Devoir non surveillé : Intégration.

(A rendre pour lundi 23/03/2020)

On définit la fonction f_n sur $[0;1]$ par :

$$f_0(x) = \mathrm{e}^x \quad \text{et pour} \quad n \neq 0,\ f_n(x) = \frac{1}{n!}(1-x)^n \mathrm{e}^x$$

On rappelle que $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n$, et que se nombre se lit « factorielle n » .

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

1. Calculer u_0.

2. Démontrer que, pour tout x de $[0;1]$,

$$f_1'(x) = -f_0(x) + f_1(x)$$

En déduire que $u_1 - u_0 = -1$ et donner la valeur de u_1.

3. Démontrer que, pour tout x de $[0;1]$,

$$f_{n+1}'(x) = -f_n(x) + f_{n+1}(x)$$

En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n - \frac{1}{(n+1)!}$$

4. En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$u_n = \mathrm{e} - 1 - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!}$$

5. a. Montrer que, pour tout x de $[0;1]$,

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{\mathrm{e}^x}{n!}$$

b. En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$0 \leq u_n \leq \frac{\mathrm{e}-1}{n!}$$

6. En déduire la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} 1 + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!}$$