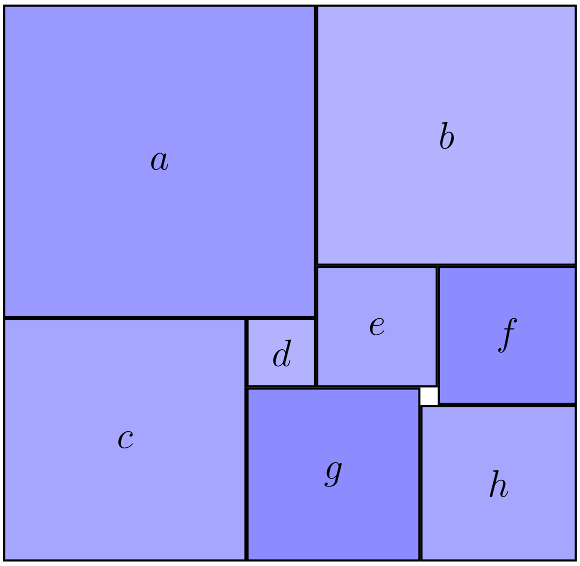
Olympiades 2021,

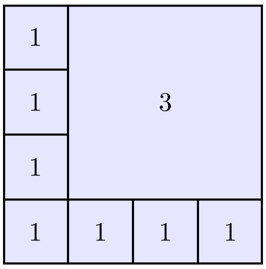
proposition L Lemaire

0.1 Exercice 1 : Quadrature du carré

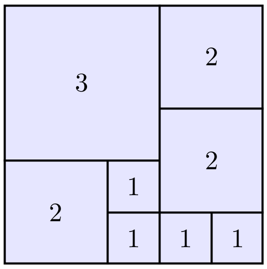
1. On a découpé un rectangle en petits carrés. Le plus petit carré (blanc) a pour côté 1.
   Montrer que le rectangle ci-dessous, découpé en carrés, n'est pas un carré.



2. Le problème de **la quadrature du carré** consiste à découper un carré avec des carrés plus petits (mais pas forcément de la même taille). On souhaite de plus que tous les côtés des carrés du découpage soient des nombres entiers (les plus petits possibles). La dimension de la quadrature sera la taille du carré découpé.
   Par exemple : Voici deux découpages différents d'un carré en 8 carrés :



Quadrature de dimension 4.



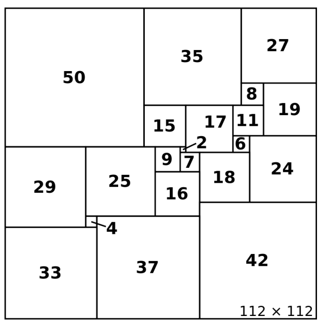
Quadrature de dimension 5.

   Est-il possible de découper un carré en 7 carrés plus petits (mais pas forcément de la même taille) ? en 6 carrés ? en 5 carrés ?

3. Montrer que si l'on peut découper un carré en n carrés alors il est possible de découper un carré en $n+3$ carrés.
   La réciproque est-elle vraie ?
4. Représenter **quatre** partages différents d'un carré en 9 carrés et donner la dimension de chaque quadrature, (deux partages constitués des mêmes carrés, mais placés différemment, sont considérés comme identiques).
5. (a) Prouver qu'il est possible de découper un carré en 2021 carrés.
   (b) En explicitant un partage en 2021 carrés, donner la dimension de cette quadrature.
6. On dit que le découpage est **parfait** quand les carrés sont tous de dimensions différentes.

   En 1939, R. Sprague (1894-1967) trouve un découpage parfait d'un carré en **55 carrés**. De plus, la dimension de cette quadrature est 4205.

   En 1978, A. Duijvestijn (1927-1998) a découvert un découpage parfait d'un carré en **21 carrés** (voir figure contre).
   De plus, la dimension de cette quadrature est 112.
   Il a été démontré depuis que l'on ne peut pas faire moins que 21.



(a) On suppose qu'il existe un découpage parfait d'un carré en n carrés et un découpage parfait d'un carré en m carrés.

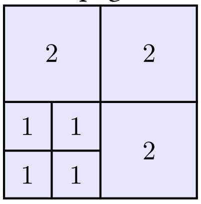
Démontrer que l'on peut construire un découpage parfait en $n + m - 1$ carrés.

(b) Prouver qu'il existe un découpage parfait d'un carré en 2021 carrés.

0.2 Exercice 1 : élément de correction : Quadrature du carré

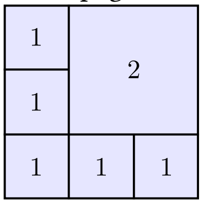
1. Avec les notations du dessin :
   $\boxed{f = e + 1}$ $\quad h = f + 1 = e + 2$ soit $\boxed{h = e + 2}$ $\quad g = h + 1 = e + 3$ soit $\boxed{g = e + 3}$.
   $d + e = g + 1$ donc $d + e = e + 4$ d'où $\boxed{d = 4}$.
   $c = d + g = e + 7$ soit $\boxed{c = e + 7}$ $\quad a = c + 4 = e + 11$ soit $\boxed{a = e + 11}$.
   $b + e = a + 4 \iff 3e + 1 = e + 15 \iff 2e = 14 \iff \boxed{\text{e=7}}$
   On en déduit que $a = 18$, $b = 15$ et $c = 14$ donc le rectangle a pour dimension 32×33 et ce n'est pas un carré.
2. Petits découpages.

   Découpage en 7 carrés :

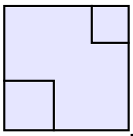
   Quadrature de dimension 4.

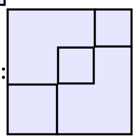
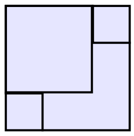
   Découpage en 6 carrés :

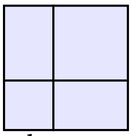
   

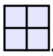
   Quadrature de dimension 3.

   Prouvons que le découpage en 5 carrés est impossible. Deux sommets opposés sont les sommets de 2 carrés de découpe, il y a 3 cas :

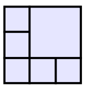
   — Ces deux carrés n'ont pas de sommet commun : 

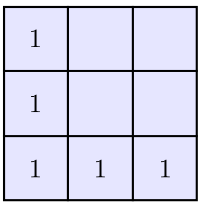
   Dans la partie restante, il est impossible de placer 3 carrés :  ou 

   — Ces deux carrés ont un sommet commun : 

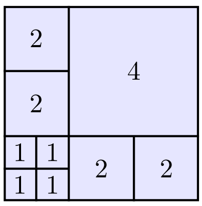
   La partie restante est constituée de 2 rectangles ou 2 carrés (avec impossibilité de faire 3 carrés).
3. Si un carré est découpé en n carrés, on peut choisir un de ces carrés (il en reste $n - 1$) que l'on découpe en 4 . On obtient alors $n - 1 + 4 = n + 3$ carrés.

   La réciproque est fausse car on peut découper en 8 carrés mais pas en 5 carrés.
4. Partages différents d'un carré en 9 carrés :

   On peut partir d'une découpe en 6 carrés : 
   Puis l'on partage un carré en 4. On obtient deux possibilités

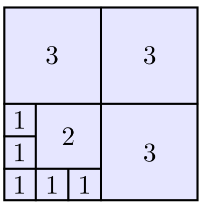
   

   Quadrature de dimension 3.

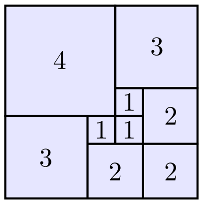
   Quadrature de dimension 6.

   On peut aussi partir d'une découpe de 4 et l'on découpe un des carrés en 6. On obtient :

   Quadrature de dimension 6.

Enfin avec un peu d'imagination, on a le partage :



Quadrature de dimension 7.

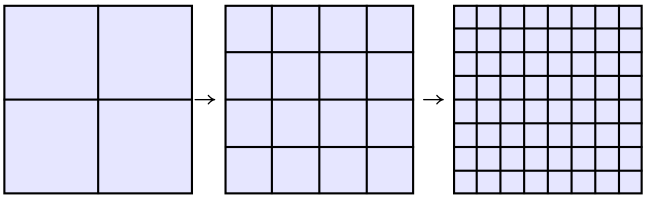
5. (a) D'après la question 3, si l'on peut découper un carré en n carrés, il est possible de découper ce carré en $n+3$ carrés. De proche en proche, il sera possible de découper le carré en $n+3k$ carrés avec $k \in \mathbb{N}$.

   Or $2021 = 8 + 671 \times 3$, comme il est possible de découper un carré en 8 carrés, on en déduit qu'il est possible de découper un carré en 2021 carrés.

   (b) Bien évidemment, la dimension de la quadrature dépend du découpage.

   Nous allons expliciter un découpage permettant de calculer simplement la dimension :

   On part d'un carré que l'on divise en 4, puis chaque carré en 4 et ainsi de suite ...



   On obtient un carré découpé avec $4^5 = 1024$ carrés égaux (quadrature de dimension 32).

   On prend 330 carrés que l'on divise en 4, on a donc $1024 + 330 \times 3 = 2014$ carrés (quadrature de dimension 64).

   On prend enfin un « grand » carré que l'on divise en 8, on a donc $2014 + 7 = 2021$ carrés (quadrature de dimension 128).

   On aurait pu faire une autre quadrature : on divise 3 fois en 9, on a $9^3 = 729$ *carrés (quadrature de dimension* 27*). On prend 160 carrés que l'on divise en 9, on a donc* $729 + 160 \times 8 = 2007$ *carrés (quadrature de dimension* 81*). On prend enfin deux « grands » carrés que l'on divise en 7, on a donc* $2009 + 2 \times 6 = 2021$ *carrés (quadrature de dimension* $27 \times 12 = 324$*).*

6. (a) On suppose qu'il existe un découpage parfait d'un carré en n carrés et un découpage parfait d'un carré en m carrés.

   On prend le plus petit carré du découpage parfait en n carrés et l'on découpe ce petit carré en m carrés (découpage parfait).

   On obtient ainsi un découpage parfait en $n + m - 1$ carrés.

   (b) Pour trouver un découpage parfait en 2021 carrés on n'utilise que celui de Duijvestijn.

   On réitère 100 fois l'opération précédente : à partir du découpage parfait en 21 carrés, on construit un découpage parfait en $21 + 20 = 41$ carrés, puis en $41 + 20 = 61$ carrés, ..., puis en $21 + 100 \times 20 = 2021$ carrés.