Bài tập

1. Khảo sát sự hội tụ của dãy số (u_n) xác định bởi

a) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,

b) $u_n = 5 - \frac{8}{5}n$,

c) $u_n = \dfrac{2n+1}{n^2+1}$,

d) $u_n = \dfrac{n^4+1}{n+2^n}$,

e) $u_n = \sqrt[3]{n^3+n} - \sqrt[3]{n^3-n}$,

f) $u_n = \dfrac{3^n+n^2}{n^3+2^n}$,

g) $u_n = \dfrac{n+\sqrt[3]{n^6+1}}{3n^2+1}$.

ĐS: a) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to 0$

b) $u_n = n\left(\frac{5}{n} - \frac{8}{5}\right) \to -\infty$

c) $u_n = \dfrac{n}{n^2}\dfrac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} \to 0$

d) $u_n = \dfrac{n^4}{2^n}\dfrac{1+\frac{1}{n^4}}{\frac{n^3}{2^n}+1} \to 0$

e) $$u_n = \frac{\left(n^3+n^2\right)-\left(n^3-n^2\right)}{\left(\sqrt[3]{n^3+n^2}\right)^2 + \sqrt[3]{n^3+n^2}\sqrt[3]{n^3-n^2}\left(\sqrt[3]{n^3-n^2}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}\right)^2 + \sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}}\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}}\right)^2} \to \frac{2}{3}$$

f) $u_n = \dfrac{3^n}{2^n}\dfrac{1+\frac{n^2}{3^n}}{\frac{n^3}{2^n}+1} \to +\infty$

g) $u_n = \dfrac{\frac{1}{n}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^6}}}{3+\frac{1}{n^2}} \to \dfrac{1}{3}$

2. Khảo sát sự hội tụ của dãy (u_n) xác định bởi

a) $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) $u_1 = 2$ và $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left[u_n + \frac{2}{u_n}\right]$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

ĐS: a) $u_1 = 1$; $u_2 = \sqrt{1+u_1} = \sqrt{2}$ nên $u_1 \le u_2$. Giả sử $u_n \le u_{n+1}$. Ta có

$u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \le \sqrt{1+u_{n+1}} = u_{n+2}$.

Vậy $(u_n)\uparrow$.

Ta chứng minh $u_n \le 2$, với mọi $n \in \mathbb{N}$: do $u_1 \le 2$ và nếu $u_n \le 2$ thì

$u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \le \sqrt{1+2} \le 2$.

(u_n) tăng và bị chặn nên hội tụ. Đặt $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$. Cho $n \to \infty$ trong đẳng thức $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$, ta được $u = \sqrt{1+u} \Leftrightarrow u \ge 0$ và $u^2 - u - 1 = 0$.

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

a) Chú ý rằng hàm $f(x) = \frac{1}{2}\left[x + \frac{2}{x}\right]$ có đạo hàm $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-2}{2x^2} \le 0$ khi $x \ge \sqrt{2}$. Do đó f là hàm giảm trên miền $\left[\sqrt{2}, +\infty\right)$, nghĩa là nếu $\sqrt{2} \le x \le y$ thì $f(x) \le f(y)$.

Trước hết ta chứng minh $u_n \ge \sqrt{2}$, với mọi $n \in \mathbb{N}$: do $u_2 = 2 \ge \sqrt{2}$ và nếu $u_n \ge \sqrt{2}$ thì $u_{n+1} = f(u_n) \ge f(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right] = \sqrt{2}$.

Vậy $u_n \in \left[\sqrt{2}, +\infty\right)$, với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Ta chứng minh (u_n) là dãy giảm : $u_1 = 2$; $u_2 = \frac{1}{2}\left[u_1 + \frac{2}{u_1}\right] = \frac{3}{2}$ nên $u_1 \ge u_2$. Giả sử $u_n \ge u_{n+1}$. Ta có

$u_{n+1} = f(u_n) \ge f(u_{n+1}) = u_{n+2}$.

(u_n) giảm và bị chặn nên hội tụ. Đặt $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$. Cho $n \to \infty$ trong đẳng thức $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left[u_n + \frac{2}{u_n}\right]$, ta được $u = \frac{1}{2}\left[u + \frac{2}{u}\right] \Leftrightarrow \frac{u}{2} = \frac{1}{u} \Leftrightarrow u \ne 0 \wedge u^2 = 2$. Vì $u > 0$, ta suy ra $u = \sqrt{2}$.

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u = \sqrt{2}$.

3. Tìm tổng riêng và tổng (nếu có) của các chuỗi số:

a. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ b. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{3^n}$

c. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ d. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{6^n}$

ĐS: a) Do $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, ta được

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1-\tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}\right) + \dots + \left(\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \tfrac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \to 1$$

khi $n \to \infty$, ta suy ra $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\tfrac{1}{3}\right)^n$$

$$= 2\frac{1}{1-\frac{1}{3}} + \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = 3 + \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$$

c) Do $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$, ta được

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{1^2\cdot 2^2} + \frac{1}{2^2\cdot 3^2} + \dots + \frac{1}{n^2(n+1)^2}$$

$$= \left(1-\tfrac{1}{2^2}\right) + \left(\tfrac{1}{2^2}-\tfrac{1}{3^2}\right) + \dots + \left(\tfrac{1}{n^2}-\tfrac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$= 1 - \tfrac{1}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n}{(n+1)^2} = \frac{1+\frac{2}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} \to 1$$

khi $n \to \infty$, ta suy ra $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2} = 1$.

d) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{6^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$$

4. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{3^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+1}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{1+2^n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+1}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2n^2}{1+2n^3}$

ĐS: a) Dùng tiêu chuẩn d'Alembert, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{(n+1)^2+1}{3^{n+1}}}{\frac{n^2+1}{3^n}} = \frac{1}{3}\frac{(n+1)^2+1}{n^2+1} \to \frac{1}{3} < 1$.

Chuỗi hội tụ.

b) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$ nên $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ phân kỳ.

c) Dùng tiêu chuẩn so sánh. Do $\frac{2n+1}{n^2+1} = \frac{1}{n}\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}$, ta suy ra $\frac{\frac{2n+1}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} \to 2$ khi $n \to \infty$ nên hai chuỗi $\sum \frac{2n+1}{n^2+1}$ và $\sum \frac{1}{n}$ cùng bản chất là chuỗi phân kỳ.

d) Dùng tiêu chuẩn D'Alembert

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^3}{1+2^{n+1}}}{\frac{n^3}{1+2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3(1+2^n)}{n^3(1+2^{n+1})} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3\left(\frac{1}{2^n}+1\right)}{\frac{1}{2^n}+2} = \frac{1}{2} < 1$$

nên $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3}{1+2^n}$ hội tụ.

e) Dùng tiêu chuẩn so sánh. Do $\frac{n+1}{n^3+1} = \frac{1}{n^2}\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^3}}$, ta suy ra $\frac{\frac{n+1}{n^3+1}}{\frac{1}{n^2}} \to 1$ khi $n \to \infty$ nên hai chuỗi $\sum \frac{n+1}{n^3+1}$ và $\sum \frac{1}{n^2}$ cùng bản chất là chuỗi hội tụ.

f) Do $\frac{n^3+2n^2}{1+2n^3} \to \frac{1}{2} \neq 0$ kh $n \to \infty$, ta suy ra $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2n^2}{1+2n^3}$ là chuỗi phân kỳ.