Recherche des structures secondaires d'une chaîne d'ADN

Projet 2I003

LI Mengda, GE Zhichun

25 novembre 2017

1 Exercice 1

1.1

Comme un nucléotide ne peut former une paire avec lui même, donc

$$\forall i \in \{1,...,n\}, \quad \mathrm{S}_{i,i} = \{\} \text{ et } \mathrm{E}_{i,i} = 0$$

1.2

1.2.1

Si ni i, ni j ne sont couplés dans $\mathrm{S}_{i,j}$, alors

$$\mathrm{S}_{i,j} = \mathrm{S}_{i+1,j-1}, \quad \mathrm{E}_{i,j} = \mathrm{E}_{i+1,j-1}$$

1.2.2

Si j n'est pas couplée dans $\mathrm{S}_{i,j}$, alors

$$\mathrm{S}_{i,j} = \mathrm{S}_{i,j-1}, \quad \mathrm{E}_{i,j} = \mathrm{E}_{i,j-1}$$

1.2.3

Si $(i,j) \in S_{i,j}$, alors

$$S_{i,j} = \mathrm{S}_{i+1,j-1} \cup (i,j), \quad \mathrm{E}_{i,j} = \mathrm{E}_{i+1,j-1} + 1$$

1.2.4

Si $(k,j) \in S_{i,j}$ avec $k \in \{i+1,...,j-1\}$, alors

$$S_{i,j} = S_{i,k-1} \cup S_{k,j} \quad E_{i,j} = E_{i,k-1} + E_{k,j}$$

1.3

1.3.1

Par la question **??**, résumons en distinguant tous les cas possibles :

1. Soit ni i, ni j ne sont couplés dans $\mathrm{S}_{i,j}$, alors $\mathrm{E}_{i,j} = \mathrm{E}_{i+1,j-1}$,
   sinon on a toujours $\mathrm{E}_{i,j} \geq E_{i+1,j-1}$
2. Soit j n'est pas couplée dans $\mathrm{S}_{i,j}$, alors $\mathrm{E}_{i,j} = \mathrm{E}_{i,j-1}$,
   sinon on a toujours $\mathrm{E}_{i,j} \geq E_{i,j-1}$
3. Soit j est couplé avec i, c'est à dire $(i,j) \in S_{i,j}$, alors $\mathrm{E}_{i,j} = \mathrm{E}_{i+1,j-1} + 1$
4. Soit j est couplé avec un $k \in \{i+1, ..., j-1\}$, alors $E_{i,j} = E_{i,k-1} + E_{k,j}$,
   sinon $E_{i,j} \geq E_{i,k-1} + E_{k,j}$ car $S_{i,j} \supset S_{i,k-1} \cup S_{k,j} \quad \forall k \in \{i+1, ..., j-1\}$

Soit la fonction e :$\{1, ..., n\} \times \{1, ..., n\} \rightarrow \{0,1\}$ qui vaut 1 ssi i et j peuvent être couplés.

$\underline{\text{Dans le cas } \textbf{??} \text{ et cas 3, } E_{i,j} = E_{i+1,j-1} + e(i,j)}$ et on a toujours $\underline{E_{i,j} \geq E_{i+1,j-1} + e(i,j)}$ car

- si j est couplé avec i, $e(i,j) = 1$, $\mathrm{E}_{i,j} = E_{i+1,j-1} + 1 = E_{i+1,j-1} + e(i,j)$,
- sinon $e(i,j) = 0$, on a toujours $\mathrm{E}_{i,j} \geq E_{i+1,j-1} = E_{i+1,j-1} + e(i,j)$ par **??**.

$\underline{\text{Dans le cas 2, } E_{i,j} = E_{i,j-1}}$ et on a toujours $\underline{E_{i,j} \geq E_{i,j-1}}$ car $\mathrm{S}_{i,j} \supset S_{i,j-1}$

Par le cas 4, $\forall k \in \{i+1, ..., j-1\}$ $E_{i,j} \geq E_{i,k-1} + E_{k,j}$. Donc $\underline{E_{i,j} \geq \max\limits_{i<k<j} E_{i,k-1} + E_{k,j}}$.

Et s'il existe $k_0 \in \{i+1, ..., j-1\}$ tel que $(k_0, j) \in S_{i,j}$, $E_{i,j} = E_{i,k_0-1} + E_{k_0,j}$
Dans ce cas-là, le max est atteint :
$E_{i,k_0-1} + E_{k_0,j} \geq \max\limits_{i<k<j} E_{i,k-1} + E_{k,j}$ et $\max\limits_{i<k<j} E_{i,k-1} + E_{k,j} \geq E_{i,k_0-1} + E_{k_0,j}$
D'où $\underline{E_{i,j} = E_{i,k_0-1} + E_{k_0,j} = \max\limits_{i<k<j} E_{i,k-1} + E_{k,j}}$

En conclusion : $E_{i,j}$ est un majorant de l'ensemble $\{E_{i+1,j-1} + e(i,j),\ E_{i,j-1},\ \max\limits_{i<k<j} E_{i,k-1}\}$, et ce majorant est atteint : il y a toujours un cas où la condition d'égalité est vrai. Donc

$$E_{i,j} = \max\{E_{i+1,j-1} + e(i,j),\ E_{i,j-1},\ \max_{i<k<j} E_{i,k-1} + E_{k,j}\}$$

...

1.3.2

Si k = j, $E_{k,j} = E_{j,j} = 0$ par **??**, donc $E_{i,j-1} \in \{i < k \leq j \mid E_{i,k-1} + E_{k,j}\}$, et

$$E_{i,j-1} \leq \max\{i < k \leq j \mid E_{i,k-1} + E_{k,j}\}$$

$$\text{On en déduit que } E_{i,j} = \max\{E_{i+1,j-1} + e(i,j),\ \max_{i<k<j} E_{i,k-1} + E_{k,j}\}$$

1.4

```
begin
{ do nothing }
end;
Write('Case insensitive ');
Write('Pascal keywords.');
```