

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Береснев Владимир Леонидович

ФИТ НГУ

9 сентября 2025 г.

Оглавление

1	Введение	2
1.1	Построение математических моделей	2
2	Оптимизационные (экстремальные) задачи	5
2.1	Алгоритмы	6
2.2	Свойства оптимизационных задач	7
3	Использование булевых переменных	11
3.1	Импликация для скаляров	11
3.2	Импликация для векторов	11
3.3	Альтернативные переменные	13
3.4	Обработка нелинейностей	14
3.5	Нахождение минимума	14

Глава 1

Введение

Определение

Организованные системы — системы, в которых решения принимаются «сознательно». Примеры таких систем: люди, промышленные предприятия, магазины.

Примеры задач:

- Где построить магазин, чтобы получать наибольшую прибыль?
- Сколько производить деталей на заводе, чтобы отношение между доходом и выручкой было наибольшим?

Примерно до второй мировой войны все сложные решения принимались лишь на основе опыта и здравого смысла. Однако позже появились сложные системы, в которых опыта и здравого смысла оказалось недостаточно.

Тогда же появилась **идея** рассматривать числовые характеристики систем для принятия решения, при этом должны использоваться *математические модели* — упрощённые, но адекватные описания реальной жизни.

1.1 Построение математических моделей

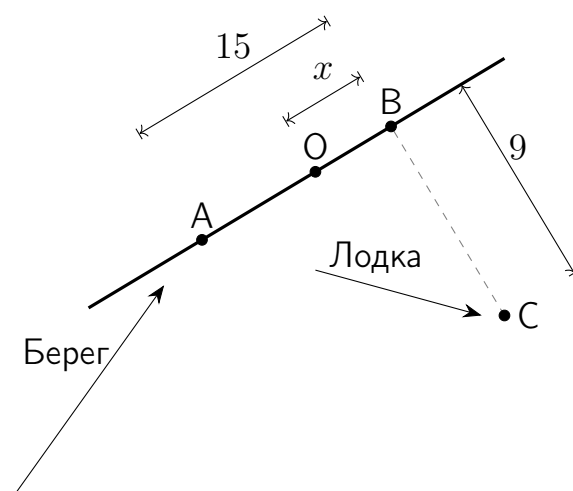
Математические модели строятся на основании *исходных данных* — конкретных проблем в конкретных жизненных ситуациях.

Примерный алгоритм построения математических моделей

1. Нужно понять, *что будем оптимизировать?* По каким критериям будет оценивать решения? Например, если нас спрашивают, где построить магазин, то нам

2. Нужно понять, *какие характеристики существенно влияют на оптимизируемую характеристику?* Например, если наша оптимизируемая характеристика — это прибыль предприятия, то нужно определить, из чего складываются выручка и затраты.
3. *Формулировка задачи* с точным указанием всех характеристик. Каждая из характеристик должна относиться либо к *переменным*, либо к *параметрам*. Первые могут меняться (обозначаются они через x, y, z, \dots), а вторые — это константы (обозначаются они через a, b, c, \dots). Например, переменные — это выручка и затраты предприятия, а параметры — это площадь помещения, количество станков, количество работников.
4. Выбор всех обозначений и математическая запись с учётом ограничений и требований для переменных.
5. Понимание, что изначальная проблема состоит в другом, не учтены такие-то параметры, значит нужно вернуться к самому началу...

Ваш друг плывёт на лодке, ему нужно попасть в определённую точку на берегу, и он спрашивает вас, куда ему нужно причалить.



- C — текущее местоположение лодки;
- A — точка, в которую нужно попасть;
- B — ближайшая к лодке точка берега;
- O — точка причаливания;

- $AB = 15$ км;
- $BC = 9$ км (расстояние от лодки до берега);
- $v_{\text{по суше}} = 5$ км/ч;
- $v_{\text{лодки}} = 4$ км/ч;
- $OB = x$;
- течения воды нет, то есть скорость течения равна нулю;
- цвет лодки не существен.

Будем оптимизировать время t

$$t = \underbrace{\frac{OC}{v_{\text{по воде}}}}_{\text{движение по воде}} + \underbrace{\frac{OA}{v_{\text{по суше}}}}_{\text{движение по суше}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + 81}}{4} + \frac{15 - x}{5} \rightarrow \min_x$$

Установим **ограничение**

$$0 \leq x \leq 15,$$

потому что иначе решение будет точно неоптимальным.

Решим задачу, найдя нули производной

$$\frac{dt}{dx} = \frac{2x}{8\sqrt{x^2 + 81}} - \frac{1}{5} = 0,$$

$$\frac{x}{4\sqrt{x^2 + 81}} = \frac{1}{5},$$

$$\frac{x^2}{16(x^2 + 81)} = \frac{1}{25},$$

$$25x^2 = 16x^2 + 16 \cdot 81,$$

$$9x^2 = 16 \cdot 81,$$

$$x^2 = 16 \cdot 9,$$

$$x_1 = -12, \quad x_2 = 12.$$

Решение $x_1 = -12$ не подходит ввиду ограничения выше, а вот $x = 12$ является ответом (упражнение).

Глава 2

Оптимизационные (экстремальные) задачи

Определение (экстремальная задача)

Экстремальная задача формулируется следующим образом

1. Есть функция $f(x)$, значение которой нужно оптимизировать;
2. Есть набор ограничений $g_1(x) \leq b_1, g_2(x) \leq b_2, \dots$;
3. $x \in X$, X — множество всех решений,
при этом нужно найти

$$\min_{x \in X} f(x) \quad \text{или} \quad \max_{x \in X} f(x).$$

Определение

Допустимые решения — множество всех значений $x \in X$, которые удовлетворяют всем ограничения $\{g_i\}$.

Определение

Допустимое решение x^* называется *оптимальным решением задачи*, если

$$\forall x \in X \quad f(x^*) \geq f(x).$$

или то же самое

$$f(x^*) = \max_{x \in X} f(x).$$

Замечание

Ограничения $\{g_i\}$ могут быть какими угодно.

Пример

Пусть наши исходные данные это

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \rightarrow \max_x,$$

$$g(x) = ax_1 + bx_2 \leq d,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Нужно найти x_1 и x_2 .

Определение

Будем говорить, что есть \mathcal{P} — *общая задача*, а $p \in \mathcal{P}$ — конкретная задача, в которой c_1, c_2, a, b, d — это конкретные числа. То есть *общая задача* — это множество конкретных задач.

Определение

Длина входа задачи — это количество ячеек в памяти, которое занимает задача с допущением, что каждое число занимает в памяти ровно одну ячейку. Будем обозначать это $|p|$.

2.1 Алгоритмы

Определение

Элементарные операции — арифметические операции и операции сравнения.

Определение

Трудоёмкость алгоритма A решения задачи $p \in \mathcal{P}$ — это количество элементарных операций, используемых в этом алгоритме. Будем обозначать это $T_A(p)$.

Замечание

Чем больше $|p|$, тем больше $T_A(p)$, поэтому будем оценивать трудоёмкость так

$$T_A(p) \leq f_A(|p|).$$

Определение

Если $f_A(|p|) = C \cdot |p|^k$, то такой алгоритм будем называть «хорошим» (*полиномиальным*).

Примерами задач, для которых существуют «хорошие» алгоритмы, являются математические задачи, в которых x — множество векторов (линейное и нелинейное программирование), и задачи комбинаторики (например, перестановки).

Определение (задача линейного программирования)

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max_{(x_j)}$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = 1 \dots m,$$

$$x_j \in \{0, 1, 2, \dots\} \text{ или то же самое } x_j \geq 0, \quad j = 1 \dots n.$$

Распространённый частный случай: $x_j \in \{0, 1\}$.

2.2 Свойства оптимизационных задач

Утверждение 1

$$\max_x f(x) = \max_x \left((-1) \cdot (-f(x)) \right) = \underbrace{-\min_x (-f(x))}_{\text{новая задача}}.$$

Утверждение 2 (оценка сверху, релаксированные задачи)

Если $X \subseteq X'$, то

$$\max_{x \in X} f(x) \leq \max_{x \in X'} f(x).$$

Определение

Пусть есть две общие задачи: $(\mathcal{P}) \max_{x \in X} f(x)$ и $(\mathcal{Q}) \max_{y \in Y} g(y)$. Будем говорить, что задача \mathcal{P} сводится к задаче \mathcal{Q} , если

$$\forall p \in \mathcal{P} \quad \forall q \in \mathcal{Q}$$

1. существует полиномиальный алгоритм A_1 , который переводит входные данные задачи p во входные данные задачи q ;

$$p \xrightarrow{A_1} q$$

2. существует полиномиальный алгоритм A_2 , с помощью которого можно из оптимального решения y^0 задачи q построить оптимальное решение x^* задачи p .

$$x^* \xleftarrow{A_2} y^0$$

Остаётся вопрос: как понять, что построенное решение x^* — оптимальное?

Замечание

Везде далее всегда будем оптимизировать именно \max , а не \min .

Утверждение 3 (сведение к другой задаче)

Пусть есть 2 задачи: \mathcal{P} и \mathcal{Q} , при этом

1. x^0 — допустимое решение задачи \mathcal{P} ,
2. y^* — оптимальное решение задачи \mathcal{Q} ,
3. $f(x^0) \geq g(y^*)$,
4. $\forall x \in X \exists y \in Y \quad f(x) \leq g(y)$,

тогда x^0 — оптимальное решение задачи \mathcal{P} .

Доказательство

Пусть задача \mathcal{P} имеет оптимальное решение x^* . По четвёртому пункту для x^* существует некоторый y^0 такой, что

$$f(x^*) \leq g(y^0). \quad (*)$$

По условию y^* является оптимальным решением задачи \mathcal{Q} , значит верно следующее

$$g(y^*) \geq g(y^0). \quad (**)$$

Составим цепочку неравенств

$$f(x^0) \stackrel{(3)}{\geq} g(y^*) \stackrel{(**)}{\geq} g(y^0) \stackrel{(*)}{\geq} f(x^*).$$

Таким образом имеем неравенство

$$f(x^0) \geq f(x^*)$$

хотя x^* — оптимальное решение задачи \mathcal{P} . Значит $x^0 = x^*$, то есть x^0 является оптимальным.

Пример

(\mathcal{P})

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max_{(x_j)},$$

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b, \quad (1)$$

$$x_1 + x_2 = d, \quad (2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1 \dots n. \quad (3)$$

Заметим, что x_1 можно выразить через x_2 (и наоборот). Рассмотрим другую задачу

(Q)

$$c_1(d - y_2) + \sum_{j=2}^n c_j y_j \rightarrow \max_{(y_j)},$$

$$a_1(d - y_2) + \sum_{j=2}^n a_j y_j \leq b,$$

$$y_j \geq 0, \quad j = 1 \dots n,$$

$$y_2 \leq d.$$

Покажем, что задача \mathcal{P} сводится к задаче \mathcal{Q} .

Доказательство

Пусть $y^* = (y_1^* \dots y_n^*)$ — это оптимальное решение задачи \mathcal{Q} . Будем строить решение x^0 задачи \mathcal{P} следующим образом

$$x_j^0 = \begin{cases} d - y_2, & j = 1 \\ y_j, & j > 1 \end{cases}$$

то есть $x^0 = (d - y_2 \quad y_2 \quad y_3 \quad \dots \quad y_n)$.

1. Покажем, что x^0 — допустимое решение задачи \mathcal{P} . Для этого нужно показать, что оно удовлетворяет всем ограничениям. Заметим, что без условия $y_2 \leq d$ значение x_1 может быть меньше нуля, а значит решение x^0 точно было бы не допустимым (ограничение 3).

(a) Проверим ограничение 2

$$x_1^0 + x_2^0 = d - y_2^* + y_2^* = d.$$

(b) Проверим ограничение 1

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_j x_j^0 &= a_1 x_1^0 + a_2 x_2^0 + \dots + a_n x_n^0 \\ &= a_1(d - y_2^*) + a_2 y_2^* + \dots + a_n y_n^* \\ &= a_1(d - y_2^*) + \sum_{j=2}^n a_j y_j^* \leq b. \end{aligned}$$

Значит x^0 удовлетворяет всем ограничениям, а поэтому x^0 — допустимое решение.

2. Мы показали, что x^0 — допустимое решение задачи \mathcal{P} . Осталось показать, что оно оптимальное. Для этого будет использовать утверждение 3 (сведение к другой задаче).

(а) Выполнимость условия $f(x^0) \geq g(y^*)$ следует из того, что при подстановке, использованной при проверке ограничения 1, получится равенство

$$f(x^0) = g(y^*).$$

(b) Выполнимость условия

$$\forall x \in X \exists y \in Y \quad f(x) \leq g(y)$$

следует из того, что по любому $x = (x_j)$ можно построить $y = (y_j)$ следующим образом

$$y_j = \begin{cases} d - x_2, & j = 1 \\ x_j, & j > 1 \end{cases}$$

И вновь если всё аккуратно подставить, то получится равенство

$$f(x) = g(y).$$

Таким образом мы доказали, что соблюдаются все условия для применения утверждения 3 (сведение к другой задаче). Значит наша исходная задача $\mathcal{P} \mapsto \mathcal{Q}$.

Мы взяли задачу с n переменными и перешли от неё к задаче с $n - 1$ переменными. Разве не круто?!

Глава 3

Использование булевых переменных

3.1 Импликация для скаляров

Пусть есть переменные x и y . Хочется с помощью алгебраической записи записать условие: «если $x = 0$, то $y = 0$ ».

Ответ: $x \geq y$.

Пусть теперь хочется: «если $x = 0$, то $y = 1$ ». Ответ: $x \geq 1 - y$.

Пусть теперь хочется: «если $x = 1$, то $y = 0$ ». Ответ: $1 - x \geq y$.

Пусть теперь хочется: «если $x = 1$, то $y = 1$ ». Ответ: $1 - x \geq 1 - y$.

3.2 Импликация для векторов

Пусть теперь x и y — это вектора, то есть $x = (x_i)$, при этом $i \in I$, $y = (y_i)$, $i \in K$.

Предположим, что есть два множества:

$$I^0 \subset I, \quad I^1 \subset I \\ I^0 \cap I^1 = \emptyset$$

И хочется следующее: если x имеет следующий вид:

$$x_i = \begin{cases} 1, & i \in I^1 \\ 0, & i \in I^0 \end{cases}$$

то $y = (0, 0, \dots, 0) = 0$.

Делается это так

$$\forall j \sum_{i \in I^1} (1 - x_i) + \sum_{i \in I^0} x_i \geq y_j$$

Если бы нам хотелось, чтобы y равнялся 1, то справа нужно было бы написать $1 - y$.

Пусть теперь хочется немножко в обратную сторону. Если $x = 0$, то

$$y_i = \begin{cases} 1, & i \in K^1 \\ 0, & i \in K^0 \end{cases}$$

при этом условия на K^0 и K^1 аналогичны условиям на I^0 и I^1 .

Делается это так:

$$\forall j x_j \geq \sum_{i \in K^0} y_i + \sum_{i \in K^1} (1 - y_i)$$

Однако здесь есть нюанс. Нам бы хотелось, чтобы если $x = 0$, то y принимал определённые значения, а вот если $x \neq 0$, то есть $x = 1$, то чтобы y мог принимать любые значения. Однако теоретически справа может стоять довольно большое число (например, если в K^0 содержится много индексов, а у вектора y в соответствующих позициях стоят единицы). Тогда получится неравенство $1 \geq \text{«большое число»}$, то есть неравенство не выполняется. Хотя исходная посылка ложна, а значит y может принимать любые значения.

Чтобы этого не было необходимо модифицировать неравенство, добавление коэффициента слева:

$$\forall j x_j \cdot |K^0 \cup K^1| \geq \sum_{i \in K^0} y_i + \sum_{i \in K^1} (1 - y_i)$$

где $|K^0 \cup K^1|$ — мощность объединения множеств K^0 и K^1 .

Теперь рассмотрим самый общий случай:

$$x_i = \begin{cases} 1, & i \in I^1 \\ 0, & i \in I^0 \end{cases} \Rightarrow y_i = \begin{cases} 1, & i \in K^1 \\ 0, & i \in K^0 \end{cases}$$

Чтобы этого не было необходимо модифицировать неравенство, добавление коэффициента слева:

$$|K^0 \cup K^1| \cdot \left(\sum_{i \in I^0} x_i + \sum_{i \in I^1} (1 - x_i) \right) \geq \sum_{i \in K^0} y_i + \sum_{i \in K^1} (1 - y_i)$$

Коэффициент слева был добавлен по аналогии с предыдущим пунктом.

3.3 Альтернативные переменные

Пусть в нашей задаче сформулированы 2 ограничения:

$$f_1(x) \geq b_1,$$

$$f_2(x) \geq b_2,$$

однако нам достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из них. Тогда эти условия называются *альтернативными*. Как это можно записать?

Предположим, что мы реализуем алгоритм, который решает нашу проблему, при этом он находит решения, которые удовлетворяют всем условиям.

Введём переменную $y \in \{0, 1\}$, значение которой будет следующим: если $y = 1$, то выполнено первое условие, а если $y = 0$, то — второе. В идеальном случае наш алгоритм сам выберет значение нашей переменной y (0 или 1), однако какое бы значение он не выбрал, то итоговое решение будет удовлетворять или первому ограничению, или второму.

Как теперь записать это алгебраически? Записывать нужно так

$$f_1(x) \geq b_1 - W(1 - y),$$

где W — это какая-то большая величина. Какое конкретно значение эта величина принимает, зависит от конкретной задачи. Где-то можно положить $W = 10^6$, где-то $W = 50$. Однако полностью избавиться от W и записать условие без него не получится.

Второе ограничение записывается похожим образом

$$f_2(x) \geq b_2 - Wy$$

Если $y = 1$, то имеем

$$f_1(x) \geq b_1,$$

$$f_2(x) \geq b_2 - W \approx -\infty$$

Первое неравенство верно, как и второе. Однако важно, что выполнено первое.

Если $y = 0$, то имеем

$$f_1(x) \geq b_1 - W \approx -\infty,$$

$$f_2(x) \geq b_2$$

Аналогично, оба неравенства выполнены, но важно, что второе неравенство выполнено безоговорочно.

Другой способ

Можно было ввести две переменные $y_1, y_2 \in \{0, 1\}$ и записать следующим образом:

$$f_1(x) \geq b_1 - W(1 - y_1), f_2(x) \geq b_2 - W(1 - y_2), y_1 + y_2 = 1.$$

Это почти то же самое. Условие на сумму $y_1 + y_2$ нужно, чтобы либо $y_1 = 0$, а $y_2 = 1$, либо $y_1 = 1$, а $y_2 = 0$.

Другие ограничения

Предположим теперь у нас ограничения с другим знаком неравенства

$$f_1(x) \leq b_1,$$

$$f_2(x) \leq b_2,$$

Как теперь записать то же самое условие алгебраически?

$$f_1(x) \leq b_1 + W(1 + y_1),$$

$$f_2(x) \leq b_2 + W y_2.$$

Аналогично можно было бы записать через y .

3.4 Обработка нелинейностей

Пусть мы встретили какую-то нелинейность $x \cdot y$. Введём новую переменную

$$z = x \cdot y.$$

Однако просто заменить в выражении $x \cdot$ на z нельзя, поскольку нужно изменить ограничения. Нам нужно ввести ограничение на новую переменную $z = 1 \iff x = 1$ и $y = 1$.

Это можно раскрыть через две импликации: 1) если $z = 1$, то $x = 1$ и $y = 1$.
2) Если $x = 1$ и $y = 1$, то $z = 1$.

Распишем каждую импликацию

3.5 Нахождение минимума

Пусть в нашем выражении где-то встретилось $u = \min\{x_1, x_2\}$.