Bài tập

1. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+mx}-1}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$

c). $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{7+2x-x^2}}{x^2-2x}$

e) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 7x}{\tan 3x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} x\cot \pi x$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\arcsin x}{4x}$

h) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\cot x\right)$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x\sin 2x}$

j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x-\tan^2 x}{x\sin x}$

k) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x}{2+x}\right)^{3x}$

l) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{2x+1}$

m) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}}$

n) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

o) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$

p) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$

ĐS: a) $\dfrac{\sqrt[3]{1+mx}-1}{x}$ có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ khi $x\to 0$ và

$$\frac{\left(\sqrt[3]{1+mx}-1\right)'}{x'}=\frac{\frac{1}{3}\left(1+mx\right)^{\frac{1}{3}-1}\left(1+mx\right)'}{1}=\frac{m}{3\left(1+mx\right)^{\frac{2}{3}}}\to\frac{m}{3}$$ khi $x\to 0$. Do đó

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+mx}-1}{x}=\frac{m}{3}$$

b) $\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$ có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ khi $x\to 0$ và

$$\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)'}{\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)'}=\frac{\frac{1}{2}\left(x+1\right)^{\frac{1}{2}-1}}{\frac{1}{3}\left(x+1\right)^{\frac{1}{3}-1}}=\frac{3}{2}\left(x+1\right)^{\frac{1}{6}}\to\frac{3}{2}$$ khi $x\to 0$. Do đó

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}=\frac{3}{2}$$

c) $\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$ có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ khi $x\to 8$ và

$$\frac{\left(\sqrt{9+2x}-5\right)'}{\left(\sqrt[3]{x}-2\right)'}=\frac{\frac{1}{2}\left(9+2x\right)^{\frac{1}{2}-1}\left(9+2x\right)'}{\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}}=3\frac{\left(9+2x\right)^{-\frac{1}{2}}}{x^{-\frac{2}{3}}}\to 3\frac{25^{-\frac{1}{2}}}{8^{-\frac{2}{3}}}=3\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{4}}=\frac{12}{5}$$

khi $x \to 8$. Do đó

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}=\frac{12}{5}$$

d) $\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{7+2x-x^2}}{x^2-2x}$ có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ khi $x \to 2$ và

$$\frac{\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{7+2x-x^2}\right)'}{\left(x^2-2x\right)'}=\frac{\frac{1}{2}\left(1+x+x^2\right)^{\frac{1}{2}-1}\left(1+2x\right)-\frac{1}{2}\left(7+2x-x^2\right)^{\frac{1}{2}-1}\left(2-2x\right)}{2x-2}$$

$$=\frac{\frac{1+2x}{2\sqrt{1+x+x^2}}-\frac{2-2x}{2\sqrt{7+2x-x^2}}}{2x-2}\to\frac{\frac{5}{2\sqrt{7}}-\frac{-2}{2\sqrt{7}}}{2}=\frac{\frac{7}{2\sqrt{7}}}{2}=\frac{7}{4\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

khi $x \to 2$. Do đó

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{7+2x-x^2}}{x^2-2x}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

e) $\dfrac{\sin 7x}{\tan 3x}$ có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ khi $x \to \pi$ và $\dfrac{\left(\sin 7x\right)'}{\left(\tan 3x\right)'}=\dfrac{7\cos 7x}{3\left(1+\tan^2 3x\right)}\to\dfrac{7}{3}$ khi

$x \to \pi$. Do đó

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 7x}{\tan 3x}=\frac{7}{3}$$

f) $x\cot\pi x=\dfrac{x}{\tan\pi x}$ có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ khi $x \to 0$ và

$\dfrac{x'}{\left(\tan\pi x\right)'}=\dfrac{1}{\pi\left(1+\tan^2\pi x\right)}\to\dfrac{1}{\pi}$ khi $x \to 0$. Do đó

$$\lim_{x\to 0}x\cot\pi x=\frac{1}{\pi}$$

g) $\dfrac{3\arcsin x}{4x}$ có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ khi $x \to 0$ và $\dfrac{\left(3\arcsin x\right)'}{\left(4x\right)'}=\dfrac{\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}}{4}\to\dfrac{3}{4}$ khi

$x \to 0$. Do đó

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\arcsin x}{4x}=\frac{3}{4}$$

h) $\dfrac{1}{\sin x}-\cot x=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ khi $x \to 0$ và

$\dfrac{\left(1-\cos x\right)'}{\left(\sin x\right)'}=\dfrac{\sin x}{\cos x}\to 0$ khi $x \to 0$. Do đó

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\cot x\right)=0$$

i) $\dfrac{1-\cos^2 x}{x\sin 2x}$ có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ khi $x \to 0$ và

$$\frac{\left(1-\cos^2 x\right)'}{\left(x\sin 2x\right)'} = \frac{-2\cos x\left(\cos x\right)'}{\sin 2x + 2x\cos 2x} = \frac{\sin 2x}{\sin 2x + 2x\cos 2x}$$ có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ khi

$x \to 0$ và $\dfrac{\left(\sin 2x\right)'}{\left(\sin 2x + 2x\cos 2x\right)'} = \dfrac{2\cos 2x}{2\cos 2x + 2\cos 2x - 4x\sin 2x} \to \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ khi

$x \to 0$. Do đó

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\sin 2x} = \frac{1}{2}$$

Cách khác : $\dfrac{1-\cos^2 x}{x\sin 2x} = \dfrac{1-\cos x}{x^2}\dfrac{1}{2\frac{\sin 2x}{2x}}\left(1+\cos x\right) \to \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2}2 = \dfrac{1}{2}$

j) $\dfrac{1-\cos x - \tan^2 x}{x\sin x}$ có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ khi $x \to 0$ và

$$\frac{\left(1-\cos x-\tan^2 x\right)'}{\left(x\sin x\right)'} = \frac{\sin x - 2\tan x\left(1+\tan^2 x\right)}{\sin x + x\cos x}$$ có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ khi $x \to 0$

và $$\frac{\sin x - 2\tan x\left(1+\tan^2 x\right)}{\sin x + x\cos x}\frac{\left(\sin x - 2\tan x - 2\tan^3 x\right)'}{\left(\sin x + x\cos x\right)'}$$ khi $x \to 0$. Do đó

$$= \frac{\cos x - 2\left(1+\tan^2 x\right) - 6\tan^2 x\left(1+\tan^2 x\right)}{\cos x + \cos x - x\sin x} \to \frac{-1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x-\tan^2 x}{x\sin x} = -\frac{1}{2}$$

Cách khác : $\dfrac{1-\cos x-\tan^2 x}{x\sin x} = \dfrac{1-\cos x}{x^2\frac{\sin x}{x}} - \dfrac{\sin x}{x\cos^2 x} \to \dfrac{1}{2} - 1 = -\dfrac{1}{2}$

k) $\left(\dfrac{x}{2+x}\right)^{3x} = e^{3x\ln\frac{x}{2+x}} = e^t$, với $t = 3x\ln\frac{x}{2+x} = \dfrac{\ln\frac{x}{2+x}}{\frac{1}{3x}}$ có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ khi

$x \to \infty$ và $\dfrac{\left(\ln\frac{x}{2+x}\right)'}{\left(\frac{1}{3x}\right)'} = \dfrac{\frac{1}{\frac{x}{2+x}}\left(\frac{x}{2+x}\right)'}{-\frac{1}{3x^2}} = \dfrac{\frac{1}{\frac{x}{2+x}}\frac{2}{\left(2+x\right)^2}}{-\frac{1}{3x^2}} = -\dfrac{6x}{2+x} \to -6$ khi $x \to \infty$. Do đó

$\lim\limits_{x\to\infty} t = -6$ và $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{2+x}\right)^{3x} = \lim\limits_{t\to -6} e^t = e^{-6}$

l) $\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{2x+1} = e^{\left(2x+1\right)\ln\frac{x+3}{x-2}} = e^t$, với $t = \left(2x+1\right)\ln\frac{x+3}{x-2} = \dfrac{\ln\frac{x+3}{x-2}}{\frac{1}{2x+1}}$ có dạng vô định

$\frac{0}{0}$ khi $x \to \infty$ và $\frac{\left(\ln\frac{x+3}{x-2}\right)'}{\left(\frac{1}{2x+1}\right)'} = \frac{\frac{1}{\frac{x+3}{x-2}}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)'}{-\frac{2}{(2x+1)^2}} = \frac{\frac{1}{\frac{x+3}{x-2}}\frac{-5}{(x-2)^2}}{-\frac{1}{3x^2}} = \frac{15x^2}{(x-2)(x+3)} \to 15$

khi $x \to \infty$. Do đó

$$\lim_{x\to\infty} t = 15 \text{ và } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x+1} = \lim_{t\to 15} e^t = e^{15}$$

m) $(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{\ln\cos x}{x^2}} = e^t$, với $t = \frac{\ln\cos x}{x^2}$ có dạng vô định $\frac{0}{0}$ khi $x \to 0$ và

$$\frac{(\ln\cos x)'}{(x^2)'} = \frac{\frac{1}{\cos x}(\cos x)'}{2x} = \frac{-\sin x}{2x\cos x} \to -\frac{1}{2} \text{ khi } x \to 0. \text{ Do đó}$$

$$\lim_{x\to 0} t = -\frac{1}{2} \text{ và } \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{t\to -\frac{1}{2}} e^t = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

n) $(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}} = e^{\frac{\ln\cos x}{\sin x}} = e^t$, với $t = \frac{\ln\cos x}{\sin x}$ có dạng vô định $\frac{0}{0}$ khi $x \to 0$ và

$$\frac{(\ln\cos x)'}{(\sin x)'} = \frac{\frac{1}{\cos x}(\cos x)'}{\cos x} = \frac{-\sin x}{\cos^2 x} \to 0 \text{ khi } x \to 0. \text{ Do đó}$$

$$\lim_{x\to 0} t = 0 \text{ và } \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{t\to 0} e^t = e^0 = 1$$

o) $\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}} = e^{\frac{\ln\frac{1+\tan x}{1+\sin x}}{\sin^3 x}} = e^t$, với $t = \frac{\ln\frac{1+\tan x}{1+\sin x}}{\sin^3 x}$ có dạng vô định $\frac{0}{0}$ khi $x \to 0$

$$\frac{\left(\ln\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)'}{(\sin^3 x)'} = \frac{\frac{1}{\frac{1+\tan x}{1+\sin x}}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)'}{3\sin^2 x\cos x} = \frac{\frac{1}{\frac{1+\tan x}{1+\sin x}}\frac{(1+\tan^2 x)(1+\sin x)-(1+\tan x)\cos x}{(1+\sin x)^2}}{3\sin^2 x\cos x}$$

và $= \frac{\frac{1+\sin x+\tan^2 x+\sin x\tan^2 x-\cos x-\cos x\tan x}{(1+\tan x)(1+\sin x)}}{3\sin^2 x\cos x} = \frac{1+\tan^2 x+\sin x\tan^2 x-\cos x}{3\sin^2 x\cos x(1+\tan x)(1+\sin x)}$

$$= \frac{1-\cos x}{3\sin^2 x}\frac{1}{(1+\tan x)(1+\sin x)} + \frac{\tan^2 x}{3\sin^2 x}\frac{(1+\sin x)}{\cos x(1+\tan x)(1+\sin x)}$$

$$= \frac{\frac{1-\cos x}{x^2}}{3\frac{\sin^2 x}{x^2}}\frac{1}{(1+\tan x)(1+\sin x)} + \frac{\frac{\tan^2 x}{x^2}}{3\frac{\sin^2 x}{x^2}}\frac{1}{\cos x(1+\tan x)} \to \frac{1}{3}+\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

khi $x \to 0$. Do đó

$$\lim_{x\to 0} t = \frac{2}{3} \text{ và } \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}} = \lim_{t\to\frac{2}{3}} e^t = e^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{e^2}$$

p) $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}} = e^{\frac{\sin x}{x-\sin x}\ln\frac{\sin x}{x}} = e^t$, với $t = \frac{\sin x}{x-\sin x}\ln\frac{\sin x}{x} = \dfrac{\ln\frac{\sin x}{x}}{\frac{x-\sin x}{\sin x}}$ có dạng vô định

$\dfrac{0}{0}$ khi $x \to 0$ và

$$\frac{\left(\ln\frac{\sin x}{x}\right)'}{\left(\frac{x-\sin x}{\sin x}\right)'} = \frac{\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}\left(\frac{\sin x}{x}\right)'}{\frac{(1-\cos x)\sin x-(x-\sin x)\cos x}{\sin^2 x}} = \frac{\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}}{\frac{(1-\cos x)\sin x-(x-\sin x)\cos x}{\sin^2 x}}$$

$$= \frac{\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}}{\frac{\sin x-\sin x\cos x-x\cos x+\sin x\cos x}{\sin^2 x}} = \frac{(x\cos x-\sin x)\sin x}{x(\sin x - x\cos x)} = -\frac{\sin x}{x} \to -1$$

khi $x \to 0$. Do đó

$$\lim_{x\to 0} t = -1 \text{ và } \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}} = \lim_{t\to -1} e^t = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

2. Dùng quy tắc L'Hospital, tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$

c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$ d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{1-\cos 3x}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$ h) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\ln(1+x)-\ln x\right]$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-5^x}{1-e^x}$ j) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x\ln x}$

ĐS: a) $\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$ có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ khi $x \to 0$ và

$$\frac{\left((1+x)(1+2x)(1+3x)-1\right)'}{(x)'} = \frac{(1+2x)(1+3x)+(1+x)\left[(1+2x)(1+3x)\right]'}{1}$$

$$= (1+2x)(1+3x)+(1+x)\left[2(1+3x)+3(1+2x)\right] \to 6$$

khi $x \to 0$. Do đó

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x} = 6$$

b) $\dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$ có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ khi $x \to 0$ và

$$\frac{\left(\left(1+x\right)^5-\left(1+5x\right)\right)'}{\left(x^2+x^5\right)'}=\frac{5\left(1+x\right)^4-5}{2x+5x^4}$$ cũng có dạng vô định $\frac{0}{0}$ khi $x\to 0$ và

$$\frac{\left[5\left(1+x\right)^4-5\right]'}{\left(2x+5x^4\right)'}=\frac{20\left(1+x\right)^3}{2+20x^3}\to 10$$ khi $x\to 0$. Do đó

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x\right)^5-\left(1+5x\right)}{x^2+x^5}=10$$

c) $\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$ có dạng vô định $\frac{0}{0}$ khi $x\to 3$ và

$$\frac{\left(\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}\right)'}{\left(x^2-9\right)'}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+13}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}}{2x}\to\frac{\frac{1}{8}-\frac{1}{2}}{6}=-\frac{1}{16}$$ khi $x\to 3$. Do đó

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}=-\frac{1}{16}$$

d) $\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}=\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{x}+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}\to 0$ khi $x\to\infty$. Do đó

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)=0$$

e) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}=\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}+1}\to\frac{1}{2}$ khi $x\to+\infty$.

Do đó

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2}$$

f) $\frac{1-\cos 5x}{1-\cos 3x}$ có dạng vô định $\frac{0}{0}$ khi $x\to 0$ và $\frac{\left(1-\cos 5x\right)'}{\left(1-\cos 3x\right)'}=\frac{5\sin 5x}{3\sin 3x}$ cũng có dạng vô định $\frac{0}{0}$ khi $x\to 0$ và $\frac{\left(5\sin 5x\right)'}{\left(3\sin 3x\right)'}=\frac{15\cos 5x}{9\cos 3x}\to\frac{15}{9}$ khi $x\to 0$. Do đó

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{1-\cos 3x}=\frac{15}{9}$$

g) $\dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$ có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ khi $x \to 0$ và

$\dfrac{\left(\tan x - \sin x\right)'}{\left(x^3\right)'} = \dfrac{1 + \tan^2 x - \cos x}{3x^2}$ cũng có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ khi $x \to 0$ và

$\dfrac{\left(1 + \tan^2 x - \cos x\right)'}{\left(3x^2\right)'} = \dfrac{2\tan x\left(1 + \tan^2 x\right) + \sin x}{6x} \to \dfrac{2}{6} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2}$ khi $x \to 0$. Do đó

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3} = \dfrac{1}{2}$.

Cách khác : $\dfrac{\tan x - \sin x}{x^3} = \dfrac{\sin x}{x} \dfrac{\frac{1}{\cos x} - 1}{x^2} = \dfrac{\sin x}{x} \dfrac{1}{\cos x} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} \to 1 \cdot 1 \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

h) $x\left[\ln\left(1 + x\right) - \ln x\right] = \dfrac{\ln \frac{1+x}{x}}{\frac{1}{x}}$ có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ khi $x \to +\infty$ và

$\dfrac{\left(\ln \frac{1+x}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \dfrac{\frac{1}{\frac{1+x}{x}}\left(\frac{1+x}{x}\right)'}{-\frac{1}{x^2}} = \dfrac{\frac{1}{\frac{1+x}{x}} \frac{-1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{\frac{1+x}{x}} = \dfrac{x}{1 + x} \to 1$ khi $x \to +\infty$. Do đó

$\lim\limits_{x \to +\infty} x\left[\ln\left(1 + x\right) - \ln x\right] = 1$.

i) $\dfrac{1 - 5^x}{1 - e^x} = \dfrac{1 - e^{x \ln 5}}{1 - e^x}$ có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ khi $x \to 0$ và

$\dfrac{\left(1 - e^{x\ln 5}\right)'}{\left(1 - e^x\right)'} = \dfrac{-\left(\ln 5\right)e^{x \ln 5}}{-e^x} \to -\ln 5$ khi $x \to 0$. Do đó

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - 5^x}{1 - e^x} = -\ln 5$.

j) $\dfrac{x^2 - 1}{x \ln x}$ có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ khi $x \to 1$ và $\dfrac{\left(x^2 - 1\right)'}{\left(x \ln x\right)'} = \dfrac{2x}{\ln x + 1} \to 2$ khi $x \to 1$.

Do đó

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x \ln x} = 2$.

3. Chứng minh rằng hàm số f xác định bởi

$$f\left(x\right) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{khi} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{khi} \quad x = 0 \end{cases}$$

là hàm có đạo hàm. Đạo hàm của nó có là liên tục không ?

ĐS: Tại $x \neq 0$, ta có

$$f'(x) = \left[x^2 \sin\left(\tfrac{1}{x}\right)\right]' = \left[x^2\right]' \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) + x^2\left[\sin\left(\tfrac{1}{x}\right)\right]' = 2x\sin\left(\tfrac{1}{x}\right) + x^2\cos\left(\tfrac{1}{x}\right)\left[\tfrac{1}{x}\right]'$$

$$= 2x\sin\left(\tfrac{1}{x}\right) + x^2\cos\left(\tfrac{1}{x}\right)\left(-\tfrac{1}{x^2}\right) = 2x\sin\left(\tfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\tfrac{1}{x}\right)$$

Tại $x = 0$, ta có

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin\left(\tfrac{1}{h}\right)$$

Vì $\left|h\sin\left(\frac{1}{h}\right)\right| \leq |h| \to 0$ khi $h \to 0$ nên $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} h\sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0$.

Tóm lại hàm f có đạo hàm tại mọi điểm và

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

Hiển nhiên là f' liên tục tại các $x \neq 0$.

Tại $x = 0$. Do $\left|2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |2x| \to 0$ khi $x \to 0$, ta suy ra $\lim\limits_{x\to 0} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Tuy nhiên $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ không có giới hạn khi $x \to 0$. Do vậy $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ không tồn tại. Vậy f' không liên tục tại $x = 0$.

4. Xét hàm số f cho bởi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+2-\sqrt{4-x^2}}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

a) Tìm miền xác định của f.

b) Tính giới hạn của f khi x tiến về 0; f có liên tục tại điểm 0 không ?

c) Tính $f'(x)$ khi $x \neq 0$ và tính giới hạn của f' khi x tiến về 0.

d) Chứng tỏ rằng f có đạo hàm tại 0 bằng định nghĩa và tính giá trị $f'(0)$.

e) Hàm f' có liên tục tại 0 không ?

ĐS: a) Khi $x \neq 0$, ta có $f(x) = \frac{x+2-\sqrt{4-x^2}}{x}$ tồn tại khi $4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$. Vậy miền xác định của f là $D = [-2, 2]$.

b) $$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{x+2-\sqrt{4-x^2}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(x+2)^2 - (4-x^2)}{x\left(x+2+\sqrt{4-x^2}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2+4x}{x\left(x+2+\sqrt{4-x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x+4}{x+2+\sqrt{4-x^2}} = 1$$

Vì $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(1)$, ta suy ra f liên tục tại 0.

c) Tại $x \neq 0$, ta có

$$f'(x) = \left(\frac{x+2-\sqrt{4-x^2}}{x}\right)' = \frac{\left(x+2-\sqrt{4-x^2}\right)' x - \left(x+2-\sqrt{4-x^2}\right)x'}{x^2} = \frac{\left(1+\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right)x - \left(x+2-\sqrt{4-x^2}\right)}{x^2}$$

$$= \frac{x\sqrt{4-x^2} + x^2 - (x+2)\sqrt{4-x^2} - \left(4-x^2\right)}{x^2\sqrt{4-x^2}} = \frac{2x^2 - 2\sqrt{4-x^2} - 4}{x^2\sqrt{4-x^2}}$$

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 - 2\sqrt{4-x^2} - 4}{x^2\sqrt{4-x^2}} = -\infty$$

d) Do định nghĩa,

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h+2-\sqrt{4-h^2}}{h} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2-\sqrt{4-h^2}}{h^2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(2-\sqrt{4-h^2}\right)'}{\left(h^2\right)'} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h}{\sqrt{4-h^2}}}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{2\sqrt{4-h^2}} = \frac{1}{4}$$

e) f' không có giới hạn khi $x \to 0$ nên f' không liên tục tại 0.

5. Chứng tỏ rằng $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^r} = +\infty$ khi $a > 1$ và $r > 0$.

ĐS: Trước hết, ta chứng minh $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^n} = +\infty$ bằng quy nạp theo $n \in \mathbb{N}$. Với $n = 1$, ta có $\frac{a^x}{x} = \frac{e^{x\ln a}}{x}$ có dạng $\frac{\infty}{\infty}$ khi $x \to +\infty$ và $\frac{\left(e^{x\ln a}\right)'}{x'} = e^{x\ln a} \cdot \ln a \to +\infty$ khi $x \to +\infty$ nên $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x} = +\infty$.

Giả sử $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^n} = +\infty$. Xét $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^{n+1}}$. Ta có $\frac{a^x}{x^{n+1}} = \frac{e^{x\ln a}}{x^{n+1}}$ có dạng $\frac{\infty}{\infty}$ khi $x \to +\infty$ và $\frac{\left(e^{x\ln a}\right)'}{\left(x^{n+1}\right)} = \frac{e^{x\ln a}\cdot \ln a}{nx^n} = \frac{1}{n}\frac{a^x}{x^n} \to +\infty$ khi $x \to +\infty$. Do đó, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^{n+1}} = +\infty$

Bây giờ, với $r > 0$, chọn $n \in \mathbb{N}$ sao cho $r \le n$. Do $x^r \le x^n$, ta suy ra $\frac{a^x}{x^r} \ge \frac{a^x}{x^n}$ và vì $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^n} = +\infty$ nên $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^r} = +\infty$.

6. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{1+x}$ xác định trên khoảng $(0, +\infty)$.

a) Tính $f'(x)$, $f''(x)$ và $f^{(3)}(x)$.

b) Kiểm chứng đẳng thức

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + x^3\varepsilon(x),$$

với $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

ĐS: a) $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$ cho $f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$;

$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(1+x)^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$;

$f^{(3)}(x) = \left(f''(x)\right)' = -\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{2}\right)(1+x)^{-\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}$.

b) Áp dụng công thức Taylor-Young,

$f(a+x) = f(a) + xf'(a) + \frac{x^2}{2!}f''(a) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(a) + x^3\varepsilon(x)$

với $a = 0$; $f(x) = \sqrt{1+x}$; $f(0) = 1$; $f'(0) = \frac{1}{2}$; $f''(0) = -\frac{1}{4}$; $f'''(0) = \frac{3}{8}$, ta được

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + x^3\varepsilon(x)$$

7. Dùng công thức Taylor-Young, chứng tỏ

a) $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$,

b) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$,

c) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\varepsilon(x)$,

với $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

ĐS: a) Áp dụng công thức Taylor-Young với $a = 0$,

$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + x^n\varepsilon(x)$

trong đó $f(x) = \ln(1+x)$ cho $f(0) = 0$; $f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$ cho $f'(0) = 1$; $f''(x) = -(1+x)^{-2}$ cho $f''(0) = -1$; $f^{(3)}(x) = 2(1+x)^{-3}$ cho $f^{(3)}(0) = 2$; ... Tổng quát $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!(1+x)^{-n}$ cho $f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$. Ta suy ra

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x).$$

b) Áp dụng công thức Taylor-Young với $a = 0$,

$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}f^{(2n+1)}(0) + x^{2n+1}\varepsilon(x)$

trong đó $f(x) = \sin x$ cho $f(0) = 0$; $f'(x) = \cos x$ cho $f'(0) = 1$; $f''(x) = -\sin x$ cho $f''(0) = 0$; $f^{(3)}(x) = -\cos x$ cho $f^{(3)}(0) = -1$; ... Tổng quát

$f^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin x$ và $f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x$ cho $f^{(2n)}(0) = 0$ và $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$. Ta suy ra

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x).$$

c) Áp dụng công thức Taylor-Young với $a = 0$,

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \tfrac{x^2}{2!}f''(0) + \tfrac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + ... + \tfrac{x^{2n}}{(2n)!}f^{(2n)}(0) + x^{2n}\varepsilon(x)$$

trong đó $f(x) = \cos x$ cho $f(0) = 1$; $f'(x) = -\sin x$ cho $f'(0) = 0$; $f''(x) = -\cos x$ cho $f''(0) = -1$; $f^{(3)}(x) = \sin x$ cho $f^{(3)}(0) = 0$; ... Tổng quát

$f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos x$ và $f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \sin x$ cho $f^{(2n)}(0) = (-1)^n$ và $f^{(2n+1)}(0) = 0$. Ta suy ra

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\varepsilon(x).$$

8. Khảo sát cực trị hàm số f xác định trên $\mathbb{R}$ với

$$f(x) = x^5 - 20x + 3.$$

ĐS: $f'(x) = 5x^4 - 20 = 0 \Leftrightarrow x^4 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

$f''(x) = 20x^3$; $f''(\sqrt{2}) = 20(\sqrt{2})^3 > 0$: $x = \sqrt{2}$ là điểm cực tiểu địa phương;

$f''(-\sqrt{2}) = 20(-\sqrt{2})^3 < 0$: $x = -\sqrt{2}$ là điểm cực đại địa phương.

9. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 10$ trên khoảng $[-1, 4]$.

b) $f(x) = \sqrt{4 - x} + \sqrt{x - 2}$ trên khoảng $[2, 4]$.

ĐS: a) $f'(x) = 3x^2 - 8x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{5}{3}$;

$f(-1) = -20$; $f(1) = -8$; $f\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{220}{27}$; $f(4) = 10$.

$$\min_{-1 \le x \le 4} f(x) = \min\left\{f(-1), f(1), f\left(\tfrac{5}{3}\right), f(4)\right\} = \min\left\{-20, -8, -\tfrac{220}{27}, 10\right\} = -20$$

$$\max_{-1\le x\le 4} f(x) = \max\left\{f(-1), f(1), f\left(\tfrac{5}{3}\right), f(4)\right\} = \max\left\{-20, -8, -\tfrac{220}{27}, 10\right\} = 10$$

b) $f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{4-x}} + \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x} = \sqrt{x-2} \Leftrightarrow 4-x = x-2 \Leftrightarrow x = 3$;

$f(2) = \sqrt{2}$; $f(3) = 2$; $f(4) = \sqrt{2}$.

$$\min_{2\le x\le 4} f(x) = \min\left\{f(2), f(3), f(4)\right\} = \min\left\{\sqrt{2}, 2\right\} = \sqrt{2}$$

$$\max_{2\le x\le 4} f(x) = \max\left\{f(2), f(3), f(4)\right\} = \max\left\{\sqrt{2}, 2\right\} = 2.$$