第六次作业 系统频域分析

6.1 LTI系统y’’(t) + 5y’(t) + 6y(t) = f(t)。求1）频响特性H(ω)；2）f(t) = 3cos(t+0.2π)ε(t)时的稳态响应$y_{ss}(t)$。

$$H(w) = \frac{1}{(j\omega)^2 + 5j\omega + 6} = \frac{-1}{\omega^2 - 5j\omega - 6}$$

$$H(1) = \frac{-1}{\omega^2 - 5j\omega - 6}\Big|_{\omega=1} = = \frac{1}{5+5j} = \frac{1}{5\sqrt{2}} e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$y_{ss}(t) = \frac{3}{5\sqrt{2}}\cos(t+0.2\pi - \frac{\pi}{4})\varepsilon(t)$$

6.2 LTI系统的频响特性$H(\omega)=\frac{j\omega}{j\omega+4}$，求系统在输入信号f(t) =1+ 10cos(4t)作用下的响应y(t)

若$H(\omega)=\frac{2}{j\omega+4}$，求系统在输入信号f(t) =1+ 10cos4t)作用下的响应y(t)。

。

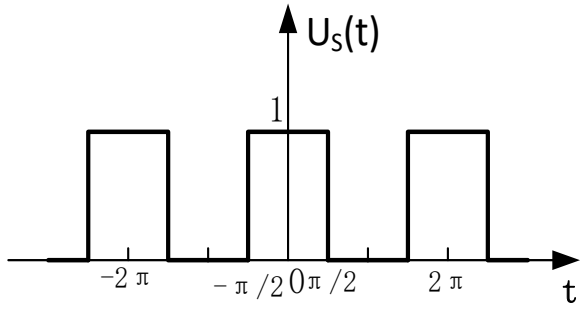
$$H(\omega)=\frac{j\omega}{j\omega+4} \qquad H(0)=0 \qquad H(4)=\frac{j4}{j4+4}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{j\pi/4}$$

$$y(t)=0+\frac{10}{\sqrt{2}}\cos(4t+\pi/4)$$

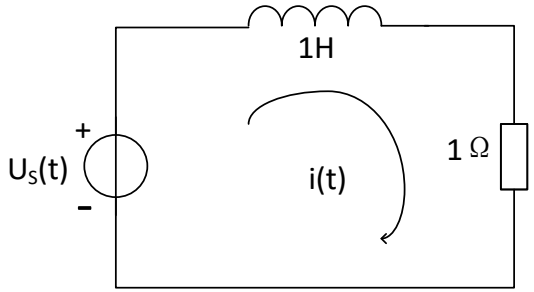
$$H(\omega)=\frac{2}{j\omega+4} \qquad H(0)=0.5 \qquad H(4)=\frac{2}{j4+4}=\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-j\pi/4}$$

$$y(t)=0.5+\frac{10}{2\sqrt{2}}\cos(4t-\pi/4)$$

6.3 如图所示的周期性方波电压作用于RL电路，试求电流的前五次谐波。



(a)



(b)

$g_\tau(t) \leftrightarrow \tau Sa(\omega\tau/2)$

$$U_s(t) = G_\pi * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-2n\pi)$$

单周期信号的FT变换为 $G_\pi(t) \leftrightarrow \pi Sa(\omega\pi/2)$ $T = 2\pi$ $\Omega = 1$

$$F_n = \frac{1}{T}F_0(\omega)|_{\omega=n\Omega} = \frac{\pi}{2\pi}Sa(n\pi/2) = \frac{1}{2}Sa(n\pi/2) \Rightarrow a_n = Sa(n\pi/2)$$

$$i_s(\omega) = \frac{U_s(\omega)}{j\omega L + 1}$$

$$U_s(t) = 0.5 + \frac{2}{\pi}\cos(t) + 0 - \frac{2}{3\pi}\cos(3t) + 0 + \frac{2}{5\pi}\cos(5t) + \cdots\cdots$$

$$H(\omega) = \frac{i_s(\omega)}{U_s(\omega)} = \frac{1}{j\omega+1}$$

$\omega = n\Omega = n$

$$H(1) = \frac{1}{j+1} = \frac{1e^{-j\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$$

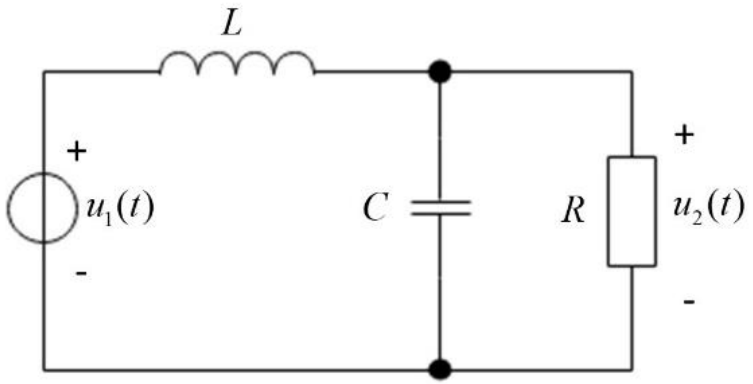
$$H(3) = \frac{1}{j3+1} = \frac{1e^{-jarctan3}}{\sqrt{10}}$$

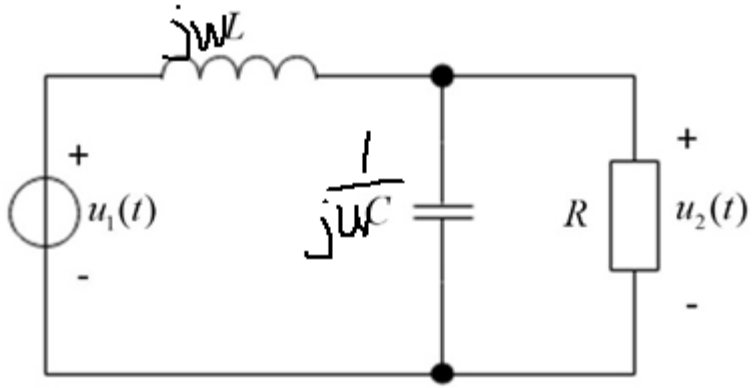
$$H(5) = \frac{1}{j5+1} = \frac{1e^{-jarctan5}}{\sqrt{26}}$$

电流的前五次谐波为：不包括直流

$$i_s(t) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\cos(t - \frac{\pi}{4}) + 0 - \frac{2}{3\sqrt{10}\pi}\cos(3t - arctan3) + 0 + \frac{2}{5\sqrt{26}\pi}\cos(5t - arctan5)$$

6.4 求下图所示电路的系统函数$H(\omega)=U_2(\omega)/U_1(\omega)$，其中$R=1\Omega$, $L=1\mathrm{H}$, $C=1\mathrm{F}$。





根据分压公式，可得

$$U_2(\omega)=\frac{R\,//\,\frac{1}{j\omega c}}{j\omega L+R\,//\,\frac{1}{j\omega c}}U_1(\omega)$$

系统函数

$$H(\omega)=\frac{U_2(\omega)}{U_1(\omega)}=\frac{R//\frac{1}{j\omega c}}{j\omega L+R//\frac{1}{j\omega c}}$$

代入$R=1\Omega$, $L=1\mathrm{H}$, $C=1F$

$$H(\omega)=\frac{1}{(j\omega)^2+j\omega+1}$$

6.5已知系统的频率特性 $$H(\omega)=\begin{cases}\left[4-|\omega|\right]e^{-j\omega} & |\omega|<4 \quad rad/s \\ 0 & |\omega|\geq 4 \quad rad/s\end{cases}$$

输入为$f(t)=2+cos(t)+0.2\,cos(3t+\pi/6)+0.1\,cos(5t+\pi/3)$。（1）求系统响应y(t)；(2) 问信号经过系统后是否有失真？若有失真，是幅度失真还是相位失真？或是幅度、相位皆有失真？

$H(0)=4$

$H(1)=3e^{-j}$

$H(3)=1e^{-j3}$

$H(5)=0$

$y(t)=8+3cos(t-1)+0.2\,cos(3t+\pi/6-3)$

仅幅度失真

6.6

$$H(\omega)=\begin{cases}5\ e^{-j\ 2}, \omega>0\\ 5\quad ,\ \ \omega=0\\ 5\ e^{j\ 2}, \omega<0\end{cases}$$

输入为 $f(t)=2+cos(\ t)+0.2\,cos(\ 3t)+0.1\,cos(\ 5t)$ 。（1）求系统响应y(t)；(2) 问信号经过系统后是否有失真？若有失真，是幅度失真还是相位失真？或是幅度、相位皆有失真？

$H(0)=5$

$H(1)=5e^{-j2}$

$H(3)=5e^{-j2}$

$H(5)=5e^{-j2}$

$$\mathrm{y}(t)=2\times5+5\,cos(\ t-2)+0.2\times5\,cos(\ 3t-2)+0.1\times5\,cos(\ 5t-2)$$

仅相位失真

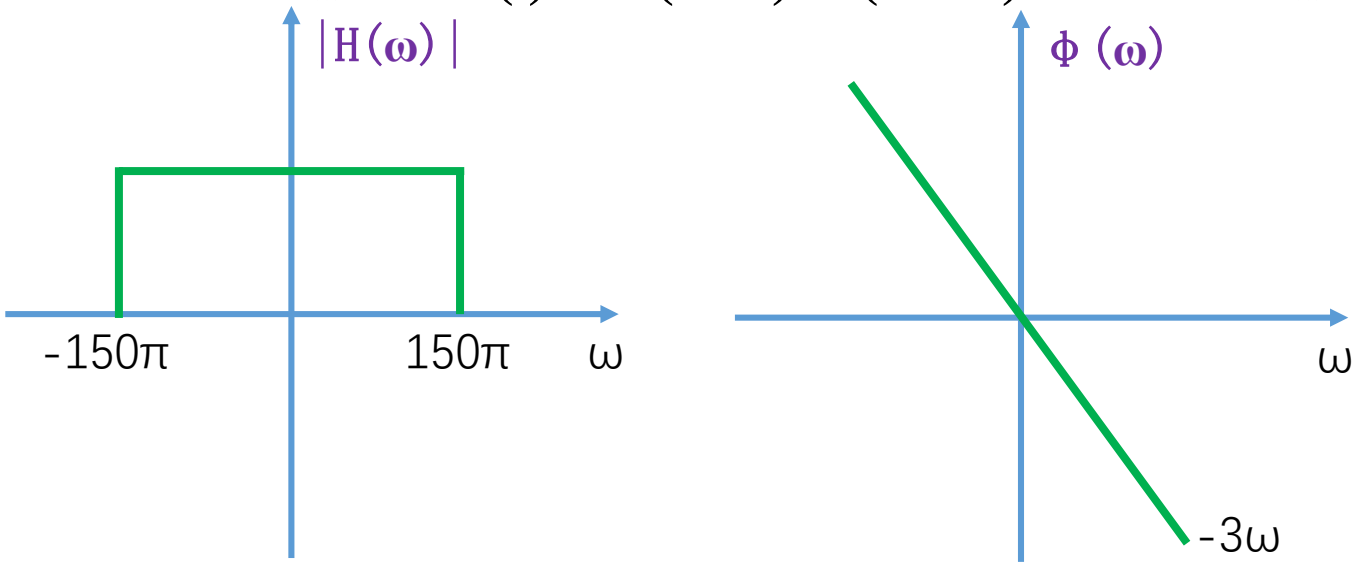
6.7 理想低通滤波器频响特性$H(\omega)=5G_{300\pi}(\omega)e^{-j3\omega}$ 。

（1）画出幅频、相频特性曲线；

（2）求输入为f (t) = 10 +2cos (100πt+π/6)+ 4cos(300πt+π/3)时的滤波器输出y(t)；

（3）理想低通滤波器是否是因果系统？能否物理实现？

（4）求输入为f (t) = Sa(20πt)cos(100πt)时的滤波器输出y(t)。



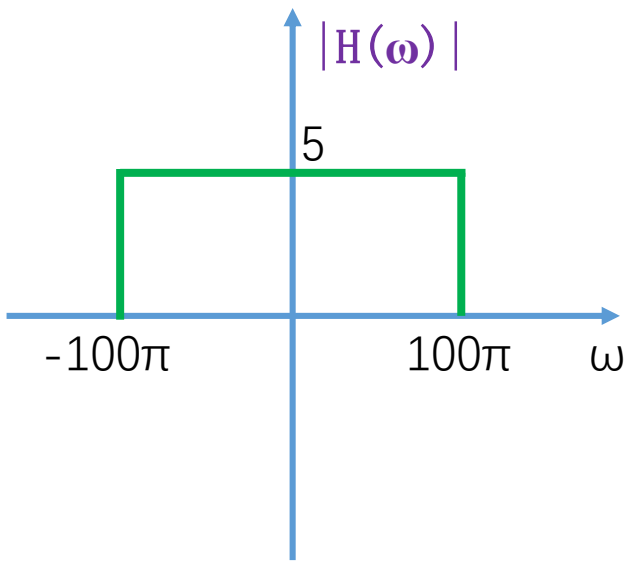
y (t) = 10× 5 +2× 5cos (100πt+π/6-3× 100π)+ 0= 50 +10cos (100πt+π/6)

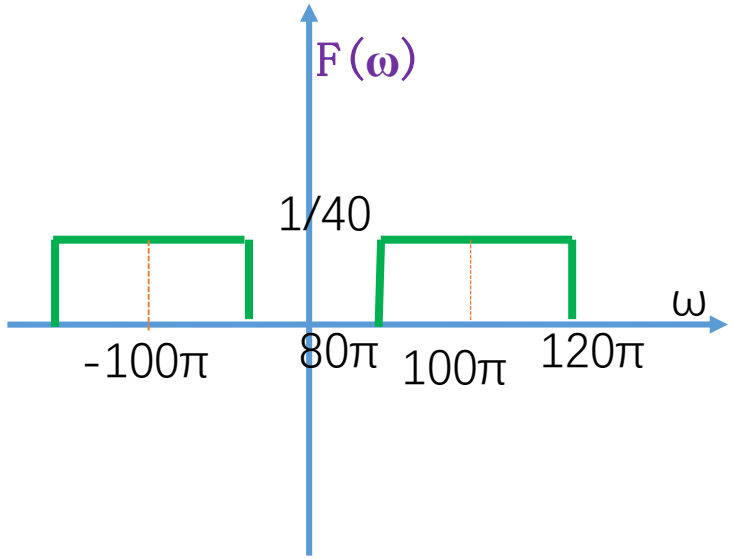
y (t) = 5Sa(20πt-60π)cos(100πt-300π)

6.8 理想低通滤波器频响特性$H(\omega)=5G_{200\pi}(\omega)e^{-j3\omega}$ 。

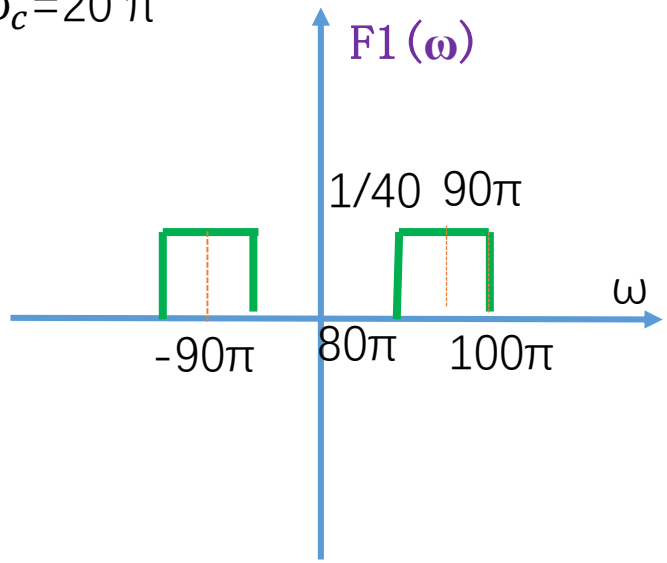
求输入为f (t) = Sa(20πt)cos(100πt)时的滤波器输出y(t)。

$$Sa(\omega_c t) \leftrightarrow \frac{\pi}{\omega_c} G_{2\omega_c}(\omega)$$

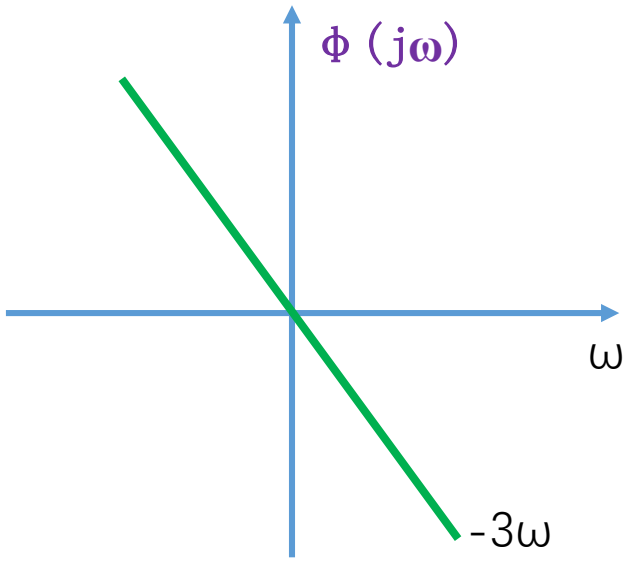




ω_c=20 π



$$F1(\omega) \leftrightarrow 0.5S_a(10\pi t)\cos(90\pi t)$$



$$y(t)=5\times 0.5S_a(10\pi(t-3))\cos(90\pi(t-3))$$

6.9 有限频带信号*f(t)*的最高频率为100Hz，若对下列信号进行时域取样，求最小取样频率*fs*。 （1）f(3t) （2）$f^2(t)$ （3）f(t)*f(2t) （4）$f(3t)+f(t)f(3t)$

$$f_s \geq 2f_m$$

$$f(t) \Longleftrightarrow F(\omega) \qquad f_m = 100Hz$$

$$f(3t) \Longleftrightarrow F(\omega/3) \qquad f_m = 300Hz \qquad f_s min = 2f_m$$

$$f^2(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}F(\omega) * F(\omega) \qquad f_m = 200Hz$$

$$f(t) * f(2t) \Longleftrightarrow F(\omega) \times F(\omega/2) \qquad f_m = 100Hz$$

$$f(3t) + f(t)f(3t) \Longleftrightarrow F\left(\frac{\omega}{3}\right) + F(\omega) * F(\omega/3) \qquad f_m = 400Hz$$