Chương 3

HÀM SỐ THỰC THEO MỘT BIẾN SỐ THỰC

Trong chương này, bằng cách dùng khái niệm về giới hạn của dãy số, chúng ta sẽ khảo sát khái niệm giới hạn, tính liên tục và tính khả vi của một hàm số trong phần 1, 2 và 3. Cuối cùng, các hàm số sơ cấp cơ bản được giới thiệu và khảo sát trong phần 4.

1. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

Cho $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ và f là một hàm số xác định trên một lân cận của a, có thể không xác định tại a, nghĩa là f xác định trên một khoảng mở I, có thể không xác định tại a, với $I = (a-\alpha, a+\alpha)$, $\alpha > 0$, khi $a \in \mathbb{R}$; $I = (\alpha, +\infty)$, $\alpha > 0$ khi $a = +\infty$ và $I = (-\infty, -\alpha)$, $\alpha > 0$ khi $a = -\infty$.

1.1. Định nghĩa. Ta nói hàm f có *giới hạn* $l \in \overline{\mathbb{R}}$ khi x *tiến về* a khi f biến mọi dãy (x_n) các phần tử của I, có giới hạn a, $x_n \neq a$, thành dãy $(f(x_n))$ hội tụ về l, ký hiệu $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ hay $f(x) \to l$ khi $x \to a$.

Cho $a \in \mathbb{R}$ và f là hàm số xác định trên khoảng $I_1 = (a-\alpha, a)$, $\alpha > 0$. Ta nói f có *giới hạn bên trái* $l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ khi x tiến về a, khi f biến mọi dãy (x_n) các phần tử của I_1 hội tụ về a thành dãy $(f(x_n))$ hội tụ về l_1, ký hiệu $\lim\limits_{x \to a^-} = l_1$. Khi hàm số f xác định trên khoảng $I_2 = (a, a+\alpha)$, $\alpha > 0$, ta có định nghĩa tương tự cho *giới hạn bên phải* l_2 của f tại a, ký hiệu $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l_2$.

Chú ý rằng, để khảo sát giới hạn bên trái cũng như bên phải của f tại a, ta lần lượt thay điều kiện $x_n \neq a$ trong định nghĩa cho giới hạn của f tại a bằng điều kiện $x_n < a$, $x_n > a$.

Ví dụ 1. i) $\lim\limits_{x \to a} x = a$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$.

ii) $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$ khi $a \neq 0$; $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

iii) Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{|x|}$ với miền xác định $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ta chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ không tồn tại. Thật vậy, xét dãy (x_n), với $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Ta có $(x_n) \subset \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$ nhưng $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_n}{|x_n|} = \lim\limits_{n \to \infty} (-1)^n$ không tồn tại.

Ta cũng có thể chứng minh điều này bằng cách xét các dãy số $\left(x_n\right)$ và $\left(y_n\right)$, với $x_n = -\frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Ta có $\left(x_n\right)$, $\left(y_n\right) \subset \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ nhưng $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{|x_n|} = -1$ và $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(y_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{|y_n|} = 1$. ■

Bằng cách dùng tính chất của giới hạn dãy số, ta được

1.2. Mệnh đề. *Cho* f *và* g *là hai hàm số xác định trên một lân cận* I *của* a*, có thể không xác định tại* a. *Nếu* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ *và* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = k$ *thì*

i) $\lim\limits_{x\to a} \left(f + g\right)(x) = l + k$,

ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} \lambda f(x) = \lambda l$,

iii) $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |l|$,

iv) $\lim\limits_{x\to a} \left(f \cdot g\right)(x) = l \cdot k$,

v) $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f}(x) = \lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$ *với điều kiện* $l \neq 0$,

vi) Nếu $\forall x \in I$, $f(x) \leq g(x)$ *thì* $l \leq k$,

vii) Nếu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = l$ *và* $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, $\forall x \in I$, *thì* $\lim\limits_{x\to a} h(x) = l$,

với điều kiện là vế phải không xuất hiện dạng vô định, nghĩa là không xuất hiện dạng $\infty - \infty$ *trong i) và dạng* $0 \cdot \infty$ *trong iv).*

Chú ý rằng nếu $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right) = l$ và $\lim\limits_{x\to a} g\left(x\right) = k$ với $l, k \in \overline{\mathbb{R}}$, thì $\lim\limits_{x\to a} \frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)} = \frac{l}{k}$ nếu không xuất hiện dạng vô định $\frac{0}{0}$ và $\frac{\infty}{\infty}$.

Ta cũng nhận được kết quả tương tự cho giới hạn bên trái và giới hạn bên phải.

2. HÀM SỐ LIÊN TỤC

Cho $a \in \mathbb{R}$ và f là một hàm số xác định trên một lân cận của a.

2.1. Định nghĩa. Ta nói f *liên tục tại* a khi $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Điều này bao hàm :

– f xác định tại a;

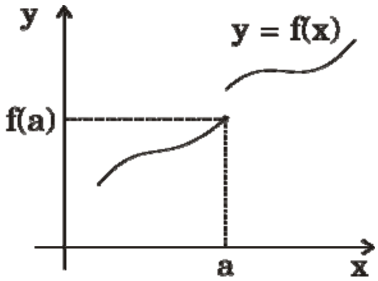
– giới hạn của f khi x tiến về a tồn tại;

– giới hạn của f khi x tiến về a bằng với giá trị của hàm số f tại a.

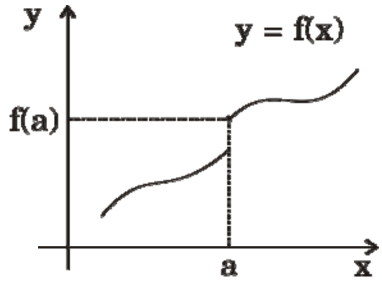
Ví dụ 2. Từ ví dụ 1, i), ta có hàm số $f(x) = x$ liên tục tại mọi $a \in \mathbb{R}$. Hơn nữa, bằng cách dùng mệnh đề 1.2, iv), ta có thể chứng minh bằng quy nạp rằng $\lim_{x \to a} x^n = a^n$, với mọi $n \in \mathbb{N}$. Do đó, hàm số $f(x) = x^n$ cũng liên tục tại mọi $a \in \mathbb{R}$. ■

2.2. Định nghĩa. Cho f là một hàm số xác định trên $(a - \alpha, a]$, $\alpha > 0$. Ta nói f *liên tục bên trái* tại a khi $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

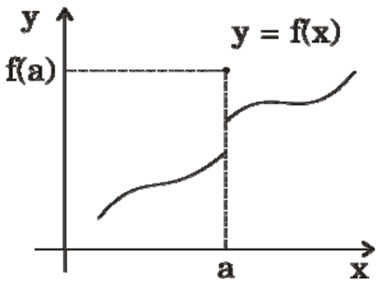
Tương tự, với hàm số f xác định trên $[a, a + \alpha)$, $\alpha > 0$, ta nói f *liên tục bên phải* tại a khi $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.



f liên tục bên trái tại a



f liên tục bên phải tại a



f không liên tục bên trái lẫn bên phải tại a

Ví dụ 3. Hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{khi} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{khi} \quad x = 0 \end{cases}$$

liên tục bên phải tại 0, hàm số

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{khi} \quad x \neq 0 \\ -1 & \text{khi} \quad x = 0 \end{cases}$$

liên tục bên trái tại 0 nhưng hàm số

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{khi} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{khi} \quad x = 0 \end{cases}$$

không liên tục cả bên trái lẫn bên phải tại 0. ■

2.3. Mệnh đề. f *liên tục tại* a *nếu và chỉ nếu* f *liên tục bên trái tại* a *và* f *liên tục bên phải tại* a.

Kết hợp mệnh đề 1.2 và định nghĩa 2.1, ta được

2.4. Mệnh đề. *Cho* $a \in \mathbb{R}$ *và* f, g *là hai hàm số xác định trên một lân cận của* a. *Nếu* f *và* g *cùng liên tục tại* a *thì*

a) $f + g$ *liên tục tại* a;

b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, λf *liên tục tại* a;

c) $f \cdot g$ *liên tục tại* a;

d) $\frac{1}{f}$ *liên tục tại* a, *với điều kiện* $f(a) \neq 0$.

Nếu $g(a) \neq 0$ *thì bằng cách kết hợp (c) và (d), ta suy ra rằng hàm số* $\frac{f}{g}$ *liên tục tại* a.

Ví dụ 4. Từ ví dụ 2, ta suy ra hàm số $f(x) = x^n$ liên tục tại mọi điểm $a \in \mathbb{R}$, với mọi $n \in \mathbb{N}$. Do đó, mệnh đề 2.4 cho thấy mọi đa thức

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

với $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$, cũng liên tục tại mọi điểm $a \in \mathbb{R}$. ■

2.5. Định nghĩa. Cho hàm số f xác định trên một khoảng mở J của $\mathbb{R}$. Ta nói rằng f *liên tục trên J* khi f liên tục tại mọi điểm của J.

Nói khác đi, f liên tục trên (a,b) khi $\forall x_0 \in (a,b)$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Ta nói hàm số f *liên tục trên đoạn* $[a,b]$ khi f liên tục trên (a,b), liên tục bên phải tại a và liên tục bên trái tại b.

Tương tự, ta nói hàm số f *liên tục trên* $[a,+\infty)$ khi f liên tục trên $(a,+\infty)$ và liên tục bên phải tại a. Sự liên tục của f trên $(-\infty,b]$ được định nghĩa tương tự.

Ví dụ 5. i) Hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{khi} \quad x > 0 \\ 1 & \text{khi} \quad x = 0 \end{cases}$$

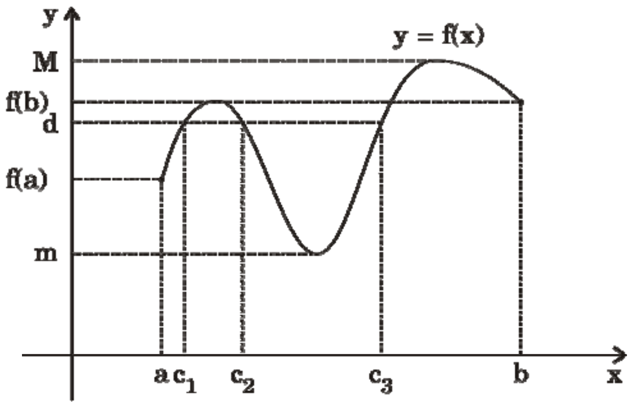
liên tục trên $[0,+\infty)$.

ii) Mọi đa thức đều liên tục trên $\mathbb{R}$. ■

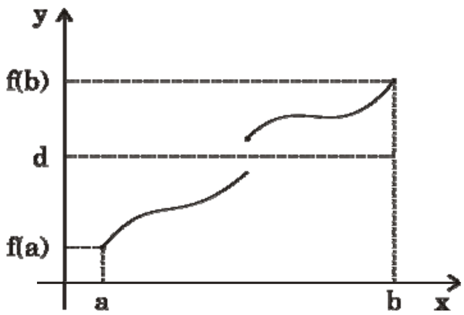
2.6. Định lý giá trị trung gian. *Nếu* f *liên tục trên khoảng đóng và bị chặn* $[a,b]$ *thì với mọi* d *giữa* $f(a)$ *và* $f(b)$, *tồn tại* $c \in [a,b]$ *sao cho* $f(c) = d$.

Định lý này cho thấy rằng mọi điểm d nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$ đều là ảnh của ít nhất một điểm c trong khoảng $[a,b]$. Điểm c này không nhất thiết duy nhất như trường hợp hàm f có đồ thị cho bởi hình sau : tồn tại $c_1, c_2, c_3 \in [a,b]$ sao cho

$$f\left(c_1\right) = f\left(c_2\right) = f\left(c_3\right) = d.$$



Trường hợp hàm f không liên tục trên $\left[a,b\right]$, chẳng hạn như hàm số f xác định bởi đồ thị trong hình sau



điểm $d \in \left[f\left(a\right), f\left(b\right)\right]$ không là ảnh của bất cứ điểm c nào trong khoảng $\left[a,b\right]$.

2.7. Định lý tối ưu của Weierstrass. *Nếu hàm số* f *liên tục trên khoảng đóng và bị chận* $\left[a,b\right]$ *thì* f *đạt giá trị lớn nhất* M *và giá trị nhỏ nhất* m *trên* $\left[a,b\right]$*, nghĩa là : tồn tại* $x^* \in \left[a,b\right]$ *sao cho với mọi* $x \in \left[a,b\right]$, $f\left(x\right) \le f\left(x^*\right) = M$ *và tồn tại* $x_* \in \left[a,b\right]$ *sao cho với mọi* $x \in \left[a,b\right]$, $f\left(x\right) \ge f\left(x_*\right) = m$.

Hai định lý trên có thể phát biểu chung lại thành một định lý như sau :

2.8. Định lý. *Nếu* f *liên tục trên khoảng đóng và bị chận* $\left[a,b\right]$ *thì tồn tại* m *và* M *trong* $\mathbb{R}$ *sao cho* $f\left(\left[a,b\right]\right) = \left[m,M\right]$.

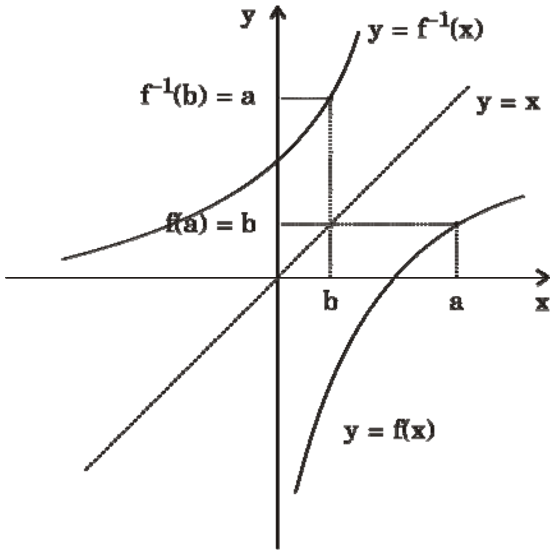
2.9. Mệnh đề . *Cho* I *là một khoảng trong* $\mathbb{R}$. *Nếu* $f : I \to \mathbb{R}$ *liên tục, đơn điệu ngặt trên* I *thì*

a) $f\left(I\right) = J$ *là một khoảng trong* $\mathbb{R}$*, đóng và bị chận khi* I *đóng và bị chận.*

b) f *là một song ánh từ* I *lên* J.

c) ánh xạ ngược của f*, ký hiệu* $f^{-1} : J \to I$*, xác định bởi* $f^{-1}\left(y\right) = x$ *nếu và chỉ nếu* $y = f\left(x\right)$*, cũng liên tục, đơn điệu ngặt trên* J *(cùng bản chất như của* f *).*

d) đồ thị của f *và* f^{-1} *đối xứng với nhau qua đường phân giác thứ nhất.*



Ví dụ 6. i) Hàm số $f\left(x\right)=x^{n}$ liên tục và tăng ngặt trên $\mathbb{R}^{+}=\left[0,+\infty\right)$, $f\left(\mathbb{R}^{+}\right)=\mathbb{R}^{+}$. Do vậy, hàm ngược của nó, $f^{-1}\left(x\right)=\sqrt[n]{x}$, cũng liên tục và tăng ngặt trên $\mathbb{R}^{+}$. ■

Xét một ứng dụng của hàm số liên tục trong việc khảo sát dãy xác định bằng hệ thức đệ quy cấp 1,

$$u_{n+1}=f\left(u_{n}\right),\ u_{1} \text{ cho trước,}$$

trong đó $f:I\to I$ là một hàm số liên tục và I là một khoảng trong $\mathbb{R}$. Chẳng hạn, dãy

$$u_{n+1}=\sqrt{1+u_{n}}=f\left(u_{n}\right),\ u_{1}>0 \text{ cho trước,}$$

trong đó $f\left(x\right)=\sqrt{1+x}$ là hàm liên tục đi từ $\left(0,+\infty\right)$ vào $\left(0,+\infty\right)$ và dãy

$$u_{n+1}=\frac{u_{n}}{u_{n}+3}=f\left(u_{n}\right),\ u_{1}>0 \text{ cho trước,}$$

trong đó $f\left(x\right)=\frac{x}{x+3}$ là hàm liên tục từ $\left(0,+\infty\right)$ vào $\left(0,+\infty\right)$.

Chú ý rằng khi f là hàm tăng thì $\left(u_{n}\right)$ là dãy đơn điệu. Cụ thể, bằng quy nạp, ta chứng minh được rằng

Nếu $u_{1}\le u_{2}$ thì $u_{n}\le u_{n+1}$, với mọi $n\in\mathbb{N}$.

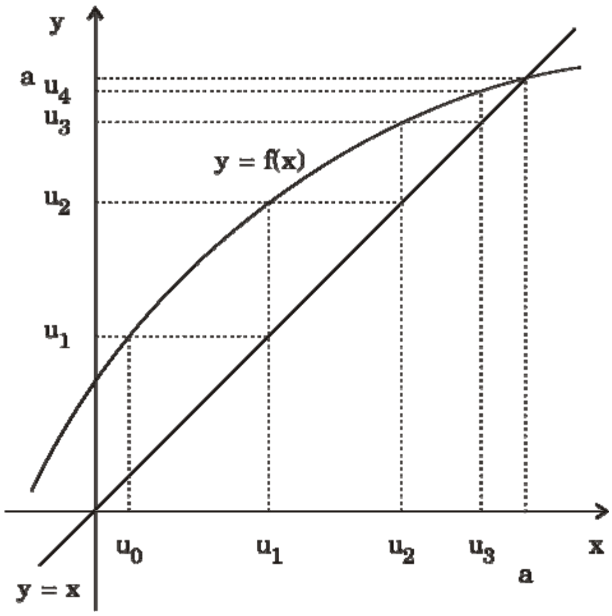
Nếu $u_{1}\ge u_{2}$ thì $u_{n}\ge u_{n+1}$, với mọi $n\in\mathbb{N}$.

Tuy nhiên, nếu f là hàm giảm thì $\left(u_{n}\right)$ không là dãy đơn điệu (ta chỉ có $\left(u_{2n}\right)$ và $\left(u_{2n+1}\right)$ là hai dãy đơn điệu, một tăng, một giảm).

Hơn nữa, nếu $f:I\to I$ tăng và I bị chặn thì $\left(u_{n}\right)$ đơn điệu và bị chặn nên hội tụ. Khi đó, gọi a là giới hạn của dãy $\left(u_{n}\right)$, ta có

$$a = \lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f\left(u_n\right) = f\left(a\right),$$

khi f là hàm liên tục. Như vậy, giới hạn a thỏa phương trình $f\left(x\right) = x$ mà ta có thể giải để tìm ra giá trị của a.



Ví dụ 7. Hàm $f\left(x\right) = \sqrt{1+x}$ là hàm tăng nên dãy số $u_{n+1} = f\left(u_n\right) = \sqrt{1+u_n}$, $u_1 = 1$ tăng do $1 = u_1 \le u_2 = \sqrt{2}$. Hơn nữa, ta có $f\left(\left[0,2\right]\right) \subset \left[0,2\right]$ và $u_1 \in \left[0,2\right]$ nên bằng phép chứng minh quy nạp, ta chứng minh được rằng $\left(u_n\right) \subset \left[0,2\right]$. Dãy $\left(u_n\right)$ đơn điệu và bị chặn nên hội tụ với giới hạn a thỏa phương trình $x = \sqrt{1+x}$ do hàm f là hàm liên tục. ■

3. ĐẠO HÀM

Cho $a \in \mathbb{R}$ và f là hàm số xác định trên một lân cận của a, nghĩa là tồn tại $\alpha > 0$ sao cho f xác định trên khoảng $I = \left(a-\alpha, a+\alpha\right)$.

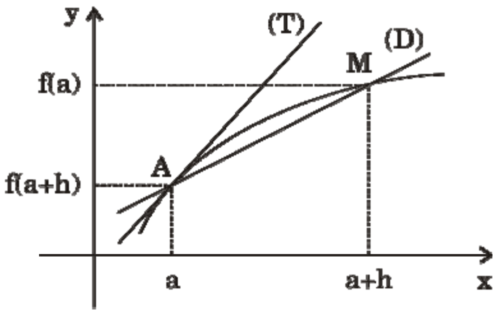
3.1. Định nghĩa. Ta nói f *có đạo hàm* tại a khi $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tồn tại. Khi đó, giá trị của giới hạn này được gọi là *đạo hàm* của f tại a, ký hiệu $f'\left(a\right)$. Như vậy, khi f có đạo hàm tại a, ta có $f'\left(a\right) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, hay $f'\left(a\right) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Ví dụ 8. i) Xét hàm số $f\left(x\right) = x$. Tại mỗi điểm $a \in \mathbb{R}$, ta có $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \ne a$. Do đó, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 1 = f'\left(a\right)$.

ii) Xét hàm số $f\left(x\right) = x^2$. Tại mỗi điểm $a \in \mathbb{R}$, ta có $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = x + a$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \ne a$. Do đó, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 2a = f'\left(a\right)$.

Biểu diễn hình học : Gọi Γ là đồ thị của hàm số f. Phương trình đường thẳng (D) đi qua hai điểm $A(a, f(a))$ và $M(a+h, f(a+h))$ cho bởi

$$y = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}(x-a) + f(a).$$



Khi "*điểm* M *tiến về điểm* A" trên Γ, đường (D) quay về đường thẳng (T) gọi là *tiếp tuyến với* Γ *tại điểm* A và do đó có phương trình

$$y = \lim_{h \to 0}\left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h}\right)(x-a) + f(a),$$

nghĩa là

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Như vậy, đạo hàm của f tại a có thể biểu diễn như là độ dốc (hệ số góc) của tiếp tuyến với Γ tại điểm A. ■

3.2. Định nghĩa. Hàm số f được gọi là khả vi tại a khi tồn tại số thực b và một hàm số ε xác định trên một lân cận của 0 sao cho với mọi h và $a+h$ trong lân cận của a

$$f(a+h) = f(a) + bh + \varepsilon(h) \text{ với } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

3.3. Mệnh đề. f *có đạo hàm tại* a *nếu và chỉ nếu* f *khả vi tại* a.

Chứng minh. Khi f có đạo hàm tại a, nghĩa là

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a),$$

thì bằng cách đặt

$$\varepsilon(h) = \frac{h}{|h|}\left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)\right),$$

ta được

$$|\varepsilon(h)| = \left|\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)\right| \to 0$$

khi $h \to 0$ và

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + |h|\varepsilon(h)$$

nên f khả vi tại a.

Ngược lại, khi f khả vi tại a, tồn tại $b \in \mathbb{R}$ sao cho với mọi h và $a+h$ trong lân cận của a

$$f(a+h) = f(a) + bh + |h|\varepsilon(h) \text{ với } \lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0.$$

Từ đó suy ra

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = b + \frac{|h|}{h}\varepsilon(h).$$

Vì $\left|\frac{|h|}{h}\varepsilon(h)\right| = |\varepsilon(h)| \to 0$ khi $h \to 0$, ta được

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = b,$$

nên f có đạo hàm tại a. ■

Chú ý : Kết quả này không còn đúng đối với hàm nhiều biến.

3.4. Định nghĩa. Cho f là hàm số xác định trên khoảng dạng $(a-\alpha, a]$, với $\alpha > 0$. Ta nói f có *đạo hàm bên trái* tại a khi

$$\lim_{x\to a^-}\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

tồn tại. Bấy giờ, giá trị của giới hạn được gọi là *đạo hàm bên trái của* f *tại* a, ký hiệu $f'_-(a)$.

Tương tự cho trường hợp f xác định trên $[a, a+\alpha)$, với $\alpha > 0$, ta nói f có *đạo hàm bên phải* tại a khi $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tồn tại và giới hạn này được ký hiệu là $f'_+(a)$.

3.5. Mệnh đề. f *có đạo hàm tại* a *nếu và chỉ nếu* f *có đạo hàm bên trái tại* a*,* f *có đạo hàm bên phải tại* a *và* $f'_-(a) = f'_+(a)$.

3.6. Định nghĩa. Cho hàm số f xác định trên một khoảng mở J của $\mathbb{R}$. Ta nói f *có đạo hàm* trên J khi f có đạo hàm tại mọi điểm của J.

Ta nói f *có đạo hàm trên* $[a, b]$ khi f có đạo hàm trên (a, b), có đạo hàm bên phải tại a và có đạo hàm bên trái tại b.

Ta cũng có các định nghĩa tương tự cho trường hợp f xác định trên $[a, +\infty)$ và $(-\infty, b]$.

3.7. Định nghĩa. Khi f có đạo hàm trên khoảng mở J, ta định nghĩa *hàm đạo hàm* f' của f bởi

$$\begin{aligned} f' : J &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

"*Hàm đạo hàm*" của f còn được gọi vắn tắt là "*đạo hàm*" của f.

Ta nói hàm số f *có đạo hàm liên tục* trên khoảng mở J khi f có đạo hàm trên J và f' liên tục trên J.

Cho f là hàm có đạo hàm trên một khoảng mở J. Khi f' có đạo hàm trên J, hàm đạo hàm của nó được gọi là "*hàm đạo hàm bậc hai*", hay vắn tắt là "*đạo hàm bậc hai*" của f trên J , ký hiệu f''.

Ta ký hiệu $f^{(n)}$, nếu có, cho "*hàm đạo hàm bậc* n" hay vắn tắt là "*đạo hàm bậc* n" của f và khi đó, ta nói f *có đạo hàm đến cấp* n. Ta định nghĩa $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, ..., $f^{(n)} = \left[f^{(n-1)}\right]'$, $n \in \mathbb{N}$. Hơn nữa, ta đặt $f^{(0)} = f$.

Khi $f^{(n)}$ tồn tại với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta nói f có đạo hàm vô hạn lần.

Ví dụ 9. Xét hàm số $f(x) = x^2$. Ta có $f'(x) = 2x$,

$$(f')'(x) = f''(x) = 2,\ (f'')'(x) = f'''(x) = 0$$

và do đó $f^{(n)}(x) = 0$, khi $n \geq 3$. Do đó, f có đạo hàm vô hạn lần. ■

3.8. Mệnh đề. *Nếu* f *có đạo hàm tại* a *thì* f *liên tục tại* a.

Chứng minh. Bằng cách dùng đẳng thức

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + |h|\varepsilon(h) \text{ với } \lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0,$$

ta suy ra rằng $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$. ■

3.9. Mệnh đề. *Nếu* f *và* g *có đạo hàm tại* a *thì*

a) $f+g$ *có đạo hàm tại* a *et* $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,

b) $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, λf *có đạo hàm tại* a *và* $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$,

c) $f \cdot g$ *có đạo hàm tại* a *và*

$$(f\cdot g)'(a) = f'(a)\cdot g(a) + f(a)\cdot g'(a),$$

d) Nếu $g(a) \neq 0$ *thì bằng cách kết hợp (c) với (d), ta suy ra* $\frac{f}{g}$ *có đạo hàm tại a và* $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\cdot g(a) - f(a)\cdot g'(a)}{\left[g(a)\right]^2}$.

Chứng minh. Bằng cách viết

$$\frac{(f \pm g)(x) - (f \pm g)(a)}{x-a} = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \pm \frac{g(x) - g(a)}{x-a},$$

$$\frac{(\lambda f)(x) - (\lambda f)(a)}{x-a} = \lambda \frac{f(x) - f(a)}{x-a},$$

$$\frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)}{x-a} = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} g(x) + f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x-a},$$

$$\begin{aligned}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x-a} &= \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{(x-a)g(x)g(a)} \\ &= \frac{1}{g(x)g(a)}\left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} g(a) - f(a)\frac{g(x) - g(a)}{x-a}\right),\end{aligned}$$

và dùng các tính chất của giới hạn, ta suy ra các kết quả của mệnh đề. ■

Ta cũng nhận được các tính chất tương tự cho đạo hàm bên trái, đạo hàm bên phải và đạo hàm trên một khoảng.

3.10. Mệnh đề (đạo hàm hàm hợp). *Nếu* f *có đạo hàm trên khoảng* J *và* g *có đạo hàm trên khoảng* J_1 *với* $g(J) \subset J_1$ *thì* $g \circ f$ *có đạo hàm trên* J *và* $(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$.

Chứng minh. Cho $a \in J$ và $b = f(a) \in J_1$. Tính khả vi của f tại a và của g tại b cho

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + |h|\varepsilon_1(h),$$

$$g(b+k) = g(b) + g'(b)k + |k|\varepsilon_2(k),$$

với $a + h \in J$, $b + k \in J_1$ và $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon_1(h) = \lim\limits_{k \to 0} \varepsilon_2(k) = 0$.

Đặt $b = f(a)$, $k = f(a+h) - b = f'(a)h + |h|\varepsilon_1(h)$. Ta có

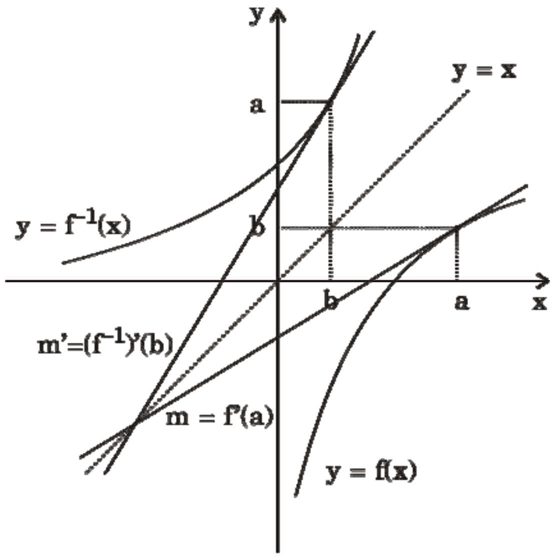
$$\begin{aligned} g \circ f(a+h) &= g \circ f(a) + g'(f(a))\big(f'(a)h + |h|\varepsilon_1(h)\big) + \\ &\quad + \left|f'(a)h + |h|\varepsilon_1(h)\right|\varepsilon_2\big(f'(a)h + |h|\varepsilon_1(h)\big) \\ &= g \circ f(a) + g'(f(a))f'(a)h + |h|\varepsilon(h) \end{aligned}$$

với

$$\varepsilon(h) = g'(f(a))\varepsilon_1(h) + \left|f'(a) + \varepsilon_1(h)\right|\varepsilon_2\big(f'(a)h + |h|\varepsilon_1(h)\big) \to 0$$

khi $h \to 0$. Điều này chứng tỏ rằng $g \circ f$ có đạo hàm tại a và $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$. ■

3.11. Mệnh đề. *Cho* f *là hàm liên tục và đơn điệu ngặt trên một khoảng* J *và* $a \in J$. *Nếu* f *có đạo hàm tại* a *và* $f'(a) \neq 0$ *thì hàm ngược* f^{-1} *của* f *có đạo hàm tại* $b = f(a)$ *và* $\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(b)\right]}$, *nghĩa là* $\left(f^{-1}\right)'\left[f(a)\right] = \frac{1}{f'(a)}$.



Ta cũng có kết quả tương tự cho đạo hàm trên một khoảng : *nếu* f *đơn điệu ngặt, có đạo hàm trên một khoảng* J *và* f' *không triệt tiêu trên* J *thì hàm ngược* f^{-1} *có đạo hàm trên* $f(J)$ *và* $\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Chú ý. Khi ta đã biết rằng hàm $\left(f^{-1}\right)$ có đạo hàm, ta có thể tìm lại được công thức cho đạo hàm hàm ngược bằng cách lấy đạo hàm hàm hợp $f \circ f^{-1}$ (mệnh đề 2.10) :

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(y) = y \text{ cho } \left(f \circ f^{-1}\right)'(y) = 1,$$

nghĩa là

$$f'\left[f^{-1}(y)\right]\left(f^{-1}\right)'(y) = 1 \text{ và } \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(y)\right]}.$$ ■

4. HÀM SỐ SƠ CẤP

Các hàm số sơ cấp được thành lập từ các hàm số sơ cấp cơ bản gồm ba cặp hàm ngược của nhau

Hàm lũy thừa, $y = x^n$, và hàm căn thức, $y = \sqrt[n]{x}$, với $n \in \mathbb{N}$;

Hàm mũ, $y = a^x$, và hàm lôgarít, $y = \log_a x$, với $0 < a \neq 1$;

Hàm lượng giác, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, và hàm lượng giác ngược, $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctan x$;

thông qua các phép toán tổng, hiệu, tích, thương và hợp nối các hàm số. Do đó, để khảo sát các hàm số sơ cấp, ta lần lượt khảo sát ba cặp hàm sơ cấp cơ bản nêu trên.

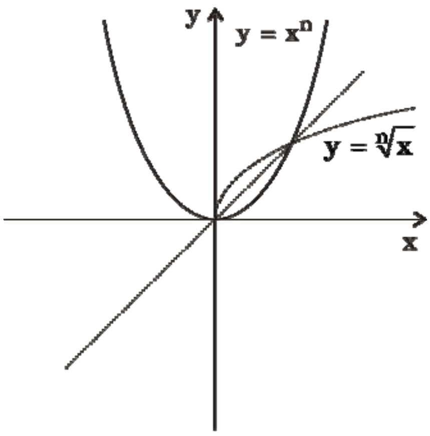
4.1. Hàm $y = f(x) = x^n$ và $y = f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} \equiv x^{1/n}$, với $n \in \mathbb{N}$

a) Hàm *lũy thừa* $y = x^n$ liên tục trên $D = \mathbb{R}$, nghĩa là $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$, với mọi $a \in \mathbb{R}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ khi n là số chẵn và $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ khi n là số lẻ;

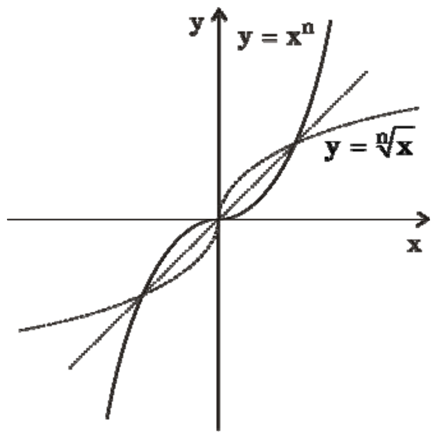
b) Hàm $y = x^n$ tăng ngặt trên $\mathbb{R}$ khi n là số lẻ và khi n là số chẵn, hàm $y = x^n$ tăng ngặt trên $[0,+\infty)$ và giảm ngặt trên $(-\infty,0]$; hàm ngược của hàm lũy thừa, hàm *căn thức* $y = \sqrt[n]{x}$, xác định bởi

$$y = \sqrt[n]{x} \Leftrightarrow y^n = x,$$

với $x, y \in \mathbb{R}$ khi n là số lẻ và với $x, y \in [0,+\infty)$ khi n là số chẵn.



n chẵn



n lẻ

Do đó, hàm $y = \sqrt[n]{x}$ liên tục trên miền xác định của nó, nghĩa là

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a},$$

với mọi $a \in \mathbb{R}$ khi n là số lẻ và với mọi $a \in [0,+\infty)$ khi n là số chẵn. Hơn nữa

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty, \text{ với mọi n}; \ \lim_{x\to-\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty \text{ khi n là số lẻ.}$$

c) Hàm lũy thừa $y = f(x) = x^n$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $y' = f'(x) = nx^{n-1}$, với mọi $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Do đó, nếu $x \neq 0$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ khi n lẻ và $x > 0$ khi n chẵn), ta có $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$.

Thật vậy,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= (x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \ldots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1} \to nx^{n-1}$$

khi $h \to 0$, và do đó $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$, với mọi $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Với $f(x) = x^n$, $f'(x) = nx^{n-1}$, $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ và $x \neq 0$, ta được

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(x)\right]} = \frac{1}{n\left[f^{-1}(x)\right]^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{n\left[\sqrt[n]{x}\right]^{n-1}} = \frac{1}{n\left[x^{\frac{1}{n}}\right]^{n-1}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}(1-n)}$$

$$= \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

4.2. Hàm $y = a^x$ và $y = \log_a x$, với $0 < a \neq 1$.

Trước hết, ta khảo sát *hàm mũ* và *lôgarít cơ số tự nhiên* (cơ số là số Néper e) :

$$y = e^x \text{ và } y = \ln x \equiv \log_e x,$$

trong đó $e = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Bằng cách dùng các giới hạn

$$\lim_{x\to 0} e^x = 1 \text{ vaø } \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

ta suy ra

a) Hàm mũ cơ số e, $y = e^x$, liên tục và tăng ngặt trên $\mathbb{R}$ với ảnh $(0,+\infty)$,

$$\lim_{x\to a} e^x = e^a \text{, với mọi } a \in \mathbb{R},\ \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \text{ và } \lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

Thật vậy, với $t = x - a \to 0$ khi $x \to a$, ta có

$$\lim_{x\to a} e^x = \lim_{t\to 0} e^{t+a} = e^a \lim_{t\to 0} e^t = e^a$$

và với $f(x) = e^x$,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x\,\frac{e^h - 1}{h} \to e^x$$

khi $h \to 0$, ta được

$$\left(e^x\right)' = f'(x) = e^x.$$

b) Hàm lôgarít cơ số e, $y = \ln x$, là hàm ngược của hàm mũ cơ số e, $y = e^x$, nghĩa là

$$y = \ln x \Leftrightarrow e^y = x,$$

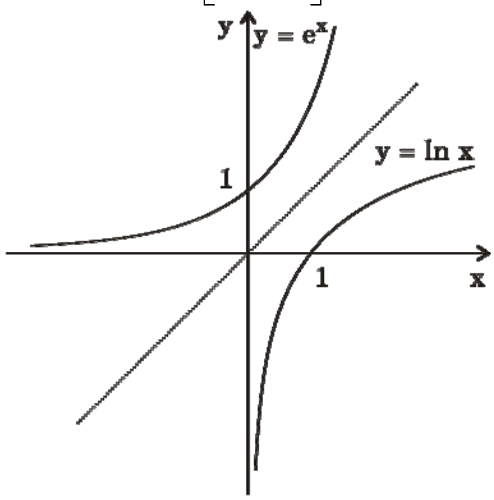
với mọi $y \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Do đó, nó liên tục và tăng ngặt trên $D = (0, +\infty)$ với ảnh $\mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to a} \ln x = \ln a \text{, với mọi } a > 0,\ \lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty,\ \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty,$$

và $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, với mọi $x > 0$.

Thật vậy, với $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, $f^{-1}(x) = \ln x$ và $x > 0$, ta được

$$(\ln x)' = \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(x)\right]} = \frac{1}{e^{f^{-1}(x)}} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$



Đối với hàm mũ và lôgarít tổng quát, $y = a^x$ và $y = \log_a x$, với $0 < a \neq 1$, thì bằng cách dùng các đẳng thức

$$a^b = e^{b\ln a} \text{ và } \log_a b = \frac{\ln b}{\ln a},$$

ta có thể viết lại thành

$$y = a^x = e^{x\ln a} \text{ và } y = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Từ đó, ta được

c) Hàm $y = a^x$ liên tục và có đạo hàm trên $D = \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to\alpha} a^x = a^\alpha$, với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, và $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$. Khi $a > 1$, nó là hàm tăng ngặt, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$. Khi $0 < a < 1$, nó là hàm giảm ngặt, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$.

d) Hàm $y = \log_a x$ liên tục và có đạo hàm trên $D = (0, +\infty)$, $\lim\limits_{x\to\alpha} \log_a x = \log_a \alpha$, với mọi $\alpha > 0$, và $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x\cdot\ln a}$. Khi $a > 1$, nó là hàm tăng ngặt, $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$

và $\lim_{x\to 0^+}\log_a x = -\infty$. Khi $0 < a < 1$, nó là hàm giảm ngặt, $\lim_{x\to +\infty}\log_a x = -\infty$ và $\lim_{x\to 0^+}\log_a x = +\infty$.

4.3. Hàm lượng giác và lượng giác ngược

Các hàm lượng giác, $y = \sin x$ và $y = \cos x$, được xây dựng trong hình học, xác định trên $D = \mathbb{R}$ và có ảnh $\left[-1,1\right]$. Chúng là các hàm tuần hoàn với chu kỳ 2π,

$$\sin\left(x + k2\pi\right) = \sin x \text{ và } \cos\left(x + k2\pi\right) = \cos x,$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$.

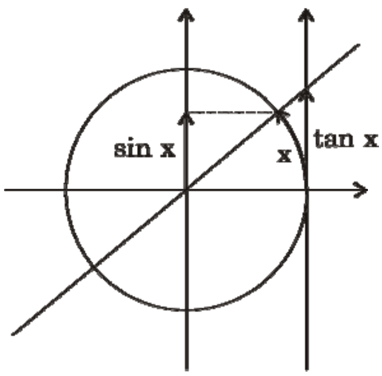
Hàm $y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$ với ảnh $\mathbb{R}$. Nó là hàm tuần hoàn với chu kỳ π,

$$\tan\left(x + k\pi\right) = \tan x,$$

với mọi $k \in \mathbb{Z}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Hơn nữa, ta có bất đẳng thức quan trọng sau

$$\left|\sin x\right| \le \left|x\right| \le \left|\tan x\right|, \text{ với mọi } -\tfrac{\pi}{2} < x < \tfrac{\pi}{2}.$$



a) Các hàm lượng giác đều liên tục,

$$\lim_{x\to a}\sin x = \sin a \text{ và } \lim_{x\to a}\cos x = \cos a, \text{ với mọi } a \in \mathbb{R},$$

và do đó

$$\lim_{x\to a}\tan x = \lim_{x\to a}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin a}{\cos a} = \tan a, \text{ với mọi } a \neq \tfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Thật vậy, do $\left|\sin x\right| \le \left|x\right| \to 0$ khi $x \to 0$ và $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ trên lân cận $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ của 0, ta suy ra

$$\lim_{x\to 0}\sin x = 0 \text{ và } \lim_{x\to 0}\cos x = 1.$$

Với $t = x - a \to 0$ khi $x \to a$, ta suy ra

$$\lim_{x\to a}\sin x = \lim_{t\to 0}\sin(a+t) = \lim_{t\to 0}\left[\sin a\cos t + \cos a\sin t\right]$$
$$= \sin a\lim_{t\to 0}\cos t + \cos a\lim_{t\to 0}\sin t = \sin a$$

và

$$\lim_{x\to a}\cos x = \lim_{t\to 0}\cos(a+t) = \lim_{t\to 0}\left[\cos a\cos t - \sin a\sin t\right]$$
$$= \cos a\lim_{t\to 0}\cos t - \sin a\lim_{t\to 0}\sin t = \cos a$$

b) Các hàm lượng giác đều có đạo hàm,

$$(\sin x)' = \cos x \text{ và } (\cos x)' = -\sin x, \text{ với mọi } x \in \mathbb{R},$$

và do đó

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{[\cos x]^2}$$
$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

với mọi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Thật vậy, bằng cách dùng bất đẳng thức $|\sin x| \le |x| \le |\tan x| = \frac{|\sin x|}{|\cos x|}$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, ta được bất đẳng thức sau

$$\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1,\ \forall x \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right).$$

Do $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$, ta suy ra

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Hơn nữa, từ đẳng thức $1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ và với $t = \frac{x}{2} \to 0$ khi $x \to 0$, ta có

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2} = \frac{1}{2}\times\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

nên

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}x \times \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = 0.$$

Bây giờ, với hàm $f(x) = \sin x$, ta có

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \frac{\sin x\cos h + \cos x\sin h - \sin x}{h}$$
$$= \cos x\frac{\sin h}{h} - \sin x\frac{1-\cos h}{h} \to \cos x$$

và với hàm $f\left(x\right)=\cos x$,

$$\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}=\frac{\cos\left(x+h\right)-\cos x}{h}=\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h}$$

$$=-\sin x\frac{\sin h}{h}-\cos x\frac{1-\cos h}{h}\to-\sin x$$

nghĩa là $\left(\sin x\right)'=\cos x$ và $\left(\cos x\right)'=-\sin x$.

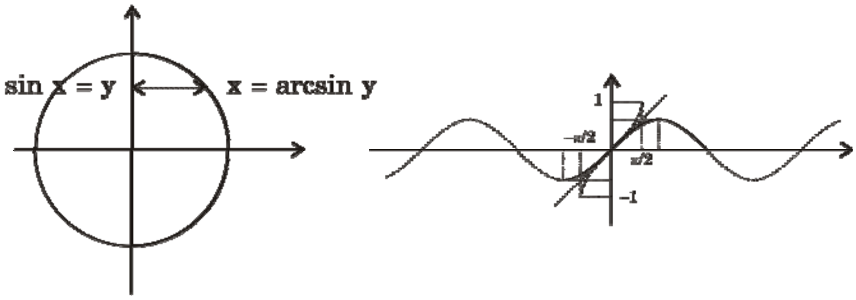
c) Thu hẹp của hàm sin trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ là một đơn ánh và do đó, nó có hàm ngược

$$\left(\sin\right)^{-1}\equiv\arcsin:\left[-1,1\right]\to\left[-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right]$$
$$x\mapsto\arcsin x$$

nghĩa là

$$y=\arcsin x\Leftrightarrow\sin y=x,$$

với mọi $x\in\left[-1,1\right]$ và $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

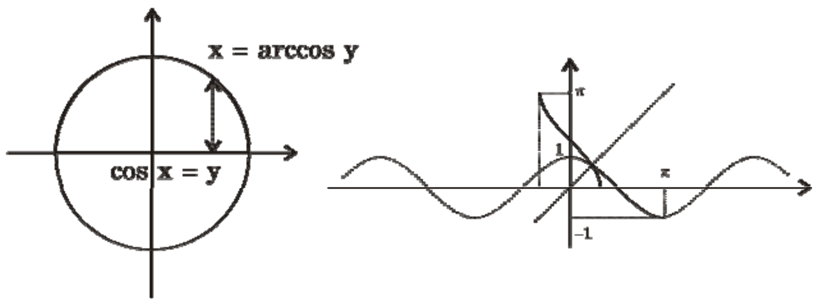


Thu hẹp của hàm cos trên đoạn $\left[0,\pi\right]$ là một đơn ánh nên nó có hàm ngược

$$\left(\cos\right)^{-1}\equiv\arccos:\left[-1,1\right]\to\left[-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right]$$
$$x\mapsto\arccos x$$

$$y=\arccos x\Leftrightarrow\cos y=x,$$

với mọi $x\in\left[-1,1\right]$ và $y\in\left[0,\pi\right]$.

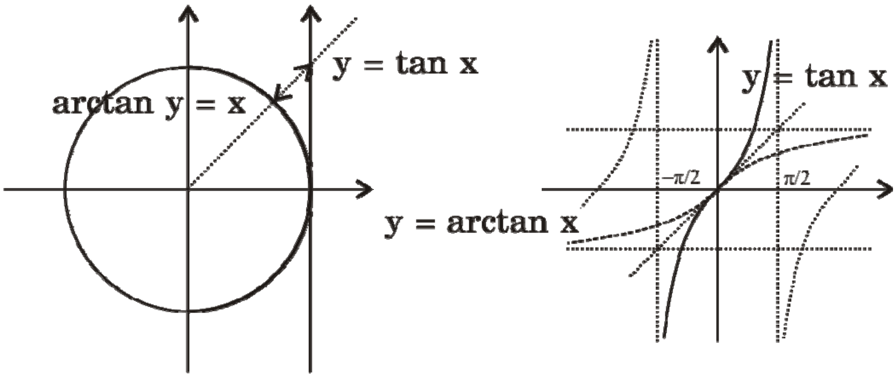


Thu hẹp của hàm tan trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ là một đơn ánh và do đó, nó có hàm ngược

$$(\tan)^{-1} \equiv \arctan : \mathbb{R} \to \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right)$$
$$x \mapsto \arctan x$$

$$y = \arctan x \Leftrightarrow \tan y = x,$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.



d) Từ tính liên tục của các hàm lượng giác, ta suy ra tính liên tục cho các hàm lượng giác ngược

$$\lim_{x\to a} \arcsin x = \arcsin a \text{ và } \lim_{x\to a} \arccos x = \arccos a,$$

với mọi $a \in [-1, 1]$,

$$\lim_{x\to a} \arctan x = \arctan a, \text{ với mọi } a \in \mathbb{R}.$$

Hơn nữa, do

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \sin x}{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \cos x} = +\infty$$

và

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \sin x}{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \cos x} = -\infty$$

ta nhận được giới hạn tại vô cực cho hàm tan :

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} \text{ và } \lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}.$$

e) Từ đạo hàm các hàm lượng giác, ta suy ra đạo hàm cho các hàm lượng giác ngược

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ và } (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

với mọi $x \in]-1, 1[$, với

$$\left(\arctan x\right)' = \frac{1}{1+x^2}\text{, với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Thật vậy, với $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $f^{-1}(x) = \arcsin x$, ta có

$$\left(\arcsin x\right)' = \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(x)\right]} = \frac{1}{\cos\left[f^{-1}(x)\right]} = \frac{1}{\cos\left[\arcsin x\right]}$$

Khi $-1 < x < 1$, ta có $-\frac{\pi}{2} < \arcsin x < \frac{\pi}{2}$, và

$$\cos\left[\arcsin x\right] = \sqrt{1 - \sin^2\left[\arcsin x\right]} = \sqrt{1-x^2}$$

và do đó

$$\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Tương tự, với $f(x) = \cos x$, $f'(x) = -\sin x$, $f^{-1}(x) = \arccos x$,

$$\left(\arccos x\right)' = \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(x)\right]} = \frac{1}{-\sin\left[\arccos x\right]}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\left[\arcsin x\right]}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

và với $f(x) = \tan x$, $f'(x) = 1 + \tan^2 x$, $f^{-1}(x) = \arctan x$,

$$\left(\arctan x\right)' = \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(x)\right]}$$

$$= \frac{1}{1+\tan^2\left[\arctan x\right]} = \frac{1}{1+x^2}$$ ■

5. ĐỊNH LÝ SỐ GIA HỮU HẠN

5.1. Định lý Rolle. *Nếu* f *liên tục trên* $\left[a,b\right]$, *có đạo hàm trên* $\left(a,b\right)$ *và thỏa* $f(a) = f(b)$, *thì tồn tại* $c \in (a,b)$ *sao cho* $f'(c) = 0$.

Chứng minh. Nếu f là hàm hằng trên $\left[a,b\right]$, định lý hiển nhiên đúng. Do vậy, ta giả sử f không là hàm hằng trên $\left[a,b\right]$. Do f liên tục trên $\left[a,b\right]$, nó đạt giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M trên $\left[a,b\right]$ với $m \neq M$. Ta không thể có cùng lúc $m = f(a)$ và $M = f(a)$ do f không là hàm hằng. Do vậy, ta phải có $m \neq f(a)$ hay $M \neq f(a)$.

Xét trường hợp $M \neq f(a)$. Tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho $f(c) = M$ ($c \neq b$ do $f(a) = f(b)$ nên $f(b) \neq M$).

Từ đó suy ra, với $x < c$,

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0,$$

và do đó $\lim\limits_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$ (giới hạn này tồn tại do f có đạo hàm trên (a,b), nên có đạo hàm và có đạo hàm bên trái tại c), nghĩa là

$$f'_-(c) \geq 0.$$

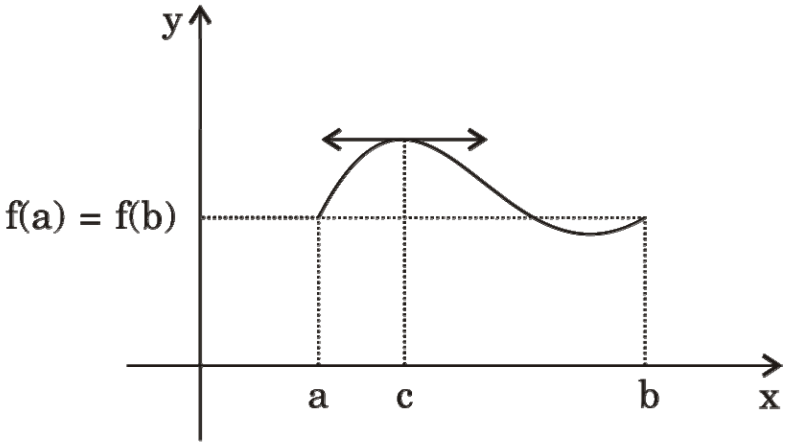
Tương tự, khi $x > c$, $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$, và do đó

$$f'_+(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0.$$

Do f có đạo hàm tại c, ta có

$$f'(c) = f'_-(c) = f'_+(c)$$

và do đó $0 \leq f'(c) \leq 0$, nghĩa là $f'(c) = 0$. ■



5.2. Định lý Lagrange (định lý số gia hữu hạn). *Nếu* f *liên tục trên* $[a,b]$ *và có đạo hàm trên* (a,b) *thì tồn tại* $c \in (a,b)$ *sao cho* $f(b)-f(a) = (b-a)f'(c)$.

Chứng minh. Áp dụng định lý Rolle cho hàm số g xác định bởi

$$g(x) = f(x) - x\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Ta có g xác định và liên tục trên $[a,b]$ vì nó là tổng của các hàm liên tục trên $[a,b]$; có đạo hàm trên (a,b) vì nó là tổng các hàm có đạo hàm trên (a,b) và

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Mặt khác,

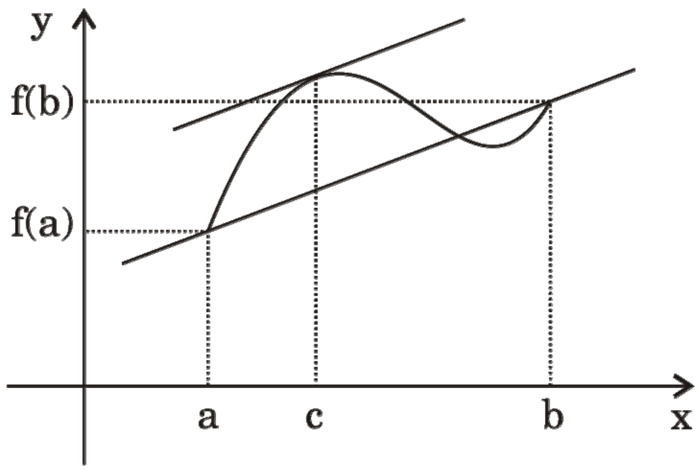
$$g(a) = f(a) - a\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$$

và

$$g(b) = f(b) - b\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$$

Do $g(a) = g(b)$, nghĩa là g thỏa mọi điều kiện của định lý Rolle. Do đó, tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $g'(c) = 0$ và do đó $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$. ■

Về mặt hình học, định lý số gia hữu hạn khẳng định sự tồn tại điểm c sao cho tiếp tuyến tại điểm trên đồ thị hàm f có hoành độ c thì song song với dây cung nối hai điểm $(a, f(a))$ và $(b, f(b))$.



Cho I là một khoảng. Ta nói x là một điểm trong của I nếu tồn tại $\alpha > 0$ sao cho $(x - \alpha, x + \alpha) \subset I$. Áp dụng định lý số gia hữu hạn, ta được

5.3. Mệnh đề. *Cho* f *là hàm liên tục trên khoảng* I *và có đạo hàm tại mọi điểm trong của* I.

a) f *là hàm hằng trên* I *nếu và chỉ nếu với mọi điểm trong* x *của* I*,* $f'(x) = 0$*;*

b) f *là hàm tăng (hàm giảm) trên* I *nếu và chỉ nếu với mọi điểm trong* x *của* I*,* $f'(x) \geq 0$ *(*$f'(x) \leq 0$*);*

c) nếu với mọi điểm trong x *của* I*,* $f'(x) > 0$ *(*$f'(x) < 0$*) thì* f *tăng ngặt (giảm ngặt) trên* I.

5.4. Định lý (quy tắc l'Hospital). *Cho* f *và* g *là hai hàm liên tục trên khoảng* I *và có đạo hàm tại mọi điểm trong của* I*. Xét* $a \in I$*. Nếu* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *có dạng vô định* $\frac{0}{0}$ *hay* $\frac{\infty}{\infty}$ *khi* x *tiến về* a *hay về* ∞ *và nếu* $\lim\limits_{x \to a \text{ hay } \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *tồn tại, thì*

$$\lim_{x\to a \text{ hay } \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a \text{ hay } \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ví dụ 10. a) Để khảo sát giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$, nếu có, đặt $f(x) = \ln x$ và $g(x) = x$. Tỷ số $\frac{f(x)}{g(x)}$ có dạng vô định $\frac{+\infty}{+\infty}$ khi x tiến về $+\infty$. Vì

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

nên từ quy tắc l'Hôpital, ta suy ra

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

b) Tính $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, nếu có, và suy ra

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ và } \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{r}{x}\right)^x.$$

i) Bằng cách viết $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$ và với $y = \frac{1}{x}$, ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{y\to0^+} \frac{\ln(1+y)}{y}$. Tỷ số $\frac{\ln(1+y)}{y}$ có dạng vô định $\frac{0}{0}$ khi y tiến về 0 và quy tắc l'Hôpital cho

$$\lim_{y\to0^+} \frac{\ln(1+y)}{y} = \lim_{y\to0^+} \frac{1}{(1+y)} = 1.$$

Suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$. Do hàm mũ là hàm liên tục, ta được $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^1 = e$.

ii) Đặc biệt, $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy thỏa $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, do định nghĩa của giới hạn tại vô cực, ta được $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

iii) Chứng tỏ $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{r}{x}\right)^x = e^r$, với $r > 0$,

$$\left(1+\frac{r}{x}\right)^x = \left(\left(1+\frac{r}{x}\right)^{\frac{x}{r}}\right)^r = \left(\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right)^r = \left(f(y)\right)^r.$$

Do $\lim\limits_{x\to+\infty} f(y) = e$ và hàm mũ là hàm liên tục tại e, ta suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\left(1+\frac{r}{x}\right)^{\frac{x}{r}}\right)^r = e^r$. ∎

5.5. Định lý (công thức Taylor-Lagrange cho hàm có đạo hàm cấp hai). *Nếu* f *có đạo hàm đến cấp hai trên khoảng* J *và nếu* a *và* b *là hai điểm phân biệt của* J *thì tồn tại* c *giữa* a *và* b *sao cho*

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + (b-a)^2 \frac{f''(c)}{2!}.$$

Chứng minh. Đặt

$$g(x) = f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - (b-x)^2 \frac{A}{2!}$$

và chọn A sao cho $g(a) = 0$. Ta cũng có $g(b) = 0$ (giả sử $a < b$). Vì g liên tục trên $[a,b]$, có đạo hàm trên (a,b), nên từ định lý Rolle, tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho $g'(c) = 0$. Vì

$$g'(x) = -f'(x) + f'(x) - (b-x)f''(x) - (b-x)A,$$

nên ta suy ra $A = f''(c)$. Thay thế giá trị này trong đẳng thức $g(a) = 0$, ta nhận được đẳng thức cần chứng minh. ■

Bằng cách đặt $h = b - a$, công thức Taylor trở thành : tồn tại $\theta \in (0,1)$ sao cho

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h^2 \frac{f''(a+\theta h)}{2!}.$$

5.6. Định lý (công thức Taylor-Lagrange). *Nếu* f *là hàm có đạo hàm đến cấp* $n+1$ *trên* J *và nếu* a *và* b *là hai điểm phân biệt của* J *thì tồn tại* c *giữa* a *và* b *sao cho*

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \ldots + (b-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + $$
$$+ (b-a)^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

Chứng minh. Áp dụng định lý Rolle cho hàm số

$$g(x) = f(b) - f(x) - \sum_{k=1}^{n} (b-x)^k \frac{f^{(k)}(a)}{k!} - (b-x)^{n+1} \frac{A}{(n+1)!}.$$ ■

Bằng cách đặt $h = b - a$, công thức Taylor trở thành : tồn tại $\theta \in (0,1)$ sao cho

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \ldots + h^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + h^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!}.$$

Khi $a = 0$ và $b = x$, công thức trên trở thành *công thức Mac Laurin* : tồn tại $\theta \in (0,1)$ sao cho

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \ldots + x^n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + x^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}.$$ ■

Ví dụ 11. Xét hàm số $f(x) = e^x$. Vì $f^{(n)}(x) = e^x$, với mọi $n \in \mathbb{N}$ nên $f^{(n)}(0) = 1$, với mọi $n \in \mathbb{N}$, công thức Mac Laurin chứng tỏ rằng ứng với mỗi $x \in \mathbb{R}$, tồn tại $\theta \in (0,1)$ sao cho

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}e^{\theta x}}{(n+1)!}.$$

Hơn nữa, do $\left|\frac{x^{n+1}e^{\theta x}}{(n+1)!}\right| \le e^x \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ khi $n \to \infty$, ta có

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$ ■

5.7. Định lý (công thức Taylor-Young). *Nếu* f *có đạo hàm đến cấp* $n+1$ *trên một lân cận của* a *thì với mọi* h *sao cho* $a+h$ *nằm trong lân cận của* a, *ta có*

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \ldots + h^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + h^n \varepsilon(h),$$

với $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Chứng minh. Dùng công thức Taylor-Lagrange với $b = a + h$ và đặt

$$\varepsilon(h) = \frac{f^{(n)}(a+\theta h) - f^{(n)}(a)}{n!},$$

ta được công thức Taylor-Young do $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ vì $f^{(n)}$ là hàm liên tục. ■

6. KHẢO SÁT CỰC TRỊ

Cho f là hàm số xác định trên một khoảng J của $\mathbb{R}$. Trong phần này, chúng ta khảo sát các bài toán dạng

$$(P_M): \text{Cực đại } f(x), x \in J$$

hay

$$(P_m): \text{Cực tiểu } f(x), x \in J.$$

6.1. Định nghĩa. Ta nói hàm f đạt *cực đại toàn cục* trên J tại $a \in J$ khi

$$\forall x \in J, f(x) \le f(a).$$

Ta còn nói a là *điểm cực đại toàn cục* của f hay a là *nghiệm* của bài toán (P_M).

Ta nói hàm f đạt cực tiểu toàn cục trên J tại $a \in J$ khi

$$\forall x \in J, f(x) \geq f(a).$$

Ta cũng nói a là *điểm cực tiểu toàn cục* của f hay a là *nghiệm* của bài toán (P_m).

Ta nói a là điểm *cực đại* (*cực tiểu*) *ngặt toàn cục* khi

$$\forall x \in J, x \neq a, f(x) < f(a) \ (f(x) > f(a))$$

Điểm cực đại hay cực tiểu được gọi chung là *điểm cực trị.*

Chú ý. Nếu f là hàm liên tục trên khoảng đóng và bị chặn J thì do định lý tối ưu của Weierstrass (định lý 2.7), tồn tại một điểm cực đại toàn cục và một điểm cực tiểu toàn cục của f.

Ví dụ 12. Hàm số $f(x) = x^3$ liên tục trên khoảng đóng và bị chặn $[-1,1]$ nên nó đạt giá trị cực đại trên $[-1,1]$. Giá trị này đạt được tại $x = 1$ do f là hàm tăng, $\forall x \in [-1,1]$, $f(x) \leq f(1) = 1$. Chú ý rằng giá trị cực đại này đạt được tại điểm biên của khoảng xác định. ■

Chú ý rằng định lý tối ưu khẳng định sự tồn tại ít nhất một nghiệm của các bài toán (P_m) và (P_m) nhưng không chỉ ra giải thuật để tìm các nghiệm này. Vì vậy, người ta cần thêm khái niệm về cực trị địa phương như sau

6.2. Định nghĩa. Ta nói hàm f đạt *cực đại* (*cực tiểu*) *địa phương* trên J tại $a \in J$ khi tồn tại $\eta > 0$ sao cho

$$\forall x \in (a-\eta, a+\eta) \cap J,\ f(x) \leq f(a) \ (f(x) \geq f(a))$$

Ta nói f đạt *cực đại* (*cực tiểu*) *ngặt địa phương* trên J tại $a \in J$ khi tồn tại $\eta > 0$ sao cho

$$\forall x \in (a-\eta, a+\eta) \cap J,\ x \neq a,\ f(x) \leq f(a) \ (f(x) \geq f(a))$$

Chú ý. i) Điểm cực đại (cực tiểu) toàn cục cũng là điểm cực đại (cực tiểu) địa phương.

ii) Bài toán (P_m) : Cực tiểu $f(x)$, $x \in J$, tương đương với bài toán (P_M) : Cực đại $-f(x)$, $x \in J$.

6.3. Mệnh đề (điều kiện cần với đạo hàm cấp 1). *Cho* f *là hàm xác định trên khoảng mở* I *và* $a \in I$. *Nếu* f *có đạo hàm tại* a *và đạt cực trị địa phương trên* I *tại* a *thì* $f'(a) = 0$.

Chứng minh. Dùng công thức Taylor-Young tới cấp 1, với mọi h sao cho $a + h \in I$, ta có

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h),$$

với $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$.

Dùng phản chứng, giả sử rằng $f'(a) > 0$. Với $|h|$ đủ nhỏ sao cho $|\varepsilon(h)| < \frac{1}{2}f'(a)$, ta có $f'(a) + \varepsilon(h) > 0$ và do đó

$$f(a+h) - f(a) = h\big(f'(a) + \varepsilon(h)\big)$$

thì > 0 khi $h > 0$ và < 0 khi $h < 0$. Như vậy, a không là điểm cực trị địa phương của f. ■

Chú ý rằng điều kiện đạo hàm triệt tiêu tại một điểm chỉ là điều kiện cần để điểm đó là cực trị nhưng không là điều kiện đủ. Nói cách khác, chiều đảo của mệnh đề trên là sai.

Ví dụ, hàm số $f(x) = x^3$ có đạo hàm tại 0, thỏa $f'(0) = 0$, nhưng không đạt cực trị tại 0 (do trong mọi lân cận $(-\eta, \eta)$ của 0, $f(x) < f(0)$ khi $x < 0$ và $f(x) > f(0)$ khi $x > 0$.

Điểm x thỏa $f'(x) = 0$ được gọi là một *điểm dừng* của f. Khi cần tìm các điểm cực trị của f, người ta tìm trong số các điểm x thỏa $f'(x) = 0$. Nói cách khác, các điểm thỏa $f'(x) = 0$ là các "ứng viên" để trở thành cực trị.

Ta không thể dùng mệnh đề 5.3 khi khoảng I không là khoảng mở và a là điểm biên của I. Trường hợp này, ta nói các điểm biên của I cũng là các "ứng viên" để trở thành cực trị.

Ví dụ 13. Hàm số $f(x) = x^5 - 5x^2 + 4$ liên tục trên khoảng đóng và bị chặn $[-1,1]$ nên có ít nhất một điểm cực đại toàn cục a và một điểm cực tiểu toàn cục b trên $[-1,1]$. Nếu $a, b \in (-1,1)$ thì chúng phải thỏa phương trình

$$f'(x) = 5x^4 - 10x = 5x(x^3 - 2) = 0$$

với nghiệm duy nhất $x = 0$ (do $x = \sqrt[3]{2} \notin (-1,1)$).

Các ứng viên cho a, b là $x = -1$, $x = 0$ và $x = 1$. Do

$$f(-1) = -2;\ f(0) = 4 \text{ và } f(1) = 0,$$

ta suy ra 0 là điểm cực đại toàn cục và -1 là điểm cực tiểu toàn cục của f trên $[-1,1]$. ■

6.4. Mệnh đề (điều kiện cần với đạo hàm cấp 2). *Cho* f *là hàm xác định trên một khoảng mở* I *và* $a \in I$. *Nếu* f *có đạo hàm đến cấp hai trên một lân cận của* a *và đạt cực đại (cực tiểu) địa phương trên* I *tại* a *thì* $f''(a) \le 0$ *(*$f''(a) \ge 0$*).*

Chứng minh. Dùng công thức Taylor-Young tới cấp 2,

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h^2\frac{f''(a)}{2!} + h^2\varepsilon(h),$$

với $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$.

Do f đạt cực đại địa phương tại a, mệnh đề 5.3 cho $f'(a) = 0$ và tồn tại $\eta > 0$ sao cho $a + h \in I$ khi $|h| < \eta$ và

$$f(a+h) - f(a) \le 0.$$

Ta suy ra

$$\frac{f''(a)}{2!} + \varepsilon(h) \le 0,$$

và do đó

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f''(a)}{2!} + \varepsilon(h)\right) \le 0,$$

nên $f''(a) \le 0$.

Chứng minh tương tự cho trường hợp cực tiểu địa phương. ■

Ví dụ 14. Một doanh nghiệp sản xuất một loại sản phẩm với chi phí $C(q)$ cho q sản phẩm sản xuất. Giả sử rằng C là hàm có đạo hàm đến cấp 2 và giá bán p cố định, $p = p^*$. Ta tìm điều kiện cần để lợi nhuận đạt được là nhiều nhất.

$$\Pi(q) = p^*q - C(q).$$

Nếu q^* chỉ mức sản lượng mà doanh nghiệp đạt lợi nhuận cao nhất, thì $\Pi'(q^*) = 0$ và $\Pi''(q^*) \le 0$. Điều này cho $p^* = C'(q^*)$ (nghĩa là giá bán bằng với chi phí lề tại q^*) và $C''(q^*) \ge 0$. ■

Chú ý rằng điều kiện $f''(a) \le 0$ hay $f''(a) \ge 0$ cũng chỉ là điều kiện cần cho bài toán tối ưu nhưng vẫn không là điều kiện đủ.

Chẳng hạn, với hàm số $f(x) = x^3$, ta có $f'(0) = 0$, $f''(0) \le 0$ ($f''(0) \ge 0$) nhưng 0 không là điểm cực trị.

6.5. Mệnh đề (điều kiện đủ với đạo hàm cấp 2). *Cho* f *là hàm xác định trên một khoảng mở* I *và* $a \in I$. *Nếu* f *có đạo hàm đến cấp hai trên một lân cận của* a, $f'(a) = 0$ *và* $f''(a) < 0$ ($f''(a) > 0$)*, thì* f *đạt cực đại (cực tiểu) ngặt địa phương trên* I *tại* a.

Chứng minh. Dùng công thức Taylor-Young cho hàm số f,

$$f(a+h)-f(a)=h^2\left(\frac{f''(a)}{2!}+\varepsilon(h)\right),$$

với $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$.

Do $\frac{f''(a)}{2!}\neq 0$ và $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$, tồn tại $\eta>0$ sao cho với mọi $h\in(-\eta,\eta)$, $\frac{f''(a)}{2!}+\varepsilon(h)$ mang dấu của $\frac{f''(a)}{2!}$. Điều này cho thấy $f(a+h)-f(a)<0$ khi $f''(a)<0$ và do đó f đạt cực đại ngặt địa phương trên I tại a. Tương tự, $f(a+h)-f(a)>0$ khi $f''(a)>0$ và do đó f đạt cực đại ngặt địa phương trên I tại a. ■

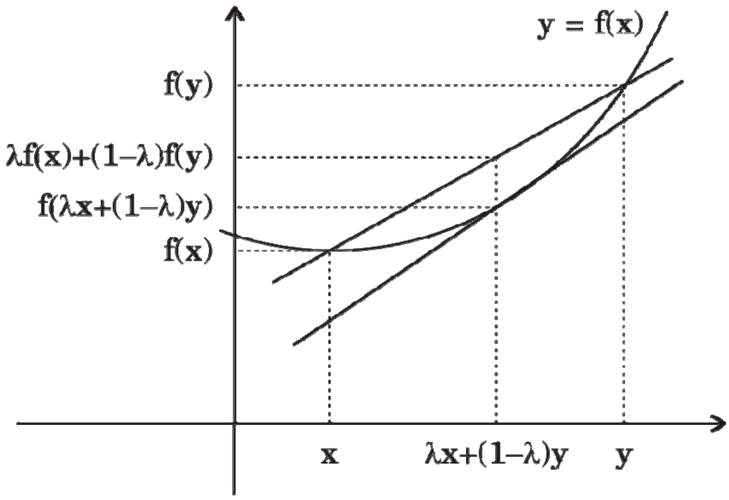
Với mệnh đề 5.4, ta nhận được các ứng viên cho cực trị một hàm có đạo hàm trên một khoảng mở. Bây giờ, ta khảo sát các điều kiện đủ để một cực trị địa phương trở thành cực trị toàn cục.

6.6. Định nghĩa. Cho hàm số f xác định trên một khoảng I của $\mathbb{R}$. Ta nói f là *hàm lồi* trên I khi

$$\forall x,y\in I,\lambda\in[0,1],\ f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y).$$

Ta nói f là *hàm lồi ngặt* trên I khi

$$\forall x,y\in I,x\neq y,\lambda\in(0,1),\ f(\lambda x+(1-\lambda)y)<\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y).$$



6.7. Mệnh đề. *Cho hàm số* f *xác định và có đạo hàm trên một khoảng mở* I.

i) f *là hàm lồi trên* I *nếu và chỉ nếu*

$$\forall x,y\in I,\ f(y)-f(x)\leq f'(y)(y-x).$$

ii) f *là hàm lồi ngặt trên* I *nếu và chỉ nếu*

$$\forall x,y\in I,\ x\neq y,\ f(y)-f(x)<f'(y)(y-x).$$

Mệnh đề này cho thấy đồ thị của hàm lồi có đạo hàm nằm phía trên tất cả các tiếp tuyến của nó.

Ví dụ 15. Hàm số $f(x)=e^x$ có đạo hàm vô hạn lần và với mọi $x\in\mathbb{R}$, $f''(x)=e^x>0$. Do đó f là hàm lồi ngặt trên $\mathbb{R}$. ■

6.8. Mệnh đề. *Cho* f *là hàm xác định và có đạo hàm đến cấp hai trên một khoảng mở* I.

i) f *là hàm lồi trên* I *nếu và chỉ nếu* $f''(x)\geq 0$ *với mọi* x *trong* I.

ii) Nếu $f''(x)>0$ *với mọi* x *trong* I *thì* f *là hàm lồi ngặt trên* I.

Với các khái niệm này, ta được

6.9. Mệnh đề. *Cho hàm số* f *xác định, có đạo hàm và lồi trên một khoảng mở* I *và* $a\in I$. *Ta có* $f'(a)=0$ *nếu và chỉ nếu* f *đạt cực tiểu toàn cục trên* I *tại* a *(cực trị nhận được là ngặt khi tính lồi của hàm số là ngặt).*

Chứng minh. Do mệnh đề 5.4, nếu f đạt cực tiểu toàn cục và cũng là cực tiểu địa phương trên I tại a thì $f'(a)=0$. Ngược lại, nếu $f'(a)=0$, mệnh đề 5.7 cho $f(x)-f(a)\leq 0$, với mọi $x\in I$, và do đó f đạt cực tiểu toàn cục trên I tại a. ■

Ví dụ 16. Xét hàm số $f(x)=x^4+4x^3+6x^2+5$. Hàm f có đạo hàm vô hạn cấp trên $\mathbb{R}$. Ta có phương trình $f'(x)=4x^3+12x^2+12x=0$ có nghiệm duy nhất $x=0$ và $f''(x)=12x^2+24x+12=12(x+1)^2\geq 0$. Do đó f là hàm lồi trên $\mathbb{R}$ và 0 trở thành điểm cực tiểu toàn cục của f. ■

Tương tự, ta có

6.10. Định nghĩa. Cho hàm số f xác định trên một khoảng I trong $\mathbb{R}$. Ta nói rằng f là *hàm lõm* trên I khi

$$\forall x,y\in I,\lambda\in[0,1],\ f(\lambda x+(1-\lambda)y)\geq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y).$$

Hàm f được gọi là *lõm ngặt* trên I khi

$$\forall x,y\in I,x\neq y,\lambda\in(0,1),\ f(\lambda x+(1-\lambda)y)>\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y).$$

Chú ý rằng f là hàm lõm nếu và chỉ nếu $-f$ là hàm lồi.

6.11. Mệnh đề. *Cho hàm số* f *xác định và có đạo hàm trên một khoảng mở* I. *Ta có*

i) f *lõm trên* I *nếu và chỉ nếu*

$$\forall x,y\in I,\ f(y)-f(x)\geq f'(y)(y-x).$$

ii) f *lõm ngặt trên* I *nếu và chỉ nếu*

$$\forall x,y\in I,\ x\neq y,\ f(y)-f(x)>f'(y)(y-x).$$

6.12. Mệnh đề. *Cho hàm số* f *xác định và có đạo hàm đến cấp hai trên một khoảng mở* I. *Ta có*

i) f *lõm trên* I *nếu và chỉ nếu* $f''(x) \geq 0,\ \forall x \in I$

ii) Nếu $f''(x) > 0,\ \forall x \in I$ *thì* f *lõm ngặt trên* I.

6.13. Mệnh đề. *Cho hàm số* f *xác định, có đạo hàm và lõm trên một khoảng mở* I *và* $a \in I$. *Ta có* $f'(a) = 0$ *nếu và chỉ nếu* f *đạt cực đại toàn cục trên* I *tại* a *(cực trị là ngặt khi tính lõm của hàm số là ngặt).*

Bài tập

1. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+mx}-1}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$

c). $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{7+2x-x^2}}{x^2-2x}$

e) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 7x}{\tan 3x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} x\cot \pi x$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\arcsin x}{4x}$

h) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\cot x\right)$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x\sin 2x}$

j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x-\tan^2 x}{x\sin x}$

k) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x}{2+x}\right)^{3x}$

l) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{2x+1}$

m) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

n) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$

o) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$

p) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$

2. Dùng quy tắc L'Hospital, tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$

c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$

d) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{1-\cos 3x}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

h) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left[\ln(1+x)-\ln x\right]$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-5^x}{1-e^x}$ j) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x\ln x}$

3. Chứng minh rằng hàm số f xác định bởi

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{khi} \quad x\neq 0\\ 0 & \text{khi} \quad x=0\end{cases}$$

là hàm có đạo hàm. Đạo hàm của nó có là liên tục không ?

4. Xét hàm số f cho bởi

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x+2-\sqrt{4-x^2}}{x} & \text{khi} \quad x\neq 0\\ 1 & \text{khi} \quad x=0\end{cases}$$

a) Tìm miền xác định của f.

b) Tính giới hạn của f khi x tiến về 0; f có liên tục tại điểm 0 không ?

c) Tính $f'(x)$ khi $x\neq 0$ và tính giới hạn của f' khi x tiến về 0.

d) Chứng tỏ rằng f có đạo hàm tại 0 bằng định nghĩa và tính giá trị $f'(0)$.

e) Hàm f' có liên tục tại 0 không ?

5. Chứng tỏ rằng $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^x}{x^r}=+\infty$ khi $a>1$ và $r>0$.

6. Cho hàm số $f(x)=\sqrt{1+x}$ xác định trên khoảng $(0,+\infty)$.

a) Tính $f'(x)$, $f''(x)$ và $f^{(3)}(x)$.

b) Kiểm chứng đẳng thức

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+x^3\varepsilon(x),$$

với $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$.

7. Dùng công thức Taylor-Young, chứng tỏ

a) $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}+x^n\varepsilon(x)$,

b) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+x^{2n+1}\varepsilon(x)$,

c) $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+x^{2n}\varepsilon(x)$,

với $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$.

8. Khảo sát cực trị hàm số f xác định trên $\mathbb{R}$ với

$$f(x) = x^5 - 20x + 3.$$

9. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 10$ trên khoảng $[-1, 4]$.

b) $f(x) = \sqrt{4 - x} + \sqrt{x - 2}$ trên khoảng $[2, 4]$.