Devoir surveillé de mathématiques.

Calculatrice autorisée. Durée : environ 2h

Exercice 1 :

Etudier la limite éventuelle en a des fonctions ci-dessous :

1. $f(x)=\frac{5-3x}{1-x^2} \quad a=-\infty$
2. $f(x)=\sqrt{x}-x \quad a=+\infty$
3. $f(x)=\mathrm{e}^{-x}(\cos x+\sin x) \quad a=+\infty$
4. $f(x)=\frac{-1}{16-x^2} \quad a=4$
5. $f(x)=\sqrt{x^3-5x+7} \quad a=+\infty$

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{2\mathrm{e}^x-3}{\mathrm{e}^x+1}$$

La courbe représentative de f admet-elle des asymptotes verticales ? horizontales ?
Déterminer les équations de ces éventuelles asymptotes.

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\frac{2x^2-4x-30}{(x-5)(x+9)} \text{ pour } x\neq 5 \\ f(5)=m \end{cases}$$

1. Déterminer l'éventuelle limite de f en 5.
2. Existe-t-il une valeur de m tel que f soit continue en 3 ? Si oui, laquelle ?

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x\mathrm{e}^{1-x}$$

Déterminer les éventuelles limites en $+\infty$ et $-\infty$ de f.

Exercice 5 :
Une chaîne, suspendue entre deux points d'accroche de même hauteur peut être modélisée par la représentation graphique d'une fonction g définie sur $[-1\ ;\ 1]$ par

$$g(x) = \frac{1}{2a}\left(\mathrm{e}^{ax} + \mathrm{e}^{-ax}\right)$$

où a est un paramètre réel strictement positif. On ne cherchera pas à étudier la fonction g.

On montre en sciences physiques que, pour que cette chaîne ait une tension minimale aux extrémités, il faut et il suffit que le réel a soit une solution strictement positive de l'équation

$$(x-1)\mathrm{e}^{2x} - 1 - x = 0.$$

Dans la suite, on définit sur $[0\ ;\ +\infty[$ la fonction f par $f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{2x} - 1 - x$ pour tout réel $x \geqslant 0$.

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f.
   Vérifier que $f'(0) = -2$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$.
2. On note f'' la fonction dérivée de f'.
   Vérifier que, pour tout réel $x \geqslant 0$, $f''(x) = 4x\mathrm{e}^{2x}$.
3. Montrer que, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ la fonction f' s'annule pour une unique valeur, notée x_0.
4. (a) Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, puis montrer que $f(x)$ est négatif pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ x_0]$.
   (b) Calculer $f(2)$.
   En déduire que sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, la fonction f s'annule pour une unique valeur.
   Si l'on note a cette valeur, déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur de a arrondie au centième.