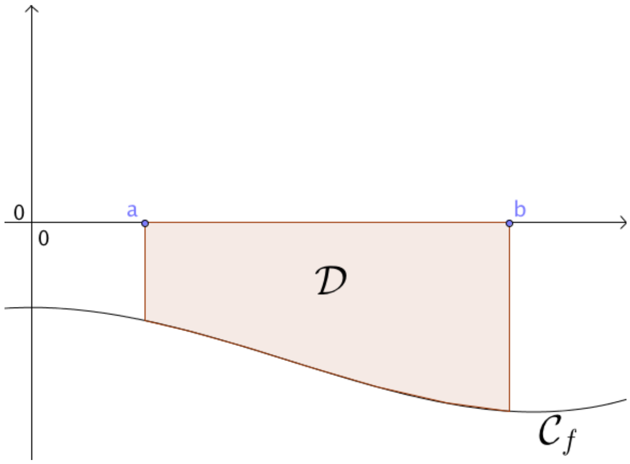
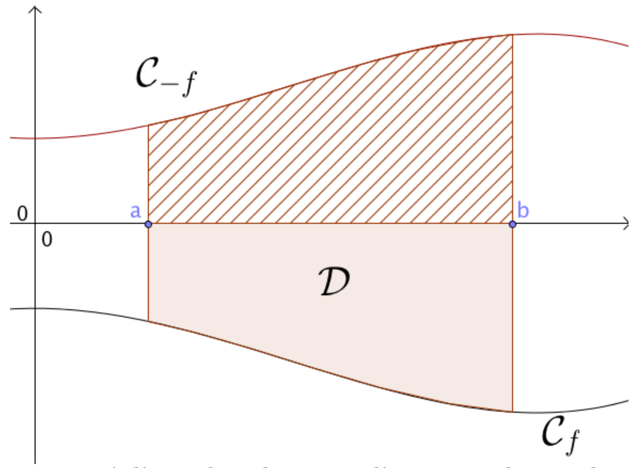
III.3 Intégrale et aire

Propriété III.1

Soit f une fonction continue sur un intervalle I telle que $f \leq 0$, a et b deux réels dans I tels que $a \leq b$. Soit $\mathcal{D}$ la domaine délimitée par la courbe l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$. La mesure de l'aire de $\mathcal{D}$ en unité d'aire est :

$$-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



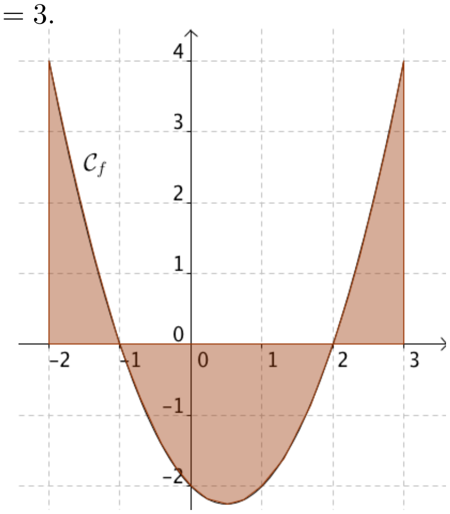


Les courbes représentatives de f et de $-f$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses, l'aire sous la courbe de $-f$ est donc égale à l'aire de $\mathcal{D}$.

Remarque : Dans le cas où le signe de la fonction change, on décompose en intervalles où la fonction est de signe constant.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $[-2;3]$ par $f(x) = x^2 - x - 2$.

Déterminons une mesure de l'aire $\mathcal{A}$ délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -2$ et $x = 3$.



Nous commençons par étudier le signe de la fonction. La fonction f est polynômiale du second degré et ses racines sont -1 et 2. (on peut passer par le discriminant).

$f \leq 0$ sur $[-1;2]$ et $f \geq 0$ ailleurs. On a donc :

$$\mathcal{A} = \int_{-2}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$$

La fonction est négative entre -1 et 2, on prend donc -f entre ces deux bornes

Une primitive de f est F définie par :

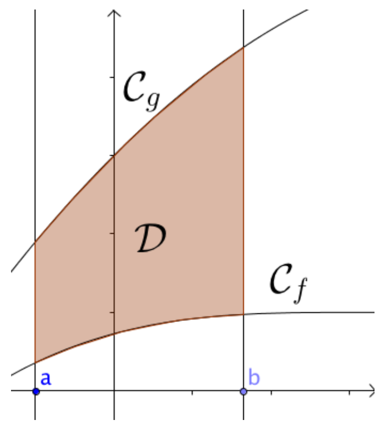
$$F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x$$

D'où $\mathcal{A} = [F(x)]_{-2}^{-1} - [F(x)]_{-1}^{2} + [F(x)]_{2}^{3} = \frac{49}{6}$u.a .

Propriété III.2

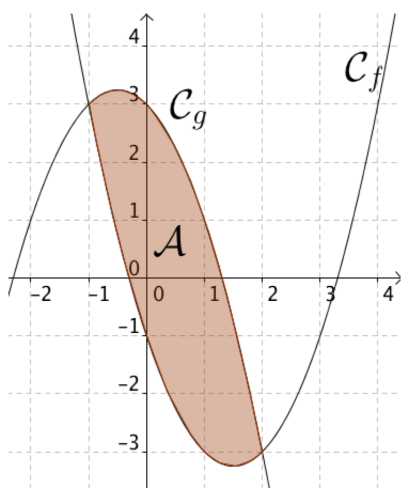
Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et telles que $f \leq g$. Soit a et b dans I telles que $a \leq b$. Une mesure de l'aire du domaine $\mathcal{D}$ compris entre les courbes de f et de g et entre les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est donné en u.a par :

$$\int_a^b g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x$$



Remarque : Dans le cas où le signe de la différence $g - f$ change, on décompose en intervalles où le signe de la différence est constant.

Exemple : Soit f et g définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x - 1$ et $g(x) = -x^2 - x + 3$. Déterminons une mesure de l'aire $\mathcal{A}$ délimité par les courbes de f et de g, et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 2$.



On commence par étudier la position des deux paraboles en étudiant le signe de la différence $f(x) - g(x)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= x^2 - 3x - 1 + x^2 + x - 3 \\ &= 2x^2 - 2x - 4 \\ &= 2(x^2 - x - 1) \end{aligned}$$

On a vu dans l'exemple précédent que $x^2 - x - 1$ est négatif sur l'intervalle $[-1; 2]$. La courbe de g est au dessus de celle de f sur cet intervalle.
Une mesure de $\mathcal{A}$ est donc donné par :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{2} g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{2} -2(x^2 - x - 1)\,\mathrm{d}x \\ &= -2\int_{-1}^{2} x^2 - x - 1\,\mathrm{d}x \\ &= -2\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} \\ &= 9 \end{aligned}$$