

Compilation d'exercices d'analyse et d'intégration.

Amérique du Nord 30 mai 2013 : Exercice 4

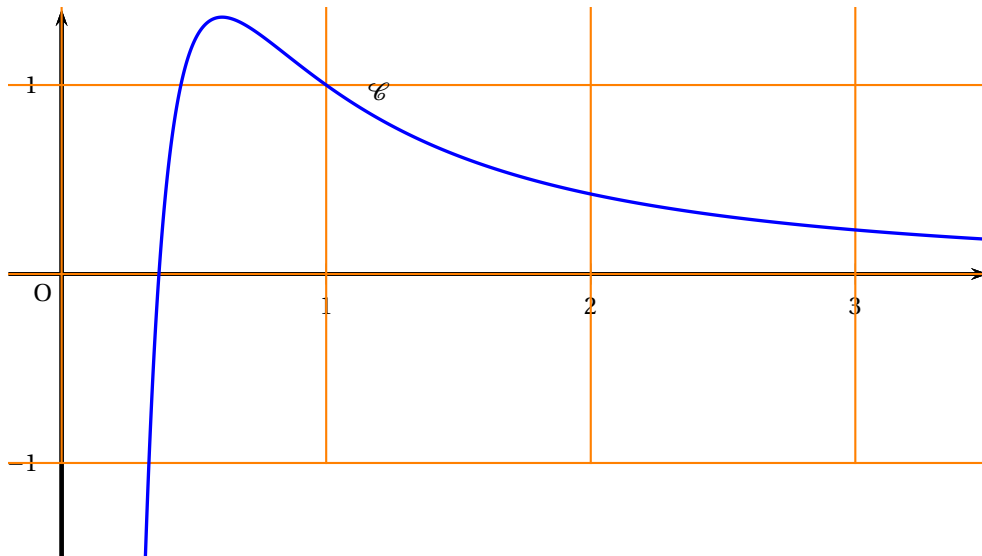
5 points

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x^2}$$

et soit \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan. La courbe \mathcal{C} est donnée ci-dessous :



1. a. Étudier la limite de f en 0.
- b. Que vaut $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.
- c. En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe \mathcal{C} .
2. a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{-1 - 2\ln(x)}{x^3}.$$

- b. Résoudre sur l'intervalle $]0; +\infty[$ l'inéquation $-1 - 2\ln(x) > 0$.
En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- c. Dresser le tableau des variations de la fonction f .
3. a. Démontrer que la courbe \mathcal{C} a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.
- b. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
4. Pour tout entier $n \geq 1$, on note I_n l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe \mathcal{C} et les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{e}$ et $x = n$.
 - a. Démontrer que $0 \leq I_2 \leq e - \frac{1}{2}$.
On admet que la fonction F , définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $F(x) = \frac{-2 - \ln(x)}{x}$, est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

- b.** Calculer I_n en fonction de n .
- c.** Étudier la limite de I_n en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Liban mai 2013 : Exercice 3
Commun à tous les candidats

6 points

Étant donné un nombre réel k , on considère la fonction f_k définie sur \mathbb{R} par

$$f_k(x) = \frac{1}{1 + e^{-kx}}.$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Partie A

Dans cette partie on choisit $k = 1$. On a donc, pour tout réel x , $f_1(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$.

La représentation graphique \mathcal{C}_1 de la fonction f_1 dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) est donnée en ANNEXE, à rendre avec la copie.

1. Déterminer les limites de $f_1(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.
2. Démontrer que, pour tout réel x , $f_1(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$.
3. On appelle f'_1 la fonction dérivée de f_1 sur \mathbb{R} . Calculer, pour tout réel x , $f'_1(x)$.
En déduire les variations de la fonction f_1 sur \mathbb{R} .
4. On définit le nombre $I = \int_0^1 f_1(x) dx$.

Montrer que $I = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$. Donner une interprétation graphique de I .

Partie B

Dans cette partie, on choisit $k = -1$ et on souhaite tracer la courbe \mathcal{C}_{-1} représentant la fonction f_{-1} .

Pour tout réel x , on appelle P le point de \mathcal{C}_1 d'abscisse x et M le point de \mathcal{C}_{-1} d'abscisse x .

On note K le milieu du segment $[MP]$.

1. Montrer que, pour tout réel x , $f_1(x) + f_{-1}(x) = 1$.
2. En déduire que le point K appartient à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$.
3. Tracer la courbe \mathcal{C}_{-1} sur l'ANNEXE, à rendre avec la copie.
4. En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les courbes \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_{-1} l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

Partie C

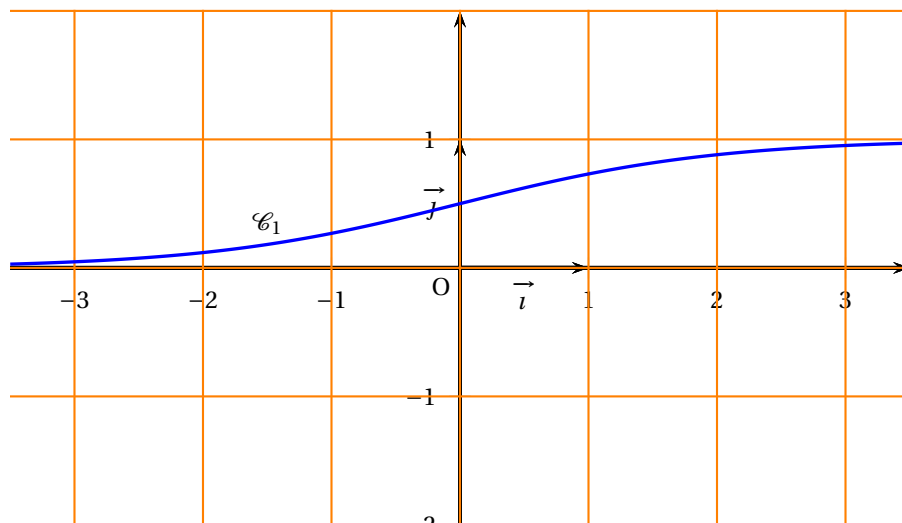
Dans cette partie, on ne privilégie pas de valeur particulière du paramètre k .

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Quelle que soit la valeur du nombre réel k , la représentation graphique de la fonction f_k est strictement comprise entre les droites d'équations $y = 0$ et $y = 1$.
2. Quelle que soit la valeur du réel k , la fonction f_k est strictement croissante.
3. Pour tout réel $k \geq 10$, $f_k\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0,99$.

ANNEXE de l'EXERCICE 3, à rendre avec la copie

Représentation graphique \mathcal{C}_1 de la fonction f_1



Dans tout ce qui suit, m désigne un nombre réel quelconque.

Partie A

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} telle que :

$$f(x) = (x + 1)e^x.$$

1. Calculer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur \mathbb{R} .
Démontrer que pour tout réel x , $f'(x) = (x + 2)e^x$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur \mathbb{R} .

Partie B

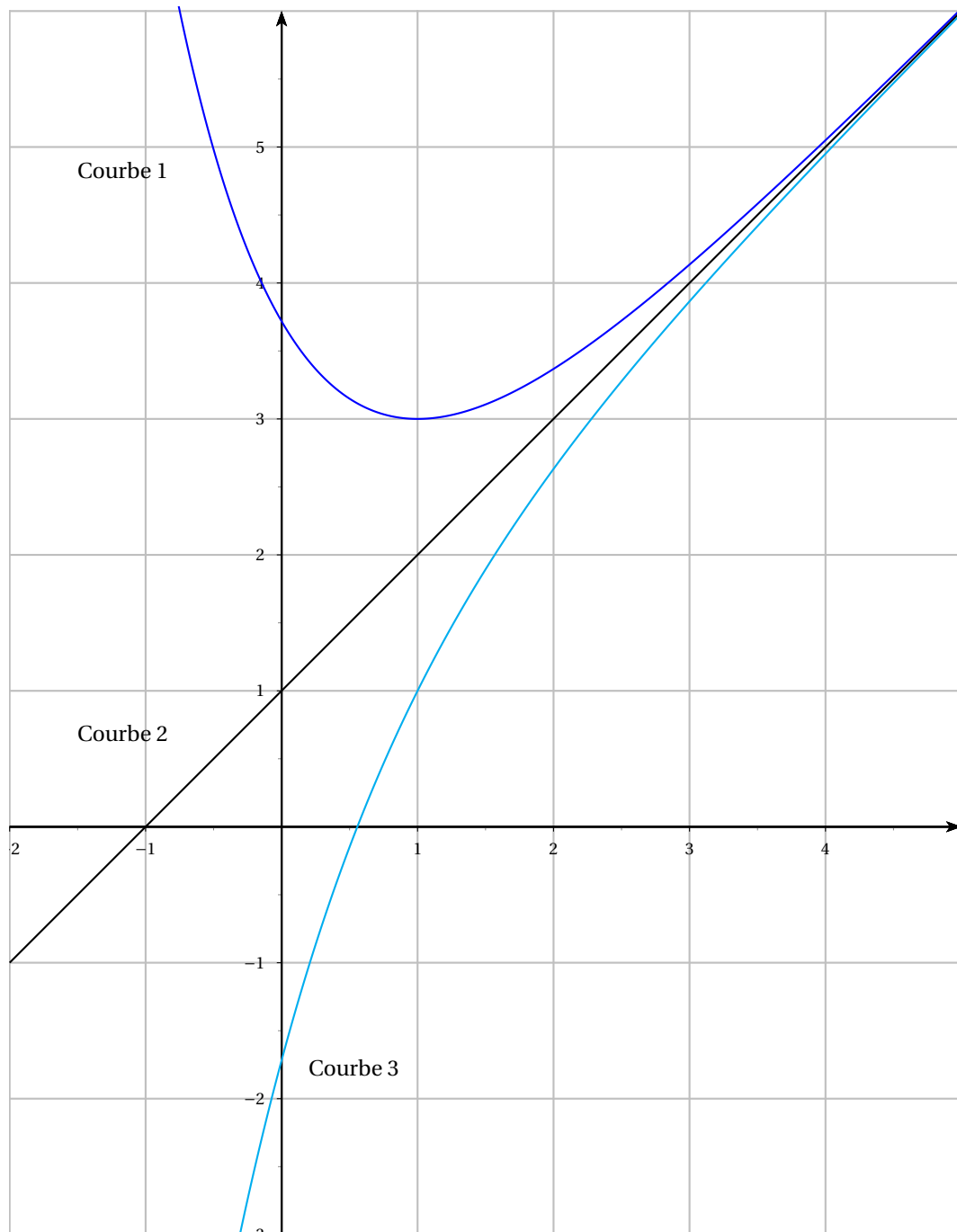
On définit la fonction g_m sur \mathbb{R} par :

$$g_m(x) = x + 1 - me^{-x}$$

et on note \mathcal{C}_m la courbe de la fonction g_m dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan.

1.
 - a. Démontrer que $g_m(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = m$.
 - b. Dédire de la partie A, sans justification, le nombre de points d'intersection de la courbe \mathcal{C}_m avec l'axe des abscisses en fonction du réel m .
2. On a représenté en annexe 2 les courbes \mathcal{C}_0 , \mathcal{C}_e , et \mathcal{C}_{-e} (obtenues en prenant respectivement pour m les valeurs 0, e et $-e$).
Identifier chacune de ces courbes sur la figure de l'annexe en justifiant.
3. Étudier la position de la courbe \mathcal{C}_m par rapport à la droite \mathcal{D} d'équation $y = x + 1$ suivant les valeurs du réel m .
4.
 - a. On appelle D_2 la partie du plan comprise entre les courbes \mathcal{C}_e , \mathcal{C}_{-e} , l'axe (Oy) et la droite $x = 2$. Hachurer D_2 sur l'annexe 2.
 - b. Dans cette question, a désigne un réel positif, D_a la partie du plan comprise entre \mathcal{C}_e , \mathcal{C}_{-e} , l'axe (Oy) et la droite Δ_a d'équation $x = a$. On désigne par $\mathcal{A}(a)$ l'aire de cette partie du plan, exprimée en unités d'aire.
Démontrer que pour tout réel a positif : $\mathcal{A}(a) = 2e - 2e^{1-a}$.
En déduire la limite de $\mathcal{A}(a)$ quand a tend vers $+\infty$.

Annexe 2
Exercice 3
À rendre avec la copie



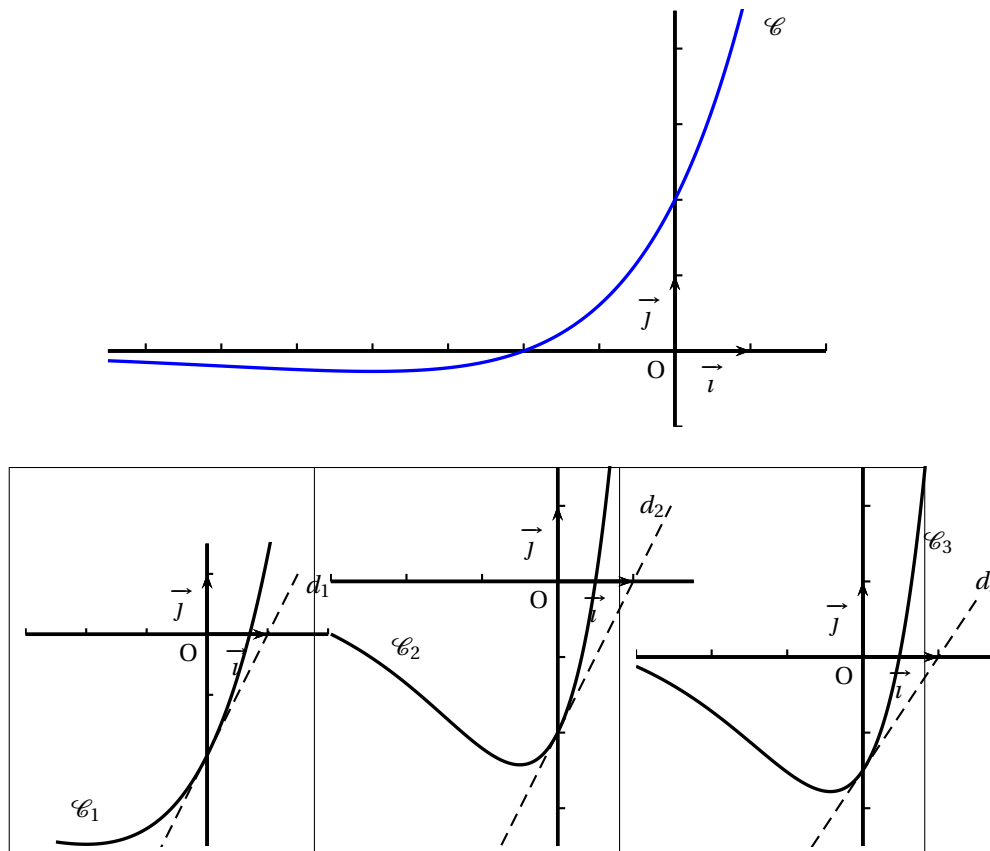
Métropole septembre 2013 : Exercice 1
Commun à tous les candidats

6 points

Soit f une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} . On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Partie A

Sur les graphiques ci-dessous, on a représenté la courbe \mathcal{C} et trois autres courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ avec la tangente en leur point d'abscisse 0.



1. Donner par lecture graphique, le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x .
2. On désigne par F une primitive de la fonction f sur \mathbb{R} .
 - a. À l'aide de la courbe \mathcal{C} , déterminer $F'(0)$ et $F'(-2)$.
 - b. L'une des courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ est la courbe représentative de la fonction F .
Déterminer laquelle en justifiant l'élimination des deux autres.

Partie B

Dans cette partie, on admet que la fonction f évoquée dans la **partie A** est la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{2}x}.$$

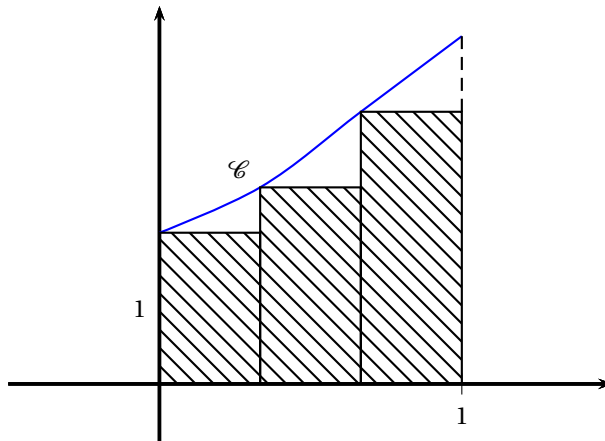
1. L'observation de la courbe \mathcal{C} permet de conjecturer que la fonction f admet un minimum.
 - a. Démontrer que pour tout réel x , $f'(x) = \frac{1}{2}(x+4)e^{\frac{1}{2}x}$.

- b. En déduire une validation de la conjecture précédente.
2. On pose $I = \int_0^1 f(x) dx$.
- a. Interpréter géométriquement le réel I .
- b. Soient u et v les fonctions définies sur \mathbb{R} par $u(x) = x$ et $v(x) = e^{\frac{1}{2}x}$.
Vérifier que $f = 2(u'v + uv')$.
- c. En déduire la valeur exacte de l'intégrale I .
3. On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables :	k et n sont des nombres entiers naturels. s est un nombre réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n .
Initialisation :	Affecter à s la valeur 0.
Traitement :	Pour k allant de 0 à $n - 1$ Affecter à s la valeur $s + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.
	Fin de boucle.
Sortie :	Afficher s .

On note s_n le nombre affiché par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre un entier naturel strictement positif comme valeur de n .

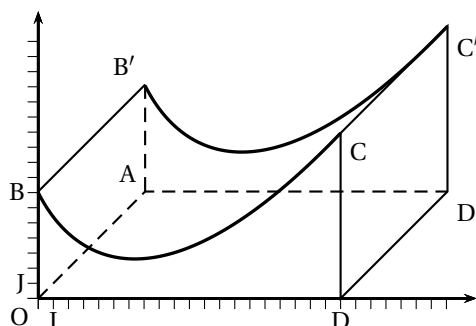
- a. Justifier que s_3 représente l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique ci-dessous où les trois rectangles ont la même largeur.



- b. Que dire de la valeur de s_n fournie par l'algorithme proposé lorsque n devient grand?

Métropole juin 2015 : Exercice 4
Commun à tous les candidats

6 points



Une municipalité a décidé d'installer un module de skateboard dans un parc de la commune.

Le dessin ci-contre en fournit une perspective cavalière. Les quadrilatères $OAD'D$, $DD'C'C$, et $OAB'B$ sont des rectangles.

Le plan de face (OBD) est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

L'unité est le mètre. La largeur du module est de 10 mètres, autrement dit, $DD' = 10$, sa longueur OD est de 20 mètres.

Le but dit problème est de déterminer l'aire des différentes surfaces à peindre.

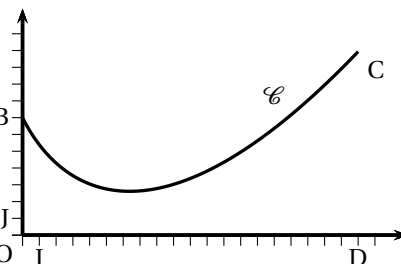
Le profil du module de skateboard a été modélisé à partir d'une photo par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 20]$ par

$$f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans le repère (O, I, J) .

Partie 1

1. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; 20]$, on a $f'(x) = \ln(x+1) - 2$.
2. En déduire les variations de f sur l'intervalle $[0; 20]$ et dresser son tableau de variation.
3. Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 0.



La valeur absolue de ce coefficient est appelée l'inclinaison du module de skateboard au point B.

4. On admet que la fonction g définie sur l'intervalle $[0; 20]$ par

$$g(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 \ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$$

a pour dérivée la fonction g' définie sur l'intervalle $[0; 20]$ par $g'(x) = (x+1)\ln(x+1)$.

Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0; 20]$.

Partie 2

Les trois questions de cette partie sont indépendantes

1. Les propositions suivantes sont-elles exactes? Justifier les réponses.

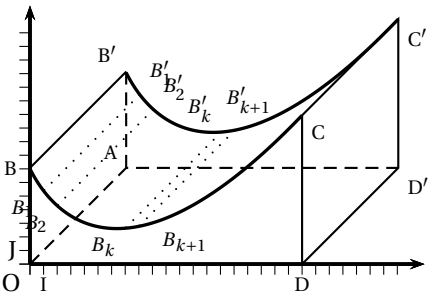
P_1 : La différence de hauteur entre le point le plus haut et le point le plus bas de la piste est au moins égale à 8 mètres.

P_2 : L'inclinaison de la piste est presque deux fois plus grande en B qu'en C.

2. On souhaite recouvrir les quatre faces latérales de ce module d'une couche de peinture rouge. La peinture utilisée permet de couvrir une surface de 5 m^2 par litre.
- Déterminer, à 1 litre près, le nombre minimum de litres de peinture nécessaires.

3. On souhaite peindre en noir la piste roulante, autrement dit la surface supérieure du module.

Afin de déterminer une valeur approchée de l'aire de la partie à peindre, on considère dans le repère (O, I, J) du plan de face, les points $B_k(k; f(k))$ pour k variant de 0 à 20. Ainsi, $B_0 = B$.



On décide d'approcher l'arc de la courbe \mathcal{C} allant de B_k à B_{k+1} par le segment $[B_k B_{k+1}]$.

Ainsi l'aire de la surface à peindre sera approchée par la somme des aires des rectangles du type $B_k B_{k+1} B'_{k+1} B_k$ (voir figure).

- a. Montrer que pour tout entier k variant de 0 à 19,
- $$B_k B_{k+1} = \sqrt{1 + [f(k+1) - f(k)]^2}.$$
- b. Compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche une estimation de l'aire de la partie roulante.

Variables	S : réel K : entier
Fonction	f : définie par $f(x) = (x+1) \ln(x+1) - 3x + 7$
Traitement	S prend pour valeur 0 Pour K variant de ... à ... S prend pour valeur Fin Pour
Sortie	Afficher ...

*

Pondichéry avril 2015 : Exercice 1
Commun à tous les candidats

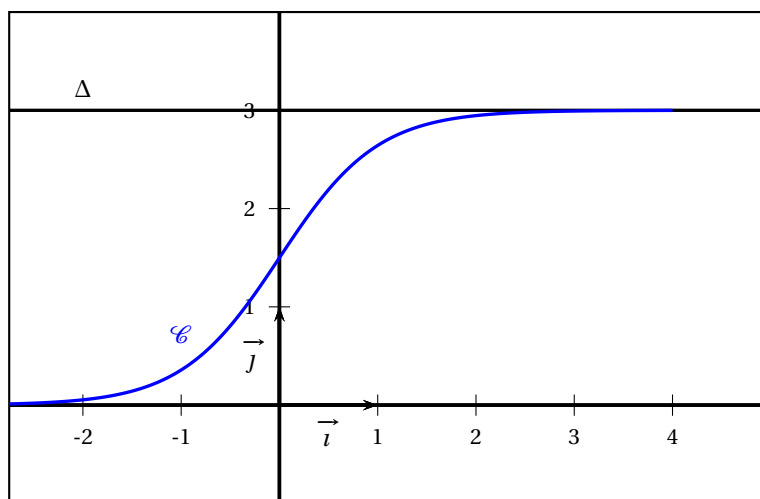
4 points

Partie A

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \frac{3}{1 + e^{-2x}}.$$

Sur le graphique ci-après, on a tracé, dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) , la courbe représentative \mathcal{C} de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = 3$.



1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R} .
2. Justifier que la droite Δ est asymptote à la courbe \mathcal{C} .
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 2,999$ admet une unique solution α sur \mathbb{R} .
 Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

Partie B

Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = 3 - f(x)$.

1. Justifier que la fonction h est positive sur \mathbb{R} .
2. On désigne par H la fonction définie sur \mathbb{R} par $H(x) = -\frac{3}{2} \ln(1 + e^{-2x})$.
 Démontrer que H est une primitive de h sur \mathbb{R} .
3. Soit a un réel strictement positif.
 - a. Donner une interprétation graphique de l'intégrale $\int_0^a h(x) dx$.
 - b. Démontrer que $\int_0^a h(x) dx = \frac{3}{2} \ln\left(\frac{2}{1 + e^{-2a}}\right)$.
 - c. On note \mathcal{D} l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan défini par

$$\begin{cases} x & \geq 0 \\ f(x) & \leq y \leq 3 \end{cases}$$
 Déterminer l'aire, en unité d'aire, du domaine \mathcal{D} .*

Liban mai 2015 : Exercice 2
Commun à tous les candidats

6 points

On définit la suite (u_n) de la façon suivante :

pour tout entier naturel n , $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

1. Calculer $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$.
2.
 - a. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$.
 - b. En déduire la valeur exacte de u_1 .
3.
 - a. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il affiche en sortie le terme de rang n de la suite (u_n) où n est un entier naturel saisi en entrée par l'utilisateur.

Variables :	i et n sont des entiers naturels u est un réel
Entrée :	Saisir n
Initialisation :	Affecter à u la valeur ...
Traitement :	Pour i variant de 1 à ... Affecter à u la valeur ...
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

- b. À l'aide de cet algorithme, on a obtenu le tableau de valeurs suivant :

n	0	1	2	3	4	5	10	50	100
u_n	0,693 1	0,306 9	0,193 1	0,140 2	0,109 8	0,090 2	0,047 5	0,009 9	0,005 0

Quelles conjectures concernant le comportement de la suite (u_n) peut-on émettre?

4.
 - a. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
 - b. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
5. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) . Démontrer que $\ell = 0$.

Amérique du nord juin 2015 : Exercice 4
Commun à tous les candidats

6 points

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$u(x) = \ln(x) + x - 3.$$

1. Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
2. Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.
3. En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x .

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) [\ln(x) - 2] + 2.$$

On appelle \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0.
2.
 - a. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$, $f(x) = \frac{u(x)}{x^2}$ où u est la fonction définie dans la partie A.
 - b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Partie C

Soit \mathcal{C} la courbe d'équation $y = \ln(x)$.

1. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$, $f(x) - \ln(x) = \frac{2 - \ln(x)}{x}$.
En déduire que les courbes \mathcal{C} et \mathcal{C} ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées.
2. On admet que la fonction H définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$H(x) = \frac{1}{2} [\ln(x)]^2$$

est une primitive de la fonction h définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$h(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

$$\text{Calculer } I = \int_1^{e^2} \frac{2 - \ln x}{x} dx.$$

Interpréter graphiquement ce résultat.

Asie juin 2015 : Exercice 3
Commun à tous les candidats

6 points

Pour tout entier naturel n , on définit la fonction f_n pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$ par :

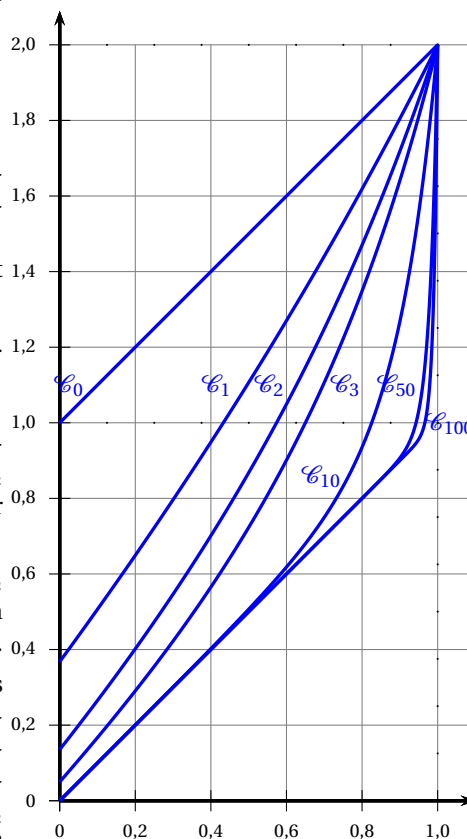
$$f_n(x) = x + e^{n(x-1)}.$$

On note \mathcal{C}_n la représentation graphique de la fonction f_n dans un repère orthogonal.

Quelques-unes des courbes \mathcal{C}_n sont représentées ci-contre.

Partie A : généralités sur les fonctions f_n

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n , la fonction f_n est croissante et positive sur l'intervalle $[0; 1]$.
2. Montrer que les courbes \mathcal{C}_n ont toutes un point commun A, et préciser ses coordonnées.
3. À l'aide des représentations graphiques, peut-on conjecturer le comportement des coefficients directeurs des tangentes en A aux courbes \mathcal{C}_n pour les grandes valeurs de n ?
Démontrer cette conjecture.



Partie B : évolution de $f_n(x)$ lorsque x est fixé

Soit x un réel fixé de l'intervalle $[0; 1]$. Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = f_n(x)$.

1. Dans cette question, on suppose que $x = 1$. Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n) .
2. Dans cette question, on suppose que $0 \leq x < 1$. Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n) .

Partie C : aire sous les courbes \mathcal{C}_n

Pour tout entier naturel n , on note A_n l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine situé entre l'axe des abscisses, la courbe \mathcal{C}_n et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

À partir des représentations graphiques, conjecturer la limite de la suite (A_n) lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, puis démontrer cette conjecture.

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ telle que :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - x}$$

On admet que la fonction f est positive sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal du plan.

La courbe \mathcal{C} est représentée en annexe, **à rendre avec la copie**.

Partie A

Soit la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \int_0^n f(x) dx$.

On ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n .

1. Montrer que la suite (I_n) est croissante.
2. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, $e^x - x \geq \frac{e^x}{2}$.
 - a. Montrer que, pour tout entier naturel n , $I_n \leq \int_0^n 2xe^{-x} dx$.
 - b. Soit H la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ telle que :

$$H(x) = (-x - 1)e^{-x}$$

Déterminer la fonction dérivée H' de la fonction H .

- c. En déduire que, pour tout entier naturel n , $I_n \leq 2$.
3. Montrer que la suite (I_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

Partie B

On considère l'algorithme suivant dans lequel les variables sont

- K et i des entiers naturels, K étant non nul;
- A , x et h des réels.

Entrée :	Saisir K entier naturel non nul
Initialisation	Affecter à A la valeur 0 Affecter à x la valeur 0 Affecter à h la valeur $\frac{1}{K}$
Traitement	Pour i variant de 1 à K Affecter à A la valeur $A + h \times f(x)$ Affecter à x la valeur $x + h$ Fin Pour
Sortie	Afficher A

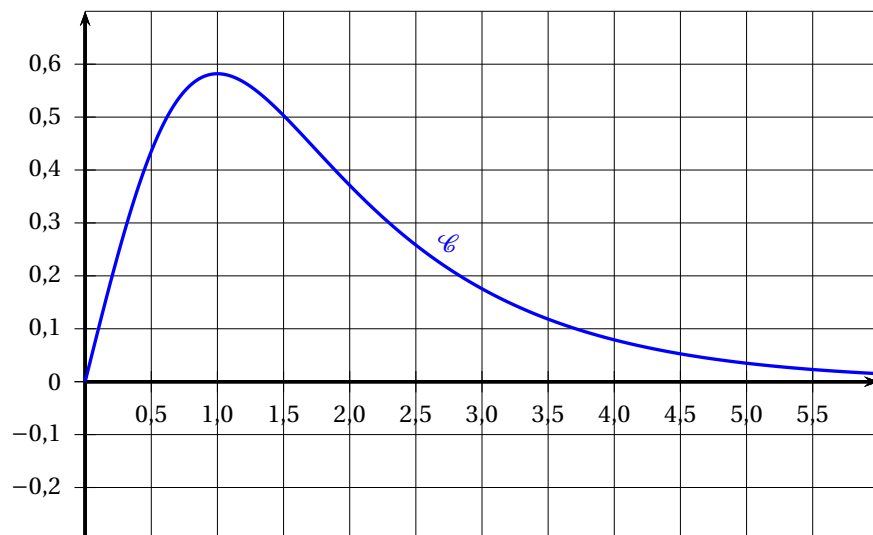
1. Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $K = 4$. Les valeurs successives de A seront arrondies au millièmes.

i	A	x
1		
2		
3		
4		

2. En l'illustrant sur l'annexe **à rendre avec la copie**, donner une interprétation graphique du résultat affiché par cet algorithme pour $K = 8$.
3. Que donne l'algorithme lorsque K devient grand?

ANNEXE Exercice 2
À rendre avec la copie

Courbe \mathcal{C} , représentative de la fonction f sur $[0; 6]$



Courbe \mathcal{C} , représentative de la fonction f sur $[0; 1]$

