

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Береснев Владимир Леонидович

ФИТ НГУ

24 сентября 2025 г.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>2</b>
1.1	Построение математических моделей . . . . .	2
1.2	Оптимизационные (экстремальные) задачи . . . . .	5
1.3	Алгоритмы . . . . .	6
1.4	Примеры задач . . . . .	6
1.4.1	Задача о машине . . . . .	7
1.4.2	Задача о салфетках . . . . .	8
1.4.3	Задача раскроя . . . . .	9
1.5	Свойства оптимизационных задач . . . . .	10
1.5.1	Решение задачи о салфетках . . . . .	13
1.6	Использование булевых переменных . . . . .	16
1.6.1	Задача о проектах . . . . .	23
1.6.2	Задача о предприятии . . . . .	25
<b>2</b>	<b>Динамическое программирование</b>	<b>28</b>
2.1	Задача загрузки судна . . . . .	28
2.2	$N$ -шаговый процесс принятия решений . . . . .	32
2.3	Задача выбора оптимальной стратегии $N$ -шагового процесса . . . . .	33
2.3.1	Решение задачи о машине . . . . .	36
2.3.2	Задача о фермере . . . . .	45

# Глава 1

## Введение

### Определение

*Организованные системы* — системы, в которых решения принимаются «сознательно». Примеры таких систем: люди, промышленные предприятия, магазины.

Примеры задач:

- Где построить магазин, чтобы получать наибольшую прибыль?
- Сколько производить деталей на заводе, чтобы отношение между доходом и выручкой было наибольшим?

Примерно до второй мировой войны все сложные решения принимались лишь на основе опыта и здравого смысла. Однако позже появились сложные системы, в которых опыта и здравого смысла оказалось недостаточно. Тогда же появилась **идея** рассматривать числовые характеристики систем для принятия решения, при этом должны использоваться *математические модели* — упрощённые, но адекватные описания реальной жизни.

## 1.1 Построение математических моделей

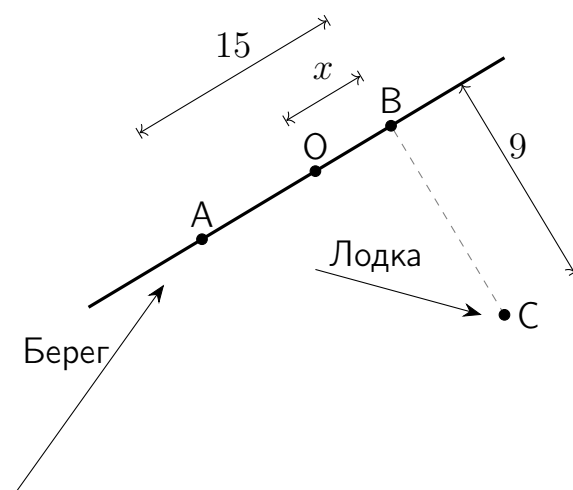
Математические модели строятся на основании *исходных данных* — конкретных проблем в конкретных жизненных ситуациях.

### Примерный алгоритм построения математических моделей

1. Нужно понять, *что будем оптимизировать?* По каким критериям будет оценивать решения? Например, если нас спрашивают, где построить магазин, то

3. *Формулировка задачи* с точным указанием всех характеристик. Каждая из характеристик должна относиться либо к *переменным*, либо к *параметрам*. Первые могут меняться (обозначаются они через  $x, y, z, \dots$ ), а вторые — это константы (обозначаются они через  $a, b, c, \dots$ ). Например, переменные — это выручка и затраты предприятия, а параметры — это площадь помещения, количество станков, количество работников.
4. Выбор всех обозначений и математическая запись с учётом ограничений и требований для переменных.
5. Понимание, что изначальная проблема состоит в другом, не учтены такие-то параметры, а значит нужно вернуться к самому началу...

Для примера рассмотрим следующую задачу: ваш знакомый плывёт на лодке, ему нужно попасть в определённую точку на берегу, и он спрашивает вас, куда ему нужно причалить.



- $C$  — текущее местоположение лодки;
- $A$  — точка, в которую нужно попасть;
- $B$  — ближайшая к лодке точка берега;

- $O$  — точка причаливания;
- $AB = 15$  км;
- $BC = 9$  км (расстояние от лодки до берега);
- $v_{\text{по суше}} = 5$  км/ч;
- $v_{\text{лодки}} = 4$  км/ч;
- $OB = x$ ;
- течения воды нет, то есть скорость течения равна нулю;
- цвет лодки не существен.

Будем оптимизировать время  $t$

$$t = \underbrace{\frac{OC}{v_{\text{по воде}}}}_{\text{движение по воде}} + \underbrace{\frac{OA}{v_{\text{по суше}}}}_{\text{движение по суше}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + 81}}{4} + \frac{15 - x}{5} \rightarrow \min_x$$

Установим **ограничение**

$$0 \leq x \leq 15,$$

потому что иначе решение будет точно неоптимальным.

## Решение

Решим задачу, найдя нули производной

$$\frac{dt}{dx} = \frac{2x}{8\sqrt{x^2 + 81}} - \frac{1}{5} = 0,$$

$$\frac{x}{4\sqrt{x^2 + 81}} = \frac{1}{5},$$

$$\frac{x^2}{16(x^2 + 81)} = \frac{1}{25},$$

$$25x^2 = 16x^2 + 16 \cdot 81,$$

$$9x^2 = 16 \cdot 81,$$

$$x^2 = 16 \cdot 9,$$

$$x_1 = -12, \quad x_2 = 12.$$

Решение  $x_1 = -12$  не подходит ввиду ограничения выше, а вот  $x = 12$  является ответом.

## 1.2 Оптимизационные (экстремальные) задачи

### Определение (экстремальная задача)

Экстремальная задача формулируется следующим образом

1. Есть функция  $f(x)$ , значение которой нужно оптимизировать;
2. Есть набор ограничений  $g_1(x) \leq b_1, g_2(x) \leq b_2, \dots$ ;
3.  $x \in X$ ,  $X$  — множество всех решений,  
при этом нужно найти

$$\min_{x \in X} f(x) \quad \text{или} \quad \max_{x \in X} f(x).$$

### Определение

Допустимые решения — множество всех значений  $x \in X$ , которые удовлетворяют всем ограничения  $\{g_i\}$ .

### Определение

Допустимое решение  $x^*$  называется оптимальным решением задачи, если

$$\forall x \in X \quad f(x^*) \geq f(x).$$

или то же самое

$$f(x^*) = \max_{x \in X} f(x).$$

### Замечание

Ограничения  $\{g_i\}$  могут быть какими угодно.

### Пример

Пусть наши исходные данные это

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max_x,$$

$$g(x) = ax_1 + bx_2 \leq d,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Нужно найти оптимальные  $x_1$  и  $x_2$ .

### Определение

Будем говорить, что есть общая задача  $\mathcal{P}$ , а  $p \in \mathcal{P}$  — конкретная задача, в которой у всех параметров есть конкретные значения. Например, если бы в задаче выше  $c_1, c_2, a, b, d$  были бы конкретными числами. То есть общая задача — это множество конкретных задач.

## Определение

*Длина входа задачи* — это количество ячеек в памяти, которое занимает задача с допущением, что каждое число занимает в памяти ровно одну ячейку. Будем обозначать это  $|p|$ .

## 1.3 Алгоритмы

### Определение

*Элементарные операции* — арифметические операции и операции сравнения.

### Определение

*Трудоёмкость алгоритма  $A$  решения задачи  $p \in \mathcal{P}$*  — это количество элементарных операций, используемых в этом алгоритме. Будем обозначать это  $T_A(p)$ .

### Замечание

Чем больше  $|p|$ , тем больше  $T_A(p)$ , поэтому будем оценивать трудоёмкость так

$$T_A(p) \leq f_A(|p|).$$

### Определение

Если  $f_A(|p|) = C \cdot |p|^k$ , то такой алгоритм будем называть «хорошим» (полиномиальным).

Примерами задач, для которых существуют «хорошие» алгоритмы, являются математические задачи, в которых  $x$  — множество векторов (линейное и нелинейное программирование), и задачи комбинаторики (например, перестановки).

### Определение (задача линейного программирования)

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max_{(x_j)},$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1 \dots m,$$

$$x_j \in \{0, 1, 2, \dots\} \text{ или то же самое } x_j \geq 0, \quad j = 1 \dots n.$$

**Распространённый частный случай:**  $x_j \in \{0, 1\}$ .

## 1.4 Примеры задач

Для примера рассмотрим несколько оптимизационных задач.

## 1.4.1 Задача о машине

На некотором острове есть машина; для работы машины нужны детали, которые могут изнашиваться. В скором времени нужно будет вызвать самолёт, который сможет доставить необходимые детали, однако максимальная масса груза ограничена. Сколько деталей какого типа нужно заказать?

**1. Что будем оптимизировать?** Ответ: машина должна работать максимальное время.

**2. Что существенно влияет на оптимизируемую характеристику?**

Пусть  $i = 1 \dots n$  — вид детали.

*Параметры (то есть фиксированные значения)*

- $m = \{m_i\}_{i=1}^n$  — масса деталей;
- $t = \{t_i\}_{i=1}^n$  — срок службы деталей (часов, дней, месяцев — неважно);
- $a = \{a_i\}_{i=1}^n$  — количество работающих деталей в машине;
- $M$  — максимальная масса посылки.

*Переменные (то что может меняться)*

- $x = \{x_i\}_{i=1}^n$  — сколько нужно взять деталей в посылку.

**3. Математическая формулировка задачи**

Пусть  $T$  — время работы машины, тогда

$$T = \min_{i=1 \dots n} ((x_i + a_i) \cdot t_i) \rightarrow \max_{(x_i)}$$

$$\sum_{i=1}^n m_i x_i \leq M,$$

$$x_i \geq 0.$$

Первое выражение говорит о том, что мы максимизируем время работы машины  $T$  при различных  $(x_i)$ , то есть нам нужно подобрать такие значения  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , при которых время работы будет максимальным. Суть этого выражения заключается в том, что  $x_i + a_i$  — это то, сколько деталей вида  $i$  будет после прилёта самолёта с посылкой. Если учесть, что каждая деталь типа  $i$  имеет срок службы  $t_i$ , то все детали данного типа проработают  $(x_i + a_i) \cdot t_i$ . Ясно, что машина перестанет работать, когда какой-то вид деталей в ней отработает свой срок службы, значит время работы машины — это минимум из времён работы всех деталей.



Второе выражение отражает ограничение задачи, которое состоит в том, что мы не можем заказать груз большей массы, чем установленная максимальная масса посылки. Третье выражение говорит о том, что количество заказываемых деталей не может быть отрицательным — оно и понятно.

## 1.4.2 Задача о салфетках

Пусть есть некоторое кафе, в которое каждый день ходят люди, при этом известно, сколько человек посещает кафе в каждый день недели. Каждому гостю на день выдают салфетку, которую вечером стирают. Салфетки можно стирать с помощью *быстрой* и *медленной* стирок. Первая — дорогая, но работает условно моментально, вторая — дешёвая, но выдача постиранных салфеток происходит лишь через день. Как сэкономить деньги на стирке так, чтобы всем посетителям всегда хватало салфеток?

**1. Что будем оптимизировать?** Ответ: нужно минимизировать затраты на стирку.

**2. Что существенно влияет на оптимизируемую характеристику?**

Пусть  $i = 1 \dots 7$  — день недели.

*Параметры*

- $c_1$  — цена быстрой стирки;
- $c_2$  — цена медленной стирки;
- $T$  — общее количество салфеток в кафе;
- $p_i$  — количество гостей в  $i$ -ый день недели;

*Переменные*

- $x_i$  — количество салфеток, отданных в быструю стирку в  $i$ -ый день недели;
- $y_i$  — количество салфеток, отданных в медленную стирку в  $i$ -ый день недели.

**3. Математическая формулировка задачи**

Пусть  $C$  — затраты на стирку за неделю, тогда

$$C = \sum_{i=1}^7 (c_1 x_i + c_2 y_i) \rightarrow \min_{(x_i), (y_i)},$$

$$x_i + y_i = p_i,$$

$$x_i \geq 0, \quad y_i \geq 0,$$

$$\begin{cases} T - y_7 \geq p_1, \\ T - y_1 \geq p_2, \\ T - y_2 \geq p_3, \\ \dots \\ T - y_5 \geq p_6, \\ T - y_6 \geq p_7. \end{cases}$$

Последние семь неравенств означают, что всем посетителям всегда хватает салфеток.

### 1.4.3 Задача раскроя

Вашему знакомому сантехнику нужно определённое количество коротких труб, однако в магазине можно купить только длинные. Сколько нужно купить длинных труб, чтобы их можно было раскроить на короткие? Пусть нужны

- 10 труб длиной 6 м,
- 15 труб длиной 5 м,
- 26 труб длиной 4 м,

а в магазине продаются лишь трубы длиной 13 м.

**1. Что будем оптимизировать?** Ответ: нужно минимизировать число покупаемых труб длиной 13 м.

**2. Что существенно влияет на оптимизируемую характеристику?**

Рассмотрим все варианты, как можно раскроить длинную трубу на короткие

№	6 м	5 м	4 м
1	2	0	0
2	1	1	0
3	1	0	1
4	0	2	0
5	0	1	2
6	0	0	3

То есть раскроить длинную трубу на короткие можно 6 разными способами. Например, на две трубы длиной 6 метров (первая строка таблицы), на одну трубу длиной 6 метров и на одну трубу длиной 5 метров (вторая строка таблицы) и так далее.

Параметры

- $x_i$  — количество длинных труб, раскроенных  $i$ -ым способом;

### 3. Математическая формулировка задачи

Пусть  $T$  — количество изрезанных длинных труб, тогда

$$T = \sum_{i=1}^6 x_i \rightarrow \min_{(x_i)} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 10 \\ x_2 + 2x_4 + x_5 \geq 15 \\ x_3 + 2x_5 + 3x_6 \geq 26 \end{cases}$$

Последние три неравенства означают, что после раскроя длинных труб мы получили достаточное количество коротких: первое неравенство для труб длиной 6 метров, второе — 5 метров, третье — 4 метра.

### Замечание

В общем случае задаче раскроя является NP-полной.

## 1.5 Свойства оптимизационных задач

### Утверждение 1

$$\max_x f(x) = \max_x \left( (-1) \cdot (-f(x)) \right) = \underbrace{-\min_x (-f(x))}_{\text{новая задача}}.$$

### Утверждение 2 (оценка сверху, релаксированные задачи)

Если  $X \subseteq X'$ , то

$$\max_{x \in X} f(x) \leq \max_{x \in X'} f(x).$$

### Определение

Пусть есть две общие задачи:  $(\mathcal{P}) \max_{x \in X} f(x)$  и  $(\mathcal{Q}) \max_{y \in Y} g(y)$ . Будем говорить, что задача  $\mathcal{P}$  сводится к задаче  $\mathcal{Q}$ , если

$$\forall p \in \mathcal{P} \quad \forall q \in \mathcal{Q}$$

1. существует полиномиальный алгоритм  $A_1$ , который переводит входные данные задачи  $p$  во входные данные задачи  $q$ ;

$$p \xrightarrow{A_1} q$$

2. существует полиномиальный алгоритм  $A_2$ , с помощью которого можно из оптимального решения  $y^0$  задачи  $q$  построить оптимальное решение  $x^*$  задачи  $p$ .

$$x^* \xleftarrow{A_2} y^0$$

Остаётся вопрос: как понять, что построенное решение  $x^*$  — оптимальное?

## Замечание

Везде далее всегда будем оптимизировать именно  $\max$ , а не  $\min$ .

## Утверждение 3 (сведение к другой задаче)

Пусть есть 2 задачи:  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{Q}$ , при этом

1.  $x^0$  — допустимое решение задачи  $\mathcal{P}$ ,
2.  $y^*$  — оптимальное решение задачи  $\mathcal{Q}$ ,
3.  $f(x^0) \geq g(y^*)$ ,
4.  $\forall x \in X \exists y \in Y \quad f(x) \leq g(y)$ ,

тогда  $x^0$  — оптимальное решение задачи  $\mathcal{P}$ .

## Доказательство

Пусть задача  $\mathcal{P}$  имеет оптимальное решение  $x^*$ . По четвёртому пункту для  $x^*$  существует некоторый  $y^0$  такой, что

$$f(x^*) \leq g(y^0). \quad (*)$$

По условию  $y^*$  является оптимальным решением задачи  $\mathcal{Q}$ , значит верно следующее

$$g(y^*) \geq g(y^0). \quad (**)$$

Составим цепочку неравенств

$$f(x^0) \stackrel{(3)}{\geq} g(y^*) \stackrel{(**)}{\geq} g(y^0) \stackrel{(*)}{\geq} f(x^*).$$

Таким образом имеем неравенство

$$f(x^0) \geq f(x^*)$$

хотя  $x^*$  — оптимальное решение задачи  $\mathcal{P}$ . Значит  $x^0 = x^*$ , то есть  $x^0$  является оптимальным.

## Пример

(P)

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max_{(x_j)},$$

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b, \quad (1)$$

$$x_1 + x_2 = d, \quad (2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1 \dots n. \quad (3)$$

Заметим, что  $x_1$  можно выразить через  $x_2$  (и наоборот). Рассмотрим другую задачу

(Q)

$$c_1(d - y_2) + \sum_{j=2}^n c_j y_j \rightarrow \max_{(y_j)},$$

$$a_1(d - y_2) + \sum_{j=2}^n a_j y_j \leq b,$$

$$y_j \geq 0, \quad j = 1 \dots n,$$

$$y_2 \leq d.$$

Покажем, что задача P сводится к задаче Q.

## Доказательство

Пусть  $y^* = (y_1^* \dots y_n^*)$  — это оптимальное решение задачи Q. Будем строить решение  $x^0$  задачи P следующим образом

$$x_j^0 = \begin{cases} d - y_2, & j = 1 \\ y_j, & j > 1 \end{cases}$$

то есть  $x^0 = (d - y_2 \ y_2 \ y_3 \ \dots \ y_n)$ .

1. Покажем, что  $x^0$  — допустимое решение задачи P. Для этого нужно показать, что оно удовлетворяет всем ограничениям. Заметим, что без условия  $y_2 \leq d$  значение  $x_1$  может быть меньше нуля, а значит решение  $x^0$  точно было бы не допустимым (ограничение 3).

(а) Проверим ограничение 2

$$x_1^0 + x_2^0 = d - y_2^* + y_2^* = d.$$

(b) Проверим ограничение 1

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n a_j x_j^0 &= a_1 x_1^0 + a_2 x_2^0 + \cdots + a_n x_n^0 \\ &= a_1(d - y_2^*) + a_2 y_2^* + \cdots + a_n y_n^* \\ &= a_1(d - y_2^*) + \sum_{j=2}^n a_j y_j^* \leq b.\end{aligned}$$

Значит  $x^0$  удовлетворяет всем ограничениям, а поэтому  $x^0$  — допустимое решение.

2. Мы показали, что  $x^0$  — допустимое решение задачи  $\mathcal{P}$ . Осталось показать, что оно оптимальное. Для этого будем использовать [утверждение 3](#).

(a) Выполнимость условия  $f(x^0) \geq g(y^*)$  следует из того, что при подстановке, использованной при проверке ограничения 1, получится равенство

$$f(x^0) = g(y^*).$$

(b) Выполнимость условия

$$\forall x \in X \exists y \in Y \quad f(x) \leq g(y)$$

следует из того, что по любому  $x = (x_j)$  можно построить  $y = (y_j)$  следующим образом

$$y_j = \begin{cases} d - x_2, & j = 1 \\ x_j, & j > 1 \end{cases}$$

И вновь, если всё аккуратно подставить, то получится равенство

$$f(x) = g(y).$$

Таким образом мы доказали, что можно применить [утверждение 3](#), значит  $\mathcal{P} \mapsto \mathcal{Q}$ .

Мы взяли задачу с  $n$  переменными и перешли от неё к задаче с  $n - 1$  переменными. Разве не круто?!

## 1.5.1 Решение задачи о салфетках

Решим [задачу о салфетках](#) с помощью сведения к другой задаче. Запишем математическую формулировку нашей исходной задачи  $\mathcal{P}$

$$C = \sum_{i=1}^7 (c_1 x_i + c_2 y_i) \rightarrow \min_{(x_i), (y_i)}$$

$$\begin{aligned}
x_i + y_i &= p_i, \\
x_i &\geq 0, \quad y_i \geq 0, \\
\left\{ \begin{array}{l} T - y_7 \geq p_1, \\ T - y_1 \geq p_2, \\ T - y_2 \geq p_3, \\ \dots \\ T - y_5 \geq p_6, \\ T - y_6 \geq p_7. \end{array} \right.
\end{aligned}$$

### Новая задача

Сведём исходную задачу к другой задаче  $Q$ , выразив  $x_i$  через  $y_i$

$$x_i = p_i - y_i.$$

Запишем оптимизируемую характеристику в новой задаче  $Q$

$$\begin{aligned}
C &= \sum_{i=1}^7 (c_1 x_i + c_2 y_i) \rightarrow \min_{(x_i), (y_i)} \\
&= \sum_{i=1}^7 (c_1 (p_i - y_i) + c_2 y_i) \rightarrow \min_{(y_i)} \\
&= \sum_{i=1}^7 (y_i (c_2 - c_1) + c_1 p_i) \rightarrow \min_{(y_i)} \\
&= \underbrace{(c_2 - c_1)}_{const, < 0} \sum_{i=1}^7 y_i + c_1 \underbrace{\sum_{i=1}^7 p_i}_{const} \rightarrow \min_{(y_i)} \\
&\sim \sum_{i=1}^7 y_i \rightarrow \max_{(y_i)}
\end{aligned}$$

То есть с учётом всех констант наша новая задача  $Q$  свелась к

$$\sum_{i=1}^7 y_i \rightarrow \max_{(y_i)}$$

$$\begin{cases} T - y_7 \geq p_1, \\ T - y_1 \geq p_2, \\ T - y_2 \geq p_3, \\ \dots \\ T - y_5 \geq p_6, \\ T - y_6 \geq p_7. \end{cases}$$

Стоит заметить, что в задаче  $\mathcal{P}$  все  $x_i \geq 0$ , а значит нужно ввести ограничения на  $y_i$

$$y_i \leq p_i.$$

Итого задача  $\mathcal{Q}$  формулируется следующим образом

$$\sum_{i=1}^7 y_i \rightarrow \max_{(y_i)}$$

$$\begin{cases} T - y_7 \geq p_1, \\ T - y_1 \geq p_2, \\ T - y_2 \geq p_3, \\ \dots \\ T - y_5 \geq p_6, \\ T - y_6 \geq p_7; \end{cases}$$

$$y_i \leq p_i.$$

### Решение новой задачи

Нам нужно максимизировать сумму  $y_i$ , при этом есть на каждый  $y_i$  есть два ограничения сверху. Так, например для  $y_2$  есть ограничения

$$\begin{cases} T - y_2 \geq p_3, \\ y_2 \leq p_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 \leq T - p_3, \\ y_2 \leq p_2. \end{cases}$$

Ясно, что если все  $y_i$  выбрать максимально возможными, то и их сумма будет максимально возможной. Максимально возможное значение  $y_i$ , которое удовлетворяет условие — это будет минимум из двух границ сверху. Например, для  $y_2$  это будет

$$\min\{T - p_3, p_2\}.$$



Таким образом, мы уже можем записать оптимальное решение  $y^*$  задачи  $\mathcal{Q}$

$$y_1^* = \min\{T - p_2, p_1\},$$

$$y_2^* = \min\{T - p_3, p_2\},$$

...

$$y_6^* = \min\{T - p_7, p_6\},$$

$$y_7^* = \min\{T - p_1, p_7\}.$$

### Возвращение к исходной задаче

После того, как мы нашли оптимальное решение новой задачи  $\mathcal{Q}$ , нужно вернуться к исходной задаче  $\mathcal{P}$ . Её оптимальное решение  $x^*$  выражается следующим образом

$$x_i^* = p_i - y_i^*.$$

Таким образом, мы свели исходную задачу  $\mathcal{P}$  к новой задаче  $\mathcal{Q}$  с меньшим числом переменных, решили задачу  $\mathcal{Q}$  и по её оптимальному решению построили оптимальное решение исходной задачи.

Почему  $x^*$  — оптимальное решение задачи  $\mathcal{P}$ ? Для доказательства этого можно использовать [утверждение 3](#).

## 1.6 Использование булевых переменных

Очень часто в реальных задачах встречаются самые разные логические условия. Например: «если верно ..., то должно быть верно ...». Данные условия можно записать на языке формул математической логики, однако в рамках данного курса будет удобнее, если они будут записаны с использованием алгебраических выражений. Таким образом мы сможем записать любые ограничения любых задач на языке алгебры. Для записи логических условий хорошо подходят булевы переменные. Это переменные, которые могут принимать лишь два значения — 0 и 1.

### Утверждение 4 (простые условия)

Пусть у нас есть два логических условия  $A$  и  $B$ , и нам нужно записать на языке

алгебры логическое выражение «если верно  $A$ , то верно  $B$ ». Для этого введём две булевы переменные  $x$  и  $y$ , смысл этих переменных будет следующий

$$x = \begin{cases} 0, & A — \text{истина} \\ 1, & A — \text{ложь} \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 0, & B — \text{истина} \\ 1, & B — \text{ложь} \end{cases}$$

Рассмотрим всевозможные комбинации событий  $A$  и  $B$  на языке булевых переменных.

1. «Если верно  $A$ , то верно  $B$ ». На языке наших переменных это записывается как «если  $x = 0$ , то  $y = 0$ ». Будем записывать это алгебраически следующим образом

$$x \geq y.$$

- Если  $x = 0$ , то  $y$  не может быть равен 1, потому что  $0 \not\geq 1$ , значит  $y$  может равняться лишь 0.
- Если  $x = 1$ , то  $y$  может равняться как 0, так и 1, поскольку  $1 \geq 0$  и  $1 \geq 1$ . Значит наше неравенство по смыслу совпадает с исходным логическим условием.

2. Условие «если  $x = 0$ , то  $y = 1$ » записывается как

$$x \geq 1 - y.$$

- Если  $x = 0$ , то  $1 - y$  не может быть равен 1, а значит  $1 - y = 0$ , как следствие  $y = 1$ .
- Если  $x = 1$ , то  $1 - y$  может равняться как 0, так и 1, значит  $y$  может принимать любое значение из  $\{0, 1\}$ .

Записать через  $x \geq y - 1$  было бы некорректно, поскольку при  $y = 0$  в правой части получилось бы отрицательное число, а при использовании булевых переменных нужно оперировать лишь 0 и 1.

3. «Если  $x = 1$ , то  $y = 0$ ». По аналогии с предыдущим пунктом это записывается как

$$1 - x \geq y.$$

4. «Если  $x = 1$ , то  $y = 1$ ». По аналогии с предыдущими пунктами это записывается как

$$1 - x \geq 1 - y,$$

или то же самое

$$x \leq y.$$

## Подытожим

- |    |                              |                                    |
|----|------------------------------|------------------------------------|
| 1. | «Если $x = 0$ , то $y = 0$ » | $x \geq y$ .                       |
| 2. | «Если $x = 0$ , то $y = 1$ » | $x \geq 1 - y$ .                   |
| 3. | «Если $x = 1$ , то $y = 0$ » | $1 - x \geq y$ .                   |
| 4. | «Если $x = 1$ , то $y = 1$ » | $1 - x \geq 1 - y \iff x \leq y$ . |

## Утверждение 5 (сложные условия)

Пусть теперь у нас есть множества условий  $\mathcal{A} = \{A_i\}$  и  $\mathcal{B} = \{B_k\}$ , которыми мы будем сопоставлять булевы переменные  $x$  и  $y$ .

1. Пусть нам хочется алгебраически записать следующее условие: «если некоторые условия из множества  $\mathcal{A}$  истины (а остальные ложны), то все условия из множества  $\mathcal{B}$  истины». Введём булев вектор  $x = (x_i)$ , соответствующий условиям из  $\mathcal{A}$ . Также введём не пересекающиеся множества индексов  $I^0, I^1 \subset I$ , соответствующие верным и неверным условиям из  $\mathcal{A}$  следующим образом

$$x_i = \begin{cases} 0, & i \in I^0 \Leftrightarrow A_i \text{ — истина} \\ 1, & i \in I^1 \Leftrightarrow A_i \text{ — ложь} \end{cases}$$

Ещё введём булеву переменную  $y$ , которая обозначает следующее

$$y = \begin{cases} 0, & \text{все условия из } \mathcal{B} \text{ истины} \\ 1, & \text{не все условия из } \mathcal{B} \text{ истины} \end{cases}$$

Фактически нам бы хотелось записать следующее: «если вектор  $x$  имеет такой вид, то  $y = 0$ ». Записать алгебраически это можно следующим образом

$$\sum_{i \in I^1} (1 - x_i) + \sum_{i \in I^0} x_i \geq y.$$

Действительно, если вектор  $x$  имеет нужный нам вид, то обе суммы равняются нулю, значит  $y$  ничего не остаётся кроме как быть равным нулю.

2. Пусть нам хочется алгебраически записать следующее условие: «если все события из  $\mathcal{A}$  истины, то некоторые условия из множества  $\mathcal{B}$  истины (а остальные ложны)». Введём булев вектор  $y = (y_k)$ , соответствующий условиям из  $\mathcal{B}$ . Также введём не пересекающиеся множества индексов  $K^0, K^1 \subset K$ , соответствующие верным и неверным условиям из  $\mathcal{B}$  следующим образом

$$y_k = \begin{cases} 0, & k \in K^0 \Leftrightarrow B_k \text{ — истина} \\ 1, & k \in K^1 \Leftrightarrow B_k \text{ — ложь} \end{cases}$$

Ещё введём булевы переменную  $x$ , которая обозначает следующее

$$x = \begin{cases} 0, & \text{все условия из } \mathcal{A} \text{ истины} \\ 1, & \text{не все условия из } \mathcal{A} \text{ истины} \end{cases}$$

Фактически нам бы хотелось записать следующее: «если  $x = 0$ , то  $y$  имеет такой-то вид». Записать алгебраически это можно следующим образом

$$|K^0 \cup K^1| \cdot x \geq \sum_{k \in K^1} (1 - y_k) + \sum_{k \in K^0} y_k.$$

Зачем здесь нужен коэффициент  $|K^0 \cup K^1|$ ? Если  $x = 0$ , то наше условие соблюдается, поскольку в правой части тогда обе суммы должны равняться нулю, а значит  $y$  принимает нужным нам вид. Однако дело в том, что если  $x \neq 0$ , то  $y$  должен иметь возможность принимать любые значения (посылка ложна), однако алгебраически это не так. Теоретически правая часть может быть сколь угодно большой, а правая часть без коэффициента может лишь не больше 1. Это означает, что наше алгебраическое выражение по смыслу не совпадает с изначальными логическими условиями. Чтобы оно совпадало, нужно разрешить  $y$  принимать любые значения при  $x \neq 0$ . Для этого как раз и добавлен коэффициент в левой части неравенства, чтобы неравенство оставалось верным при  $x = 1$  и сколь угодно большой правой части.

3. Рассмотрим самый общий случай: «если некоторые условия из  $\mathcal{A}$  истины (а остальные ложны), то некоторые условия из множества  $\mathcal{B}$  истины (а остальные ложны)». Для этого введём булевы векторы  $x = (x_i)$  и  $y = (y_k)$ , соответствующие условиям из  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  соответственно. Также аналогично с двумя предыдущими пунктами введём множества  $I^0, I^1 \subset I$  и  $K^0, K^1 \subset K$  следующим образом

$$x_i = \begin{cases} 0, & i \in I^0 \Leftrightarrow A_i \text{ — истина} \\ 1, & i \in I^1 \Leftrightarrow A_i \text{ — ложь} \end{cases}$$

$$y_k = \begin{cases} 0, & k \in K^0 \Leftrightarrow B_k \text{ — истина} \\ 1, & k \in K^1 \Leftrightarrow B_k \text{ — ложь} \end{cases}$$

Фактически нам бы хотелось записать следующее: «если  $x$  имеет такой-то вид, то  $y$  имеет такой-то вид». Записать алгебраически это можно следующим образом

$$|K^0 \cup K^1| \cdot \left( \sum_{i \in I^1} (1 - x_i) + \sum_{i \in I^0} x_i \right) \geq \sum_{k \in K^1} (1 - y_k) + \sum_{k \in K^0} y_k.$$

Коэффициент в левой части добавлен по аналогии с предыдущим пунктом (иначе при любых значениях вектора  $x$  вектор  $y$  не может быть любым).

## Подытожим

1. «Если  $x$  имеет такой-то вид, то  $y = 0$ »

$$\sum_{i \in I^1} (1 - x_i) + \sum_{i \in I^0} x_i \geq y.$$

2. «Если  $x = 0$ , то  $y$  имеет такой-то вид»

$$|K^0 \cup K^1| \cdot x \geq \sum_{k \in K^1} (1 - y_k) + \sum_{k \in K^0} y_k.$$

3. «Если  $x$  имеет такой-то вид, то  $y$  имеет такой-то вид»

$$|K^0 \cup K^1| \cdot \left( \sum_{i \in I^1} (1 - x_i) + \sum_{i \in I^0} x_i \right) \geq \sum_{k \in K^1} (1 - y_k) + \sum_{k \in K^0} y_k.$$

## Утверждение 6 (альтернативные переменные)

Пусть в нашей задаче сформулированы 2 ограничения

$$f_1(x) \geq b_1,$$

$$f_2(x) \geq b_2,$$

однако нам достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из них. Тогда такие условия называются *альтернативными*. Как это можно записать алгебраически?

Предположим, что мы реализуем алгоритм, который решает нашу задачу, при этом он находит решения, которые удовлетворяют всем условиям. Введём булеву переменную  $y$ , значения которой определяются следующим образом

$$y = \begin{cases} 0, & \text{выполнено первое ограничение} \\ 1, & \text{выполнено второе ограничение} \end{cases}$$

В идеальном случае наш алгоритм сам выберет значение этой переменной и на его основании построит оптимальное решение, однако какое бы значение он не выбрал, итоговое решение должно удовлетворять одному из ограничений. Алгебраически это можно записать так

$$f_1(x) \geq b_1 - W(1 - y),$$

$$f_2(x) \geq b_2 - Wy,$$

где  $W$  — это какая-то большая величина. Какое конкретно значение эта величина принимает, зависит от конкретной задачи. Где-то можно положить  $W = 10^6$ , где-то  $W = 50$ , однако полностью избавиться от  $W$  и записать условие без него не получится.

- Если  $y = 1$ , то имеем

$$f_1(x) \geq b_1,$$

$$f_2(x) \geq b_2 - W \rightarrow -\infty.$$

Первое неравенство верно, как и второе. Однако если со вторым есть вопросы, а точно ли оно верно, то вот первое выполняется гарантировано.

- Если  $y = 0$ , то имеем

$$f_1(x) \geq b_1 - W \rightarrow -\infty,$$

$$f_2(x) \geq b_2.$$

Аналогично, оба неравенства выполнены, но важно, что второе неравенство выполняется гарантировано.

### Другой способ

То же самое можно записать с использованием двух булевых переменных  $y_1$  и

$y_2$

$$f_1(x) \geq b_1 - W(1 - y_1),$$

$$f_2(x) \geq b_2 - W(1 - y_2),$$

$$y_1 + y_2 = 1.$$

Без условия  $y_1 + y_2 = 1$  нет гарантий, что одно из неравенств будет верно.

### Ограничения в другую сторону

Если у нас есть ограничения с другим знаком

$$f_1(x) \leq b_1,$$

$$f_2(x) \leq b_2,$$

то записать алгебраически их можно следующим образом

$$f_1(x) \leq b_1 + W(1 - y_1),$$

$$f_2(x) \leq b_2 + W y_2,$$

$$y_1 + y_2 = 1.$$

Аналогично можно было бы записать через  $y$ .

## Утверждение 7 (замена нелинейностей)

Пусть при решении задачи в некотором выражении нам встретилась какая-то нелинейность, например  $\hat{x} \cdot \hat{y}$  ( $\hat{x}$  и  $\hat{y}$  — булевы переменные). Работать с нелинейностями неудобно, поэтому хотелось бы заменить это на новую булеву переменную

$$\hat{z} = \hat{x} \cdot \hat{y}.$$

Однако просто заменить в выражении  $\hat{x} \cdot \hat{y}$  на  $\hat{z}$  нельзя, поскольку нужно изменить ограничения. Нам нужно ввести ограничение на новую переменную

$$\hat{z} = 1 \iff \hat{x} = 1 \wedge \hat{y} = 1$$

Данное ограничение можно расписать через две импликации

1. Если  $\hat{z} = 1$ , то  $\hat{x} = 1$  и  $\hat{y} = 1$ . Данное логическое условие можно записать алгебраически, используя [утверждение 5](#). Будем использовать самый общий случай

$$\begin{aligned} x &= \begin{pmatrix} \hat{z} \end{pmatrix}, & y &= \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} \end{pmatrix}, \\ I^0 &= \emptyset, & I^1 &= \{1\}, & K^0 &= \emptyset, & K^1 &= \{1, 2\} \\ |K^0 \cup K^1| \cdot \left( \sum_{i \in I^1} (1 - x_i) + \sum_{i \in I^0} x_i \right) &\geq \sum_{k \in K^1} (1 - y_k) + \sum_{k \in K^0} y_k, \\ &\Downarrow \\ 2 \cdot (1 - \hat{z}) &\geq (1 - \hat{x}) + (1 - \hat{y}), \\ 2\hat{z} &\leq \hat{x} + \hat{y}. \end{aligned}$$

2. Если  $\hat{x} = 1$  и  $\hat{y} = 1$ , то  $\hat{z} = 1$ . Данное логическое условие можно записать алгебраически, используя [утверждение 5](#). Будем использовать самый общий случай

$$\begin{aligned} x &= \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} \end{pmatrix}, & y &= \begin{pmatrix} \hat{z} \end{pmatrix}, \\ I^0 &= \emptyset, & I^1 &= \{1, 2\}, & K^0 &= \emptyset, & K^1 &= \{1\} \\ |K^0 \cup K^1| \cdot \left( \sum_{i \in I^1} (1 - x_i) + \sum_{i \in I^0} x_i \right) &\geq \sum_{k \in K^1} (1 - y_k) + \sum_{k \in K^0} y_k, \\ &\Downarrow \\ (1 - \hat{x}) + (1 - \hat{y}) &\geq 1 - \hat{z}, \\ \hat{z} + 1 &\geq \hat{x} + \hat{y}. \end{aligned}$$

Итого при замене  $\hat{z} = \hat{x} \cdot \hat{y}$  нужно добавить два ограничения

$$\begin{cases} 2\hat{z} \leq \hat{x} + \hat{y}, \\ \hat{z} + 1 \geq \hat{x} + \hat{y}. \end{cases}$$

## 1.6.1 Задача о проектах

Пусть есть 5 проектов, в которые можно вложиться. Для вложения в каждый проект нужно внести определённую сумму денег. Все проекты после вложения в них принесут определённый доход через какое-то время. Есть определённые условия, на которых можно вкладываться в проекты. Как получить наибольшую прибыль, имея ограниченные ресурсы?

**1. Что будем оптимизировать?** Ответ: нужно максимизировать получаемую прибыль.

**2. Что существенно влияет на оптимизируемую характеристику?**

Проект	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$
Доход	3	2	1	4	2
Начальные вложения	1.5	0	0.5	4	1

*Условия вложения в проекты*

1. нужно вложиться хотя бы в один проект;
2. если вложились в  $A$ , то необходимо вложиться в  $D$ ;
3. если вложились в  $B$  и  $C$ , то необходимо вложиться в  $A$ ;
4. если вложились в  $B$ , то необходимо вложиться в  $C$  и  $E$ .

*Параметры*

- $c_i$  — доход с проекта  $i$ ;
- $d_i$  — начальные вложения в проект  $i$ ;
- $Q$  — стартовый капитал;
- $C$  — общий доход.

*Переменные*

- $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  — булевы переменные, которые означают, будет ли вложение в соответствующий проект

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{будем вкладываться в } i\text{-ый проект,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

**3. Математическая формулировка задачи**



Пусть  $D$  — сумма всех расходов,  $C$  — сумма всех доходов,  $F$  — прибыль, тогда

$$D = \sum_{i=1}^5 x_i d_i, \quad C = \sum_{i=1}^5 x_i c_i,$$

$$F = C - D = \sum_{i=1}^5 x_i c_i - \sum_{i=1}^5 x_i d_i = \sum_{i=1}^5 x_i (c_i - d_i) \rightarrow \max_{(x_i)}.$$

Нужно ещё добавить ограничение на то, что мы не можем вложить в проекты больше стартового капитала

$$D \leq Q \iff \sum_{i=1}^5 x_i d_i \leq Q.$$

### Запись условий вложения в проекты

1. Первое условие можно записать алгебраически через

$$\sum_{i=1}^5 x_i \geq 1$$

2. Второе условие эквивалентно «если  $x_1 = 1$ , то  $x_4 = 1$ », алгебраически это записывается так (утверждение 4)

$$1 - x_1 \geq 1 - x_4 \iff x_1 \leq x_4.$$

3. Третье условие эквивалентно «если  $x_2 = 1$  и  $x_3 = 1$ , то  $x_1 = 1$ », алгебраически это записывается так (утверждение 5)

$$(1 - x_2) + (1 - x_3) \geq 1 - x_1 \iff 1 + x_1 \geq x_2 + x_3.$$

4. Четвёртое условие эквивалентно «если  $x_2 = 1$ , то  $x_3 = 1$  и  $x_5 = 1$ », алгебраически это записывается так (утверждение 5)

$$2 \cdot (1 - x_2) \geq 1 - x_3 + 1 - x_5 \iff 2x_2 \leq x_3 + x_5.$$

### Итоговая модель

$$\sum_{i=1}^5 x_i (c_i - d_i) \rightarrow \max_{(x_i)}$$

$$\sum_{i=1}^5 x_i d_i \leq Q$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^5 x_i \geq 1, \\ x_1 \leq x_4, \\ 1 + x_1 \geq x_2 + x_3, \\ 2x_2 \leq x_3 + x_5; \\ x_i \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

## 1.6.2 Задача о предприятии

Пусть есть предприятие, которое производит определённые виды продукции, затрачивая некоторые свои ресурсы. Для простоты будем считать, что у нас есть лишь один вид ресурсов, который можно использовать для производства продукции. Как получить наибольший доход?

**1. Что будем оптимизировать?** Ответ: нужно максимизировать получаемый доход.

**2. Что существенно влияет на оптимизируемую характеристику?**

Пусть  $i = 1 \dots n$  — вид продукции,  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  — список всех производимых товаров.

*Параметры*

- $c_i$  — доход продукции;
- $b_i$  — расход ресурса на производство одной единицы продукции;
- $B$  — запасы ресурса.

*Переменные*

- $x_i$  — количество единиц производимой продукции.

### 3. Математическая формулировка задачи

$$\begin{aligned} C = \sum_{i \in I} c_i x_i &\rightarrow \max_{(x_i)}, \\ \sum_{i \in I} b_i x_i &\leq B, \\ \forall i \in I \quad x_i &\geq 0. \end{aligned}$$

**Изменения в задаче**

Казалось бы, математическая модель составлена, однако тут приходит директор предприятия и говорит, что правительство определило два списка социально значимых товаров  $I_1, I_2$ , при этом нужно либо из первого списка производить не менее  $a_1$  единиц продукции, либо из второго не менее  $a_2$  единиц продукции. Оба условия можно записать следующим образом

$$\sum_{i \in I_1} x_i \geq a_1, \quad \sum_{i \in I_2} x_i \geq a_2,$$

Нам нужно, чтобы выполнялось хотя бы одно из них. Для этого введём булеву переменную

$$y = \begin{cases} 0, & \text{производим не менее } a_1 \text{ из } I_1, \\ 1, & \text{производим не менее } a_2 \text{ из } I_2; \end{cases}$$

и запишем с её помощью требуемое условие ([утверждение 6](#))

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I_1} x_i &\geq a_1 - Wy, \\ \sum_{i \in I_2} x_i &\geq a_2 - W(1 - y). \end{aligned}$$

### Новые изменения в задаче

Казалось бы, сейчас математическая модель предприятия окончательно составлена, но... К вам вновь приходит директор предприятия и говорит, что правительство издало приказ, по которому если производится достаточно продукции из обоих списков, то предприятие получает надбавку к финансированию.

Пусть если  $C_0$  — надбавка за производство продукции из обоих списков социально значимых товаров. Введём две новые булевы переменные

$$\begin{aligned} y_1 &= \begin{cases} 1, & \text{производим не менее } a_1 \text{ из } I_1, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases} \\ y_2 &= \begin{cases} 1, & \text{производим не менее } a_2 \text{ из } I_2, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \end{aligned}$$

Изменим выражение для оптимизируемой характеристики и логических условий

$$\begin{aligned} C &= \sum_{i \in I} c_i x_i + C_0 y_1 y_2 \rightarrow \max_{(x_i), y_1, y_2} \\ \sum_{i \in I_1} x_i &\geq a_1 - W(1 - y_1), \end{aligned}$$

$$\sum_{i \in I_2} x_i \geq a_2 - W(1 - y_2).$$

### Замена нелинейности

В общем и целом теперь нас всё устраивает, кроме нелинейности в виде  $y_1 y_2$ . Произведём замену нелинейности и запишем ограничения на новую булеву переменную ([утверждение 7](#))

$$z = y_1 y_2,$$

$$C = \sum_{i \in I} c_i x_i + C_0 z \rightarrow \max_{(x_i), z},$$

$$2z \leq y_1 + y_2,$$

$$z + 1 \geq y_1 + y_2.$$

### Итоговая модель

Параметры:  $\{c_i\}$ ,  $\{b_i\}$ ,  $B$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $C_0$ .

Переменные:  $\{x_i\}$ ,  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $z$ .

$$C = \sum_{i \in I} c_i x_i + C_0 z \rightarrow \max_{(x_i), z},$$

$$\sum_{i \in I} b_i x_i \leq B,$$

$$\sum_{i \in I_1} x_i \geq a_1 - W(1 - y_1),$$

$$\sum_{i \in I_2} x_i \geq a_2 - W(1 - y_2),$$

$$2z \leq y_1 + y_2, \quad z + 1 \geq y_1 + y_2,$$

$$y_1 \in \{0, 1\} \quad y_2 \in \{0, 1\}, \quad z \in \{0, 1\},$$

$$\forall i \in I \quad x_i \geq 0.$$

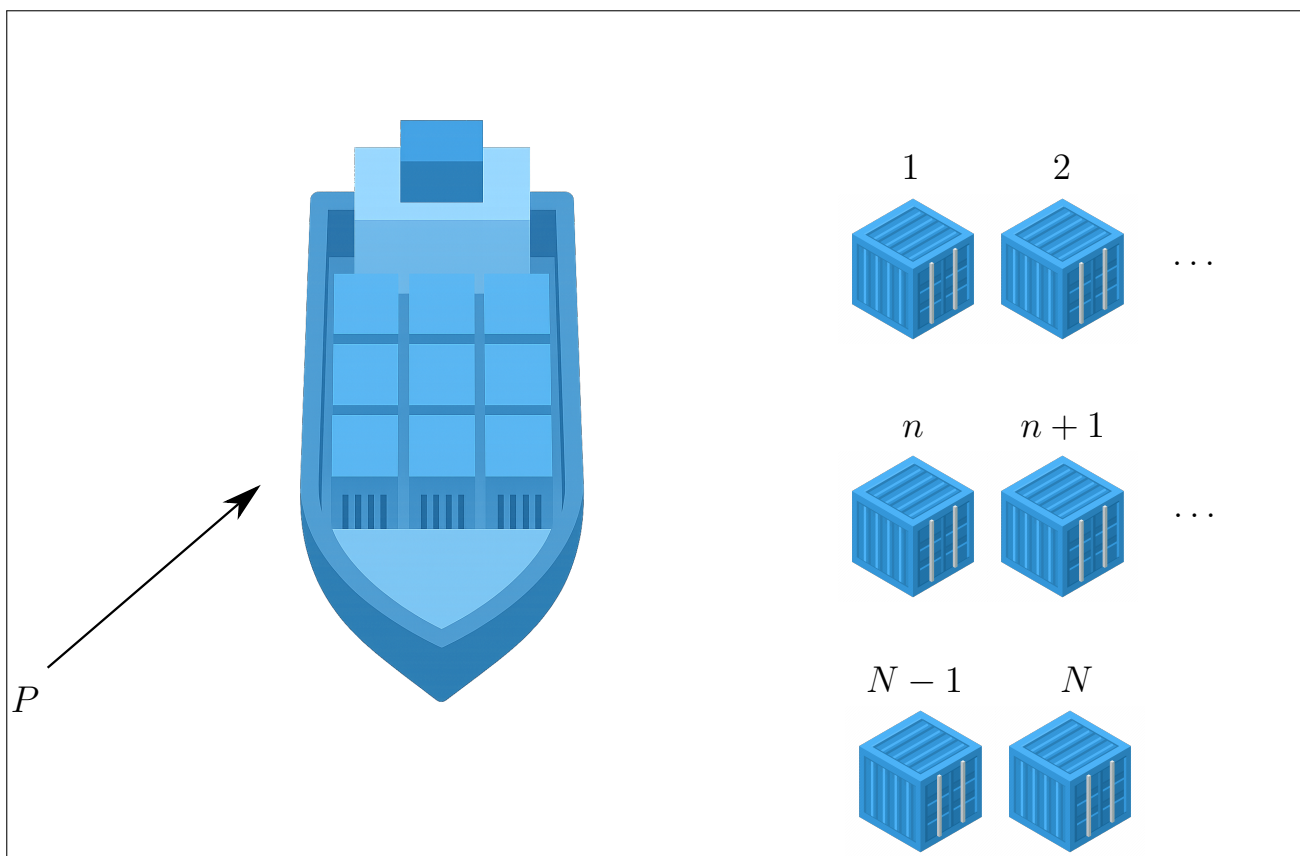
## Глава 2

# Динамическое программирование

Динамическое программирование эффективно, если процесс принятия решения состоит из многих шагов, то есть когда итоговое решение — последовательность принимаемых решений (*стратегия*). Теоретически с помощью динамического программирования можно решить любую экстремальную задачу, однако практически это не всегда возможно, так как появляется слишком много состояний... **Главная идея динамического программирования** заключается в том, чтобы не пытаться решить задачу непосредственно, а поместить её в семейство аналогичных задач, среди которых есть просто решаемые.

## 2.1 Задача загрузки судна

Начнём рассмотрение динамического программирования на примере задачи загрузки судна. Пусть есть грузовое судно и набор различных контейнеров. Требуется загрузить судно контейнерами таким образом, чтобы при их дальнейшей продаже заработать как можно больше, при этом размер грузовой площадки судна ограничен.



**1. Что будем оптимизировать?** Ответ: доход с продажи контейнеров должен быть максимальным.

**2. Что существенно влияет на оптимизируемую характеристику?**

Пусть  $i = 1 \dots N$  — номера контейнеров.

*Параметры*

- $h_i$  — место на грузовой площадке, занимаемое контейнером  $i$ ;
- $c_i$  — ценность контейнера  $i$ ;
- $P$  — размер грузовой площадки судна.

*Переменные*

- $x_i$  — сколько контейнеров с номером  $i$  нужно взять на судно.

**3. Математическая формулировка задачи**

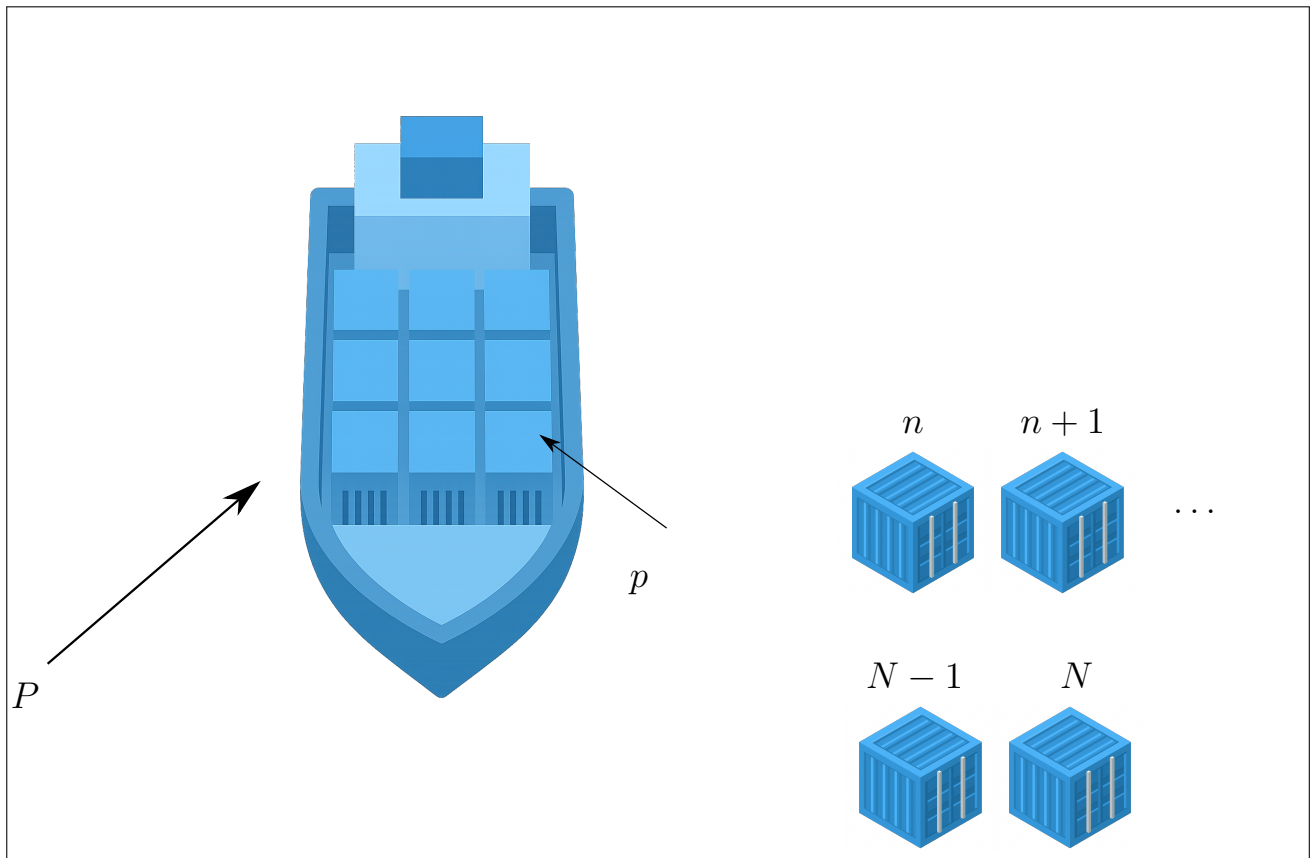
$$\sum_{i=1}^N c_i x_i \rightarrow \max_{(x_i), i \in \{1, \dots, N\}},$$

$$\sum_{i=1}^N h_i x_i \leq P,$$

$$x_i \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}, \quad i \in 1, \dots, N.$$

## Решение

Для решения задачи будем рассматривать семейства аналогичных задач. Каждое семейство будет охарактеризовываться парой  $(n, p)$ , где  $p$  — место на площадке, а  $n$  — минимальный номер для контейнеров, которые у нас есть. То есть вместо рассмотрения исходной задачи про все  $N$  контейнеров и всю грузовую площадку размером  $P$  будем рассматривать задачи, в которых нам доступны не все контейнеры, а лишь начинающиеся с номера  $n \leq N$ , а также в которых нам доступна не вся грузовая площадка судна, а лишь её часть размером  $p \leq P$ .



Запишем целевую функцию и ограничения для данного семейства

$$\sum_{i=n}^N c_i x_i \rightarrow \max_{(x_i), i=1 \dots N},$$

$$\sum_{i=n}^N h_i x_i \leq p,$$

$$x_i \in \{0, 1, 2, 3, \dots\} \quad i = 1 \dots N$$

Зададимся вопросом: а есть ли в этом семействе задачи, которые можно легко решить? Да, например если  $n = N$ , то есть если у нас в распоряжении есть лишь контейнер с номером  $N$ .

**Введём обозначение.** Пусть  $\boxed{f_n(p)}$  — оптимальное значение целевой функции семейства задач  $(n, p)$ . По своей сути  $f_n(p)$  — это максимальный доход, который мы получим, если будем на площадку размера  $p$  грузить контейнеры с номерами  $n, n+1, n+2, \dots, N$ .

Легко заметить, что

$$f_N(p) = c_N \cdot \left\lfloor \frac{p}{h_N} \right\rfloor.$$

Действительно, если у нас в распоряжении есть лишь контейнеры с номером  $N$ , то для получения максимального дохода нужно попытаться по-максимум загрузить ими площадку на грузовом корабле,  $\left\lfloor \frac{p}{h_N} \right\rfloor$  — количество контейнеров, которое поместится на площадку.

Таким образом, мы уже умеем решать задачу  $(N, p)$  для любого  $p \leq P$ . Теперь нужно совершить переход к решению исходной задачи

$$f_N(p) \longrightarrow f_1(P).$$

Для этого сформулируем принцип.

## Определение (принцип оптимальности для оптимальной стратегии)

*Оптимальная стратегия обладает тем свойством, что каким бы не было первое решение, последующие решения должны образовывать оптимальную стратегию относительно состояния, полученного по итогам первого решения.*

## Пример

Пусть мы стоим у доски и нам захотелось как можно быстрее выйти из аудитории через дверь. Каким бы ни был наш первый шаг, если мы хотим дойти до двери как можно быстрее, придётся всё время действовать оптимально. То есть даже если первый шаг был оптимальным, но потом мы накосячили и пошли неоптимально, стратегия точно не получится оптимальной.

Предположим, что для некоторого  $n \leq N$  мы умеем уже знаем

$$f_{n+1}(p), f_{n+2}(p), \dots, f_N(p),$$

однако нам бы хотелось посчитать  $f_n(p)$ , как это можно сделать? Предположим, что  $x_n = x = 1$ , тогда груз с номером  $n$  даст нам ценность  $c_n \cdot x = c_n$  и займёт на площадке место  $h_n \cdot x = h_n$ . Обобщим для  $x_n \neq 1$  и запишем целевую функцию

$$\boxed{\forall p \leq P \quad f_n(p) = \max_{h_n \cdot x \leq p, x=0,1,2,\dots} \{c_n \cdot x + f_{n+1}(p - h_n \cdot x)\}.$$



Действительно, оптимальное значение при контейнерах  $n, n + 1, n + 2, \dots, N$  складывается из некоторого количества контейнеров с номером  $n$  и контейнерах  $n + 1, n + 2, \dots, N$ . Чтобы найти оптимальное значение нужно перебрать все варианты того, сколько взять контейнеров с номером  $n$ , при этом ясно, что взять их «слишком много» не получится, потому что размер площадки ограничен  $p$ . Это условие отражается через  $h_n \cdot x \leq p$ .

Мы получили **рекуррентное соотношение динамического программирования**, при этом, как уже говорилось ранее,  $f_n(p)$  можно получить перебором значение  $x_n = x$ , а  $f_{n+1}(\dots)$  по предположению нам уже известно.

Почему мы предполагаем, что  $f_{n+1}(\dots)$  нам известно? Ранее мы обсуждали, что мы можем вычислить  $f_N(p)$  для любого  $p \leq P$ . Значит с помощью рекуррентного соотношения можем вычислить  $f_{N-1}(p)$  для любого  $p$ , после этого можно вычислить  $f_{N-2}(p)$  и так далее. То есть, если у нас есть хотя бы одно значение «в конце», то мы можем дойти до «начала» за определённое число шагов. Поэтому предположению о том, что на некотором шаге  $n$  нам уже известно оптимальное значение  $f_{n+1}(p)$  имеет место.

Алгоритм решения задач с помощью динамического программирования разберём дальше на примерах.

## 2.2 $N$ -шаговый процесс принятия решений

Обобщим [задачу о загрузке судна](#), рассмотрев общую задачу. Пусть  $N$  — число шагов в нашем процессе. Исходные данные задачи:

- $P_i$  — множество возможных состояний на  $i$ -ом шаге,  $i = 1 \dots N + 1$ . Шага с номером  $N + 1$  не будет, поэтому  $P_{N+1}$  можно считать фиктивной переменной, введённой для удобства. В рассмотренной ранее задаче множеством наших состояний были числа  $p = \{0, 1, 2, \dots, P\}$  — доступный размер площадки;
- $p_1 = p_0$  — некоторая известная заданная величина (*начальное состояние*);
- $Q_i$  — множество возможных решений на  $i$ -ом шаге,  $i = 1 \dots N$ ;
- $T_i(p, q)$  — функция перехода из состояния  $p$  в состояние  $q$  на  $i$ -ом шаге,  $i = 1 \dots N$ ;
- $Q_i(p)$  — множество допустимых решений на  $i$ -ом шаге в состоянии  $p$ , то есть

$$Q_i(p) = \{q \in Q_i \mid T_i(p, q) \in P_{i+1}\}$$

**Как принять решение?**

Для начала берём  $q \in Q_1(p_0)$ . Далее на каждом шаге выбираем состояние из множества допустимых состояний. Таким образом мы получим некоторую допустимую стратегию  $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ , при этом функция перехода будет каждый раз переводить нас в допустимое решение, то есть

$$p_{i+1} = T_i(p_i, q_i) \in P_{i+1}.$$

Однако нам бы не хотелось про не просто допустимую, а оптимальную стратегию. Как понять, что стратегия оптимальна и как её вообще получить?

## Замечание

$N$ -шаговый процесс удобно использовать, когда понятно, что будет состоянием, какие будут шаги и как будет осуществляться переход от одного состояния к другому. Также важно, чтобы имела место *сепарабельность*, то есть тот факт, что функция дохода может быть посчитана на каждом шаге отдельно, то есть что эффект на целевую функцию на каждом шаге отделён от эффекта на неё на других шагах.

## Замечание

Иногда при решении задачи в качестве состояния на каждом шаге нужно выбрать не само значение  $p_i$ , а пару  $(q_{i-1}, p_i)$ , чтобы знать, какое было принято решение на предыдущем шаге. Это может быть полезно, если за «не сбалансированные» решения предусмотрено штрафы. Например, если стратегия «потратить в этом году все деньги, а в следующем не потратить ничего» нас не устраивает.

## 2.3 Задача выбора оптимальной стратегии $N$ -шагового процесса

Нам нужен критерий для оценки оптимальной решения на каждом шаге процесса. Введём  $g_i(p, q)$  — функция дохода на  $i$ -ом шаге, если мы в находимся состоянии  $p$  и принимаем решение  $q$ . В рамках общей задачи нужно найти

$$\max_{\{q_1, q_2, \dots, q_N\}} \sum_{i=1}^N g_i(p_i, q_i)$$

с ограничениями

$$p_1 = p_0,$$

$$\begin{aligned}
p_i &\in P_i, \quad i \in \{2, \dots, N+1\}, \\
q_i &\in Q_i, \quad i \in \{1, \dots, N\}, \\
p_{i+1} &= T_i(p_i, q_i), \quad i \in \{1, \dots, N\}.
\end{aligned}$$

## Процесс

Вновь рассмотрим семейство задач  $(n, p)$ .

$$\max_{\{q_n, q_{n+1}, \dots, q_N\}} \sum_{i=n}^N g_i(p_i, q_i).$$

В данных обозначениях исходная задача — это  $f_1(p_0)$ . Напишем рекуррентные соотношения в общем виде. Пускай мы знаем как решать задачу при  $n = N$

$$\forall p \in P_N \quad f_N(p) = \max_{q \in Q_N(p)} g_N(p, q).$$

Теперь нам нужно осуществить переход от «простой задачи» к исходной. Пусть мы находимся на шаге  $n$ , тогда

$$f_n(p) = \max_{q \in Q_n(p)} \left[ g_n(p, q) + \underbrace{f_{n+1}(T_n(p, q))}_{\text{уже знаем решение}} \right].$$

То есть на каждом шаге будем находить значение  $f_n(p)$  для всех возможных состояний  $p \in P_n$ . На первом шаге  $n = N$ , на втором шаге —  $(N - 1)$ , на третьем шаге —  $(N - 2)$  и так далее.

По итогам такого процесса мы вычислим  $f_1(P)$  — оптимальное значение целевой функции, однако мы не узнаем, как выглядят оптимальные решения на каждом шаге. То есть мы не узнаем, как нам нужно действовать. Чтобы это исправить на каждом шаге помимо  $f_n(p)$  будем считать  $q_n(p)$  — значение  $q$ , на котором достигается максимум в состоянии  $p$ . Всё это удобно записывать в таблицу следующего вида

$p$	$(f_1, q_1)$	$(f_2, q_2)$	$\dots$	$(f_n, q_n)$	$(f_{n+1}, q_{n+1})$	$\dots$	$(f_{N-1}, q_{N-1})$	$(f_N, q_N)$
0								
1								
$\dots$								
$P$								
$\dots$								

В первом столбце таблицы представлены все возможные состояния, а в остальных — значения  $f_i(p)$  и  $q_i(p)$  на каждом шаге для каждого состояния  $p$ .

## Нахождение стратегии

Мы на каждом шаге для всех состояний посчитали значение  $f_n(p)$  и  $q_n(p)$ . Будем находить оптимальную стратегию следующим образом

$$\begin{aligned} p_1^* &= p_0, & q_1^* &= q_1(p_1^*), \\ p_2^* &= T_1(p_1^*, q_1^*), & q_2^* &= q_2(p_2^*), \\ p_3^* &= T_2(p_2^*, q_2^*), & q_3^* &= q_3(p_3^*), \\ &\dots & \dots \\ p_N^* &= T_{N-1}(p_{N-1}^*, q_{N-1}^*), & q_N^* &= q_N(p_N^*). \end{aligned}$$

То есть на каждом шаге будем вычислять оптимальное значение  $q_i^*$  по состоянию  $p_i^*$  и посчитанным значениям  $q_i(p)$ . Совокупность всех значений  $\{q_i^*\}_{i=1}^N$  и будет нашей стратегией. Однако почему эта стратегия будет оптимальной?

## Доказательство оптимальности стратегии

Итак, имеем стратегию  $q = \{q_1^*, q_2^*, \dots, q_N^*\}$ . Докажем, что она оптимальна, то есть

$$f_1(p_0) = \sum_{i=1}^N g_i(p_i^*, q_i^*).$$

Имеем

$$f_1(p_0) \stackrel{def}{=} f_1(p_1^*) = \max_{q \in Q_1(p_1^*)} [g_1(p_1^*, q) + f_2(T_1(p_1^*, q))]$$

По построению максимум при  $n = 1$  происходит при  $q = q_1^* = q_1(p_1^*)$ , поэтому

$$\begin{aligned} f_1(p_0) &= \max_{q \in Q_1(p_1^*)} [g_1(p_1^*, q) + f_2(T_1(p_1^*, q))] \\ &= g_1(p_1^*, q_1^*) + f_2(T_1(p_1^*, q_1^*)) \\ &\stackrel{def}{=} g_1(p_1^*, q_1^*) + f_2(p_2^*) \\ &= g_1(p_1^*, q_1^*) + \max_{q \in Q_2(p_2^*)} [g_2(p_2^*, q) + f_3(T_2(p_2^*, q))]. \end{aligned}$$

По построению максимум при  $n = 2$  происходит при  $q = q_2^* = q_2(p_2^*)$ , поэтому

$$\begin{aligned} f_1(p_0) &= g_1(p_1^*, q_1^*) + \max_{q \in Q_2(p_2^*)} [g_2(p_2^*, q) + f_3(T_2(p_2^*, q))] \\ &= g_1(p_1^*, q_1^*) + g_2(p_2^*, q_2^*) + f_3(T_2(p_2^*, q_2^*)) \\ &\stackrel{def}{=} g_1(p_1^*, q_1^*) + g_2(p_2^*, q_2^*) + f_3(p_3^*) \\ &= g_1(p_1^*, q_1^*) + g_2(p_2^*, q_2^*) + \max_{q \in Q_3(p_3^*)} [g_3(p_3^*, q) + f_4(T_3(p_3^*, q))]. \end{aligned}$$

Рассуждая аналогично, можно получить, что

$$\begin{aligned} f_1(p_0) &= g_1(p_1^*, q_1^*) + g_2(p_2^*, q_2^*) + g_3(p_3^*, q_3^*) + \cdots + g_N(p_N^*, q_N^*) \\ &= \sum_{i=1}^N g_i(p_i^*, q_i^*). \end{aligned}$$

Требуемое доказано, значит исходная стратегия является оптимальной.

### Итог

Выбор оптимальной стратегии состоит из двух этапов

1. заполнение таблицы значениями (справа налево),
2. вычисление оптимальной стратегии по заполненной таблице (слева направо).

## Замечание

Если в задаче начальное состояние может принимать несколько значений, то нужно осуществить процесс для каждого начального состояния, а потом сравнить полученные результаты и выбрать из них наилучшую стратегию.

### 2.3.1 Решение задачи о машине

Решим [задачу о машине](#) с помощью  $N$ -шагового процесса принятия решения. Немного изменим обозначения исходной задачи. Пусть  $i = 1 \dots N$  — вид детали.

#### *Параметры*

- $h_i$  — масса деталей;
- $t_i$  — срок службы деталей;
- $d_i$  — количество работающих деталей в машине;
- $P$  — максимальная масса посылки.

#### *Переменные*

- $x_i$  — сколько нужно взять деталей в посылку.

#### *Динамическое программирование*

- количество шагов процесса = количество видов деталей =  $N$ ;
- на  $i$ -ом шаге будем определять, сколько деталей  $i$ -го типа нужно взять в посылку;
- текущее состояние — свободная масса груза в посылке, то есть сколько ещё массы можно использовать.

Будем рассматривать семейства задач, которые определяются парой  $(n, p)$ . Фактически это означает, что у нас в распоряжении

- есть детали не всех видов, а лишь от  $n$  до  $N$ ,  $n \leq N$ ;
- есть не вся масса посылки  $P$ , а лишь её часть  $p \leq P$ .

### База процесса

Пусть  $f_n(p)$  — максимальное время, которое проработает машина в семействе задач  $(n, p)$ . Заметим, что если  $n = N$ , то задача легко решается

$$\forall p \leq P \quad f_N(p) = \left( d_N + \left\lceil \frac{p}{h_N} \right\rceil \right) \cdot t_N$$

В таком случае решение состоит в том, что нужно заказать детали вида  $N$  на максимум, то есть сколько можем, столько и заказываем.

### Переход

Теперь когда у нас есть база для решения задачи, осуществим переход  $f_{n+1}(p) \rightarrow f_n(p)$  в предположении, что  $f_{n+1}(p)$  мы знаем  $\forall p \leq P$ .

$$f_n(p) = \max_{\substack{x=x_n \\ h_n \cdot x \leq p, x \geq 0}} \min \left\{ (d_n + x) \cdot t_n ; f_{n+1}(p - x \cdot h_n) \right\}$$

$(d_n + x) \cdot t_n$  — это сколько проработают детали  $n$ -го вида с учётом уже имеющихся в машине и тех, которые будут заказаны. Для решения задачи нужно для всех  $p \leq P$  найти значение  $f_n(p)$  и соответствующие значения  $x$ , на которых максимум и достигается.

В исходной формулировке у нас было

$$f_n(p) = \max_{q \in Q_n(p)} \left[ g_n(p, q) + f_{n+1}(T_n(p, q)) \right].$$

Отличие в данной задаче состоит в том, что у нас в рекуррентном соотношении не суммирование, а взятие минимума. Теоретически здесь может быть и умножение, но большой роли при решении это не играет. Важно, что рекуррентное соотношение написано.

### Конкретная задача

Решим задачу с конкретными числовыми данными

- $N = 4$ ;
- $h = \{3, 2, 3, 2\}$  кг;
- $t = \{6, 3, 2, 4\}$  дней;
- $d = \{1.5, 1.5, 1.5, 1.5\}$ .  $d_i = 1.5$  может означать, например, что в машине установлены две детали вида  $i$ , при этом одна отработала половину своего срока, а вторую только недавно установили;

- $P = 8$  кг.

В ходе решения задачи будем заполнять следующую таблицу

$p$	$(f_1, q_1)$	$(f_2, q_2)$	$(f_3, q_3)$	$(f_4, q_4)$
0				
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				

Таблицу будем заполнять справа налево, запоминая  $q_i$  — то значение  $x$ , на котором достигается максимум целевой функции.

В левом столбце у нас все возможные состояния  $p$ , а  $p$  — свободная масса груза в посылке. Заметим, что ни на каком шаге  $p$  не может равняться 7, то есть какие бы грузы мы не клали в посылку, свободная масса груза не сможет равняться 7. Это означает, что можно не подсчитывать значения для  $p = 7$ .

$p$	$(f_1, q_1)$	$(f_2, q_2)$	$(f_3, q_3)$	$(f_4, q_4)$
0				
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7	×	×	×	×
8				

**Шаг 1** На первом шаге  $n = N = 4$ , запишем выражение для  $f_4(p)$

$$f_4(p) = \left( d_n + \left\lceil \frac{p}{h_4} \right\rceil \right) \cdot t_4 = \left( 1.5 + \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil \right) \cdot 4.$$

Таким образом мы можем посчитать значение  $f_4(p)$  для любого  $p \leq P$ , при этом нам известно значение, на котором достигается максимум ( $q_4$ )

$$q_4 = \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor.$$

Посчитаем значение  $f_4$  для всех возможных состояний

$$f_4(0) = 6, \quad q_4 = \left\lfloor \frac{0}{2} \right\rfloor = 0;$$

$$f_4(1) = 6, \quad q_4 = \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = 0;$$

$$f_4(2) = 10, \quad q_4 = \left\lfloor \frac{2}{2} \right\rfloor = 1;$$

$$f_4(3) = 10, \quad q_4 = \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor = 1;$$

$$f_4(4) = 14, \quad q_4 = \left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor = 2;$$

$$f_4(5) = 14, \quad q_4 = \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor = 2;$$

$$f_4(6) = 18, \quad q_4 = \left\lfloor \frac{6}{2} \right\rfloor = 3;$$

$$f_4(8) = 22, \quad q_4 = \left\lfloor \frac{8}{2} \right\rfloor = 4.$$

Занесём все эти данные в последний столбец таблицы.

$p$	$(f_1, q_1)$	$(f_2, q_2)$	$(f_3, q_3)$	$(f_4, q_4)$
0				(6, 0)
1				(6, 0)
2				(10, 1)
3				(10, 1)
4				(14, 2)
5				(14, 2)
6				(18, 3)
7	×	×	×	×
8				(22, 4)



**Шаг 2** На втором шаге  $n = 3$ . Запишем выражение для  $f_3(p)$

$$\begin{aligned} f_3(p) &= \max_{\substack{x=x_3 \\ h_3 \cdot x \leq p, x \geq 0}} \min \left\{ (d_3 + x) \cdot t_3 ; f_4(p - x \cdot h_3) \right\} \\ &= \max_{\substack{x=x_3 \\ 3x \leq p, x \geq 0}} \min \left\{ 3 + 2x ; f_4(p - 3x) \right\} \end{aligned}$$

На данном шаге нам нужно для всех  $0 \leq p \leq P$  вычислить значение  $f_3(p)$  и запомнить значение  $x$ , на котором достигается максимум в каждом конкретном состоянии. Для каждого состояния мы будем перебирать различные значения  $x$ . Для примера найдём  $f_3(8)$ . Для этого нам нужно перебрать значения  $x \in \{0, 1, 2\}$ , поскольку при  $x > 2$  неравенство  $3x \leq 8$  уже не выполняется, а  $x < 0$  нам не подходят по условию. Вычислим значение  $\min$  для каждого из этих трёх значений  $x$

$$x = 0 : \quad \min \{ 3 + 2 \cdot 0 ; f_4(8) \} = \min \{ 3, 22 \} = 3$$

$$x = 1 : \quad \min \{ 3 + 2 \cdot 1 ; f_4(5) \} = \min \{ 5, 14 \} = 5$$

$$x = 2 : \quad \min \{ 3 + 2 \cdot 2 ; f_4(2) \} = \min \{ 7, 10 \} = \textcircled{7}$$

То есть мы рассмотрели три разных значения  $x$  (0, 1, 2), для каждого из них вычислили значение  $\min \{ (d_n + x) \cdot t_n ; f_{n+1}(p - x \cdot h_n) \}$ , а после этого выбрали из трёх итоговых значение максимальное — 7, при этом запомнили, что это значение достигается при  $x = 2$ . Однако данные вычисления можно записать существенно короче

$$f_3(8) = \begin{array}{c|l} 0 & \{ 3 ; f_4(8) = 22 \} = 3 \\ 1 & \{ 5 ; f_4(8) = 14 \} = 5 \\ 2 & \{ 7 ; f_4(8) = 10 \} = \textcircled{7} \end{array}$$

В первом столбце у нас идут перебираемые значения  $x$ , а далее для каждого из них вычисление  $\min$ , само слово « $\min$ » писать здесь излишне. В кружок обведено значение  $\max$ . Данной нотации и будем придерживаться всюду далее. Посчитаем  $f_3(p)$  для всех  $p$

$$f_3(0) = \begin{array}{c|l} 0 & \{ 3 ; f_4(0) = 6 \} = \textcircled{3} \end{array}$$

$$f_3(1) = \begin{array}{c|l} 0 & \{ 3 ; f_4(1) = 6 \} = \textcircled{3} \end{array}$$

$$f_3(2) = 0 \mid \{3 ; f_4(2) = 10\} = \textcircled{3}$$

$$f_3(3) = \begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array} \mid \begin{array}{l} \{3 ; f_4(3) = 10\} = 3 \\ \{5 ; f_4(0) = 6\} = \textcircled{5} \end{array}$$

$$f_3(4) = \begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array} \mid \begin{array}{l} \{3 ; f_4(4) = 14\} = 3 \\ \{5 ; f_4(1) = 6\} = \textcircled{5} \end{array}$$

$$f_3(5) = \begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array} \mid \begin{array}{l} \{3 ; f_4(5) = 14\} = 3 \\ \{5 ; f_4(2) = 10\} = \textcircled{5} \end{array}$$

$$f_3(6) = \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \mid \begin{array}{l} \{3 ; f_4(6) = 18\} = 3 \\ \{5 ; f_4(3) = 10\} = 5 \\ \{7 ; f_4(0) = 6\} = \textcircled{6} \end{array}$$

$$f_3(8) = \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \mid \begin{array}{l} \{3 ; f_4(8) = 22\} = 3 \\ \{5 ; f_4(3) = 10\} = 5 \\ \{7 ; f_4(2) = 10\} = \textcircled{7} \end{array}$$

Занесём все данные в таблицу. В столбец  $(f_3, q_3)$  возле максимального значения, обведённого в кружочек, для каждого состояния  $p$  мы ещё записываем значение  $x$ , в котором достигается максимум. Так, для  $f_3(8)$  это  $x = 2$ , для  $f_3(5)$  это  $x = 1$  и так далее.

$p$	$(f_1, q_1)$	$(f_2, q_2)$	$(f_3, q_3)$	$(f_4, q_4)$
0			(3, 0)	(6, 0)
1			(3, 0)	(6, 0)
2			(3, 0)	(10, 1)
3			(5, 1)	(10, 1)
4			(5, 1)	(14, 2)
5			(5, 1)	(14, 2)
6			(6, 2)	(18, 3)
7	×	×	×	×
8			(7, 2)	(22, 4)

**Шаг 3** На третьем шаге  $n = 2$ . Запишем выражение для  $f_2(p)$

$$\begin{aligned}
f_2(p) &= \max_{\substack{x=x_2 \\ h_2 \cdot x \leq p, x \geq 0}} \min \left\{ (d_2 + x) \cdot t_2 ; f_3(p - x \cdot h_2) \right\} \\
&= \max_{\substack{x=x_2 \\ 2x \leq p, x \geq 0}} \min \left\{ 4.5 + 3x ; f_3(p - 2x) \right\}
\end{aligned}$$

Посчитаем  $f_2(p)$  для всех  $p$

$$f_2(0) = 0 \mid \{4.5 ; f_3(0) = 3\} = \textcircled{3}$$

$$f_2(1) = 0 \mid \{4.5 ; f_3(1) = 3\} = \textcircled{3}$$

$$f_2(2) = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \mid \begin{array}{l} \{4.5 ; f_3(2) = 3\} = \textcircled{3} \\ \{7.5 ; f_3(0) = 3\} = \textcircled{3} \end{array}$$

$$f_2(3) = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \mid \begin{array}{l} \{4.5 ; f_3(3) = 5\} = \textcircled{4.5} \\ \{7.5 ; f_3(1) = 3\} = 3 \end{array}$$

$$f_2(4) = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \mid \begin{array}{l} \{4.5 ; f_3(4) = 5\} = \textcircled{4.5} \\ \{7.5 ; f_3(2) = 3\} = 3 \\ \{10.5 ; f_3(0) = 3\} = 3 \end{array}$$

$$f_2(5) = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \mid \begin{array}{l} \{4.5 ; f_3(5) = 5\} = 4.5 \\ \{7.5 ; f_3(3) = 5\} = \textcircled{5} \\ \{10.5 ; f_3(1) = 3\} = 3 \end{array}$$

$$f_2(6) = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \mid \begin{array}{l} \{4.5 ; f_3(6) = 6\} = 4.5 \\ \{7.5 ; f_3(4) = 5\} = \textcircled{5} \\ \{10.5 ; f_3(2) = 3\} = 3 \\ \{13.5 ; f_3(0) = 3\} = 3 \end{array}$$

$$f_2(8) = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \mid \begin{array}{l} \{4.5 ; f_3(8) = 7\} = 4.5 \\ \{7.5 ; f_3(6) = 6\} = \textcircled{6} \\ \{10.5 ; f_3(4) = 5\} = 5 \\ \{13.5 ; f_3(2) = 3\} = 3 \\ \{16.5 ; f_3(0) = 3\} = 3 \end{array}$$

Занесём все данные в таблицу. Заметим, что при вычислении  $f_2(2) = 3$  максимум достигается и при  $x = 0$ , и при  $x = 1$ . В таблице это будет отражено как  $(3, 0/1)$ .

$p$	$(f_1, q_1)$	$(f_2, q_2)$	$(f_3, q_3)$	$(f_4, q_4)$
0		$(3, 0)$	$(3, 0)$	$(6, 0)$
1		$(3, 0)$	$(3, 0)$	$(6, 0)$
2		$(3, 0/1)$	$(3, 0)$	$(10, 1)$
3		$(4.5, 0)$	$(5, 1)$	$(10, 1)$
4		$(4.5, 0)$	$(5, 1)$	$(14, 2)$
5		$(5, 0)$	$(5, 1)$	$(14, 2)$
6		$(5, 1)$	$(6, 2)$	$(18, 3)$
7	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
8		$(6, 1)$	$(7, 2)$	$(22, 4)$

**Шаг 4** На четвёртом шаге  $n = 1$

Наша исходная задача — это  $f_1(8)$ , поэтому для всех остальных значений  $p \neq 8$  искать  $f_1(p)$  не нужно. Запишем выражение для  $f_1(8)$

$$\begin{aligned}
 f_1(8) &= \max_{\substack{x=x_1 \\ h_1 \cdot x \leq 8, x \geq 0}} \min \left\{ (d_1 + x) \cdot t_1 ; f_2(8 - x \cdot h_1) \right\} \\
 &= \max_{\substack{x=x_1 \\ 3x \leq 8, x \geq 0}} \min \left\{ 9 + 6x ; f_2(8 - 3x) \right\}
 \end{aligned}$$

Посчитаем  $f_1(8)$

$$f_1(8) = \begin{array}{l|l} 0 & \{9 ; f_2(8) = 6\} = \textcircled{6} \\ 1 & \{15 ; f_2(5) = 5\} = 5 \\ 2 & \{21 ; f_2(2) = 3\} = 5 \end{array}$$

Занесём данные в таблицу.

$p$	$(f_1, q_1)$	$(f_2, q_2)$	$(f_3, q_3)$	$(f_4, q_4)$
0	×	(3, 0)	(3, 0)	(6, 0)
1	×	(3, 0)	(3, 0)	(6, 0)
2	×	(3, 0/1)	(3, 0)	(10, 1)
3	×	(4.5, 0)	(5, 1)	(10, 1)
4	×	(4.5, 0)	(5, 1)	(14, 2)
5	×	(5, 0)	(5, 1)	(14, 2)
6	×	(5, 1)	(6, 2)	(18, 3)
7	×	×	×	×
8	(6, 0)	(6, 1)	(7, 2)	(22, 4)

Вспомним, что  $f_1(8)$  — максимальное время работы машины для исходной задачи. Поскольку мы получили, что  $f_1(8) = 6$ , то в исходной задаче после заказа груза машина проработает ещё 6 дней.

### Поиск оптимальной стратегии

Заметим, что наше начальное состояние  $p_0 = 8$ , поскольку в самом начале нам доступна вся масса груза  $P = 8$  кг.

$$\begin{aligned}
 p_1^* &= p_0 = 8, & q_1^* &= 0, \\
 p_2^* &= p_1^* - h_1 \cdot q_1^* = 8, & q_2^* &= 1, \\
 p_3^* &= p_2^* - h_2 \cdot q_2^* = 6, & q_3^* &= 2, \\
 p_4^* &= p_3^* - h_3 \cdot q_3^* = 0, & q_4^* &= 0.
 \end{aligned}$$

Наша стратегия — это  $q^* = \{0, 1, 2, 0\}$ , то есть заказать одну деталь второго типа и две детали третьего типа. При данной стратегии машина проработает ещё  $f_1(8) = 6$  дней. При любых других стратегиях время работы будет меньше.

## Замечание

Чтобы заполнять меньше значений таблицы можно было в начале прибегнуть к оптимизации, посчитав множество возможных состояний для каждого шага. Тогда бы мы считали на шаге  $i$  значения  $f_i(p)$  не для всех  $p \leq P$ , а лишь для этих самых возможных состояний.

Например, можно заметить, что для подсчёта  $f_1(8)$  нам нужно было знать лишь  $f_2(8)$ ,  $f_2(5)$  и  $f_2(2)$ . Значение  $f_2(p)$  для остальных  $p$  нам в итоге вообще не пригодились.

## 2.3.2 Задача о фермере

У фермера имеется стадо коров численностью 50 особей. Увеличение численности стада за год задаётся функцией  $\alpha(v)$

$$\alpha(v) = \begin{cases} v + 10, & v \leq 70 \\ v + 20, & \text{иначе} \end{cases}$$

Затраты на содержание одной коровы в течение года  $d = 0.5$ , а выручка от продажи  $c = 3$ . Фермер составляет план продажи коров на ближайшие 5 лет при условии что численность стада не может быть ниже 50, а продажи производятся в конце года.

**1. Что будем оптимизировать?** Ответ: фермер должен получить с продажи коров как можно больше денег.

**2. Что существенно влияет на оптимизируемую характеристику?**

Пусть  $i = 1 \dots 5$  — год.

*Параметры*

- $d = 0.5$  — стоимость содержания одной коровы за год;
- $c = 3$  — выручка за продажу одной коровы.

*Переменные*

- $q = \{q_i\}_{i=1}^5$  — сколько за год нужно продать коров.

**3. Математическая формулировка задачи**

Пусть  $G$  — выручка за 5 лет, а  $p = \{p_i\}_{i=1}^5$  — количество коров в начале года, тогда

$$G = \sum_{i=1}^5 (\underbrace{cq_i}_{\text{доход}} - \underbrace{dp_i}_{\text{расход}}) \rightarrow \max_q$$
$$\forall i \ p_i \geq 50$$
$$p_i = \begin{cases} 50, & i = 1 \\ \alpha(p_{i-1}) - q_{i-1}, & i > 1 \end{cases} \quad (*)$$

## Решение

Для упрощения решения задачи рассмотрим только варианты, когда фермер может продавать за год количество коров кратное 10, то есть

$$Q_i = \{0, 10, 20, 30, \dots\} \quad i = 1 \dots 5.$$

Решим задачу с помощью  $N$ -шагового процесса принятия решений с теми же данными, которые были определены в задаче и с учетом условий на  $q$

- количество шагов процесса = количество лет = 5;
- на  $i$ -ом шаге будем определять сколько коров нужно продать в конце года ( $q_i$ );
- текущее состояние — текущее количество коров.

Тогда функция  $\alpha$  будет от переменной  $p_i$

$$\alpha(p_i) = \begin{cases} p_i + 10, & p_i \leq 70 \\ p_i + 20, & \text{иначе} \end{cases}$$

Определим множества допустимых состояний с учётом (\*)

$$P_1 = \{50\}, \quad P_2 = \{50, 60\}, \quad P_3 = \{50, 60, 70\}, \\ P_4 = \{50, 60, 70, 80\}, \quad P_5 = \{50, 60, 70, 80, 90, 100\}$$

Определим множество допустимых решений

$$Q_i(p) = \{q \in Q_i \mid \alpha(p) - q \geq 50\}$$

Определим функцию дохода

$$g_i(p, q) = -0.5p + 3q = 3q - 0.5p$$

Данная функция обозначает то, сколько денег получит фермер по итогам  $i$ -го года, если из имеющихся  $p$  коров он продаст  $q$ .

Для решения будем рассматривать семейства задач, которые определяются парой  $(n, p)$ . Фактически это означает, что

- рассматриваем доход за года  $n, n + 1, \dots, 5, n \leq 5$ ;
- поголовье скота на начало  $n$ -го года составляет  $p \geq 50$  коров.

### База процесса

Пусть  $f_n(p)$  — максимальная выручка в семействе задач  $(n, p)$ . Заметим, что если  $n = 5$ , то задача легко решается: фермеру нужно продать как можно больше коров, но чтобы их осталось не меньше 50

$$\forall p \in P_5 \quad f_5(p) = \max_{q \in Q_5(p)} \{3q - 0.5p\}.$$

Поскольку нам выгодно продать как можно больше коров, то нужно взять максимально возможное  $q$ , но чтобы в конце года коров осталось не меньше 50. Для

этого можно взять  $q = \alpha(p) - 50$ , тогда выражение для  $f_5(p)$  в явном виде будет выглядеть так

$$\forall p \in P_5 \quad f_5(p) = 3(\alpha(p) - 50) - 0.5p.$$

### Переход

Теперь когда у нас есть база для решения задачи, осуществим переход  $f_{n+1}(p) \rightarrow f_n(p)$  в предположении, что  $f_{n+1}(p)$  мы знаем  $\forall p \geq 50$ .

$$f_n(p) = \max_{q \in Q_n(p)} \left\{ 3q - 0.5p + f_{n+1}(\alpha(p) - q) \right\} \quad (**)$$

Вспомним множества допустимых состояния  $P_i$ . В объединении всех  $P_i$  лежит множество  $\{50, 60, 70, 80, 90, 100\}$  — все значения, которые может принимать  $p$ . Также понятно, что считать  $f_n(p)$  для  $p \notin P_n$  не имеет смысла, так как эти состояния недопустимы. Исходя из этого составим следующую таблицу

$p$	$(f_1, q_1)$	$(f_2, q_2)$	$(f_3, q_3)$	$(f_4, q_4)$	$(f_5, q_5)$
50					
60	×				
70	×	×			
80	×	×	×		
90	×	×	×	×	
100	×	×	×	×	

Значение максимальной выручки в исходной задаче равняется  $f_1(50)$ . Заполним таблицу, чтобы найти его, а затем вычислить все  $q_i^*$ .

**Шаг 1** На первом шаге  $n = 5$ , запишем выражение для  $f_5(p)$

$$f_5(p) = 3(\alpha(p) - 50) - 0.5p.$$

Таким образом мы можем посчитать значение  $f_5(p)$  для любого  $p \geq 50$ , при этом нам известно значение, на котором достигается максимум ( $q_5$ )

$$q_5 = \alpha(p) - 50.$$

Посчитаем значение  $f_5$  для всех возможных состояний

$$f_5(50) = 3(\alpha(50) - 50) - 50 \cdot 0.5 = 5, \quad q_5 = \alpha(50) - 50 = 10;$$



$$\begin{aligned}
f_5(60) &= 3(\alpha(60) - 50) - 60 \cdot 0.5 = 30, & q_5 &= \alpha(60) - 50 = 20; \\
f_5(70) &= 3(\alpha(70) - 50) - 70 \cdot 0.5 = 55, & q_5 &= \alpha(70) - 50 = 30; \\
f_5(80) &= 3(\alpha(80) - 50) - 80 \cdot 0.5 = 110, & q_5 &= \alpha(80) - 50 = 50; \\
f_5(90) &= 3(\alpha(90) - 50) - 90 \cdot 0.5 = 135, & q_5 &= \alpha(90) - 50 = 60; \\
f_5(100) &= 3(\alpha(100) - 50) - 100 \cdot 0.5 = 160, & q_5 &= \alpha(100) - 50 = 70.
\end{aligned}$$

Занесём все эти данные в последний столбец таблицы.

$p$	$(f_1, q_1)$	$(f_2, q_2)$	$(f_3, q_3)$	$(f_4, q_4)$	$(f_5, q_5)$
50					(5, 10)
60	×				(30, 20)
70	×	×			(55, 30)
80	×	×	×		(110, 50)
90	×	×	×	×	(135, 60)
100	×	×	×	×	(160, 70)

**Шаг 2** На втором шаге  $n = 4$ . Выражение для этого и последующих шагов выглядит как функция перехода (\*\*).

Делаем вычисления аналогично шагу 2 [решения задачи о машине](#), с учетом наших ограничений на  $q_i$

$$f_4(50) = \begin{array}{l|l} 0 & -25 + 3 \cdot 0 + f_5(60) = 30 - 25 = 5 \\ 10 & -25 + 3 \cdot 10 + f_5(50) = 30 + 5 - 25 = \textcircled{10} \end{array}$$

$$f_4(60) = \begin{array}{l|l} 0 & -30 + 3 \cdot 0 + f_5(70) = 55 - 30 = 25 \\ 10 & -30 + 3 \cdot 10 + f_5(60) = 30 + 30 - 30 = 30 \\ 20 & -30 + 3 \cdot 20 + f_5(50) = 60 + 5 - 30 = \textcircled{35} \end{array}$$

$$f_4(70) = \begin{array}{l|l} 0 & -35 + 3 \cdot 0 + f_5(80) = 110 - 35 = \textcircled{75} \\ 10 & -35 + 3 \cdot 10 + f_5(70) = 30 + 55 - 35 = 50 \\ 20 & -35 + 3 \cdot 20 + f_5(60) = 60 + 30 - 35 = 55 \\ 30 & -35 + 3 \cdot 30 + f_5(50) = 90 + 5 - 35 = 60 \end{array}$$

$$f_4(80) = \begin{array}{l|l} 0 & -40 + 3 \cdot 0 + f_5(100) = 160 - 40 = 120 \\ 10 & -40 + 3 \cdot 10 + f_5(90) = 30 + 135 - 40 = 125 \\ 20 & -40 + 3 \cdot 20 + f_5(80) = 60 + 110 - 40 = \textcircled{130} \\ 30 & -40 + 3 \cdot 30 + f_5(70) = 90 + 55 - 40 = 105 \\ 40 & -40 + 3 \cdot 40 + f_5(60) = 120 + 30 - 40 = 110 \\ 50 & -40 + 3 \cdot 50 + f_5(50) = 150 + 5 - 40 = 115 \end{array}$$

Занесём все данные в таблицу.

$p$	$(f_1, q_1)$	$(f_2, q_2)$	$(f_3, q_3)$	$(f_4, q_4)$	$(f_5, q_5)$
50				(10, 10)	(5, 10)
60	×			(35, 20)	(30, 20)
70	×	×		(75, 0)	(55, 30)
80	×	×	×	(130, 20)	(110, 50)
90	×	×	×	×	(135, 60)
100	×	×	×	×	(160, 70)

**Шаг 3** На третьем шаге  $n = 3$ . Считаем значения для  $f_3(p)$

$$f_3(50) = \begin{array}{l|l} 0 & -25 + 3 \cdot 0 + f_4(60) = 35 - 25 = 10 \\ 10 & -25 + 3 \cdot 10 + f_4(50) = 30 + 10 - 25 = \textcircled{15} \end{array}$$

$$f_3(60) = \begin{array}{l|l} 0 & -30 + 3 \cdot 0 + f_4(70) = 75 - 30 = \textcircled{45} \\ 10 & -30 + 3 \cdot 10 + f_4(60) = 35 + 30 - 30 = 35 \\ 20 & -30 + 3 \cdot 20 + f_4(50) = 60 + 10 - 30 = 40 \end{array}$$

$$f_3(70) = \begin{array}{l|l} 0 & -35 + 3 \cdot 0 + f_4(80) = 130 - 35 = \textcircled{95} \\ 10 & -35 + 3 \cdot 10 + f_4(70) = 30 + 75 - 35 = 90 \\ 20 & -35 + 3 \cdot 20 + f_4(60) = 60 + 35 - 35 = 60 \\ 30 & -35 + 3 \cdot 30 + f_4(50) = 90 + 10 - 35 = 65 \end{array}$$

Занесём все данные в таблицу.

$p$	$(f_1, q_1)$	$(f_2, q_2)$	$(f_3, q_3)$	$(f_4, q_4)$	$(f_5, q_5)$
50			(15, 10)	(10, 10)	(5, 10)
60	×		(45, 0)	(35, 20)	(30, 20)
70	×	×	(95, 0)	(75, 0)	(55, 30)
80	×	×	×	(130, 20)	(110, 50)
90	×	×	×	×	(135, 60)
100	×	×	×	×	(160, 70)

**Шаг 4** На четвертом шаге  $n = 2$ . Считаем значения для  $f_2(p)$

$$f_2(50) = \begin{array}{l|l} 0 & -25 + 3 \cdot 0 + f_3(60) = 45 - 25 = \textcircled{20} \\ 10 & -25 + 3 \cdot 10 + f_3(50) = 30 + 15 - 25 = \textcircled{20} \end{array}$$

$$f_2(60) = \begin{array}{l|l} 0 & -30 + 3 \cdot 0 + f_3(70) = 95 - 30 = \textcircled{65} \\ 10 & -30 + 3 \cdot 10 + f_3(60) = 45 + 30 - 30 = 45 \\ 20 & -30 + 3 \cdot 20 + f_3(50) = 60 + 15 - 30 = 45 \end{array}$$

Занесём все данные в таблицу.

$p$	$(f_1, q_1)$	$(f_2, q_2)$	$(f_3, q_3)$	$(f_4, q_4)$	$(f_5, q_5)$
50		(20, 0/10)	(15, 10)	(10, 10)	(5, 10)
60	×	(65, 0)	(45, 0)	(35, 20)	(30, 20)
70	×	×	(95, 0)	(75, 0)	(55, 30)
80	×	×	×	(130, 20)	(110, 50)
90	×	×	×	×	(135, 60)
100	×	×	×	×	(160, 70)

**Шаг 5** На пятом шаге  $n = 1$ . Считаем значения для  $f_1(p)$

$$f_1(50) = \begin{array}{l|l} 0 & -25 + 3 \cdot 0 + f_2(60) = 65 - 25 = \textcircled{40} \\ 10 & -25 + 3 \cdot 10 + f_2(50) = 30 + 20 - 25 = 25 \end{array}$$

Занесём все данные в таблицу.

$p$	$(f_1, q_1)$	$(f_2, q_2)$	$(f_3, q_3)$	$(f_4, q_4)$	$(f_5, q_5)$
50	(40, 0)	(20, 0/10)	(15, 10)	(10, 10)	(5, 10)
60	×	(65, 0)	(45, 0)	(35, 20)	(30, 20)
70	×	×	(95, 0)	(75, 0)	(55, 30)
80	×	×	×	(130, 20)	(110, 50)
90	×	×	×	×	(135, 60)
100	×	×	×	×	(160, 70)

### Поиск оптимальной стратегии

Заметим, что наше начальное состояние  $p_0 = 50$ , поскольку в самом начале у фермера было 50 коров

$$\begin{aligned}
 p_1^* &= p_0 = 50, & q_1^* &= 0, \\
 p_2^* &= \alpha(p_1^*) - q_1^* = 60, & q_2^* &= 0, \\
 p_3^* &= \alpha(p_2^*) - q_2^* = 70, & q_3^* &= 0, \\
 p_4^* &= \alpha(p_3^*) - q_3^* = 80, & q_4^* &= 20, \\
 p_5^* &= \alpha(p_4^*) - q_4^* = 80, & q_5^* &= 50.
 \end{aligned}$$

Итоговая стратегия — это  $q^* = \{0, 0, 0, 20, 50\}$ , то есть в первые три года не продавать коров, в четвёртый год продать 20, а в пятый — 50. При данной стратегии прибыль составит  $f_1(50) = 40$ .