# Математические модели и методы принятия оптимальных решений

Береснев Владимир Леонидович

ФИТ НГУ

Авторы: Кондренко К.П., Воробьёв А.Д.

2025 г.

# Оглавление

# 1 Введение

### Определение

*Организованные системы* — системы, в которых решения принимаются «сознательно». Примеры таких систем: люди, промышленные предприятия, магазины.

Примеры задач:

- где построить магазин, чтобы получать наибольшую прибыль?
- сколько производить деталей на заводе, чтобы отношение между доходом и выручкой было наибольшим?

Примерно до второй мировой войны все сложные решения принимались лишь на основе опыта и здравого смысла. Однако позже появились сложные системы, в которых опыта и здравого смысла оказалось недостаточно. Тогда же появилась **идея** рассматривать числовые характеристики систем для принятия решения, при этом должны использоваться *математические модели* — упрощённые, но адекватные описания реальной жизни.

## 1.1 Построение математических моделей

Математические модели строятся на основании *исходных данных* — конкретных проблем в конкретных жизненных ситуациях.

### **Алгоритм** (построения математических моделей)

1. Нужно понять, **что будем оптимизировать?** По каким критериям будем оценивать решения? Например, если нас спрашивают, где построить магазин, то нам нужно понять, как выбрать для этого место. Нужно, чтобы была максимальная прибыль или чтобы была наибольшая удалённость от конкурентов? Если мы закупаем детали для предприятия, то нужно узнать, хочется ли нам наибольшую прибыль или же минимальные издержки. А может нам важно количество произведённой продукции?
2. Нужно понять, **какие характеристики существенно влияют на оптимизируемую характеристику**. Например, если наша оптимизируемая характеристика — это прибыль предприятия, то нужно определить, из чего складываются выручка и затраты.
3. **Формулировка задачи** с точным указанием всех характеристик. Каждая из характеристик должна относиться либо к *переменным*, либо к *параметрам*. Первые могут меняться (обозначаются они через $x, y, z, \dots$), а вторые — это константы (обозначаются они через

$a, b, c, \dots$). Например, переменные — это выручка и затраты предприятия, а параметры — это площадь помещения, количество станков, количество работников.

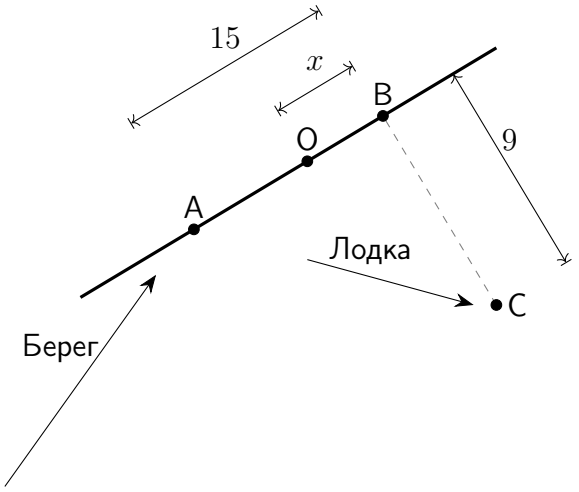
4. Выбор всех обозначений и **математическая запись** с учётом ограничений и требований для переменных.
5. ~~Понимание, что изначальная проблема состоит в другом, не учтены такие-то параметры, а значит нужно вернуться к самому началу.~~

## Замечание

Алгоритм примерный, поэтому на практике этапы и их содержание могут отличаться от того, что написано в алгоритме.

## Задача (о лодке)

Для примера рассмотрим следующую задачу: ваш знакомый плывёт на лодке, и ему нужно попасть в определённую точку на берегу. Он спрашивает вас, куда ему нужно причалить.




**Характеристики рассматриваемой системы**

- $C$ — текущее местоположение лодки;
- $A$ — точка, в которую нужно попасть;
- $B$ — ближайшая к лодке точка берега;
- $O$ — точка причаливания;
- $AB = 15$ км;
- $BC = 9$ км (расстояние от лодки до берега);
- $v_{\text{по суше}} = 5$ км/ч;
- $v_{\text{лодки}} = 4$ км/ч;
- $OB = x$;
- $0 \leq x \leq 15$, потому что иначе решение точно не будет оптимальным;
- течения воды нет, то есть скорость течения равна нулю;
- ~~цвет лодки не существенен.~~

## Решение

Будем оптимизировать время причаливания $t$s

$$t = \underbrace{\frac{OC}{v_{\text{по воде}}}}_{\text{движение по воде}} + \underbrace{\frac{OA}{v_{\text{по суше}}}}_{\text{движение по суше}}$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{x^2+81}}{4} + \frac{15-x}{5} \to \min_x}$$

Для решения задачи найдём нули производной

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{2x}{8\sqrt{x^2+81}} - \frac{1}{5} = 0,$$

$$\frac{x}{4\sqrt{x^2+81}} = \frac{1}{5},$$

$$\frac{x^2}{16(x^2+81)} = \frac{1}{25},$$

$$25x^2 = 16x^2 + 16 \cdot 81,$$

$$9x^2 = 16 \cdot 81,$$

$$x^2 = 16 \cdot 9,$$

$$x_1 = -12, \qquad x_2 = 12.$$

Решение $x = -12$ не подходит ввиду ограничения выше, а вот $\boxed{x = 12}$ является ответом.

# 1.2 Экстремальные задачи

## Определение

*Экстремальная задача* формулируется следующим образом

1. Есть функция $f(x)$, значение которой нужно оптимизировать;
2. Есть набор ограничений $g_1(x) \le b_1, g_2(x) \le b_2, \ldots$;
3. $x \in X$, $X$ — *множество всех решений*,

при этом нужно найти

$$\min_{x \in X} f(x) \quad \text{или} \quad \max_{x \in X} f(x).$$

## Замечание

Ограничения $\{g_i(x)\}$ могут быть какими угодно.

## Определение

*Допустимые решения* — множество всех значений $x \in X$, которые удовлетворяют всем ограничения $\{g_i\}$.

## Определение

Допустимое решение $x^*$ называется *оптимальным решением задачи*, если

$$\forall x \in X \qquad f(x^*) \ge f(x).$$

или то же самое

$$f(x^*) = \max_{x \in X} f(x).$$

Вторая запись означает, что мы ищем максимальное значение $f(x)$, перебирая все $x$ из множества $X$.

### Пример

Пусть наши исходные данные это

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max_x,$$

$$g(x) = a x_1 + b x_2 \leq d,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$$

а задача состоит в поиске оптимальных значений $x_1$ и $x_2$.

### Определение

Будем говорить, что есть *общая задача* $\mathcal{P}$, а $p \in \mathcal{P}$ — конкретная задача, в которой у всех параметров есть конкретные значения, например, если бы в задаче выше $c_1, c_2, a, b, d$ были бы конкретными числами. То есть *общая задача* — это множество конкретных задач.

### Определение

*Длина входа задачи* — это количество ячеек в памяти, которое занимает задача с допущением, что каждое число занимает в памяти ровно одну ячейку. Будем обозначать это $|p|$.

## 1.3 Алгоритмы и их трудоёмкость

### Определение

*Элементарные операции* — арифметические операции и операции сравнения.

### Определение

*Трудоёмкость алгоритма* $A$ решения задачи $p \in \mathcal{P}$ — это количество элементарных операций, используемых в этом алгоритме. Будем обозначать это $T_A(p)$.

### Замечание

Чем больше $|p|$, тем больше $T_A(p)$, поэтому целесообразно оценивать трудоёмкость так

$$T_A(p) \leq f_A\big(|p|\big).$$

### Определение

Алгоритм $A$ будем называть *«эффективным»* (*полиномиальным*), если

$$f_A\big(|p|\big) = \underbrace{C}_{const} \cdot |p|^k.$$

Примерами задач, для которых существуют «хорошие» алгоритмы, являются, например математические задачи, в которых $x$ — множество векторов (линейное и нелинейное программирование), и задачи комбинаторики (например, перестановки).

### Определение

*Задача линейного программирования* определяется следующим образом

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max_{(x_j)},$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1 \dots m,$$

$$x_j \in \{0, 1, 2, \dots\}, \quad j = 1 \dots n.$$

Распространённый частный случай: $x_j \in \{0, 1\}$.

# 1.4 Примеры задач

## 1.4.1 Задача о машине

### Задача

На некотором острове есть машина; для работы машины нужны детали, которые могут изнашиваться. В скором времени нужно будет вызвать самолёт, который сможет доставить необходимые детали, однако максимальная масса груза ограничена. Сколько деталей каждого типа нужно заказать?

### Математическая модель

**1. Что будем оптимизировать?** Ответ: машина должна работать максимальное время.

**2. Что существенно влияет на оптимизируемую характеристику?**
Пусть $i = 1 \dots n$ — вид детали.

*Параметры* (то есть фиксированные значения)

- $m = \{m_i\}_{i=1}^n$ — масса деталей;
- $t = \{t_i\}_{i=1}^n$ — срок службы деталей (часов, дней, месяцев — неважно);
- $a = \{a_i\}_{i=1}^n$ — количество работающих деталей в машине;
- $M$ — максимальная масса посылки.

*Переменные* (то что может меняться)

- $x = \{x_i\}_{i=1}^n$ — сколько нужно взять деталей в посылку.

**3. Математическая формулировка задачи**
Пусть $T$ — время работы машины, тогда

$$T = \min_{i=1\dots n} \big((x_i + a_i) \cdot t_i\big) \to \max_{(x_i)},$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i x_i \le M,$$

$$x_i \ge 0.$$

Первое выражение говорит о том, что мы максимизируем время работы машины $T$ при различных $(x_i)$, то есть нам нужно подобрать такие значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, при которых время работы будет максимальным. Выражение $(x_i+a_i)$ — это то, сколько деталей вида $i$ будет после прилёта самолёта с посылкой. Если учесть, что каждая деталь типа $i$ имеет срок службы $t_i$, то все детали данного типа проработают $(x_i + a_i) \cdot t_i$. Ясно, что машина перестанет работать, когда какой-то вид деталей в ней отработает свой срок службы, значит время работы машины — это минимум из времён работы всех деталей.

Второе выражение отражает ограничение задачи, которое состоит в том, что мы не можем заказать груз большей массы, чем установленная максимальная масса посылки.

Третье выражение говорит о том, что количество заказываемых деталей не может быть отрицательным — оно и понятно.

## 1.4.2 Задача о салфетках

### Задача

Пусть есть некоторое кафе, в которое каждый день ходят люди, при этом известно, сколько человек посещает кафе каждый день недели. Каждому гостю на день выдают салфетку, которую вечером стирают. Салфетки можно стирать с помощью быстрой и медленной стирок. Первая — дорогая, но работает условно моментально, вторая — дешёвая, но выдача постиранных салфеток происходит лишь через день. Как сэкономить деньги на стирке так, чтобы всем посетителям всегда хватало салфеток?

### Математическая модель

**1. Что будем оптимизировать?** Ответ: нужно минимизировать затраты на стирку.

**2. Что существенно влияет на оптимизируемую характеристику?**
Пусть $i = 1 \ldots 7$ — день недели.

*Параметры*

- $c_1$ — цена быстрой стирки;
- $c_2$ — цена медленной стирки;
- $T$ — общее количество салфеток в кафе;
- $p_i$ — количество гостей в $i$-ый день недели;

*Переменные*

- $x_i$ — количество салфеток, отданных в быструю стирку в $i$-ый день недели;
- $y_i$ — количество салфеток, отданных в медленную стирку в $i$-ый день недели.

**3. Математическая формулировка задачи**
Пусть $C$ — затраты на стирку за неделю, тогда

$$C = \sum_{i=1}^{7} (c_1 x_i + c_2 y_i) \to \min_{(x_i),(y_i)},$$

$$x_i + y_i = p_i,$$

$$x_i \geq 0, \quad y_i \geq 0,$$

$$\begin{cases} T - y_7 \geq p_1, \\ T - y_1 \geq p_2, \\ T - y_2 \geq p_3, \\ \dots \\ T - y_5 \geq p_6, \\ T - y_6 \geq p_7. \end{cases}$$

Первое выражение означает, что мы минимизируем затраты на стирку в неделю при различных $x_1, x_2, \dots, x_7$ и $y_1, y_2, \dots, y_7$. Выражение $(c_1 x_i + c_2 y_i)$ означает затраты на стирку в $i$-ый день недели.

Второе выражение означает, что каждый день все грязные салфетки отправляются в стирку, то есть то, что не остаётся не постиранных.

Последние семь неравенств означают, что всем посетителям всегда хватает салфеток.

## 1.4.3 Задача раскроя

### **Задача** (раскроя)

Вашему знакомому сантехнику нужно определённое количество коротких труб, однако в магазине можно купить только длинные. Сколько нужно купить длинных труб, чтобы их можно было раскроить на короткие? Пусть нужны

- 10 труб по 6 м,
- 15 труб по 5 м,
- 26 труб по 4 м,

а в магазине продаются лишь трубы по 13 м.

### Математическая модель

**1. Что будем оптимизировать?** Ответ: нужно минимизировать число покупаемых труб по 13 м.

**2. Что существенно влияет на оптимизируемую характеристику?**

Рассмотрим все варианты, как можно раскроить длинную трубу на короткие

| № | 6 м | 5 м | 4 м |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 0 |
| 3 | 1 | 0 | 1 |
| 4 | 0 | 2 | 0 |
| 5 | 0 | 1 | 2 |
| 6 | 0 | 0 | 3 |

То есть раскроить длинную трубу на короткие можно 6 разными способами. Например, на две трубы длиной 6 метров (первая строка таблицы), на одну трубу длиной 6 метров и на одну трубу длиной 5 метров (вторая строка таблицы) и так далее.

*Параметры*

- $x_i$ — количество длинных труб, раскроенных $i$-ым способом;

**3. Математическая формулировка задачи**

Пусть $T$ — количество изрезанных длинных труб, тогда

$$T = \sum_{i=1}^{6} x_i \to \min_{(x_i)}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 10 \\ x_2 + 2x_4 + x_5 \geq 15 \\ x_3 + 2x_5 + 3x_6 \geq 26 \end{cases}$$

Первое выражение означает, что мы минимизируем количество раскроенных длинных труб, таким образом минимизируя затраты на их покупку.

Последние три неравенства означают, что после раскроя длинных труб мы получили достаточное количество коротких: первое неравенство для труб длиной 6 метров, второе — 5 метров, третье — 4 метра.

### Замечание

В общем случае задача раскроя является NP-полной.

## 1.5 Свойства оптимизационных задач

### **Утверждение** (от максимума к минимуму)

Пусть есть задача, в которой нужно максимизировать значение функции $f(x)$ при $x \in X$, тогда

$$\max_{x \in X} f(x) = \max_{x \in X} \Big( \big( -1 \big) \cdot \big( -f(x) \big) \Big) = \underbrace{- \min_{x} \big( -f(x) \big)}_{\text{новая задача}}.$$

То есть задача нахождения максимума функции $f(x)$ эквивалентна задаче нахождения минимума функции $\big( -f(x) \big)$.

### **Утверждение** (оценка сверху, релаксированные задачи)

Если $X \subseteq X'$, то

$$\max_{x \in X} f(x) \leq \max_{x \in X'} f(x).$$

### **Определение**

Пусть есть две общие задачи: $(\mathcal{P}) \max x \in X f(x)$ и $(\mathcal{Q}) \max_{y \in Y} g(y)$. Будем говорить, что задача $\mathcal{P}$ *сводится к задаче* $\mathcal{Q}$, если $\forall p \in \mathcal{P}$ $\forall q \in \mathcal{Q}$

1. существует полиномиальный алгоритм $A_1$, который переводит входные данные задачи $p$ во входные данные задачи $q$;
2. существует полиномиальный алгоритм $A_2$, с помощью которого можно из оптимального решения $y^*$ задачи $q$ построить оптимальное решение $x^0$ задачи $p$,

то есть

$$\begin{array}{ccc} p & \xrightarrow{A_1} & q, \\ x^0 & \xleftarrow{A_2} & y^*. \end{array}$$

Остаётся вопрос: как понять, что построенное решение $x^0$ — оптимальное?

## Замечание

Везде далее всегда будем оптимизировать именно $\max$, а не $\min$.

## Утверждение (сведение к другой задаче)

Пусть есть две задачи: $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$, при этом

1. $x^0$ — допустимое решение задачи $\mathcal{P}$,
2. $y^*$ — оптимальное решение задачи $\mathcal{Q}$,
3. $f(x^0) \geq g(y^*)$,
4. $\forall x \in X \; \exists y \in Y \quad f(x) \leq g(y)$,

тогда $x^0$ — оптимальное решение задачи $\mathcal{P}$.

## Доказательство

Пусть задача $\mathcal{P}$ имеет оптимальное решение $x^*$. По четвёртому условию для $x^*$ существует некоторый $y^0$ такой, что

$$f(x^*) \leq g(y^0). \tag{*}$$

По второму условию $y^*$ является оптимальным решением задачи $\mathcal{Q}$, в то время как $y^0$ — допустимое (необязательно оптимальное) решение задачи $\mathcal{Q}$, значит верно следующее

$$g(y^*) \geq g(y^0). \tag{**}$$

Составим цепочку неравенств

$$f(x^0) \overset{(3)}{\geq} g(y^*) \overset{(**)}{\geq} g(y^0) \overset{(*)}{\geq} f(x^*).$$

Таким образом имеем неравенство

$$f(x^0) \geq f(x^*),$$

хотя $x^*$ — оптимальное решение задачи $\mathcal{P}$. Значит $f(x^0) = f(x^*)$, то есть $x^0$ тоже является оптимальным решением.

## Пример

$(\mathcal{P})$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max_{(x_j)},$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b, \tag{1}$$

$$x_1 + x_2 = d, \tag{2}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1 \ldots n. \tag{3}$$

Заметим, что $x_1$ можно выразить через $x_2$ (и наоборот). Рассмотрим другую задачу

$(\mathcal{Q})$

$$c_1(d - y_2) + \sum_{j=2}^{n} c_j y_j \to \max_{(y_j)},$$

.

$$a_1(d - y_2) + \sum_{j=2}^{n} a_j y_j \le b,$$

.

$$y_j \ge 0, \quad j = 1 \dots n,$$

$$y_2 \le d.$$

Покажем, что задача $\mathcal{P}$ сводится к задаче $\mathcal{Q}$.

## Доказательство

Пусть $y^* = \begin{pmatrix} y_1^* & \dots & y_n^* \end{pmatrix}$ — это оптимальное решение задачи $\mathcal{Q}$. Будем строить решение $x^0$ задачи $\mathcal{P}$ следующим образом

$$x_j^0 = \begin{cases} d - y_2^*, & j = 1 \\ y_j^*, & j > 1 \end{cases}$$

то есть $x^0 = \begin{pmatrix} d - y_2^* & y_2^* & y_3^* & \dots & y_n^* \end{pmatrix}$.

### Допустимость решения

Покажем, что $x^0$ — допустимое решение задачи $\mathcal{P}$. Для этого нужно показать, что оно удовлетворяет всем ограничениям. Заметим, что без условия $y_2 \le d$ значение $x_1$ может быть меньше нуля, а значит решение $x^0$ точно было бы не допустимым (3).

1. Проверим (2)
$$x_1^0 + x_2^0 = d - y_2^* + y_2^* = d.$$
2. Проверим (1)
$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j^0 &= a_1 x_1^0 + a_2 x_2^0 + \dots + a_n x_n^0 \\ &= a_1(d - y_2^*) + a_2 y_2^* + \dots + a_n y_n^* \\ &= a_1(d - y_2^*) + \sum_{j=2}^{n} a_j y_j^* \le b. \end{aligned}$$

   То есть $x^0$ удовлетворяет всем ограничениям, значит $x^0$ — допустимое решение задачи $\mathcal{P}$.

### Оптимальность решения

Мы показали, что $x^0$ — допустимое решение задачи $\mathcal{P}$. Осталось показать, что оно оптимальное. Для этого будем использовать сведение к другой задаче. Для этого нужно проверить, что выполняются все условия для его использования.

1. Выполнимость условия $f(x^0) \ge g(y^*)$ следует из того, что при подстановке, использованной при проверке (1), получится равенство
$$f(x^0) = g(y^*).$$

2. Выполнимость условия

$$\forall x \in X \; \exists y \in Y \quad f(x) \leq g(y)$$

следует из того, что по любому $x = (x_j)$ можно построить $y = (y_j)$ следующим образом

$$y_j = \begin{cases} d - x_2, & j = 1 \\ x_j, & j > 1 \end{cases}$$

И вновь, если всё аккуратно подставить, то получится

$$f(x) = g(y) \quad \to \quad f(x) \leq g(y).$$

Таким образом мы доказали, что утверждение можно применить. Следствием этого является то, что задача $\mathcal{P}$ действительно сводится к задаче $\mathcal{Q}$.

Мы взяли задачу с $n$ переменными и перешли от неё к задаче с $n-1$ переменными. Разве не круто?!

# 1.6 Решение задачи о салфетках

**Решение** (задачи о салфетках)

Решим задачу о салфетках с помощью сведения к другой задаче. Запишем математическую формулировку нашей исходной задачи

$(\mathcal{P})$

$$C = \sum_{i=1}^{7} (c_1 x_i + c_2 y_i) \to \min_{(x_i),(y_i)}$$

$$x_i + y_i = p_i,$$

$$x_i \geq 0, \quad y_i \geq 0,$$

$$\begin{cases} T - y_7 \geq p_1, \\ T - y_1 \geq p_2, \\ T - y_2 \geq p_3, \\ \dots \\ T - y_5 \geq p_6, \\ T - y_6 \geq p_7. \end{cases}$$

**Новая задача**

Новая задача $\mathcal{Q}$ будет эквивалентна исходной задаче $\mathcal{P}$, однако в ней все $x_i$ будут выражены через $y_i$ и $p_i$ следующим образом

$$x_i = p_i - y_i.$$

Запишем оптимизируемую характеристику в новой задаче $\mathcal{Q}$

$$\begin{aligned} C &= \sum_{i=1}^{7}(c_1x_i + c_2y_i) \to \min_{(x_i),(y_i)} \\ &= \sum_{i=1}^{7}\big(c_1(p_i - y_i) + c_2y_i\big) \to \min_{(y_i)} \\ &= \sum_{i=1}^{7}\big(y_i(c_2 - c_1) + c_1p_i\big) \to \min_{(y_i)} \\ &= \underbrace{(c_2 - c_1)}_{const,<0}\sum_{i=1}^{7} y_i + \underbrace{c_1\sum_{i=1}^{7} p_i}_{const} \to \min_{(y_i)} \\ &\sim \sum_{i=1}^{7} y_i \to \max_{(y_i)}. \end{aligned}$$

То есть фактически наша новая задача $\mathcal{Q}$ выглядит следующим образом

$$\sum_{i=1}^{7} y_i \to \max_{(y_i)},$$

с учётом ограничений

$$\begin{cases} T - y_7 \geq p_1, \\ T - y_1 \geq p_2, \\ T - y_2 \geq p_3, \\ \dots \\ T - y_5 \geq p_6, \\ T - y_6 \geq p_7. \end{cases}$$

Стоит заметить, что в задаче $\mathcal{P}$ все $x_i \geq 0$, а значит нужно ввести ограничения на $y_i$

$$y_i \leq p_i.$$

Итого, новая задача формулируется следующим образом
$(\mathcal{Q})$

$$\sum_{i=1}^{7} y_i \to \max_{(y_i)},$$

$$\begin{cases} T - y_7 \geq p_1, \\ T - y_1 \geq p_2, \\ T - y_2 \geq p_3, \\ \dots \\ T - y_5 \geq p_6, \\ T - y_6 \geq p_7; \end{cases}$$

$$y_i \leq p_i, \quad i = 1 \dots 7.$$

**Решение новой задачи**

Нам нужно максимизировать сумму $y_i$, при этом на каждый $y_i$ есть два ограничения сверху. Так, например для $y_2$ есть ограничения

$$\begin{cases} T - y_2 \geq p_3, \\ y_2 \leq p_2; \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} y_2 \leq T - p_3, \\ y_2 \leq p_2. \end{cases}$$

Ясно, что если все $y_i$ выбрать максимально возможными, то и их сумма будет максимально возможной. Максимально возможное значение $y_i$, которое удовлетворяет условие — это минимум из двух верхних границ. Например, для $y_2$ это будет

$$\min\{T - p_3, p_2\}.$$

Таким образом, мы уже можем записать оптимальное решение $y^*$ задачи $\mathcal{Q}$

$$y_1^* = \min\{T - p_2, p_1\},$$
$$y_2^* = \min\{T - p_3, p_2\},$$
$$\dots$$
$$y_6^* = \min\{T - p_7, p_6\},$$
$$y_7^* = \min\{T - p_1, p_7\}.$$

**Возвращение к исходной задаче**

После того, как мы нашли оптимальное решение новой задачи $\mathcal{Q}$, нужно вернуться к исходной задаче $\mathcal{P}$. Её оптимальное решение $x^0$ выражается следующим образом

$$x_i^0 = p_i - y_i^*.$$

Таким образом, мы свели исходную задачу $\mathcal{P}$ к новой задаче $\mathcal{Q}$ с меньшим числом переменных, решили новую задачу и по её оптимальному решению построили оптимальное решение исходной задачи.

Почему $x^0$ — оптимальное решение задачи $\mathcal{P}$? Для доказательства этого можно использовать сведение к другой задаче по аналогии с тем, как это было сделано в примере.

# 1.7 Использование булевых переменных

Очень часто в реальных задачах встречаются самые разные логические условия. Например: «если верно ..., то должно быть верно ...». Данные условия можно записать на языке формул математической логики, однако в рамках данного курса будет удобнее, если они будут записаны с использованием алгебраических выражений. Таким образом мы сможем записать любые ограничения любых задач на языке алгебры. Для записи логических условий хорошо подходят *булевы переменные* (переменные, которые могут принимать лишь значения $0, 1$).

## **Утверждение** (простые условия)

Если $x$ и $y$ — булевы переменные, то имеют место следующие соответствия логических условий и алгебраической записи

| Условие | Запись |
|---|---|
| если $x = 0$, то $y = 0$ | $x \geq y$ |
| если $x = 0$, то $y = 1$ | $x \geq 1 - y$ |
| если $x = 1$, то $y = 0$ | $1 - x \geq y$ |
| если $x = 1$ ,то $y = 1$ | $1 - x \geq 1 - y$ |

## Доказательство

Для доказательства рассмотрим лишь первые два логических условия, поскольку доказательства для остальных аналогичны.

1. Если $x = 0$, то $y = 0$
   - если $x = 0$, то $y$ не может быть равен 1, потому что $0 \ngeq 1$, значит $y$ может равняться лишь 0;
   - если $x = 1$, то $y$ может равняться как 0, так и 1, поскольку $1 \geq 0$ и $1 \geq 1$.
2. Если $x = 0$, то $y = 1$
   - если $x = 0$, то $1 - y$ не может быть равен 1, а значит $1 - y = 0$, как следствие $y = 1$;
   - если $x = 1$, то $1 - y$ может равняться как 0, так и 1, значит $y$ может принимать любое значение из $\{0, 1\}$.

## Пример

Используя предыдущее утверждение, можно алгебраически записывать различные условия задач. Например, пусть в некоторой рассматриваемой задаче есть два логических условия $A$ и $B$, а нам нужно записать на языке алгебры логическое выражение «если верно $A$, то верно $B$». Для этого введём две булевы переменные $x$ и $y$

$$x = \begin{cases} 1, & A \text{ — истина} \\ 0, & A \text{ — ложь} \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 1, & B \text{ — истина} \\ 0, & B \text{ — ложь} \end{cases}$$

Тогда «если верно $A$, то верно $B$» эквивалентно утверждению «если $x = 1$, то $y = 1$», а по предыдущему утверждению алгебраически это можно записать как

$$\boxed{1 - x \geq 1 - y}.$$

Данное неравенство будет добавлено в ограничения рассматриваемой задачи, таким образом исходное условие про $A$ и $B$ будет учтено в математической модели.

## **Утверждение** (сложные условия)

Пусть

- $x = (x_i)$ и $y = (y_k)$ — булевы векторы;
- $i \in I$, $k \in K$;

- $I^0 \subseteq I$ и $I^1 \subseteq I$ — непересекающиеся множества;
- $K^0 \subseteq K$ и $K^1 \subseteq K$ — непересекающиеся множества.

Векторы $x$ и $y$ будем называть «хорошими», если верно следующее

$$x_i = \begin{cases} 0, & i \in I^0 \\ 1, & i \in I^1 \end{cases} \qquad y_k = \begin{cases} 0, & k \in K^0 \\ 1, & k \in K^1 \end{cases}$$

Тогда имеют место следующие соответствия логических условий и алгебраической записи

| Условие | Запись |
|---|---|
| $x$ — «хороший» $\Rightarrow y = 0$ | $\sum\limits_{i \in I^1} (1 - x_i) + \sum\limits_{i \in I^0} x_i \geq y$ |
| $x = 0 \Rightarrow y$ — «хороший» | $\|K^0 \cup K^1\| \cdot x \geq \sum\limits_{k \in K^1} (1 - y_k) + \sum\limits_{k \in K^0} y_k$ |
| $x$ — «хороший» $\Rightarrow y$ — «хороший» | $\|K^0 \cup K^1\| \cdot \left( \sum\limits_{i \in I^1} (1 - x_i) + \sum\limits_{i \in I^0} x_i \right) \geq \sum\limits_{k \in K^1} (1 - y_k) + \sum\limits_{k \in K^0} y_k$ |

В первое условии $y$ — вектор из одного элемента, то есть фактически булева переменная. Во втором условии $x$ — вектор из одного элемента, то есть фактически булева переменная.

## Доказательство

1. Если $x$ — «хороший», то $y = 0$
   - если вектор $x$ является «хорошим», то обе суммы равняются нулю, значит $y$ ничего не остаётся кроме как быть равным нулю;
   - если вектор $x$ не является «хорошим», то слева будет число $\geq 1$, а значит $y$ может быть как $0$, так и $1$.
2. Если $x = 0$, то $y$ — «хороший»
   - если $x = 0$, то обе суммы должны равняться нулю, значит $y_k = 1 \Leftrightarrow k \in K^1$ и $y_k = 0 \Leftrightarrow k \in K^0$, значит $y$ — «хороший»;
   - если $x \neq 0$, то $x = 1$, значит справа сумма сумм может быть какой угодно, поэтому $y$ может иметь любой вид.

   Откуда взялся коэффициент $\|K^0 \cup K^1\|$? Если $x \neq 0$, то $y$ должен иметь возможность принимать любые значения (посылка ложна), однако алгебраически это не так. Теоретически правая часть может быть сколь угодно большой, а левая часть без коэффициента может быть лишь не больше 1. Это означает, что наше алгебраическое выражение по смыслу не совпадает с изначальным логическим условием. Чтобы оно совпадало, нужно разрешить $y$ принимать любые значения при $x \neq 0$. Для этого как раз и добавлен коэффициент в левой части неравенства, чтобы неравенство оставалось верным при $x = 1$ и сколь угодно большой правой части.
3. Аналогично предыдущим пунктам.

## Пример

Данное утверждение, в отличие от простых условий, позволяет алгебраически записывать логически условия, в которых истинными или ложными должны быть сразу несколько условий.

Например, пусть при решении некоторой задачи нам нужно записать логическое выражение «если условия $A_1$ и $A_2$ истины, то условие $B_1$ ложно, а $B_2$ и $B_3$ истинны». Определим два булевых вектора $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2, y_3)$ следующим образом

$$x_i = \begin{cases} 1, & A_i \text{ — истина} \\ 0, & A_i \text{ — ложь} \end{cases} \qquad y_k = \begin{cases} 1, & B_k \text{ — истина} \\ 0, & B_k \text{ — ложь} \end{cases}$$

Исходное логическое выражение эквивалентно «если $x = (1, 1)$, то $y = (0, 1, 1)$». По предыдущему утверждению алгебраически это можно записать так (третий случай)

$$\boxed{3 \cdot (1 - x_1 + 1 - x_2) \geq (1 - y_2) + (1 - y_3) + y_1}. \qquad (*)$$

Коэффициент $3$ — это $\|K^0 \cup K^1\|$ из утверждения. Объясним его необходимость на данном примере.

Исходное логическое выражение звучит как «если $x = (1, 1)$, то $y = (0, 1, 1)$». Это означает, что если $x \neq (1, 1)$, то на $y$ нет никаких ограничений, то есть он может принимать любые значения. Проверим, верно ли это, определим $\hat{x} = (0, 0)$ и подставим его в $(^*)$ без коэффициента

$$1 - 0 + 1 - 0 \geq (1 - y_2) + (1 - y_3) + y_1,$$

$$2 \geq (1 - y_2) + (1 - y_3) + y_1.$$

Неравенству выше не удовлетворяет вектор $\hat{y} = (1, 0, 0)$, поскольку $2 \not\geq 3$. То есть несмотря на то, что $\hat{x}$ не удовлетворяет условию, на $y$ накладываются какие-то ограничения. Значит если из $(*)$ убрать коэффициент $3$, то неравенство не будет эквивалентно логическому выражению «если $x = (1, 1)$, то $y = (0, 1, 1)$».

## **Утверждение** (альтернативные условия)

Пусть в некоторой задаче сформулированы два ограничения

$$f_1(x) \geq b_1, \qquad (1)$$

$$f_2(x) \geq b_2. \qquad (2)$$

Введём булеву переменную $y$ следующим образом

$$y = \begin{cases} 0, & \text{выполняется (1)} \\ 1, & \text{выполняется (2)} \end{cases}$$

и пусть $W$ — «большая величина», то есть

$$W \gg b_1, \quad W \gg b_2.$$

Тогда логическое выражение «выполняется либо (1), либо (2)» записывается алгебраически следующим образом

$$f_1(x) \geq b_1 - W(1 - y),$$

$$f_2(x) \geq b_2 - Wy,$$

## Доказательство

- Если $y = 1$, то

$$f_1(x) \geq b_1,$$

$$f_2(x) \geq b_2 - W \to -\infty.$$

Первое неравенство верно, как и второе. Однако если со вторым есть вопросы, а точно ли оно верно, то вот первое выполняется гарантировано.

- Если $y = 0$, то имеем

$$f_1(x) \geq b_1 - W \to -\infty,$$

$$f_2(x) \geq b_2.$$

Аналогично, оба неравенства выполнены, но важно, что второе неравенство выполняется гарантировано.

Значит при любых значениях $y$ выполняется либо (1), либо (2).

## Замечание

То же самое можно записать с использованием двух булевых переменных $y_1$ и $y_2$

$$y_1 = \begin{cases} 1, & \text{(1) выполняется} \\ 0, & \text{(1) не выполняется} \end{cases} \qquad y_2 = \begin{cases} 1, & \text{(2) выполняется} \\ 0, & \text{(2) не выполняется} \end{cases}$$

$$f_1(x) \geq b_1 - W(1 - y_1),$$

$$f_2(x) \geq b_2 - W(1 - y_2),$$

$$y_1 + y_2 \geq 1.$$

## Замечание

Если ограничения записаны в другую сторону, то есть

$$f_1(x) \leq b_1,$$

$$f_2(x) \leq b_2,$$

то записать алгебраически их можно следующим образом

$$f_1(x) \leq b_1 + W(1 - y_1),$$

$$f_2(x) \leq b_2 + W y_2,$$

$$y_1 + y_2 = 1.$$

Аналогично можно записать через $y$.

## Замечание

$W$ — это некоторая «большая величина», какое конкретно значение эта она принимает, зависит от конкретной задачи. Где-то можно положить $W = 10^6$, где-то $W = 50$, однако полностью избавиться от $W$ и записать условие без него не получится.

## Замечание

Смысл булевых переменных $y$, $y_1$ и $y_2$ следующий. Предположим, что мы реализуем алгоритм, который решает нашу задачу, при этом он находит решения, которые удовлетворяют всем условиям. Наш алгоритм такой, что он сам выберет «наилучшие» значения этих переменных и на их основании построит оптимальное решение.

## Утверждение (замена нелинейностей)

Пусть при решение задачи в некотором выражении нам встретилась нелинейность $\hat{x} \cdot \hat{y}$ ($\hat{x}$ и $\hat{y}$ — булевы переменные), тогда после замены $\hat{z} = \hat{x} \cdot \hat{y}$ необходимо ввести ограничения

$$\begin{cases} 2\hat{z} \le \hat{x} + \hat{y}, \\ \hat{z} + 1 \ge \hat{x} + \hat{y}. \end{cases}$$

Работать с нелинейностями неудобно, поэтому всегда хочется избавить от нелинейностей, однако просто заменить в выражении $\hat{x} \cdot \hat{y}$ на $\hat{z}$ нельзя, поскольку нужно изменить ограничения задачи.

## Доказательство

Поскольку $\hat{z} = \hat{x} \cdot \hat{y}$, верно следующее

$$\hat{z} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \hat{x} = 1 \;\&\; \hat{y} = 1$$

Данное логические условие можно расписать через две импликации

1. Если $\hat{z} = 1$, то $\hat{x} = 1$ и $\hat{y} = 1$. Это можно записать алгебраически, используя сложные условия

$$x = \begin{pmatrix} \hat{z} \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} \end{pmatrix},$$
$$I^0 = \varnothing, \quad I^1 = \{1\}, \qquad K^0 = \varnothing, \quad K^1 = \{1, 2\}$$
$$\left|K^0 \cup K^1\right| \cdot \left(\sum_{i \in I^1}(1 - x_i) + \sum_{i \in I^0} x_i\right) \ge \sum_{k \in K^1}(1 - y_k) + \sum_{k \in K^0} y_k,$$
$$\Updownarrow$$
$$2 \cdot (1 - \hat{z}) \ge (1 - \hat{x}) + (1 - \hat{y}),$$
$$2\hat{z} \le \hat{x} + \hat{y}.$$

2. Если $\hat{x} = 1$ и $\hat{y} = 1$, то $\hat{z} = 1$. Данное логическое условие можно записать алгебраически, используя сложные условия. Будем использовать самый общий случай

$$x = \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} \hat{z} \end{pmatrix},$$
$$I^0 = \varnothing, \quad I^1 = \{1, 2\}, \qquad K^0 = \varnothing, \quad K^1 = \{1\}$$
$$\left|K^0 \cup K^1\right| \cdot \left(\sum_{i \in I^1}(1 - x_i) + \sum_{i \in I^0} x_i\right) \ge \sum_{k \in K^1}(1 - y_k) + \sum_{k \in K^0} y_k,$$
$$\Updownarrow$$
$$(1 - \hat{x}) + (1 - \hat{y}) \ge 1 - \hat{z},$$
$$\hat{z} + 1 \ge \hat{x} + \hat{y}.$$

# 1.8 Задача о проектах

## **Задача** (о проектах)

Пусть есть 5 проектов, в которые можно вложиться. Для вложения в каждый проект нужно внести определённую сумму денег. Все проекты после вложения в них принесут определённый доход через какое-то время. Есть определённые условия, на которых можно вкладываться в проекты. Как получить наибольшую прибыль, имея ограниченные ресурсы?

## Математическая модель

**1. Что будем оптимизировать?** Ответ: нужно максимизировать получаемую прибыль.

**2. Что существенно влияет на оптимизируемую характеристику?**

| **Проект** | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **Доход** | 3 | 2 | 1 | 4 | 2 |
| **Начальные вложения** | 1.5 | 0 | 0.5 | 4 | 1 |

*Условия вложения в проекты*

1. нужно вложиться хотя бы в один проект;
2. если вложились в $A$, то необходимо вложиться в $D$;
3. если вложились в $B$ и $C$, то необходимо вложиться в $A$;
4. если вложились в $B$, то необходимо вложиться в $C$ и $E$.

*Параметры*

- $c_i$ — доход с проекта $i$;
- $d_i$ — начальные вложения в проект $i$;
- $Q$ — стартовый капитал;
- $C$ — общий доход.

*Переменные*

- $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ — булевы переменные, которые означают, будет ли вложение в соответствующий проект

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{будем вкладываться в } i\text{-ый проект,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

**3. Математическая формулировка задачи**

Пусть $D$ — сумма всех расходов, $C$ — сумма всех доходов, $F$ — прибыль, тогда

$$D = \sum_{i=1}^{5} x_i d_i, \quad C = \sum_{i=1}^{5} x_i c_i,$$

$$F = C - D = \sum_{i=1}^{5} x_i c_i - \sum_{i=1}^{5} x_i d_i = \sum_{i=1}^{5} x_i (c_i - d_i) \to \max_{(x_i)},$$

$$D \le Q \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{5} x_i d_i \le Q.$$

Последнее ограничение означает, что мы не можем вложить в проекты больше стартового капитала.

**Запись условий вложения в проекты**

1. Первое условие можно записать алгебраически через
$$\sum_{i=1}^{5} x_i \ge 1$$
2. Второе условие эквивалентно «если $x_1 = 1$, то $x_4 = 1$», алгебраически это записывается как (простые условия)
$$1 - x_1 \ge 1 - x_4 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 \le x_4.$$
3. Третье условие эквивалентно «если $x_2 = 1$ и $x_3 = 1$, то $x_1 = 1$», алгебраически это записывается так (сложные условия)
$$(1 - x_2) + (1 - x_3) \ge 1 - x_1 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 + x_1 \ge x_2 + x_3.$$
4. Четвёртое условие эквивалентно «если $x_2 = 1$, то $x_3 = 1$ и $x_5 = 1$», алгебраически это записывается так (сложные условия)
$$2 \cdot (1 - x_2) \ge 1 - x_3 + 1 - x_5 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x_2 \le x_3 + x_5.$$

**Итоговая модель**

$$\sum_{i=1}^{5} x_i (c_i - d_i) \to \max_{(x_i)}$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i d_i \le Q$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{5} x_i \ge 1, \\ x_1 \le x_4, \\ 1 + x_1 \ge x_2 + x_3, \\ 2x_2 \le x_3 + x_5; \end{cases}$$

$$x_i \in \{0, 1\}.$$

# 1.9 Задача о предприятии

## **Задача** (о предприятии)

Пусть есть предприятие, которое производит определённые виды продукции, затрачивая некоторые свои ресурсы. Для простоты будем считать, что у нас есть лишь один вид ресурсов, который можно использовать для производства продукции. Как получить наибольший доход?

## Математическая модель

**1. Что будем оптимизировать?** Ответ: нужно максимизировать получаемый доход.

**2. Что существенно влияет на оптимизируемую характеристику?**

Пусть $i = 1 \dots n$ — вид продукции, $I = \{1, 2, \dots, n\}$ — список всех производимых товаров.

*Параметры*

- $c_i$ — доход продукции;
- $b_i$ — расход ресурса на производство одной единицы продукции;
- $B$ — запасы ресурса.

*Переменные*

- $x_i$ — количество единиц производимой продукции.

**3. Математическая формулировка задачи**

$$C = \sum_{i \in I} c_i x_i \to \max_{(x_i),}$$

$$\sum_{i \in I} b_i x_i \le B,$$

$$\forall i \in I \quad x_i \ge 0.$$

**Изменения в задаче**

Казалось бы, математическая модель составлена, однако тут приходит директор предприятия и говорит, что правительство определило два списка социально значимых товаров $I_1$, $I_2$, при этом нужно либо из первого списка производить не менее $a_1$ единиц продукции, либо из второго не менее $a_2$ единиц продукции. Оба условия можно записать следующим образом

$$\sum_{i \in i_1} x_i \ge a_1, \quad \sum_{i \in I_2} x_i \ge a_2,$$

Нам нужно, чтобы выполнялось хотя бы одно из них. Для этого введём булеву переменную

$$y = \begin{cases} 0, & \text{производим не менее } a_1 \text{ из } I_1, \\ 1, & \text{производим не менее } a_2 \text{ из } I_2; \end{cases}$$

и запишем с её помощью требуемое условие (альтернативные условия)

$$\sum_{i \in I_1} x_i \ge a_1 - Wy,$$

$$\sum_{i \in I_2} x_i \ge a_2 - W(1 - y).$$

**Новые изменения в задаче**

Казалось бы, сейчас математическая модель предприятия окончательно составлена, но... К вам вновь приходит директор предприятия и говорит, что правительство издало приказ, по которому если производится достаточно продукции из обоих списков, то предприятие получает надбавку к финансированию.

Пусть $C_0$ — надбавка за достаточное производство продукции из обоих списков социально значимых товаров. Введём две новые булевы переменные

$$y_1 = \begin{cases} 1, & \text{производим не менее } a_1 \text{ из } I_1, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$y_2 = \begin{cases} 1, & \text{производим не менее } a_2 \text{ из } I_2, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Изменим выражения для оптимизируемой характеристики и логических условий

$$C = \sum_{i \in I} c_i x_i + C_0 y_1 y_2 \to \max_{(x_i), y_1, y_2}$$

$$\sum_{i \in I_1} x_i \geq a_1 - W(1 - y_1),$$

$$\sum_{i \in I_2} x_i \geq a_2 - W(1 - y_2).$$

### Замена нелинейности

В общем и целом теперь нас всё устраивает, кроме нелинейности в виде $y_1 y_2$. Произведём замену нелинейности с помощью замены нелинейностей и запишем ограничения на новую булеву переменную

$$z = y_1 y_2,$$

$$C = \sum_{i \in I} c_i x_i + C_0 z \to \max_{(x_i), z},$$

$$2z \leq y_1 + y_2,$$

$$z + 1 \geq y_1 + y_2.$$

### Итоговая модель

*Параметры*: $\{c_i\}$, $\{b_i\}$, $B$, $a_1$, $a_2$, $C_0$.
*Переменные*: $\{x_i\}$, $y_1$, $y_2$, $z$.

$$C = \sum_{i \in I} c_i x_i + C_0 z \to \max_{(x_i), z},$$

$$\sum_{i \in I} b_i x_i \leq B,$$

$$\sum_{i \in I_1} x_i \geq a_1 - W(1 - y_1),$$

$$\sum_{i \in I_2} x_i \geq a_2 - W(1 - y_2),$$

$$2z \leq y_1 + y_2, \quad z + 1 \geq y_1 + y_2,$$

$$y_1 \in \{0, 1\} \quad y_2 \in \{0, 1\}, \quad z \in \{0, 1\},$$

$$\forall i \in I \quad x_i \geq 0.$$

# 2 Динамическое программирование

*Динамическое программирование* — метод решения сложных задач путём разбиения их на более простые подзадачи. Этот метод эффективен, если процесс принятия решения состоит из многих шагов, то есть когда итоговое решение — последовательность принимаемых решений (*стратегия*). Теоретически с помощью динамического программирования можно решить любую экстремальную задачу, однако практически это не всегда возможно, так как появляется слишком много состояний.

## 2.1 Задача загрузки судна

Начнём рассмотрение динамического программирования на примере задачи.

### **Задача** (загрузки судна)

Пусть есть грузовое судно и набор различных контейнеров. Требуется загрузить судно контейнерами таким образом, чтобы при их дальнейшей продаже заработать как можно больше, при этом размер грузовой площадки судна ограничен.

### Математическая модель

**1. Что будем оптимизировать?** Ответ: доход с продажи контейнеров должен быть максимальным.

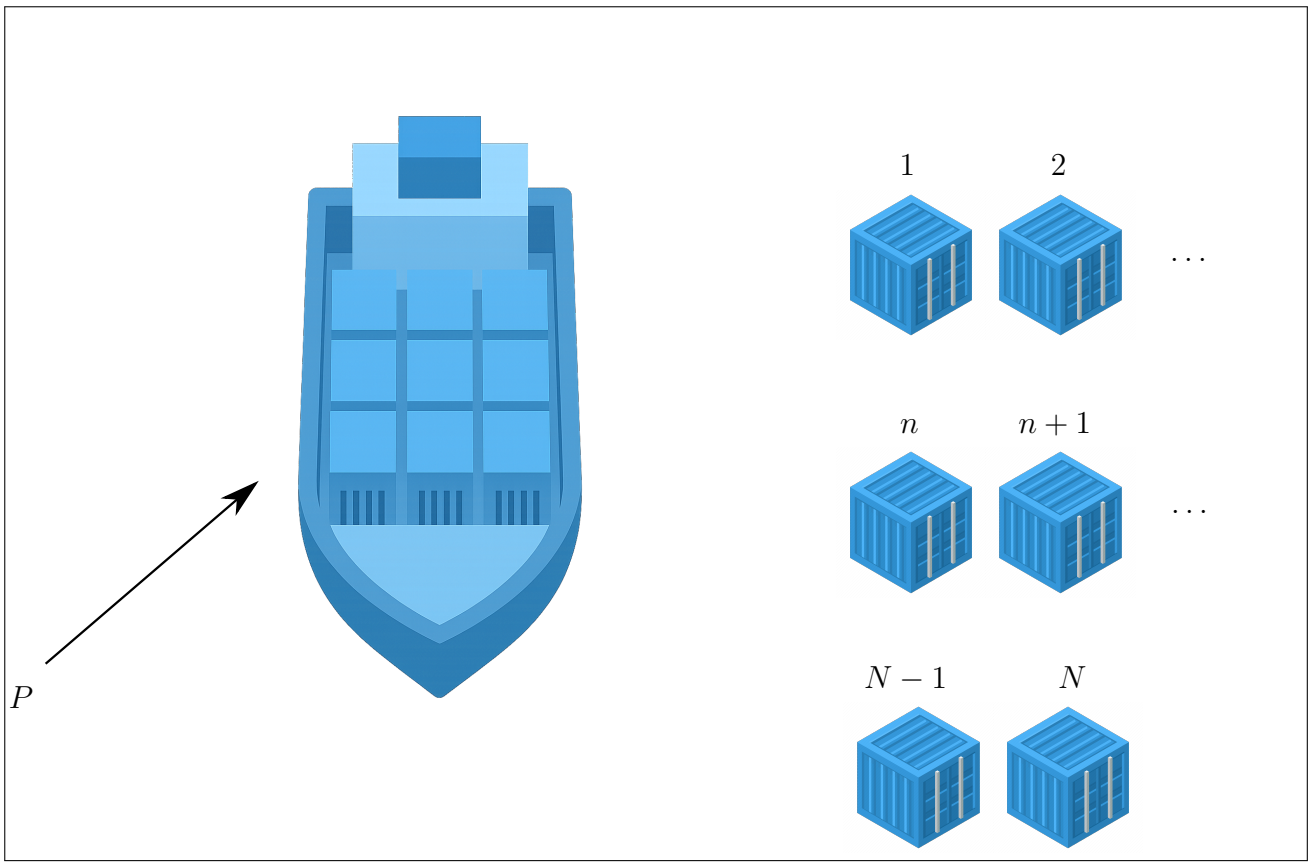
**2. Что существенно влияет на оптимизируемую характеристику?**
Пусть $i = 1 \dots N$ — номера контейнеров.

*Параметры*

- $h_i$ — место на грузовой площадке, занимаемое контейнером $i$;
- $c_i$ — ценность контейнера $i$;
- $P$ — размер грузовой площадки судна.

*Переменные*

- $x_i$ — сколько контейнеров с номером $i$ нужно взять на судно.




### 3. Математическая формулировка задачи

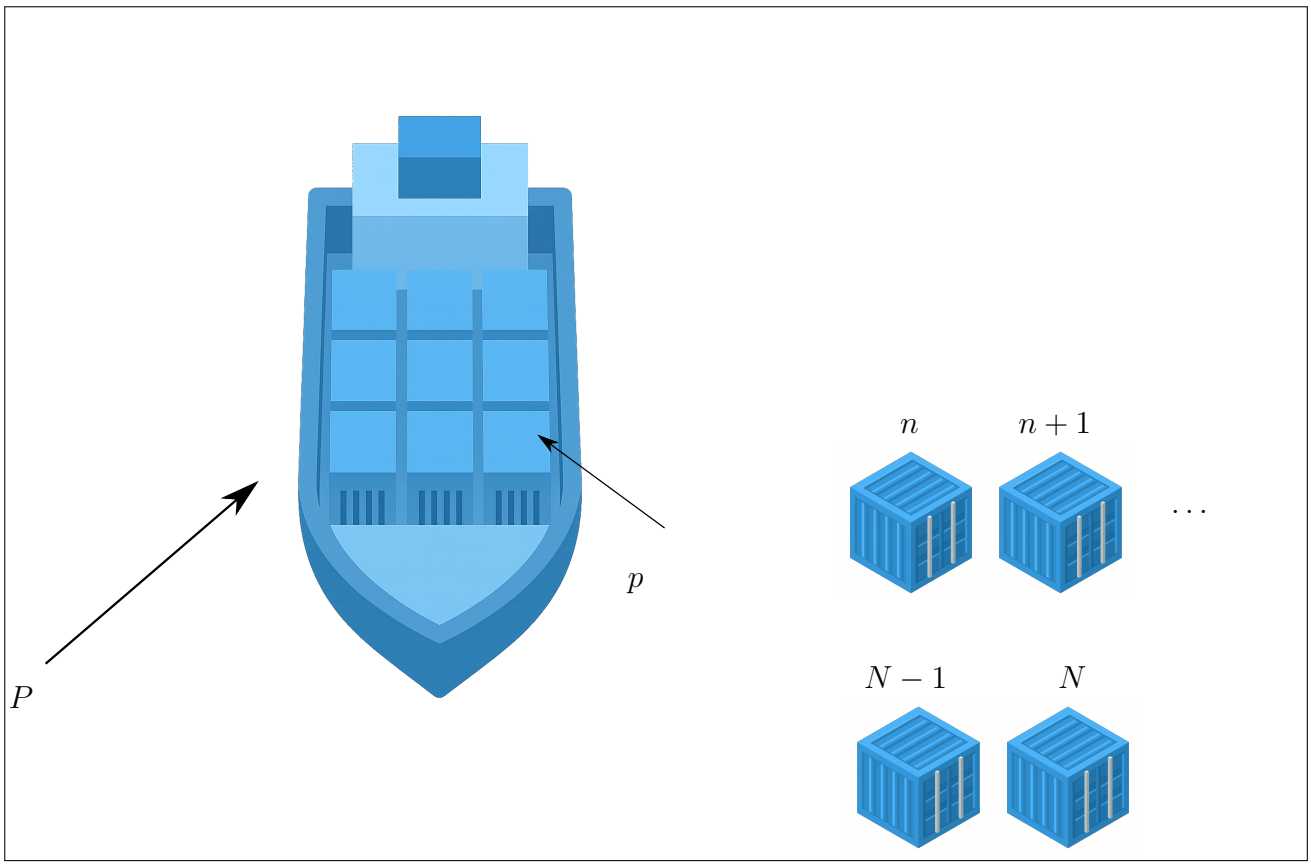
$$\sum_{i=1}^{N} c_i x_i \to \max_{(x_i),\, i\in\{1,\dots,N\}},$$

$$\sum_{i=1}^{N} h_i x_i \le P,$$

$$x_i \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}, \quad i \in 1, \dots N.$$

## Решение

Для решения задачи будем рассматривать семейства аналогичных задач. Каждое семейство будет охарактеризовываться парой $(n, p)$, где $p$ — место на площадке, а $n$ — минимальный номер для контейнеров, которые у нас есть. То есть вместо рассмотрения исходной задачи про все $N$ контейнеров и всю грузовую площадку размером $P$ будем рассматривать задачи, в которых нам доступны не все контейнеры, а лишь начинающиеся с номера $n \le N$, а также в которых нам доступна не вся грузовая площадка судна, а лишь её часть размером $p \le P$.




Запишем целевую функцию и ограничения для семейства $(n, p)$

$$\sum_{i=n}^{N} c_i x_i \to \max_{(x_i),\, i=n\ldots N},$$

$$\sum_{i=n}^{N} h_i x_i \le p,$$

$$x_i \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \quad i = n \ldots N$$

Зададимся вопросом: а есть ли в этом семействе задачи, которые можно легко решить? Да, например если $n = N$, то есть если у нас в распоряжении есть лишь контейнер с номером $N$.

Введём обозначение. Пусть $f_n(p)$ — оптимальное значение целевой функции семейства задач $(n, p)$. По своей сути $f_n(p)$ — это максимальный доход, который мы получим, если будем на площадку размера $p$ грузить контейнеры с номерами $n, n+1, n+2, \ldots, N$. Легко заметить, что

$$f_N(p) = c_N \cdot \left[\frac{p}{h_N}\right].$$

Действительно, если у нас в распоряжении есть лишь контейнеры с номером $N$, то для получения максимального дохода нужно попытаться по-максимуму загрузить ими площадку на грузовом корабле, $\left[\frac{p}{h_N}\right]$ — количество контейнеров, которое поместится на площадку.

Таким образом, мы уже умеем решать задачу $(N, p)$ для любого $p \le P$. Теперь нужно совершить переход к решению исходной задачи

$$f_N(p) \longrightarrow f_1(P).$$

Для этого сформулируем принцип.

**Определение** (принцип оптимальности для оптимальной стратегии)

*Оптимальная стратегия обладает тем свойством, что каким бы не было первое решение, последующие решения должны образовывать оптимальную стратегию относительно состояния, полученного по итогам первого решения.*

### Пример

Пусть мы стоим у доски и нам захотелось как можно быстрее выйти из аудитории через дверь. Каким бы ни был наш первый шаг, если мы хотим дойти до двери как можно быстрее, придётся всё время действовать оптимально. То есть даже если первый шаг был оптимальным, но потом мы пошли неоптимально, стратегия точно не получится оптимальной.

### Возвращение к задаче

Предположим, что для некоторого $n \leq N$ и для $p \leq P$ мы уже знаем

$$f_{n+1}(p), f_{n+2}(p), \ldots, f_N(p),$$

однако нам бы хотелось посчитать $f_n(p)$, как это можно сделать?

Предположим, что $x_n = x = 1$, тогда груз с номером $n$ даст нам ценность $c_n \cdot x = c_n$ и займёт на площадке место $h_n \cdot x = h_n$. Обобщим для $x_n \neq 1$ и запишем целевую функцию

$$\boxed{\forall p \leq P \quad f_n(p) = \max_{h_n \cdot x \leq p,\ x=0,1,2,\ldots} \left\{c_n \cdot x + f_{n+1}(p - h_n \cdot x)\right\}}.$$

Действительно, оптимальное значение при имеющихся контейнерах $n, n+1, n+2, \ldots, N$ складывается из некоторого количества контейнеров с номером $n$ и контейнеров $n+1, n+2, \ldots, N$. Чтобы найти оптимальное значение нужно перебрать все варианты того, сколько взять контейнеров с номером $n$, при этом ясно, что взять их «слишком много» не получится, потому что размер площадки ограничен $p$. Это условие отражается через $h_n \cdot x \leq p$.

Мы получили **рекуррентное соотношение динамического программирования**, при этом, как уже говорилось ранее, $f_n(p)$ можно получить перебором значение $x_n = x$, а $f_{n+1}(\ldots)$ по предположению нам уже известно.

Таким образом, для решения исходной задачи нужно для всех $p \leq P$ и для всех $n = 2 \ldots N$ найти значение $f_n(p)$, а затем вычислить $f_1(P)$, это и будет значение целевой функции исходной задачи. Для получения стратегии нужно использовать значения $\{x_n\}_{i=1}^{N}$, на которых на каждом шаге достигается максимум $f_n(p)$.

Почему мы предполагаем, что $f_{n+1}(\ldots)$ нам известно? Ранее мы обсуждали, что мы можем вычислить $f_N(p)$ для любого $p \leq P$. Значит с помощью рекуррентного соотношения можем вычислить $f_{N-1}(p)$ для любого $p$, после этого можно вычислить $f_{N-2}(p)$ и так далее. То есть, если у нас есть хотя бы одно значение «в конце», то мы можем дойти до «начала» за определённое число шагов. Поэтому предположению о том, что на некотором шаге $n$ нам уже известно оптимальное значение $f_{n+1}(p)$ имеет место.

## 2.2 $N$-шаговый процесс принятия решений

Обобщим подход к решению задачи о загрузке судна.

## **Определение** ($N$-шаговый процесс принятия решений)

### Исходные данные

Для осуществления $N$-шагового процесса необходимо следующее

- *Количество шагов процесса*. Обозначение: $\boxed{N}$.
- *Состояние* — некоторое значение, которое мы имеем в начале каждого шага. Обозначение: $\boxed{p}$.
- *Решение* на шаге $i$. Обозначение: $\boxed{q_i}$ $(i = 1 \dots N)$.
- *Начальное состояние* — некоторая известная заданная величина. Обозначение: $\boxed{p_0}$.
- *Множество возможных состояний* на шаге $i$. Обозначение: $\boxed{P_i}$ $(i = 1 \dots N + 1)$.
- *Множество возможных решений* на шаге $i$. Обозначение $\boxed{Q_i}$ $(i = 1 \dots N)$.
- *Функция перехода* — функция перехода из текущего состояния $p$ в новое состояние $p'$, если на $i$-ом шаге принимается решение $q$

$$p' = \boxed{T_i(p, q)}.$$

- *Множество допустимых решений* на $i$-ом шаге в состоянии $p$

$$\boxed{Q_i(p) = \{q \in Q_i \mid T_i(p, q) \in P_{i+1}\}}.$$

- $\boxed{f_n(p)}$ — оптимальное значение целевой функции на шаге $n$, если в начале шага было состояние $p$.

В задаче о загрузке судна

- *количество шагов процесса*: количество видов контейнеров;
- *состояние*: свободное место на грузовой площадке;
- *решение* на шаге $i$: сколько грузить контейнеров с номером $i$;
- *начальное состояние*: $P$ (свободное место на пустой грузовой площадке);
- *множество возможных состояний*: $\{0, 1, 2, \dots, P\}$ (сколько может быть доступного места на грузовой площадке на каждом шаге);
- *множество возможных решений*: $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ (это означает, что можно грузить лишь целое неотрицательное количество контейнеров);
- *функция перехода* на шаге $n$ в состоянии $p$, если принимается решение $q$: $(p - h_n \cdot q)$ (это означает, сколько свободного места останется на площадке, если сейчас свободно $p$ и грузим $q$ контейнеров типа $n$);
- *множество допустимых решений* на шаге $n$ в состоянии $p$:

$$Q_n(p) = \left\{q \in \{0, 1, 2, 3, \dots\} \mid h_n \cdot x \le p\right\}$$

Множества возможных состояний $P_i$ определены для $i = 1 \dots N+1$, хотя шага с номером $N + 1$ нет. Это нужно для унификации определения функции перехода. В определении $Q_N(p)$ фигурирует $P_{N+1}$, поэтому если бы $P_{N+1}$ было не определено, $Q_N(p)$ нужно было бы доопределять отдельно.

### Принятие решения

- На самом первом шаге имеем начальное состояние $p_0$, то есть $i = 1$ и $p = p_0$.

- Пусть мы находимся на шаге $i$ и имеем состояние $p$, нужно выбрать некоторое решение $q \in Q_i(p)$, сменить состояние на $p' = T_i(p, q)$ и перейти к следующему шагу с номером $i + 1$.
- Если мы проделали $N$ шагов, то завершаем процесс.

На каждом шаге мы выбирали некоторое решение $q \in Q_i(p)$, значит по итогам процесса у нас будет $N$ значений $q_1, q_2, \ldots, q_N$, это и будет наша стратегия.

Однако нам бы не хотелось не просто допустимую, а оптимальную стратегию. Как понять, что стратегия оптимальна и как её получить?

## 2.3 Задача выбора оптимальной стратегии $N$-шагового процесса

Мы уже умеем использовать $N$-шаговый процесс принятия решений для задач, однако хотелось бы научиться с его помощью не просто решать задачи, а решать их оптимально. Для этого нужно ввести определение.

### **Определение** (функция дохода)

*Функций дохода* будем называть оптимальное значение целевой функции на $i$-ом шаге, если в состоянии $p$ принимается решение $q$. Обозначение: $\boxed{g_i(p, q)}$.

### **Утверждение**

Нахождение максимального значения целевой функции в исходной формулировке (без $N$-шагового процесса) эквивалентно нахождению

$$\max_{\{q_1, q_2, \ldots, q_N\}} \sum_{i=1}^{N} g_i(p_i, q_i).$$

при $N$-шаговом процессе

$$\begin{cases} p_1 = p_0, & \\ p_i \in P_i, & i \in \{2, \ldots, N+1\}, \\ q_i \in Q_i, & i \in \{1, \ldots, N\}, \\ p_{i+1} = T_i(p_i, q_i), & i \in \{1, \ldots, N\}. \end{cases}$$

### **Определение** (алгоритм выбора оптимальной стратегии)

Для выбора оптимальной стратегии будем использовать функцию дохода $g_i(p, q)$. Для простоты будем всё рассматривать в рамках задачи загрузки судна. Запишем рекуррентные соотношения на $f_n(p)$ через функцию дохода

$$\forall p \in P_N \quad f_N(p) = \max_{q \in Q_N(p)} g_N(p, q),$$

$$\forall n < N \; \forall p \in P_n \quad f_n(p) = \max_{q \in Q_n(p)} \Big\{ g_n(p, q) + \underbrace{f_{n+1}\big(T_n(p, q)\big)}_{\text{уже знаем решение}} \Big\}.$$

Здесь мы фактически вновь рассматриваем семейства задач $(n, p)$ и используем тот факт, что мы умеем решать задачу при $n = N$, а также то, что с помощью функции дохода можно

осуществить переход от задачи, которую мы уже умеем решать $(f_{n+1})$, к задаче, которую пока не умеем $(f_n)$. В этих обозначениях исходная задача — это $f_1(p_0)$.

*Алгоритм выбора оптимальной стратегии* состоит из двух этапов: *вычисление значений* $f_n(p)$, построение оптимальной стратегии.

Этап 1 На первом этапе нужно с помощью рекуррентных соотношений последовательно вычислить значения $f_N(p)$, $f_{N-1}(p)$, $f_{N-2}(p)$, $\ldots$, $f_2(p)$, $f_1(p)$ для всех возможных состояний на каждом шаге. При этом на самом деле вычислять значение $f_1(p)$ имеет смысл лишь для $p = p_0$. По итогам этого процесса мы вычислим $f_1(p_0)$ — оптимальное значение целевой функции исходной задачи, однако мы не узнаем, как выглядят оптимальные решения на каждом шаге. Чтобы это исправить помимо $f_n(p)$ каждом шаге будем считать и запоминать $q_n(p)$ — значение $q$, на котором достигается максимум в состоянии $p$ на шаге $n$. Всё это удобно записывать в таблицу следующего вида

| $p$ | $(f_1, q_1)$ | $(f_2, q_2)$ | $\ldots$ | $(f_n, q_n)$ | $(f_{n+1}, q_{n+1})$ | $\ldots$ | $(f_{N-1}, q_{N-1})$ | $(f_N, q_N)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0$ | | | | | | | | |
| $1$ | | | | | | | | |
| $\ldots$ | | | | | | | | |
| $P$ | | | | | | | | |

В первом столбце таблицы представлены состояния, а в остальных — значения $f_n(p)$ и $q_n(p)$ на каждом шаге для каждого состояния $p$.

Этап 2 После первого этапа у нас есть заполненная таблица, в которой записаны посчитанные на каждом шаге $n$ значения $f_n(p)$ и $q_n(p)$. С их помощью можно найти *оптимальную стратегию* следующим образом

$$\begin{aligned} p_1^* &= p_0, & q_1^* &= q_1(p_1^*),\\ p_2^* &= T_1(p_1^*, q_1^*), & q_2^* &= q_2(p_2^*),\\ p_3^* &= T_2(p_2^*, q_2^*), & q_3^* &= q_3(p_3^*),\\ &\ldots & &\ldots\\ p_N^* &= T_{N_1}(p_{N_1}^*, q_{N_1}^*), & q_N^* &= q_N(p_N^*). \end{aligned}$$

## Утверждение

Стратегия, полученная алгоритмом выбора оптимальной стратегии, является оптимальной.

## Доказательство

Итак, имеем стратегию $q = \{q_1^*, q_2^*, \ldots, q_N^*\}$. Докажем, что она оптимальна, то есть

$$f_1(p_0) = \sum_{i=1}^{N} g_i(p_i^*, q_i^*).$$

По построению $p_1^* = p_0$, значит

$$f_1(p_0) = f_1(p_1^*) = \max_{q \in Q_1(p_1^*)} \Big\{ g_1(p_1^*, q) + f_2\big(T_1(p_1^*, q)\big) \Big\}.$$

По построению максимум при $n = 1$ происходит при $q = q_1^* = q_1(p_1^*)$, поэтому

$$\begin{aligned} f_1(p_0) &= \max_{q \in Q_1(p_1^*)} \Big\{ g_1(p_1^*, q) + f_2\big(T_1(p_1^*, q)\big) \Big\} \\ &= g_1(p_1^*, q_1^*) + f_2\big(T_1(p_1^*, q_1^*)\big) \\ &\overset{def}{=} g_1(p_1^*, q_1^*) + f_2(p_2^*) \\ &= g_1(p_1^*, q_1^*) + \max_{q \in Q_2(p_2^*)} \Big\{ g_2(p_2^*, q) + f_3\big(T_2(p_2^*, q)\big) \Big\}. \end{aligned}$$

По построению максимум при $n = 2$ происходит при $q = q_2^* = q_2(p_2^*)$, поэтому

$$\begin{aligned} f_1(p_0) &= g_1(p_1^*, q_1^*) + \max_{q \in Q_2(p_2^*)} \Big\{ g_2(p_2^*, q) + f_3\big(T_2(p_2^*, q)\big) \Big\} \\ &= g_1(p_1^*, q_1^*) + g_2(p_2^*, q_2^*) + f_3\big(T_2(p_2^*, q_2^*)\big) \\ &\overset{def}{=} g_1(p_1^*, q_1^*) + g_2(p_2^*, q_2^*) + f_3(p_3^*) \\ &= g_1(p_1^*, q_1^*) + g_2(p_2^*, q_2^*) + \max_{q \in Q_3(p_3^*)} \Big\{ g_3(p_3^*, q) + f_4\big(T_3(p_3^*, q)\big) \Big\}. \end{aligned}$$

Рассуждая аналогично, можно получить, что

$$\begin{aligned} f_1(p_0) &= g_1(p_1^*, q_1^*) + g_2(p_2^*, q_2^*) + g_3(p_3^*, q_3^*) + \cdots + g_N(p_N^*, q_N^*) \\ &= \sum_{i=1}^{N} g_i(p_i^*, q_i^*). \end{aligned}$$

Требуемое доказано, значит стратегия является оптимальной.

### Замечание

Если в задаче начальное состояние может принимать несколько значений, то нужно осуществить процесс для каждого начального состояния, а потом сравнить полученные стратегии и выбрать из них наилучшую.

### Замечание

$N$-шаговый процесс удобно использовать, когда понятно, что будет состоянием, какие будут шаги и как будет осуществляться переход от одного состояния к другому. Для использования алгоритма выбора оптимальной стратегии важно, чтобы имела место *сепарабельность*, то есть тот факт, что функция дохода может быть посчитана на каждом шаге отдельно, то есть что эффект на целевую функцию на каждом шаге отделён от эффекта на неё на других шагах.

### Замечание

Иногда при решении задачи в качестве состояния на каждом шаге нужно выбрать не само значение $p_i$, а пару $(q_{i-1}, p_i)$, чтобы знать, какое было принято решение на предыдущем шаге. Это может быть полезно, если за «не сбалансированые» решения предусмотрено штрафы. Например, если стратегия «потратить в этом году все деньги, а в следующем не потратить ничего» нас не устраивает.

## 2.3.1 Решение задачи о машине

Решим задачу о машине с помощью $N$-шагового процесса принятия решения.

## $N$-шаговый процесс

Изменим обозначения исходной задачи. Пусть $i = 1 \dots N$ — вид детали.

*Параметры*

- $h_i$ — масса деталей;
- $t_i$ — срок службы деталей;
- $d_i$ — количество работающих деталей в машине;
- $P$ — максимальная масса посылки.

*Переменные*

- $x_i$ — сколько нужно взять деталей в посылку.

### Исходные данные

- количество шагов процесса = количество видов деталей = $N$;
- на $i$-ом шаге будем определять, сколько деталей $i$-го типа нужно взять в посылку;
- состояние — свободная масса груза в посылке, то есть сколько ещё массы можно использовать.

Будем рассматривать семейства задач, которые определяются парой $(n, p)$. Это будет означать, что у нас распоряжении

- есть детали не всех видов, а лишь от $n$ до $N$, $n \le N$;
- есть не вся масса посылки $P$, а лишь её часть $p \le P$.

### База процесса

Пусть $f_n(p)$ — максимальное время, которое проработает машина в семействе задач $(n, p)$. Заметим, что если $n = N$, то задача легко решается

$$\forall p \le P \quad f_N(p) = \left( d_N + \underbrace{\left[ \frac{p}{h_N} \right]}_{q_N(p)} \right) \cdot t_N$$

В таком случае решение состоит в том, что нужно заказать детали вида $N$ на максимум, то есть сколько можем, столько и заказываем.

### Переход

Теперь когда у нас есть база для решения задачи, осуществим переход $f_{n+1}(p) \to f_n(p)$ в предположении, что $f_{n+1}(p)$ мы знаем $\forall p \le P$.

$$\boxed{f_n(p) = \max_{\substack{x = x_n \\ h_n \cdot x \le p,\ x \ge 0}} \min \Big\{ (d_n + x) \cdot t_n \ ; \ f_{n+1}(p - x \cdot h_n) \Big\}}$$

$(d_n + x) \cdot t_n$ — это сколько проработают детали $n$-го вида с учётом уже имеющихся в машине и тех, которые будут заказаны. Для решения задачи нужно для всех $p \le P$ найти значение $f_n(p)$ и соответствующие значения $x$, на которых максимум и достигается.

В исходной формулировке у нас было

$$f_n(p) = \max_{q \in Q_n(p)} \Big[ g_n(p, q) + f_{n+1}\big(T_n(p, q)\big) \Big].$$

Отличие в данной задаче состоит в том, что у нас в рекуррентном соотношении не суммирование, а взятие минимума. Теоретически здесь может быть и умножение, но большой роли при решении это не играет. Важно, что рекуррентное соотношение написано.

## Решение

Решим задачу с конкретными числовыми данными

- $N = 4$;
- $h = \{3, 2, 3, 2\}$ кг;
- $t = \{6, 3, 2, 4\}$ дней;
- $d = \{1.5, 1.5, 1.5, 1.5\}$. $d_i$ = 1.5 может означать, например, что в машине установлены две детали вида $i$, при этом одна отработала половину своего срока, а вторую только недавно установили;
- $P = 8$ кг.

В ходе решения задачи будем заполнять следующую таблицу

| $p$ | $(f_1, q_1)$ | $(f_2, q_2)$ | $(f_3, q_3)$ | $(f_4, q_4)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | |
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| 4 | | | | |
| 5 | | | | |
| 6 | | | | |
| 7 | | | | |
| 8 | | | | |

Таблицу будем заполнять справа налево, запоминая $q_i$ — то значение $x$, на котором достигается максимум целевой функции.

В левом столбце у нас все возможные состояния $p$, а $p$ — свободная масса груза в посылке. Заметим, что ни на каком шаге $p$ не может равняться 7, то есть какие бы грузы мы не клали в посылку, свободная масса груза не сможет равняться 7. Это означает, что можно не подсчитывать значения для $p = 7$.

| $p$ | $(f_1, q_1)$ | $(f_2, q_2)$ | $(f_3, q_3)$ | $(f_4, q_4)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | |
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| 4 | | | | |
| 5 | | | | |
| 6 | | | | |
| 7 | × | × | × | × |
| 8 | | | | |

**Шаг 1** На первом шаге $n = N = 4$, запишем выражение для $f_4(p)$

$$f_4(p) = \left(d_n + \left[\frac{p}{h_4}\right]\right) \cdot t_4 = \left(1.5 + \left[\frac{p}{2}\right]\right) \cdot 4.$$

Таким образом мы можем посчитать значение $f_4(p)$ для любого $p \leq P$, при этом нам известно значение, на котором достигается максимум ($q_4$)

$$q_4 = \left[\frac{p}{2}\right].$$

Посчитаем значение $f_4$ для всех возможных состояний

$$f_4(0) = 6, \quad q_4 = \left[\frac{0}{2}\right] = 0;$$

$$f_4(1) = 6, \quad q_4 = \left[\frac{1}{2}\right] = 0;$$

$$f_4(2) = 10, \quad q_4 = \left[\frac{2}{2}\right] = 1;$$

$$f_4(3) = 10 \quad q_4 = \left[\frac{3}{2}\right] = 1;$$

$$f_4(4) = 14, \quad q_4 = \left[\frac{4}{2}\right] = 2;$$

$$f_4(5) = 14, \quad q_4 = \left[\frac{5}{2}\right] = 2;$$

$$f_4(6) = 18, \quad q_4 = \left[\frac{6}{2}\right] = 3;$$

$$f_4(8) = 22, \quad q_4 = \left[\frac{8}{2}\right] = 4.$$

Занесём все эти данные в последний столбец таблицы.

| $p$ | $(f_1, q_1)$ | $(f_2, q_2)$ | $(f_3, q_3)$ | $(f_4, q_4)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | $(6, 0)$ |
| 1 | | | | $(6, 0)$ |
| 2 | | | | $(10, 1)$ |
| 3 | | | | $(10, 1)$ |
| 4 | | | | $(14, 2)$ |
| 5 | | | | $(14, 2)$ |
| 6 | | | | $(18, 3)$ |
| 7 | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ |
| 8 | | | | $(22, 4)$ |

**Шаг 2** На втором шаге $n = 3$. Запишем выражение для $f_3(p)$

$$f_3(p) = \max_{\substack{x=x_3 \\ h_3 \cdot x \le p,\ x \ge 0}} \min\Big\{(d_3 + x) \cdot t_3\ ;\ f_4(p - x \cdot h_3)\Big\}$$
$$= \max_{\substack{x=x_3 \\ 3x \le p,\ x \ge 0}} \min\Big\{3 + 2x\ ;\ f_4(p - 3x)\Big\}$$

На данном шаге нам нужно для всех $0 \le p \le P$ вычислить значение $f_3(p)$ и запомнить значение $x$, на котором достигается максимум в каждом конкретном состоянии. Для каждого состояния мы будем перебирать различные значения $x$. Для примера найдём $f_3(8)$. Для этого нам нужно перебрать значения $x \in \{0, 1, 2\}$, поскольку при $x > 2$ неравенство $3x \le 8$ уже не выполняется, а $x < 0$ нам не подходят по условию. Вычислим значение $\min$ для каждого из этих трёх значений $x$

$$x = 0: \quad \min\big\{3 + 2 \cdot 0\ ;\ f_4(8)\big\} = \min\{3, 22\} = 3$$
$$x = 1: \quad \min\big\{3 + 2 \cdot 1\ ;\ f_4(5)\big\} = \min\{5, 14\} = 5$$
$$x = 2: \quad \min\big\{3 + 2 \cdot 2\ ;\ f_4(2)\big\} = \min\{7, 10\} = \textcircled{7}$$

То есть мы рассмотрели три разных значения $x$ (0, 1, 2), для каждого из них вычислили значение $\min\Big\{(d_n + x) \cdot t_n\ ;\ f_{n+1}(p - x \cdot h_n)\Big\}$, а после этого выбрали из трёх итоговых значение максимальное — 7, при этом запомнили, что это значение достигается при $x = 2$. Однако данные вычисления можно записать существенно короче

$$f_3(8) = \begin{array}{r|l} 0 & \{3\ ;\ f_4(8) = 22\} = 3 \\ 1 & \{5\ ;\ f_4(8) = 14\} = 5 \\ 2 & \{7\ ;\ f_4(8) = 10\} = \textcircled{7} \end{array}$$

В первом столбце у нас идут перебираемые значения $x$, а далее для каждого из них вычисление $\min$, само слово «min» писать здесь излишне. В кружок обведено значение $\max$. Данной нотации и будем придерживаться всюду далее. Посчитаем $f_3(p)$ для всех $p$

$$f_3(0) = \begin{array}{r|l} 0 & \{3\ ;\ f_4(0) = 6\} = \textcircled{3} \end{array}$$

$$f_3(1) = \begin{array}{r|l} 0 & \{3\ ;\ f_4(1) = 6\} = \textcircled{3} \end{array}$$

$$f_3(2) = \begin{array}{r|l} 0 & \{3\ ;\ f_4(2) = 10\} = \textcircled{3} \end{array}$$

$$f_3(3) = \begin{array}{r|l} 0 & \{3\ ;\ f_4(3) = 10\} = 3 \\ 1 & \{5\ ;\ f_4(0) = 6\} = \textcircled{5} \end{array}$$

$$f_3(4) = \begin{array}{r|l} 0 & \{3\ ;\ f_4(4) = 14\} = 3 \\ 1 & \{5\ ;\ f_4(1) = 6\} = \textcircled{5} \end{array}$$

$$f_3(5) = \begin{array}{r|l} 0 & \{3\ ;\ f_4(5)=14\} = 3 \\ 1 & \{5\ ;\ f_4(2)=10\} = \textcircled{5} \end{array}$$

$$f_3(6) = \begin{array}{r|l} 0 & \{3\ ;\ f_4(6)=18\} = 3 \\ 1 & \{5\ ;\ f_4(3)=10\} = 5 \\ 2 & \{7\ ;\ f_4(0)=6\} = \textcircled{6} \end{array}$$

$$f_3(8) = \begin{array}{r|l} 0 & \{3\ ;\ f_4(8)=22\} = 3 \\ 1 & \{5\ ;\ f_4(3)=10\} = 5 \\ 2 & \{7\ ;\ f_4(2)=10\} = \textcircled{7} \end{array}$$

Занесём все данные в таблицу. В столбец $(f_3, q_3)$ возле максимального значения, обведённого в кружочек, для каждого состояния $p$ мы ещё записываем значение $x$, в котором достигается максимум. Так, для $f_3(8)$ это $x = 2$, для $f_3(5)$ это $x = 1$ и так далее.

| $p$ | $(f_1, q_1)$ | $(f_2, q_2)$ | $(f_3, q_3)$ | $(f_4, q_4)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | | $(3, 0)$ | $(6, 0)$ |
| 1 | | | $(3, 0)$ | $(6, 0)$ |
| 2 | | | $(3, 0)$ | $(10, 1)$ |
| 3 | | | $(5, 1)$ | $(10, 1)$ |
| 4 | | | $(5, 1)$ | $(14, 2)$ |
| 5 | | | $(5, 1)$ | $(14, 2)$ |
| 6 | | | $(6, 2)$ | $(18, 3)$ |
| 7 | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ |
| 8 | | | $(7, 2)$ | $(22, 4)$ |

**Шаг 3** На третьем шаге $n = 2$. Запишем выражение для $f_2(p)$

$$\begin{aligned} f_2(p) &= \max_{\substack{x=x_2 \\ h_2 \cdot x \le p,\ x \ge 0}} \min\Big\{(d_2 + x) \cdot t_2\ ;\ f_3(p - x \cdot h_2)\Big\} \\ &= \max_{\substack{x=x_2 \\ 2x \le p,\ x \ge 0}} \min\Big\{4.5 + 3x\ ;\ f_3(p - 2x)\Big\} \end{aligned}$$

Посчитаем $f_2(p)$ для всех $p$

$$f_2(0) = \begin{array}{r|l} 0 & \{4.5\ ;\ f_3(0)=3\} = \textcircled{3} \end{array}$$

$$f_2(1) = \begin{array}{r|l} 0 & \{4.5\ ;\ f_3(1)=3\} = \textcircled{3} \end{array}$$

$$f_2(2) = \begin{array}{r|l} 0 & \{4.5\ ;\ f_3(2)=3\} = \textcircled{3} \\ 1 & \{7.5\ ;\ f_3(0)=3\} = \textcircled{3} \end{array}$$

$$f_2(3) = \begin{array}{c|l} 0 & \{4.5\ ;\ f_3(3)=5\} = \textcircled{4.5} \\ 1 & \{7.5\ ;\ f_3(1)=3\} = 3 \end{array}$$

$$f_2(4) = \begin{array}{c|l} 0 & \{4.5\ ;\ f_3(4)=5\} = \textcircled{4.5} \\ 1 & \{7.5\ ;\ f_3(2)=3\} = 3 \\ 2 & \{10.5\ ;\ f_3(0)=3\} = 3 \end{array}$$

$$f_2(5) = \begin{array}{c|l} 0 & \{4.5\ ;\ f_3(5)=5\} = 4.5 \\ 1 & \{7.5\ ;\ f_3(3)=5\} = \textcircled{5} \\ 2 & \{10.5\ ;\ f_3(1)=3\} = 3 \end{array}$$

$$f_2(6) = \begin{array}{c|l} 0 & \{4.5\ ;\ f_3(6)=6\} = 4.5 \\ 1 & \{7.5\ ;\ f_3(4)=5\} = \textcircled{5} \\ 2 & \{10.5\ ;\ f_3(2)=3\} = 3 \\ 3 & \{13.5\ ;\ f_3(0)=3\} = 3 \end{array}$$

$$f_2(8) = \begin{array}{c|l} 0 & \{4.5\ ;\ f_3(8)=7\} = 4.5 \\ 1 & \{7.5\ ;\ f_3(6)=6\} = \textcircled{6} \\ 2 & \{10.5\ ;\ f_3(4)=5\} = 5 \\ 3 & \{13.5\ ;\ f_3(2)=3\} = 3 \\ 4 & \{16.5\ ;\ f_3(0)=3\} = 3 \end{array}$$

Занесём все данные в таблицу. Заметим, что при вычислении $f_2(2) = 3$ максимум достигается и при $x = 0$, и при $x = 1$. В таблице это будет отражено как $(3, 0/1)$.

| $p$ | $(f_1, q_1)$ | $(f_2, q_2)$ | $(f_3, q_3)$ | $(f_4, q_4)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | $(3, 0)$ | $(3, 0)$ | $(6, 0)$ |
| 1 | | $(3, 0)$ | $(3, 0)$ | $(6, 0)$ |
| 2 | | $(3, 0/1)$ | $(3, 0)$ | $(10, 1)$ |
| 3 | | $(4.5, 0)$ | $(5, 1)$ | $(10, 1)$ |
| 4 | | $(4.5, 0)$ | $(5, 1)$ | $(14, 2)$ |
| 5 | | $(5, 0)$ | $(5, 1)$ | $(14, 2)$ |
| 6 | | $(5, 1)$ | $(6, 2)$ | $(18, 3)$ |
| 7 | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ |
| 8 | | $(6, 1)$ | $(7, 2)$ | $(22, 4)$ |

**Шаг 4** На четвёртом шаге $n = 1$

Наша исходная задача — это $f_1(8)$, поэтому для всех остальных значений $p \neq 8$ искать $f_1(p)$ не нужно. Запишем выражение для $f_1(8)$

$$f_1(8) = \max_{\substack{x=x_1 \\ h_1 \cdot x \leq 8,\ x \geq 0}} \min\Big\{(d_1 + x) \cdot t_1\ ;\ f_2(8 - x \cdot h_1)\Big\}$$
$$= \max_{\substack{x=x_1 \\ 3x \leq 8,\ x \geq 0}} \min\Big\{9 + 6x\ ;\ f_2(8 - 3x)\Big\}$$

Посчитаем $f_1(8)$

$$f_1(8) = \begin{array}{r|l} 0 & \{9\ ;\ f_2(8) = 6\} = \textcircled{6} \\ 1 & \{15\ ;\ f_2(5) = 5\} = 5 \\ 2 & \{21\ ;\ f_2(2) = 3\} = 5 \end{array}$$

Занесём данные в таблицу.

| $p$ | $(f_1, q_1)$ | $(f_2, q_2)$ | $(f_3, q_3)$ | $(f_4, q_4)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $\times$ | $(3, 0)$ | $(3, 0)$ | $(6, 0)$ |
| 1 | $\times$ | $(3, 0)$ | $(3, 0)$ | $(6, 0)$ |
| 2 | $\times$ | $(3, 0/1)$ | $(3, 0)$ | $(10, 1)$ |
| 3 | $\times$ | $(4.5, 0)$ | $(5, 1)$ | $(10, 1)$ |
| 4 | $\times$ | $(4.5, 0)$ | $(5, 1)$ | $(14, 2)$ |
| 5 | $\times$ | $(5, 0)$ | $(5, 1)$ | $(14, 2)$ |
| 6 | $\times$ | $(5, 1)$ | $(6, 2)$ | $(18, 3)$ |
| 7 | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ |
| 8 | $(6, 0)$ | $(6, 1)$ | $(7, 2)$ | $(22, 4)$ |

Вспомним, что $f_1(8)$ — максимальное время работы машины для исходной задачи. Поскольку мы получили, что $f_1(8) = 6$, то в исходной задаче после заказа груза машина проработает ещё 6 дней.

### Поиск оптимальной стратегии

Заметим, что наше начальное состояние $p_0 = 8$, поскольку в самом начале нам доступна вся масса груза $P = 8$ кг.

$$\begin{aligned} p_1^* &= p_0 = 8, & q_1^* &= 0, \\ p_2^* &= p_1^* - h_1 \cdot q_1^* = 8, & q_2^* &= 1, \\ p_3^* &= p_2^* - h_2 \cdot q_2^* = 6, & q_3^* &= 2, \\ p_4^* &= p_3^* - h_3 \cdot q_3^* = 0, & q_4^* &= 0. \end{aligned}$$

Наша стратегия — это $q^* = \{0, 1, 2, 0\}$, то есть заказать одну деталь второго типа и две детали третьего типа. При данной стратегии машина проработает ещё $f_1(8) = 6$ дней. При любых других стратегиях время работы будет меньше.

## Замечание

Чтобы заполнять меньше значений таблицы можно было в начале прибегнуть к оптимизации, посчитав множество возможных состояний для каждого шага. Тогда бы мы считали на шаге $i$ значения $f_i(p)$ не для всех $p \leq P$, а лишь для этих самых возможных состояний.

Например, можно заметить, что для подсчёта $f_1(8)$ нам нужно было знать лишь $f_2(8)$, $f_2(5)$ и $f_2(2)$. Значение $f_2(p)$ для остальных $p$ нам в итоге вообще не пригодились.

### 2.3.2 Трудоёмкость алгоритма

#### Утверждение

Трудоёмкость алгоритма выбора оптимальной стратегии $N$-шагового процесса равняется

$$T = \sum_{i=1}^{N} \|P_i\| \cdot \|Q_i\|$$

#### Доказательство

Алгоритм состоит из двух этапов: «обратный ход» (заполнение таблицы) и «прямой ход» (нахождение оптимальной стратегии по заполненной таблице). Осуществить «прямой ход» по заполненной таблице не составляет труда, поэтому будем рассматривать лишь «обратный ход».

При «обратном ходе» у нас есть $N$ шагов, на каждом из которых мы вычисляем значение $f_i(p)$ для всех возможных состояний $p$ на текущем шаге, количество таких состояний равняется $\|P_i\|$. Для вычисления $f_i(p)$ для каждого конкретного $p$ необходимо осуществить перебор допустимых решений для нахождение максимума/минимума целевой функции, количество допустимых решений на текущем шаге $i$ равняется $\|Q_i\|$.

## 2.4 Задача о фермере

#### Задача (о фермере)

У фермера имеется стадо коров численностью 50 особей. Увеличение численности стада за год задаётся функцией $\alpha(v)$

$$\alpha(v) = \begin{cases} v + 10, & v \leq 70 \\ v + 20, & v > 70 \end{cases}$$

Затраты на содержание одной коровы в течение года $d = 0.5$, а выручка от продажи $c = 3$. Фермер составляет план продажи коров на ближайшие 5 лет при условии что численность стада не может быть ниже 50, а продажи производятся в конце года.

#### Математическая модель

**1. Что будем оптимизировать?** Ответ: фермер должен получить с продажи коров как можно больше денег.

**2. Что существенно влияет на оптимизируемую характеристику?**
Пусть $i = 1 \dots 5$ — год.

*Параметры*

- $d = 0.5$ — стоимость содержания одной коровы за год;
- $c = 3$ — выручка за продажу одной коровы.

*Переменные*

- $q = \{q_i\}_{i=1}^{5}$ — сколько за год нужно продать коров.

### 3. Математическая формулировка задачи

Пусть $G$ — выручка за 5 лет, а $p = \{p_i\}_{i=1}^{5}$ — количество коров в начале года, тогда

$$G = \sum_{i=1}^{5}(\underbrace{cq_i}_{\text{доход}} - \underbrace{dp_i}_{\text{расход}}) \to \max_{q}$$

$$\forall i \; p_i \geq 50$$

$$p_i = \begin{cases} 50, & i = 1 \\ \alpha(p_{i-1}) - q_{i-1}, & i > 1 \end{cases} \qquad (*)$$

## Решение

Для упрощения решения задачи сделаем предположение, что фермер может продавать лишь количество коров, кратное 10.

Решим задачу с помощью $N$-шагового процесса принятия решений с теми же данными, которые были определены в задаче.

### Исходные данные

- количество шагов процесса = количество лет = $5$;
- на $i$-ом шаге будем определять, сколько коров нужно продать в конце года ($q_i$);
- состояние — текущее количество коров ($p$);
- функция перехода — сколько коров будет к следующему году, если в этом году было $p$ и мы продали $q$
$$T_i(p, q) = \alpha(p) - q$$
- множества возможных состояний — сколько коров может быть в начале каждого года; с учётом (*)
$$P_1 = \{50\}, \quad P_2 = \{50, 60\}, \quad P_3 = \{50, 60, 70\},$$
$$P_4 = \{50, 60, 70, 80\}, \quad P_5 = \{50, 60, 70, 80, 90, 100\}$$
- множества возможных решений — сколько коров можно продавать каждый год; из предположения о кратности этого количества 10
$$Q_i = \{0, 10, 20, 30, \dots\} \quad i = 1 \dots 5$$
- множества допустимых решений — сколько коров можно продавать каждый год с учётом имеющего их количества
$$Q_i(p) = \{q \in Q_i \mid \alpha(p) - q \geq 50\} \quad i = 1 \dots 5$$
- функция дохода — сколько денег получит фермер по итогам $i$-го года, если из имеющихся $p$ коров он продаст $q$
$$g_i(p, q) = -0.5p + 3q = 3q - 0.5p$$

Для решения будем рассматривать семейства задач, которые определяются парой $(n, p)$. Фактически это означает, что

- рассматриваем доход за года $n, n+1, \dots, 5$, $n \leq 5$;
- поголовье скота на начало $n$-го года составляет $p \geq 50$ коров.

**База процесса**

Пусть $f_n(p)$ — максимальная выручка в семействе задач $(n, p)$. Заметим, что если $n = 5$, то задача легко решается: фермеру нужно продать как можно больше коров, но чтобы их осталось не меньше 50

$$\forall p \in P_5 \quad f_5(p) = \max_{q \in Q_5(p)} \{3q - 0.5p\}.$$

Поскольку нам выгодно продать как можно больше коров, то нужно взять максимально возможное $q$, но чтобы в конце года коров осталось не меньше 50. Для этого можно взять $q_5(p) = \alpha(p) - 50$, тогда выражение для $f_5(p)$ в явном виде будет выглядеть так

$$\forall p \in P_5 \quad f_5(p) = 3(\alpha(p) - 50) - 0.5p.$$

**Переход**

Теперь когда у нас есть база для решения задачи, осуществим переход $f_{n+1}(p) \to f_n(p)$ в предположении, что $f_{n+1}(p)$ мы знаем $\forall p \geq 50$.

$$\boxed{f_n(p) = \max_{q \in Q_n(p)} \Big\{3q - 0.5p + f_{n+1}(\alpha(p) - q)\Big\}} \qquad (**)$$

Вспомним множества допустимых состояний $P_i$. В объединении всех $P_i$ лежит множество $\{50, 60, 70, 80, 90, 100\}$ — все значения, которые может принимать $p$. Также понятно, что считать $f_n(p)$ для $p \notin P_n$ не имеет смысла, так как эти состояния недопустимы. Исходя из этого составим следующую таблицу

| $p$ | $(f_1, q_1)$ | $(f_2, q_2)$ | $(f_3, q_3)$ | $(f_4, q_4)$ | $(f_5, q_5)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 50 | | | | | |
| 60 | × | | | | |
| 70 | × | × | | | |
| 80 | × | × | × | | |
| 90 | × | × | × | × | |
| 100 | × | × | × | × | |

Значение максимальной выручки в исходной задаче равняется $\mathbf{f_1(50)}$. Заполним таблицу, чтобы найти его, а затем вычислить все $q_i^*$.

**Заполнение таблицы**

**Шаг 1** На первом шаге $n = 5$, запишем выражение для $f_5(p)$

$$f_5(p) = 3(\alpha(p) - 50) - 0.5p.$$

Таким образом мы можем посчитать значение $f_5(p)$ для любого $p \geq 50$, при этом нам известно значение, на котором достигается максимум $(q_5)$

$$q_5 = \alpha(p) - 50.$$

Посчитаем значение $f_5$ для всех возможных состояний

$$f_5(50) = 3(\alpha(50) - 50) - 50 \cdot 0.5 = 5, \quad q_5 = \alpha(50) - 50 = 10;$$

$$f_5(60) = 3(\alpha(60) - 50) - 60 \cdot 0.5 = 30, \quad q_5 = \alpha(60) - 50 = 20;$$
$$f_5(70) = 3(\alpha(70) - 50) - 70 \cdot 0.5 = 55, \quad q_5 = \alpha(70) - 50 = 30;$$
$$f_5(80) = 3(\alpha(80) - 50) - 80 \cdot 0.5 = 110, \quad q_5 = \alpha(80) - 50 = 50;$$
$$f_5(90) = 3(\alpha(90) - 50) - 90 \cdot 0.5 = 135, \quad q_5 = \alpha(90) - 50 = 60;$$
$$f_5(100) = 3(\alpha(100) - 50) - 100 \cdot 0.5 = 160, \quad q_5 = \alpha(100) - 50 = 70.$$

Занесём все эти данные в последний столбец таблицы.

| $p$ | $(f_1, q_1)$ | $(f_2, q_2)$ | $(f_3, q_3)$ | $(f_4, q_4)$ | $(f_5, q_5)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 50 | | | | | $(5, 10)$ |
| 60 | $\times$ | | | | $(30, 20)$ |
| 70 | $\times$ | $\times$ | | | $(55, 30)$ |
| 80 | $\times$ | $\times$ | $\times$ | | $(110, 50)$ |
| 90 | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $(135, 60)$ |
| 100 | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $(160, 70)$ |

**Шаг 2** На втором шаге $n = 4$. Выражение для этого и последующих шагов выглядит как рекуррентное соотношение $(^{**})$. Делаем вычисления аналогично шагу 2 решения задачи о машине, с учетом наших ограничений на $q_i$

$$f_4(50) = \begin{array}{c|l} 0 & -25 + 3 \cdot 0 + f_5(60) = 30 - 25 = 5 \\ 10 & -25 + 3 \cdot 10 + f_5(50) = 30 + 5 - 25 = \textcircled{10} \end{array}$$

$$f_4(60) = \begin{array}{c|l} 0 & -30 + 3 \cdot 0 + f_5(70) = 55 - 30 = 25 \\ 10 & -30 + 3 \cdot 10 + f_5(60) = 30 + 30 - 30 = 30 \\ 20 & -30 + 3 \cdot 20 + f_5(50) = 60 + 5 - 30 = \textcircled{35} \end{array}$$

$$f_4(70) = \begin{array}{c|l} 0 & -35 + 3 \cdot 0 + f_5(80) = 110 - 35 = \textcircled{75} \\ 10 & -35 + 3 \cdot 10 + f_5(70) = 30 + 55 - 35 = 50 \\ 20 & -35 + 3 \cdot 20 + f_5(60) = 60 + 30 - 35 = 55 \\ 30 & -35 + 3 \cdot 30 + f_5(50) = 90 + 5 - 35 = 60 \end{array}$$

$$f_4(80) = \begin{array}{c|l} 0 & -40 + 3 \cdot 0 + f_5(100) = 160 - 40 = 120 \\ 10 & -40 + 3 \cdot 10 + f_5(90) = 30 + 135 - 40 = 125 \\ 20 & -40 + 3 \cdot 20 + f_5(80) = 60 + 110 - 40 = \textcircled{130} \\ 30 & -40 + 3 \cdot 30 + f_5(70) = 90 + 55 - 40 = 105 \\ 40 & -40 + 3 \cdot 40 + f_5(60) = 120 + 30 - 40 = 110 \\ 50 & -40 + 3 \cdot 50 + f_5(50) = 150 + 5 - 40 = 115 \end{array}$$

Занесём все данные в таблицу.

| $p$ | $(f_1, q_1)$ | $(f_2, q_2)$ | $(f_3, q_3)$ | $(f_4, q_4)$ | $(f_5, q_5)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 50 | | | | $(10, 10)$ | $(5, 10)$ |
| 60 | $\times$ | | | $(35, 20)$ | $(30, 20)$ |
| 70 | $\times$ | $\times$ | | $(75, 0)$ | $(55, 30)$ |
| 80 | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $(130, 20)$ | $(110, 50)$ |
| 90 | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $(135, 60)$ |
| 100 | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $(160, 70)$ |

**Шаг 3** На третьем шаге $n = 3$. Считаем значения для $f_3(p)$

$$f_3(50) = \begin{array}{c|l} 0 & -25 + 3 \cdot 0 + f_4(60) = 35 - 25 = 10 \\ 10 & -25 + 3 \cdot 10 + f_4(50) = 30 + 10 - 25 = \textcircled{15} \end{array}$$

$$f_3(60) = \begin{array}{c|l} 0 & -30 + 3 \cdot 0 + f_4(70) = 75 - 30 = \textcircled{45} \\ 10 & -30 + 3 \cdot 10 + f_4(60) = 35 + 30 - 30 = 35 \\ 20 & -30 + 3 \cdot 20 + f_4(50) = 60 + 10 - 30 = 40 \end{array}$$

$$f_3(70) = \begin{array}{c|l} 0 & -35 + 3 \cdot 0 + f_4(80) = 130 - 35 = \textcircled{95} \\ 10 & -35 + 3 \cdot 10 + f_4(70) = 30 + 75 - 35 = 90 \\ 20 & -35 + 3 \cdot 20 + f_4(60) = 60 + 35 - 35 = 60 \\ 30 & -35 + 3 \cdot 30 + f_4(50) = 90 + 10 - 35 = 65 \end{array}$$

Занесём все данные в таблицу.

| $p$ | $(f_1, q_1)$ | $(f_2, q_2)$ | $(f_3, q_3)$ | $(f_4, q_4)$ | $(f_5, q_5)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 50 | | | $(15, 10)$ | $(10, 10)$ | $(5, 10)$ |
| 60 | $\times$ | | $(45, 0)$ | $(35, 20)$ | $(30, 20)$ |
| 70 | $\times$ | $\times$ | $(95, 0)$ | $(75, 0)$ | $(55, 30)$ |
| 80 | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $(130, 20)$ | $(110, 50)$ |
| 90 | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $(135, 60)$ |
| 100 | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $(160, 70)$ |

**Шаг 4** На четвертом шаге $n = 2$. Считаем значения для $f_2(p)$

$$f_2(50) = \begin{array}{c|l} 0 & -25 + 3 \cdot 0 + f_3(60) = 45 - 25 = \textcircled{20} \\ 10 & -25 + 3 \cdot 10 + f_3(50) = 30 + 15 - 25 = \textcircled{20} \end{array}$$

$$f_2(60) = \begin{array}{c|l} 0 & -30 + 3 \cdot 0 + f_3(70) = 95 - 30 = \textcircled{65} \\ 10 & -30 + 3 \cdot 10 + f_3(60) = 45 + 30 - 30 = 45 \\ 20 & -30 + 3 \cdot 20 + f_3(50) = 60 + 15 - 30 = 45 \end{array}$$

Занесём все данные в таблицу. Заметим, что при вычислении $f_2(50) = 20$ максимум достигается и при $q = 0$, и при $q = 10$. В таблице это будет отражено как $(20, 0/10)$.

| $p$ | $(f_1, q_1)$ | $(f_2, q_2)$ | $(f_3, q_3)$ | $(f_4, q_4)$ | $(f_5, q_5)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 50 | | $(20, 0/10)$ | $(15, 10)$ | $(10, 10)$ | $(5, 10)$ |
| 60 | $\times$ | $(65, 0)$ | $(45, 0)$ | $(35, 20)$ | $(30, 20)$ |
| 70 | $\times$ | $\times$ | $(95, 0)$ | $(75, 0)$ | $(55, 30)$ |
| 80 | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $(130, 20)$ | $(110, 50)$ |
| 90 | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $(135, 60)$ |
| 100 | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $(160, 70)$ |

**Шаг 5** На пятом шагу $n = 1$. Считаем значения для $f_1(p)$

$$f_1(50) = \begin{array}{c|l} 0 & -25 + 3 \cdot 0 + f_2(60) = 65 - 25 = \textcircled{40} \\ 10 & -25 + 3 \cdot 10 + f_2(50) = 30 + 20 - 25 = 25 \end{array}$$

Занесём все данные в таблицу.

| $p$ | $(f_1, q_1)$ | $(f_2, q_2)$ | $(f_3, q_3)$ | $(f_4, q_4)$ | $(f_5, q_5)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 50 | $(40, 0)$ | $(20, 0/10)$ | $(15, 10)$ | $(10, 10)$ | $(5, 10)$ |
| 60 | $\times$ | $(65, 0)$ | $(45, 0)$ | $(35, 20)$ | $(30, 20)$ |
| 70 | $\times$ | $\times$ | $(95, 0)$ | $(75, 0)$ | $(55, 30)$ |
| 80 | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $(130, 20)$ | $(110, 50)$ |
| 90 | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $(135, 60)$ |
| 100 | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $(160, 70)$ |

**Поиск оптимальной стратегии**

Заметим, что наше начальное состояние $p_0 = 50$, поскольку в самом начале у фермера было 50 коров

$$\begin{aligned} p_1^* = p_0 = 50, \qquad & q_1^* = 0, \\ p_2^* = \alpha(p_1^*) - q_1^* = 60, \qquad & q_2^* = 0, \\ p_3^* = \alpha(p_2^*) - q_2^* = 70, \qquad & q_3^* = 0, \\ p_4^* = \alpha(p_3^*) - q_3^* = 80, \qquad & q_4^* = 20, \\ p_5^* = \alpha(p_4^*) - q_4^* = 80, \qquad & q_5^* = 50. \end{aligned}$$

Итоговая стратегия — это $q^* = \{0, 0, 0, 20, 50\}$, то есть в первые три года не продавать коров, в четвёртый год продать 20, а в пятый — 50. При данной стратегии прибыль составит $f_1(50) = 40$.

# 2.5 Задача о подрядчике

## **Задача** (о подрядчике)

Строительный подрядчик оценивает потребность в количестве рабочей силы на каждую из последующих пяти недель как 5, 7, 8, 4 и 6 рабочих. Подрядчик может нанимать и увольнять

рабочих в начале недели, исходя из того, что содержание избыточной рабочей силы обходится в 3 у.е. на одного рабочего в неделю, выплата выходного пособия для увольнения равна 2 у.е., а наем рабочей силы обходится в 4 у.е (за вход на рабочую биржу) и по 2 у.е. за каждого нанятого работника. Чему равны наименьшие затраты на найм, содержание избыточных и увольнение рабочих, если на момент начала первой недели у подрядчика не было ни одного рабочего?

## Математическая модель

**1. Что будем оптимизировать?** Ответ: Подрядчик должен потратить как можно меньше денег, при этом количества рабочих должно хватать для выполнения плана для каждой недели.

**2. Что существенно влияет на оптимизируемую характеристику?**

Пусть $i = 1 \dots 5$ — неделя. Отметим как $\lambda_i$ количество рабочих, необходимое для работы на $i$-ой неделе.

| **Неделя ($i$)** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Количество рабочих ($\lambda_i$)** | 5 | 7 | 8 | 4 | 6 |

*Параметры*

- $e = 4$ — стоимость входа на биржу;
- $c = 2$ — стоимость найма рабочего;
- $u = 2$ — выплата выходного пособия для увольнения;
- $d = 3$ — выплата за одного избыточного рабочего.

*Переменные*

- $q = \{q_i\}_{i=1}^5$ — сколько нужно нанять рабочих в начале $i$-ой недели. Может быть отрицательным (увольняем) или равно 0 (ничего не делаем) $q_i \in Q_i = \{\underbrace{\dots, -2, -1}_{\text{увольняем}}, 0, \underbrace{1, 2, \dots}_{\text{нанимаем}}\}$

**3. Математическая формулировка задачи**

Пусть $G$ — затраты за 5 недель, а $p = \{p_i\}_{i=1}^5$ — количество рабочих в начале недели, тогда

$$G = \sum_{i=1}^{5} \begin{cases} e + cq_i + d(p_i + q_i - \lambda_i), & q_i > 0, \\ d(p_i + q_i - \lambda_i), & q_i = 0, \\ -uq_i + d(p_i + q_i - \lambda_i), & q_i < 0. \end{cases}$$

$$G \to \min_q$$

$$\forall i \; p_i + q_i \geq \lambda_i \qquad (*)$$

## Решение

Решим задачу с помощью $N$-шагового процесса принятия решений с теми же данными, которые были определены в задаче и с учетом условий на $q$.

### Исходные данные

- количество шагов процесса = количество недель = $5$;
- на $i$-ом шаге будем определять сколько нужно нанять/уволить рабочих в начале недели ($q_i$);
- состояние — текущее количество рабочих;
- функция перехода — сколько рабочих будет в начале следующей недели, если в начале этой было $p$ и мы наняли/уволили $q$

$$T_i(p, q) = p + q$$

- множества возможных состояний; учтём, что на $i$-ой неделе подрядчику нужно минимум $\lambda_i$ рабочих, а также то, что нет смысла нанимать свыше $\max(\lambda)$ рабочих, при этом в начале было 0 рабочих

$$P_1 = \{0\}, \quad P_2 = \{5, 6, 7, 8\}, \quad P_3 = \{7, 8\},$$

$$P_4 = \{8\}, \quad P_5 = \{4, 5, 6\}, \quad P_6 = \{6\}$$

  Множество $P_6$ фиктивное, оно необходимо, чтобы указать что на 5-ой неделе должно после выполнения шага остаться 6 рабочих.
- множества возможных решений

$$Q_i = \{\underbrace{\ldots, -2, -1}_{\text{увольняем}}, 0, \underbrace{1, 2, \ldots}_{\text{нанимаем}}\}$$

- множества допустимых решений; учтём (*)

$$Q_i(p) = \{q \in Q_i \mid \underbrace{T_n(p, q)}_{p+q} \in P_{i+1}\}$$

- функция расхода — сколько денег потратит подрядчик в начале $i$-ой недели, если при имеющихся $p$ рабочих он наймет $q$

$$g_i(p, q) = \begin{cases} 4 + 2q + 3(p + q - \lambda_i), & q > 0, \\ 3(p + q - \lambda_i), & q = 0, \\ -2q + 3(p + q - \lambda), & q < 0. \end{cases}$$

Для решения будем рассматривать семейства задач, которые определяются парой $(n, p)$. Фактически это означает, что

- рассматриваем расход за недели $n, n + 1, \ldots, 5$, $n \leq 5$;
- количество рабочих на начало $n$-ой недели составляет $p \geq \begin{cases} \lambda_{n-1}, & n > 1, \\ 0 & n = 0. \end{cases}$.

**База процесса**

Пусть $f_n(p)$ — минимальные затраты в семействе задач $(n, p)$. Заметим, что если $n = 5$, то задача легко решается: подрядчику нужно нанять/уволить столько рабочих, чтобы их стало ровно $\lambda_5 = 6$ т.е. $q_5(p) = 6 - p$

$$\forall p \in P_5 \quad f_5(p) = g_5(p, 6 - p).$$

**Переход**

Теперь когда у нас есть база для решения задачи, осуществим переход $f_{n+1}(p) \to f_n(p)$ в предположении, что $f_{n+1}(p)$ мы знаем $\forall p \geq \lambda_n$.

$$\boxed{f_n(p) = \min_{q \in Q_n(p)} \left\{ g_n(p,q) + f_{n+1}(\underbrace{T_n(p,q)}_{p+q}) \right\}} \qquad (**)$$

Вспомним множества допустимых состояний $P_i$. В объединении всех $P_i$ лежит множество $\{0,4,5,6,7,8\}$ — все значения, которые может принимать $p$. Также понятно, что считать $f_n(p)$ для $p \notin P_n$ не имеет смысла, так как эти состояния недопустимы. Исходя из этого составим следующую таблицу

| $p$ | $(f_1, q_1)$ | $(f_2, q_2)$ | $(f_3, q_3)$ | $(f_4, q_4)$ | $(f_5, q_5)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | × | × | × | × |
| 4 | × | × | × | × | |
| 5 | × | | × | × | |
| 6 | × | | × | × | |
| 7 | × | | | × | × |
| 8 | × | | | | × |

Значение минимального расхода в исходной задаче равняется $\mathbf{f_1(0)}$. Заполним таблицу, чтобы найти его, а затем вычислить все $q_i^*$.

**Заполнение таблицы**

**Шаг 1** На первом шаге $n = 5$, запишем выражение для $f_5(p)$ с учетом того что $q_5(p) = 6 - p$

$$f_5(p) = g_5(p, 6-p),$$

Посчитаем значение $f_5$ для всех возможных состояний

$$f_5(4) = g_5(4,2) = 4 + 2 \cdot 2 + 3(4 + 2 - 6) = 8;$$

$$f_5(5) = g_5(5,1) = 4 + 2 \cdot 1 + 3(5 + 1 - 6) = 6;$$

$$f_5(6) = g_5(6,0) = 3(6 + 0 - 6) = 0;$$

Занесём все эти данные в последний столбец таблицы.

| $p$ | $(f_1, q_1)$ | $(f_2, q_2)$ | $(f_3, q_3)$ | $(f_4, q_4)$ | $(f_5, q_5)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | × | × | × | × |
| 4 | × | × | × | × | $(8,2)$ |
| 5 | × | | × | × | $(6,1)$ |
| 6 | × | | × | × | $(0,0)$ |
| 7 | × | | | × | × |
| 8 | × | | | | × |

**Шаг 2** На втором шаге $n = 4$. Выражение для этого и последующих шагов выглядит как рекуррентное соотношение $(^{**})$.

$$f_4(8) = \begin{array}{r|l} -4 & g_4(8,-4) + f_5(4) = 2\cdot 4 + 3(8-4-4) + 8 = 16 \\ -3 & g_4(8,-3) + f_5(5) = 2\cdot 3 + 3(8-3-4) + 6 = 15 \\ -2 & g_4(8,-2) + f_5(6) = 2\cdot 2 + 3(8-2-4) + 0 = \textcircled{10} \end{array}$$

Занесём все данные в таблицу.

| $p$ | $(f_1, q_1)$ | $(f_2, q_2)$ | $(f_3, q_3)$ | $(f_4, q_4)$ | $(f_5, q_5)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ |
| 4 | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $(8, 2)$ |
| 5 | $\times$ | | $\times$ | $\times$ | $(6, 1)$ |
| 6 | $\times$ | | $\times$ | $\times$ | $(0, 0)$ |
| 7 | $\times$ | | | $\times$ | $\times$ |
| 8 | $\times$ | | | $(10, -2)$ | $\times$ |

**Шаг 3** На третьем шаге $n = 3$. Считаем значения для $f_3(p)$

$$f_3(8) = \begin{array}{r|l} 0 & g_3(8,0) + f_4(8) = 0 + 10 = \textcircled{10} \end{array}$$

$$f_3(7) = \begin{array}{r|l} 1 & g_3(7,1) + f_4(8) = 4 + 2 + 10 = \textcircled{16} \end{array}$$

Занесём все данные в таблицу.

| $p$ | $(f_1, q_1)$ | $(f_2, q_2)$ | $(f_3, q_3)$ | $(f_4, q_4)$ | $(f_5, q_5)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ |
| 4 | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $(8, 2)$ |
| 5 | $\times$ | | $\times$ | $\times$ | $(6, 1)$ |
| 6 | $\times$ | | $\times$ | $\times$ | $(0, 0)$ |
| 7 | $\times$ | | $(16, 1)$ | $\times$ | $\times$ |
| 8 | $\times$ | | $(10, 0)$ | $(10, -2)$ | $\times$ |

**Шаг 4** На четвертом шаге $n = 2$. Считаем значения для $f_2(p)$

$$f_2(5) = \begin{array}{r|l} 2 & g_2(5,2) + f_3(7) = 4 + 2\cdot 2 + 3(5+2-7) + 16 = 24 \\ 3 & g_2(5,3) + f_5(8) = 4 + 2\cdot 2 + 3(5+3-7) + 10 = \textcircled{23} \end{array}$$

$$f_2(6) = \begin{array}{r|l} 1 & g_2(6,1) + f_3(7) = 4 + 2\cdot 1 + 3(6+1-7) + 16 = 22 \\ 2 & g_2(6,2) + f_5(8) = 4 + 2\cdot 2 + 3(6+2-7) + 10 = \textcircled{21} \end{array}$$

$$f_2(7) = \begin{array}{r|l} 0 & g_2(7,0) + f_3(7) = 3(7+0-7) + 16 = \textcircled{16} \\ 1 & g_2(7,1) + f_5(8) = 4 + 2\cdot 1 + 3(7+1-7) + 10 = 19 \end{array}$$

$$f_2(8) = \begin{array}{r|l} 0 & g_2(8,0) + f_3(8) = 3(8+0-7) + 10 = \textcircled{13} \\ -1 & g_2(8,-1) + f_5(7) = 2\cdot 1 + 3(8-1-7) + 16 = 18 \end{array}$$

Занесём все данные в таблицу.

| $p$ | $(f_1, q_1)$ | $(f_2, q_2)$ | $(f_3, q_3)$ | $(f_4, q_4)$ | $(f_5, q_5)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ |
| 4 | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $(8, 2)$ |
| 5 | $\times$ | $(23, 3)$ | $\times$ | $\times$ | $(6, 1)$ |
| 6 | $\times$ | $(21, 2)$ | $\times$ | $\times$ | $(0, 0)$ |
| 7 | $\times$ | $(16, 0)$ | $(16, 1)$ | $\times$ | $\times$ |
| 8 | $\times$ | $(13, 0)$ | $(10, 0)$ | $(10, -2)$ | $\times$ |

**Шаг 5** На пятом шагу $n = 1$. Считаем значения для $f_1(p)$

$$f_1(0) = \begin{array}{c|l} 5 & g_1(5,0) + f_2(5) = 4 + 2 \cdot 5 + 3(5 + 0 - 5) + 23 = \textcircled{37} \\ 6 & g_1(5,1) + f_2(6) = 4 + 2 \cdot 6 + 3(6 + 0 - 5) + 21 = 40 \\ 7 & g_1(5,2) + f_2(7) = 4 + 2 \cdot 7 + 3(7 + 0 - 5) + 16 = 40 \\ 8 & g_1(5,3) + f_2(8) = 4 + 2 \cdot 8 + 3(8 + 0 - 5) + 13 = 42 \end{array}$$

Занесём все данные в таблицу.

| $p$ | $(f_1, q_1)$ | $(f_2, q_2)$ | $(f_3, q_3)$ | $(f_4, q_4)$ | $(f_5, q_5)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $(37, 5)$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ |
| 4 | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $(8, 2)$ |
| 5 | $\times$ | $(23, 3)$ | $\times$ | $\times$ | $(6, 1)$ |
| 6 | $\times$ | $(21, 2)$ | $\times$ | $\times$ | $(0, 0)$ |
| 7 | $\times$ | $(16, 0)$ | $(16, 1)$ | $\times$ | $\times$ |
| 8 | $\times$ | $(13, 0)$ | $(10, 0)$ | $(10, -2)$ | $\times$ |

### Поиск оптимальной стратегии

Заметим, что наше начальное состояние $p_0 = 0$, поскольку в самом начале было 0 рабочих

$$\begin{aligned} p_1^* &= p_0 = 0, & q_1^* &= 5, \\ p_2^* &= p_1^* + q_1^* = 5, & q_2^* &= 3, \\ p_3^* &= p_2^* + q_2^* = 8, & q_3^* &= 0, \\ p_4^* &= p_3^* + q_3^* = 8, & q_4^* &= -2, \\ p_5^* &= p_4^* + q_4^* = 6, & q_5^* &= 0. \end{aligned}$$

Итоговая стратегия — это $q^* = \{5, 3, 0, 0, -2\}$, то есть в начале 1-ой недели нанимаем 5 рабочих, на следующей еще 3, на третьей ничего не делаем, а на четвертой увольняем 2-их рабочих, на последней неделе ничего не делаем. При данной стратегии расход составит $f_1(0) = 37$.

# 2.6 Распределительная задача

## Определение (распределительная задача)

Распределительная задача обобщает задачу о машине и задачу загрузки судна. В общем случае задача формулируется следующим образом: имеется ограниченное количество некоторого ресурса; ресурс можно использовать различными способами для получения дохода/расхода; требуется максимизировать доходы/минимизировать расходы от использования ресурса.

## Математическая модель

- $b$ — количество ресурса;
- $N$ — количество способов использования ресурса;
- $x = 0, 1, 2, \dots$ — интенсивность использования ресурса;
- $h_i(x)$ — затраты ресурса при использовании его $i$-ым способом с интенсивностью $x$;
- $c_i(x)$ — прибыль/убыток при использовании ресурса $i$-ым способом с интенсивностью $x$;
- $h_i(x)$ и $c_i(x)$ — возрастающие функции, при этом $c_i(0) = h_i(0) = 0$;

$$\sum_{i=1}^{N} c_i(x) \to \max\,/\,\min_{(x_i)}$$

$$\sum_{i=1}^{N} h_i(x_i) \le b,$$

$$x_i \le a_i \quad i = 1 \dots N.$$

## Утверждение

Распределительная задача сводится к задаче выбора оптимальной стратегии $N$-шагового процесса.

## Доказательство

Покажем, что исходная задача $\mathcal{P}$ сводится к задаче $\mathcal{Q}$. Для этого построим исходные данные для осуществления $N$-шагового процесса.

### Исходные данные

- количество шагов процесса $= N$;
- состояние на каждом шаге — сколько ресурса можно израсходовать;
- решение на каждом шаге — какая будет интенсивность использования ресурса;
- функция перехода — сколько останется свободного ресурса после шага $i$, если в начале шага было $p$, а на шаге $i$ ресурс использовался с интенсивностью $q$

$$T_i(p, q) = p - h_i(q), \quad i = 1 \dots N;$$

- множества возможных состояний

$$P_1 = \{b\},$$

$$P_i = \{0, \dots, b\}, \quad i = 2 \dots N + 1;$$

- множества возможных решений

$$Q_i = \{0, \dots, a_i\}, \quad i = 1 \dots N;$$

- множества допустимых решений

$$Q_i(p) = \{q \in Q_i \mid T_i(p,q) \in P_{i+1}\}, \quad i = 1 \dots N;$$

- функция дохода/расхода

$$g_i(p,q) = c_i(q), \quad i = 1 \dots N.$$

После того, как исходные построены, можно непосредственно заняться сведением задачи $\mathcal{P}$ к задаче $\mathcal{Q}$.

**Сведение к задаче выбора оптимальной стратегии**

Для сведения исходной задачи $\mathcal{P}$ к задаче $\mathcal{Q}$ нужно

1. по исходным данным задачи $\mathcal{P}$ построить исходные данные задачи $\mathcal{Q}$;
2. по оптимальной стратегии задачи $\mathcal{Q}$ построить оптимальное решение задачи $\mathcal{P}$.

Пусть $q^* = \{q_1^*, q_2^*, \dots, q_N^*\}$ — оптимальная стратегии задачи $\mathcal{Q}$, тогда решение для исходной задачи $\mathcal{P}$ выглядит следующим образом

$$x^0 = (x_i^0), \quad x_i^0 = q_i^*.$$

Таким образом, первое уже сделано, а для второго нужно доказать, что $x^0$ — допустимое и оптимальное решение задачи $\mathcal{P}$.

*Доказательство допустимости*

- $q_i^* \le a_i$, поэтому из определения $x_i^0$ следует, что $\boxed{x_i^0 \le a_i}$.
- Пусть $p_i^*$ — состояние на $i$-ом шаге, если следовать оптимальной стратегии $q^*$. Из выражения для множеств допустимых состояний следует, что $p_{N+1}^* \ge 0$, из выражения для функции перехода следует, что $p_{i+1}^* = p_i^* - h_i(q_i^*)$. Распишем имеющие неравенства

$$\begin{aligned}
0 \le p_{N+1}^* &= p_N^* - h_N(q_N^*) \\
&= \big(p_{N-1}^* - h_{N-1}(q_{N-1}^*)\big) - h_N(q_N^*) \\
&= \dots \\
&= -\sum_{i=1}^{N} h_i(q_i^*) + p_1^* \\
&\overset{P_1=\{b\}}{=} -\sum_{i=1}^{N} h_i(q_i^*) + b \\
&= b - \sum_{i=1}^{N} h_i(q_i^*),
\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$0 \le b - \sum_{i=1}^{N} h_i(q_i^*),$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} h_i(q_i^*) \le b}$$

Таким образом, мы доказали, что $x^0$ — допустимое решение задачи $\mathcal{P}$, так как оно удовлетворяет всем ограничениям задачи $\mathcal{P}$.

*Доказательство оптимальности*

Заметим, что целевые функции в задачах $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ одни и те же, поэтому нетрудно показать, что по сведению к другой задаче решение исходной задачи $x^0$, построенное на оптимальной стратегии $q^*$, будет оптимальным.

Таким образом, задача $\mathcal{P}$ действительно сводится к задаче $\mathcal{Q}$.

## **Решение** (распределительная задача)

Благодаря тому, что распределительная задача сводится к задаче выбора оптимальной стратегии $N$-шагового процесса, её можно решить соответствующим образом.

Вспомним, что $q = 0, 1, \dots a$, то есть $\boxed{0 \le q \le a_i}$. Распишем функцию перехода

$$T_i(p, q) \in P_{i+1}$$

$$\Updownarrow$$

$$0 \le p - h_i(q) \le b,$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{h_i(q) \le p}$$

Таким образом, решение $q$ на $i$-ом шаге в состоянии $p$ является допустимым тогда и только когда, когда

$$\begin{cases} 0 \le q \le a_i, \\ h_i(q) \le p. \end{cases}$$

### База процесса

Пусть $p \in P_N$, запишем выражение для $f_N(p)$

$$f_N(p) = \max_{q \in Q_N(p)} \{c_N(q)\}$$

Вспомним, что $\{c_i(x)\}$ — возрастающие функции, поэтому максимум $c_N(q)$ достигается при $q_{\max} \in (p)$. Таким образом

$$f_N(p) = c_N(q_{\max}),$$

при $q_{\max}$, которое удовлетворяет ограничениям

$$\begin{cases} 0 \le q \le a_i, \\ h_i(q) \le p. \end{cases}$$

### Переход

Пусть $n = 1 \dots N-1$, $p \in P_n$, запишем выражение для $f_n(p)$

$$f_n(p) = \max_{q \in Q_n(p)} \big\{ c_n(q) + f_{n+1}\big( \underbrace{T_i(p, q)}_{p - h_n(q)} \big) \big\},$$

$$q \in Q_n(p) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 0 \le q \le a_i, \\ h_i(q) \le p. \end{cases}$$

С помощью данных рекуррентных соотношений можно осуществить алгоритм выбора оптимальной стратегии $N$-шагового процесса и найти оптимальную стратегию распределительной задачи.

## Утверждение

Оценка трудоёмкости алгоритма $A$ решения распределительной задачи с помощью $N$-шагового процесса принятия решений имеет вид

$$T_A(p) \le b \cdot |p|.$$

## Доказательство

Напишем выражение трудоёмкости алгоритма выбора оптимальной стратегии $N$-шагового процесса

$$T_A = N \cdot b \cdot a,$$

- $N$ — число шагов алгоритма;
- $b$ — количество возможных состояний на каждом шаге;
- $a = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$ — количество перебираемых решений на каждом шаге для каждого состояния.

Напишем выражение оценки трудоёмкости через длину входа задачи. Для хранения условия задачи в памяти нужно хранить значения всех констант и всех функций во всех возможных точках. Будем учитывать лишь хранение значений функций, поскольку занимаемый объём памяти для всего остального можно оценить как $\mathcal{O}(1)$. В данной задаче у нас есть функции $\{c_i(x)\}_{i=1}^N$ и $\{h_i(x)\}_{i=1}^N$, при этом каждая функция определена в $a$ точках. Занимаемый объём памяти функциями составляет $2 \cdot N \cdot a$, запишем это так

$$|p| = \mathcal{O}(N \cdot a),$$

$$\Downarrow$$

$$T_A = N \cdot b \cdot a = b \cdot N \cdot a \le b \cdot |p|$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{T_A(p) \le b \cdot |p|}$$

## Замечание

Нельзя написать, что

$$T_A(p) \le C \cdot |p|$$

так как нет такой константы $C$, чтобы неравенство выполнялась для любой задачи, относящейся к распределительной, поскольку какое бы $C$ мы не взяли, всегда можно написать распределительную задачу, в которой $b = C + 1$. Таким образом, алгоритм решения распределительной задачи с помощью выбора оптимальной стратегии $N$-шагового процесса не является полиномиальным (он является *псевдополиномиальным*).

## 2.6.1 Задача о рюкзаке

### Задача (о рюкзаке)

Задача о рюкзаке является частным случаем распределительной задачи. Условие формулируется следующим образом: имеется рюкзак ограниченной вместимости и некоторые предметы, которые нужно сложить в рюкзак так, чтобы общая стоимость предметов в рюкзаке была максимальной.

### Математическая модель

- $b$ — вместимость рюкзака;
- $N$ — количество предметов;
- $a_i$ — место, занимаемое $i$-ым предметом;
- $c_i$ — ценность $i$-го предмета;
- $x_i$ — сколько предметов типа $i$ класть в рюкзак, $x_i \in \{0, 1\}$ или $x_i \in \{0, 1, 2, \dots\}$;

$$\sum_{i=1}^{N} c_i x_i \to \max_{(x_i)},$$

$$\sum_{i=1}^{N} a_i x_i \le b.$$

### Решение (задача о рюкзаке)

Поскольку задача является частным случаем распределительной задачи, её тоже можно решить с помощью $N$-шагового процесса принятия решений.

**База процесса**

$$f_N(p) = \begin{cases} c_N, & p \ge a_N \\ 0, & p < a_N \end{cases}$$

$$q_N(p) = \begin{cases} 1, & p \ge a_N \\ 0, & p < a_N \end{cases}$$

**Переход**

$$f_n(p) = \begin{cases} \max\limits_{x \in \{0,1\}} \{c_n x + f_{n+1}(p - a_n x)\}, & p \ge a_n \\ f_{n+1}(p), & p < a_n \end{cases}$$

### Утверждение

Оценка трудоёмкости алгоритма $A$ решения задачи о рюкзаке с помощью $N$-шагового процесса принятия решений имеет вид

$$\boxed{T_A(p) \le b \cdot |p|}$$

### Замечание

Полиномиального решения задачи о рюкзаке на данный момент не существует.

# 2.7 Задача о ближайшем соседе

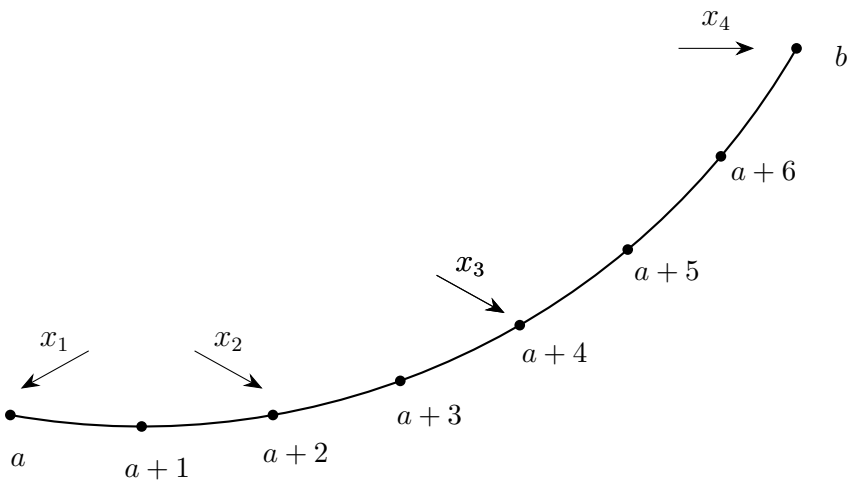
- $d(x, y)$ — расстояние между $x$ и $y$, $a \le x \le y \le b$;
- $Z = \{a, a+1, a+2, \dots, b-1, b\}$;

$$\min_{(x_1, x_2, \dots, x_N, x_N+1)} \left\{ \sum_{i=1}^{N} f(x_i, x_{i+1}) \right\},$$

$$\begin{cases} x_1 = a, \\ x_1 \le x_2, \\ x_2 \le x_3, \\ \dots \\ x_N \le x_{N+1}, \\ x_{N+1} = b; \end{cases}$$

$$x_i \in Z.$$

Нужно разбить трассу на $N$ участков так, чтобы сумма расстояний между выбранными точками были наименьшей (расстояния определяются с помощью функции $d(x, y)$).




**$N$-шаговый процесс**

- состояние — координата текущей точки;

Множества допустимых состояний

$$P_1 = \{a\},$$

$$P_i = Z, \quad i = 2 \dots N,$$

$$P_{N+1} = \{b\}.$$

Решение — насколько выдвинуться вперёд. Множества допустимых решений

$$Q_i = \{0, \dots, b-a\}.$$

Функция перехода

$$T_i(p, q) = p + q.$$

Функция расхода

$$g_i(p, q) = f(p, p + q).$$

### Выбор оптимальной стратегии

Пусть мы построили оптимальную стратегию $q^* = \{q_1^*, q_2^*, \ldots, q_N^*\}$, однако для решения исходной задачи нам нужны не значения $\{q_i^*\}_{i=1}^N$, а значения $\{p_i^*\}_{i=1}^{N+1}$

$$x_i^0 = p_i^*, \quad i = 1 \ldots N + 1.$$

*Допустимость решения*

$$\underbrace{p_{i+1}^*}_{x_{i+1}^0} = \underbrace{p_i^*}_{x_i^0} + \underbrace{q_i^*}_{\geq 0},$$

поэтому $x_i^0 \leq x_{i+1}^0$, значит решение исходной задачи $x^0$ является оптимальным.

*Оптимальность решения*

...

### Хз как назвать

$f_n(p)$ — мы находимся возле столба с номером $p$ и нам нужно разбить оставшийся участок трассы на $(N - n + 1)$ участков.

*База*

$$f_N(p) = d(p, b)$$

$$q_N(p) = b - p$$

То есть нам нужно попасть в точку $b$ за один шаг.

*Переход*

Определим допустимые решения

$$Q_i(p) = \{q \in Q_i \mid \underbrace{T_i(p, q)}_{p+q} \leq b\}$$

Переход

$$f_n(p) = \min_{p+q \leq b} \{d(p, p + q) + f_{n+1}(p + q)\}$$
$$\overset{p'=p+q}{=} \min_{p \leq p' \leq b} \{f(p, p') + f_{n+1}(p')\}$$

### Трудоёмкость

$$T = N \cdot (b - a) \cdot (b - a)$$

- $N$ — число шагов;
- $(b - a)$ — количество возможных состояний;

- $(b-a)$ — перебор значений $p'$.

Если $N > b-a+1$, то для некоторых $i$ $p_i = p_{i+1}$. Будем рассматривать лишь $N \leq b-a+1$, поэтому можно сказать, что

$$T \sim (b-a)^3$$

**Оценка трудоёмкости**

$|p| = (b-a)^2$, поскольку нам нужно знать значения функции $d(x,y)$ на множестве $Z^2$. Отсюда

$$T(|p|) \sim (b-a)^3 \leq C\big((b-a)^2\big)^{k=2}.$$

Таким образом, алгоритм решения задачи о ближайшем с помощью выбора оптимальной стратегии $N$-шагового процесса является полиномиальным.

# 2.8 Задача о ракетах

## Задача (о ракетах)

Имеются 7 ракет для поражения четырех целей. Известны вероятности $\lambda_i$ поражения $i$-ой цели одной ракетой:

| **Цель ($i$)** | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| **Вероятность поражения ($\lambda_i$)** | 0.5 | 0.6 | 0.9 | 0.8 |

Сколько ракет нужно направить на каждую цель, чтобы вероятность поражения всей совокупности целей была наибольшей?

## Математическая модель

Пусть $i = 1 \dots 4$ — номер цели.

*Параметры*

- $\lambda = \{0.5, 0.6, 0.9, 0.8\}$ — вероятности поражения целей.

*Переменные*

- $q = \{q_i\}_{i=1}^4$ — сколько нужно направить ракет на $i$-ую цель.

**Использование теории вероятности**

Допустим мы выпускаем одну ракету во вторую цель и поражаем её — это событие $X$, отметим $P(X)$ как вероятность события $X$. Из условия $P(X) = \lambda_2 = 0.6$. Отметим $\bar{X}$ — событие противоположное $X$, в текущем контексте это событие того, что мы выпустили ракету во вторую цель, но не поразили её. Вероятность такого события равна $1 - P(X)$, т.е $P(\bar{X}) = 1 - P(X)$.

Пусть у нас есть 2 события $X, Y$, они происходят одновременно и друг от друга не зависят (мы запустили ракету в 1 и 3 цель, например), тогда вероятность того, что эти события произойдут одновременно, равна $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Пусть мы запустили $c$ ракет в один объект: каждый запуск ракеты это событие $X_i$ $i \in \{1, 2, \cdots, c\}$, при этом эти события независимы друг от друга и имеют одинаковую вероятность $P(X)$. Тогда вероятность того, что при запуске всех $c$ ракет по одной цели, мы ни разу

не поразили цель, равна $\prod_{i=1}^{c}\big(1-P(X)\big) = \big(1-P(X)\big)^c$. То есть вероятность того, что мы поразим цель $i$, выпустив по ней $c$ ракет, равна

$$1-\big(1-P(X)\big)^c \qquad (*)$$

### Математическая формулировка задачи

У нас имеется 4 цели, в каждую из которых мы запускаем $q_i$ ракет. Фактически это 4 независимых события, описанные выше, и мы знаем вероятность поражения каждой цели хотя бы 1 ракетой при запуске $q_i$ ракет (*), из этого получаем итоговую вероятность поражения всех целей в совокупности

$$G = \prod_{i=1}^{4}\big(1-(1-\lambda_i)^{q_i}\big) \to \max_q$$

$$\sum_{i=1}^{4} q_i \le 7$$

$$\forall i \quad q_i \in \{1,2,3,4\}$$

Ограничение на $q_i$ следует из двух фактов

1. если мы по некоторой цели $i$ не запустим ни одной ракеты ($q_i = 0$), то $G = 0$, поэтому решение точно будет неоптимальным;
2. если на каком-нибудь шаге мы запустим по некоторой цели более 4 ракет, то значит на оставшиеся 3 цели останется не более 2 ракет, значит поразить все цели точно не получится ($G = 0$).

## Решение

Решим задачу с помощью $N$-шагового процесса принятия решений с теми же данными, которые были определены в задаче и с учетом условий на $q$.

### Исходные данные

- количество шагов процесса = количество целей = $4$;
- на $i$-ом шаге будем определять сколько нужно запустить ракет в $i$-ую цель ($q_i$);
- состояние — оставшееся количество ракет;
- функция перехода — сколько ракет останется, если из имеющихся $p$ будет запущено $q$

$$T_i(p,q) = p - q$$

- множества возможных состояний; учтём, что в каждую цель надо выпустить минимум 1 ракету, а так же то, что для последующих целей надо оставить минимум по 1 ракете и того, что изначально было 7 ракет

$$P_1 = \{7\}, \quad P_2 = \{3,4,5,6\}, \quad P_3 = \{2,3,4,5\},$$

$$P_4 = \{1,2,3,4\}, \quad P_5 = \{0\}.$$

Множество $P_5$ фиктивное, оно необходимо, чтобы указать что в четвертую цель мы запускаем все оставшиеся ракеты, это объясняется формулой (*), указывающей на то, что чем больше запускается ракет в цель, тем выше вероятность поразить её хотя бы 1 ракетой.

- множества возможных решений;

$$Q_i = \{1, 2, 3, 4\}$$

- множества допустимых решений

$$Q_i(p) = \{q \in \{1, 2, 3, 4\} \mid \underbrace{T_i(p, q)}_{p-q} \in P_{i+1}\}$$

- функция вероятности — вероятность поразить $i$-ую цель, если в неё запустить $q$ ракет

$$g_i(q) = 1 - (1 - \lambda_i)^q$$

Для решения будем рассматривать семейства задач, которые определяются парой $(n, p)$. Фактически это означает, что

- рассматриваем цели $n, n+1, \ldots, 4$, $n \leq 4$;
- количество ракет, которое имеется в наличии $p \in P_n$.

### База процесса

Пусть $f_n(p)$ — наибольшая вероятность поразить совокупность целей в семействе задач $(n, p)$. Заметим, что если $n = 4$, то задача легко решается: нужно запустить в цель все ракеты, то есть $\forall p \in P_4$

$$\begin{cases} f_4(p) = g_4(p), \\ q_4(p) = p. \end{cases}$$

### Переход

Теперь когда у нас есть база для решения задачи, осуществим переход $f_{n+1}(p) \to f_n(p)$ в предположении, что $f_{n+1}(p)$ мы знаем $\forall p \in P_{n+1}$.

$$\boxed{f_n(p) = \max_{q \in Q_n(p)} \left\{ g_n(q) \cdot f_{n+1}(\underbrace{T_n(p, q)}_{p-q}) \right\}} \qquad (**)$$

Вспомним множества допустимых состояний $P_i$. В объединении всех $P_i$ лежит множество $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ — все значения, которые может принимать $p$. Также понятно, что считать $f_n(p)$ для $p \notin P_n$ не имеет смысла, так как эти состояния недопустимы. Исходя из этого составим следующую таблицу

| $p$ | $(f_1, q_1)$ | $(f_2, q_2)$ | $(f_3, q_3)$ | $(f_4, q_4)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\times$ | $\times$ | $\times$ | |
| 2 | $\times$ | $\times$ | | |
| 3 | $\times$ | | | |
| 4 | $\times$ | | | |
| 5 | $\times$ | | | $\times$ |
| 6 | $\times$ | | $\times$ | $\times$ |
| 7 | | $\times$ | $\times$ | $\times$ |

Значение максимальной вероятности в исходной задаче равняется $\mathbf{f_1(7)}$. Заполним таблицу, чтобы найти его, а затем вычислить все $q_i^*$.

### Заполнение таблицы

**Шаг 1** На первом шаге $n = 4$, запишем выражение для $f_4(p)$

$$f_4(p) = g_4(p) = 1 - (1 - p_4)^p = 1 - 0.2^p,$$

Посчитаем значение $f_4$ для всех возможных состояний

$$f_4(1) = g_4(1) = 1 - 0.2^1 = 0.8;$$

$$f_4(2) = g_4(2) = 1 - 0.2^2 = 0.96;$$

$$f_4(3) = g_4(3) = 1 - 0.2^3 = 0.992;$$

$$f_4(4) = g_4(4) = 1 - 0.2^4 = 0.9984;$$

Занесём все эти данные в последний столбец таблицы.

| $p$ | $(f_1, q_1)$ | $(f_2, q_2)$ | $(f_3, q_3)$ | $(f_4, q_4)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $(0.8, 1)$ |
| 2 | $\times$ | $\times$ | | $(0.96, 2)$ |
| 3 | $\times$ | | | $(0.992, 3)$ |
| 4 | $\times$ | | | $(0.9984, 4)$ |
| 5 | $\times$ | | | $\times$ |
| 6 | $\times$ | | $\times$ | $\times$ |
| 7 | | $\times$ | $\times$ | $\times$ |

**Шаг 2** На втором шаге $n = 3$. Выражение для этого и последующих шагов выглядит как рекуррентное соотношение $(^{**})$.

$$f_3(2) = \begin{array}{r|l} 1 & g_3(1) \cdot f_4(1) = (1 - 0.1) \cdot 0.8 = \boxed{0.72} \end{array}$$

$$f_3(3) = \begin{array}{r|l} 1 & g_3(1) \cdot f_4(2) = (1 - 0.1) \cdot 0.96 = \boxed{0.864} \\ 2 & g_3(2) \cdot f_4(1) = (1 - 0.1^2) \cdot 0.8 = 0.792 \end{array}$$

$$f_3(4) = \begin{array}{r|l} 1 & g_3(1) \cdot f_4(3) = (1 - 0.1) \cdot 0.992 = 0.8928 \\ 2 & g_3(2) \cdot f_4(2) = (1 - 0.1^2) \cdot 0.96 = \boxed{0.9504} \\ 3 & g_3(3) \cdot f_4(1) = (1 - 0.1^3) \cdot 0.8 = 0.7992 \end{array}$$

$$f_3(5) = \begin{array}{r|l} 1 & g_3(1) \cdot f_4(4) = (1 - 0.1) \cdot 0.9984 = 0.89856 \\ 2 & g_3(2) \cdot f_4(3) = (1 - 0.1^2) \cdot 0.992 = \boxed{0.98208} \\ 3 & g_3(3) \cdot f_4(2) = (1 - 0.1^3) \cdot 0.96 = 0.95904 \\ 4 & g_3(4) \cdot f_4(1) = (1 - 0.1^4) \cdot 0.8 = 0.79992 \end{array}$$

Занесём все данные в таблицу.

| $p$ | $(f_1, q_1)$ | $(f_2, q_2)$ | $(f_3, q_3)$ | $(f_4, q_4)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $(0.8, 1)$ |
| 2 | $\times$ | $\times$ | $(0.72, 1)$ | $(0.96, 2)$ |
| 3 | $\times$ | | $(0.864, 1)$ | $(0.992, 3)$ |
| 4 | $\times$ | | $(0.9504, 2)$ | $(0.9984, 4)$ |
| 5 | $\times$ | | $(0.98208, 2)$ | $\times$ |
| 6 | $\times$ | | $\times$ | $\times$ |
| 7 | | $\times$ | $\times$ | $\times$ |

**Шаг 3** На третьем шаге $n = 2$. Считаем значения для $f_2(p)$

$$f_2(3) = \begin{array}{r|l} 1 & g_2(1) \cdot f_3(2) = (1 - 0.4) \cdot 0.72 = \boxed{0.432} \end{array}$$

$$f_2(4) = \begin{array}{r|l} 1 & g_2(1) \cdot f_3(3) = (1 - 0.4) \cdot 0.864 = 0.5184 \\ 2 & g_2(2) \cdot f_3(2) = (1 - 0.4^2) \cdot 0.72 = \boxed{0.6048} \end{array}$$

$$f_2(5) = \begin{array}{r|l} 1 & g_2(1) \cdot f_3(4) = (1 - 0.4) \cdot 0.9504 = 0.57204 \\ 2 & g_2(2) \cdot f_3(3) = (1 - 0.4^2) \cdot 0.864 = \boxed{0.72576} \\ 3 & g_2(3) \cdot f_3(2) = (1 - 0.4^3) \cdot 0.72 = 0.67392 \end{array}$$

$$f_2(6) = \begin{array}{r|l} 1 & g_2(1) \cdot f_3(5) = (1 - 0.4) \cdot 0.98208 = 0.589248 \\ 2 & g_2(2) \cdot f_3(4) = (1 - 0.4^2) \cdot 0.9504 = 0.798336 \\ 3 & g_2(3) \cdot f_3(3) = (1 - 0.4^3) \cdot 0.864 = \boxed{0.808704} \\ 4 & g_2(4) \cdot f_3(2) = (1 - 0.4^4) \cdot 0.72 = 0.701568 \end{array}$$

Занесём все данные в таблицу.

| $p$ | $(f_1, q_1)$ | $(f_2, q_2)$ | $(f_3, q_3)$ | $(f_4, q_4)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $(0.8, 1)$ |
| 2 | $\times$ | $\times$ | $(0.72, 1)$ | $(0.96, 2)$ |
| 3 | $\times$ | $(0.432, 1)$ | $(0.864, 1)$ | $(0.992, 3)$ |
| 4 | $\times$ | $(0.6048, 2)$ | $(0.9504, 2)$ | $(0.9984, 4)$ |
| 5 | $\times$ | $(0.72576, 2)$ | $(0.98208, 2)$ | $\times$ |
| 6 | $\times$ | $(0.808704, 3)$ | $\times$ | $\times$ |
| 7 | | $\times$ | $\times$ | $\times$ |

**Шаг 4** На четвертом шаге $n = 1$. Считаем значения для $f_1(p)$

$$f_1(7) = \begin{array}{c|l} 1 & g_1(1) \cdot f_2(6) = (1 - 0.5) \cdot 0.808704 = 0.404352 \\ 2 & g_1(2) \cdot f_2(5) = (1 - 0.5^2) \cdot 0.72576 = \boxed{0.54432} \\ 3 & g_1(3) \cdot f_2(4) = (1 - 0.5^3) \cdot 0.6048 = 0.5292 \\ 4 & g_1(4) \cdot f_2(3) = (1 - 0.5^4) \cdot 0.432 = 0.405 \end{array}$$

Занесём все данные в таблицу.

| $p$ | $(f_1, q_1)$ | $(f_2, q_2)$ | $(f_3, q_3)$ | $(f_4, q_4)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $(0.8, 1)$ |
| 2 | $\times$ | $\times$ | $(0.72, 1)$ | $(0.96, 2)$ |
| 3 | $\times$ | $(0.432, 1)$ | $(0.864, 1)$ | $(0.992, 3)$ |
| 4 | $\times$ | $(0.6048, 2)$ | $(0.9504, 2)$ | $(0.9984, 4)$ |
| 5 | $\times$ | $(0.72576, 2)$ | $(0.98208, 2)$ | $\times$ |
| 6 | $\times$ | $(0.808704, 3)$ | $\times$ | $\times$ |
| 7 | $(0.54432, 2)$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ |

### Поиск оптимальной стратегии

Заметим, что наше начальное состояние $p_0 = 7$, поскольку в самом начале было 7 ракет

$$\begin{aligned} p_1^* &= p_0 = 7, & q_1^* &= 2, \\ p_2^* &= p_1^* - q_1^* = 5, & q_2^* &= 2, \\ p_3^* &= p_2^* - q_2^* = 3, & q_3^* &= 1, \\ p_4^* &= p_3^* - q_3^* = 2, & q_4^* &= 2. \end{aligned}$$

Итоговая стратегия — это $q^* = \{2, 2, 1, 2\}$, т.е. в первую, вторую, четвертую цель запускаем по 2 ракеты, в третью одну. При данной стратегии вероятность поражения совокупности целей составит $f_1(7) = 0.54432$.

При заполнении таблицы для удобства можно было округлять значения $f_n(p)$ до второго знака после запятой.