Bài tập

1. Dùng công thức đổi biến, tính các tích phân sau

a) $\int \frac{dx}{5-3x}$.

b) $\int \frac{x}{x^2+1}dx$.

c) $\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx$.

d) $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$.

e) $\int e^x\sqrt{1+e^x}dx$.

f) $\int e^{\cos t}\sin t dt$.

g) $\int \frac{dx}{x\ln x}$.

h) $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$.

i) $\int \cot x dx$.

j) $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

k) $\int \frac{1+x}{1+x^2}dx$.

l) $\int \frac{x}{1+x^4}dx$.

ĐS: a) Với $t = 5x-3$, $dt = -3dx$, ta được

$$\int \frac{dx}{5-3x} = -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{3}\ln|t| + C = -\frac{1}{3}\ln|5-3x| + C.$$

b) Với $t = x^2+1$, $dt = 2xdx$, ta được

$$\int \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + C.$$

c) Với $t = \ln x$, $dt = \frac{dx}{x}$, ta được

$$\int \frac{(\ln x)^2 dx}{x} = \int t^2dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + C.$$

d) Với $t = \arctan x$, $dt = \frac{dx}{1+x^2}$, ta được

$$\int \frac{\arctan x dx}{1+x^2} = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + C.$$

e) Với $t = 1+e^x$, $dt = e^x dx$, ta được

$$\int e^x\sqrt{1+e^x}dx = \int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3}\left(1+e^x\right)^{\frac{3}{2}} + C.$$

f) Với $x = \cos t$, $dx = -\sin t dt$, ta được

$$\int e^{\cos t}\sin t dt = -\int e^x dx = -e^x + C = -e^{\cos t} + C.$$

g) Với $t = \ln x$, $dt = \frac{dx}{x}$, ta được

$$\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\ln x| + C.$$

h) Với $t = e^x + 1$, $dt = e^x dx$, ta được

$$\int \frac{e^x dx}{e^x + 1} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|e^x + 1| + C.$$

i) Với $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$, ta được

$$\int \cot x dx = \int \frac{\cos x dx}{\sin x} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\sin x| + C.$$

j) Với $t = \cos x$, $dt = -\sin x dx$, ta được

$$\int \frac{\sin x dx}{1 + \cos^2 x} = -\int \frac{dt}{1 + t^2} = -\arctan t + C = -\arctan \cos x + C.$$

k) Với $t = 1 + x^2$, $dt = 2xdx$, ta được

$$\begin{aligned}\int \frac{1 + x}{1 + x^2} dx &= \int \frac{dx}{1 + x^2} + \int \frac{xdx}{1 + x^2} = \arctan x + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \arctan x + \frac{1}{2}\ln|t| + C \\ &= \arctan x + \frac{1}{2}\ln|1 + x^2| + C\end{aligned}.$$

l) Với $t = x^2$, $dt = 2xdx$, ta được

$$\int \frac{xdx}{1 + x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{2}\arctan t + C = \frac{1}{2}\arctan x^2 + C.$$

2. Dùng công thức tích phân từng phần, tính các tích phân sau

a) $\int xe^{-x}dx$. b) $\int x^2 \sin 2xdx$.

c) $\int x\ln xdx$. d) $\int x\arctan xdx$.

ĐS: a) Với $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{-x}dx \end{cases}$, ta được $\begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$ và

$$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C$$

b) a) Với $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \sin 2xdx \end{cases}$, ta được $\begin{cases} du = 2xdx \\ v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{cases}$ và

$$\int x^2 \sin 2xdx = -\tfrac{1}{2}x^2\cos 2x + \int x\cos 2xdx.$$

Với $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos 2xdx \end{cases}$, ta được $\begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$ và

$$\int x\cos 2xdx = \tfrac{1}{2}x\sin 2x - \tfrac{1}{2}\int \sin 2xdx = \tfrac{1}{2}x\sin 2x + \tfrac{1}{4}\cos 2x + C.$$

Suy ra

$\int x^2 \sin 2x dx = -\frac{1}{2}x^2 \cos 2x + \frac{1}{2}x \sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$

c) Với $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = xdx \end{cases}$, ta được $\begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$ và

$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$.

d) Với $\begin{cases} u = \arctan x \\ dv = xdx \end{cases}$, ta được $\begin{cases} du = \frac{dx}{1+x^2} \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$ và

$\int x \arctan x dx = \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$.

Mà $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \arctan x + C$

nên $\int x \arctan x dx = \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\left(x - \arctan x\right) + C$.

3. Dùng công thức đổi biến, tính các tích phân sau

a) $\int_0^1 \frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^2}$ (với $u = x^2 + 1$)

b) $L\left(a\right) = \int_0^a xe^{-x^2}dx$ (với $u = x^2$). Tìm $\lim\limits_{a \to +\infty} L\left(a\right)$

c) $\int_1^2 \left(\ln x\right)^2 dx$ (với $u = \ln x$)

ĐS: a) Cách 1 : $\int_0^1 \frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{du}{u^2} = \frac{1}{2}\left(\left.\frac{-1}{3u^3}\right|_1^2\right) = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{8} - 1\right) = \frac{7}{48}$.

Cách 2 : $\int \frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{1}{2}\int u^{-2}du = \frac{1}{2}\frac{u^{-3}}{-3} = -\frac{1}{6u^3} + C = -\frac{1}{6\left(x^2+1\right)^3} + C$

Suy ra $\int_0^1 \frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^2} = -\left.\frac{1}{6\left(x^2+1\right)^3}\right|_0^1 = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{8} - 1\right) = \frac{7}{48}$

b) Cách 1 : $L\left(a\right) = \int_0^a xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} e^{-t}dt = \frac{1}{2}\left(\left.-e^{-t}\right|_0^{a^2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-a^2}\right)$.

Cách 2 : $\int xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^{-t}dt = \frac{1}{2}\left(-e^{-t}\right) = -\frac{1}{2}e^{-t} + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$

Suy ra $L(a)=\int_0^a xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^{a^2}=\frac{1}{2}\left(1-e^{-a^2}\right)$

Vậy $\lim\limits_{a\to+\infty}L(a)=\lim\limits_{a\to+\infty}\frac{1}{2}\left(1-e^{-a^2}\right)=\frac{1}{2}$

c) Cách 1 : Với $t=\ln x\Leftrightarrow x=e^t$, ta được $dx=e^tdt$ và $\int_1^2(\ln x)^2dx=\int_0^{\ln 2}t^2e^tdt$.

Cách 2 : Với $t=\ln x\Leftrightarrow x=e^t$, ta được $dx=e^tdt$ và $\int(\ln x)^2dx=\int t^2e^tdt$.

Với $\begin{cases}u=t^2\\dv=e^tdt\end{cases}$ thì $\begin{cases}du=2tdt\\v=e^t\end{cases}$ và $\int t^2e^tdt=t^2e^t-2\int te^tdt$.

Mà với $\begin{cases}u=t\\dv=e^tdt\end{cases}$ thì $\begin{cases}du=dt\\v=e^t\end{cases}$ và $\int te^tdt=te^t-\int e^tdt=te^t-e^t+C$.

Suy ra $\int t^2e^tdt=t^2e^t-2\left(te^t-e^t\right)+C=\left(t^2-2t+2\right)e^t+C$.

Cách 1 : $$\int_1^2(\ln x)^2dx=\int_0^{\ln 2}t^2e^tdt=\left(t^2-2t+2\right)e^t\Big|_0^{\ln 2}=\left(\ln^2 2-2\ln 2+2\right)e^{\ln 2}-2$$
$$=2\ln^2 2-4\ln 2+2$$

Cách 2 : $$\int(\ln x)^2dx=\int t^2e^tdt=\left(t^2-2t+2\right)e^t+C=\left(\ln^2 x-2\ln x+2\right)e^{\ln x}+C$$
$$=x\left(\ln^2 x-2\ln x+2\right)+C$$

Suy ra

$$\int_1^2(\ln x)^2dx=x\left(\ln^2 x-2\ln x+2\right)\Big|_1^2=2\left(\ln^2 2-2\ln 2+2\right)-2=2\ln^2 2-4\ln 2+2$$

4. Dùng công thức tích phân từng phần, tính các tích phân sau

a) $I(a)=\int_0^a xe^{-x}dx$, và $J(a)=\int_0^a x^2e^{-x}dx$.

b) $I=\int_0^\pi e^{-x}\sin x dx$.

c) $K=\int_1^2\frac{\ln x}{x}dx$ (cũng có thể đổi biến $u=\ln x$).

ĐS: a) Với $\begin{cases}u=x\\dv=e^{-x}dx\end{cases}$ thì $\begin{cases}du=dx\\v=-e^{-x}\end{cases}$ và

$$I(a)=\int_0^a xe^{-x}dx=-xe^{-x}\Big|_0^a+\int_0^a e^{-x}dx=-xe^{-x}\Big|_0^a+\left(-e^{-x}\right)\Big|_0^a=-ae^{-a}+\left(1-e^{-a}\right).$$

Với $\begin{cases}u=x^2\\dv=e^{-x}dx\end{cases}$ thì $\begin{cases}du=2xdx\\v=-e^{-x}\end{cases}$ và

$$J(a) = \int_0^a x^2e^{-x}dx = -x^2e^{-x}\Big|_0^a + 2\int_0^a xe^{-x}dx = -a^2e^{-a} + 2I(a)$$

$$= -a^2e^{-a} + 2\left(-ae^{-a} + 1 - e^{-a}\right) = \left(-a^2 - 2a - 2\right)e^{-a} + 2$$

b) Với $\begin{cases} u = \sin x \\ dv = e^{-x}dx \end{cases}$ thì $\begin{cases} du = \cos xdx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$ và

$$I = \int_0^{\pi} e^{-x}\sin xdx = -e^{-x}\sin x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^{-x}\cos xdx = \int_0^{\pi} e^{-x}\cos xdx.$$

Với $\begin{cases} u = \cos x \\ dv = e^{-x}dx \end{cases}$ thì $\begin{cases} du = -\sin xdx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$ và

$$I = \int_0^{\pi} e^{-x}\cos xdx = -e^{-x}\cos x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-x}\sin xdx = 1 + e^{-\pi} - I.$$

Suy ra $2I = 1 + e^{-\pi}$ và do đó $I = \frac{1+e^{-\pi}}{2}$.

c) Với $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{dx}{x} \end{cases}$ thì $\begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \ln x \end{cases}$ và

$$K = \int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx = \left(\ln x\right)^2\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx = \left(\ln 2\right)^2 - K.$$

Suy ra $K = \dfrac{\ln^2 2}{2}$.

Cách khác : Đổi biến $t = \ln x$, $dt = \frac{dx}{x}$, ta được

$$K = \int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx = \int_0^{\ln 2} tdt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^{\ln 2} = \frac{\ln^2 2}{2}.$$

5. Xác định a và b sao cho

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

Tính $I = \int_1^3 \dfrac{dx}{x(x+1)}$.

ĐS: Đẳng thức $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{(a+b)x + a}{x(x+1)}$ đúng với mọi x khi

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}.$$

Vậy $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$. Suy ra

$$I = \int_1^3 \frac{dx}{x(x+1)} = \int_1^3 \frac{dx}{x} - \int_1^3 \frac{dx}{x+1} = \ln x\Big|_1^3 - \left(\ln(x+1)\Big|_1^3\right) = \ln 3 - (\ln 4 - \ln 2)$$

$$= \ln 3 - \ln 4 + \ln 2 = \ln \tfrac{6}{4} = \ln \tfrac{3}{2}$$

6. Tính các tích phân sau

a) $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$. b) $\int_0^1 xe^{-x^2} dx$.

c) $\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} dx$. d) $\int_0^{1/2} \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

ĐS: a) Với $t = \frac{1}{x}$, $dt = -\frac{dx}{x^2}$, ta được

$$\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx = -\int_1^{\frac{1}{2}} e^t dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 e^t dt = e^t\Big|_{\frac{1}{2}}^1 = e^{\frac{1}{2}} - e = \sqrt{e} - e$$

b) Với $t = x^2$, $dt = 2xdx$, ta được

$$\int_0^1 xe^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-t} dt = \frac{1}{2}\left(-e^{-t}\Big|_0^1\right) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-1}\right)$$

c) Với $t = \ln x$, $dt = \frac{dx}{x}$, ta được

$$\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \int_{\ln e}^{\ln e^4} t^{-\frac{1}{2}} dt = 2t^{\frac{1}{2}}\Big|_1^4 = 2\left(\sqrt{4} - 1\right) = 2$$

7. Xét hàm số f từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$ cho bởi

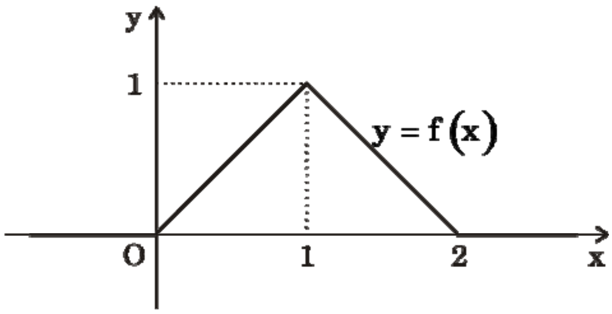
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{khi } x \in [0,1] \\ 2 - x & \text{khi } x \in (1,2] \\ 0 & \text{khi } x \notin [0,2] \end{cases}$$

Vẽ đồ thị hàm f. Kiểm chứng rằng

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ (f được gọi là một hàm *phân phối xác suất*).

Tính $E = \int_0^2 xf(x) dx$ (E được gọi là *kỳ vọng* hay *trung bình* của hàm phân phối xác suất f).

ĐS: Đồ thị



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{+\infty} f(x)dx$$

$$= \int_{0}^{1} xdx + \int_{1}^{2}(2-x)dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{2} + \left[\left(4 - \frac{2^2}{2}\right) - \left(2 - \frac{1}{2}\right)\right] = 1$$

$$E = \int_{0}^{2} xf(x)dx = \int_{0}^{1} x^2dx + \int_{1}^{2} x(2-x)dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \left(2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{3} + \left[\left(4 - \frac{8}{3}\right) - \left(2 - \frac{1}{3}\right)\right] = 0$$

8. Tính các tích phân suy rộng

a) $I = \int\limits_{1}^{\infty} xe^{x^2}dx$ b) $I = \int\limits_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

c) $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$ d) $I = \int\limits_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$

e) $I = \int\limits_{e}^{\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$ f) $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+6x+11}$

g) $I = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-2x}\cos xdx$ h) $I = \int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

i) $I = \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ j) $I = \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+x^4}$

k) $I = \int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\ln^3 x}$ l) $I = \int\limits_{1/3}^{2/3} \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}}$

ĐS: a) Với $t = x^2$, $dt = 2xdx$, ta có $\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$.

Suy ra $\int\limits_{1}^{t} xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_1^t = \frac{1}{2}\left(e^{t^2} - e\right)$ và

$$I = \int_1^{\infty} xe^{x^2}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t xe^{x^2}dx = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2}\left(e^{t^2} - e\right) = +\infty$$

b) Với $x = \frac{1}{\cos t}$, $dx = -\frac{\sin t}{\cos^2 t}$, $x^2 - 1 = \frac{1}{\cos^2 t} - 1 = \frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t} = \tan^2 t$, ta có

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{-\frac{\sin t dt}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\cos t}\tan t} = \int -dt = -t + C = -\arccos\tfrac{1}{x} + C.$$

Suy ra $\int_{\sqrt{2}}^{t}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\arccos\tfrac{1}{x}\Big|_{\sqrt{2}}^{t} = \arccos\tfrac{1}{\sqrt{2}} - \arccos\tfrac{1}{t} = \tfrac{\pi}{4} - \arccos\tfrac{1}{t}$ và

$$I = \int_{\sqrt{2}}^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \lim_{t\to+\infty}\int_{\sqrt{2}}^{t}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \lim_{t\to+\infty}\left(\tfrac{\pi}{4} - \arccos\tfrac{1}{t}\right) = \tfrac{\pi}{4}.$$

c) $x^2 + 4x + 9 = (x+2)^2 + 5 = 5\left[\left(\tfrac{x+2}{\sqrt{5}}\right)^2 + 1\right]$ cho $\int\frac{dx}{x^2+4x+9} = \frac{1}{5}\int\frac{dx}{\left(\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right)^2+1}$.

Với $t = \tfrac{x+2}{\sqrt{5}}$, $dt = \tfrac{dx}{\sqrt{5}}$, ta suy ra

$$\int\frac{dx}{x^2+4x+9} = \frac{\sqrt{5}}{5}\int\frac{dt}{1+t^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}\arctan t + C = \frac{\sqrt{5}}{5}\arctan\tfrac{x+2}{\sqrt{5}} + C \text{ và}$$

$$\int_s^t\frac{dx}{x^2+4x+9} = \frac{\sqrt{5}}{5}\arctan\tfrac{x+2}{\sqrt{5}}\Big|_s^t = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\arctan\tfrac{t+2}{\sqrt{5}} - \arctan\tfrac{s+2}{\sqrt{5}}\right)$$

Vậy $I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9} = \lim_{\substack{t\to+\infty\\ s\to-\infty}}\int_s^t\frac{dx}{x^2+4x+9} = \lim_{\substack{t\to+\infty\\ s\to-\infty}}\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\arctan\tfrac{t+2}{\sqrt{5}} - \arctan\tfrac{s+2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{\pi\sqrt{5}}{5}$

d) $x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4 = 4\left[\left(\tfrac{x+1}{2}\right)^2 + 1\right]$ cho $\int\frac{dx}{x^2+2x+5} = \frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}$.

Với $t = \tfrac{x+1}{2}$, $dt = \tfrac{dx}{2}$, ta suy ra

$$\int\frac{dx}{x^2+2x+5} = \frac{2}{4}\int\frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\arctan t + C = \frac{1}{2}\arctan\tfrac{x+1}{2} + C \text{ và}$$

$$\int_{-1}^t\frac{dx}{x^2+2x+5} = \frac{1}{2}\arctan\tfrac{x+1}{2}\Big|_{-1}^t = \frac{1}{2}\left(\arctan\tfrac{t+1}{2} - \arctan 0\right)$$

Vậy $I = \int_{-1}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5} = \lim_{t\to+\infty}\int_{-1}^t\frac{dx}{x^2+2x+5} = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2}\arctan\tfrac{t+1}{2} = \frac{\pi}{4}$

e) Với $t = \ln x$, $dt = \tfrac{dx}{x}$, ta có $\int\frac{dx}{x\ln^3 x} = \int\frac{dt}{t^3} = \frac{t^{-3+1}}{-3+1} + C = -\frac{1}{2t^2} + C = -\frac{1}{2\ln^2 x} + C$ và

$$\int_e^t \frac{dx}{x\ln^3 x} = -\frac{1}{2\ln^2 x}\Big|_e^t = \frac{1}{2\ln^2 e} - \frac{1}{2\ln^2 t} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\ln^2 t}.$$

Suy ra $I = \int_e^{\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim_{t\to+\infty}\int_e^t \frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\ln^2 t}\right) = \frac{1}{2}$.

f) $x^2 + 6x + 11 = (x+3)^2 + 2 = 2\left[\left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1\right]$ cho $\int \frac{dx}{x^2+6x+11} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}$.

Với $t = \frac{x+3}{\sqrt{2}}$, $dt = \frac{dx}{\sqrt{2}}$, ta suy ra

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+11} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\arctan t + C = \frac{1}{2}\arctan\frac{x+3}{\sqrt{2}} + C \text{ và}$$

$$\int_s^t \frac{dx}{x^2+6x+11} = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{x+3}{\sqrt{2}}\Big|_s^t = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\arctan\frac{t+3}{\sqrt{2}} - \arctan\frac{s+3}{\sqrt{2}}\right)$$

Vậy $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+6x+11} = \lim_{\substack{t\to+\infty \\ s\to-\infty}} \int_s^t \frac{dx}{x^2+6x+11} = \lim_{\substack{t\to+\infty \\ s\to-\infty}} \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\arctan\frac{t+3}{\sqrt{2}} - \arctan\frac{s+3}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$

g) Với $\begin{cases} u = e^{-2x} \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -2e^{-2x}dx \\ v = \sin x \end{cases}$, ta có

$$\int e^{-2x}\cos x dx = e^{-2x}\sin x + 2\int e^{-2x}\sin x dx.$$

Với $\begin{cases} u = e^{-2x} \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -2e^{-2x}dx \\ v = -\cos x \end{cases}$, ta có

$$\int e^{-2x}\sin x dx = -e^{-2x}\cos x - 2\int e^{-2x}\cos x dx.$$

Suy ra $\int e^{-2x}\cos x dx = e^{-2x}\sin x + 2\left[-e^{-2x}\cos x - 2\int e^{-2x}\cos x dx\right]$ nên

$5\int e^{-2x}\cos x dx = e^{-2x}\sin x - 2e^{-2x}\cos x + C$, nghĩa là

$$\int e^{-2x}\cos x dx = \frac{1}{5}\left(e^{-2x}\sin x - 2e^{-2x}\cos x\right) + C.$$

Vậy $\int_0^t e^{-2x}\cos x dx = \frac{1}{5}\left(e^{-2x}\sin x - 2e^{-2x}\cos x\right)\Big|_0^t = \frac{1}{5}\left(e^{-2t}\sin t - 2e^{-2t}\cos t\right) + \frac{2}{5}$ và

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-2x}\cos x dx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t e^{-2x}\cos x dx = \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{5}\left(e^{-2t}\sin t - 2e^{-2t}\cos t\right) + \frac{2}{5}\right]$$

Vì $\left|e^{-2t}\sin t - 2e^{-2t}\cos t\right| \le e^{-2t}\left(|\sin t| + 2|\cos t|\right) \le 3e^{-2t} \to 0$ khi $t \to +\infty$, ta suy ra

$\lim\limits_{t\to+\infty}\left(e^{-2t}\sin t - 2e^{-2t}\cos t\right) = 0$ và do đó

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-2x}\cos x dx = \frac{2}{5}.$$

h) Với $t = \ln x$, $dt = \frac{dx}{x}$, ta có

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \int \frac{dt}{t^{1/2}} = \frac{t^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1} + C = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{\ln x} + C.$$

Với $t > 1$, ta có $\int_t^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = 2\sqrt{\ln x}\Big|_t^e = 2\left(\sqrt{\ln e} - \sqrt{\ln t}\right) = 2\left(1 - \sqrt{\ln t}\right)$.

Suy ra $I = \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim\limits_{t\downarrow 1}\int_t^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim\limits_{t\downarrow 1} 2\left(1 - \sqrt{\ln t}\right) = 2$

i) Ta có $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x + C$. Với $0 < t < 1$, ta có

$$\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x\Big|_0^t = \arccos t - \arccos 0 = \arccos t - \tfrac{\pi}{2}$$

Suy ra $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{t\uparrow 1}\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{t\uparrow 1}\left(\arccos t - \tfrac{\pi}{2}\right) = \arccos 1 - \tfrac{\pi}{2} = -\tfrac{\pi}{2}$.

j) Do $\frac{1}{x^2+x^4} = \frac{1}{x^2\left(1+x^2\right)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}$, ta suy ra

$\int \frac{dx}{x^2+x^4} = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{x} - \arctan x + C$. Do đó, với $0 < t < 1$,

$\int_t^1 \frac{dx}{x^2+x^4} = -\frac{1}{x} - \arctan x\Big|_t^1 = \left(-1 - \tfrac{\pi}{4}\right) - \left(-\frac{1}{t} - \arctan t\right) = \frac{1}{t} + \arctan t - 1 - \tfrac{\pi}{4}$ và

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x^4} = \lim_{t\downarrow 0}\int_t^1 \frac{dx}{x^2+x^4} = \lim_{t\downarrow 0}\left(\frac{1}{t} + \arctan t - 1 - \tfrac{\pi}{4}\right) = +\infty$$

k) Với $t = \ln x$, $dt = \frac{dx}{x}$, ta có $\int \frac{dx}{x\ln^3 x} = \int \frac{dt}{t^3} = \frac{t^{-3+1}}{-3+1} + C = -\frac{1}{2t^2} + C = -\frac{1}{2\ln^2 x} + C$.

Suy ra, với $1 < t < e$, $\int_t^e \frac{dx}{x\ln^3 x} = -\frac{1}{2\ln^2 x}\Big|_t^e = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ln^2 e} - \frac{1}{\ln^2 t}\right) = \frac{1}{2\ln^2 t} - \frac{1}{2}$ và

$$I = \int_1^e \frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim_{t\downarrow 1}\int_t^e \frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim_{t\downarrow 1}\left(\frac{1}{2\ln^2 t} - \frac{1}{2}\right) = +\infty$$

l) Với $x = \frac{1}{3\cos t}$, $9x^2 - 1 = \frac{1}{\cos^2 t} - 1 = \tan^2 t$, $dx = \frac{\sin t dt}{3\cos^2 t}$, ta suy ra

$\int \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}} = \int \frac{\frac{\sin t dt}{3\cos^2 t}}{\frac{1}{3\cos t}\tan t} = \int dt = t + C = \arccos 3x + C$ và với $\frac{1}{3} < t < \frac{2}{3}$,

$\int_t^{2/3} \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}} = \arccos 3x\Big|_t^{\frac{2}{3}} = \arccos 2 - \arccos 3t$,

$I = \int_{1/3}^{2/3} \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}} = \lim_{t\downarrow\frac{1}{3}} \int_t^{2/3} \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}} = \lim_{t\downarrow\frac{1}{3}}\left(\arccos 2 - \arccos 3t\right) = \arccos 2 - \arccos 1$
$= \arccos 2$