

## Activité : Introduction aux fonctions de densité.

Dans une région, on a constaté que tout habitant résidait à moins de six kilomètres d'un éco-point (site pour déposer bouteille de verre, papier recyclable, etc.).

1. Un relevé statistique a permis d'établir l'histogramme des fréquences représenté sur la figure 1. Ainsi, la fréquence de la population habitant entre 0 et 1 km d'un éco-point est de 0,51 ou, dit autrement, 51 % de la population habite entre 0 et 1 km d'un éco-point.

a. Quel est le pourcentage d'habitants résidant à moins de 3 km d'un éco-point ?

b. Que vaut la somme des aires des rectangles de l'histogramme ?

2. On suppose que la population est très grande et on choisit un habitant au hasard.

On crée la variable aléatoire  $X$  qui à chacun des événements élémentaires de cette expérience aléatoire, donc à chaque personne, associe la distance séparant la résidence de cette personne de l'éco-point le plus proche.

$X$  prend donc ses valeurs dans l'intervalle  $[0; 6[$ , et on peut considérer qu'il y a une infinité de possibilités.

On dit alors que la variable aléatoire  $X$  est continue (par opposition à discrète). On veut définir certaines caractéristiques de la loi de probabilité de  $X$ . Compléter :

•  $P(1 \leq X \leq 2) = \dots\dots\dots$       •  $P(X \leq 4) = \dots\dots\dots$       •  $P(X \geq 5) = \dots\dots\dots$

3. Une étude plus précise a permis de relever les distances à 0,1 km près et de construire l'histogramme de la figure 2, où chacun des 60 rectangles a pour base 0,1 et pour **aire** la fréquence de la classe correspondante.

a. Le 1er rectangle a une hauteur de 0,71. Quel pourcentage de la population réside à moins de 0,1 km de l'éco-point ?

b. Que vaut la somme des aires de tous les rectangles ?

c. On donne dans le tableau ci-dessous un extrait des relevés ayant permis d'élaborer cet histogramme. À l'aide de cet extrait, déterminer  $P(0,5 \leq X \leq 0,8)$

Distance	[0; 0,1]	[0,1; 0,2]	[0,2; 0,3]	[0,3; 0,4]	[0,4; 0,5]	[0,5; 0,6]	[0,6; 0,7]	[0,7; 0,8]	[0,8; 0,9]	[0,9; 1,0]
Fréquence (en %)	7,1	6,5	6,4	5,3	4,8	4,5	4,2	4,2	4,1	3,9

d. Comment pourrait-on obtenir ces mêmes résultats uniquement à partir de l'histogramme ?

4. Si on extrapole à partir des relevés, on voit apparaître une courbe comme sur la figure 3.

Cette courbe représente une fonction  $f$  définie sur  $[0; 6[$  et est appelée densité de probabilité de la loi de  $X$ .

a. Soit  $a$  et  $b$  deux nombres réels de l'intervalle  $[0; 6[$  avec  $a < b$ . En vous inspirant de ce qui a été fait précédemment, comment pourrait-on obtenir la probabilité suivante :  $P(a \leq X \leq b)$ .

- b. Que peut-on dire de l'aire sous la courbe de  $f$  entre 0 et 6 ?
- c. On suppose qu'ici que  $f(x) \approx 0,75e^{-0,75x}$ .
- Calculer :  $P(1,23 \leq X \leq 3,67)$ .
  - Vérifier que :  $P(0 \leq X \leq 6)$  est proche de 1.
  - Conjecturer la valeur de  $P(X = 3)$ , et plus généralement, la valeur de  $P(X = t)$  pour tout nombre  $t \in [0; 6[$ .

### Figures de l'activité : Introduction de la fonction de densité.

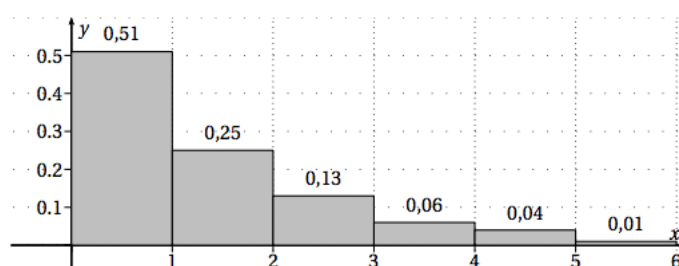


Figure 1

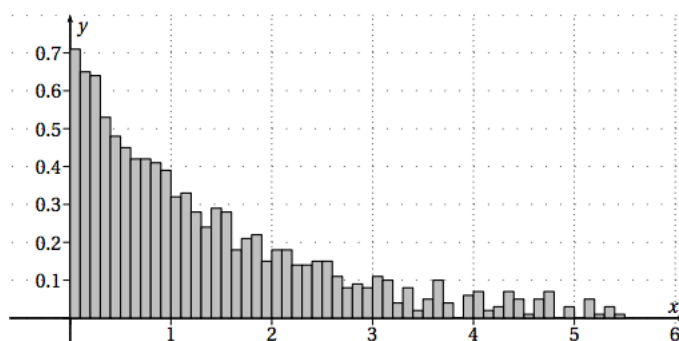


Figure 2

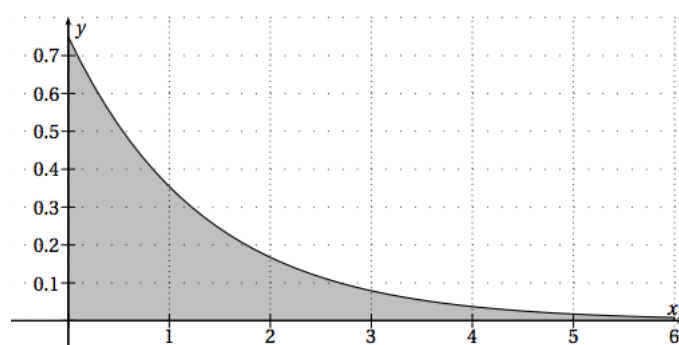


Figure 3