Chương 1

TẬP HỢP CÁC SỐ THỰC

Để khảo sát hàm số thực theo một biến số thực, nghĩa là để khảo sát các ánh xạ $f : D \to \mathbb{R}$, trong đó D là một tập con không rỗng của $\mathbb{R}$, ta cần nắm vững các tính chất căn bản của tập $\mathbb{R}$ các số thực.

Do đó, trong phần 1, chúng ta giới thiệu tập $\mathbb{R}$ thông qua một hệ thống các tiên đề. Từ các tiên đề, ta chứng minh được các tính chất thường dùng trên tập số thực để từ đó xây dựng được hai cặp hàm sơ cấp cơ bản : hàm lũy thừa / căn thức và hàm mũ / lôgarít. Một số khái niệm khác liên quan đến khoảng, lân cận, các hàm sơ cấp cơ bản ... cũng được giới thiệu một cách có hệ thống trong phần 2 nhằm cung cấp các công cụ cần thiết trong việc khảo sát các hàm số trong suốt phần còn lại của giáo trình.

1. TẬP $\mathbb{R}$ CÁC SỐ THỰC

Tập các số thực, trên đó có trang bị hai phép toán, *phép cộng* và *phép nhân*, và một *quan hệ thứ tự*, ký hiệu $(\mathbb{R},+,\cdot,\leq)$, thỏa các tiên đề sau, trong đó a, b, c là các số thực bất kỳ,

1.1. Tiên đề cho các phép toán

i) các phép toán đều có tính *giao hoán*

$$a + b = b + a\,;\; a \cdot b = b \cdot a$$

ii) các phép toán đều có tính *kết hợp*

$$a + (b + c) = (a + b) + c\,;\; a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

iii) phép cộng có *phần tử trung hòa*, ký hiệu 0, và phép nhân có *phần tử trung hòa*, ký hiệu 1, xác định bởi

$$a + 0 = a\,;\; a \cdot 1 = a.$$

iv) mọi số thực x đều có *số đối*, ký hiệu $-x$, và mọi số thực $x \neq 0$ đều có *số nghịch đảo*, ký hiệu x^{-1}, xác định bởi

$$x + (-x) = 0\,;\; x \cdot x^{-1} = 1.$$

v) phép nhân có tính *phân bố* đối với phép cộng

$$a(b + c) = ab + ac.$$

1.2. Tiên đề cho quan hệ thứ tự

vi) tính *phản xạ* : $a \leq a$

vii) tính *phản đối xứng* : nếu $a \leq b$ và $b \leq a$ thì $a = b$

viii) tính *bắc cầu* (*truyền*) : nếu $a \leq b$ và $b \leq c$ thì $a \leq c$

ix) tính *toàn phần* : hoặc $a \le b$, hoặc $b \le a$

x) tính *bền đối với phép cộng* : nếu $a \le b$ thì $a + c \le b + c$

xi) tính *bền đối với phép nhân các số không âm* : nếu $a \le b$ và $0 \le c$ thì $ac \le bc$. ■

Từ các tính chất nêu trên người ta suy ra mọi tính chất còn lại về phép toán cũng như quan hệ thứ tự trên tập các số thực. Ta liệt kê một số tính chất thường dùng sau

xii) $a \cdot 0 = 0$; $(-1) \cdot a = -a$;

xiii) nếu $ab = 0$ thì $a = 0$ hay $b = 0$;

xiv) *Phép trừ* : phương trình $x + a = b$ có nghiệm duy nhất $x = b + (-a) \equiv b - a$;

xv) *Phép chia* : phương trình $a \cdot x = b$, với $a \ne 0$, có nghiệm duy nhất $x = b \cdot a^{-1} \equiv \dfrac{b}{a}$.

Để chứng minh các tính chất trên, ta xuất phát từ đẳng thức $x + a = b$ và cộng hai vế cho số đối $-a$ của a, ta được

$$(x + a) + (-a) = b + (-a).$$

Do tính chất ii), iii) và iv), ta có $(x + a) + (-a) = x + (a + (-a)) = x + 0 = x$ và do đó, $x = b + (-a) \equiv b - a$ và tính chất xiv) được chứng minh. Tương tự, khi $a \ne 0$, nhân hai vế đẳng thức $a \cdot x = b$ cho a^{-1}, ta được

$$a^{-1} \cdot (a \cdot x) = a^{-1} \cdot b.$$

Cũng do tính chất ii), iii) và iv), ta có $a^{-1} \cdot (a \cdot x) = (a^{-1} \cdot a) \cdot x = 1 \cdot x = x$. Ngoài ra, do i), $a^{-1} \cdot b = b \cdot a^{-1} \equiv \frac{b}{a}$ và xv) được chứng minh.

Từ xiv), ta suy ra rằng nếu $x + a = a$ thì $x = a + (-a) = 0$. Bấy giờ, do

$$a = a \cdot 1 = a \cdot (0 + 1) = a \cdot 0 + a \cdot 1 = a \cdot 0 + a$$

ta suy ra $a \cdot 0 = 0$. Hơn nữa, do

$$0 = 0 \cdot a = (1 + (-1)) \cdot a = 1 \cdot a + (-1) \cdot a = a + (-1) \cdot a$$

nên $(-1) \cdot a = -a$ và xii) được chứng minh.

Để chứng minh xiii), ta giả sử $a \cdot b = 0$ và $a \ne 0$. Do xv) và xii), ta suy ra $b = a^{-1} \cdot 0 = 0$.

Ngoài ra, do các phép toán đều có tính kết hợp, ta có thể định nghĩa *tổng* cũng như *tích một số hữu hạn* các số thực như sau

1.3. Định nghĩa. Với dãy các số thực a_1, a_2, ..., a_n, ... Tổng n số hạng đầu của dãy này, $a_1 + a_2 + ... + a_n$, được viết tắt bằng ký hiệu $\sum$ như sau

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

(đọc là "tổng các a_k từ $k = 1$ đến $k = n$").

Trong cách viết này, chỉ số k của a_k được gọi là *chỉ số câm*, việc lựa chọn ký tự cho chỉ số câm không làm ảnh hưởng đến giá trị của tổng. Chẳng hạn

$$\sum_{k=1}^{3} a_k = \sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{3} a_j = a_1 + a_2 + a_3$$

Hơn nữa, ta có thể thay đổi vùng giá trị của các chỉ số với điều kiện duy nhất là giá trị chỉ số đầu phải nhỏ hơn hay bằng giá trị của chỉ số cuối. Chẳng hạn

$$\sum_{k=2}^{5} a_k = a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

nhưng ký hiệu $\sum_{k=5}^{2} a_k$ không được xác định.

Tương tự, ta viết

$$a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$$

(đọc là "tích các a_k từ $k = 1$ đến $k = n$").

Ví dụ 1.

$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + ... + n =$ tổng n số nguyên tự nhiên đầu tiên;

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$;

$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + ... + q^n$, với quy ước $q^0 = 1$ và $q^1 = q$;

$\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = 1 + 3 + 5 + ... + (2n+1) =$ tổng $n + 1$ số nguyên lẻ đầu tiên;

$\prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n \equiv n!$ (đọc là "n giai thừa");

$\prod_{k=1}^{n} x = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot ... \cdot x}_{\text{n lần}} \equiv x^n$.

Chú ý : Tổng hữu hạn $\sum_{k=1}^{n} a_k$ và tích hữu hạn $\prod_{k=1}^{n} a_k$ có thể xác định bằng quy nạp trên n như sau

Với $n = 1$, đặt $\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1$; $\prod_{k=1}^{1} a_k = a_1$ và

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1} \text{ và } \prod_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot a_{n+1}.$$

Chẳng hạn, ta có

$$\sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1 \text{ và } \sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1}.$$

Đặc biệt,

$$1! = \prod_{k=1}^{1} k = 1$$

và

$$(n+1)! = \prod_{k=1}^{n+1} k = \left(\prod_{k=1}^{n} k\right)(n+1) = n! \cdot (n+1),$$

$$x^1 = \prod_{k=1}^{1} x = x$$

và

$$x^{n+1} = \prod_{k=1}^{n+1} x = \left(\prod_{k=1}^{n} x\right) x = x^n \cdot x.$$

Nhắc lại rằng ta có quy ước

$$0! = 1 \text{ và } x^0 = 1, \text{ với mọi } x \in \mathbb{R},$$

và với mọi $n \in \mathbb{N}$, $k = 0, 1, ..., n$, ta định nghĩa

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

1.4. Mệnh đề

i) Nếu λ là số thực độc lập với các chỉ số của tổng hữu hạn, ta có

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda = n\lambda; \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k$$

ii) $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$; $\prod_{k=1}^{n} (a_k \cdot b_k) = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)$

iii) $\left[\sum_{k=1}^{n} a_k\right]^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_i a_k$

iv) Với $\left(a_{ij}\right)_{\substack{i=1,2,\ldots,n\\ j=1,2,\ldots,m}}$ *là họ gồm* $n \times m$ *số thực, ta có*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

v) $C_n^0 = C_n^n = 1$, *với mọi* $n \in \mathbb{N}$ *và* $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$, *với mọi* $n \in \mathbb{N}$ *và* $k = 1, 2, \ldots, n$.

Chứng minh. Chú ý rằng tổng cũng như tích hữu hạn được định nghĩa bằng quy nạp trên n. Do vậy, một cách tự nhiên là ta chứng minh các tính chất trên bằng quy nạp. Chẳng hạn, với đẳng thức iii), khi $n = 1$, ta có

$$\left[\sum_{k=1}^{1} a_k\right]^2 = \sum_{i=1}^{1}\sum_{k=1}^{1} a_i a_k = a_1^2,$$

nghĩa là đẳng thức iii) đúng khi $n = 1$.

Giả sử đẳng thức iii) đúng với một $n \in \mathbb{N}$, nghĩa là

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_i a_k = \left[\sum_{k=1}^{n} a_k\right]^2.$$

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} a_i a_k &= \sum_{i=1}^{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n} a_i a_k + a_i a_{n+1}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_i a_k + a_i a_{n+1}\right) + \sum_{k=1}^{n} a_{n+1} a_k + a_{n+1} a_{n+1} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_i a_k + a_{n+1}\sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1}\sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}^2 \\
&= \left[\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right]^2 + 2a_{n+1}\sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}^2 = \left[\sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}\right]^2 = \left[\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right]^2
\end{aligned}$$

nghĩa là đẳng thức iii) cũng đúng cho $n + 1$. Vậy do phép chứng minh quy nạp, đẳng thức iii) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Chứng minh cho các đẳng thức còn lại được coi như bài tập. ■

1.5. Định lý. *Với* $a, b \in \mathbb{R}$ *và* $n \in \mathbb{N}$, *ta có*

i) Công thức khai triển nhị thức Newton

$$\left(a + b\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

ii) $a^n - b^n = \left(a - b\right)\sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b^{k-1}$

Chứng minh. i) Quy nạp trên n. Khi $n = 1$, đẳng thức

$$(a+b)^1 = a + b = C_1^0 a^0 b^{1-0} + C_1^1 a^1 b^{1-1} = \sum_{k=0}^{n} C_1^k a^k b^{1-k}$$

đúng. Giả sử đẳng thức i) đúng với một $n \in \mathbb{N}$, nghĩa là

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k .$$

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k \\
&= (a+b)\left(C_n^0 a^{n-0} b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^{n-1} a^{n-(n-1)} b^{n-1} + C_n^n a^{n-n} b^n\right) \\
&= C_n^0 a^{n+1-0} b^0 + C_n^1 a^{n+1-1} b^1 + \ldots + C_n^{n-1} a^{n+1-(n-1)} b^{n-1} + C_n^n a^{n+1-n} b^n \\
&\qquad + C_n^0 a^{n-0} b^{0+1} + C_n^1 a^{n-1} b^{1+1} + \ldots + C_n^{n-1} a^{n-(n-1)} b^{n-1+1} + C_n^n a^{n-n} b^{n+1} \\
&= C_n^0 a^{n+1-0} b^0 + \left(C_n^1 + C_n^0\right) a^{n+1-1} b^1 + \ldots + \left(C_n^n + C_n^{n-1}\right) a^{n+1-n} b^n + C_n^n a^{n-n} b^{n+1} \\
&= C_{n+1}^0 a^{n+1-0} b^0 + C_{n+1}^1 a^{n+1-1} b^1 + \ldots + C_{n+1}^n a^{n+1-n} b^n + C_{n+1}^{n+1} a^{n+1-(n+1)} b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k ,
\end{aligned}$$

nghĩa là đẳng thức i) cũng đúng cho $n + 1$.

ii)

$$\begin{aligned}
(a-b)\sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b^{k-1} &= (a-b)\left(a^{n-1} b^{1-1} + a^{n-2} b^{2-1} + \ldots + a^{n-(n-1)} b^{(n-1)-1} + a^{n-n} b^{n-1}\right) \\
&= a^n + a^{n-1} b + \ldots + a^2 b^{n-2} + a b^{n-1} - \left(a^{n-1} b + a^{n-2} b^2 + \ldots + a b^{n-1} + b^n\right) \\
&= a^n - b^n .
\end{aligned}$$

■

Bằng cách viết $a - b = a + (-b)$ và $a^n + b^n = a^n - (-b)^n$ khi n là số nguyên lẻ, ta được

1.6. Hệ quả. *Với* $a, b \in \mathbb{R}$ *và* $n \in \mathbb{N}$*, ta có*

i) $(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k$.

ii) Khi n *là số lẻ, ta có*

$$a^n + b^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-1} a^{n-k} b^{k-1} .$$

1.7. Định lý

i) Bất đẳng thức Cauchy : Với $a, b \in \mathbb{R}$*,* $a, b \ge 0$*, ta có*

$$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab} .$$

Tổng quát, với các số thực a_1, a_2, ..., $a_n \in \mathbb{R}$ *sao cho* $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$*, ta có*

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}.$$

ii) Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz : Với các số thực a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., $b_n \in \mathbb{R}$*, ta có*

$$\left(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n\right)^2 \leq \left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2\right).$$

iii) Bất đẳng thức Bernoulli : Với $a \geq -1$*, ta có*

$$\left(1 + a\right)^n \geq 1 + na,$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Chứng minh. i) Từ bất đẳng thức

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0,$$

ta suy ra

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Giả sử bất đẳng thức

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}$$

đúng với mọi dãy hữu hạn số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$. Với dãy $a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1} \geq 0$, ta chú ý rằng bất đẳng thức

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{n+1}}{n} \geq \sqrt[n+1]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{n+1}}$$

hiển nhiên đúng khi tồn tại một số hạng $a_i = 0$. Do đó, ta có thể giả sử $a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1} > 0$. Khi đó, bằng cách đặt

$$b_1 = \frac{a_1}{\sqrt[n+1]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{n+1}}},$$

$$b_2 = \frac{a_2}{\sqrt[n+1]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{n+1}}},$$

...

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{\sqrt[n+1]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{n+1}}},$$

ta được $b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_{n-1} \cdot \left(b_n \cdot b_{n+1}\right) = 1$ và do giả thuyết quy nạp,

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1} + b_n \cdot b_{n+1} \geq n.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + \ldots + b_n + b_{n+1} &= \\ &= b_1 + b_2 + \ldots + \left(1 - b_n\right) \cdot \left(b_{n+1} - 1\right) + b_n \cdot b_{n+1} \\ &\geq b_1 + b_2 + \ldots + b_n \cdot b_{n+1} + 1 = n + 1, \end{aligned}$$

nghĩa là

$$\frac{a_1}{\sqrt[n+1]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n+1}}} + \frac{a_2}{\sqrt[n+1]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n+1}}} + \ldots + \frac{a_n}{\sqrt[n+1]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n+1}}} + \frac{a_{n+1}}{\sqrt[n+1]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n+1}}} \geq n + 1$$

và bất đẳng thức Cauchy cho trường hợp $n + 1$ số thực được chứng minh.

ii) Dùng quy nạp trên n. Khi $n = 2$, ta có

$$\begin{aligned} \left(a_1 b_1 + a_2 b_2\right)^2 &= a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + 2a_1 b_1 a_2 b_2 \\ &\leq a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 \\ &\leq \left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2\right) \end{aligned}$$

Giả sử bất đẳng thức

$$\left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n\right)^2 \leq \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right)$$

đúng với mọi a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., $b_n \in \mathbb{R}$. Khi đó, với a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}, b_1, b_2, ..., b_n, $b_{n+1} \in \mathbb{R}$, ta có

$$\begin{aligned} &\left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n + a_{n+1} b_{n+1}\right)^2 \\ &= \left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n\right)^2 + 2\left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n\right) a_{n+1} b_{n+1} + a_{n+1}^2 b_{n+1}^2 \\ &\leq \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right) + \\ &\qquad + \left(a_1^2 b_{n+1}^2 + b_1^2 a_{n+1}^2\right) + \left(a_2^2 b_{n+1}^2 + b_2^2 a_{n+1}^2\right) + \ldots + \left(a_n^2 b_{n+1}^2 + b_n^2 a_{n+1}^2\right) + a_{n+1}^2 b_{n+1}^2 \\ &\leq \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right) + \\ &\qquad + \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right) b_{n+1}^2 + \left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right) a_{n+1}^2 + a_{n+1}^2 b_{n+1}^2 \\ &= \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + a_{n+1}^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2 + b_{n+1}^2\right) \end{aligned}$$

iii) Cũng dùng quy nạp trên n. Bất đẳng thức đúng khi $n = 1$ do

$$\left(1 + a\right)^1 = 1 + a \geq 1 + 1 \cdot a.$$

Giả sử bất đẳng thức

$$\left(1+a\right)^{n} \geq 1+na$$

đúng với một $n \in \mathbb{N}$. Ta suy ra

$$\begin{aligned}\left(1+a\right)^{n+1} &= \left(1+a\right)\left(1+a\right)^{n} \geq \left(1+a\right)\left(1+na\right) \\ &= 1+\left(n+1\right)a+na^{2} \geq 1+\left(n+1\right)a.\end{aligned}$$

Vậy, do phép chứng minh quy nạp, bất đẳng thức Bernoulli đúng với mọi số nguyên $n \in \mathbb{N}$. ■

Với tập các số hữu tỷ, ta đã biết rằng không tồn tại $x \in \mathbb{Q}$ sao cho $x^2 = 2$. Một cách trực giác, tồn tại các "lỗ hổng" giữa các số hữu tỷ. Cụ thể, với

$$A = \left\{x \in \mathbb{Q} \middle| \left(x > 0\right) \wedge \left(x^2 < 2\right)\right\}$$

và

$$B = \left\{x \in \mathbb{Q} \middle| \left(x > 0\right) \wedge \left(x^2 > 2\right)\right\},$$

ta có cả hai đều là những tập con không rỗng của $\mathbb{Q}$ thỏa

$$\forall x \in A, y \in B, x \leq y$$

nhưng không tồn tại $a \in \mathbb{Q}$ giữa A và B. Điều này có nghĩa là có một "lỗ hổng" giữa A và B.

Ngược lại với $\mathbb{Q}$, ta có tiên đề sau, gọi là tiên đề đầy đủ, cho tập $\mathbb{R}$ các số thực như sau

1.8. Tiên đề đầy đủ. *Cho A và B là hai tập con không rỗng của* $\mathbb{R}$ *sao cho*

$$\forall x \in A, y \in B, x \leq y.$$

Khi đó, tồn tại số thực α sao cho

$$\forall x \in A, y \in B, x \leq \alpha \leq y.$$

Với tiên đề đầy đủ này, người ta có thể biểu diễn tập các số thực bằng một đường thẳng, gọi là *đường thẳng thực* : Mỗi điểm biểu diễn một số thực và ngược lại, mỗi số thực được biểu diễn bằng một điểm trên đường thẳng thực.

Chẳng hạn, xét

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| \left(x > 0\right) \wedge \left(x^2 < 2\right)\right\}$$

và

$$B = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| \left(x > 0\right) \wedge \left(x^2 > 2\right)\right\}.$$

Chúng là những tập con không rỗng của $\mathbb{R}$ thỏa

$$\forall x \in A, y \in B, x \leq y$$

và do đó, dùng tiên đề đầy đủ, tồn tại số thực $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\forall x \in A, y \in B, x \leq \alpha \leq y.$$

Ta sẽ chứng minh bằng phản chứng rằng $\alpha^2 = 2$. Nếu $\alpha^2 < 2$, thì tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho $(\alpha + \varepsilon)^2 < 2$. Như vậy $\alpha + \varepsilon \in A$ và ta nhận được điều vô lý do $\forall x \in A, x \leq \alpha$.

Ngược lại, nếu $\alpha^2 > 2$, ta có thể chọn $\varepsilon > 0$ sao cho $\alpha - \varepsilon > 0$ và $(\alpha - \varepsilon)^2 > 2$. Điều này vô lý vì $\forall y \in B, \alpha \leq y$.

Tóm lại, ta phải có $\alpha^2 = 2$ và ta ký hiệu $\alpha \equiv \sqrt{2} \in \mathbb{R}$. ■

Tổng quát, ta có

1.9. Định lý. *Cho* $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ *và* $n \in \mathbb{N}$. *Tồn tại duy nhất số thực* $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$, *sao cho* $y^n = x$ *và ta ký hiệu* $y \equiv \sqrt[n]{x}$.

Chứng minh. Đặt

$$A = \left\{a \in \mathbb{R} \middle| (a > 0) \wedge (a^n < x)\right\}$$

và

$$B = \left\{a \in \mathbb{R} \middle| (a > 0) \wedge (a^n > x)\right\}.$$

Chúng là những tập con không rỗng của $\mathbb{R}$ thỏa

$$\forall x \in A, y \in B, x \leq y.$$

Do tiên đề đầy đủ, tồn tại (duy nhất) $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$, sao cho

$$\forall a \in A, b \in B, a \leq y \leq b.$$

Nếu $y^n < x$, thì bằng cách chọn $\varepsilon > 0$ sao cho $(y + \varepsilon)^n < x$, ta được $y + \varepsilon \in A$. Điều này vô lý vì $\forall a \in A, a \leq y$.

Ngược lại, nếu $y^n > x$, thì bằng cách chọn $\varepsilon > 0$ sao cho $y - \varepsilon > 0$ và $(y - \varepsilon)^n > x$, ta nhận được điều vô lý do $\forall b \in B, y \leq b$.

Từ đó suy ra $y^n = x$ và định lý được chứng minh. ■

Nhận xét : Định lý 1.9 cho thấy hai hàm số

$$f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$$
$$x \mapsto x^n$$

và

$$g : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$$
$$x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

với $n \in \mathbb{N}$, là cặp hàm ngược của nhau,

$$\forall x, y > 0, x = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow y = x^n.$$ ■

Bây giờ, xét các tập con của $\mathbb{R}$,

$$A = \left\{\left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n \middle| n \in \mathbb{N}\right\};\ B = \left\{\left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^{n+1} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Dễ dàng chứng minh được rằng

$$\forall x \in A, y \in B, x \le y.$$

Do tiên đề đầy đủ, tồn tại số thực, ký hiệu là e, sao cho

$$\forall x \in A, y \in B, x \le e \le y,$$

và điều này có nghĩa là, với mọi $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n \le e \le \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Chú ý rằng số e là duy nhất do khoảng cách giữa e và a_n luôn nhỏ hơn

$$\left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n = \tfrac{1}{n}\left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n \le \tfrac{4}{n}$$

mà đại lượng này sẽ có thể nhỏ tùy ý khi n đủ lớn. Do đó, ta gọi e là *giới hạn* của dãy số (a_n) khi n tăng ra vô cùng, ký hiệu $e = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ (xem chương 2).

Ta được định nghĩa cho số Néper

1.10. Định nghĩa. $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n$.

Tiếp theo, với $a > 1$ và $x \in \mathbb{Q}$, $x = \frac{m}{n}$, trong đó $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, ta có thể định nghĩa $a^p = \sqrt[n]{a^m}$. Khi $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, với

$$A = \left\{a^p \middle| p \in \mathbb{Q}, p < x\right\}$$

và

$$B = \left\{a^p \middle| p \in \mathbb{Q}, p > x\right\},$$

ta có

$$\forall a \in A, b \in B, a \le b.$$

Do tiên đề đầy đủ, tồn tại (duy nhất) $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\forall a \in A, b \in B, a \le \alpha \le b,$$

và ta có thể định nghĩa $a^x = \alpha$. Như vậy, hàm số

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto a^x \end{aligned}$$

được hoàn toàn xác định.

Ngược lại, với $x > 0$, $A = \left\{a^s \middle| s < x\right\}$ và $B = \left\{a^s \middle| s > x\right\}$, ta có A và B là các tập con không rỗng của $\mathbb{R}$ thỏa

$$\forall s \in A, t \in B, s \le t.$$

Cũng do tiên đề đầy đủ, tồn tại (duy nhất) $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\forall s \in A, t \in B, s \le \alpha \le t,$$

mà ta dễ dàng chứng minh rằng $a^\alpha = x$. Đặt $\alpha = \log_a x$ và do vậy, hàm số

$$\begin{aligned} f : (0, +\infty) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log_a x \end{aligned}$$

được hoàn toàn xác định.

Như vậy, do định nghĩa, hai hàm số

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to (0, +\infty) \\ x &\mapsto a^x \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} g : (0, +\infty) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log_a x \end{aligned}$$

cũng là một cặp hàm ngược,

$$\forall x \in \mathbb{R}, y > 0, \log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y. \qquad \blacksquare$$

2. TẬP HỢP $(\mathbb{R}, +, \cdot, | \ |)$

2.1. Hàm giá trị tuyệt đối $|.|$

Giá trị tuyệt đối của số thực x được xác định bởi

$$|x| = \max\{x, -x\},$$

nghĩa là

$$|x| = \begin{cases} x & \text{khi} \quad x \ge 0 \\ -x & \text{khi} \quad x < 0 \end{cases}$$

Từ định nghĩa, ta suy ra

$|x| = 0$ nếu và chỉ nếu $x = 0$;

$|x| \le a$ nếu và chỉ nếu $-a \le x \le a$;

$|x| \ge a$ nếu và chỉ nếu $x \ge a$ hay $x \le -a$.

2.2. Mệnh đề. *Với mọi số thực x và y,*

i) $|xy| = |x| \cdot |y|$

ii) $|x + y| \le |x| + |y|$

iii) $\big||x| - |y|\big| \le |x - y|$

Chứng minh. i) Từ tính chất

$$|x| = \begin{cases} x & \text{khi} \quad x \ge 0 \\ -x & \text{khi} \quad x < 0 \end{cases}$$

ta chứng minh được đẳng thức i) bằng cách xem xét bốn trường hợp xảy ra trên dấu của x và y. Chẳng hạn, khi $x \ge 0$ và $y < 0$, ta có $|xy| = -xy = x \cdot (-y) = |y| \cdot |x|$.

ii) Dễ thấy rằng $\forall x \in \mathbb{R}, x \le |x|$ và $-x \le |x|$, mà từ đó, ta được các bất đẳng thức

$$\begin{array}{c} x \le |x| \\ y \le |y| \\ \hline x + y \le |x| + |y| \end{array}$$

và

$$\begin{array}{c} -x \le |x| \\ -y \le |y| \\ \hline -(x + y) \le |x| + |y| \end{array}$$

Điều này cho thấy $|x| + |y|$ lớn hơn mọi phần tử của $\{x + y, -(x + y)\}$. Do đó

$$|x + y| = \max\{x + y, -(x + y)\} \le |x| + |y|.$$

iii) Bằng cách viết $x = (x - y) + y$, do ii), ta suy ra $|x| \le |x - y| + |y|$ và do đó $|x| - |y| \le |x - y|$. Tương tự, ta cũng có

$$|y| - |x| \le |y - x| = |(-1)(x - y)| = |-1| \cdot |x - y| = |x - y|.$$

Tóm lại, ta được

$$\begin{aligned} &|x| - |y| \le |x - y| \\ &-(|x| - |y|) \le |x - y| \end{aligned}$$

và do đó

$$\big||x| - |y|\big| \le |x - y|. \qquad \blacksquare$$

2.3. Khoảng trong $\mathbb{R}$ và lân cận của một điểm

Các tập con sau của $\mathbb{R}$, gọi là các *khoảng*, đóng một vai trò quan trọng trong phép tính vi tích phân. Với $a, b \in \mathbb{R}$,

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ gọi là *khoảng mở* với các cận a và b;

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$, gọi là *khoảng đóng*, hay *đoạn*, với các cận a và b;

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$;

$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$;

$(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$;

$[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\}$;

$(-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$;

$(-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le a\}$;

$(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$.

Chú ý

i) Dễ thấy rằng $(a,a) = (a,a] = [a,a) = \varnothing$ và $[a,a] = \{a\}$. Ngoài ra, nếu $b < a$, thì $(a,b) = (a,b] = [a,b) = [a,b] = \varnothing$.

ii) Chín loại khoảng của $\mathbb{R}$ nêu trên có thể đặc trưng bằng một tính chất chung như sau : Cho I là một tập con của $\mathbb{R}$. Ta có

I *là một khoảng của* $\mathbb{R}$ *nếu và chỉ nếu* $\forall a, b \in I, (a,b) \subset I$

iii) Các *khoảng mở* của $\mathbb{R}$ gồm

$$(a,b),\ (a,+\infty),\ (-\infty,a) \text{ và } (-\infty,+\infty).$$

Các *khoảng đóng* của $\mathbb{R}$ gồm

$$[a,b],\ [a,+\infty),\ (-\infty,a] \text{ và } (-\infty,+\infty).$$

Khi I là một khoảng mở của $\mathbb{R}$, ta có

$$\forall x \in I, \exists \alpha > 0, (x-\alpha, x+\alpha) \subset I,$$

trong đó $(x-\alpha, x+\alpha)$ được gọi là khoảng mở tâm a, bán kính $\alpha > 0$. Dễ thấy rằng tính chất này không đúng cho khoảng đóng $[a,b]$ vì với $x = a$, không có khoảng $(x-\alpha, x+\alpha)$ nào có thể chứa trong $[a,b]$.

2.4. Biểu diễn tham số cho khoảng (a,b)

Xét khoảng (a,b), $a < b$. Ta có

$$x \in (a,b) \Leftrightarrow a < x < b \Leftrightarrow 0 < x - a < b - a$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{x-a}{b-a} < a \Leftrightarrow \frac{x-a}{b-a} = \lambda \in (0,1)$$

$$\Leftrightarrow x = \lambda b + (1-\lambda)a,\ \lambda \in (0,1)$$

$$\Leftrightarrow x = \mu a + (1-\mu)b,\ \mu \in (0,1)$$

$$\Leftrightarrow x = \alpha a + \beta b,\ \alpha, \beta \in (0,1),\ \alpha + \beta = 1$$

Từ tính chất nêu trên, người ta gọi cách viết

$$(a,b) = \{\mu a + (1-\mu) : \mu \in (0,1)\}$$

là biểu diễn tham số của khoảng (a,b).

Điều này có nghĩa là mọi phần tử $x \in (a,b)$ đều có thể viết dưới dạng $x = \mu a + (1-\mu)b$, với $\mu \in (0,1)$.

Tương tự, mọi phần tử $x \in [a,b]$ đều có thể viết dưới dạng $x = \mu a + (1-\mu)b$, $\mu \in [0,1]$.

2.5. Bất phương trình $|x-a| < \varepsilon$, $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$

Bất phương trình dạng này xuất hiện nhiều trong phép tính vi tích phân. Dễ dàng tìm thấy rằng : x thỏa bất phương trình $|x-a| < \varepsilon$ nếu và chỉ nếu $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Giá trị $|x-a|$ còn được gọi là *khoảng cách* giữa x và a.

2.6. Lân cận của một điểm trong $\mathbb{R}$

Trong phép tính vi tích phân, người ta thường phát biểu rằng một tính chất nào đó là "*đúng trên một lân cận của điểm* $a \in \mathbb{R}$". Phát biểu này được phát biểu lại một cách chính xác như sau : "*tồn tại* $\alpha > 0$ *sao cho tính chất đó đúng trên khoảng mở* $(a-\alpha, a+\alpha)$".

Chẳng hạn, ta nói hàm số $x \mapsto \ln x \equiv \log_e x$ xác định trên một lân cận của $a = 10^{-3}$ do nó được hoàn toàn xác định trên khoảng mở $(a-10^{-4}, a+10^{-4})$; hàm số $x \mapsto \sqrt{x}$ không xác định trên một lân cận của $a = 0$ do với bất kỳ $\alpha > 0$, hàm số này không xác định trên khoảng mở $(-\alpha, \alpha)$; Hàm số $x \mapsto \ln|x|$ xác định trên một lân cận của $a = 0$ nhưng không xác định tại $a = 0$; chẳng hạn nó xác định trên $(-1,1) \setminus \{0\}$; hàm số $x \mapsto \frac{1}{x-2}$ xác định trên một lân cận của $a = 2$ nhưng không xác định tại $a = 2$.

Bài tập

1. Chứng minh các đẳng thức sau

a) $C_n^0 = C_n^n = 1$, với mọi $n \in \mathbb{N}$;

b) $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$, với mọi $n \in \mathbb{N}$, $k = 1,...,n$;

c) $C_n^k = C_{n-2}^{k-2} + 2C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^k$, với mọi $n \in \mathbb{N}$, $k = 2,...,n-2$;

d) $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$;

e) $C_n^0 - C_n^1 + ... + (-1)^{n-1}C_n^{n-1} + (-1)^n C_n^n = 0$.

2. Cho a, b là hai số thực bất kỳ. Chứng tỏ

a) $2 \cdot |ab| \le a^2 + b^2$

b) $\sqrt{a^2 + b^2} \le |a| + |b| \le \sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2}$

c) $\max\{a, b\} = \dfrac{a + b + |a + b|}{2}$

d) $\min\{a, b\} = \dfrac{a + b - |a + b|}{2}$

3. Chứng minh mệnh đề 1.4.

4. Cho $a > 1$. Chứng minh rằng

a) với mọi $n \in \mathbb{N}$, $a^n - 1 \ge n(a - 1)$.

b) với mọi $n \in \mathbb{N}$, $a - 1 \ge n\left(a^{1/n} - 1\right)$.

5. Cho $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ và $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Chứng tỏ rằng $a_n \le a_{n+1}$ và $b_{n+1} \le b_n$, với mọi $n \in \mathbb{N}$.

b) Chứng minh $a_n \le b_m$, với mọi $m, n \in \mathbb{N}$.