MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE,
DE LA JEUNESSE
ET DES SPORTS
Liberté
Égalité
Fraternité

ACADÉMIE
DE PARIS
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2022

Exercices académiques - Académie de Paris

La partie académique se déroule en deux heures.

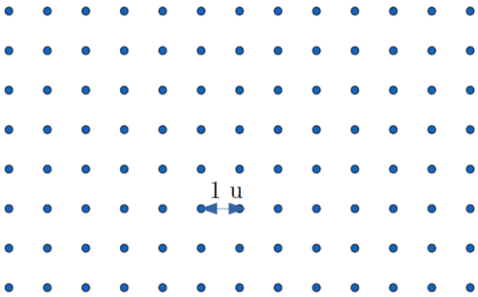
Les candidats traitent par équipe les deux exercices.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre. Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition. Chaque équipe éventuellement constituée rend une seule copie.

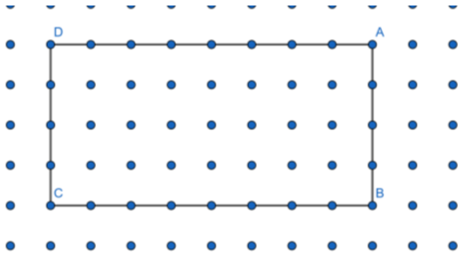
Exercice 1 : Formule de Pick

Le plan (P) est quadrillé par des points régulièrement espacés. La distance minimale entre deux points est égale à 1 unité de longueur (u.). À cette unité de longueur est associée une unité d'aire u.a.

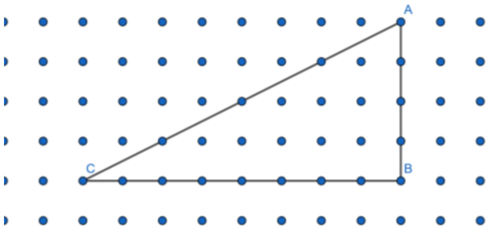


1. Calculer, en unité d'aire, l'aire des figures suivantes :

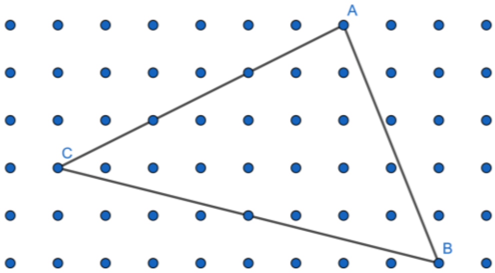
   a. le rectangle ABCD ;



   b. le triangle ABC rectangle en B ;



   c. le triangle quelconque ABC (on pourra inscrire ce triangle dans un rectangle et faire apparaître trois triangles rectangles).



L'objectif de l'exercice est maintenant de montrer la formule de Pick :

Un polygone non croisé dont les sommets sont des points du quadrillage a une aire égale à :

$$\boldsymbol{S = \frac{b}{2} + i - 1,}$$

où $\boldsymbol{i}$ est le nombre de points situés à l'intérieur du polygone et $\boldsymbol{b}$ est le nombre de points situés sur le bord du polygone.

2. Vérifier que la formule de Pick est vraie pour les figures des questions 1.a, 1.b et 1.c.

3. Démontrer la formule de Pick pour :
   a. les rectangles dont les côtés suivent les points du quadrillage (du type de la question 1.a) ;
   b. les triangles rectangles dont les côtés perpendiculaires suivent les points du quadrillage (du type de la question 1.b) ;
   c. les triangles quelconques (du type de la question 1.c).

4. En utilisant la formule de Pick, prouver qu'il n'est pas possible de construire un triangle équilatéral dont les trois sommets se situent sur des points du quadrillage initial.

5. Démontrer la formule de Pick pour les polygones non croisés quelconques.

Exercice 2 : Pointe de Platon

Un **polygone régulier** est un polygone dont les côtés ont la même longueur et dont les angles ont la même mesure. Un polygone régulier est inscrit dans un cercle dont le centre est appelé le centre du polygone régulier. Une **pyramide** est **régulière** lorsque sa base est un polygone régulier et lorsque les faces latérales sont des triangles isocèles identiques. Si une **pyramide** est **régulière** alors sa **hauteur** passe par le centre de sa base.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3 et a un réel strictement positif. On appelle **n-pointe de Platon** une pyramide régulière dont la base est un polygone à n côtés et dont **toutes** les arêtes ont la même longueur a.

Le but de ce problème est d'étudier, selon l'entier n, l'existence des n-pointes de Platon.

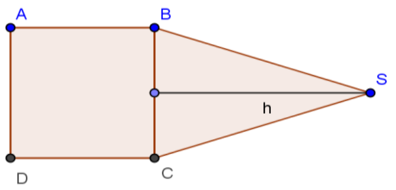
1) **Étude de la 3-pointe de Platon**

   a) Tracer un patron d'un tétraèdre régulier dont les arêtes ont pour longueur $a = 5$ cm.

   b) En déduire qu'il est possible de construire une 3-pointe de Platon.

2) **Étude de la 4-pointe de Platon**

Soit ABCD un carré de côté $a > 0$ et BCS un triangle isocèle en S dont la hauteur issue de S mesure *h* (voir la figure ci-contre).



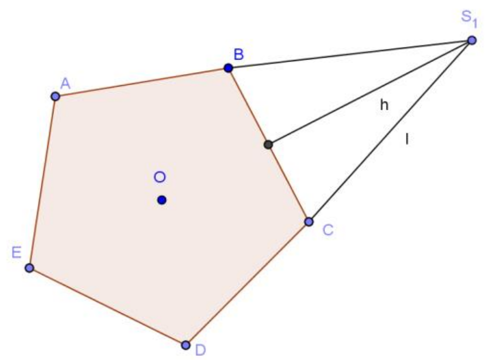
a) Expliquer pourquoi cette figure peut être complétée afin d'obtenir un patron d'une pyramide régulière à base carrée si et seulement si $h > \frac{a}{2}$.

b) En déduire qu'il est possible de construire une 4-pointe de Platon.

c) Construire un patron de la 4-pointe de Platon dans le cas où $a = 3$ cm.

3) **Étude de la 5-pointe de Platon**

ABCDE est un pentagone régulier de côté a. Le point O est le centre de ce pentagone.
S_1 est le sommet principal d'un triangle isocèle de base [BC] et dont la hauteur issue de S_1 mesure h. On note l la longueur S_1C.
On désignera par S_2, S_3, S_4, S_5 les sommets principaux des triangles isocèles construits de façon analogue à S_1, respectivement de bases [CD], [DE], [EA] et [AB]. Ils ne sont pas tracés sur la figure ci-dessous.



a) Justifier que la figure complète $BS_1CS_2DS_3ES_4\text{A}S_5$ est le patron d'une pyramide régulière de base ABCDE si et seulement si

$$l > \frac{a}{2\sin 36°}$$

b) En déduire qu'il est possible de construire une 5-pointe de Platon.

4) **Étude générale de la n-pointe de Platon**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3 et a un réel strictement positif. On considère une pyramide régulière de base $A_1A_2 \ldots A_n$, polygone régulier à n côtés, chacun de longueur a.

On désigne par *S* le sommet de la pyramide et on suppose que $SA_1 = SA_2 = \cdots = SA_n = l$.

Déterminer l'ensemble des valeurs d'entiers *n* permettant de réaliser une *n*-pointe de Platon.