

Compilation d'exercices sur les limites de fonctions et sur la continuité de mars 2013 à novembre 2015. (Hors spécialité)

EXERCICE 1 NOUVELLE-CALÉDONIE sur 5 points

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = e^x + \frac{1}{x}.$$

1. Étude d'une fonction auxiliaire

- a. Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = x^2 e^x - 1.$$

Étudier le sens de variation de la fonction g .

- b. Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0 ; +\infty[$ tel que $g(a) = 0$.

Démontrer que a appartient à l'intervalle $[0,703 ; 0,704[$.

- c. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0 ; +\infty[$.

2. Étude de la fonction f

- a. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

- b. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Démontrer que pour tout réel strictement positif x , $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

- c. En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

- d. Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel

$$m = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}.$$

- e. Justifier que $3,43 < m < 3,45$.

EXERCICE 2 ANTILLES-GUYANE 19 JUIN 2014 sur 6 points

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels par

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}.$$

On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Partie A

1. Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble \mathbb{R} par

$$g(x) = 1 - x + e^x.$$

Dresser, en le justifiant, le tableau donnant les variations de la fonction g sur \mathbb{R} (les limites de g aux bornes de son ensemble de définition ne sont pas attendues).

En déduire le signe de $g(x)$.

2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.
3. On appelle f' la dérivée de la fonction f sur \mathbb{R} .
Démontrer que, pour tout réel x ,

$$f'(x) = e^{-x} g(x).$$

4. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur \mathbb{R} .
5. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur \mathbb{R} .
Démontrer que $-1 < \alpha < 0$.
6. **a.** Démontrer que la droite T d'équation $y = 2x + 1$ est tangente à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 0.
b. Étudier la position relative de la courbe \mathcal{C} et de la droite T .

EXERCICE 4 PONDICHÉRY 8 AVRIL 2014 sur 7 points

Pas d'utilisation du TVI et peu de limites.

Partie A

f est une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} . f' est la fonction dérivée de la fonction f .

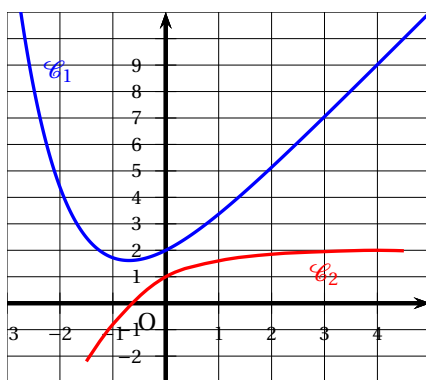
Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on nomme \mathcal{C}_1 la courbe représentative de la fonction f et \mathcal{C}_2 la courbe représentative de la fonction f' .

Le point A de coordonnées (0 ; 2) appartient à la courbe \mathcal{C}_1 .

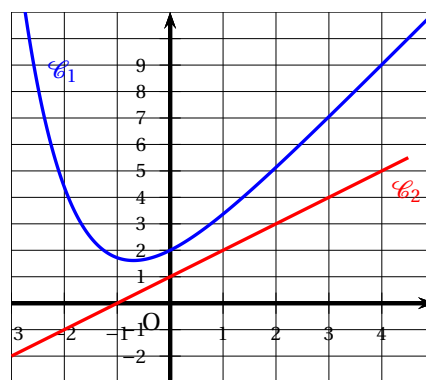
Le point B de coordonnées (0 ; 1) appartient à la courbe \mathcal{C}_2 .

1. Dans les trois situations ci-dessous, on a dessiné la courbe représentative \mathcal{C}_1 de la fonction f . Sur l'une d'entre elles, la courbe \mathcal{C}_2 de la fonction dérivée f' est tracée convenablement. Laquelle ? Expliquer le choix effectué.

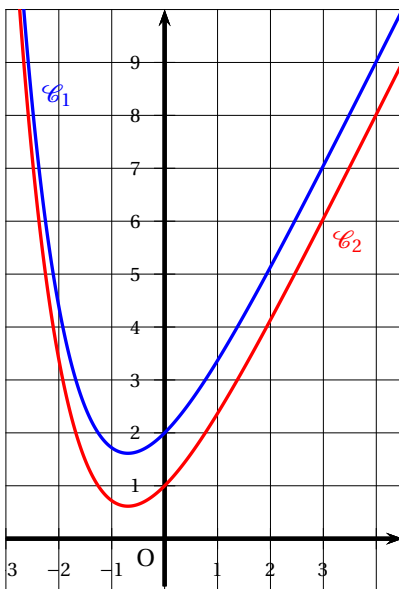
Situation 1



Situation 2 (\mathcal{C}_2 est une droite)



Situation 3



2. Déterminer l'équation réduite de la droite Δ tangente à la courbe \mathcal{C}_1 en A.
3. On sait que pour tout réel x , $f(x) = e^{-x} + ax + b$ où a et b sont deux nombres réels.
 - a. Déterminer la valeur de b en utilisant les renseignements donnés par l'énoncé.
 - b. Prouver que $a = 2$.

4. Étudier les variations de la fonction f sur \mathbb{R} .
5. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

EXERCICE 4 POLYNÉSIE 13 JUIN 2014 sur 5 points

Pas d'utilisation du TVI mais très intéressant sur les limites, la question 4 n'est a priori pas faisable en début d'année.

Soient f et g les fonctions définies sur \mathbb{R} par

$$f(x) = e^x \quad \text{et} \quad g(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - 1.$$

On note \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.

1. Démontrer que les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g ont un point commun d'abscisse 0 et qu'en ce point, elles ont la même tangente Δ dont on déterminera une équation.
2. Étude de la position relative de la courbe \mathcal{C}_g et de la droite Δ
Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - x - 2$.
 - a. Déterminer la limite de la fonction h en $-\infty$.
 - b. Justifier que, pour tout réel x , $h(x) = x \left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} - 1 - \frac{2}{x} \right)$.
En déduire la limite de la fonction h en $+\infty$.
 - c. On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur \mathbb{R} .
Pour tout réel x , calculer $h'(x)$ et étudier le signe de $h'(x)$ suivant les valeurs de x .
 - d. Dresser le tableau de variations de la fonction h sur \mathbb{R} .
 - e. En déduire que, pour tout réel x , $2e^{\frac{x}{2}} - 1 \geq x + 1$.
 - f. Que peut-on en déduire quant à la position relative de la courbe \mathcal{C}_g et de la droite Δ ?
3. Étude de la position relative des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g
 - a. Pour tout réel x , développer l'expression $\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2$.
 - b. Déterminer la position relative des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .
4. Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine compris entre les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

EXERCICE 3 LIBAN 28 MAI 2013 sur 6 points

Pas d'utilisation du TVI. Les questions 4 des parties A et B ne sont a priori pas faisables en début d'année.

Étant donné un nombre réel k , on considère la fonction f_k définie sur \mathbb{R} par

$$f_k(x) = \frac{1}{1 + e^{-kx}}.$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Partie A

Dans cette partie on choisit $k = 1$. On a donc, pour tout réel x , $f_1(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$.

La représentation graphique \mathcal{C}_1 de la fonction f_1 dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) est donnée en ANNEXE, à rendre avec la copie.

1. Déterminer les limites de $f_1(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.
2. Démontrer que, pour tout réel x , $f_1(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$.
3. On appelle f_1' la fonction dérivée de f_1 sur \mathbb{R} . Calculer, pour tout réel x , $f_1'(x)$.
En déduire les variations de la fonction f_1 sur \mathbb{R} .
4. On définit le nombre $I = \int_0^1 f_1(x) dx$.

Montrer que $I = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$. Donner une interprétation graphique de I .

Partie B

Dans cette partie, on choisit $k = -1$ et on souhaite tracer la courbe \mathcal{C}_{-1} représentant la fonction f_{-1} .

Pour tout réel x , on appelle P le point de \mathcal{C}_1 d'abscisse x et M le point de \mathcal{C}_{-1} d'abscisse x .

On note K le milieu du segment $[MP]$.

1. Montrer que, pour tout réel x , $f_1(x) + f_{-1}(x) = 1$.
2. En déduire que le point K appartient à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$.
3. Tracer la courbe \mathcal{C}_{-1} sur l'ANNEXE, à rendre avec la copie.
4. En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les courbes \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_{-1} l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

Partie C

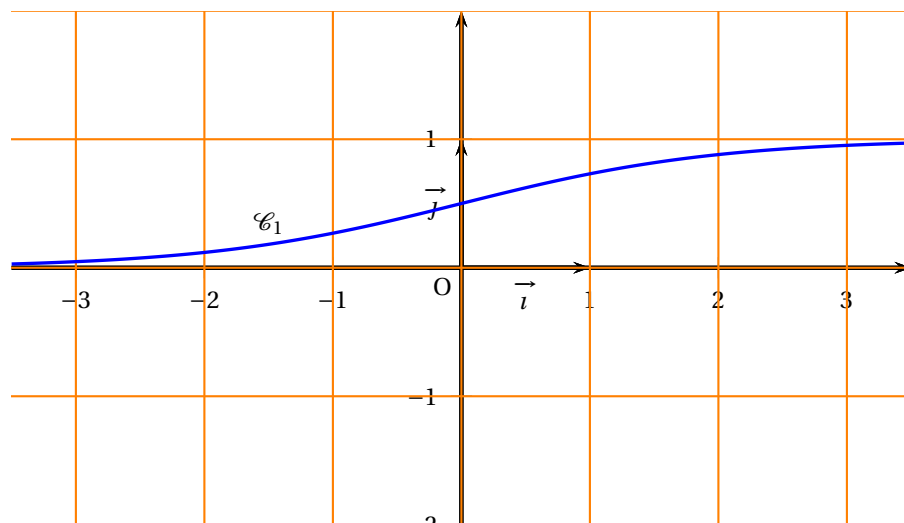
Dans cette partie, on ne privilégie pas de valeur particulière du paramètre k .

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Quelle que soit la valeur du nombre réel k , la représentation graphique de la fonction f_k est strictement comprise entre les droites d'équations $y = 0$ et $y = 1$.
2. Quelle que soit la valeur du réel k , la fonction f_k est strictement croissante.
3. Pour tout réel $k \geq 10$, $f_k\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0,99$.

ANNEXE de l'EXERCICE 3, à rendre avec la copie

Représentation graphique \mathcal{C}_1 de la fonction f_1



EXERCICE 3 ANTILLES-GUYANE 18 JUIN 2013 sur 5 points

Très intéressant sur le TVI. La question 4 n'est a priori pas faisable en début d'année.

Dans tout ce qui suit, m désigne un nombre réel quelconque.

Partie A

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} telle que :

$$f(x) = (x + 1)e^x.$$

1. Calculer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur \mathbb{R} .
Démontrer que pour tout réel x , $f'(x) = (x + 2)e^x$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur \mathbb{R} .

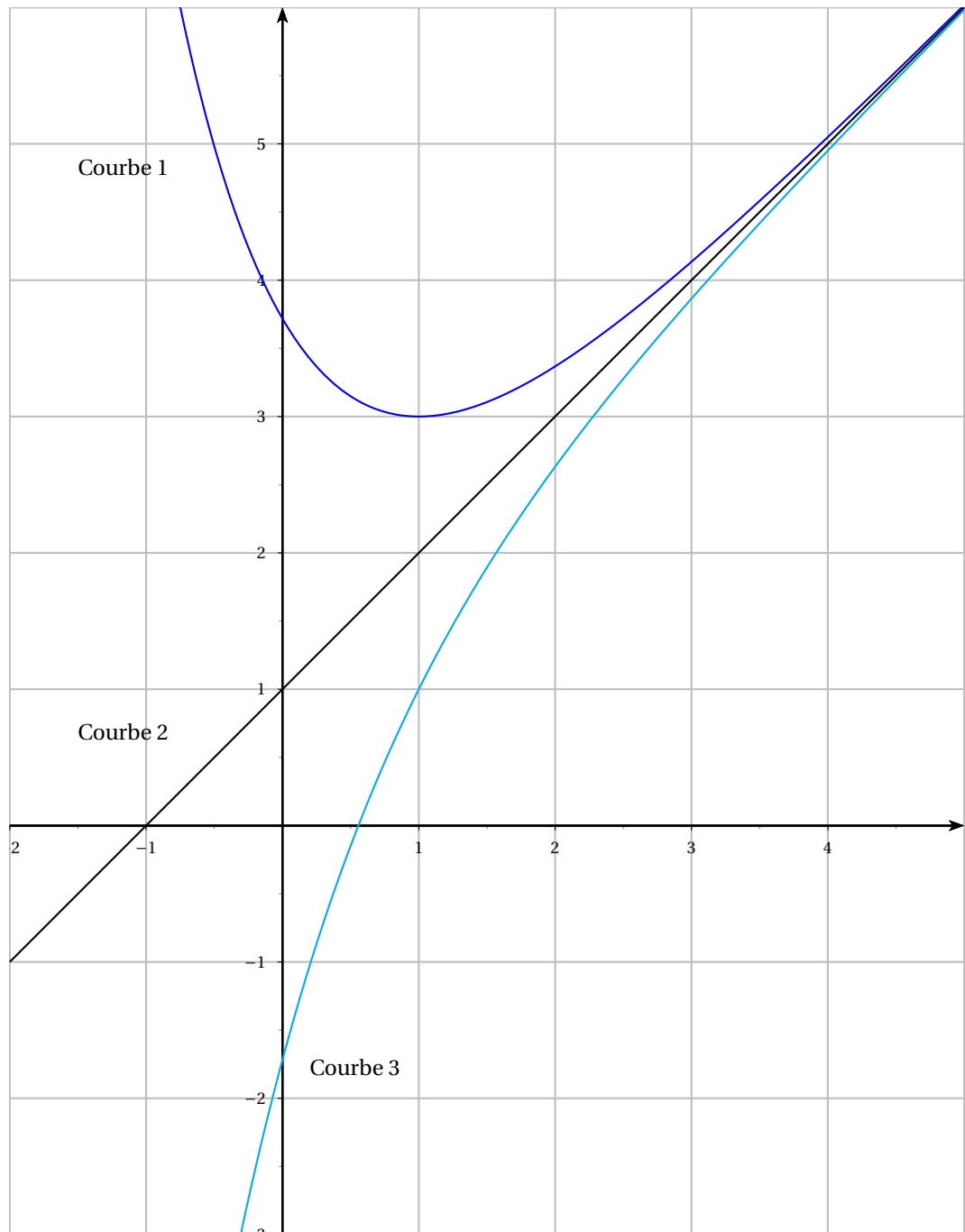
Partie B

On définit la fonction g_m sur \mathbb{R} par :

$$g_m(x) = x + 1 - me^{-x}$$

et on note \mathcal{C}_m la courbe de la fonction g_m dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan.

1.
 - a. Démontrer que $g_m(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = m$.
 - b. Dédire de la partie A, sans justification, le nombre de points d'intersection de la courbe \mathcal{C}_m avec l'axe des abscisses en fonction du réel m .
2. On a représenté en annexe 2 les courbes \mathcal{C}_0 , \mathcal{C}_e , et \mathcal{C}_{-e} (obtenues en prenant respectivement pour m les valeurs 0, e et $-e$).
Identifier chacune de ces courbes sur la figure de l'annexe en justifiant.
3. Étudier la position de la courbe \mathcal{C}_m par rapport à la droite \mathcal{D} d'équation $y = x + 1$ suivant les valeurs du réel m .
4.
 - a. On appelle D_2 la partie du plan comprise entre les courbes \mathcal{C}_e , \mathcal{C}_{-e} , l'axe (Oy) et la droite $x = 2$. Hachurer D_2 sur l'annexe 2.
 - b. Dans cette question, a désigne un réel positif, D_a la partie du plan comprise entre \mathcal{C}_e , \mathcal{C}_{-e} , l'axe (Oy) et la droite Δ_a d'équation $x = a$. On désigne par $\mathcal{A}(a)$ l'aire de cette partie du plan, exprimée en unités d'aire.
Démontrer que pour tout réel a positif : $\mathcal{A}(a) = 2e - 2e^{1-a}$.
En déduire la limite de $\mathcal{A}(a)$ quand a tend vers $+\infty$.



EXERCICE 2 ASIE 18 JUIN 2013 sur 6 points

Intéressant sur le TVI. Ne pas se laisser décourager par la partie A. On considère les fonctions f et g définies pour tout réel x par :

$$f(x) = e^x \quad \text{et} \quad g(x) = 1 - e^{-x}.$$

Les courbes représentatives de ces fonctions dans un repère orthogonal du plan, notées respectivement \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g , sont fournies en annexe.

Partie A

Ces courbes semblent admettre deux tangentes communes. Tracer aux mieux ces tangentes sur la figure de l'annexe.

Partie B

Dans cette partie, on admet l'existence de ces tangentes communes.

On note \mathcal{D} l'une d'entre elles. Cette droite est tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point A d'abscisse a et tangente à la courbe \mathcal{C}_g au point B d'abscisse b .

1.
 - a. Exprimer en fonction de a le coefficient directeur de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point A.
 - b. Exprimer en fonction de b le coefficient directeur de la tangente à la courbe \mathcal{C}_g au point B.
 - c. En déduire que $b = -a$.
2. Démontrer que le réel a est solution de l'équation

$$2(x-1)e^x + 1 = 0.$$

Partie C

On considère la fonction φ définie sur \mathbb{R} par

$$\varphi(x) = 2(x-1)e^x + 1.$$

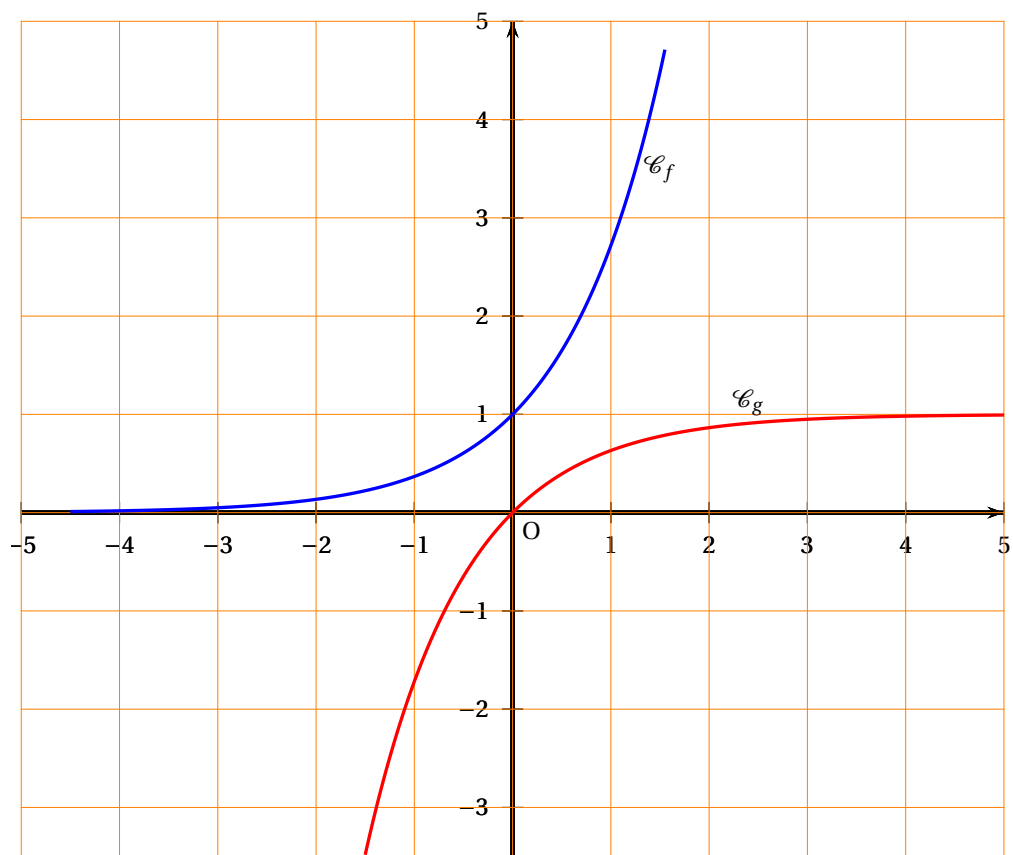
1.
 - a. Calculer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et $+\infty$.
 - b. Calculer la dérivée de la fonction φ , puis étudier son signe.
 - c. Dresser le tableau de variation de la fonction φ sur \mathbb{R} . Préciser la valeur de $\varphi(0)$.
2.
 - a. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans \mathbb{R} .
 - b. On note α la solution négative de l'équation $\varphi(x) = 0$ et β la solution positive de cette équation.
À l'aide d'une calculatrice, donner les valeurs de α et β arrondies au centième.

Partie D

Dans cette partie, on démontre l'existence de ces tangentes communes, que l'on a admise dans la partie B.

On note E le point de la courbe \mathcal{C}_f d'abscisse α et F le point de la courbe \mathcal{C}_g d'abscisse $-\alpha$ (α est le nombre réel défini dans la partie C).

1. Démontrer que la droite (EF) est tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point E.
2. Démontrer que (EF) est tangente à \mathcal{C}_g au point F.



EXERCICE 1 PONDICHÉRY 17 AVRIL 2015 sur 4 points

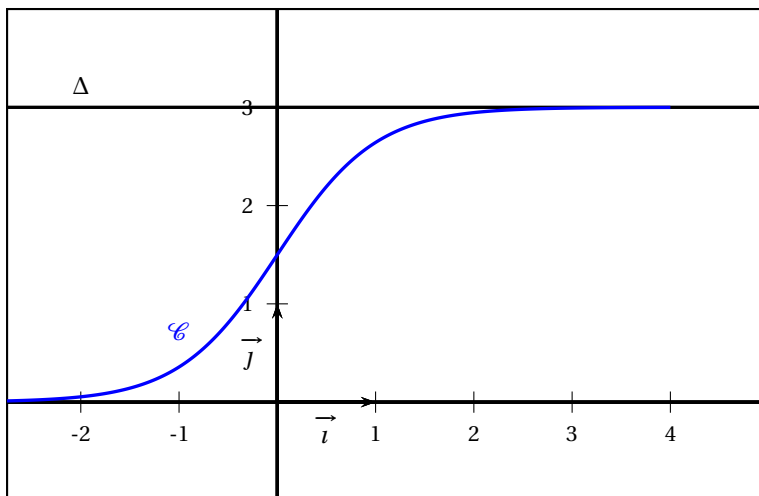
TVI. Les parties B et C ne sont pas faisable avant d'avoir traité l'intégration.

Partie A

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \frac{3}{1 + e^{-2x}}.$$

Sur le graphique ci-après, on a tracé, dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) , la courbe représentative \mathcal{C} de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = 3$.



1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R} .
2. Justifier que la droite Δ est asymptote à la courbe \mathcal{C} .
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 2,999$ admet une unique solution α sur \mathbb{R} .
Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

Partie B

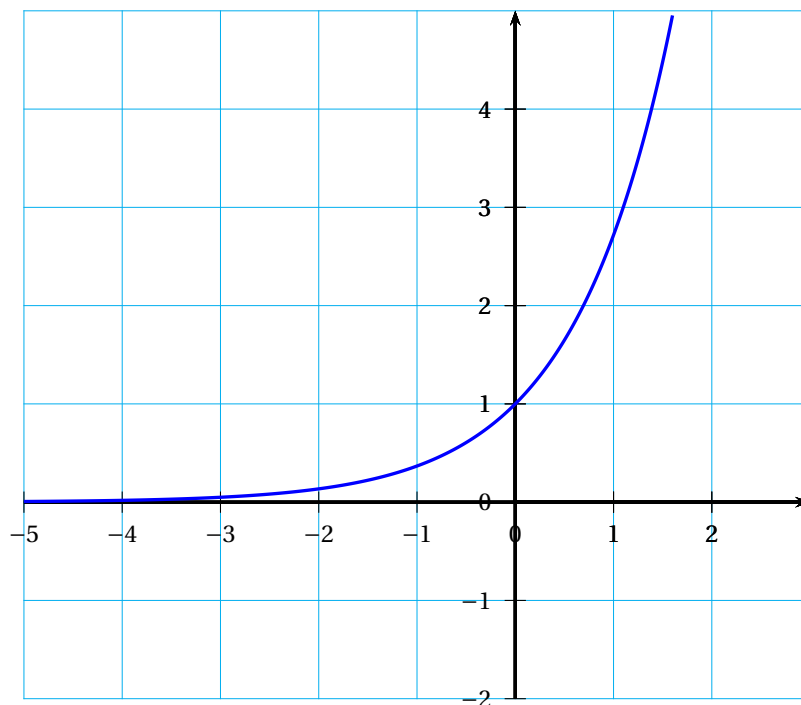
Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = 3 - f(x)$.

1. Justifier que la fonction h est positive sur \mathbb{R} .
2. On désigne par H la fonction définie sur \mathbb{R} par $H(x) = -\frac{3}{2} \ln(1 + e^{-2x})$.
Démontrer que H est une primitive de h sur \mathbb{R} .
3. Soit a un réel strictement positif.
 - a. Donner une interprétation graphique de l'intégrale $\int_0^a h(x) dx$.
 - b. Démontrer que $\int_0^a h(x) dx = \frac{3}{2} \ln\left(\frac{2}{1 + e^{-2a}}\right)$.
 - c. On note \mathcal{D} l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan défini par

$$\begin{cases} x & \geq 0 \\ f(x) & \leq y \leq 3 \end{cases}$$
 Déterminer l'aire, en unité d'aire, du domaine \mathcal{D} .

EXERCICE 3 LIBAN 27 MAI 2015 sur 3 points

On considère la courbe \mathcal{C} d'équation $y = e^x$, tracée ci-dessous.



Pour tout réel m strictement positif, on note \mathcal{D}_m la droite d'équation $y = mx$.

1. Dans cette question, on choisit $m = e$.
Démontrer que la droite \mathcal{D}_e , d'équation $y = ex$, est tangente à la courbe \mathcal{C} en son point d'abscisse 1.
2. Conjecturer, selon les valeurs prises par le réel strictement positif m , le nombre de points d'intersection de la courbe \mathcal{C} et de la droite \mathcal{D}_m .
3. Démontrer cette conjecture.