# Compilation d'exercices sur les complexes.

**Exercice 1 : Nouvelle Calédonie novembre 2016**
On se place dans le plan complexe rapporté au repère $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\,\vec{v})$.

Soit $f$ la transformation qui à tout nombre complexe $z$ non nul associe le nombre complexe $f(z)$ défini par :

$$f(z) = z + \frac{1}{z}.$$

On note $M$ le point d'affixe $z$ et $M'$ le point d'affixe $f(z)$.

**1.** On appelle A le point d'affixe $a = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$.
  - **a.** Déterminer la forme exponentielle de $a$.
  - **b.** Déterminer la forme algébrique de $f(a)$.

**2.** Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $f(z) = 1$.

**3.** Soit $M$ un point d'affixe $z$ du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.
  - **a.** Justifier que l'affixe $z$ peut s'écrire sous la forme $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\theta$ un nombre réel.
  - **b.** Montrer que $f(z)$ est un nombre réel.

**4.** Décrire et représenter l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ tels que $f(z)$ soit un nombre réel.

**Exercice 2 : Pondichéry avril 2017**
On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\,\vec{v})$.

**1.** On considère l'équation

$$(E): \qquad z^2 - 6z + c = 0$$

où $c$ est un réel strictement supérieur à 9.
  - **a.** Justifier que (E) admet deux solutions complexes non réelles.
  - **b.** Justifier que les solutions de (E) sont $z_{\mathrm{A}} = 3 + \mathrm{i}\sqrt{c-9}$ et $z_{\mathrm{B}} = 3 - \mathrm{i}\sqrt{c-9}$.

**2.** On note A et B les points d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}}$ et $z_{\mathrm{B}}$.
Justifier que le triangle OAB est isocèle en O.

**3.** Démontrer qu'il existe une valeur du réel $c$ pour laquelle le triangle OAB est rectangle et déterminer cette valeur.

**Exercice 3 : Métropole juin 2015** **1.** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E) d'inconnue $z$ :

$$z^2 - 8z + 64 = 0.$$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,; \vec{u}, \vec{v})$.

**2.** On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 4 + 4\mathrm{i}\sqrt{3}$, $b = 4 - 4\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $c = 8\mathrm{i}$.

**a.** Calculer le module et un argument du nombre $a$.

**b.** Donner la forme exponentielle des nombres $a$ et $b$.

**c.** Montrer que les points A, B et C sont sur un même cercle ce de centre O dont on déterminera le rayon.

**d.** Placer les points A, B et C dans le repère $(\mathrm{O}\,; \vec{u}, \vec{v})$.

Pour la suite de l'exercice, on pourra s'aider de la figure de la question **2. d.** complétée au fur et à mesure de l'avancement des questions.

**3.** On considère les points A′, B′ et C′ d'affixes respectives $a' = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, $b' = b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et $c' = c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

**a.** Montrer que $b' = 8$.

**b.** Calculer le module et un argument du nombre $a'$.

Pour la suite on admet que $a' = -4 + 4\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $c' = -4\sqrt{3} + 4\mathrm{i}$.

**4.** On admet que si $M$ et $N$ sont deux points du plan d'affixes respectives $m$ et $n$ alors le milieu $I$ du segment $[MN]$ a pour affixe $\dfrac{m+n}{2}$ et la longueur $MN$ est égale à $|n - m|$.

**a.** On note $r$, $s$ et $t$ les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments [A′B], [B′C] et [C′A]. Calculer $r$ et $s$. On admet que $t = 2 - 2\sqrt{3} + \mathrm{i}\left(2 + 2\sqrt{3}\right)$.

**b.** Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature du triangle RST ? Justifier ce résultat.

**Exercice 4 : Centres étrangers juin 2017**

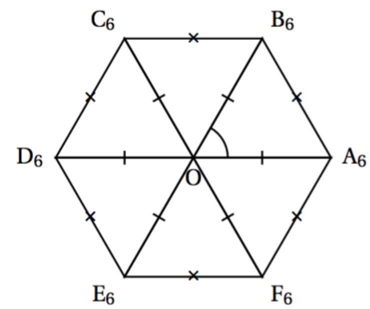
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\,\vec{v})$.

Pour tout entier $n \geqslant 4$, on considère $P_n$ un polygone régulier à $n$ côtés, de centre O et dont l'aire est égale à 1. On admet qu'un tel polygone est constitué de $n$ triangles superposables à un triangle $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$ donné, isocèle en O.

On note $r_n = \mathrm{OA}_n$ la distance entre le centre O et le sommet $\mathrm{A}_n$ d'un tel polygone.

**Partie A : étude du cas particulier $n = 6$**

On a représenté ci-contre un polygone $P_6$.




**1.** Justifier le fait que le triangle $\mathrm{OA}_6\mathrm{B}_6$ est équilatéral, et que son aire est égale à $\dfrac{1}{6}$.

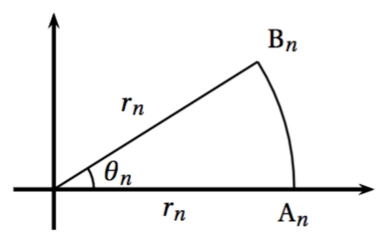
**2.** Exprimer en fonction de $r_6$ la hauteur du triangle $\mathrm{OA}_6\mathrm{B}_6$ issue du sommet $\mathrm{B}_6$.

**3.** En déduire que $r_6 = \sqrt{\dfrac{2}{3\sqrt{3}}}$.

**Partie B : cas général avec $n \geqslant 4$**

Dans cette partie, on considère le polygone $P_n$ avec $n \geqslant 4$, construit de telle sorte que le point $\mathrm{A}_n$ soit situé sur l'axe réel, et ait pour affixe $r_n$.

On note alors $r_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n}$ l'affixe de $\mathrm{B}_n$ où $\theta_n$ est un réel de l'intervalle $\left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.




**1.** Exprimer en fonction de $r_n$ et $\theta_n$ la hauteur issue de $\mathrm{B}_n$ dans le triangle $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$ puis établir que l'aire de ce triangle est égale à $\dfrac{r_n^2}{2}\sin(\theta_n)$.

**2.** On rappelle que l'aire du polygone $P_n$ est égale à 1.

Donner, en fonction de $n$, une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}_n}\,,\ \overrightarrow{\mathrm{OB}_n}\right)$, puis démontrer que :

$$r_n = \sqrt{\frac{2}{n\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}}.$$

**Partie C : étude de la suite $(r_n)$**

On considère la fonction $f$ définie pour tout réel $x$ de l'intervalle $]0\ ;\ \pi[$ par

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Ainsi, le nombre $r_n$, défini dans la partie B pour $n \geqslant 4$, s'exprime à l'aide de la fonction $f$ par :

$$r_n = \sqrt{\frac{1}{\pi} f\left(\frac{2\pi}{n}\right)}.$$

On admet que la fonction $f$ est strictement croissante sur l'intervalle $]0\ ;\ \pi[$.

**1.** Montrer que la suite $(r_n)$ est décroissante. On pourra pour cela commencer par démontrer que pour tout $n \geqslant 4$, on a : $0 < \dfrac{2\pi}{n+1} < \dfrac{2\pi}{n} < \pi$.

**2.** En déduire que la suite $(r_n)$ converge. On ne demande pas de déterminer sa limite $L$, et on admet dans la suite de l'exercice que $L = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

**3.** On considère l'algorithme suivant.

| | |
|---|---|
| VARIABLES : | $n$ est un nombre entier |
| TRAITEMENT : | $n$ prend la valeur 4 |
| | Tant que $\sqrt{\dfrac{2}{n\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}} > 0,58$ faire |
| | $n$ prend la valeur $n+1$ |
| | Fin Tant que |
| SORTIE : | Afficher $n$ |

Quelle valeur numérique de $n$ va afficher en sortie cet algorithme ?

**Exercice 5 : Centres étrangers juin 2016**

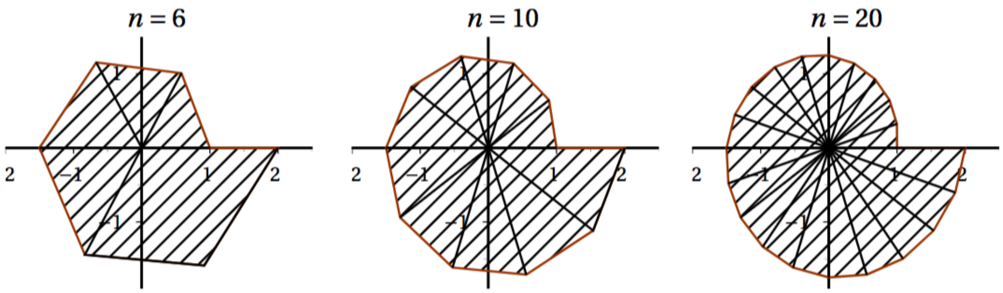
On veut modéliser dans le plan la coquille d'un nautile à l'aide d'une ligne brisée en forme de spirale. On s'intéresse à l'aire délimitée par cette ligne.

On munit le plan d'un repère orthonormal direct $(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})$.

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2. Pour tout entier $k$ allant de 0 à $n$, on définit les nombres complexes $z_k = \left(1+\dfrac{k}{n}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$ et on note $M_k$ le point d'affixe $z_k$.

Dans ce modèle, le pourtour du nautile est la ligne brisée reliant tous les points $M_k$ avec $0 \leqslant k \leqslant n$.

Par exemple, pour les entiers $n = 6$, $n = 10$ et $n = 20$, on obtient les figures ci-dessous.




**Partie A : Ligne brisée formée à partir de sept points**

Dans cette partie, on suppose que $n = 6$. Ainsi, pour $0 \leqslant k \leqslant 6$, on a $z_k = \left(1+\dfrac{k}{6}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{6}}$.

1. Déterminer la forme algébrique de $z_1$.
2. Vérifier que $z_0$ et $z_6$ sont des entiers que l'on déterminera.
3. Calculer la longueur de la hauteur issue de $M_1$ dans le triangle $OM_0M_1$ puis établir que l'aire de ce triangle est égale à $\dfrac{7\sqrt{3}}{24}$.

**Partie B : Ligne brisée formée à partir de $n+1$ points**

Dans cette partie, $n$ est un entier supérieur ou égal à 2.

1. Pour tout entier $k$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, déterminer la longueur $OM_k$.
2. Pour $k$ entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, déterminer une mesure des angles $\left(\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{OM_k}\right)$ et $\left(\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{OM_{k+1}}\right)$.

   En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OM_k}\,;\,\overrightarrow{OM_{k+1}}\right)$.
3. Pour $k$ entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, démontrer que la longueur de la hauteur issue de $M_{k+1}$ dans le triangle $OM_kM_{k+1}$ est égale à $\left(1+\dfrac{k+1}{n}\right)\times\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$.

**4.** On admet que l'aire du triangle $OM_kM_{k+1}$ est égale à
$a_k = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \times \left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$ et que l'aire totale délimitée par la ligne brisée est égale à $A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}$.

L'algorithme suivant permet de calculer l'aire $A_n$ lorsqu'on entre l'entier $n$ :

| | |
|---|---|
| VARIABLES | $A$ est un nombre réel |
| | $k$ est un entier |
| | $n$ est un entier |
| TRAITEMENT | Lire la valeur de $n$ |
| | $A$ prend la valeur 0 |
| | Pour $k$ allant de 0 à n-1 |
| |     $A$ prend la valeur $A + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \times \left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$ |
| | Fin Pour |
| SORTIE | Afficher $A$ |

On entre dans l'algorithme $n = 10$

Recopier et compléter le tableau ci-dessous qui illustre le fonctionnement de l'algorithme.

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 0,323 | 0,711 | 1,170 | 1,705 | 2,322 | 3,027 | 3,826 | 4,726 | | |

**5.** On admet que $A_2 = 0$ et que la suite $(A_n)$ converge et que $\lim_{n\to+\infty} A_n = \frac{7\pi}{3} \approx 7,3$.

Recopier et compléter les lignes $L6$ et $L13$ de l'algorithme ci-après qui permet de déterminer le plus petit entier $n$ tel que $A_n \geqslant 7,2$. On ne demande pas de déterminer $n$.

| | | |
|---|---|---|
| $L1$ | VARIABLES : | $A$ est un nombre réel |
| $L2$ | | $k$ est un entier |
| $L3$ | | $n$ est un entier |
| $L4$ | TRAITEMENT : | $n$ prend la valeur 2 |
| $L5$ | | $A$ prend la valeur 0 |
| **L6** | | **Tant que**............ |
| $L7$ | |     $n$ prend la valeur $n+1$ |
| $L8$ | |     $A$ prend la valeur 0 |
| $L9$ | |     Pour $k$ allant de 0 à $n-1$ |
| $L10$ | |         $A$ prend la valeur $A + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \times \left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$ |
| | |     Fin Pour |
| $L12$ | | Fin Tant que |
| **L13** | **SORTIE :** | **Afficher** ... |