MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE LA JEUNESSE ET DES SPORTS
Liberté
Égalité
Fraternité

ACADÉMIE DE PARIS
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2023

Exercices académiques - Académie de Paris

La partie académique se déroule en deux heures.

Les candidats traitent par équipe les deux exercices. Chaque équipe éventuellement constituée rend une seule copie.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercice 1

DEUX NOUVELLES OPERATIONS

On définit deux nouvelles opérations d'addition et de multiplication dans l'ensemble **R** des nombres réels, de la manière suivante : on pose pour tous réels x et y,

$$x \oplus y = x + y - 1$$

et

$$x \otimes y = xy - x - y + 2.$$

Partie 1 : quelques calculs avec les nouvelles opérations

1. Vérifier que $3 \otimes 4 = 7$, puis calculer $5 \otimes 6$.
2. Résoudre dans **R** l'équation $x \oplus 7 = 11$.
3. Résoudre dans **R** l'équation $x \otimes 8 = 13$.
4. Vérifier que pour tous réels x et y, $x \otimes y = (x-1)(y-1) + 1$.
5. Trouver deux réels x et y vérifiant le système de deux équations :

$$\begin{cases} x \oplus y = 5 \\ x \otimes y = 1 \end{cases}$$

Partie 2 : des propriétés algébriques des nouvelles opérations

1. Vérifier que pour tous réels x et y, $x \oplus y = y \oplus x$ et $x \otimes y = y \otimes x$.
2. Vérifier, en justifiant avec soin, que pour tous les réels x, y et z,

$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ et $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$.

Par la suite, on pourra donc noter que pour tous réels x, y et z,

$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus y \oplus z$

$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes y \otimes z$

3. Vérifier que pour tout réel x, $x \oplus 1 = 1 \oplus x = x$ et $x \otimes 2 = 2 \otimes x = x$.
4. Vérifier que pour tout réel x, il existe un unique réel y tel que $x \oplus y = y \oplus x = 1$.
5. Vérifier que pour tout réel x tel que $x \neq 1$, il existe un unique réel y tel que $x \otimes y = y \otimes x = 2$.

Partie 3 : un peu d'algorithmique en langage Python

On propose la fonction Python ci-dessous.

```
def suite(x,n) :
    z=n*x-n-x+2
    t=2
    for i in range(n) :
        t=t*x-t-x+2
    return(z,t)
```

Que renvoie *suite(7,3)* ? Exprimer ces valeurs à l'aide des nouvelles opérations le plus simplement possible.

Partie 4 : nouvelles opérations et relation d'ordre

1. Vérifier que pour tous réels x, y et $z, x \geqslant y$ si et seulement si $x \oplus z \geqslant y \oplus z$.
2. Vérifier que pour tous réels x, y et z, si $x \geqslant y$ et $z \geqslant 1$, alors $x \otimes z \geqslant y \otimes z$.
3. Vérifier que pour tous réels x et a tels que $a > 1$, il existe un entier naturel n tel que $n \otimes a \geqslant x$.

Partie 5 : divisibilité et nombres premiers avec la nouvelle multiplication

On définit une relation de divisibilité au sens de la multiplication $\otimes$ sur l'ensemble des nombres entiers supérieurs ou égaux à 1 ainsi : un nombre entier y est divisible par un nombre entier x supérieur ou égal à 1 au sens de la multiplication $\otimes$ si et seulement s'il existe un nombre entier d supérieur ou égal à 1 tel que $y = x \otimes d$.

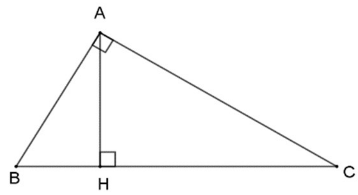
Un nombre entier supérieur ou égal à 1 est un nombre premier au sens de la multiplication $\otimes$ si et seulement s'il admet exactement deux diviseurs distincts au sens de la multiplication $\otimes$, 2 et lui-même.

1. **1.** Vérifier que 76 est divisible par 26 au sens de la multiplication $\otimes$.
2. **2.** Déterminer tous les nombres premiers au sens de la multiplication $\otimes$ inférieurs ou égaux à 10.
3. **3.** Déterminer, au sens de la multiplication $\otimes$, une décomposition de 46 et de 71 en produit de nombres premiers.

Exercice 2

LES BOUGIES DE LEONHARD

Partie 1 : quelques résultats de géométrie



Soit ABC un triangle rectangle en A et H le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC).

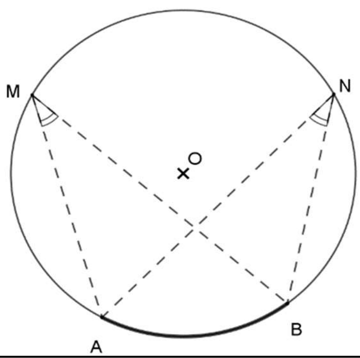
1. En exprimant de deux façons différentes l'aire du triangle ABC, démontrer que : $AB \times AC = AH \times BC$.

2. En déduire que $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AH^2}$.

Dans la suite de l'exercice, on pourra utiliser sans démonstration les résultats suivants :

Théorèmes de l'angle inscrit et de l'angle au centre
Deux angles inscrits qui interceptent le même arc de cercle ont la même mesure.
De plus, leur mesure est égale à la moitié de celle de l'angle au centre interceptant le même arc.

Exemple : sur la figure ci-dessous, les angles inscrits $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ interceptent le même arc de cercle d'extrémités A et B donc ils ont la même mesure et $2\,\widehat{AMB} = \widehat{AOB}$.



Théorème : Soient A et B deux points distincts du plan.
Si un point M, distinct des points A et B, appartient au cercle de diamètre $[AB]$ alors le triangle AMB est rectangle en M.

Partie 2

Leonhard est sur une plage à la tombée de la nuit. Il dispose de plusieurs bougies produisant toutes une lumière identique. Il dispose aussi d'un capteur électronique multidirectionnel permettant de mesurer l'intensité lumineuse. Il le règle de telle sorte que si une bougie se trouve à une distance de 1 mètre, alors le capteur affiche la valeur 1. Après plusieurs essais, il se rend compte que la valeur affichée par le capteur est inversement proportionnelle au carré de la distance séparant la bougie du capteur. Enfin, il constate que les intensités lumineuses s'additionnent. Par exemple, s'il place deux bougies à 1 mètre de distance du capteur, celui-ci affiche la valeur 2.

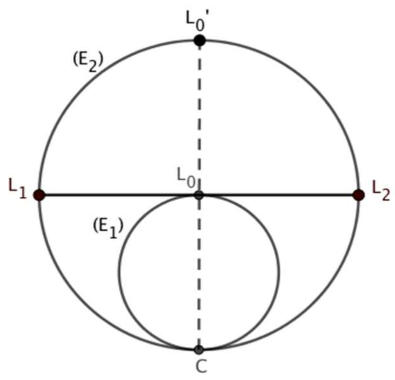
1. Leonhard place une bougie à une distance d du capteur. Démontrer que celui-ci affiche la valeur $\frac{1}{d^2}$.

2. Leonhard dispose sur la plage trois bougies L_1, L_2, L_3 et son capteur C afin d'obtenir un carré $CL_1L_2L_3$ de côté 1 mètre. Il note V la valeur indiquée par le capteur. Il souhaite remplacer ces trois bougies par une seule afin que le capteur indique la même valeur V. À quelle distance du capteur C Leonhard doit-il disposer sa nouvelle bougie ?

3. Leonhard procède alors à une autre expérience : il trace sur le sable un cercle (E_1) de circonférence 2 mètres, il y dispose son capteur C ainsi qu'une bougie L_0 diamétralement opposée au capteur C.

a. Calculer la valeur affichée par le capteur dans ce cas. Donner la valeur exacte.

b. Il trace ensuite le cercle (E_2), de centre L_0 et de rayon $[CL_0]$. Il place sur ce nouveau cercle deux bougies L_1 et L_2 diamétralement opposées telles que (L_1L_2) soit perpendiculaire à (CL_0). Il allume les bougies L_1 et L_2 puis, il éteint la bougie L_0. Quelle est la valeur affichée par le capteur C ?



4. On note $L_0{}'$ le symétrique du point C par rapport au point L_0. Leonhard construit ensuite un nouveau cercle (E_3), de centre $L_0{}'$, deux fois plus grand que le cercle (E_2). La droite perpendiculaire à la droite (CL_1) et passant par L_1 coupe le cercle (E_3) en deux points L_3 et L_5 et la droite perpendiculaire à la droite (CL_2) et passant par L_2 coupe le cercle (E_3) en deux points L_4 et L_6. Il détermine ainsi l'emplacement de quatre nouvelles bougies qui forment le quadrilatère non croisé $L_3L_4L_5L_6$.

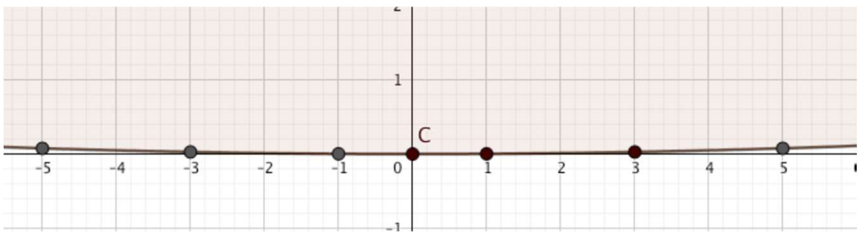
a. Montrer que le quadrilatère $L_3L_4L_5L_6$ est un carré.

b. Leonhard allume les bougies L_3, L_4, L_5 et L_6 et éteint les bougies L_1 et L_2. Montrer que le capteur affiche la même valeur que lorsque la bougie L_0 était seule allumée.

c. Construire une réduction du carré $L_3L_4L_5L_6$ en choisissant $L_4L_6 = 4$ cm et construire le point C en expliquant la démarche.

d. En utilisant la méthode de Leonhard, compléter cette figure afin d'obtenir l'emplacement de huit nouvelles bougies donnant la même valeur sur le capteur que L_0. Démontrer que ces huit bougies forment un octogone régulier. Préciser la longueur de l'arc de cercle sur la plage joignant deux sommets consécutifs de cet octogone.

5. Il continue alors ce processus mais il doit cesser car la plage devient trop petite ! De retour chez lui, Leonhard écrit un programme lui permettant de visualiser les étapes qu'il n'a pas pu réaliser. Voici ce qu'il obtient lorsque le nombre de bougies devient très grand (le point C correspond à l'emplacement du capteur et les autres points ● représentent les bougies) :



Conjecturer, en expliquant la démarche et en utilisant ce qui précède, la valeur exacte de la limite de la somme $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^2}$ quand n tend vers $+\infty$.