Chương 4

TÍCH PHÂN

1. NGUYÊN HÀM

Tất cả các hàm số khảo sát trong phần này đều được giả định là xác định và liên tục trên một khoảng.

Khi f là một hàm số sơ cấp, nó có đạo hàm và ta có thể tính đạo hàm f' của f bằng các công thức tường minh (đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương hay hợp của hai hàm có đạo hàm). Thao tác này được gọi là "phép tính vi phân" và nếu đão hàm của một hàm số tồn tại, nó duy nhất. Bây giờ, ta xét thao tác ngược lại : từ một hàm số f cho trước, tìm *tất cả* các hàm F sao cho $F' = f$. Thao tác này được gọi là "phép tính tích phân" hay cụ thể hơn, "phép tính *nguyên hàm*".

1.1. Định nghĩa. Cho I là một khoảng mở của $\mathbb{R}$, f và F là hai hàm số xác định trên I. Ta nói F là một *nguyên hàm* của f trên I nếu $\forall x \in I$, $F'(x) = f(x)$, nghĩa là F có đạo hàm là f trên I.

1.2. Mệnh đề. *Nếu* F *là một nguyên hàm của* f *trên* I *thì tập hợp* $\mathscr{P}$ *các nguyên hàm của* f *trên* I *là*

$$\mathscr{P} = \left\{ G : I \to \mathbb{R} \;\middle|\; \forall x \in I, G(x) = F(x) + C, C = \text{ hằng số } \right\}.$$

Chứng minh. $\forall G \in \mathscr{P}$, $G' = F' = f$ cho thấy G là một nguyên hàm của f. Ngược lại, cho G là một nguyên hàm của f. Do $G' = f = F'$ nên $G' - F' = 0$ và do đó $G - F = C = \text{ hằng số}$. ■

Ký hiệu : Ký hiệu $\int f(x)dx$ được dùng để chỉ một nguyên hàm bất kỳ của f (gọi là *tích phân bất định* của f), nghĩa là một phần tử bất kỳ $\mathscr{P}$. Vì vậy, nếu F là một nguyên hàm của f, ta viết

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Ví dụ 1. i) Cho $F(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$. Ta có

$$F'(x) = \frac{\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)'}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Do đó,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

ii) Từ đạo hàm các hàm số sơ cấp cơ bản, ta có

a) $\int x^{\alpha}dx = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C & \text{khi} \quad \alpha \neq -1 \\ \ln|x| + C & \text{khi} \quad \alpha = -1 \end{cases}.$

b) $\int e^{x}dx = e^{x} + C$.

c) $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

d) $\int \cos x dx = \sin x + C$.

e) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \left(1 + \tan^2 x\right) dx = \tan x + C$.

f) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$.

g) $\int \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan x + C$. ■

Do định nghĩa, nếu

$$\int f(x)dx = F(x) + C \text{ và } \int g(x)dx = G(x) + C,$$

thì $\left[aF(x) + bG(x)\right] = aF'(x) + bG'(x) = af(x) + bg(x)$ và do đó

1.3. Mệnh đề.

$$\int \left(af(x) + bg(x)\right)dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx,$$

với mọi $a, b \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 2.

$$\int \frac{2 - 3x^2}{x^3}dx = \int \left(2x^{-3} - 3x^{-1}\right)dx = 2\int x^{-3}dx - 3\int x^{-1}dx$$

$$= 2\frac{x^{-4}}{-4} - 3\ln|x| + C = -\frac{1}{2x^3} - 3\ln|x| + C.$$ ■

Cho u là một hàm có đạo hàm trên một khoảng I và f là một hàm xác định trên một khoảng $J \supset u(I)$. Nếu

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

nghĩa là $F'(x) = f(x)$, thì

$$\left[F(u(x))\right]' = F'(u(x))u'(x) = f(u(x))u'(x).$$

Vì vậy, ta được

1.4. Định lý (công thức đổi biến)

$$\int f\left(u(x)\right)u'(x)dx = F\left(u(x)\right) + C. \tag{1}$$

Bằng cách viết $u \equiv u(x)$, $du \equiv u'(x)dx$, đẳng thức (1) trở thành

$$\int f\left(u(x)\right)u'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C \equiv F\left(u(x)\right) + C.$$

Ví dụ 3. Với $u(x) = \cos x$, $du = u'(x)dx = -\sin x dx$,

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

Đặc biệt, với $u(x) = ax + b$; $du = adx$, ta được

1.5. Hệ quả

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(u)du.$$

Ví dụ 4. i) Với $u(x) = 3x + 2$; $du = 3dx$,

$$\int \frac{dx}{3x+2} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{3}\ln|u| + C = \frac{1}{3}\ln|3x+2| + C.$$

ii) Với $u(x) = x\ln a$; $du = (\ln a)dx$,

$$\int a^x dx = \int e^{x\ln a}dx = \frac{1}{\ln a}\int e^u du = \frac{1}{\ln a}e^u + C = \frac{e^{x\ln a}}{\ln a} + C.$$

iii) Bằng cách viết

$$4x^2 + 4x + 10 = (2x+1)^2 + 9 = 9\left[\left(\tfrac{2x+1}{3}\right)^2 + 1\right],$$

và với $u(x) = \frac{2x+1}{3}$; $du = \frac{2}{3}dx$, ta có

$$\int \frac{dx}{4x^2+4x+10} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{2x+1}{3}\right)^2} = \frac{1}{6}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{6}\arctan u + C$$

$$= \frac{1}{6}\arctan\left(\tfrac{2x+1}{3}\right) + C.$$ ■

Cho u, v là hai hàm có đạo hàm tr ên một khoảng I. Do

$$\left[u(x)v(x)\right]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

ta suy ra

$$\int \left[u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\right]dx = u(x)v(x) + C,$$

và ta được

1.6. Định lý (công thức tích phân từng phần)

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx. \qquad (2)$$

Với các ký hiệu $du = u'(x)dx$; $dv = v'(x)dx$, công thức (2) được viết lại thành

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Ví dụ 5. Với $u = \arctan x$; $dv = dx$, ta có $du = \frac{dx}{1+x^2}$ và $v = x$. Do đó,

$$\int \arctan x dx = \int udv = uv - \int vdu$$
$$= x\arctan x - \int \frac{xdx}{1+x^2}$$

Với $t = 1 + x^2$; $dt = 2xdx$, ta có

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Vì vậy,

$$\int \arctan x dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C. \qquad \blacksquare$$

2. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

Trong phần này, mọi hàm số khảo sát đều được giả định là liên tục và nếu có đạo hàm thì đạo hàm của nó cũng là hàm liên tục. Ta sẽ tìm cách tính "diện tích" phần mặt phẳng nằm dưới đồ thị $\mathscr{C}$ một hàm số $f \geq 0$, ký hiệu $\int_a^b f(x)dx$ và đọc là "tích phân từ a đến b của $f(x)dx$".

Cho f là một hàm số xác định trên $[a,b]$ và $d = (x_0, x_1, ..., x_n)$, $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$, là một *phân hoạch* bất kỳ của $[a,b]$ và $T = (t_0, t_1, ..., t_{n-1})$ là một họ gồm n điểm của $[a,b]$ sao cho $t_i \in [x_i, x_{i+1}]$, với $i = 0, 1, ..., n-1$.

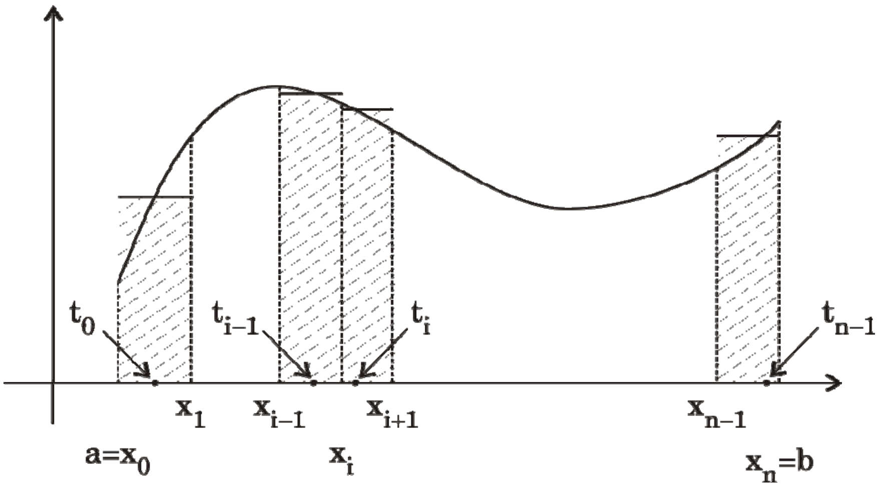
Tổng, ký hiệu $S_d(T)$, xác định bởi

$$S_d(T) = f(t_0)(x_1 - x_0) + f(t_1)(x_2 - x_1) + ... + f(t_i)(x_{i+1} - x_i) +$$
$$+ ... + f(t_{n-1})(x_n - x_{n-1})$$

nghĩa là

$$S_d(T) = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_i)$$

được gọi là một *tổng Riemann* của hàm f tương ứng với d và T. Tổng $S_d(T)$ này chính là tổng diện tích các hình chữ nhật gạch chéo trong hình sau



Ta định nghĩa *bước* của phân hoạch d, ký hiệu $|d|$, bởi biểu thức

$$|d| = \max_{i=0,\dots,n-1} |x_{i+1} - x_i|.$$

Gọi S là giới hạn của các tổng Riemann $S_d(T)$ khi bước $|d|$ tiến về 0, nghĩa là ứng với mỗi $\varepsilon > 0$, ta tìm được $\delta > 0$, sao cho với mọi phân hoạch $d = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ của $[a,b]$ và với mọi $T = (t_0, t_1, \dots, t_{n-1})$ sao cho $t_i \in [x_i, x_{i+1}]$, nếu $|d| < \delta$, thì $|S_d(T) - S| < \varepsilon$. Khi S tồn tại, ta viết $S = \lim_{|d|\to 0} S_d(T)$.

2.1. Định nghĩa. Khi giới hạn S tồn tại (nghĩa là $S \in \mathbb{R}$), ta nói f là hàm *Riemann-khả tích* trên $[a,b]$. Khi đó, ta viết $S = \int_a^b f(x)dx$ và giá trị này được gọi là *tích phân xác định* của f trên $[a,b]$.

Ta gọi a và b là các *cận tích phân* và x là *biến giả*.

Đặt

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \text{ và } \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

2.2. Mệnh đề. *Các hàm số sau thì Riemann-khả tích trên* $[a,b]$ *:*

- các hàm liên tục trên $[a,b]$*;*

- các hàm liên tục từng khúc trên $[a,b]$*, nghĩa là các hàm bị chặn và liên tục trên* $[a,b]$ *ngoại trừ tại một số hữu hạn các điểm bất liên tục loại một (các điểm bất liên tục với bước nhảy hữu hạn)*

Ta chấp nhận kết quả này.

2.3. Mệnh đề. *Cho* f *và* g *là hai hàm Riemann-khả tích trên* $[a,b]$. *Ta có*

i) Tính tuyến tính : Với hai số thực a *và* b *bất kỳ, nếu* α *và* β *là hai hằng số (độc lập với biến giả* x*) thì*

$$\int_a^b \left[\alpha f(x) + \beta g(x)\right] dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

ii) Hệ thức Chasles : Với ba số thực bất kỳ a, b, c*, ta có*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

iii) *a) Nếu* $a < b$ *và* $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \geq 0$ *thì* $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

b) Nếu $a < b$ *và* $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \leq g(x)$ *thì*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

iv) Công thức trung bình : Nếu $\forall x \in [a,b]$, $g(x) \geq 0$ *thì tồn tại* Γ *sao cho*

$$\int_a^b f(x) g(x)\,dx = \Gamma \cdot \int_a^b g(x)\,dx$$

với $m \leq \Gamma \leq M$*, trong đó* $m = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ *và* $M = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. *Đặc biệt, với* $g(x) = 1$, $\forall x \in [a,b]$*, ta có*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Gamma \cdot (b - a),\ m \leq \Gamma \leq M.$$

Cuối cùng, nếu f *liên tục trên* $[a,b]$ *thì tồn tại* $x_0 \in [a,b]$ *sao cho* $f(x_0) = \Gamma$ *và ta được*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(x_0) \cdot (b - a),\ x_0 \in [a,b].$$

Chứng minh. Ta chấp nhận i) và ii).

iii) a) Với mọi phân hoạch $d = (x_0, x_1, ..., x_n)$ của $[a,b]$ và $T = (t_0, t_1, ..., t_{n-1})$ là họ gồm n điểm của $[a,b]$ sao cho $t_i \in [x_i, x_{i+1}]$, với $i = 0,1,...,n-1$, ta có $f(t_i) \geq 0$ và $x_{i+1} - x_i \geq 0$ nên $f(t_i)(x_{i+1} - x_i) \geq 0$, với mọi $i = 0,1,...,n-1$. Vì vậy

$$S_d(T) = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_i) \geq 0$$

và

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|d| \to 0} S_d(T) \geq 0.$$

b) Suy ra từ 1 và 3.a do $g(x) - f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$.

iv) Vì $\forall x \in [a,b]$, $m \leq f(x) \leq M$ nên

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x).$$

Từ iii) b) và i), ta có

$$m \cdot \int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M \cdot \int_a^b g(x)dx$$

Nếu $\int_a^b g(x)dx > 0$ thì $m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le M$ và khi đó $\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = \Gamma$ chính là giá trị cần tìm.

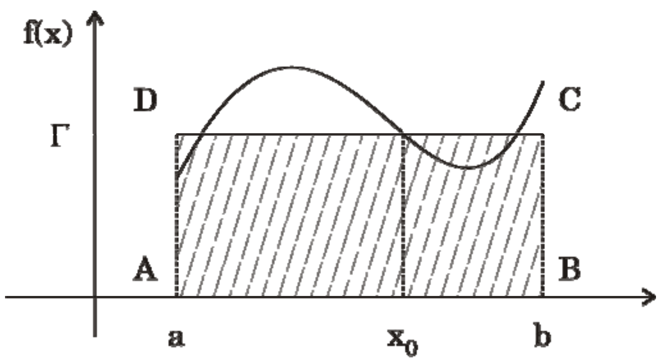
Nếu $\int_a^b g(x)dx = 0$ thì $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$, và khi đó công thức trung bình vẫn thỏa.

Khi $g(x) = 1,\ \forall x \in [a,b]$, ta có ý nghĩa hình học của công thức trung bình là : tồn tại Γ sao cho

$$\int_a^b g(x)dx = \Gamma \cdot (b-a)$$

= Diện tích hình chữ nhật đáy $(b-a)$,

chiều cao Γ (hình chữ nhật ABCD trong hình)



Nếu f liên tục trên $[a,b]$, thì $f([a,b]) = [m,M]$ và do đó $\forall \Gamma \in [m,M]$, $\exists x_0 \in [a,b]$ sao cho $f(x_0) = \Gamma$. ■

2.4. Hệ quả : *Nếu* $a \le b$ *thì*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

Chứng minh. Áp dụng iii), b), mệnh đề 2.3 vào bất đẳng thức

$$\forall x \in [a,b],\ -|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|.$$ ■

Cho f là hàm liên tục trên $[a,b]$. Ứng với mỗi $x \in [a,b]$, f là hàm liên tục nên khả tích trên $[a,x]$, nên ta xác định được hàm số F như sau

$$F : [a,b] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

trong đó cận x của tích phân chính là biến số của hàm F và t là biến giả trong tích phân xác định.

2.5. Định lý. *Cho* f *là hàm liên tục trên* $[a,b]$*. Ta có hàm số* $x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t)dt$ *có đạo hàm liên tục trên* $[a,b]$ *và* $F' = f$*, nghĩa là* F *chính là một nguyên hàm của* f *trên* $[a,b]$.

Chứng minh . Do f là hàm liên tục trên khoảng đóng và bị chặn $[a,b]$ nên nó bị chặn trên $[a,b]$, nghĩa là $\exists M \in \mathbb{R}$ sao cho $\forall x \in [a,b]$, $|f(x)| \le M$.

Với x và h sao cho $x \in [a,b]$ và $x + h \in [a,b]$, ta có

$$0 \le |F(x+h) - F(x)| = \left|\int_x^{x+h} f(t)dt\right| \le \left|\int_x^{x+h} |f(t)|dt\right|$$

và

$$0 \le |F(x+h) - F(x)| \le \left|\int_x^{x+h} |f(t)|dt\right| \le M \cdot |h|.$$

$$0 \le |F(x+h) - F(x)| \le M \cdot |h| \to 0,$$

khi $h \to 0$, và do đó $\lim_{h \to 0} F(x+h) = F(x)$, nghĩa là F liên tục tại điểm x. Ta sẽ chứng minh $F'(x) = f(x)$. Thật vậy, do f liên tục tại x, nghĩa là

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0, \text{ sao cho } |t - x| < \eta \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon.$$

Với $\varepsilon > 0$ và h sao cho $|h| < \eta$, ta có

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) = \frac{1}{h}\left[\int_x^{x+h} f(t)dt - h \cdot f(x)\right]$$
$$= \frac{1}{h}\left[\int_x^{x+h} [f(t) - f(x)]dt\right]$$
$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| \le \frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|dt\right|.$$

Do $t \in [x, x+h]$, nên $|h| < \eta \Rightarrow |t - x| < \eta \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon$, và do đó

$$\left|\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|dt\right| \le \left|\int_x^{x+h} \varepsilon dt\right| = |h| \cdot \varepsilon$$

Suy ra

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| \le \varepsilon \text{ nếu } |h| < \eta$$

nghĩa là

$$F'(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x). \qquad \blacksquare$$

2.6. Định lý. *Nếu* F *là một nguyên hàm của* f *trên* $[a,b]$ *thì*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Chứng minh. Do f liên tục trên $[a,b]$, mệnh đề 2.5 cho thấy hàm số

$$\begin{aligned} F: \ [a,b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto F(x) = \int_a^x f(t)dt \end{aligned}$$

là một nguyên hàm của f trên $[a,b]$. Hơn nữa

$$F(b) = \int_a^b f(t)dt \text{ và } F(a) = \int_a^a f(t)dt.$$

Mặt khác, do mệnh đề 1.2, với G là một nguyên hàm khác của f trên $[a,b]$, ta có $G(x) = F(x) + \text{hằng số}$ và do đó

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = G(b) - G(a). \qquad \blacksquare$$

Ký hiệu :

$$\int_a^b f(t)dt = \left[F(t)\right]_a^b = F(b) - F(a).$$

Cho I và J là hai khoảng của $\mathbb{R}$, F, f, u là ba hàm số với $J \xrightarrow{u} I \xrightarrow{F} \mathbb{R}$ sao cho F là một nguyên hàm của f, f liên tục trên I, u có đạo hàm liên tục trên J. Ta có

$$\forall t \in J, (F \circ u)'(t) = (F' \circ u)(t) \cdot u'(t) = (f \circ u)(t) \cdot u'(t)$$

Điều này cho thấy $F \circ u$ là một nguyên hàm của $(f \circ u) \cdot u'$ trên J khi F là một nguyên hàm của f trên I. Do mệnh đề 2.6, ta suy ra

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta (f \circ u)(t) \cdot u'(t)dt &= F \circ u(\beta) - F \circ u(\alpha) \\ &= F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b f(x)dx \end{aligned}$$

trong đó $\alpha, \beta \in J$, $u(\beta) = b$ et $u(\alpha) = a$. Ta được

2.7. Mệnh đề (công thức đổi biến)

$$\int_\alpha^\beta (f \circ u)(t) \cdot u'(t)dt = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)dx.$$

Với công thức này, ta nói rằng đã thực hiện việc *đổi biến* $x = u(t)$ trong tích phân

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Từ công thức lấy đạo hàm hàm tích $f \cdot g$ các hàm có đạo hàm trên khoảng I,

$$\forall x \in I,\ \left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Với $a \in I$, $b \in I$, mệnh đề 2.6 cho ta :

$$\begin{aligned}\int_a^b \left[f(x)g(x)\right]' dx &= \left[f(x)g(x)\right]_a^b \\ &= \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx\end{aligned}$$

và ta được

2.8. Định lý (công thức tích phần từng phần).

$$\underbrace{\int_a^b f(x)g'(x)dx}_{(1)} = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \underbrace{\int_a^b f'(x)g(x)dx}_{(2)}$$

Công thức trên cho phép ta tính tích phân (1) khi ta biết tích phân (2) và khi biết một nguyên hàm của hàm ký hiệu $g'(x)$.

3. TÍCH PHÂN SUY RỘNG

Trong trường hợp hàm dưới dấu tích phân tăng ra vô cực trên miền lấy tích phân (chẳng hạn như $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$, với $\frac{1}{\sqrt{t}} \to +\infty$, khi $t \to 0^+$), hoặc trong trường hợp miền lấy tích phân là không bị chặn (chẳng hạn như $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$), ta nói tích phân khảo sát thuộc loại *tích phân suy rộng*.

A. Trường hợp cận tích phân là vô cực

Cho f là hàm số liên tục trên $\left[a, +\infty\right)$ và xét hàm số $I_f(x) = \int_a^x f(t)dt$, ta định nghĩa

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x \to +\infty} I_f(x) = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)dt$$

Khi giới hạn tồn tại, ta nói rằng tích phân suy rộng của f *tồn tại ở* $+\infty$ (hay *hội tụ ở* $+\infty$). Ngược lại, ta nói tích phân *không tồn tại* (hay *phân kỳ*) ở $+\infty$.

Tương tự cho trường hợp hàm số f liên tục trên $\left(-\infty, b\right]$, ta định nghĩa

$$\int_{-\infty}^b f(t)dt = \lim_{x \to -\infty} \int_x^b f(t)dt.$$

Cuối cùng khi f liên tục trên $\mathbb{R}$ và với $a \in \mathbb{R}$, ta đặt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^a f(t)dt + \int_a^{+\infty} f(t)dt,$$

trong đó hai tích phân suy rộng của f ở $+\infty$ và $-\infty$ tồn tại độc lập với nhau.

Xét tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(t)dt$. Khi một nguyên hàm của f tồn tại, ta có thể tích tích phân suy rộng này bằng định nghĩa, nghĩa là tính tích phân xác định rồi tìm giới hạn của tích phân xác định này. Trường hợp ta không tìm được một nguyên hàm của hàm f, ta cần tìm các điều kiện đủ cho sự tồn tại của tích phân suy rộng này. Ta có

3.1. Mệnh đề. *Cho* f *là hàm liên tục trên* $[a,+\infty)$. *Với bất kỳ* $a_1 \in [a,+\infty)$, *các tích phân suy rộng* $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *và* $\int_{a_1}^{+\infty} f(t)dt$ *có cùng bản chất, nghĩa là hoặc cùng hội tụ, hoặc cùng phân kỳ, và khi chúng cùng hội tụ, ta có*

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \int_a^{a_1} f(t)dt + \int_{a_1}^{+\infty} f(t)dt.$$

Chứng minh. Do, $\forall x \in [a,+\infty[$,

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^{a_1} f(t)dt + \int_{a_1}^x f(t)dt$$

nên bằng cách lấy giới hạn hai vế khi $x \to +\infty$, ta chứng minh được mệnh đề. ■

3.2. Mệnh đề. *a) Khi* $0 \le f \le g$, *sự hội tụ của* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *kéo theo sự hội tụ của* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$*; sự phân kỳ của* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *kéo theo sự phân kỳ của* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

b) Khi f *và* g *là hai hàm số tương đương khi* $x \to +\infty$ *(ta còn nói là chúng tương đương ở lân cận của* $+\infty$*), nghĩa là* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, *ta có các tích phân suy rộng* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *và* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *có cùng bản chất.*

Chứng minh. a) Xét $a \le x$; $I_f(x) = \int_a^x f(t)dt$ và $I_g(x) = \int_a^x g(t)dt$. Dễ thấy rằng $0 \le I_f(x) \le I_g(x)$; hàm số $x \mapsto I_f(x)$ là hàm tăng theo x. Do đó, nếu $B = \int_a^{+\infty} g(t)dt$ tồn tại, ta có $I_f(x) \le B$, $\forall x \in [a,+\infty)$. Bấy giờ, do hàm số $x \mapsto \int_a^x f(t)dt = I_f(x)$ là hàm tăng trên $[a,+\infty)$, bị chặn trên bởi B nên nó có giới hạn, $\lim\limits_{x\to+\infty} I_f(x) = \int_a^{+\infty} f(t)dt$.

Kết luận :

$$B = \int_a^{+\infty} g(t)dt \text{ tồn tại kéo theo } A = \int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ tồn tại}$$

Bằng suy luận đảo đề, ta được

Sự không tồn tại của A kéo theo sự không tồn tại của B.

b) Với $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(t)}{g(t)}=1$, tồn tại b sao cho $b>a$ và $\forall t\geq b$, $\frac{f(t)}{g(t)}\in\left(1-\frac{1}{2},1+\frac{1}{2}\right)$. Rõ ràng là $f(t)$ và $g(t)$ có cùng dấu và ta có thể giả sử chúng cùng dấu dương. Khi đó

$$\forall t\geq b,\ \tfrac{1}{2}g(t)\leq f(t)\leq\tfrac{3}{2}g(t)$$

Do tính chất (a) nêu trên

nếu $\int_a^{+\infty}f(t)dt$ tồn tại thì $\frac{1}{2}\int_a^{+\infty}g(t)dt$ tồn tại,

nếu $\int_a^{+\infty}g(t)dt$ tồn tại thì $\frac{3}{2}\int_a^{+\infty}f(t)dt$ tồn tại. ■

3.3. Mệnh đề. $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha}$ *tồn tại nếu và chỉ nếu* $\alpha>1$.

Chứng minh. Một nguyên hàm của $\frac{1}{t^\alpha}$ là

$$\begin{cases}\ln t & \text{khi } \alpha=1\\ \frac{1}{1-\alpha}\times\frac{1}{t^{\alpha-1}} & \text{khi } \alpha\neq1\end{cases}$$

Vì vậy, nếu $\alpha=1$, thì

$$\int_1^x\frac{dt}{t^\alpha}=\ln x\to+\infty$$

khi $x\to+\infty$. Trường hợp $\alpha\neq1$, ta có

$$\int_1^x\frac{dt}{t^\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]\to+\infty$$

nếu $\alpha<1$ và

$$\int_1^x\frac{dt}{t^\alpha}\to\frac{1}{\alpha-1}=\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha}$$

nếu $\alpha>1$, khi $x\to+\infty$. ■

Áp dụng : Sự tồn tại của $I=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt$.

Do $\int e^{-t^2}dt$ không xác định được bằng cách hàm số sơ cấp, ta không thể tính trực tiếp I bằng định nghĩa. Vì vậy, ta dùng các tiêu chuẩn nêu trên để khảo sát sự tồn tại của I mà không cần phải tính giá trị của nó. Trước hết, ta khảo sát sự tồn tại $\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt$. Do $t^2e^{-t^2}\to0$ khi $t\to+\infty$, tồn tại $a>0$ sao cho $\forall t>a$, $0<t^2e^{-t^2}\leq1$. Từ đó suy ra

$$\forall t>a,\ 0<e^{-t^2}\leq\frac{1}{t^2}.$$

Do mệnh đề 3.3, $\int_a^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ tồn tại và do mệnh đề 3.2, $\int_a^{+\infty}e^{-t^2}dt$ tồn tại. Cuối cùng, do mệnh đề 3.1, $\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt$ tồn tại. Do $\int_0^{x}e^{-t^2}dt = \int_{-x}^{0}e^{-t^2}dt$, ta suy ra

$$\int_{-\infty}^{0}e^{-t^2}dt = \lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{0}e^{-t^2}dt = \lim_{x\to+\infty}\int_{0}^{x}e^{-t^2}dt = \int_{0}^{+\infty}e^{-t^2}dt.$$

Kết luận : $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt$ tồn tại và ta có đẳng thức

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt = 2\int_{0}^{+\infty}e^{-t^2}dt.$$

Thật ra, người ta còn chứng minh được rằng $I = \sqrt{\pi}$ và kết quả này được dùng trong xác suất thống kê. ■

B. Trường hợp hàm dưới dấu tích phân không bị chặn

Cho f là hàm liên tục trên $[a,b)$ với $\lim_{x\to b^-}f(x) = +\infty$ (hay $-\infty$). Đặt $I_f(x) = \int_a^x f(t)dt$. Ta định nghĩa

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to b^-}I_f(x) = \lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)dt.$$

Khi giới hạn trên tồn tại, ta nói f khả tích tại b. Tương tự cho trường hợp hàm f liên tục trên $(a,b]$ với $\lim_{x\to a^+}f(x) = +\infty$ (hay $-\infty$), ta định nghĩa

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to a^+}\int_x^b f(t)dt$$

và nói rằng f khả tích ở a khi giới hạn trên tồn tại. Cuối cùng khi f liên tục trên (a,b) nhưng không liên tục tại cả a lẫn b, ta khảo sát tính khả tích của f tại a và tại b độc lập với nhau.

Tương tự như trong trường hợp miền lấy tích phân không bị chặn, khi hàm f liên tục trên $[a,b)$, không bị chặn tại b, ta khảo sát tính khả tích của f tại b bằng cách khảo sát sự tồn tại của $\lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)dt$. Giống trường hợp tích phân suy rộng với miền lấy tích phân không bị chặn, khi ta có một nguyên hàm tường minh F cho hàm số f, bài toán trở thành việc khảo sát giới hạn $\lim_{x\to b^-}F(x)$ do $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$, trường hợp ta không có một nguyên hàm tường minh cho f, ta cũng nhận được các điều kiện đủ cho tính khả tích của f tại b như sau

3.4. Mệnh đề. *Cho* f *là hàm liên tục trên* $[a,b)$ *và* $\lim_{x\to b^-}f(x) = +\infty$ *(hay* $-\infty$*). Ta có, với mọi điểm* $a_1 \in [a,b)$*, các tích phân* $\int_a^b f(t)dt$ *và* $\int_{a_1}^b f(t)dt$ *có cùng bản chất và khi chúng cùng tồn tại thì*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^{a_1} f(t)\,dt + \int_{a_1}^b f(t)\,dt.$$

Chứng minh. Do $\forall x \in [a,b)$,

$$\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^{a_1} f(t)\,dt + \int_{a_1}^x f(t)\,dt$$

nên mệnh đề được chứng minh bằng cách lấy giới hạn đẳng thức trên khi $x \to b$. ■

Ý nghĩa : Tính khả tích của tích phân suy rộng hàm f tại b chỉ phụ thuộc vào giá trị của nó trên một lân cận của điểm b.

3.5. Mệnh đề. *a) Khi* $0 \le f \le g$, *sự tồn tại của* $\int_a^b g(x)\,dx$ *kéo theo sự tồn tại của* $\int_a^b f(x)\,dx$*; sự không tồn tại của* $\int_a^b f(x)\,dx$ *kéo theo sự tồn tại của* $\int_a^b g(x)\,dx$.

b) Nếu f *và* g *là các hàm liên tục trên* $[a,b)$ *và* $\lim\limits_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)} = c$ *với* $0 < c < +\infty$, *thì sự khả tích tại b của tích phân suy rộng của* f *và của* g *có cùng bản chất.*

Chứng minh. Tương tự như chứng minh mệnh đề 3.2, ta có

a) Khi f và g liên tục trên $[a,b)$, với $a \le x < b$, xét

$$I_f(x) = \int_a^x f(t)\,dt \text{ và } I_g(x) = \int_a^x g(t)\,dt.$$

Do $0 \le f \le g$, ta suy ra $I_f(x) \le I_g(x)$ và các hàm $x \mapsto I_f(x)$ và $x \mapsto I_g(x)$ đều là các hàm tăng. Do vậy, nếu $B = \int_a^b g(t)\,dt$ tồn tại thì $I_f(x) \le I_g(x) \le B$, $\forall x \in [a,b)$. Bấy giờ, do hàm $x \mapsto I_f(x)$ tăng trên $[a,b)$, bị chặn trên bởi B, nên tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to b^-} I_f(x) = \int_a^b f(t)\,dt$.

Kết luận :

$$B = \int_a^b g(t)\,dt \text{ tồn tại kéo theo } A = \int_a^b f(t)\,dt \text{ tồn tại.}$$

Đảo đề kết luận này cho ta

$$\int_a^b f(t)\,dt \text{ không tồn tại kéo theo } \int_a^b g(t)\,dt \text{ không tồn tại.}$$

b) Khi $\lim\limits_{x\to b^-}\frac{f(t)}{g(t)} = 1$, do định nghĩa, ta có

$$\exists y \in [a,b) \text{ sao cho } \forall t \in [y,b),\ \frac{1}{2} \le \frac{f(t)}{g(t)} \le \frac{3}{2}.$$

Do $\frac{f(t)}{g(t)} > 0$, ta được các bất đẳng thức

$$\tfrac{1}{2}g(t) \le f(t) \le \tfrac{3}{2}g(t) \text{ [khi } f(t) \text{ và } g(t) \text{ dương]}$$

hay

$$\tfrac{1}{2}g(t) \ge f(t) \ge \tfrac{3}{2}g(t) \text{ [khi } f(t) \text{ và } g(t) \text{ âm]}$$

và từ kết quả (a) nêu trên, ta suy ra các tích phân $\int_y^b f(t)dt$ và $\int_y^b g(t)dt$ có cùng bản chất. ■

3.6. Mệnh đề. $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ *tồn tại nếu và chỉ nếu* $\alpha < 1$.

Chứng minh. Một nguyên hàm của $\frac{1}{t^\alpha}$ là

$$\begin{cases} \ln t & \text{khi } \alpha = 1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha} \times \dfrac{1}{t^{\alpha-1}} & \text{khi } \alpha \ne 1 \end{cases}$$

Do đó, nếu $\alpha = 1$ thì

$$\int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = -\ln x \to +\infty$$

khi $x \to 0^+$. Trường hợp $\alpha \ne 1$ ta có

$$\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left[1 - \frac{1}{x^{\alpha-1}}\right] \to +\infty$$

nếu $\alpha > 1$ và

$$\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} \to \frac{1}{\alpha - 1} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$$

nếu $\alpha < 1$, khi $x \to 0^+$. ■

Bài tập

1. Dùng công thức đổi biến, tính các tích phân sau

a) $\int \frac{dx}{5-3x}$. b) $\int \frac{x}{x^2+1}dx$.

c) $\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx$. d) $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$.

e) $\int e^x\sqrt{1+e^x}dx$. f) $\int e^{\cos t}\sin t dt$.

g) $\int \frac{dx}{x\ln x}$. h) $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$.

i) $\int \cot x dx$.

j) $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$.

k) $\int \frac{1+x}{1+x^2} dx$.

l) $\int \frac{x}{1+x^4} dx$.

2. Dùng công thức tích phân từng phần, tính các tích phân sau

a) $\int xe^{-x}dx$.

b) $\int x^2 \sin 2x dx$.

c) $\int x \ln x dx$.

d) $\int x \arctan x dx$.

3. Dùng công thức đổi biến, tính các tích phân sau

a) $\int_0^1 \frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^2}$ (với $u = x^2 + 1$)

b) $L(a) = \int_0^a xe^{-x^2} dx$ (với $u = x^2$). Tìm $\lim\limits_{a \to +\infty} L(a)$

c) $\int_1^2 (\ln x)^2 dx$ (với $u = \ln x$)

4. Dùng công thức tích phân từng phần, tính các tích phân sau

a) $I(a) = \int_0^a xe^{-x}dx$, và $J(a) = \int_0^a x^2e^{-x}dx$.

b) $I = \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx$.

c) $K = \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$ (cũng có thể đổi biến $u = \ln x$).

5. Xác định a và b sao cho

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

Tính $I = \int_1^3 \frac{dx}{x(x+1)}$.

6. Tính các tích phân sau

a) $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$.

b) $\int_0^1 xe^{-x^2} dx$.

c) $\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} dx$.

d) $\int_0^{1/2} \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

7. Xét hàm số f từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$ cho bởi

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{khi} \quad x\in[0,1] \\ 2-x & \text{khi} \quad x\in(1,2] \\ 0 & \text{khi} \quad x\notin[0,2] \end{cases}$$

Vẽ đồ thị hàm f. Kiểm chứng rằng

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ (f được gọi là một hàm *phân phối xác suất*).

Tính $E=\int_0^2 xf(x)dx$ (E được gọi là *kỳ vọng* hay *trung bình* của hàm phân phối xác suất f).

8. Tính các tích phân suy rộng

a) $I=\int\limits_1^{\infty} xe^{x^2}dx$

b) $I=\int\limits_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

c) $I=\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$

d) $I=\int\limits_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$

e) $I=\int\limits_{e}^{\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$

f) $I=\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+6x+11}$

g) $I=\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-2x}\cos x dx$

h) $I=\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

i) $I=\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

j) $I=\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+x^4}$

k) $I=\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\ln^3 x}$

l) $I=\int\limits_{1/3}^{2/3} \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}}$