ACADÉMIE
DE CRÉTEIL
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades académiques de mathématiques 2022
Académie de Créteil

L’épreuve de la partie académique se déroule en deux heures.

Le sujet comporte 5 pages.

Les candidats traitent les deux exercices.

Les calculatrices autonomes non communicantes par ondes radio sont autorisées.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d’exposer le bilan des initiatives qu’ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

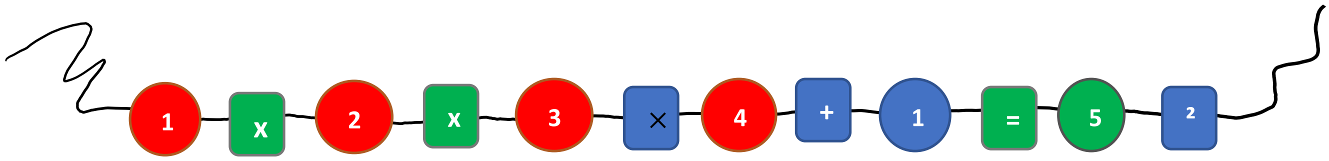
Chaque équipe éventuellement constituée rend une seule copie.

Exercice 1 : Un étrange collier de perles

Pour son anniversaire, Anouk qui adore les mathématiques vient de recevoir un étrange collier de 12 perles. Ces perles ont trois caractéristiques :

- Elles sont de trois couleurs différentes : rouge, verte et bleue.
- Elles ont deux formes différentes : sphériques et cubiques.
- Elles portent toutes une inscription.
-

Dans tout cet exercice, on considérera le collier ouvert suivant :



Anouk regarde le collier très attentivement et se pose plusieurs questions. **Dans chaque partie, elle s'intéressera à une caractéristique différente.**

Première partie : étude des inscriptions sur les perles.

Anouk remarque que les inscriptions sur les perles forment une égalité : $1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1 = 5^2$.

a) Vérifier que cette égalité est vraie.

b) Calculer les deux quantités : $2 \times 3 \times 4 \times 5 + 1$ et 11^2 et comparer les résultats obtenus.

c) Exprimer sous forme d'un carré parfait (carré d'un entier) l'expression $3 \times 4 \times 5 \times 6 + 1$.

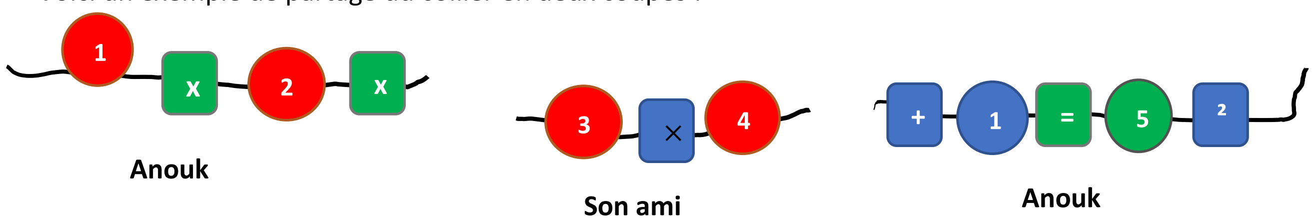
d) Déterminer s'il existe un entier naturel n tel que $n \times (n+1) \times (n+2) \times (n+3) + 1$ soit égal à 3025. Si oui, donner sa valeur.

e) Montrer que pour tout n nombre entier naturel :
$n \times (n+1) \times (n+2) \times (n+3) + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$.

Deuxième partie : étude de la forme des perles

Anouk décide de partager ce collier avec un ami. Les perles sont fixées sur la chaîne, elles ne peuvent donc pas glisser. **Dans cette partie, on ne tiendra compte que de leur forme (cubique ou sphérique).**

Voici un exemple de partage du collier en deux coupes :



Avec ce partage, Anouk prend la première et troisième partie et possède 4 perles sphériques et 5 perles cubiques. Son ami possède 2 perles sphériques et une perle cubique.

- **a)** En tenant compte seulement de la forme des perles, donner deux possibilités de partage équitable de ce collier ne nécessitant pas plus de deux coupes : les deux amis doivent avoir le même nombre de perles sphériques mais également le même nombre de perles cubiques.
- **b)** **Si on s'autorise à mélanger les perles de ce collier**, en gardant les 6 perles sphériques et 6 perles cubiques, donner une méthode qui permette de le partager équitablement en au plus deux coupes.

Troisième partie : étude de la couleur des perles

Anouk souhaite encore partager ce collier avec un ami mais cette fois **en ne tenant compte uniquement que de la couleur des perles.** Les perles sont toujours fixées sur la chaîne et ne peuvent pas glisser.

- **a)** En tenant compte seulement de la couleur des perles, existe-t-il au moins un partage équitable en, au plus trois coupes ? Si oui, donner un partage possible.
- **b)** Anouk a écrit un programme en langage Python qui permet d'avoir un partage équitable de ce collier en exactement trois coupes. Ce programme est complexe. La fonction ci-dessous est extraite de celui-ci :

```python
def partition(collier):
    Part1 = []
    Part2 = []
    Part3 = []
    Part4 = []
    for i in range (1,10):
        Part1 = collier[0:i]
        for j in range(i+1,11):
            Part2 = collier[i:j]
            for k in range(j+1,12):
                Part3 = collier[j:k]
                Part4 = collier[k:12]
                print(Part1, Part2, Part3, Part4)
```

Que permet de faire la fonction partition (collier) ?

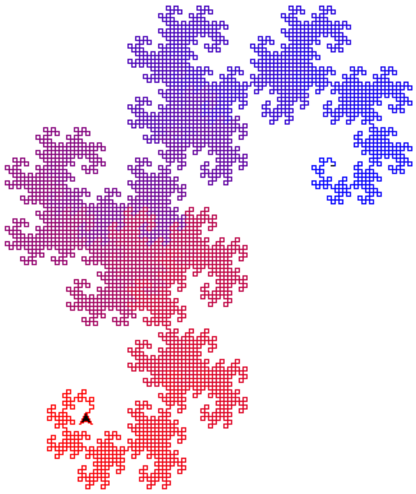
Quatrième partie : Le collier se brise.

Finalement, les perles ne sont pas bien fixées sur la chaîne. Le collier se casse. Les perles tombent.

- **a)** **On considère cette fois que toutes les perles sont différentes**. Combien de colliers de 12 perles Anouk peut-elle former ? Justifier votre réponse.
- **b)** Une fois le collier de 12 perles formé, on ne peut voir que la couleur de chaque perle mais pas la forme, ni l'inscription. A combien de colliers différents, un collier formé correspond-t-il ? Justifier votre réponse.
- **c)** En considérant uniquement la couleur des perles : 4 vertes, 4 rouges, 4 bleues, combien de colliers de 12 perles peut-elle former ? Justifier votre réponse.

Exercice 2 : Courbe du Dragon

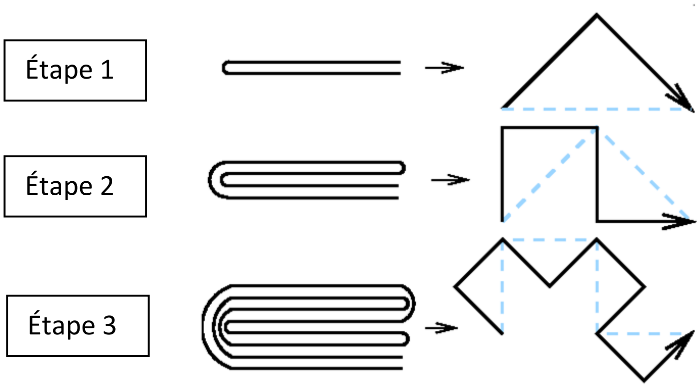
La figure ci-contre représente la courbe **de Heighway**, nom d'un des physiciens de la NASA l'ayant étudiée en premier. Nommée aussi **courbe du dragon**, de par son air de ressemblance avec cet animal, c'est un objet mathématique passionnant par ses différentes propriétés.



L'objectif de cet exercice est de découvrir deux manières différentes de tracer la courbe du dragon.

Première partie : par pliage.

Soit n un nombre entier naturel non nul. On plie une feuille de papier n fois sur elle-même, toujours dans le même sens. On déplie ensuite la feuille de sorte que les plis forment des angles droits.



Le profil de la feuille donne une courbe, appelée courbe du dragon à l'étape n, et notée D_n.

a) Construire la courbe du dragon à l'étape 4.

b) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Expliquer comment on peut obtenir la courbe D_n à partir de la courbe D_{n-1}.

Deuxième partie : par L-Système.

Un L-système est un système de réécriture de mots. Plus précisément, on définit **une chaîne initiale** puis **une règle de réécriture** à appliquer à chaque caractère de la chaîne.
Considérons le L-système suivant :

- **Chaîne initiale** : $'D'$
- **Règle de réécriture** : la chaîne précédente est remplacée par l'enchainement : chaîne + 'D' + chaîne _miroir où chaîne_miroir est obtenue en parcourant chaîne, **de droite à gauche** et en remplaçant chaque caractère lu $'G'$ par $'D'$ et $'D'$ par $'G'$.

Ainsi, par exemple, après une réécriture à partir de la chaîne initiale 'D', on obtient la chaîne 'DDG'. Pour tout entier naturel n, on notera $dragon(n)$ la chaîne obtenue après n réécritures.
On a donc : $dragon(0) = 'D'$ et $dragon(1) = 'DDG'$.

1. **a)** Déterminer la chaîne de caractères $dragon(2)$ obtenue après 2 réécritures successives de la chaîne initiale $'D'$.
b) Vérifier que $dragon(3) = 'DDGDDGGDDDGGDGG'$.
c) Expliquer comment la chaîne $dragon(n)$ permet de construire la courbe du dragon D_n de la première partie.

2. **a)** Conjecturer la longueur de la chaîne de caractères renvoyée par $dragon(n)$.
b) Démontrer la conjecture précédente.

3. **a)** Recopier et compléter le code de la fonction miroir(mot) ci-dessous qui renvoie la chaîne miroir obtenue en parcourant mot (composé uniquement des lettres $'G'$ et $'D'$) de droite à gauche **et** en remplaçant $'D'$ par $'G'$ et vice-versa :

```
def miroir(mot):
        mot_miroir = ""
        for lettre in mot:
                ....
        return mot_miroir
```

b) Soit n un entier naturel. Écrire une fonction dragon(n) qui renvoie la chaîne obtenue après n réécritures de la chaîne initiale 'D'.
c) Le module graphique ***turtle*** de Python permet de piloter un « crayon » afin de tracer des figures géométriques. Il dispose des méthodes suivantes dont on donne la documentation ci-dessous :

```
forward(distance)
   Move the turtle forward by the specified distance.
left(angle)
   Turn turtle left by angle units.
right(angle)
   Turn turtle righ by angle units.
```

Soit n et l deux entiers naturels non nuls.
Écrire une fonction **trace_dragon (n,l)** qui réalise le tracé de la courbe du dragon en $\boldsymbol{n}$ itérations avec un pas de $\boldsymbol{l}$ (le pas correspond à la longueur de chaque trait).