

Compilation d'exercices sur les suites. (Hors spécialité)

Polynésie 7 juin 2013 Exercice 4 :

5 points

Candidats n'ayant pas suivis l'enseignement de spécialité mathématiques

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1 + 2u_n}$$

1.
 - a. Calculer u_1 et u_2 .
 - b. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , $0 < u_n$.
2. On admet que pour tout entier naturel n , $u_n < 1$.
 - a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
 - b. Démontrer que la suite (u_n) converge.
3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = \frac{u_n}{1 - u_n}$.
 - a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.
 - b. Exprimer pour tout entier naturel n , v_n en fonction de n .
 - c. En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{3^n}{3^n + 1}$.
 - d. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Pondichéry avril 2017 EXERCICE 4
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

5 points

On considère deux suites (u_n) et (v_n) :

- la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$;
- la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = 2^n$.

Partie A : Conjectures

Florent a calculé les premiers termes de ces deux suites à l'aide d'un tableur. Une copie d'écran est donnée ci-dessous.

	A	B	C
1	rang n	terme u_n	terme v_n
2	0	1	1
3	1	5	2
4	2	12	4
5	3	25	8
6	4	50	16

- Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir par copie vers le bas les termes des deux suites?
- Pour les termes de rang 10, 11, 12 et 13 Florent obtient les résultats suivants :

12	10	3 080	1 024
13	11	6 153	2 048
14	12	12 298	4 096
15	13	24 587	8 192

Conjecturer les limites des suites (u_n) et $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.

Partie B : Étude de la suite (u_n)

- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$.
- Déterminer la limite de la suite (u_n) .
- Déterminer le rang du premier terme de la suite supérieur à 1 million.

Partie C : Étude de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$

- Démontrer que la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3.
- On admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 4, on a : $0 < \frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n}$.
 Déterminer la limite de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1 + 3u_n}{3 + u_n}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n > 1$.
2. a. Établir que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} - u_n = \frac{(1 - u_n)(1 + u_n)}{3 + u_n}$.
- b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .
En déduire que la suite (u_n) converge.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1 + 0,5u_n}{0,5 + u_n}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Soit un entier naturel non nul n
Initialisation	Affecter à u la valeur 2
Traitement et sortie	POUR i allant de 1 à n
	Affecter à u la valeur $\frac{1 + 0,5u}{0,5 + u}$
	Afficher u
	FIN POUR

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $n = 3$. Les valeurs de u seront arrondies au millièmes.

i	1	2	3
u			

2. Pour $n = 12$, on a prolongé le tableau précédent et on a obtenu :

i	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u	1,008 3	0,997 3	1,000 9	0,999 7	1,000 1	0,999 97	1,000 01	0,999 996	1,000 001

Conjecturer le comportement de la suite (u_n) à l'infini.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$.
 - a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.
 - b. Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n .
4. a. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $v_n \neq 1$.
 - b. montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$.
 - c. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Centres étrangers 12 juin 2013 EXERCICE 4
Candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématique

5 points

L'objet de cet exercice est l'étude de la suite (u_n) définie par son premier terme

$$u_1 = \frac{3}{2} \text{ et la relation de récurrence : } u_{n+1} = \frac{nu_n + 1}{2(n+1)}.$$

Partie A - Algorithmique et conjectures

Pour calculer et afficher le terme u_9 de la suite, un élève propose l'algorithme ci-contre. Il a oublié de compléter deux lignes.

Variables	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur 1,5
Traitement	Tant que $n < 9$ Affecter à u la valeur ... Affecter à n la valeur ... Fin Tant que
Sortie	Afficher la variable u

1. Recopier et compléter les deux lignes de l'algorithme où figurent des points de suspension.
2. Comment faudrait-il modifier cet algorithme pour qu'il calcule et affiche tous les termes de la suite de u_2 jusqu'à u_9 ?
3. Avec cet algorithme modifié, on a obtenu les résultats suivants, arrondis au dix-millième :

n	1	2	3	4	5	6	...	99	100
u_n	1,5	0,625	0,375	0,2656	0,2063	0,1693	...	0,0102	0,0101

Au vu de ces résultats, conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) .

Partie B - Étude mathématique

On définit une suite auxiliaire (v_n) par : pour tout entier $n \geq 1$, $v_n = nu_n - 1$.

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
2. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $u_n = \frac{1 + (0,5)^n}{n}$.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
4. Justifier que, pour tout entier $n \geq 1$, on a : $u_{n+1} - u_n = -\frac{1 + (1 + 0,5n)(0,5)^n}{n(n+1)}$.
En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

Partie C - Retour à l'algorithmique

En s'inspirant de la partie A, écrire un algorithme permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier n tel que $u_n < 0,001$.

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit la suite numérique (u_n) définie sur \mathbf{N} par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1.$$

1. a. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 . On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.
- b. Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.
2. a. Démontrer que pour tout entier naturel n ,

$$u_n \leq n + 3.$$

- b. Démontrer que pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n).$$

- c. En déduire une validation de la conjecture précédente.
3. On désigne par (v_n) la suite définie sur \mathbf{N} par $v_n = u_n - n$.
 - a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.
 - b. En déduire que pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$$

- c. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
4. Pour tout entier naturel non nul n , on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n \quad \text{et} \quad T_n = \frac{S_n}{n^2}.$$

- a. Exprimer S_n en fonction de n .
- b. Déterminer la limite de la suite (T_n) .

Métropole 12 septembre 2013 EXERCICE 4
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

5 points

On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1}.$$

On admet que pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.

1.
 - a. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 . On pourra en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
 - b. Vérifier que si n est l'un des entiers 0, 1, 2, 3, 4 alors $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.
 - c. Établir que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - 1 = \frac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$.
 - d. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.
2. Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$.
 - a. Établir que pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = \frac{-u_n + 1}{3u_n + 3}$.
 - b. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.
En déduire l'expression de v_n en fonction de n .
 - c. On admet que pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$.
Exprimer u_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (u_n) .

Nouvelle-Calédonie 14 novembre 2013 EXERCICE 2
Commun à tous les candidats

5 points

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

PARTIE A

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	N est un entier U, V, W sont des réels K est un entier
Début :	Affecter 0 à K Affecter 2 à U Affecter 10 à V Saisir N Tant que $K < N$ Affecter $K + 1$ à K Affecter U à W Affecter $\frac{2U + V}{3}$ à U Affecter $\frac{W + 3V}{4}$ à V Fin tant que Afficher U Afficher V
Fin	

On exécute cet algorithme en saisissant $N = 2$. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous donnant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

K	W	U	V
0			
1			
2			

PARTIE B

1. a. Montrer que pour tout entier naturel n , $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{12} (v_n - u_n)$.
b. Pour tout entier naturel n on pose $w_n = v_n - u_n$.
Montrer que pour tout entier naturel n , $w_n = 8 \left(\frac{5}{12} \right)^n$.
2. a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.
b. Dédire des résultats des questions 1. b. et 2. a. que pour tout entier naturel n on a $u_n \leq 10$ et $v_n \geq 2$.
c. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.
3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite.
4. Montrer que la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est constante.
En déduire que la limite commune des suites (u_n) et (v_n) est $\frac{46}{7}$.

Amérique du Nord 30 mai 2014 Exercice 4
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

5 points

Un volume constant de $2\,200\text{ m}^3$ d'eau est réparti entre deux bassins A et B.
 Le bassin A refroidit une machine. Pour des raisons d'équilibre thermique on crée un courant d'eau entre les deux bassins à l'aide de pompes.

On modélise les échanges entre les deux bassins de la façon suivante :

- au départ, le bassin A contient 800 m^3 d'eau et le bassin B contient $1\,400\text{ m}^3$ d'eau;
- tous les jours, 15 % du volume d'eau présent dans le bassin B au début de la journée est transféré vers le bassin A;
- tous les jours, 10 % du volume d'eau présent dans le bassin A au début de la journée est transféré vers le bassin B.

Pour tout entier naturel n , on note :

- a_n le volume d'eau, exprimé en m^3 , contenu dans le bassin A à la fin du n -ième jour de fonctionnement;
- b_n le volume d'eau, exprimé en m^3 , contenu dans le bassin B à la fin du n -ième jour de fonctionnement.

On a donc $a_0 = 800$ et $b_0 = 1\,400$.

1. Par quelle relation entre a_n et b_n traduit-on la conservation du volume total d'eau du circuit?
2. Justifier que, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 330$.
3. L'algorithme ci-dessous permet de déterminer la plus petite valeur de n à partir de laquelle a_n est supérieur ou égal à $1\,100$.

Recopier cet algorithme en complétant les parties manquantes.

Variables	: n est un entier naturel a est un réel
Initialisation	: Affecter à n la valeur 0 Affecter à a la valeur 800
Traitement	: Tant que $a < 1\,100$, faire : Affecter à a la valeur ... Affecter à n la valeur ... Fin Tant que
Sortie	: Afficher n

4. Pour tout entier naturel n , on note $u_n = a_n - 1\,320$.
 - a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - b. Exprimer u_n en fonction de n .

En déduire que, pour tout entier naturel n , $a_n = 1\,320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

5. On cherche à savoir si, un jour donné, les deux bassins peuvent avoir, au mètre cube près, le même volume d'eau.
 Proposer une méthode pour répondre à ce questionnement.

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 0 \text{ et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = u_n + 2n + 2.$$

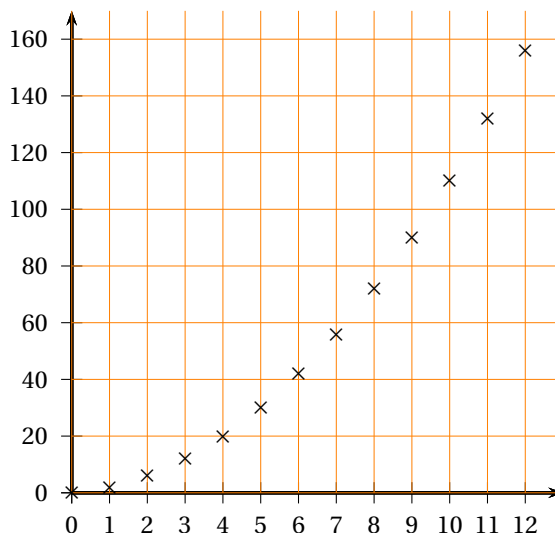
1. Calculer u_1 et u_2 .
2. On considère les deux algorithmes suivants :

Algorithme 1	Algorithme 2
Variables : n est un entier naturel u est un réel	Variables : n est un entier naturel u est un réel
Entrée : Saisir la valeur de n	Entrée : Saisir la valeur de n
Traitement : u prend la valeur 0 Pour i allant de 1 à n : u prend la valeur $u + 2i + 2$ Fin Pour	Traitement : u prend la valeur 0 Pour i allant de 0 à $n - 1$: u prend la valeur $u + 2i + 2$ Fin Pour
Sortie : Afficher u	Sortie : Afficher u

De ces deux algorithmes, lequel permet d'afficher en sortie la valeur de u_n , la valeur de l'entier naturel n étant entrée par l'utilisateur ?

3. À l'aide de l'algorithme, on a obtenu le tableau et le nuage de points ci-dessous où n figure en abscisse et u_n en ordonnée.

n	u_n
0	0
1	2
2	6
3	12
4	20
5	30
6	42
7	56
8	72
9	90
10	110
11	132
12	156



- a. Quelle conjecture peut-on faire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?
Démontrer cette conjecture.
- b. La forme parabolique du nuage de points amène à conjecturer l'existence de trois réels a, b et c tels que, pour tout entier naturel n , $u_n = an^2 + bn + c$.
Dans le cadre de cette conjecture, trouver les valeurs de a, b et c à l'aide des informations fournies.
4. On définit, pour tout entier naturel n , la suite (v_n) par : $v_n = u_{n+1} - u_n$.
 - a. Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n . Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
 - b. On définit, pour tout entier naturel n , $S_n = \sum_{k=0}^n v_k = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.
Démontrer que, pour tout entier naturel n , $S_n = (n+1)(n+2)$.
 - c. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $S_n = u_{n+1} - u_0$, puis exprimer u_n en fonction de n .

Métropole 11 septembre 2014 : Exercice 3**5 points****Candidats N'AYANT PAS SUIVI l'enseignement de spécialité mathématiques***Traiter la question 1. c. à la calculatrice sans justification en début d'année (avant le logarithme).*

On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse. La quantité de médicament dans le sang diminue en fonction du temps.

Le but de l'exercice est d'étudier pour différentes hypothèses, l'évolution de cette quantité minute par minute.

1. On effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Pour tout entier naturel n , on note u_n la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang au bout de n minutes. Ainsi $u_0 = 10$.

- Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
- Pour tout entier naturel n , donner l'expression de u_n en fonction de n .
- Au bout de combien de temps la quantité de médicament restant dans le sang devient-elle inférieure à 1 % de la quantité initiale ? Justifier la réponse.

2. Une machine effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Lorsque la quantité de médicament tombe en-dessous de 5 mL, la machine réinjecte 4 mL de produit.

Au bout de 15 minutes, on arrête la machine.

Pour tout entier naturel n , on note v_n la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang à la minute n .

L'algorithme suivant donne la quantité restante de médicament minute par minute.

Variables :	n est un entier naturel. v est un nombre réel.
Initialisation :	Affecter à v la valeur 10.
Traitement :	Pour n allant de 1 à 15 Affecter à v la valeur $0,8 \times v$. Si $v < 5$ alors affecter à v la valeur $v + 4$ Afficher v . Fin de boucle.

- a. Calculer les éléments manquants du tableau ci-dessous donnant, arrondie à 10^{-2} et pour n supérieur ou égal à 1, la quantité restante de médicament minute par minute obtenue avec l'algorithme.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
v_n	10	8	6,4					8,15	6,52	5,21	8,17	6,54	5,23	8,18	6,55	5,24

- Au bout de 15 minutes, quelle quantité totale de médicament a été injectée dans l'organisme ?
- On souhaite programmer la machine afin qu'elle injecte 2 mL de produit lorsque la quantité de médicament dans le sang est inférieure ou égale à 6 mL et qu'elle s'arrête au bout de 30 minutes.

Recopier l'algorithme précédent en le modifiant pour qu'il affiche la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang minute par minute avec ce nouveau protocole.

3. On programme la machine de façon que :

— à l'instant 0, elle injecte 10 mL de médicament,

— toutes les minutes, elle injecte 1 mL de médicament.

On estime que 20 % du médicament présent dans le sang est éliminé par minute.

Pour tout entier naturel n , on note w_n la quantité de médicament, en mL, présente dans le sang du patient au bout de n minutes.

- a. Justifier que pour tout entier naturel n , $w_{n+1} = 0,8w_n + 1$.
- b. Pour tout entier naturel n , on pose $z_n = w_n - 5$.
Démontrer que (z_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- c. En déduire l'expression de w_n en fonction de n .
- d. Quelle est la limite de la suite (w_n) ? Quelle interprétation peut-on en donner?

On considère la suite numérique (u_n) définie sur \mathbb{N} par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2}.$$

Partie A : Conjecture

1. Calculer les valeurs exactes, données en fractions irréductibles, de u_1 et u_2 .
2. Donner une valeur approchée à 10^{-5} près des termes u_3 et u_4 .
3. Conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) .

Partie B : Validation des conjectures

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n , par :

$$v_n = u_n - 3.$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $-1 \leq v_n \leq 0$.
3. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} - v_n = -v_n \left(\frac{1}{2}v_n + 1 \right)$.
b. En déduire le sens de variation de la suite (v_n) .
4. Pourquoi peut-on alors affirmer que la suite (v_n) converge?
5. On note ℓ la limite de la suite (v_n) .
 On admet que ℓ appartient à l'intervalle $[-1 ; 0]$ et vérifie l'égalité : $\ell = -\frac{1}{2}\ell^2$.
 Déterminer la valeur de ℓ .
6. Les conjectures faites dans la **partie A** sont-elles validées?

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = 5 - \frac{4}{x+2}.$$

On admettra que f est dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

On a tracé en **annexe 1** dans un repère orthonormé la courbe \mathcal{C} représentative de f ainsi que la droite \mathcal{D} d'équation $y = x$.

1. Démontrer que f est croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. On note α la solution.
On donnera la valeur exacte de α puis on en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.
Sur la figure de **annexe 1**, en utilisant la courbe \mathcal{C} et la droite \mathcal{D} , placer les points M_0, M_1 et M_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2 .
Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?
4. a. Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n ,

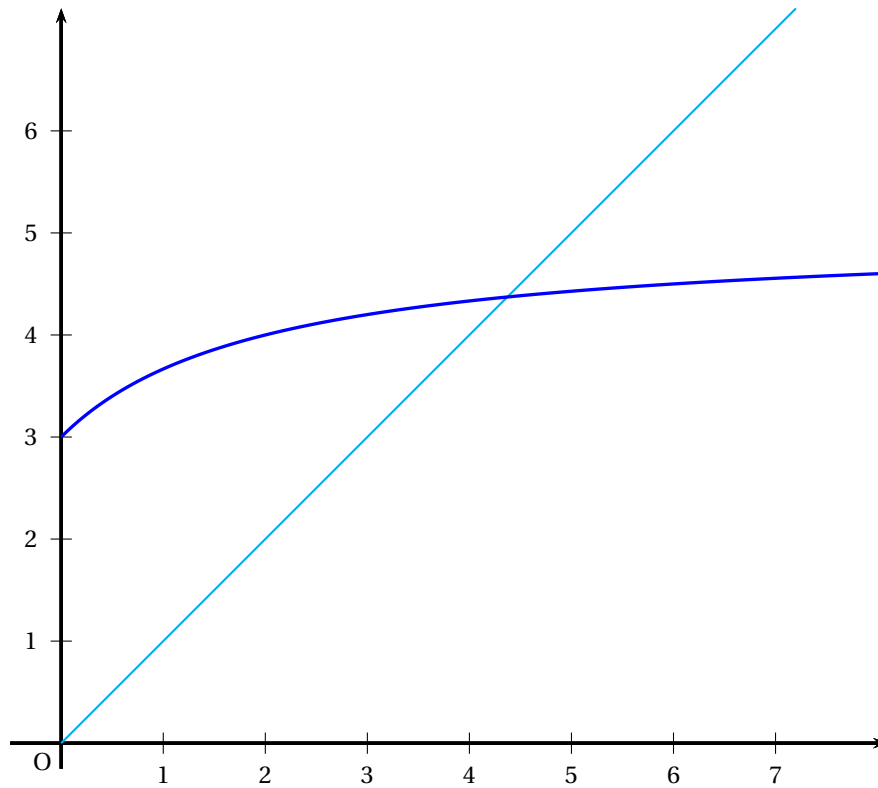
$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$$

où α est le réel défini dans la question 2.

- b. Peut-on affirmer que la suite (u_n) est convergente? On justifiera la réponse.
5. Pour tout entier naturel n , on définit la suite (S_n) par

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

- a. Calculer S_0, S_1 et S_2 . Donner une valeur approchée des résultats à 10^{-2} près.
- b. Compléter l'algorithme donné en **annexe 2** pour qu'il affiche la somme S_n pour la valeur de l'entier n demandée à l'utilisateur.
- c. Montrer que la suite (S_n) diverge vers $+\infty$.



Entrée :	n un entier naturel
Variables :	u et s sont des variables réelles n et i sont des variables entières
Initialisation :	u prend la valeur 1 s prend la valeur u i prend la valeur 0 Demander la valeur de n
Traitement :	Tant que ... Affecter à i la valeur $i + 1$ Affecter à u la valeur ... Affecter à s la valeur ... Fin Tant que
Sortie :	Afficher s .

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n , par la relation

$$u_{n+1} = au_n + b \quad (a \text{ et } b \text{ réels non nuls tels que } a \neq 1).$$

On pose, pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$.

1. Démontrer que, la suite (v_n) est géométrique de raison a .
2. En déduire que si a appartient à l'intervalle $] -1 ; 1[$, alors la suite (u_n) a pour limite $\frac{b}{1-a}$.

Partie B

En mars 2015, Max achète une plante verte mesurant 80 cm. On lui conseille de la tailler tous les ans, au mois de mars, en coupant un quart de sa hauteur. La plante poussera alors de 30 cm au cours des douze mois suivants.

Dès qu'il rentre chez lui, Max taille sa plante.

1. Quelle sera la hauteur de la plante en mars 2016 avant que Max ne la taille?
2. Pour tout entier naturel n , on note h_n la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars de l'année $(2015 + n)$.
 - a. Justifier que, pour tout entier naturel n , $h_{n+1} = 0,75h_n + 30$.
 - b. Conjecturer à l'aide de la calculatrice le sens de variations de la suite (h_n) . Démontrer cette conjecture (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).
 - c. La suite (h_n) est-elle convergente? Justifier la réponse.

Centres étrangers 10 juin 2015 exercice 3 **5 points**
Candidats N'AYANT PAS SUIVI l'enseignement de spécialité mathématiques

Soit a un nombre réel fixé non nul.

Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = a \quad \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n}.$$

On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire : $u_{n+1} = e^{u_n} (e^{u_n} - 1)$.

1. Soit g la fonction définie pour tout réel x par :

$$g(x) = e^{2x} - e^x - x.$$

- a. Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel x : $g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$.
 - b. Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.
 - c. En remarquant que $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$, étudier le sens de variation de la suite (u_n) .
2. Dans cette question, on suppose que $a \leq 0$.
- a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq 0$.
 - b. Dédire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.
 - c. Dans le cas où a vaut 0, donner la limite de la suite (u_n) .
3. Dans cette question, on suppose que $a > 0$.
 La suite (u_n) étant croissante, la question 1. permet d'affirmer que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq a$.
- a. Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} - u_n \geq g(a)$.
 - b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :
 $u_n \geq a + n \times g(a)$.
 - c. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
4. Dans cette question, on prend $a = 0,02$.

L'algorithme suivant a pour but de déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > M$, où M désigne un réel positif. Cet algorithme est incomplet.

Variables	n est un entier, u et M sont deux réels
Initialisation	u prend la valeur 0,02 n prend la valeur 0 Saisir la valeur de M
Traitement	Tant que Fin tant que
Sortie	Afficher n

- a. Sur la copie, recopier la partie « Traitement » en la complétant.
- b. À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur que cet algorithme affichera si $M = 60$.

Asie 16 juin 2015 exercice 3
Commun à tous les candidats

6 points

La partie C n'est pas traitable en début d'année.

Pour tout entier naturel n , on définit la fonction f_n pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f_n(x) = x + e^{n(x-1)}.$$

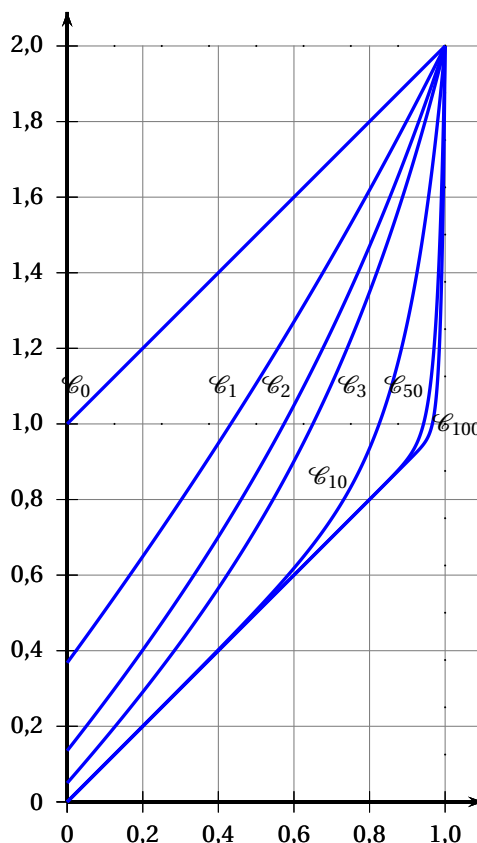
On note \mathcal{C}_n la représentation graphique de la fonction f_n dans un repère orthogonal.

Quelques-unes des courbes \mathcal{C}_n sont représentées ci-contre.

Partie A : généralités sur les fonctions f_n

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n , la fonction f_n est croissante et positive sur l'intervalle $[0; 1]$.
2. Montrer que les courbes \mathcal{C}_n ont toutes un point commun A, et préciser ses coordonnées.
3. À l'aide des représentations graphiques, peut-on conjecturer le comportement des coefficients directeurs des tangentes en A aux courbes \mathcal{C}_n pour les grandes valeurs de n ?

Démontrer cette conjecture.



Partie B : évolution de $f_n(x)$ lorsque x est fixé

Soit x un réel fixé de l'intervalle $[0; 1]$. Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = f_n(x)$.

1. Dans cette question, on suppose que $x = 1$. Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n) .
2. Dans cette question, on suppose que $0 \leq x < 1$. Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n) .

Partie C : aire sous les courbes \mathcal{C}_n

Pour tout entier naturel n , on note A_n l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine situé entre l'axe des abscisses, la courbe \mathcal{C}_n et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

À partir des représentations graphiques, conjecturer la limite de la suite (A_n) lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, puis démontrer cette conjecture.

Nouvelle-Calédonie 19 novembre 2015 exercice 4
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

5 points

On considère deux suites de nombres réels (d_n) et (a_n) définies par $d_0 = 300$, $a_0 = 450$ et, pour tout entier naturel $n \geq 0$

$$\begin{cases} d_{n+1} &= \frac{1}{2}d_n + 100 \\ a_{n+1} &= \frac{1}{2}d_n + \frac{1}{2}a_n + 70 \end{cases}$$

1. Calculer d_1 et a_1 .
2. On souhaite écrire un algorithme qui permet d'afficher en sortie les valeurs de d_n et a_n pour une valeur entière de n saisie par l'utilisateur.
 L'algorithme suivant est proposé :

<i>Variables :</i>	n et k sont des entiers naturels D et A sont des réels
<i>Initialisation :</i>	D prend la valeur 300 A prend la valeur 450 Saisir la valeur de n
<i>Traitement :</i>	Pour k variant de 1 à n D prend la valeur $\frac{D}{2} + 100$ A prend la valeur $\frac{A}{2} + \frac{D}{2} + 70$ Fin pour
<i>Sortie :</i>	Afficher D Afficher A

- a. Quels nombres obtient-on en sortie de l'algorithme pour $n = 1$?
 Ces résultats sont-ils cohérents avec ceux obtenus à la question 1. ?
 - b. Expliquer comment corriger cet algorithme pour qu'il affiche les résultats souhaités.
3. a. Pour tout entier naturel n , on pose $e_n = d_n - 200$.
 Montrer que la suite (e_n) est géométrique.
 b. En déduire l'expression de d_n en fonction de n .
 c. La suite (d_n) est-elle convergente ? Justifier.
 4. On admet que pour tout entier naturel n ,

$$a_n = 100n \left(\frac{1}{2}\right)^n + 110 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 340.$$

- a. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a $2n^2 \geq (n+1)^2$.
- b. Montrer par récurrence que pour tout entier n supérieur ou égal à 4,
 $2^n \geq n^2$.
- c. En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 4,
 $0 \leq 100n \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{100}{n}$.
- d. Étudier la convergence de la suite (a_n) .

Amérique du Sud 24 novembre 2015 exercice 4
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

5 points

Dans un pays de population constante égale à 120 millions, les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville. Les mouvements de population peuvent être modélisés de la façon suivante :

- en 2010, la population compte 90 millions de ruraux et 30 millions de citadins;
- chaque année, 10 % des ruraux émigrent à la ville;
- chaque année, 5 % des citadins émigrent en zone rurale.

Pour tout entier naturel n , on note :

- u_n la population en zone rurale, en l'année 2010 + n , exprimée en millions d'habitants;
- v_n la population en ville, en l'année 2010 + n , exprimée en millions d'habitants.

On a donc $u_0 = 90$ et $v_0 = 30$.

Partie A

1. Traduire le fait que la population totale est constante par une relation liant u_n et v_n .
2. On utilise un tableur pour visualiser l'évolution des suites (u_n) et (v_n) .
 Quelles formules peut-on saisir dans les cellules B3 et C3 qui, recopiées vers le bas, permettent d'obtenir la feuille de calcul ci-dessous :

	A	B	C
1	n	Population en zone rurale	Population en ville
2	0	90	30
3	1	82,5	37,5
4	2	76,125	43,875
5	3	70,706	49,294
6	4	66,100	53,900
7	5	62,185	57,815
8	6	58,857	61,143
9	7	56,029	63,971
10	8	53,625	66,375
11	9	51,581	68,419
12	10	49,844	70,156
13	11	48,367	71,633
14	12	47,112	72,888
15	13	46,045	73,955
16	14	45,138	74,862
17	15	44,368	75,632
18	16	43,713	76,287
19	17	43,156	76,844
20	18	42,682	77,318
21	19	42,280	77,720
22	20	41,938	78,062
...			
59	57	40,005	79,995
60	58	40,004	79,996
61	59	40,003	79,997
62	60	40,003	79,997
63	61	40,002	79,998

3. Quelles conjectures peut-on faire concernant l'évolution à long terme de cette population?

Partie B

On admet dans cette partie que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,85u_n + 6$.

1.
 - a. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.
 - b. On admet que u_n est positif pour tout entier naturel n .
Que peut-on en déduire quant à la suite (u_n) ?
2. On considère la suite (w_n) , définie par : $w_n = u_n - 40$, pour tout $n \geq 0$.
 - a. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique de raison 0,85.
 - b. En déduire l'expression de w_n puis de u_n en fonction de n .
 - c. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n .
3. Valider ou invalider les conjectures effectuées à la question 3. de la **partie A**.
4. On considère l'algorithme suivant :

Entrée :	n et u sont des nombres
Initialisation :	n prend la valeur 0 u prend la valeur 90
Traitement :	Tant que $u \geq 120 - u$ faire n prend la valeur $n + 1$ u prend la valeur $0,85 \times u + 6$ Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

- a. Que fait cet algorithme?
- b. Quelle valeur affiche-t-il?

Asie 23 juin 2016 : Exercice 3**7 points**

Commun à tous les candidats Remarque : La question 3 de la partie B ainsi que toute la partie C ne sont pas faisable en début d'année.

Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que, dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20 % en un jour.

La société met en place le dispositif industriel suivant.

Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus.

L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A : premier modèle – avec une suite

On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n) définie de la façon suivante :

$$u_0 = 1\,000 \text{ et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = 1,2u_n - 100.$$

1. a. Expliquer en quoi ce modèle correspond à la situation de l'énoncé.
On précisera en particulier ce que représente u_n .
- b. L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg. À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.
- c. On peut également utiliser l'algorithme suivant pour répondre au problème posé dans la question précédente.
Recopier et compléter cet algorithme.

Variables	u et n sont des nombres
Traitement	u prend la valeur 1 000 n prend la valeur 0 Tant que faire u prend la valeur n prend la valeur $n + 1$ Fin Tant que
Sortie	Afficher

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq 1\,000$.
- b. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
3. On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - 500$.
 - a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
 - b. Exprimer v_n , puis u_n , en fonction de n .
 - c. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Partie B : second modèle – avec une fonction

On constate qu'en pratique, la masse de bactéries dans la cuve ne dépassera jamais 50 kg. Cela conduit à étudier un second modèle dans lequel la masse de bactéries est modélisée par la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{50}{1 + 49e^{-0,2t}}$$

où t représente le temps exprimé en jours et où $f(t)$ représente la masse, exprimée en kg, de bactéries au temps t .

1.
 - a. Calculer $f(0)$.
 - b. Démontrer que, pour tout réel $t \geq 0$, $f(t) < 50$.
 - c. Étudier le sens de variation de la fonction f .
 - d. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Interpréter les résultats de la question 1 par rapport au contexte.
3. En utilisant ce modèle, on cherche à savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg.
Résoudre l'inéquation d'inconnue t : $f(t) > 30$.
En déduire la réponse au problème.

Partie C : un contrôle de qualité

Les bactéries peuvent être de deux types : le type A, qui produit effectivement une protéine utile à l'industrie, et le type B, qui ne la produit pas et qui est donc inutile d'un point de vue commercial.

L'entreprise affirme que 80 % des bactéries produites sont de type A.

Pour vérifier cette affirmation, un laboratoire analyse un échantillon aléatoire de 200 bactéries en fin de production.

L'analyse montre que 146 d'entre elles sont de type A.

L'affirmation de l'entreprise doit-elle être remise en cause ?