Recherche des structures secondaires d'une chaîne d'ADN

Projet 2I003 réalisé sur l'ancient sujet

LI Mengda, GE Zhichun

5 décembre 2017

1 Exercice 1

1.1

Comme un nucléotide ne peut former une paire avec lui même, donc

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad S_{i,i} = \{\} \text{ et } E_{i,i} = 0$$

1.2

1.2.1

Si ni i, ni j ne sont couplés dans $S_{i,j}$, alors

$$S_{i,j} = S_{i+1,j-1} \quad E_{i,j} = E_{i+1,j-1}$$

1.2.2

Si j n'est pas couplée dans $S_{i,j}$, alors

$$S_{i,j} = S_{i,j-1} \quad E_{i,j} = E_{i,j-1}$$

1.2.3

Si $(i, j) \in S_{i,j}$, alors

$$S_{i,j} = S_{i+1,j-1} \cup (i, j) \quad E_{i,j} = E_{i+1,j-1} + 1$$

1.2.4

Si $(k, j) \in S_{i,j}$ avec $k \in \{i + 1, ..., j - 1\}$, alors

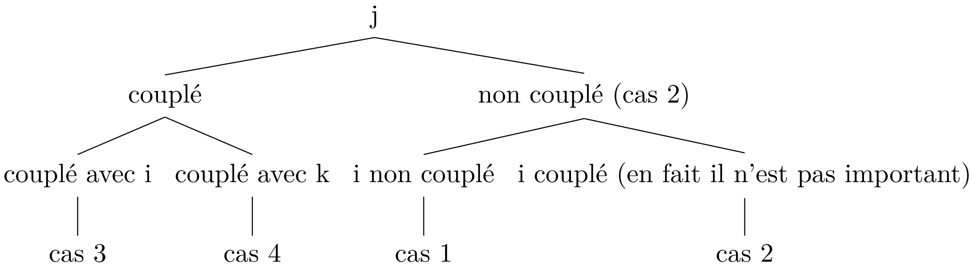
$$S_{i,j} = S_{i,k-1} \cup S_{k,j} \quad E_{i,j} = E_{i,k-1} + E_{k,j}$$

car, par hypothèse, il n'existe pas de nœud : lorsqu'on coupe en k, on ne coupe pas de couple dans ce cas là, il n'y a donc pas de perte. Sinon, on a $S_{i,j} \subset S_{i,k-1} \cup S_{k,j}$ dans tous les cas.

1.3

1.3.1

Par la question 1.2, résumons en distinguant tous les cas possibles :



1. Soit ni i, ni j ne sont couplés dans $S_{i,j}$, alors $E_{i,j} = E_{i+1,j-1}$,
   et on a toujours $E_{i,j} \geq E_{i+1,j-1}$ dans tous les cas.
2. Soit j n'est pas couplée dans $S_{i,j}$, alors $E_{i,j} = E_{i,j-1}$,
   et on a toujours $E_{i,j} \geq E_{i,j-1}$ dans tous les cas.
3. Soit j est couplé avec i, c'est à dire $(i, j) \in S_{i,j}$, alors $E_{i,j} = E_{i+1,j-1} + 1$
4. Soit j est couplé avec un $k \in \{i + 1, ..., j - 1\}$, alors $E_{i,j} = E_{i,k-1} + E_{k,j}$,
   sinon $E_{i,j} \geq E_{i,k-1} + E_{k,j}$ car $S_{i,j} \supset S_{i,k-1} \cup S_{k,j} \quad \forall k \in \{i + 1, ..., j - 1\}$

Soit la fonction e :$\{1, ..., n\} \times \{1, ..., n\} \to \{0, 1\}$ qui vaut 1 ssi i et j peuvent être couplés.

Dans le cas 1 et cas 3, $E_{i,j} = E_{i+1,j-1} + e(i, j)$ et on a $E_{i,j} \geq E_{i+1,j-1} + e(i, j)$ dans tous les cas.

— si j est couplé avec i, $e(i, j) = 1$, $E_{i,j} = E_{i+1,j-1} + 1 = E_{i+1,j-1} + e(i, j)$,

— sinon $e(i, j) = 0$, on a toujours $E_{i,j} \geq E_{i+1,j-1} = E_{i+1,j-1} + e(i, j)$ par le 1.

Dans le cas 2, $E_{i,j} = E_{i,j-1}$ et on a $E_{i,j} \geq E_{i,j-1}$ dans tous les cas. car $S_{i,j} \supset S_{i,j-1}$

Par le cas 4, $\forall k \in \{i + 1, ..., j - 1\}$ $E_{i,j} \geq E_{i,k-1} + E_{k,j}$. Donc $E_{i,j} \geq \max\limits_{i<k<j} E_{i,k-1} + E_{k,j}$ dans tous les cas.

Et s'il existe $k_0 \in \{i + 1, ..., j - 1\}$ tel que $(k_0, j) \in S_{i,j}$, $E_{i,j} = E_{i,k_0-1} + E_{k_0,j}$
Dans ce cas-là, le max est atteint :
$E_{i,k_0-1} + E_{k_0,j} \geq \max\limits_{i<k<j} E_{i,k-1} + E_{k,j}$ et $\max\limits_{i<k<j} E_{i,k-1} + E_{k,j} \geq E_{i,k_0-1} + E_{k_0,j}$
D'où $E_{i,j} = E_{i,k_0-1} + E_{k_0,j} = \max\limits_{i<k<j} E_{i,k-1} + E_{k,j}$ dans le cas 4

En conclusion : $E_{i,j}$ est un majorant de l'ensemble $\{E_{i+1,j-1} + e(i, j), E_{i,j-1}, \max\limits_{i<k<j} E_{i,k-1}\}$, et ce majorant est atteint : il y a toujours un cas où la condition d'égalité est vrai. Donc

$$E_{i,j} = \max\{E_{i+1,j-1} + e(i, j), E_{i,j-1}, \max_{i<k<j} E_{i,k-1} + E_{k,j}\}$$

...

1.3.2

Si k = j, $E_{k,j} = E_{j,j} = 0$ par 1.1, donc $E_{i,j-1} = (E_{i,j-1} + E_{j,j}) \in \{E_{i,k-1} + E_{k,j} \mid i < k \leq j\}$, et

$$E_{i,j-1} \leq \max\{E_{i,k-1} + E_{k,j} \mid i < k \leq j\}$$

On en déduit que $E_{i,j} = \max\{E_{i+1,j-1} + e(i, j), \max\limits_{i<k\leq j} E_{i,k-1} + E_{k,j}\}$

1.4 Code en Python3

```
def tailleMaxRec(a: str, i: int, j: int) -> int:
    n= len(a)
    assert 1 <= i <= n and 1 <= j <= n, 'impossible de tronquer'

    if a == '' or i >= j:
        return 0

    def couple(i: int, j:int) -> bool:
        return {a[i-1], a[j-1]} in [ {'A','T'}, {'C','G'} ]

    def e(i: int, j: int) -> {0,1}:
        if couple(i,j):
            return 1
        else:
            return 0

    return max(tailleMaxRec(a, i+1, j-1) + e(i,j),
               max([tailleMaxRec(a, i, k-1) + tailleMaxRec(a, k, j)
                    for k in range(i+1, j+1)]) )
```

1.5

Cette fonction se termine car chaque fois on appelle récursivement sur une sous-partie de séquence [i+1, j-1], le début de sous-séquence i est strictement croissant et la fin de sous-séquence j est stricetement décroissante. Dans $\mathbb{N}$, l'ordre est bien fondé donc i, j se rencontre en certaine récursion. Lorsque i, j se rencontre, c'est à dire $i \leq j$, la fonction retourne une valeure et se termine en dépillant récursivement.

Cette fonction calcule exactement $\max\{E_{i+1,j-1} + e(i,j), \max_{i<k<j} E_{i,k-1} + E_{k,j}\}$, elle est valide selon la question 1.3.

1.6

1.6.1

Pour u_0, $(p = 0) \Rightarrow (i = j)$. Donc l'appel de fonction retourne simplement 0, mais on l'a appelé quand-même une fois elle-même $u_0 = 1$

Pour u_1, $(p = 1) \Rightarrow (i + 1 = j)$, donc cet appel s'appelle d'abord une fois elle-même et retourne

```
max(tailleMaxRec(a, i+1, j-1) + e(i,j),
               max([tailleMaxRec(a, i, k-1) + tailleMaxRec(a, k, j)
                    for k in range(i+1, j+1)]) )
```

Vu que i + 1 = j, tailleMaxRec(a, i+1, j-1) retourne simplement 0 car $i + 1 = j \geq j - 1$.
Analysons la dernière itérable `[tailleMaxRec(a, i, k-1) + tailleMaxRec(a, k, j) for k in range(i+1, j+1)]` range(j, j+1) ne contient que j, donc cette liste n'a qu'un élément, cela vaut dire qu'on appelle deux fois `tailleMaxRec`. En sommant, $u_1 = 4$

1.6.2

Soit $p \geq 2$, pour u_p

- On appelle d'abord une fois la fonction elle-même : tailleMaxRec(a, i, j), on a 1 appel.
- Et puis on appelle tailleMaxRec (a, i+1, j−1) ,
  $(j-1)-(i+1) = (j-i)-2 = p-2$, on a donc u_{p-2} appel(s).
- Enfin, pour
  [tailleMaxRec(a,i,k−1) + tailleMaxRec(a,k,j) for k in range(i+1, j+1)]
  range(i+1, j+1) équivaut à $[\![i+1, i+p]\!]$, car p = j - i, j = i + p
  Le nombre d'appel de tailleMaxRec(a, i, k−1) équivaut u_{k-1-i},
  Le nombre d'appel de tailleMaxRec(a, k, j) équivaut u_{p+i-k}
  On a donc $\sum_{k=i+1}^{i+p} u_{k-1-i} + \sum_{k=i+1}^{i+p} u_{p+i-k}$ d'appels.
  Pour la première, en éffectuant un changement de variable q = k- (i+1), on a bien $\sum_{q=0}^{p-1} u_q$
  Pour la deuxième, en éffectuant un changement de variable q = p + i - k, on a $\sum_{q=p-1}^{0} u_q$ qui vaut en effet $\sum_{q=0}^{p-1} u_q$.
  En sommant les deux sommes, on a bien $2\sum_{i=0}^{p-1} u_i$

En conclusion, $u_p = u_{p-2} + 1 + 2\sum_{i=0}^{p-1} u_i$

1.6.3

Démontrons par récurrence $u_n \geq 2^n$.

- Cas de base, $u_0 = 1 \geq 2^0$, $u_1 = 3 \geq 2^1$ vérifié dans question 1.
  Et $u_2 = u_0 + 1 + 2(u_0 + u_1) = 10 \geq 2^2$
- Induction : par récurrence forte
  Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ fixé, supposons on a $u_k \geq 2^k \ \forall k \in \{2, ..., n\}$
  $u_{n+1} = u_0 + 1 + 2\sum_{i=0}^{n} u_i \geq 2^0 + 2^0 + 2\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^1 + 2\frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+2} \geq 2^{n+1}$

En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 2^n$

1.6.4

On en déduit que sa complexité est de $\mathcal{O}(2^n)$

1.7

Sa complexité est de $\Theta(n^3)$.
Il y a une boucle for simple et une boucle for triplé dans cet algorithme. Le reste est de temps constant.
La première boucle fait (n-1) itération. Dans chaque itération on éffectue un nombre constant d'opérations. Donc il est de complexité $\Theta(n)$.
Le cœur de l'analyse est au sein de la deuxième boucle composé en effet de trois boucle for, voici le code Python qui l'implémente :

```
for p in range(1, n):
    for i in range(1, n-p+1):
        E[(i,i+p)] = max( E[(i+1,i+p-1)] + e(a, i, i+p),
                          max ( E[(i,k-1)] + E[(k,i+p)]
                                for k in range(i+1, i+p+1)))
```

Il fait en effet $\sum_{p=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-p} \sum_{k=i+1}^{i+p}$ itérations dans laquelle on effectue un nombre fini d'opération.

$\sum_{p=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-p} \sum_{k=i+1}^{i+p} = \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-p} \frac{(i+1+i+p)p}{2} = \sum_{p=1}^{n-1} \frac{(\frac{(3+p)p}{2}+\frac{(2(n-p)+1+p)p}{2})(n-p)}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{(\frac{(\frac{(3+1)1}{2}+\frac{(2(n-1)+1+1)1}{2})(n-1)}{2}+\frac{(\frac{(3+(n-1))(n-1)}{2}+\frac{(2(n-(n-1))+1+(n-1))(n-1)}{2})(n-(n-1))}{2})(n-1)}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{(\frac{(n+\frac{3}{2})(n-1)}{2}+\frac{(\frac{(n+2)(n-1)}{2}+\frac{(n+2)(n-1)}{2})}{2})(n-1)}{2} \Leftrightarrow \frac{(\frac{n^2+n/2-3/2}{2}+\frac{n^2+n-2}{2})(n-1)}{2} \Leftrightarrow \frac{(2n^2+3n/2-7/2)(n-1)}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{(4n+7)(n-1)(n-1)}{8} \in \Theta(n^3)$

2 Exercice 2

2.1 Code en Python3

```
a = 'TCGGCTGCATTTCGA'
def e(a: str, i: int, j: int) -> {0,1}:
    """Retourner 1 si i,j sont couples, 0 sinon."""
    def couple(a: str, i: int, j:int) -> bool:
        return {a[i-1], a[j-1]} in [ {'A','T'}, {'C','G'} ]

    if couple(a,i,j):
        return 1
    else:
        return 0
def tailleMaxRec(a: str, i: int, j: int) -> int:
    n= len(a)
    assert 1 <= i <= n and 1 <= j <= n, 'impossible de tronquer'
    if a == '' or i >= j:
        return 0
    return max(tailleMaxRec(a, i+1, j-1) + e(a,i,j),
               max([tailleMaxRec(a, i, k-1) + tailleMaxRec(a, k, j)
                    for k in range(i+1, j+1)]) )

def tailleMaxIter(a: str, i: int, j: int) -> int:
    n= len(a)
    E=dict()
    E[(1,1)] = 0
    for i in range(2, n+1):
        E[(i,i)] = 0
        E[(i,i-1)] = 0
    for p in range(1, n):
        for i in range(1, n-p+1):
            E[(i,i+p)] = max( E[(i+1,i+p-1)] + e(a, i, i+p),
                              max ( E[(i,k-1)] + E[(k,i+p)]
                                    for k in range(i+1, i+p+1)))
    return E[(i,j)]

if __name__ == '__main__':
    import timeit
    print("E_3_13 calcule par l'algorithme recursive =", tailleMaxRec(a, 3, 13))
    print("E_3_13 calcule par l'algorithme iterative =", tailleMaxIter(a, 3, 13))
    print('10 executions de la fonction recursive prennent',
          timeit.timeit("tailleMaxRec(a, 3, 13)", number=10,
                        setup="from __main__ import tailleMaxRec, a"),'secondes')
    print('10 executions de la fonction iterative prennent',
          timeit.timeit("tailleMaxIter(a, 3, 13)", number=10,
                        setup="from __main__ import tailleMaxIter, a"),'secondes')
```

Le résultat de teste donne

```
E_3_13 calcule par l'algorithme recursive = 4
E_3_13 calcule par l'algorithme iterative = 4
10 executions de la fonction recursive prennent 1.213047794000886 secondes
10 executions de la fonction iterative prennent 0.004673413001000881 secondes
```

2.2

```python
from random import randrange

def SeqAleatoire(n: int) -> str:
    return ''.join(['A','T','C','G'][randrange(4)] for i in range(n))
```

Quelques testes :

```
>>> SeqAleatoire (10)
'TAGACCATAG'
>>> SeqAleatoire (10)
'TCGACAGATT'
>>> SeqAleatoire (11)
'GGGGTGGGGCT'
>>> SeqAleatoire (11)
'CTTAATTCTGG'
```

2.3 Test expérimental : question 3, 4, 5

```python
import timeit

def testRec() -> None:
    n = 1
    lt0 = 0
    while True:
        a = SeqAleatoire(n)
        t1 = timeit.timeit("tailleMaxRec(a, 1, n)", number=1,
                           setup="from __main__ import tailleMaxRec",
                              globals=locals())
        print('''CRec({0:d})  = {1:7f}, log'(CRec({0:d})) = {2:7f}'''.format(
            n, t1, log(t1) - lt0))
        print()
        if t1 > 600:
            break
        n = n + 1
        lt0 = log(t1)
```

```
def testIter() -> None:
    n = 1
    while True:
        a = SeqAleatoire(n)
        t2 = timeit.timeit("tailleMaxIter(a, 1, n)", number=1,
                setup="from __main__ import tailleMaxIter",
                    globals=locals())
        print('CIter({0:d}) = {1:7f}, CIter({0:d})/{0:d}^3 = {2:7f}'.format(
            n, t2, t2 / n**3))
        print()
        if t2 > 300:
            break
        n = n + 1
```

2.3.1 Test de la fonction récursive

```
>>> testRec()
CRec(1)   = 0.000003, log'(CRec(1)) = -12.782327

CRec(2)   = 0.000085, log'(CRec(2)) = 3.406688

CRec(3)   = 0.000040, log'(CRec(3)) = -0.739755

CRec(4)   = 0.000066, log'(CRec(4)) = 0.490493

CRec(5)   = 0.000169, log'(CRec(5)) = 0.939710

CRec(6)   = 0.000681, log'(CRec(6)) = 1.392812

CRec(7)   = 0.002577, log'(CRec(7)) = 1.331125

CRec(8)   = 0.006125, log'(CRec(8)) = 0.865912

CRec(9)   = 0.015648, log'(CRec(9)) = 0.937961

CRec(10)   = 0.041903, log'(CRec(10)) = 0.984977

CRec(11)   = 0.129540, log'(CRec(11)) = 1.128638

CRec(12)   = 0.408717, log'(CRec(12)) = 1.149034

CRec(13)   = 1.262126, log'(CRec(13)) = 1.127531

CRec(14)   = 4.076094, log'(CRec(14)) = 1.172342

CRec(15)   = 13.468090, log'(CRec(15)) = 1.195184

CRec(16)   = 43.075104, log'(CRec(16)) = 1.162622

CRec(17)   = 144.504570, log'(CRec(17)) = 1.210366

CRec(18)   = 480.611199, log'(CRec(18)) = 1.201747

CRec(19)   = 1446.607645, log'(CRec(19)) = 1.102334
```

On peut voir que le temps d'execution de tailleMaxRec croît très vite en raison de sa complexité exponentielle. Lorsque n = 18, cela prend plus de 5 minutes pour l'exécuter et plus de 10 minutes lorsque n = 19. Donc la plus grande valeur de n que je peux traiter est 19.
La pente de la droite $\log' CRec(n) \approx 1$, qui vaut dire que cette fonction est affine à n.

2.3.2 Test de la fonction itérative

Le calcul par l'itération est très efficace donc la plus grande valeur que je peux tester est relativement très grande et pratiquement je ne peux pas afficher le résultat de test entier. Je donne un extrait de test ici. On peut voir que $\frac{CIter(n)}{n^3}$ vaut constamment prèsque nul.

```
CIter(1) = 0.000005, CIter(1)/1^3 =  0.000005

CIter(2) = 0.000040, CIter(2)/2^3 =  0.000005

CIter(3) = 0.000028, CIter(3)/3^3 =  0.000001

...

CIter(25) = 0.001586, CIter(25)/25^3 =  0.000000

CIter(26) = 0.001813, CIter(26)/26^3 =  0.000000

CIter(27) = 0.001995, CIter(27)/27^3 =  0.000000

CIter(28) = 0.002584, CIter(28)/28^3 =  0.000000

...

CIter(72) = 0.025478, CIter(72)/72^3 =  0.000000

CIter(73) = 0.026434, CIter(73)/73^3 =  0.000000

CIter(74) = 0.028332, CIter(74)/74^3 =  0.000000

CIter(75) = 0.029268, CIter(75)/75^3 =  0.000000

...

CIter(100) = 0.062157, CIter(100)/100^3 =  0.000000

CIter(101) = 0.065108, CIter(101)/101^3 =  0.000000

CIter(102) = 0.069097, CIter(102)/102^3 =  0.000000

...

CIter(200) = 0.467661, CIter(200)/200^3 =  0.000000

CIter(201) = 0.470119, CIter(201)/201^3 =  0.000000

CIter(202) = 0.517451, CIter(202)/202^3 =  0.000000

CIter(203) = 0.469706, CIter(203)/203^3 =  0.000000
...
CIter(300) = 2.228376, CIter(300)/300^3 =  0.000000

CIter(301) = 2.223427, CIter(301)/301^3 =  0.000000...
```

Voici quelques recherche à la main pour trouver <la plus grande valeur>. Lorsque n = 1500, cela prend déjà plus de 5 min pour le calculer. Donc je choisis 1500 comme <la plus grande valeur>.

```
>>> n=500
>>> timeit.timeit("tailleMaxIter(SeqAleatoire(n), 1, n)", number=1,
                  setup="from __main__ import tailleMaxIter",
                     globals=globals())
15.326990880996163
>>> n = 700
>>> timeit.timeit("tailleMaxIter(SeqAleatoire(n), 1, n)", number=1,
                  setup="from __main__ import tailleMaxIter",
                     globals=globals())
39.779907284995716
>>> n = 1000
>>> timeit.timeit("tailleMaxIter(SeqAleatoire(n), 1, n)", number=1,
                  setup="from __main__ import tailleMaxIter",
                     globals=globals())
126.6036247910015
>>> n = 1500
>>> timeit.timeit("tailleMaxIter(SeqAleatoire(n), 1, n)", number=1,
                  setup="from __main__ import tailleMaxIter",
                     globals=globals())
468.63339252900187
```

Appendice

On peut ajouter une comparaison de $\frac{CIter(n)}{n^2}$ pour voir la complexité expérimentalement : $\frac{CIter(n)}{n^2}$ est en fait croissant !

Donc il n'est pas possible que la complexité de l'algorithme itérative soit de $\Theta(n^2)$.

```
CIter(1) = 0.000005, CIter(1)/1^3 = 0.000005, CIter(1)/1^2 = 0.000005

CIter(2) = 0.000028, CIter(2)/2^3 = 0.000004, CIter(2)/2^2 = 0.000007

CIter(3) = 0.000130, CIter(3)/3^3 = 0.000005, CIter(3)/3^2 = 0.000014

CIter(4) = 0.000057, CIter(4)/4^3 = 0.000001, CIter(4)/4^2 = 0.000004

...

CIter(100) = 0.071538, CIter(100)/100^3 = 0.000000, CIter(100)/100^2 = 0.000007

CIter(101) = 0.068498, CIter(101)/101^3 = 0.000000, CIter(101)/101^2 = 0.000007

CIter(102) = 0.067363, CIter(102)/102^3 = 0.000000, CIter(102)/102^2 = 0.000006

...

CIter(198) = 0.446628, CIter(198)/198^3 = 0.000000, CIter(198)/198^2 = 0.000011

CIter(199) = 0.462426, CIter(199)/199^3 = 0.000000, CIter(199)/199^2 = 0.000012

CIter(200) = 0.470033, CIter(200)/200^3 = 0.000000, CIter(200)/200^2 = 0.000012

...

CIter(250) = 1.016588, CIter(250)/250^3 = 0.000000, CIter(250)/250^2 = 0.000016

CIter(251) = 1.017460, CIter(251)/251^3 = 0.000000, CIter(251)/251^2 = 0.000016

CIter(252) = 1.049520, CIter(252)/252^3 = 0.000000, CIter(252)/252^2 = 0.000017

...

CIter(268) = 1.318201, CIter(268)/268^3 = 0.000000, CIter(268)/268^2 = 0.000018

CIter(269) = 1.327808, CIter(269)/269^3 = 0.000000, CIter(269)/269^2 = 0.000018

CIter(270) = 1.354491, CIter(270)/270^3 = 0.000000, CIter(270)/270^2 = 0.000019

CIter(271) = 1.368608, CIter(271)/271^3 = 0.000000, CIter(271)/271^2 = 0.000019

...

CIter(287) = 1.682067, CIter(287)/287^3 = 0.000000, CIter(287)/287^2 = 0.000020

CIter(288) = 1.745375, CIter(288)/288^3 = 0.000000, CIter(288)/288^2 = 0.000021

...

CIter(299) = 2.005110, CIter(299)/299^3 = 0.000000, CIter(299)/299^2 = 0.000022

CIter(300) = 2.021642, CIter(300)/300^3 = 0.000000, CIter(300)/300^2 = 0.000022

CIter(301) = 2.101834, CIter(301)/301^3 = 0.000000, CIter(301)/301^2 = 0.000023
```

```
CIter(302) = 2.104127, CIter(302)/302^3 = 0.000000, CIter(302)/302^2 = 0.000023
...
CIter(347) = 3.612243, CIter(347)/347^3 = 0.000000, CIter(347)/347^2 = 0.000030
CIter(348) = 3.701992, CIter(348)/348^3 = 0.000000, CIter(348)/348^2 = 0.000031
CIter(349) = 3.754785, CIter(349)/349^3 = 0.000000, CIter(349)/349^2 = 0.000031
...
CIter(400) = 6.285140, CIter(400)/400^3 = 0.000000, CIter(400)/400^2 = 0.000039
CIter(401) = 6.664165, CIter(401)/401^3 = 0.000000, CIter(401)/401^2 = 0.000041
CIter(402) = 7.256984, CIter(402)/402^3 = 0.000000, CIter(402)/402^2 = 0.000045
CIter(403) = 6.513025, CIter(403)/403^3 = 0.000000, CIter(403)/403^2 = 0.000040
CIter(404) = 6.679665, CIter(404)/404^3 = 0.000000, CIter(404)/404^2 = 0.000041
...
CIter(424) = 8.426929, CIter(424)/424^3 = 0.000000, CIter(424)/424^2 = 0.000047
CIter(425) = 8.165203, CIter(425)/425^3 = 0.000000, CIter(425)/425^2 = 0.000045
CIter(426) = 7.977312, CIter(426)/426^3 = 0.000000, CIter(426)/426^2 = 0.000044
CIter(427) = 8.363914, CIter(427)/427^3 = 0.000000, CIter(427)/427^2 = 0.000046
CIter(428) = 8.285690, CIter(428)/428^3 = 0.000000, CIter(428)/428^2 = 0.000045
```