Chương 2

DÃY VÀ CHUỖI SỐ

Dãy số là hàm số có miền xác định là tập $\mathbb{N}$ các số nguyên tự nhiên. Người ta thường dùng dãy số làm mô hình cho các hiện tượng rời rạc. Chẳng hạn khi người ta đo đạc các đại lượng tại những thời điểm cách đều nhau như sản lượng hàng năm, chỉ số giá tiêu dùng hàng tháng, kết toán năm ...

1. KHÁI NIỆM TỔNG QUÁT

1.1. Định nghĩa. *Dãy số* là một ánh xạ từ $\mathbb{N}$ vào $\mathbb{R}$ liên kết mỗi $n \in \mathbb{N}$ với $u_n \in \mathbb{R}$; ký hiệu

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto \Phi(n) \equiv u_n \end{aligned}$$

Khi khảo sát dãy số, người ta thường thay $n \mapsto \Phi(n)$ bằng ký hiệu $n \mapsto u_n$, trong đó biến $n \in \mathbb{N}$ được gọi là *chỉ số*.

Dãy số còn được ký hiệu bởi

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (u_n)_n,\ (u_n),\ n \mapsto u_n \text{ hay } u_1,\ u_2,\ \ldots$$

trong đó u_n được gọi là *số hạng thứ* n của dãy (u_n) và u_1 là *số hạng đầu*.

Ví dụ 1. i) Dãy (u_n) xác định bởi $u_n = a$, $n \in \mathbb{N}$, trong đó a là một hằng số (nghĩa là u_n không phụ thuộc vào n). Loại dãy này còn được gọi là *dãy hằng*.

ii) Dãy (u_n) xác định bởi $u_n = n$, $n \in \mathbb{N}$.

iii) Dãy (u_n) xác định bởi $u_n = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

iv) Dãy (u_n) xác định bởi $u_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

v) Dãy (u_n) xác định bởi $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

vi) Dãy (u_n) xác định bởi $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

vii) Dãy (u_n) cho bởi $u_1 = \sqrt{1}$, $u_2 = \sqrt{1+\sqrt{1}}$, $u_3 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$, ... Ta nói (u_n) xác định bằng quy nạp theo n : $u_1 = 1$ và với mọi $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.

viii) Dãy (u_n) xác định bằng quy nạp theo n : $u_1 = 2$ và với mọi $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \frac{3}{u_n}\right)$.

ix) *Lãi kép* : Một lượng vốn C đầu tư với lãi suất i trong n năm với tiền lời được nhập vào vốn mỗi cuối năm. Giá trị của lượng vốn này vào cuối năm thứ nhất được ký hiệu là x_1, cuối năm thứ hai là x_2, ..., cuối năm thứ n là x_n. Ta có

$$x_1 = C(1+i);$$

$$x_2 = C(1+i)^2;$$

$$\dots$$

$$x_{n-1} = C(1+i)^{n-1};$$

$$x_n = x_{n-1}(1+i) = C(1+i)^n.$$

và như vậy, ta nhận được dãy số (x_n) với $x_n = C(1+i)^n$.

x) *Lãi liên tục* : Với 1 đồng vốn đầu tư, xét trường hợp chu kỳ tính lãi nhập vào vốn giảm dần với lãi suất năm 7%, nửa năm $\frac{7}{2}\%$, quý $\frac{7}{4}\%$, tháng $\frac{7}{12}\%$, tuần $\frac{7}{52}\%$, ngày $\frac{7}{365}\%$ ... và đặt y_1, y_2, y_4, y_{12}, y_{52}, y_{365} giá trị vốn thu được vào cuối năm, ta có

$$y_1 = 1 + 0,07 = 1,07;$$

$$y_2 = \left(1 + \frac{0,07}{2}\right)^2 = 1,071225;$$

$$y_4 = \left(1 + \frac{0,07}{4}\right)^4 \approx 1,071859;$$

$$y_{12} = \left(1 + \frac{0,07}{12}\right)^{12} \approx 1,072290;$$

$$y_{52} = \left(1 + \frac{0,07}{52}\right)^{52} \approx 1,072458;$$

$$y_{365} = \left(1 + \frac{0,07}{365}\right)^{365} \approx 1,072501.$$

Tổng quát, khi một năm được chia thành n chu kỳ đều nhau với lãi suất trên mỗi chu kỳ là $\frac{7}{n}\%$ và tiền lời được nhập vào vốn sau từng chu kỳ thì giá trị vốn nhận được cuối năm là

$$y_n = \left(1 + \frac{0,07}{n}\right)^n.$$

Ta nhận được dãy số (y_n).

1.2. Định nghĩa.

i) Dãy số (u_n) được gọi là *tăng* khi $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \le u_{n+1}$ và được gọi là *tăng ngặt* khi $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$.

Dãy số (u_n) được gọi là *giảm* khi $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \le u_n$ và được gọi là *giảm ngặt* khi $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$.

Một dãy là tăng hay là dãy giảm được gọi là một dãy *đơn điệu*. Tương tự, một dãy là tăng ngặt hay là dãy giảm ngặt được gọi là dãy *đơn điệu ngặt*.

ii) Dãy số (u_n) được gọi là *bị chặn trên* khi $\exists A \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \le A$, nghĩa là tồn tại số thực A lớn hơn mọi u_n. Ta nói A là một *chặn trên* của dãy số (u_n).

Dãy số (u_n) được gọi là *bị chặn dưới* khi $\exists B \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \ge B$. Ta nói B là một *chặn dưới* của (u_n).

Dãy số (u_n) được gọi là *bị chặn* khi nó vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới.

Chẳng hạn, với số thực $b > 0$ bất kỳ, dãy số $u_n = nb$, với $n \in \mathbb{N}$ là một dãy tăng ngặt vì với mọi $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = (n+1)b > nb = u_n,$$

bị chặn dưới bởi 0 vì $u_n > 0$, với mọi $n \in \mathbb{N}$. Tuy nhiên, nó không bị chặn trên. Để chứng minh điều này, ta dùng phép chứng minh phản chứng. Giả sử (u_n) bị chặn trên với một chặn trên là M. Xét các tập con của $\mathbb{R}$,

$$A = \{u_n | n \in \mathbb{N}\} \text{ và } B = \{M \in \mathbb{R} | \forall n \in \mathbb{N}, u_n \le M\}.$$

Dễ thấy rằng chúng là các tập con không rỗng của $\mathbb{R}$ và

$$\forall x \in A, y \in B, x \le y.$$

Do tiền đề đầy đủ của $\mathbb{R}$, tồn tại số thực $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\forall x \in A, y \in B, x \le \alpha \le y.$$

Điều này cho thấy

$$nb + b = (n+1)b \le \alpha,$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$, và do đó

$$nb \le \alpha - b, \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

Điều này cho thấy $\alpha - b \in B$. Vô lý vì $\alpha - b < \alpha$. ■

Do dãy $(nb)_{n \in \mathbb{N}}$ không là dãy bị chặn, nghĩa là mọi số thực $a \in \mathbb{R}$ đều không là một chặn trên của nó, ta được kết quả quan trọng sau

1.3. Định lý Archimède. *Cho* $b > 0$. *Ta có*

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, na > b.$$

Đặc biệt, bằng cách lấy $a = x \in \mathbb{R}$ bất kỳ, $b = 1 > 0$ và lấy $a = 1$, $b = \varepsilon > 0$ bất kỳ, ta được

1.4. Hệ quả

i) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n > x$;

ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \dfrac{1}{n} < \varepsilon$.

Ví dụ 2. Dãy số (u_n), xác định bởi $u_n = \frac{1}{n}$, là dãy giảm ngặt và là dãy bị chặn, với 0 là một chặn dưới và 1 là một chặn trên.

Dãy (u_n), xác định bởi $u_n = (-1)^n$, không là dãy đơn điệu nhưng là dãy bị chặn với một chặn dưới là -1 và một chặn trên là 1.

2. DÃY HỘI TỤ

2.1. Định nghĩa. Dãy số (u_n) được gọi là *hội tụ* khi tồn tại số thực a sao cho khoảng cách giữa u_n và a đủ nhỏ khi số nguyên n đủ lớn.

Chẳng hạn, với dãy số $u_n = \frac{1}{n}$, bằng cách dùng định lý Archimède, ta chứng minh được rằng khoảng cách giữa u_n và số 0, $|u_n - 0| = \frac{1}{n}$, sẽ đủ nhỏ khi n đủ lớn. Do vậy, (u_n) là dãy hội tụ.

Chính xác hơn, (u_n) là dãy hội tụ khi

$$\exists a \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - a| < \varepsilon. \tag{1}$$

Điều này có nghĩa là với mỗi ε dương (đủ nhỏ), ta tìm được một số nguyên tự nhiên n_0 (có thể thay đổi theo từng ε), sao cho với mọi số nguyên n, nếu $n \geq n_0$ thì $|u_n - a| < \varepsilon$. Bấy giờ, ta viết

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = a \text{ hay } [u_n \to a \text{ khi } n \to +\infty]$$

Ta còn nói rằng dãy (u_n) *hội tụ về* a và a được gọi là *giới hạn* của dãy (u_n).

Xuất phát từ nhận xét rằng

i) Nếu (u_n) là dãy hội tụ với giới hạn u thì dãy (a_n), xác định bởi $a_n = u_n - u$, cũng là dãy hội tụ và có giới hạn là 0.

ii) Nếu (a_n) và (b_n) là các dãy hội tụ với cùng giới hạn là 0 thì các dãy (u_n), (v_n), (w_n), xác định bởi $u_n = a_n + b_n$, $v_n = \alpha a_n$ ($\alpha \in \mathbb{R}$ cố định), $w_n = a_n \cdot b_n$, cũng là các dãy hội tụ về 0.

iii) Nếu (a_n) là dãy hội tụ về 0 và $|b_n| \leq a_n$, với mọi $n \in \mathbb{N}$, thì dãy (b_n) cũng hội tụ về 0.

ta suy ra kết quả sau

2.2. Mệnh đề. *Nếu* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u$ *và* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = v$ *thì*

i) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n + v_n\right) = u + v$,

ii) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\alpha u_n\right) = \alpha u$, *với mọi* $\alpha \in \mathbb{R}$,

iii) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n \cdot v_n\right) = u \cdot v$.

iv) Hơn nữa, nếu $v \neq 0$ *và* $v_n \neq 0$, *với mọi* $n \in \mathbb{N}$, *thì* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{u}{v}$.

v) Nếu $u_n \leq v_n \leq w_n$, *với mọi* $n \in \mathbb{N}$, *và* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = a$ *thì* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a$.

Chứng minh. Đặt $a_n = u_n - u$ và $b_n = v_n - v$. Ta được hai dãy $\left(a_n\right)$ và $\left(b_n\right)$ cùng hội tụ về 0. Ta suy ra

i) $\left(u_n + v_n\right) - \left(u + v\right) = a_n + b_n \to 0$ và do đó

$$u_n + v_n \to u + v.$$

ii) $\alpha u_n - \alpha u = \alpha a_n \to 0$ kéo theo $\alpha u_n \to \alpha u$.

iii) $u_n v_n - uv = a_n b_n + u b_n + v a_n \to 0$ cho $u_n v_n \to uv$.

iv) Do

$$\frac{u_n}{v_n} - \frac{u}{v} = \frac{u b_n - v a_n}{v_n v}$$

và với n đủ lớn, ta có thể giả sử $\left|v_n\right| \geq \left|\frac{v}{2}\right|$, ta suy ra

$$\left|\frac{u_n}{v_n} - \frac{u}{v}\right| \leq \frac{2}{\left|v\right|^2}\left|u b_n - v a_n\right| \to 0.$$

Từ đó suy ra $\dfrac{u_n}{v_n} \to \dfrac{u}{v}$ khi $n \to +\infty$.

v) Do

$$\left|v_n - a\right| \leq \max\left\{\left|u_n - a\right|, \left|w_n - a\right|\right\} \leq \left|u_n - a\right| + \left|w_n - a\right| \to 0$$

ta suy ra $v_n \to a$ khi $n \to +\infty$. ■

Áp dụng mệnh đề 2.2, ta nhận được một số dãy hội tụ căn bản sau

2.3. Định lý

a) Nếu $p > 0$ *thì* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^p} = 0$.

b) Nếu $p > 0$ *thì* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{p} = 1$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

d) Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ *và* $p > 0$*, ta có* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^{\alpha}}{(1+p)^n} = 0$.

e) Nếu $|x| < 1$ *thì* $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$.

Chứng minh. a) Với mọi $\varepsilon > 0$, ta có

$$\left|\frac{1}{n^p} - 0\right| = \frac{1}{n^p} < \varepsilon \Leftrightarrow n^p > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \left(\tfrac{1}{\varepsilon}\right)^{1/p}.$$

Do vậy, ứng với mỗi $\varepsilon > 0$, ta chọn $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $n_0 > \left(\tfrac{1}{\varepsilon}\right)^{1/p}$ (hệ quả 1.4, i)). Khi đó

$$\forall n \geq n_0,\ \left|\frac{1}{n^p} - 0\right| < \varepsilon$$

nên do định nghĩa, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = 0$.

b) Khi $p = 1$, $\sqrt[n]{p} = 1$ với mọi n, và do vậy, hiển nhiên $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{p} = 1$.

Khi $p > 1$, bằng cách đặt $u_n = \sqrt[n]{p} - 1 \geq 0$, ta có

$$p = (1+u_n)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u_n^k \geq C_n^1 u_n = nu_n.$$

Do $0 \leq u_n \leq \frac{p}{n} \to 0$ ta suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ và do đó $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{p} = 1$.

Khi $0 < p < 1$, bằng cách đặt $q = \frac{1}{p} > 1$, ta được $\sqrt[n]{p} = \frac{1}{\sqrt[n]{q}} \to 1$.

c) Đặt $x_n = \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$. Do

$$n = (1+x_n)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x_n^k \geq C_n^2 x_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} x_n^2,$$

với mọi $n \geq 2$, ta suy ra

$$0 \leq x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} = \frac{1}{n^{1/2}}\sqrt{\frac{2}{1-\frac{1}{n}}} \to 0$$

khi $n \to +\infty$. Từ đó suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

d) Chọn $k_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $k_0 > \alpha$ (hệ quả 1.4, i)). Vì

$$(1+p)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k \geq C_n^{k_0} p^{k_0} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k_0+1)}{k_0!} p^{k_0},$$

với mọi $n \geq k_0$, ta suy ra

$$0 \le x_n = \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} \le \frac{k_0!}{p^{k_0}} \frac{n^\alpha}{n(n-1)(n-2)\dots(n-k_0+1)}$$

$$= \frac{k_0!}{p^{k_0}} \frac{1}{n^{k_0-\alpha}} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k_0-1}{n}\right)} \to 0$$

khi $n \to +\infty$. Suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} = 0$.

e) Trường hợp $x = 0$ thì hiển nhiên. Khi $0 < |x| < 1$, bằng cách chọn $p \in \mathbb{R}$ sao cho $|x| = \frac{1}{1+p} \Leftrightarrow p = \frac{1-|x|}{|x|} > 0$ và dùng d), ta suy ra

$$|x^n - 0| = |x^n| = |x|^n = \left(\frac{1}{1+p}\right)^n = \frac{n^0}{(1+p)^n} \to 0$$

và do đó $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$. ■

Chú ý. a) Khi (u_n) là một dãy hội tụ, giới hạn $a \in \mathbb{R}$ của nó là duy nhất.

Để chứng minh tính chất này (tính duy nhất của giới hạn), ta chứng minh rằng nếu dãy (u_n) có hai giới hạn thì chúng phải bằng nhau.

b) Nếu (u_n) là một dãy hội tụ với giới hạn $a \in \mathbb{R}$ thì nó là dãy bị chặn, nghĩa là tồn tại $A > 0$ sao cho $|u_n| \le A$, với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Từ đó, bằng suy luận đảo đề, ta suy ra rằng : Nếu (u_n) là dãy *không* bị chặn thì nó *không* là dãy hội tụ. Ta nói (u_n) là một dãy *phân kỳ*.

Chẳng hạn, dãy (u_n) xác định bởi $u_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, không là dãy bị chặn do với mọi số thực $A \in \mathbb{R}$, hệ quả 1.4, i) khẳng định sự tồn tại số nguyên $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $n_0 > A$. Khi đó, với mọi $n \ge n_0$, ta có

$$u_n = n^2 \ge n > A.$$

Từ đó, ta kết luận rằng (u_n) là một dãy phân kỳ. ■

Nhận xét rằng u_n lấy giá trị đủ lớn khi giá trị của n đủ lớn. Dãy như vậy còn được gọi là “hội tụ” về $+\infty$. chính xác hơn, ta có định nghĩa sau

2.4. Định nghĩa. Ta nói dãy (u_n) tiến về $+\infty$ khi n tăng ra $+\infty$ khi

$$\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \ge n_0, u_n > A.$$

Bấy giờ, ta viết

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \text{ hay } [u_n \to +\infty \text{ khi } n \to +\infty]$$

Dãy (u_n) được gọi là tiến về $-\infty$ khi n tăng ra $+\infty$ khi

$$\forall A < 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n < A.$$

Ký hiệu

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \text{ hay } [u_n \to -\infty \text{ khi } n \to +\infty].$$

2.5. Mệnh đề. *Nếu* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ *và* $u_n \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$, *thì* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{|u_n|} = +\infty$. *Hơn nữa, nếu* $u_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ *thì* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$ *và nếu* $u_n < 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ *thì* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = -\infty$. *Ngược lại, nếu* $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$ *thì* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0$.

Chứng minh. Với mỗi $A > 0$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $|u_n| < \frac{1}{A}$ và do đó $\frac{1}{|u_n|} > A$, với mọi $n \geq n_0$. Điều này chứng tỏ rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{|u_n|} = +\infty$.

Ngược lại, nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$ thì ứng với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho, với mọi $n \geq n_0$, ta có $|u_n| > \frac{1}{\varepsilon}$ và do đó $\left|\frac{1}{u_n}\right| < \varepsilon$. Điều này có nghĩa là $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0$. ■

Ví dụ 3. i) Nếu $p < 0$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = +\infty$. Thật vậy, bằng cách đặt $q = -p > 0$, ta có

$$\frac{1}{n^p} = \frac{1}{\frac{1}{n^q}} \text{ và } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^q} = 0.$$

Từ mệnh đề 2.5, ta kết luận $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = +\infty$.

Tóm lại, ta có

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} 0 & \text{khi } p > 0 \\ 1 & \text{khi } p = 0 \\ +\infty & \text{khi } p < 0 \end{cases}$$

hay

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{khi } \alpha < 0 \\ 1 & \text{khi } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{khi } \alpha > 0 \end{cases}$$

ii) Khi $x > 1$, đặt $y = \frac{1}{x}$, ta được $0 < y < 1$ và do đó $x^n = \frac{1}{y^n} \to +\infty$ vì $\lim\limits_{n\to+\infty} y^n = 0$. Trường hợp $x \leq -1$, các dãy (x^n) đều là dãy phân kỳ. ■

Các dãy số được phân thành bốn loại như sau : Dãy số (u_n) được gọi là thuộc loại I : khi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a \in \mathbb{R}$.

loại II : khi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

loại III : khi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

loại IV : khi (u_n) không thuộc về ba loại nêu trên, nghĩa là khi nó không có giới hạn là một số thực, $+\infty$ hay $-\infty$.

Các dãy loại I gọi là *hội tụ trong* $\mathbb{R}$, dãy thuộc các loại còn lại đều là dãy phân kỳ. Tuy nhiên, trong một số bối cảnh, các dãy thuộc loại II (hay loại III) còn được gọi là "*hội tu về*" $+\infty$ (hay $-\infty$).

Ví dụ dãy (x^n), với $x \le -1$, thuộc loại IV.

2.6. Mệnh đề

a) Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *thì* $\lim\limits_{n\to+\infty} (-u_n) = -\infty$ *và nếu* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ *thì* $\lim\limits_{n\to+\infty} (-u_n) = +\infty$.

b) Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *và* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ *thì* $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$.

c) Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ *và* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ *thì* $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = -\infty$.

d) Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *và* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ *thì* $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = +\infty$.

e) Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ *và* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ *thì* $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = +\infty$.

f) Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *và* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ *thì* $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = -\infty$.

g) Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *và* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a > 0$ *thì* $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = +\infty$.

h) Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *và* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a < 0$ *thì* $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = -\infty$.

Chú ý. Để đơn giản, trong tính toán giới hạn, ta thường quy ước

a) $-(+\infty) = -\infty$, $-(-\infty) = +\infty$;

b) $\dfrac{1}{\pm\infty} = 0$.

c) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$.

d) $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.

e) $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$.

f) $(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$.

g) $(+\infty) \times (-\infty) = -\infty$.

h) $(+\infty)\times a = +\infty$ khi $a > 0$;

i) $(+\infty)\times a = -\infty$ khi $a < 0$.

Các trường hợp $\left((+\infty)-(+\infty)\right)$, $\frac{+\infty}{+\infty}$, $(+\infty)\times 0$ được gọi là các *dạng vô định*, nghĩa là ta không có kết luận tổng quát cho mọi trường hợp. ■

Kết hợp các kết quả nêu trên, ta có thể khảo sát một số dãy thường dùng sau. Trước hết với dãy "đa thức bậc k" theo n,

$$u_n = a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0,$$

với $k \in \mathbb{N}$ và $a_k \neq 0$. Bằng cách viết

$$u_n = n^k\left(a_k + \tfrac{a_{k-1}}{n} + \ldots + \tfrac{a_1}{n^{k-1}} + \tfrac{a_0}{n^k}\right),$$

và do $a_k + \frac{a_{k-1}}{n} + \ldots + \frac{a_1}{n^{k-1}} + \frac{a_0}{n^k} \to a_k$ khi $k \to \infty$, ta suy ra

2.7. Mệnh đề

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0\right) = \begin{cases} +\infty & \text{khi } a_k > 0 \\ -\infty & \text{khi } a_k < 0 \end{cases}$$

Ví dụ 4. i) Bằng cách viết $2n^3 + 1 = n^3\left(2 + \frac{1}{n^3}\right)$, do $2 + \frac{1}{n^3} \to 2$ và $n^3 \to +\infty$ khi $n \to +\infty$, ta suy ra

$$\lim_{n\to\infty}\left(2n^3 + 1\right) = +\infty.$$

b) Bằng cách viết $-2n^3 + 8n^2 + 1 = n^3\left(-2 + \frac{8}{n} + \frac{1}{n^3}\right)$, do $-2 + \frac{8}{n} + \frac{1}{n^3} \to -2$ và $n^3 \to +\infty$ khi $n \to +\infty$, ta suy ra

$$\lim_{n\to\infty}\left(-2n^3 + 8n^2 + 1\right) = -\infty.$$

Đối với dãy "hữu tỷ" (tỷ số của hai đa thức) theo n,

$$u_n = \frac{a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0}{b_h n^h + b_{h-1}n^{h-1} + \ldots + b_1 n + b_0},$$

với $h, k \in \mathbb{N}$ và $a_k, b_h \neq 0$. Bằng cách viết

$$u_n = \frac{n^k}{n^h}\,\frac{a_k + \frac{a_{k-1}}{n} + \ldots + \frac{a_1}{n^{k-1}} + \frac{a_0}{n^k}}{b_h + \frac{b_{h-1}}{n} + \ldots + \frac{b_1}{n^{h-1}} + \frac{b_0}{n^h}}$$

và vì $\lim_{n\to\infty}\frac{a_k + \frac{a_{k-1}}{n} + \ldots + \frac{a_1}{n^{k-1}} + \frac{a_0}{n^k}}{b_h + \frac{b_{h-1}}{n} + \ldots + \frac{b_1}{n^{h-1}} + \frac{b_0}{n^h}} = \frac{a_k}{b_h}$, ta được

2.8. Mệnh đề

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1}+\ldots+a_1 n + a_0}{b_h n^h + b_{h-1}n^{h-1}+\ldots+b_1 n + b_0} = \begin{cases} +\infty & \text{khi} \quad k > h \text{ và } \frac{a_k}{b_h} > 0 \\ -\infty & \text{khi} \quad k > h \text{ và } \frac{a_k}{b_h} < 0 \\ \frac{a_k}{b_h} & \text{khi} \quad k = h \\ 0 & \text{khi} \quad k < h \end{cases}$$

Ví dụ 5. i) Bằng cách viết $\dfrac{2n^4 - n^2}{n^3+1} = \dfrac{n^4}{n^3}\dfrac{2-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^3}} = n\dfrac{2-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^3}}$, ta suy ra

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^4-n^2}{n^3+1} = +\infty.$$

ii) Do $\dfrac{2n^4-n^2}{1-n^2} = \dfrac{n^4}{n^2}\dfrac{2-\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}-1} = n^2\dfrac{2-\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}-1}$, ta suy ra

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^4-n^2}{1-n^2} = -\infty.$$

iii) Do $\dfrac{2n^4-n^2}{1-3n^4} = \dfrac{n^4}{n^4}\dfrac{2-\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^4}-3} = \dfrac{2-\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^4}-3}$, ta suy ra

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^4-n^2}{1-3n^4} = -\frac{2}{3}.$$

iv) Do $\dfrac{2n^4-n^2}{n^6+1} = \dfrac{n^4}{n^6}\dfrac{2-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^6}} = \dfrac{1}{n^2}\dfrac{2-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^6}}$, ta suy ra

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^4-n^2}{n^6+1} = 0.$$

Ví dụ 6. i) Bằng cách viết $\dfrac{2n^4-n^2}{2^n+1} = \dfrac{n^4}{2^n}\dfrac{2-\frac{1}{n^2}}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}$, do các dãy $\dfrac{n^4}{2^n}$ và $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ cùng tiến về 0 khi $n \to \infty$, ta suy ra

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^4-n^2}{2^n+1} = 0.$$

ii) Bằng cách viết $\dfrac{3n^4-2^n}{3^n+n} = \dfrac{2^n}{3^n}\dfrac{3\frac{n^4}{2^n}-1}{1+\frac{n}{3^n}} = \left(\frac{2}{3}\right)^n\dfrac{3\frac{n^4}{2^n}-1}{1+\frac{n}{3^n}}$, do các dãy $\left(\frac{2}{3}\right)^n$, $\frac{n^4}{2^n}$ và $\frac{n}{3^n}$ cùng tiến về 0 khi $n \to \infty$, ta suy ra

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^4-2^n}{3^n+n} = 0.$$

Ứng với dãy số (u_n) cho trước, việc tìm a trong $\mathbb{R}$ sao cho $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ không phải lúc nào cũng thực hiện được một cách dễ dàng. Các kết quả sau cho phép xác định sự tồn tại cũng như các tính chất của giới hạn một dãy, nếu có, trước khi xác định được giá trị của nó.

2.9. Định lý. *Nếu (u_n) là dãy đơn điệu và bị chặn thì nó là dãy hội tụ.*

Chứng minh. Giả sử (u_n) tăng và bị chặn, nghĩa là

$$u_n \le u_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N},$$

và tồn tại số thực $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho

$$u_n \le \alpha,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Đặt

$$A = \{u_n | n \in \mathbb{N}\} \text{ và } B = \{\alpha \in \mathbb{R} | u_n \le \alpha, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Chúng là hai tập con không rỗng của $\mathbb{R}$ thỏa

$$\forall x \in A, \forall y \in B, x \le y,$$

nên do tiên đề đầy đủ, tồn tại $a \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\forall x \in A, \forall y \in B, x \le a \le y.$$

Ta sẽ chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.

Thật vậy, ứng với mỗi $\varepsilon > 0$, do $a - \varepsilon < a$, ta suy ra rằng $a - \varepsilon \notin B$, nghĩa là tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $a - \varepsilon < x_{n_0}$. Từ đó suy ra, với mọi $n \ge n_0$,

$$a - \varepsilon < u_{n_0} \le u_n \le a \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

2.10. Định nghĩa. Một dãy được gọi là xác định bằng một *hệ thức* (hay *phương trình*) *đệ quy* khi tồn tại một hệ thức cho phép tính giá trị của u_{n+1} từ các giá trị u_n, u_{n-1}, ..., u_1 và n.

Ví dụ 7. i) Dãy Fibonacci :

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	...
1	1	2	3	5	8	13	...

được xác định bằng hệ thức đệ quy

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n,$$

$$u_1 = 1 \text{ và } u_2 = 1.$$

ii) Dãy xác định bởi *hệ thức đệ quy cấp 1* : $u_{n+1} = f(u_n)$, trong đó f là một hàm số cho trước và u_1 cho trước.

Chẳng hạn, dãy (u_n) cho bởi $u_1 = \sqrt{1}$, $u_2 = \sqrt{1+\sqrt{1}}$, $u_3 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$, ... là dãy xác định bởi hệ thức đệ quy cấp 1 : $u_{n+1} = f(u_n)$, với hàm $f(x) = \sqrt{1+x}$ và $u_1 = 1$.

Nói khác đi, dãy này có thể viết lại dưới dạng hệ thức đệ quy :

$$u_1 = 1 \text{ và } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$$

mà ta có thể kiểm chứng rằng nó là một dãy tăng và bị chặn trên (xem bài tập 3, câu a). Định lý 2.9 cho thấy nó là dãy hội tụ và từ đó, ta có thể tính được giới hạn của nó, là $u = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (xem thêm trong chương 3, phần 2).

iii) Xét dãy số (u_n) xác định bởi biểu thức $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n+3}$, $n \in \mathbb{N}$, $u_1 > 0$. Đây là dãy xác định bởi hệ thức đệ quy cấp 1 với hàm số $f(x) = \frac{x}{x+3}$, $x > 0$. Dãy này được hoàn toàn xác định (do biểu thức xác định các số hạng đều có mẫu số khác 0) và mọi số hạng đều lớn hơn 0, nghĩa là nó bị chặn dưới bởi 0,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0.$$

Do $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{u_n+3} < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ta suy ra nó là dãy tăng.

Định lý 2.9 cho thấy (u_n) là dãy hội tụ. Gọi a là giới hạn của nó. Để tính a, ta chú ý rằng

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{u_n+3} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + 3},$$

nghĩa là $a = \frac{a}{a+3}$ (giới hạn a thỏa phương trình $a = f(a)$, (xem thêm trong phần 2, chương 3). Phương trình này có hai nghiệm là 0 và -2 nhưng do dãy (u_n) chỉ gồm các số hạng > 0 nên ta chỉ nhận trường hợp $a = 0$. ■

2.11. Định nghĩa. Dãy (u_n) được gọi là một *dãy Cauchy* nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq n_0, |u_m - u_n| < \varepsilon.$$

Dễ thấy rằng mọi dãy hội tụ đều là dãy Cauchy. Ngược lại, ta chấp nhận kết quả sau

2.12. Định lý (tính đầy đủ của $\mathbb{R}$). *Mọi dãy Cauchy đều là dãy hội tụ.*

3. CÁC DÃY ĐẶC BIỆT

3.1. Cấp số cộng (dãy số học). Dãy số (u_n) được gọi là một *cấp số cộng với công sai* r khi nó được xác định bởi hệ thức đệ quy cấp 1 sau

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r,\ u_1 \text{ cho trước.}$$

Dùng quy nạp, ta suy ra rằng

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_1 + (n-1)r.$$

Khi $r = 0$, cấp số cộng tương ứng là dãy hằng : với mọi $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1$. Khi $r \neq 0$, cấp số cộng tương ứng là dãy số hội tụ về $+\infty$ hay $-\infty$ tùy theo r dương hay âm và do đó, nó là dãy phân kỳ.

3.2. Cấp số nhân (dãy hình học). Dãy số (u_n) được gọi là một *cấp số nhân với công bội* r khi nó được xác định bởi hệ thức đệ quy cấp 1 :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = ru_n,\ u_1 \text{ cho trước.}$$

Cũng bằng quy nạp, ta suy ra

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = r^{n-1}u_1.$$

Khi $u_1 = 0$, ta được dãy hằng các số 0. Ngược lại, nó là dãy hội tụ khi $-1 < r \leq 1$ và phân kỳ trong trường hợp còn lại. Cụ thể, ta có

Khi $r = 1$, ta được $u_n = u_1$ và cấp số nhân tương ứng là dãy hằng.

Khi $|r| < 1$, ta được $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ do định lý 2.3, e).

Khi $r = -1$, dãy (u_n) luân phiên lấy các giá trị u_1 và $-u_1$ nên là dãy phân kỳ.

Khi $r > 1$, ta có $u_n = (1+b)^{n-1}u_1$, với $b > 0$, và do bất đẳng thức Bernoulli, $u_n \geq \left[1 + (n-1)b\right]u_1$. Suy ra rằng u_n tiến về vô hạn ($\pm\infty$ tùy theo dấu của u_0).

Khi $r < -1$, do $u_n = (-1)^{n-1}(1+b)^{n-1}u_1$, với $b > 0$, ta suy ra rằng u_n luân phiên lấy các giá trị âm và dương với $|u_n| \to +\infty$. Do đó, nó là dãy phân kỳ. ■

3.3. Dãy (u_n) và (v_n) với $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ và $v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

a. (u_n) là dãy tăng và (v_n) là dãy giảm.

Thật vậy, ta có

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n\frac{n+2}{n+1}=\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n\frac{n+2}{n+1}$$

$$\geq\left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right)\frac{n+2}{n+1}=\frac{\left(n^2+n+1\right)(n+2)}{(n+1)^3}=\frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1}\geq 1$$

và

$$\frac{v_n}{v_{n+1}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}=\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1}\frac{n+1}{n+2}=\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1}\frac{n+1}{n+2}$$

$$\geq\left(1+\frac{n+1}{n(n+2)}\right)\frac{n+1}{n+2}=\frac{\left(n^2+3n+1\right)(n+1)}{n(n+2)^2}$$

$$=\frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n}\geq 1$$

b. $2\leq u_n\leq v_n\leq 4$, với mọi $n\in\mathbb{N}$.

c. $0\leq v_n-u_n=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leq\frac{4}{n}\to 0$ khi $n\to+\infty$. Từ định nghĩa của số Néper, ta suy ra $e=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. ■

4. CHUỖI SỐ

Cho dãy số (u_n). *Chuỗi số với số hạng tổng quát* u_n là dãy số (s_n) xác định bởi

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}u_k\equiv u_1+u_2+\ldots+u_n,$$

trong đó s_n được gọi là một *tổng riêng phần* của chuỗi số.

4.1. Định nghĩa. Chuỗi số với số hạng tổng quát u_n được gọi là *hội tụ* nếu dãy số (s_n) tương ứng hội tụ và khi đó, ta viết

$$\lim_{n\to+\infty}s_n=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n.$$

Giá trị $s=\lim\limits_{n\to+\infty}s_n$ được gọi là *tổng* của chuỗi.

Một chuỗi số không hội tụ được gọi là *phân kỳ*.

Nhận xét : Từ định nghĩa, ta thấy rằng việc khảo sát chuỗi số với số hạng tổng quát u_n được quy về việc khảo sát dãy số (s_n) tương ứng.

4.2. Chuỗi hình học : Xét chuỗi số với số hạng tổng quát $u_n=r^{n-1}u_1$, u_1 cho trước. Ta khảo sát dãy tương ứng

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} r^{k-1}u_1 = u_1\left(1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1}\right).$$

Như vậy, s_n chính là tổng n số hạng đầu của một cấp số nhân (dãy hình học). Chính vì vậy, chuỗi số này được gọi là chuỗi hình học. Để khảo sát sự hội tụ của chuỗi hình học, ta đi tìm biểu thức cho tổng riêng phần s_n của nó. Ta có

$$s_n = \begin{cases} nu_1 & \text{khi} \quad r = 1 \\ \frac{1-r^n}{1-r}u_1 & \text{khi} \quad r \neq 1 \end{cases}$$

và do đó chuỗi hình học hội tụ với tổng là $\frac{1}{1-r}u_1$ khi $|r| < 1$.

Đối với các trường hợp khác, chuỗi hình học phân kỳ. ■

Khi (s_n) là dãy các tổng riêng phần của chuỗi số hội tụ $\sum u_n$, thì do định nghĩa, nó là dãy hội tụ nên cũng là dãy Cauchy, nghĩa là

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq n_0, |s_m - s_n| < \varepsilon.$$

Đặc biệt, với $m = n + 1$, và vì $s_{n+1} - s_n = u_{n+1}$, ta suy ra

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_{n+1}| < \varepsilon$$

và ta được tiêu chuẩn sau

4.3. Mệnh đề (điều kiện cần để chuỗi hội tụ). *Nếu chuỗi số với số hạng tổng quát* u_n *hội tụ thì* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Mệnh đề 4.3 cho ta một tiêu chuẩn khảo sát sự phân kỳ của chuỗi số. Thật vậy, đảo đề của mệnh đề trên là

Nếu (u_n) *là một dãy phân kỳ hay* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ *thì chuỗi số với số hạng tổng quát* u_n *phân kỳ.*

Ví dụ 8. Chuỗi $\sum(-1)^n$ phân kỳ vì dãy các số hạng tổng quát phân kỳ; chuỗi $\sum 1^n$ phân kỳ vì dãy các số hạng tổng quát có giới hạn $1 \neq 0$. ■

Chú ý rằng chiều ngược lại của mệnh đề 4.3 sai, nghĩa là khi $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, ta không thể đưa ra kết luận tổng quát nào cho chuỗi số có số hạng tổng quát u_n.

Chẳng hạn, bằng cách dùng mệnh đề 4.5 phần sau, ta có $\sum \frac{1}{n}$ là chuỗi phân kỳ và $\sum \frac{1}{n^2}$ là chuỗi hội tụ, trong đó $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$. ■

4.4. Mệnh đề (tiêu chuẩn so sánh cho chuỗi số dương). *Cho* (u_n) *và* (v_n) *là hai dãy số thỏa* $0 \le u_n \le v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

i) Nếu $\sum v_n$ *là chuỗi hội tụ thì* $\sum u_n$ *hội tụ,*

ii) Nếu $\sum u_n$ *là chuỗi phân kỳ thì* $\sum v_n$ *phân kỳ.*

Chứng minh. Trước hết, chú ý rằng nếu $\sum a_n$ là chuỗi số dương thì dãy (b_n) các tổng riêng phần là dãy tăng.

Gọi (s_n) và (t_n) lần lượt là dãy tổng riêng phần các chuỗi $\sum u_n$ và $\sum v_n$. Do giả thuyết, ta có

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \le \sum_{k=0}^{n} v_k = t_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

i) Khi $\sum v_n$ hội tụ, (t_n) bị chặn trên và do đó (s_n) cũng bị chặn trên. Vì (s_n) tăng, định lý 2.7 chứng tỏ rằng nó hội tụ và như vậy, chuỗi $\sum u_n$ hội tụ.

Phát biểu ii) chính là đảo đề của i). ■

Ví dụ 9. Do $0 \le \frac{1}{n+2^n} \le \frac{1}{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, và $\sum \frac{1}{2^n} = \sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ là chuỗi hình học hội tụ, ta suy ra $\sum \frac{1}{n+2^n}$ là chuỗi hội tụ. ■

4.5. Mệnh đề (chuỗi điều hòa). *Chuỗi điều hòa*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

hội tụ nếu và chỉ nếu $p > 1$.

Chứng minh **.** Do

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} +\infty & \text{khi} \quad p < 0 \\ 1 & \text{khi} \quad p = 0 \\ 0 & \text{khi} \quad p > 0 \end{cases}$$

Mệnh đề 4.3 cho thấy chuỗi $\sum \frac{1}{n^p}$ phân kỳ khi $p \le 0$.

Khi $p > 1$, ta có

$$1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \dots + \frac{1}{7^p}\right) + \dots + \left(\frac{1}{\left(2^k\right)^p} + \dots + \frac{1}{\left(2^{k+1}\right)^p - 1}\right) + \dots$$

$$\le 1 + 2\frac{1}{2^p} + 4\frac{1}{4^p} + \dots + 2^k \frac{1}{\left(2^k\right)^p} + \dots$$

$$= 1 + 2^{1-p} + \left(2^{1-p}\right)^2 + \dots + \left(2^{1-p}\right)^k + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{1-p}\right)^n$$

Do $0 < 2^{1-p} < 1$, chuỗi hình học $\sum\left(2^{1-p}\right)^n$ hội tụ. Suy ra chuỗi $\sum\frac{1}{n^p}$ cũng hội tụ.

Khi $0 < p < 1$, ta có

$$1+\frac{1}{2^p}+\left(\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}\right)+\left(\frac{1}{5^p}+\ldots+\frac{1}{8^p}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{\left(2^{k-1}\right)^p+1}+\ldots+\frac{1}{\left(2^k\right)^p}\right)+\ldots$$

$$\geq 1+\frac{1}{2^p}+2\frac{1}{4^p}+\ldots+2^{k-1}\frac{1}{\left(2^k\right)^p}+\ldots$$

$$=1+2^{1-p}+\frac{1}{2}\left(2^{1-p}\right)^2+\ldots+\frac{1}{2}\left(2^{1-p}\right)^k+\ldots\geq\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(2^{1-p}\right)^n$$

Do $2^{p-1} \geq 1$, chuỗi hình học $\sum\left(2^{p-1}\right)^n$ phân kỳ. Do đó, chuỗi $\sum\frac{1}{n^p}$ phân kỳ. ■

Chú ý. Cho $\sum u_n$ và $\sum v_n$ là hai chuỗi số dương với

$$\alpha=\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}.$$

Khi $0<\alpha<\infty$, tồn tại $0<a<\alpha<b$ và $n_0\in\mathbb{N}$ sao cho

$$a\leq\frac{u_n}{v_n}\leq b,\ \forall n\geq n_0.$$

Vì vậy, nếu $\sum v_n$ hội tụ, bất đẳng thức $0\leq u_n\leq bv_n$ và mệnh đề 4.4 chứng tỏ rằng $\sum u_n$ cũng hội tụ. Ngược lại, nếu $\sum v_n$ phân kỳ, bất đẳng thức $0\leq av_n\leq u_n$ và mệnh đề 4.4 cho thấy $\sum u_n$ cũng phân kỳ.

Ví dụ 10. Xét chuỗi $\sum\frac{n}{n^2+1}$. Ta có

$$\frac{n}{n^2+1}=\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

và do đó

$$\frac{\frac{n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\to 1>0.$$

Vì chuỗi điều hòa $\sum\frac{1}{n}$ phân kỳ, ta suy ra chuỗi $\sum\frac{n}{n^2+1}$ cũng phân kỳ.

Tương tự, với chuỗi $\sum\frac{2n+1}{n^3+1}$, do

$$\frac{2n+1}{n^3+1}=\frac{1}{n^2}\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}$$

và do đó

$$\frac{\frac{2n+1}{n^3+1}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} \to 2 > 0,$$

nên sự hội tụ của chuỗi điều hòa $\sum \frac{1}{n^2}$ kéo theo sự hội tụ của chuỗi $\sum \frac{2n+1}{n^3+1}$. ■

Với chuỗi có số hạng tổng quát tùy ý, ta có

4.6. Mệnh đề (hội tụ tuyệt đối). *Nếu chuỗi* $\sum |u_n|$ *hội tụ thì chuỗi* $\sum u_n$ *hội tụ.*

Chứng minh. Xét (s_n) và (t_n) lần lượt là dãy tổng riêng phần chuỗi số $\sum u_n$ và $\sum |u_n|$, Với mọi $n < m$, ta có

$$|s_m - s_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} u_k\right| \le \sum_{k=n+1}^{m} |u_k| = t_m - t_n. \tag{1}$$

Do $\sum |u_n|$ hội tụ, dãy (t_n) hội tụ nên là dãy Cauchy. Bất đẳng thức (1) chứng tỏ rằng (s_n) cũng là dãy Cauchy và do đó hội tụ theo định lý 2.10. Điều này chứng tỏ rằng chuỗi $\sum |u_n|$ cũng hội tụ. ■

Chú ý rằng chiều ngược lại của mệnh đề trên không đúng.

Ví dụ 11. i) Xét chuỗi $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$. Ta có

$$\sum \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \sum \frac{1}{n^2}$$

là chuỗi điều hòa hội tụ. Do mệnh đề 4.6, chuỗi $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ hội tụ (tuyệt đối).

ii) Xét chuỗi $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Ta có

$$\sum \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum \frac{1}{n}$$

là chuỗi điều hòa phân kỳ. Mặt khác, do

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} &= \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}\right) + \ldots \\
&= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} + \ldots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}
\end{aligned}$$

và

$$\frac{\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{2}{n}\right)} \to \frac{1}{4} > 0$$

nên sự hội tụ của chuỗi điều hòa $\sum \frac{1}{n^2}$ kéo theo sự hội tụ của chuỗi $\sum \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$.

Như vậy, chuỗi $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ hội tụ. ■

4.7. Định lý (tiêu chuẩn d'Alembert). *Giả sử*

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \alpha .$$

i) Khi $\alpha < 1$, *chuỗi* $\sum |u_n|$ *hội tụ.*

ii) Khi $\alpha > 1$, *chuỗi* $\sum u_n$ *phân kỳ.*

iii) Khi $\alpha = 1$, *ta không có kết luận tổng quát.*

Chứng minh. i) Với $\alpha < 1$, chọn $\alpha < \beta < 1$, tồn tại $\exists n_0 \in \mathbb{N}$

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \le \beta ,\ \forall n \ge n_0 .$$

Suy ra $|u_{n+1}| \le \beta |u_n|$, $\forall n \ge n_0$.

Bằng quy nạp, ta chứng minh được

$$|u_n| \le \beta^{n-n_0} |u_{n_0}|,\ \forall n \ge n_0 .$$

Do chuỗi $\sum \beta^{n-n_0} |u_{n_0}| = |u_{n_0}| \beta^{-n_0} \sum \beta^n$ hội tụ, mệnh đề 4.4 cho thấy chuỗi $\sum |u_n|$ cũng hội tụ.

ii) Tương tự, khi $\alpha > 1$, chọn $\alpha > \beta > 1$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $|u_{n+1}| > \beta |u_n|$, $\forall n \ge n_0$. Điều này cho thấy $|u_n| \not\to 0$ khi $n \to \infty$ và do đó $u_n \not\to 0$ khi $n \to \infty$. Do mệnh đề 4.3, chuỗi $\sum u_n$ phân kỳ. ■

Ví dụ 12. i) Ta có thể khảo sát dãy số $u_n = \frac{n^n}{5^n n!}$, $n \in \mathbb{N}$, bằng cách khảo sát chuỗi số với số hạng tổng quát u_n. Dùng tiêu chuẩn d'Alembert, với

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)!} \frac{n^n}{5^n n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{5n^n} = \frac{e}{5} < 1,$$

ta suy ra rằng chuỗi $\sum u_n$ hội tụ. Do mệnh đề 4.3, $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

ii) Với chuỗi hội tụ $\sum \frac{1}{n^2}$, ta có $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$ nhưng với chuỗi phân kỳ $\sum \frac{1}{n}$, ta cũng có $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$. ■

4.8. Định lý (tiêu chuẩn Cauchy). *Giả sử rằng*

$$\lim_{n\to\infty}\left|u_n\right|^{1/n} = \alpha.$$

i) Khi $\alpha < 1$, *chuỗi* $\sum\left|u_n\right|$ *hội tụ.*

ii) Khi $\alpha > 1$, *chuỗi* $\sum u_n$ *phân kỳ.*

iii) Khi $\alpha = 1$, *ta không có kết luận tổng quát.*

Chứng minh. i) Khi $\alpha < 1$, chọn $\alpha < \beta < 1$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\left|u_n\right|^{1/n} \le \beta, \ \forall n \ge n_0.$$

Suy ra $\left|u_n\right| \le \beta^n$, $\forall n \ge n_0$.

Vì chuỗi $\sum \beta^n$ hội tụ, mệnh đề 4.4 cho thấy chuỗi $\sum\left|u_n\right|$ cũng hội tụ.

ii) Tương tự, khi $\alpha > 1$, chọn $\alpha > \beta > 1$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\left|u_n\right|^{1/n} > \beta > 1$ và do đó $\left|u_n\right| > 1$, $\forall n \ge n_0$. Điều này chứng tỏ rằng $\left|u_n\right| \not\to 0$ khi $n \to \infty$ và do đó $u_n \not\to 0$ khi $n \to \infty$. Do mệnh đề 4.3, chuỗi $\sum u_n$ phân kỳ. ■

Bài tập

1. Khảo sát sự hội tụ của dãy số (u_n) xác định bởi

a) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,

b) $u_n = 5 - \frac{8}{5}n$,

c) $u_n = \dfrac{2n+1}{n^2+1}$,

d) $u_n = \dfrac{n^4+1}{n+2^n}$,

e) $u_n = \sqrt[3]{n^3+n} - \sqrt[3]{n^3-n}$,

f) $u_n = \dfrac{3^n+n^2}{n^3+2^n}$,

g) $u_n = \dfrac{n+\sqrt[3]{n^6+1}}{3n^2+1}$.

2. Khảo sát sự hội tụ của dãy $\left(u_n\right)$ xác định bởi

a) $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) $u_1 = 2$ và $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left[u_n + \dfrac{2}{u_n}\right]$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

3. Tìm tổng riêng và tổng (nếu có) của các chuỗi số:

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\left(n+1\right)}$ b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \left(-1\right)^n}{3^n}$

c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2\left(n+1\right)^2}$ d. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n}$

4. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{3^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+1}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{1+2^n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+1}$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2n^2}{1+2n^3}$