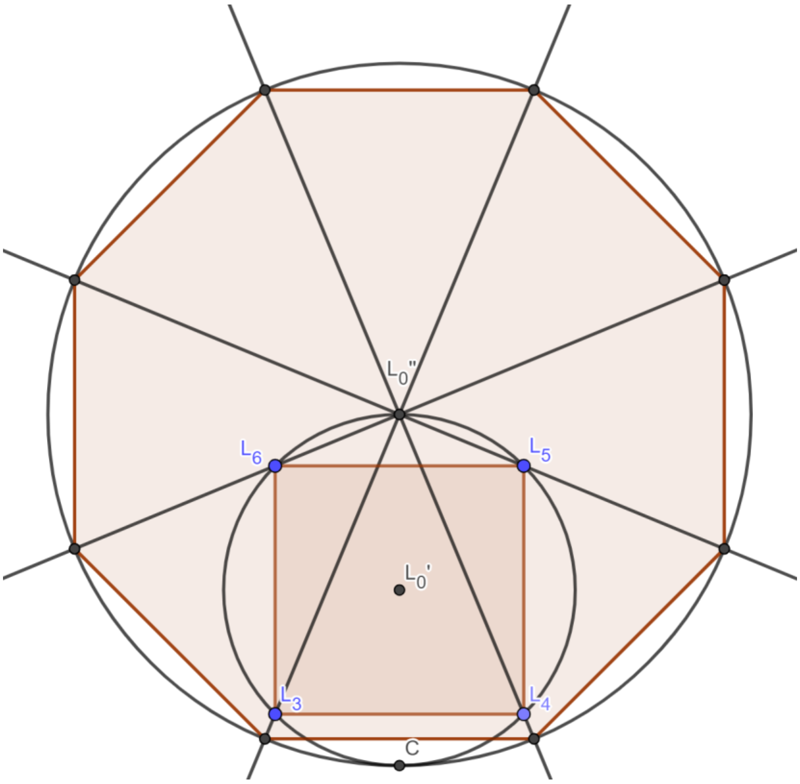
4. a. D'après le théorème de l'angle au centre dans le cercle (E_2) :
$\widehat{L_6L_0'}C = \widehat{L_2L_0'}C = \frac{1}{2}\widehat{L_2L_0}C = 45°$. De même $\widehat{L_3L_0'}C = 45°$, ainsi $\widehat{L_3L_0'}L_6 = 90°$ et de même $\widehat{L_6L_0'}L_5 = 90°$.
Les diagonales du quadrilatère $L_3L_4L_5L_6$ se coupent perpendiculairement et ont même mesure.
Donc le quadrilatère $L_3L_4L_5L_6$ est un carré.

b. $\frac{1}{CL_3^2} + \frac{1}{CL_4^2} + \frac{1}{CL_5^2} + \frac{1}{CL_6^2} = \frac{1}{CL_1^2} + \frac{1}{CL_2^2} = \frac{1}{CL_0^2}$

c. On construit L_4L_6, puis son milieu L_0'. On place ensuite les points L_3et L_5 appartenant à la médiatrice de (L_4L_6) afin d'obtenir le carré $L_3L_4L_5L_6$.

d. • Tracer le cercle (E_4) de centre L_0'', intersection de(E_3) et de (CL_0).
   • Tracer la perpendiculaire à (CL_3) passant par L_3, elle coupe le cercle (E_4)en L_7 et L_8.

• Recommencer, en remplaçant L_3 par L_4, L_5 puis L_6, ce qui permet de définir six points supplémentaires situés sur (E_4): L_9, L_{10}, L_{11}, L_{12}, L_{13}, L_{14}.



D'après le théorème de l'angle au centre dans le cercle (E_3) : $L_6\widehat{L_0''}L_5 = \frac{1}{2}L_6\widehat{L_0'}L_5 = 45°$.
Or par construction $L_{13}\widehat{L_0''}L_{14} = L_6\widehat{L_0''}L_5$. En réitérant ce raisonnement, on obtient que $L_{13}\widehat{L_0''}L_{14} = L_6\widehat{L_0''}L_5 = L_{14}\widehat{L_0''}L_7 = L_7\widehat{L_0''}L_8 = \dots = L_{12}\widehat{L_0''}L_{13} = 45°$.
Ceci prouve que l'octogone obtenu est régulier.

Chaque arc de cercle sur la plage joignant deux sommets consécutifs mesure 2 m : en effet sur le sable la circonférence du premier cercle est de 2 m, (E_2) a donc une circonférence de 4 m sur le sable, (E_3) a une circonférence de 8 mètres et (E_4) a une circonférence de 16 m. Les huit sommets de l'octogone sont donc espacé de 2 m sur (E_4).

5) Leonhard utilisant le même processus, le capteur indiquera à chaque fois la même valeur, à savoir $\frac{\pi^2}{4}$. Il obtient aussi d'autre part la somme des inverses des carrés des distances du capteur aux bougies. Les bougies vont se « rapprocher » de plus en plus des points de l'axe des abscisses, d'abscisses impaires. On peut donc conjecturer que la somme $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{(-1)^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{(-3)^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{(-5)^2} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(-2n-1)^2}$ va se rapprocher de $\frac{\pi^2}{4}$.
La fonction carré étant paire, la somme $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2}$ tend vers $\frac{\pi^2}{8}$.