Compilation d'exercices sur les probabilités conditionnelles. (Hors spécialité)

Pondichéry 16 avril 2013 : Exercice 4 **6 points**

Remarque : La question 3. b. n'est a priori pas faisable en début d'année.

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

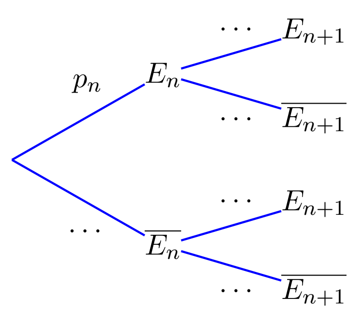
- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,04$.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,24$.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n.
On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leqslant p_n < 1$.

1. **a.** Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.

b. Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

2. **a.** Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous



b. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,
$p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04$.

c. Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0,05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison r.
En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n et r.

d. En déduire la limite de la suite (p_n).

e. On admet dans cette question que la suite (p_n) est croissante. On considère l'algorithme suivant :

Variables	K et J sont des entiers naturels, P est un nombre réel
Initialisation	P prend la valeur 0
	J prend la valeur 1
Entrée	Saisir la valeur de K
Traitement	Tant que P $< 0,05 - 10^{-\text{K}}$
	P prend la valeur $0,2 \times$ P $+ 0,04$
	J prend la valeur J $+1$
	Fin tant que
Sortie	Afficher J

À quoi correspond l'affichage final J ?

Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête ?

3. Cette entreprise emploie 220 salariés. Pour la suite on admet que la probabilité pour qu'un salarié soit malade une semaine donnée durant cette période d'épidémie est égale à $p = 0,05$.

On suppose que l'état de santé d'un salarié ne dépend pas de l'état de santé de ses collègues.

On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés malades une semaine donnée.

a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

Calculer l'espérance mathématique μ et l'écart type σ de la variable aléatoire X.

b.

Liban 28 mai 2013 : Exercice 2 **5 points**

Remarque : La partie B n'est a priori pas faisable en début d'année.

L'entreprise *Fructidoux* fabrique des compotes qu'elle conditionne en petits pots de 50 grammes. Elle souhaite leur attribuer la dénomination « compote allégée ».
La législation impose alors que la teneur en sucre, c'est-à-dire la proportion de sucre dans la compote, soit comprise entre 0,16 et 0,18. On dit dans ce cas que le petit pot de compote est conforme.
L'entreprise possède deux chaînes de fabrication F_1 et F_2.

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Partie A

La chaîne de production F_2 semble plus fiable que la chaîne de production F_1. Elle est cependant moins rapide.
Ainsi, dans la production totale, 70 % des petits pots proviennent de la chaîne F_1 et 30 % de la chaîne F_2.
La chaîne F_1 produit 5 % de compotes non conformes et la chaîne F_2 en produit 1 %.
On prélève au hasard un petit pot dans la production totale. On considère les évènements :
E : « Le petit pot provient de la chaîne F_2 »
C : « Le petit pot est conforme. »

1. Construire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.
2. Calculer la probabilité de l'évènement : « Le petit pot est conforme et provient de la chaîne de production F_1. »
3. Déterminer la probabilité de l'évènement C.
4. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité de l'évènement E sachant que l'évènement C est réalisé.

Polynésie 7 juin 2013 : Exercice 3 **5 points**

Remarque : Les parties 2 et 3 ne sont a priori pas faisable en début d'année.

Les 3 parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Thomas possède un lecteur MP3 sur lequel il a stocké plusieurs milliers de morceaux musicaux.
L'ensemble des morceaux musicaux qu'il possède se divise en trois genres distincts selon la répartition suivante :

30 % de musique classique, 45 % de variété, le reste étant du jazz.

Thomas a utilisé deux qualités d'encodage pour stocker ses morceaux musicaux : un encodage de haute qualité et un encodage standard. On sait que :

- les $\frac{5}{6}$ des morceaux de musique classique sont encodés en haute qualité.
- les $\frac{5}{9}$ des morceaux de variété sont encodés en qualité standard.

On considérera les évènements suivants :

C **:** « Le morceau écouté est un morceau de musique classique » ;

V **:** « Le morceau écouté est un morceau de variété » ;

J **:** « Le morceau écouté est un morceau de jazz » ;

H **:** « Le morceau écouté est encodé en haute qualité » ;

S **:** « Le morceau écouté est encodé en qualité standard ».

Partie 1

Thomas décide d'écouter un morceau au hasard parmi tous les morceaux stockés sur son MP3 en utilisant la fonction « lecture aléatoire ».
On pourra s'aider d'un arbre de probabilités.

1. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un morceau de musique classique encodé en haute qualité ?

2. On sait que $P(H) = \frac{13}{20}$.

  a. Les évènements C et H sont-ils indépendants ?

  b. Calculer $P(J \cap H)$ et $P_J(H)$.

Antilles-Guyane 18 juin 2013 : Exercice 2 **5 points**

Remarque : La partie A et la question 2.b et 2.c de la partie B ne sont a priori pas faisable en début d'année.

Partie B

On cherche à étudier le nombre d'étudiants connaissant la signification du sigle URSSAF. Pour cela, on les interroge en proposant un questionnaire à choix multiples. Chaque étudiant doit choisir parmi trois réponses possibles, notées A, B et C, la bonne réponse étant la A.
On note r la probabilité pour qu'un étudiant connaisse la bonne réponse. Tout étudiant connaissant la bonne réponse répond A, sinon il répond au hasard (de façon équiprobable).

1. On interroge un étudiant au hasard. On note :

A l'évènement « l'étudiant répond A »,

B l'évènement « l'étudiant répond B »,

C l'évènement « l'étudiant répond C »,

R l'évènement « l'étudiant connait la réponse »,

$\overline{R}$ l'évènement contraire de R.

a. Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité.

b. Montrer que la probabilité de l'évènement A est $P(A) = \frac{1}{3}(1 + 2r)$.

c. Exprimer en fonction de r la probabilité qu'une personne ayant choisie A connaisse la bonne réponse.

2. Pour estimer r, on interroge 400 personnes et on note X la variable aléatoire comptant le nombre de bonnes réponses. On admettra qu'interroger au hasard 400 étudiants revient à effectuer un tirage avec remise de 400 étudiants dans l'ensemble de tous les étudiants.

a. Donner la loi de X et ses paramètres n et p en fonction de r.

b.

Asie 18 juin 2013 : Exercice 1 **5 points**

Remarque : La partie C n'est a priori pas faisable en début d'année.

Dans cet exercice, les probabilités seront arrondies au centième.

Partie A

Un grossiste achète des boîtes de thé vert chez deux fournisseurs. Il achète 80 % de ses boîtes chez le fournisseur A et 20 % chez le fournisseur B.

10 % des boîtes provenant du fournisseur A présentent des traces de pesticides et 20 % de celles provenant du fournisseur B présentent aussi des traces de pesticides.
On prélève au hasard une boîte du stock du grossiste et on considère les évènements suivants :

— évènement A : « la boîte provient du fournisseur A » ;
— évènement B : « la boîte provient du fournisseur B » ;
— évènement S : « la boîte présente des traces de pesticides ».

1. Traduire l'énoncé sous forme d'un arbre pondéré.

2. a. Quelle est la probabilité de l'évènement $B \cap \overline{S}$?

b. Justifier que la probabilité que la boîte prélevée ne présente aucune trace de pesticides est égale à $0,88$.

3. On constate que la boîte prélevée présente des traces de pesticides.
Quelle est la probabilité que cette boîte provienne du fournisseur B ?

Partie B

Le gérant d'un salon de thé achète 10 boîtes chez le grossiste précédent. On suppose que le stock de ce dernier est suffisamment important pour modéliser cette situation par un tirage aléatoire de 10 boîtes avec remise.
On considère la variable aléatoire X qui associe à ce prélèvement de 10 boîtes, le nombre de boîtes sans trace de pesticides.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que les 10 boîtes soient sans trace de pesticides.
3. Calculer la probabilité qu'au moins 8 boîtes ne présentent aucune trace de pesticides.

Métropole 20 juin 2013 : Exercice 1 **4 points**

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35 % des plants proviennent de l'horticulteur H_1, 25 % de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3. Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles.
La livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80 % de conifères alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50 % et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30 %.

1. Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock.
   On envisage les événements suivants :
   — H_1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 »,
   — H_2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2 »,
   — H_3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 »,
   — C : « l'arbre choisi est un conifère »,
   — F : « l'arbre choisi est un arbre feuillu ».

   a. Construire un arbre pondéré traduisant la situation.

   b. Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3.

   c. Justifier que la probabilité de l'évènement C est égale à $0,525$.

   d. L'arbre choisi est un conifère.
   Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 ? On arrondira à 10^{-3}.

2. On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock.
   On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.

   a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

   b. Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères ?
   On arrondira à 10^{-3}.

   c. Quelle est la probabilité que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus ?
   On arrondira à 10^{-3}.

Antilles-Guyane 11 septembre 2013 : Exercice 4 **5 points**

Le robot Tom doit emprunter un pont sans garde-corps de 10 pas de long et de 2 pas de large. Sa démarche est très particulière :

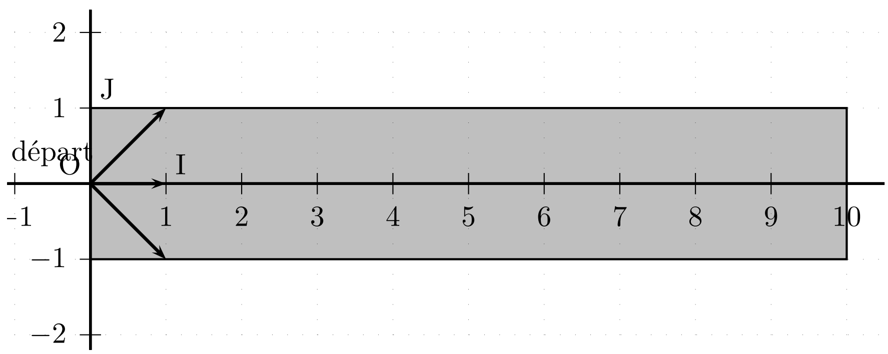
- Soit il avance d'un pas tout droit ;
- Soit il se déplace en diagonale vers la gauche (déplacement équivalent à un pas vers la gauche et un pas tout droit) ;
- Soit il se déplace en diagonale vers la droite (déplacement équivalent à un pas vers la droite et un pas tout droit).

On suppose que ces trois types de déplacement sont aléatoires et équiprobables.

L'objectif de cet exercice est d'estimer la probabilité p de l'évènement S « Tom traverse le pont » c'est-à-dire « Tom n'est pas tombé dans l'eau et se trouve encore sur le pont au bout de 10 déplacements ».

Partie A : modélisation et simulation

On schématise le pont par un rectangle dans le plan muni d'un repère orthonormé (O , I, J) comme l'indique la figure ci-dessous. On suppose que Tom se trouve au point de coordonnées $(0\,;\,0)$ au début de la traversée. On note $(x\ ;\ y)$ les coordonnées de la position de Tom après x déplacements.



On a écrit l'algorithme suivant qui simule la position de Tom au bout de x déplacements :

x, y, n sont des entiers
Affecter à x la valeur 0
Affecter à y la valeur 0
Tant que $y \geqslant -1$ et $y \leqslant 1$ et $x \leqslant 9$
Affecter à n une valeur choisie au hasard entre -1, 0 et 1
Affecter à y la valeur $y+n$
Affecter à x la valeur $x+1$
Fin tant que
Afficher « la position de Tom est » $(x\ ;\ y)$

1. On donne les couples suivants : $(-1\ ;\ 1)$; $(10\,;\,0)$; $(2\,;\,4)$; $(10\,;\,2)$.
Lesquels ont pu être obtenus avec cet algorithme ? Justifier la réponse.

2. Modifier cet algorithme pour qu'à la place de « la position de Tom est $(x\ ;\ y)$ », il affiche finalement « Tom a réussi la traversée » ou « Tom est tombé ».

Partie B

Pour tout n entier naturel compris entre 0 et 10, on note :
A_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée -1 ».
B_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée 0 ».
C_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée 1 ».
On note a_n, b_n, c_n les probabilités respectives des évènements A_n, B_n, C_n.

1. Justifier que $a_0 = 0, b_0 = 1, c_0 = 0$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n compris entre 0 et 9, on a

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & \dfrac{a_n + b_n}{3} \\ b_{n+1} & = & \dfrac{a_n + b_n + c_n}{3} \end{array}\right.$$

   On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
3. Calculer les probabilités $p(A_1)$, $p(B_1)$ et $p(C_1)$.
4. Calculer la probabilité que Tom se trouve sur le pont au bout de deux déplacements.
5. À l'aide d'un tableur, on a obtenu la feuille de calcul ci-contre qui donne des valeurs approchées de a_n, b_n, c_n pour n compris entre 0 et 10.
   Donner une valeur approchée à $0,001$ près de la probabilité que Tom traverse le pont (on pourra s'aider du tableau ci-contre).

n	a_n	b_n	c_n
0	0	1	0
1	0,333 333	0,333 333	0,333 333
2	0,222 222	0,333 333	0,222 222
3	0,185 185	0,259 259	0,185 185
4	0,148 148	0,209 877	0,148 148
5	0,119 342	0,168 724	0,119 342
6	0,096 022	0,135 802	0,096 022
7	0,077 275	0,109 282	0,077 275
8	0,062 186	0,087 944	0,062 186
9	0,050 043	0,070 772	0,050 043
10	0,040 272	0,056 953	0,040 272

Métropole 12 septembre 2013 : Exercice 3 **5 points**

Remarque : Les questions 2. b. et 2. c. ne sont a priori pas faisable en début d'année.

Dans une usine, on utilise deux machines A et B pour fabriquer des pièces.

1. La machine A assure 40 % de la production et la machine B en assure 60 %.
   On estime que 10 % des pièces issues de la machine A ont un défaut et que 9 % des pièces issues de la machine B ont un défaut.
   On choisit une pièce au hasard et on considère les évènements suivants :
   — A : « La pièce est produite par la machine A »
   — B : « La pièce est produite par la machine B »
   — D : « La pièce a un défaut ».
   — $\overline{D}$, l'évènement contraire de l'évènement D.

   a. Traduire la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

   b. Calculer la probabilité que la pièce choisie présente un défaut et ait été fabriquée par la machine A.

   c. Démontrer que la probabilité $P(D)$ de l'évènement D est égale à $0,094$.

   d. On constate que la pièce choisie a un défaut.
   Quelle est la probabilité que cette pièce provienne de la machine A ?

2. On estime que la machine A est convenablement réglée si 90 % des pièces qu'elle fabrique sont conformes.
   On décide de contrôler cette machine en examinant n pièces choisies au hasard (n entier naturel) dans la production de la machine A. On assimile ces n tirages à des tirages successifs indépendants et avec remise.
   On note X_n le nombre de pièces qui sont conformes dans l'échantillon de n pièces, et $F_n = \dfrac{X_n}{n}$ la proportion correspondante.

   a. Justifier que la variable aléatoire X_n suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

   b.

Amérique du Sud 21 novembre 2013 : Exercice 4 **5 points**

Remarque : La partie C n'est a priori pas faisable en début d'année.

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-4} près.

Partie A

En utilisant sa base de données, la sécurité sociale estime que la proportion de Français présentant, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme est de 10 %. L'étude a également permis de prouver que 30 % des Français présentant, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme, seront victimes d'un accident cardiaque au cours de leur vie alors que cette proportion n'atteint plus que 8 % pour ceux qui ne souffrent pas de cette malformation congénitale.

On choisit au hasard une personne dans la population française et on considère les évènements :
M : « La personne présente, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme »
C : « La personne est victime d'un accident cardiaque au cours de sa vie ».

1. **a.** Montrer que $P(M \cap C) = 0,03$.
   b. Calculer $P(C)$.
2. On choisit au hasard une victime d'un accident cardiaque. Quelle est la probabilité qu'elle présente une malformation cardiaque de type anévrisme ?

Partie B

La sécurité sociale décide de lancer une enquête de santé publique, sur ce problème de malformation cardiaque de type anévrisme, sur un échantillon de 400 personnes, prises au hasard dans la population française.
On note X la variable aléatoire comptabilisant le nombre de personnes de l'échantillon présentant une malformation cardiaque de type anévrisme.

1. Définir la loi de la variable aléatoire X.
2. Déterminer $P(X = 35)$.
3. Déterminer la probabilité que 30 personnes de ce groupe, au moins, présentent une malformation cardiaque de type anévrisme.

Liban 27 mai 2014 : Exercice 1 **5 points**

Remarque : Les parties B et C ne sont a priori pas faisable en début d'année.

Les trois parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante.
Les probabilités seront arrondies au dix millième.

Un élève doit se rendre à son lycée chaque matin pour 8 h 00. Pour cela, il utilise, selon les jours, deux moyens de transport : le vélo ou le bus.

Partie A

L'élève part tous les jours à 7 h 40 de son domicile et doit arriver à 8 h 00 à son lycée. Il prend le vélo 7 jours sur 10 et le bus le reste du temps.
Les jours où il prend le vélo, il arrive à l'heure dans 99,4 % des cas et lorsqu'il prend le bus, il arrive en retard dans 5 % des cas.
On choisit une date au hasard en période scolaire et on note V l'évènement « L'élève se rend au lycée à vélo », B l'évènement « l'élève se rend au lycée en bus » et R l'évènement « L'élève arrive en retard au lycée ».

1. Traduire la situation par un arbre de probabilités.
2. Déterminer la probabilité de l'évènement $V \cap R$.
3. Démontrer que la probabilité de l'évènement R est 0,019 2
4. Un jour donné, l'élève est arrivé en retard au lycée. Quelle est la probabilité qu'il s'y soit rendu en bus ?

Antilles-Guyane 19 juin 2014 : Exercice 1 **5 points**

Remarque : Les parties B et C ne sont a priori pas faisable en début d'année.

Les parties A et B sont indépendantes

Les résultats seront arrondis à 10^{-4} près

Partie A

Un ostréiculteur élève deux espèces d'huîtres : « la plate » et « la japonaise ». Chaque année, les huîtres plates représentent 15 % de sa production.
Les huîtres sont dites de calibre n° 3 lorsque leur masse est comprise entre 66 g et 85 g.
Seulement 10 % des huîtres plates sont de calibre n° 3, alors que 80 % des huîtres japonaises le sont.

1. Le service sanitaire prélève une huître au hasard dans la production de l'ostréiculteur. On suppose que toutes les huitres ont la même chance d'être choisies.

On considère les évènements suivants :

- J : « l'huître prélevée est une huître japonaise »,
- C : « l'huître prélevée est de calibre n° 3 ».

a. Construire un arbre pondéré complet traduisant la situation.

b. Calculer la probabilité que l'huître prélevée soit une huître plate de calibre n° 3.

c. Justifier que la probabilité d'obtenir une huître de calibre n° 3 est $0,695$.

d. Le service sanitaire a prélevé une huître de calibre n° 3. Quelle est la probabilité que ce soit une huître plate ?

2. La masse d'une huître peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale de moyenne $\mu = 90$ et d'écart-type $\sigma = 2$.

a. Donner la probabilité que l'huître prélevée dans la production de l'ostréiculteur ait une masse comprise entre 87 g et 89 g.

b. Donner $P(X \geqslant 91)$.

Métropole 19 juin 2014 : Exercice 2 **5 points**

Remarque : La question 2 de la partie A et la partie B ne sont a priori pas faisable en début d'année. Les parties

A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

Un laboratoire pharmaceutique propose des tests de dépistage de diverses maladies. Son service de communication met en avant les caractéristiques suivantes :

— la probabilité qu'une personne malade présente un test positif est $0,99$;
— la probabilité qu'une personne saine présente un test positif est $0,001$.

1. Pour une maladie qui vient d'apparaître, le laboratoire élabore un nouveau test. Une étude statistique permet d'estimer que le pourcentage de personnes malades parmi la population d'une métropole est égal à 0,1 %. On choisit au hasard une personne dans cette population et on lui fait subir le test.

On note M l'évènement « la personne choisie est malade » et T l'évènement « le test est positif ».

a. Traduire l'énoncé sous la forme d'un arbre pondéré.

b. Démontrer que la probabilité $p(T)$ de l'évènement T est égale à $1,989 \times 10^{-3}$.

c. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.

Affirmation : « Si le test est positif, il y a moins d'une chance sur deux que la personne soit malade ».

2.