(第八次作业 系统S域分析

8.1、已知描述系统的微分方程和初始状态如下，试求其零输入响应、零状态响应和全响应，指出自由和强迫响应、暂态和稳态响应。

$$y''(t)+4y'(t)+4y(t)=f'(t)+3f(t),\ \ y(0\_)=1,\ y'(0\_)=2,\ \ f(t)=\left(2+e^{-t}\right)\varepsilon(t)$$

S域方法：

$$F(s)=\frac{2}{s}+\frac{1}{s+1}$$

两边拉氏变换：

$$s^2Y(s)-sy(0\_)-y'(0\_)+4sY(s)-4y(0\_)+4Y(s)=(s+3)F(s)=3+\frac{6}{s}+\frac{2}{s+1}$$

零状态响应：

$$Y_{zs}(S)=\frac{3+\frac{6}{s}+\frac{2}{s+1}}{s^2+4s+4}=\frac{3s^2+11s+6}{s(s+1)(s^2+4s+4)}=\frac{1.5}{s}+\frac{2}{s+1}+\frac{-3.5}{s+2}+\frac{-2}{s^2+4s+4}$$

$$y_{zs}(t)=(1.5+2e^{-t}-3.5e^{-2t}-2te^{-2t})\varepsilon(t)$$

零输入响应：

$$Y_{zi}(S)=\frac{sy(0\_)+y'(0\_)+4y(0\_)}{s^2+4s+4}=\frac{s+6}{s^2+4s+4}=\frac{1}{s+2}+\frac{4}{s^2+4s+4}$$

$$y_{zi}(t)=e^{-2t}+4te^{-2t}\qquad t\geq 0$$

全响应

$$y(t)\ =y_{zi}+y_{zs}=e^{-2t}+4te^{-2t}+-3.5e^{-2t}\text{-}2te^{-2t}+2e^{-t}+1.5\qquad t>0$$

零输入响应 $y_{zi}=e^{-2t}+4te^{-2t}\qquad t\geq 0$

零状态响应 $y_{zs}=(-3.5e^{-2t}-2te^{-2t}+1.5+2e^{-t})\varepsilon(t)$

全响应

$$
\begin{aligned}
y(t) &= y_{zi}+y_{zs} \\
&= (\underbrace{e^{-2t}+4te^{-2t}+-3.5e^{-2t}-2te^{-2t}}_{\text{自由响应}}+\underbrace{2e^{-t}+1.5}_{\text{强迫响应}})\varepsilon(t)
\end{aligned}
$$

$$
\underbrace{e^{-2t}+4te^{-2t}+-3.5e^{-2t}-2te^{-2t}+2e^{-t}}_{\text{暂态响应}}+\underbrace{1.5}_{\text{稳态响应}}
$$

8.2、 描述系统的方程为$y'(t)+2y(t)=f''(t)$。求其冲激响应和阶跃响应。

$$sY(s)+2Y(s)=s^2F(s)$$

$$H(s)=\frac{Y(s)}{F(s)}=\frac{s^2}{s+2}=s-2+\frac{4}{s+2}$$

冲激响应 $$h(t)=\delta'(t)-2\delta(t)+4e^{-2t}\varepsilon(t)$$

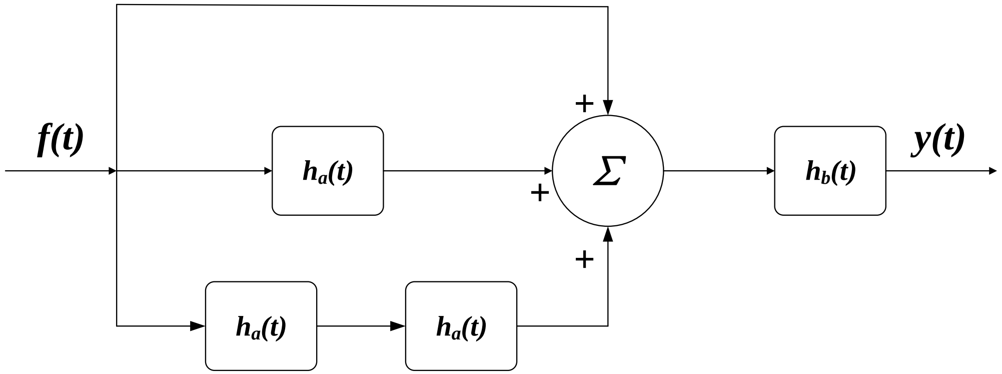
阶跃响应

$$G(s)=H(s)F(s)=\frac{s^2}{s+2}\times\frac{1}{s}=\frac{s}{s+2}=1-\frac{2}{s+2}$$

$$g(t)=\delta(t)-2e^{-2t}\varepsilon(t)$$

8.3、 如图所示的系统，它由几个子系统组合而成，各个子系统的冲激响应分别为

$h_a(t)=\delta(t-1)$ $h_b(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-3)$ 。求复合系统的冲激响应。



$$y(t)= f(t)*[h_a(t)*h_a(t)+h_a(t)+1]*h_b(t)$$

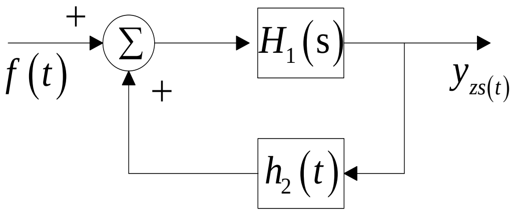
两边同时取拉氏变换 $H(s)=\frac{Y(s)}{F(s)}=[H_a(s)\times H_a(s)+H_a(s)+1]\times H_b(s)$

$=(e^{-s}e^{-s}+e^{-s}+1)\times(1\text{-}e^{-3s})/\mathrm{s}$

$=(1+e^{-s}+e^{-2s}\text{-}e^{-3s}-e^{-4s}\text{-}e^{-5s})/\mathrm{s}$

$$h(t)=\varepsilon(t)+\varepsilon(t-1)+\varepsilon(t-2)\text{-}\varepsilon(t-3)\text{-}\varepsilon(t-4)\text{-}\varepsilon(t-5)$$

8.4、 如图所示复合系统是由2个子系统组成，子系统的系统函数或冲激响应如下，求复合系统的冲激响应。



$$H_1(s)=\frac{1}{s+1},h_2(t)=2e^{-2t}\varepsilon(t)$$

$$h_1(t)=e^{-t}\varepsilon(t) \qquad H_2(s)=\frac{2}{s+2}$$

$$y_{zs}(t)=[f(t)+y_{zs}(t)*h_2(t)]*h_1(t)$$

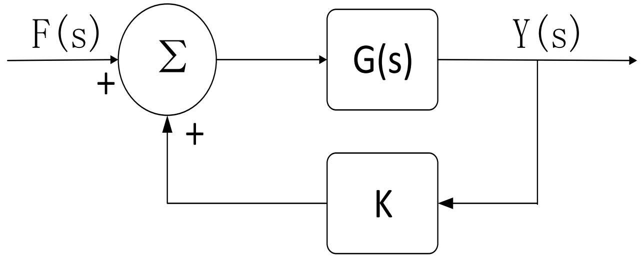
$$y_{zs}(t)-y_{zs}(t)*h_2(t)*h_1(t)=f(t)*h_1(t)$$

$$H(s)=\frac{Y_{zs}}{F(s)}=\frac{H_1(s)}{1-H_1(s)\times H_2(s)}$$

$$=\frac{s+2}{s(s+3)}=\frac{2}{3}\frac{1}{s}+\frac{1}{3}\frac{1}{s+3}$$

$$h(t)=(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}e^{-3t})\varepsilon(t)$$

8.5、如图所示为反馈因果系统，已知$G(s)=\frac{s}{s^2+4s+4}$，K为常数。为使系统稳定，试确定K值的范围。



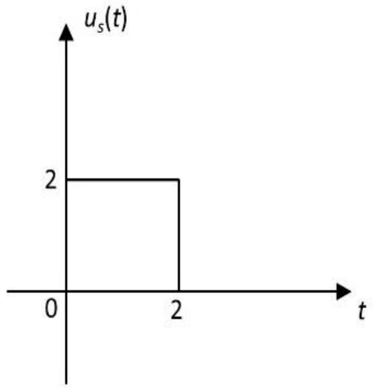
$$[F(s)+kY(s)]\times G(s)=Y(s)$$

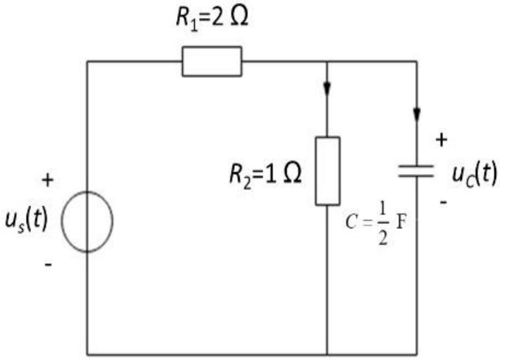
$$F(s)\times G(s)+kY(s)\times G(s)=Y(s)$$

$$H(s)=\frac{Y(s)}{F(s)}=\frac{G(s)}{1-kG(s)}=\frac{s}{s^2+(4-k)s+4} \Rightarrow k<4$$

补充说明：对于$H(s)=\frac{?}{s^2+as+b}$判定稳定性，充要条件是a>0,b>0

8.6、（1）电路模型与输入电压波形如下图所示，已知电容的初始储能为零，求响应 $u_C(t)$





$\frac{1}{sc}$

$$U_s(t) = 2[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-2)]$$

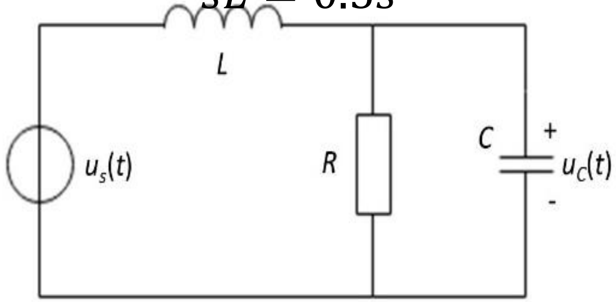
$$U_s(s) = 2[\frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-2s}] = \frac{2}{s}[1 - e^{-2s}]$$

$$U_c(s) = \frac{\frac{1}{1+sc}}{\frac{1}{1+sc}+2} U_s(s) = \frac{1}{3+s}\frac{2}{s}[1 - e^{-2s}] = \frac{2}{3}(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+3})[1 - e^{-2s}]$$

$$U_c(t) = \frac{2}{3}[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-2)] - \frac{2}{3}[e^{-3t}\varepsilon(t) - e^{-3(t-2)}\varepsilon(t-2)]$$

（2）如下图所示网络，已知$L=\frac{1}{2}\mathrm{H}, C=1\mathrm{F}, R=\frac{1}{3}\Omega$，电容、电感的初始储能为零，输入信号$u_s(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$，求响应$u_C(t)$。

$sL=0.5s$



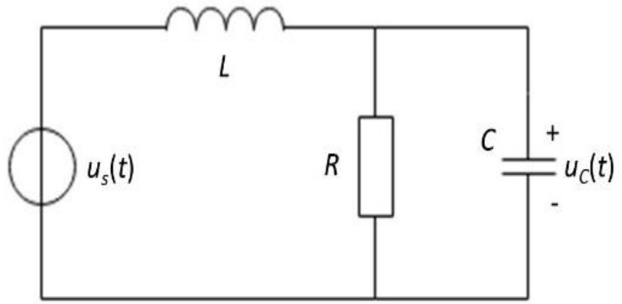
$\frac{1}{sc}=\frac{1}{s}$

方法1：S域

$$u_s(s)=\frac{1}{s+1}$$

$$u_c(s)=\frac{\frac{1}{\frac{1}{R}+sc}}{\frac{1}{\frac{1}{R}+sc}+sL}u_s(s)=\frac{\frac{1}{3+s}}{\frac{1}{3+s}+0.5s}\,\frac{1}{s+1}=\frac{2}{(s+2)(s+1)^2}=\frac{2}{s+2}+\frac{2}{(s+1)^2}-\frac{2}{s+1}$$

$$\Rightarrow\quad u_C(t)=2[e^{-2t}+t\,e^{-t}-e^{-t}]\varepsilon(t)$$



方法2：

$$L\left(\frac{u_C(t)}{R}+C\,u'_C(t)\right)' + u_C(t) = u_s(t)$$

$$0.5u''_c(t) + 1.5u'_C(t) + u_C(t) = u_s(t)$$

$$u''_c(t) + 3u'_C(t) + 2u_C(t) = 2u_s(t)$$

$$u''_c(t) + 3u'_C(t) + 2u_C(t) = 0$$ **特征根为−1，−2**

可以先求单位冲激响应（系统函数）

$$h''_c(t) + 3h'_C(t) + 2h_C(t) = 2\delta(t)$$

$h(t)$的**通解：** $(k_1\, e^{-t} + k_2\, e^{-2t})\varepsilon(t)$

$$(k_1 + k_2)\delta'(t) + (2k_1 + k_2)\delta(t) = 2\delta(t)$$

$k_1=2$

$k_2=-2$

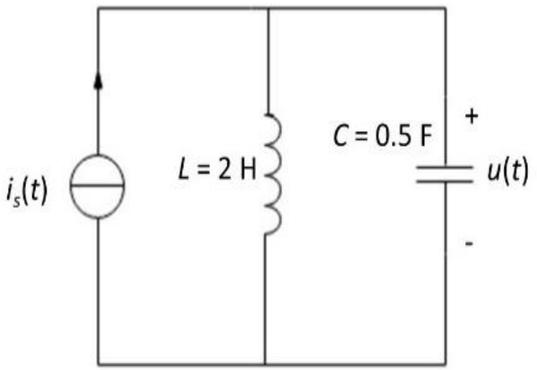
$$h(t) = (2e^{-t} - 2\,e^{-2t})\varepsilon(t)$$

输入信号$u_s(t) = e^{-t}\varepsilon(t)$作用下

$$u_C(t) = h(t) * u_s(t) = (2e^{-t} - 2\,e^{-2t})\varepsilon(t) * e^{-t}\varepsilon(t)$$

$$= 2\left[te^{-t} - \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{2-1}\right]\varepsilon(t) = 2\left[e^{-2t} + t\,e^{-t} - e^{-t}\right]\varepsilon(t)$$

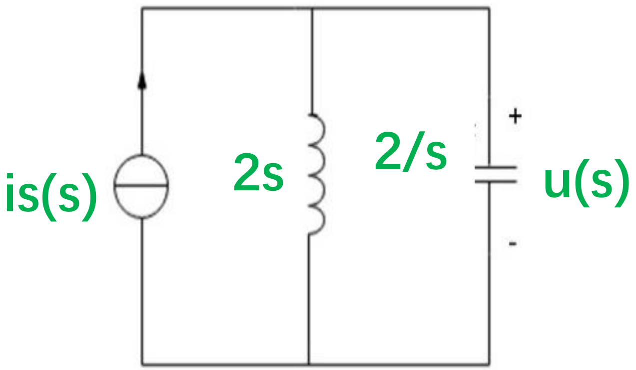
8.7、电路如下图所示。（1）画出s域电路模型；（2）若电流源$i_s(t)=\varepsilon(t)$，求电压$u(t)$，并指出其中自由&强迫、零输入&零状态、暂态、稳态解。



电容电感在电流源is加入前均无初始储能

$$(s^2+1)u(s)=2sI(s) \qquad H(s)=\frac{2s}{s^2+1}$$

S域模型 $i_s(s)\times\frac{1}{\frac{1}{2s}+\frac{1}{2/s}}=u(s)$ $\qquad u(s)\times\left(\frac{1}{2s}+\frac{1}{2/s}\right)=i_s(s)$



$i_s(t)=\varepsilon(t)$时， $u(s)=\frac{2s}{s^2+1}\times\frac{1}{s}=\frac{2}{s^2+1}$

$$u(t)=2\sin t\,\varepsilon(t)\quad V$$

由于电容电感在电流源is加入前均无初始储能

零状态响应： $y_{zs}=2\sin t\,\varepsilon(t)\quad V$

零输入响应： $y_{zi}=0V$

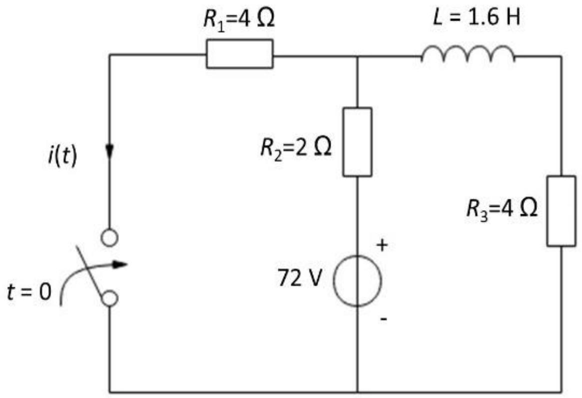
自由响应： $2\sin t\,\varepsilon(t)\quad V$

强迫响应： 0

暂态响应： 0

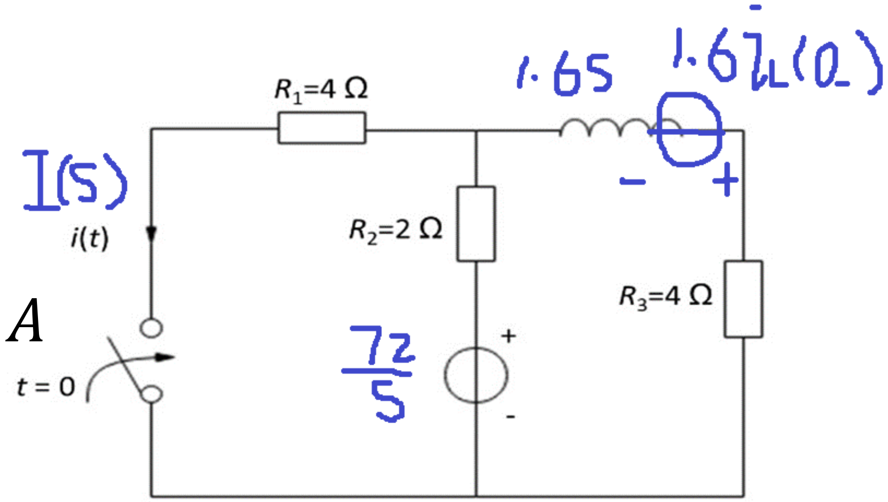
稳态响应： $2\sin t\,\varepsilon(t)\quad V$

8.8、电路如下图所示。已知$t<0$时电路处于稳定状态，$t=0$时开关闭合；求$t>0$流过电阻R_1的电流。（1）全响应$i(t)$；（2）零输入响应分量$i_{zi}(t)$；（3）零状态响应分量$i_{zs}(t)$。



$i_L(0\_)= i_L(0+)= 72/2+4=12A$

$$\left[\frac{\frac{72}{s}-4I(s)}{2}-I(s)\right]\times(1.6s+4)-1.6i_L(0\_)=4I(s)$$



$$36\times1.6+\frac{36\times4}{s}-1.6i_L(0\_)=(16+4.8s)\times I(s)$$

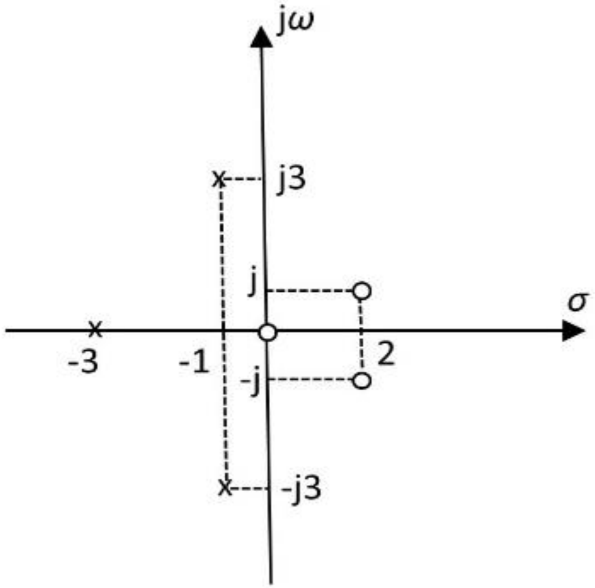
$$I_{zi}(s)=\frac{-1.6i_L(0\_)}{16+4.8s}=\frac{-4}{s+10/3}\qquad i_{zi}(t)=-4e^{-10/3t}\ \varepsilon(t)\quad A$$

$$I_{zs}(s)=\frac{36\times1.6+\frac{36\times4}{s}}{16+4.8s}=\frac{12s+30}{s(s+10/3)}=\frac{9}{s}+\frac{3}{s+10/3}$$

$$i_{zs}(t)=9\varepsilon(t)+3e^{-10/3t}\ \varepsilon(t)\quad A$$

$$i(t)=i_{zi}(t)+i_{zs}(t)=(9-e^{-10/3t})\ \varepsilon(t)\quad A$$

8.9、某系统函数的零、极点分布如下图所示，已知 $H(s)|_{s=\infty}=5$，请写出系统函数$H(s)$的表达式。



$$H(\mathrm{s})=\frac{Ks(s-2+j)(s-2-j)}{(s+3)[s-(-1+3j)][s-(-1-3j)]}$$
$$=\frac{Ks(s^2-4s+5)}{(s+3)(s^2+2s+10)}$$

$H(\infty)=5$ → $K=5$

$$H(\mathrm{s})=\frac{5s(s^2-4s+5)}{(s+3)(s^2+2s+10)}$$