第 七 次作业解答

（信号的S域分解）

7.1 利用常用函数[例如$\varepsilon(t)$，$e^{-\alpha t}\varepsilon(t)$，$\sin(\beta t)\varepsilon(t)$，$\cos(\beta t)\varepsilon(t)$ 等]的象函数及拉普拉斯变换的性质，求下列函数f(t)的拉普拉斯变换F(s)。

（1） $e^{-t}[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)]$

$$e^{-s_0 t}f(t)\leftrightarrow F(s+s_0)$$

$$f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0)\leftrightarrow F(s)e^{-st_0}$$

解：

思路一：

$$f_0(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)\leftrightarrow F_0(s)=\frac{1}{s}\left(1-e^{-2s}\right)$$

$$f(t)=e^{-t}f_0(t)\leftrightarrow F(s)=F_0(s+1)=\frac{1}{s+1}\left(1-e^{-2(s+1)}\right)$$

思路二：

$$f(t)=e^{-t}\left[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)\right]=e^{-t}\varepsilon(t)-e^{-t}\varepsilon(t-2)=\underline{e^{-t}\varepsilon(t)}-e^{-2}\underline{e^{-(t-2)}\varepsilon(t-2)}$$

$$f_1(t)=e^{-t}\varepsilon(t) \qquad f_2(t)=f_1(t-2)$$

$$f(t)=f_1(t)-e^{-2}f_1(t-2)\leftrightarrow F(s)=F_1(s)(1-e^{-2}e^{-2s})=\frac{1}{s+1}\left(1-e^{-2(s+1)}\right)$$

7.1 利用常用函数[例如$\varepsilon(t)$，$e^{-\alpha t}\varepsilon(t)$，$\sin(\beta t)\varepsilon(t)$，$\cos(\beta t)\varepsilon(t)$ 等]的象函数及拉普拉斯变换的性质，求下列函数f(t)的拉普拉斯变换F(s)。

（2）$\dfrac{d^2}{dt^2}[\sin(\pi t)\varepsilon(t)]$　　（3）$\dfrac{d^2\sin(\pi t)}{dt^2}\varepsilon(t)$

$f'(t)\leftrightarrow sF(s)-f(0^-)$

解：（2）$f_1(t)=\sin(\pi t)\varepsilon(t)\leftrightarrow F_1(s)=\dfrac{\pi}{s^2+\pi^2}$　　$f_1(0_-)=f_1'(0_-)=0$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\sin(\pi t)\varepsilon(t)\right)=\frac{d^2 f_1(t)}{dt^2}\leftrightarrow s^2F_1(s)-sf_1(0_-)-f_1'(0_-)=\frac{s^2\pi}{s^2+\pi^2}$$

（3）$f_2(t)=\sin(\pi t)\leftrightarrow F_2(s)=\dfrac{\pi}{s^2+\pi^2}$　　$f_2(0_-)=0,\ f_2'(0_-)=\pi$

$$\frac{d^2\sin(\pi t)}{dt^2}\varepsilon(t)=\frac{d^2 f_2(t)}{dt^2}\varepsilon(t)\leftrightarrow s^2F_2(s)-sf_2(0_-)-f_2'(0_-)=\frac{s^2\pi}{s^2+\pi^2}-\pi=-\frac{\pi^3}{s^2+\pi^2}$$

7.1 利用常用函数[例如$\varepsilon(t)$，$e^{-\alpha t}\varepsilon(t)$，$\sin(\beta t)\varepsilon(t)$，$\cos(\beta t)\varepsilon(t)$ 等]的象函数及拉普拉斯变换的性质，求下列函数f(t)的拉普拉斯变换F(s)。

（4） $te^{-\alpha t}\cos(\beta t)\varepsilon(t)$

$$e^{-s_0 t} f(t) \leftrightarrow F(s+s_0)$$

$$(-t) f(t) \longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}F(s)}{\mathrm{d}s}$$

解：

（4） $f_0(t)=\cos(\beta t)\varepsilon(t) \leftrightarrow F_0(s)=\dfrac{s}{s^2+\beta^2}$

$$f_1(t)=e^{-\alpha t}\cos(\beta t)\varepsilon(t)=e^{-\alpha t} f_0(t) \leftrightarrow F_1(s)=F_0(s+\alpha)=\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$$

$$f(t)=te^{-\alpha t}\cos(\beta t)\varepsilon(t)=tf_1(t) \leftrightarrow F(s)=-\frac{d}{ds}F_1(s)=-\frac{d}{ds}\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$$

$$=\frac{-1}{(s+\alpha)^2+\beta^2}+\frac{2(s+\alpha)^2}{\left((s+\alpha)^2+\beta^2\right)^2}=\frac{(s+\alpha)^2-\beta^2}{\left((s+\alpha)^2+\beta^2\right)^2}$$

7. 2 求下列各象函数F(s)的拉普拉斯逆变换f(t)。

（1） $\dfrac{s^2+4s+5}{s^2+3s+2}$

解：

$$F(s)=\frac{s^2+4s+5}{s^2+3s+2}=1+\frac{s+3}{s^2+3s+2}$$

$$F_1(s)=\frac{s+3}{s^2+3s+2}=\frac{K_1}{s+1}+\frac{K_2}{s+2} \qquad \leftrightarrow f_1(t)=2e^{-t}\varepsilon(t)-e^{-2t}\varepsilon(t)$$

$$K_1=(s+1)F_1(s)\big|_{s=-1}=2, \qquad K_2=(s+2)F_1(s)\big|_{s=-2}=-1$$

$$F(s)\leftrightarrow f(t)=\delta(t)+2e^{-t}\varepsilon(t)-e^{-2t}\varepsilon(t)$$

7. 2 求下列各象函数F(s)的拉普拉斯逆变换f(t)。

（2） $$\frac{s+5}{s\left(s^2+2s+5\right)}$$

$$\cos(2t)\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{s}{s^2+4},$$

$$e^{-t}\cos(2t)\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{s+1}{(s+1)^2+4}$$

解:

$$F(s)=\frac{s+5}{s\left[(s+1)^2+4\right]}=\frac{K_1}{s}+\frac{As+B}{(s+1)^2+4}$$

$$K_1=sF(s)\big|_{s=0}=1$$

$$\frac{As+B}{(s+1)^2+4}=F(s)-\frac{K_1}{s}=\frac{s+5}{s\left(s^2+2s+5\right)}-\frac{1}{s}=-\frac{s+1}{(s+1)^2+4}$$

$$f(t)=\varepsilon(t)-e^{-t}\cos(2t)\varepsilon(t)$$

7.3　求下列各象函数F(s)的拉普拉斯逆变换f(t)，并粗略画出它们的波形图。

（1）　$\dfrac{1-e^{-Ts}}{s+1}$

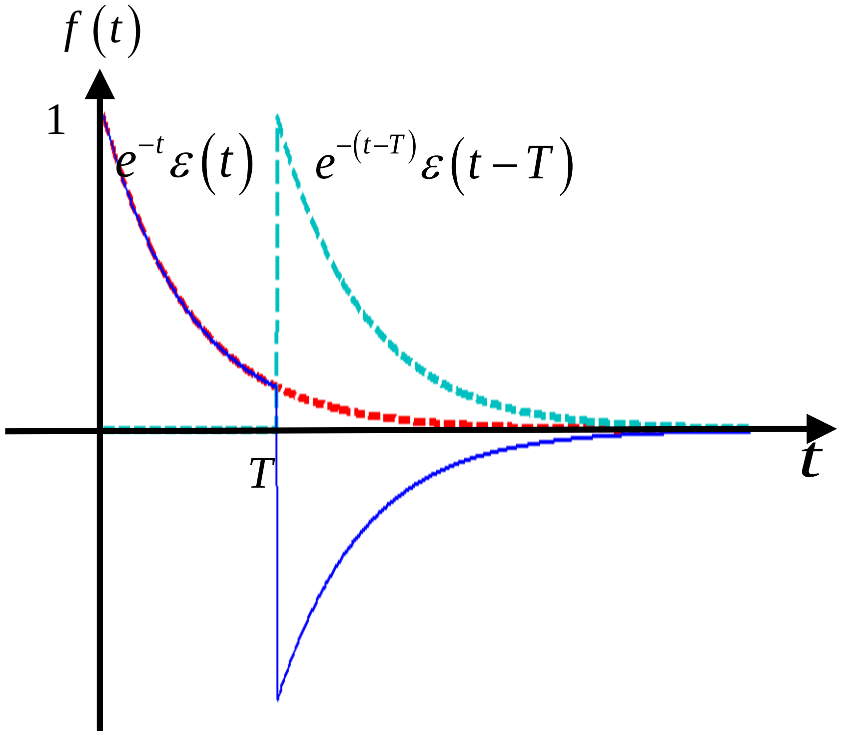
解:

$$F(s)=\frac{1-e^{-Ts}}{s+1}=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+1}e^{-Ts}$$

$$f_0(t)=e^{-t}\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{1}{s+1}$$

$$f_0(t-T)\varepsilon(t-T)\leftrightarrow F_0(s)e^{-Ts}$$

$$f(t)=e^{-t}\varepsilon(t)-e^{-(t-T)}\varepsilon(t-T)$$



7.3　求下列各象函数F(s)的拉普拉斯逆变换f(t)，并粗略画出它们的波形图。

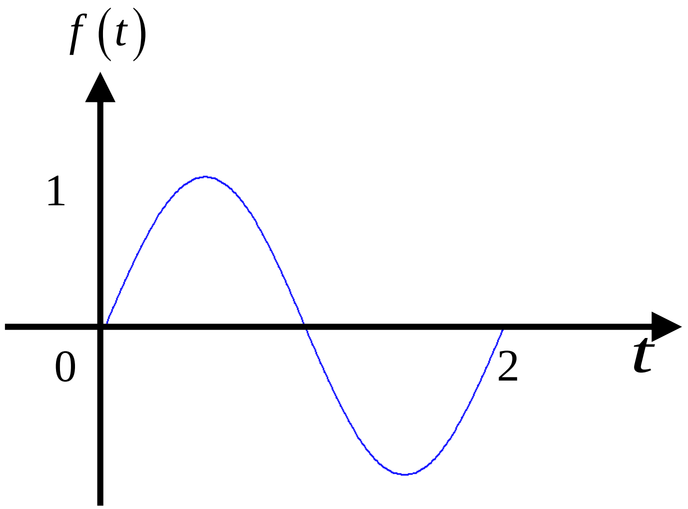
（2）　$$\frac{\pi\left(1-e^{-2s}\right)}{s^2+\pi^2}$$

解:

$$F(s)=\frac{\pi\left(1-e^{-2s}\right)}{s^2+\pi^2}=F_0(s)\left(1-e^{-2s}\right)$$

$$F_0(s)=\frac{\pi}{s^2+\pi^2}$$

$$\sin(\pi t)\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{\pi}{s^2+\pi^2}$$



$$f_0(t)=\sin(\pi t)\varepsilon(t)$$

$$f(t)=f_0(t)-f_0(t-2)=\sin(\pi t)\varepsilon(t)-\sin\left[\pi(t-2)\right]\varepsilon(t-2)=\sin(\pi t)\left[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)\right]$$

7.4 下列象函数F(S)的原函数f(t)是t=0接入的有始周期信号，求周期T并写出其第一个周期 $f_0(t)$（0<t<T）的时间函数表达式。

$$f_T(t)\varepsilon(t) \leftrightarrow F(s)=\frac{F_0(s)}{1-e^{-Ts}}$$

（1） $\frac{1}{1+e^{-s}}$

解：

$$F(s)=\frac{1}{1+e^{-s}}=\frac{1-e^{-s}}{\left(1+e^{-s}\right)\left(1-e^{-s}\right)}=\frac{1-e^{-s}}{1-e^{-2s}}=\frac{F_0(s)}{1-e^{-2s}}$$

$$F_0(s)=1-e^{-s} \qquad T=2 \text{（s）}$$

$$f_0(t)=\delta(t)-\delta(t-1)$$

7. 4 下列象函数F(S)的原函数f(t)是t=0接入的有始周期信号，求周期T并写出其第一个周期 $f_0(t)$ （0<t<T）的时间函数表达式。

（2） $$\frac{\pi\left(1+e^{-s}\right)}{\left(s^2+\pi^2\right)(1\text{-}e^{-2s})}$$

$$F(s)=\frac{\pi\left(1+e^{-s}\right)}{\left(s^2+\pi^2\right)\left(1-e^{-2s}\right)}=\frac{F_0(s)}{1-e^{-2s}}$$

$T=2$ （s）

$$F_0(s)=\frac{\pi\left(1+e^{-s}\right)}{\left(s^2+\pi^2\right)}$$

$$f_0(t)=\sin(\pi t)\varepsilon(t)+\sin\left[\pi(t-1)\right]\varepsilon(t-1)=\sin(\pi t)\left[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)\right]$$

7. 5求象函数的双边拉普拉斯逆变换。

$$\frac{-s+4}{\left(s^2+4\right)\left(s+1\right)},-1<\mathrm{Re}\left[s\right]<0$$

解： $F\left(s\right)=\frac{-s+4}{\left(s^2+4\right)\left(s+1\right)}=\frac{K_1}{s+1}+\frac{As+B}{s^2+4}$ $=\frac{1}{s+1}-\frac{s}{s^2+4}$

$$K_1=F\left(s\right)\left(s+1\right)|_{s=-1}=\frac{-s+4}{\left(s^2+4\right)}|_{s=-1}=1$$

$$\frac{As+B}{s^2+4}=\frac{-s+4}{\left(s^2+4\right)\left(s+1\right)}-\frac{1}{s+1}=\frac{-s}{s^2+4}$$

$\because \mathrm{Re}\left(s\right)>-1$

$\therefore \frac{1}{s+1}\leftrightarrow e^{-t}\varepsilon\left(t\right)$

$\because \mathrm{Re}\left[s\right]<0$

$\therefore \frac{s}{s^2+4}\leftrightarrow -\cos\left(2t\right)\varepsilon\left(-t\right)$

$$f\left(t\right)=e^{-t}\varepsilon\left(t\right)+\cos\left(2t\right)\varepsilon\left(-t\right)$$