Математические модели и методы принятия оптимальных решений

Береснев Владимир Леонидович

ФИТ НГУ

8 сентября 2025 г.

Оглавление

Глава 1

Введение

Определение

Организованные системы — системы, в которых решения принимаются «сознательно». Примеры таких систем: люди, промышленные предприятия, магазины.

Примеры задач:

- Где построить магазин, чтобы получать наибольшую прибыль?
- Сколько производить деталей на заводе, чтобы отношение между доходом и выручкой было наибольшим?

Примерно до второй мировой войны все сложные решения принимались лишь на основе опыта и здравого смысла. Однако позже появились сложные системы, в которых опыта и здравого смысла оказалось недостаточно.
Тогда же появилась **идея** рассматривать числовые характеристики систем для принятия решения, при этом должны использоваться *математические модели* — упрощённые, но адекватные описания реальной жизни.

1.1 Построение математических моделей

Математические модели строятся на основании *исходных данных* — конкретных проблем в конкретных жизненных ситуациях.

Примерный алгоритм построения математических моделей

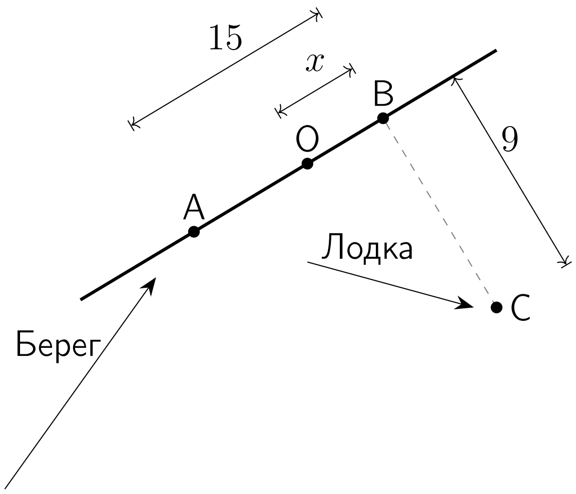
1. Нужно понять, *что будем оптимизировать?* По каким критериям будет оценивать решения? Например, если нас спрашивают, где построить магазин, то нам

нужно понять, как выбрать для этого место. Нужно, чтобы была максимальная прибыль или чтобы наибольшая удалённость от конкурентов? Если мы закупаем детали для предприятия, то нужно узнать, хочется ли нам наибольшую прибыль или же минимальные издержки. А может нам важно количество произведённой продукции?

2. Нужно понять, *какие характеристики существенно влияют на оптимизируемую характеристику*? Например, если наша оптимизируемая характеристика — это прибыль предприятия, то нужно определить, из чего складываются выручка и затраты.
3. *Формулировка задачи* с точным указанием всех характеристик. Каждая из характеристик должна относиться либо к *переменным*, либо к *параметрам*. Первые могут меняться (обозначаются они через $x, y, z, \dots$), а вторые — это константы (обозначаются они через $a, b, c, \dots$). Например, переменные — это выручка и затраты предприятия, а параметры — это площадь помещения, количество станков, количество работников.
4. Выбор всех обозначений и математическая запись с учётом ограничений и требований для переменных.
5. Понимание, что изначальная проблема состоит в другом, не учтены такие-то параметры, значит нужно вернуться к самому началу...

Пример

Ваш друг плывёт на лодке, ему нужно попасть в определённую точку на берегу, и он спрашивает вас, куда ему нужно причалить.



Характеристики рассматриваемой системы

- C — текущее местоположение лодки;
- A — точка, в которую нужно попасть;
- B — ближайшая к лодке точка берега;
- O — точка причаливания;

- $AB = 15$ км;
- $BC = 9$ км (расстояние от лодки до берега);
- $v_{\text{по суше}} = 5$ км/ч;
- $v_{\text{лодки}} = 4$ км/ч;
- $OB = x$;
- течения воды нет, то есть скорость течения равна нулю;
- цвет лодки не существенен.

Будем оптимизировать время t:

$$t = \underbrace{\frac{OC}{v_{\text{по воде}}}}_{\text{движение по воде}} + \underbrace{\frac{OA}{v_{\text{по суше}}}}_{\text{движение по суше}}$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{x^2+81}}{4} + \frac{15-x}{5} \to \min_x}$$

Установим **ограничение**:

$$0 \le x \le 15,$$

потому что иначе решение будет точно не оптимальным.

Решим задачу, найдя нули производной:

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{2x}{8\sqrt{x^2+81}} - \frac{1}{5} = 0,$$

$$\frac{x}{4\sqrt{x^2+81}} = \frac{1}{5},$$

$$\frac{x^2}{16(x^2+81)} = \frac{1}{25},$$

$$25x^2 = 16x^2 + 16 \cdot 81,$$

$$9x^2 = 16 \cdot 81,$$

$$x^2 = 16 \cdot 9,$$

$$x_1 = -12, \qquad x_2 = 12.$$

Решение $x_1 = -12$ не подходит ввиду ограничения выше, а вот $\boxed{x = 12}$ является ответом (упражнение).

Глава 2

Оптимизационные (экстремальные) задачи

Определение (экстремальная задача)

Экстремальная задача формулируется следующим образом:

1. Есть функция $f(x)$, значение которой нужно оптимизировать;
2. Есть набор ограничений $g_1(x) \le b_1, g_2(x) \le b_2, \dots;$
3. $x \in X$, X — *множество всех решений*,

при этом *нужно найти*

$$\min_{x \in X} f(x) \quad \text{или} \quad \max_{x \in X} f(x).$$

Определение

Допустимые решения — множество всех значений $x \in X$, которые удовлетворяют всем ограничения $\{g_i\}$.

Определение

Допустимое решение x^* называется *решением задачи*, если

$$\forall x \in X \qquad f(x^*) \ge f(x).$$

Определение (другая формулировка)

Допустимое решение x^* называется *решением задачи*, если

$$f(x^*) = \max_{x \in X} f(x).$$

Замечание

Ограничения $\{g_i\}$ могут быть какими угодно.

Пример

Пусть наши исходные данные это

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max_x,$$

$$g(x) = ax_1 + bx_2 \leq d,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Нужно найти x_1 и x_2.

Определение

Будем говорить, что есть $\mathcal{P}$ — *общая задача*, а $p \in \mathcal{P}$ — конкретная задача, в которой c_1, c_2, a, b, d — это конкретные числа. То есть *общая задача* — это множество конкретных задач.

Определение

Длина входа задачи — это количество ячеек в памяти, которое занимает задача с допущением, что каждое число занимает в памяти ровно одну ячейку. Будем обозначать это $|p|$.

2.1 Алгоритмы

Определение

Элементарные операции — арифметические операции и операции сравнения.

Определение

Трудоёмкость алгоритма A решения задачи $p \in P$ — это количество элементарных операций, используемых в этом алгоритме. Будем обозначать это $T_A(p)$.

Замечание

Чем больше $|p|$, тем больше $T_A(p)$, поэтому будем оценивать трудоёмкость так:

$$T_A(p) \leq f_A\big(|p|\big).$$

Определение

Если $f_A\big(|p|\big) = C \cdot |p|^k$, то такой алгоритм будем называть *«хорошим»* (*полиномиальным*).

Примерами задач, для которых существуют «хорошие» алгоритмы, являются математические задачи (линейное и нелинейное программирование), в которых x — множество векторов), и задачи комбинаторики (например, перестановки).

Определение (Линейное программирование)

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max_{(x_j)},$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1 \dots m,$$

$$x_j \in \{0, 1, 2, \dots\} \text{ или то же самое } x_j \ge 0, \quad j = 1 \dots n.$$

Распространённый частный случай: $x_j \in \{0, 1\}$.

2.2 Свойства оптимизационных задач

Утверждение 1

$$\max_x f(x) = \max_x \Big(\big(-1 \big) \cdot \big(-f(x) \big) \Big) = \underbrace{- \min_x \big(-f(x) \big)}_{\text{новая задача}}.$$

Утверждение 2 (оценка сверху, релаксированные задачи)

Если $X \subseteq X'$, то

$$\max_{x \in X} f(x) \le \max_{x \in X'} f(x).$$

Определение

Пусть есть две задачи $(\mathcal{P}) \max_{x \in X} f(x)$ и $(\mathcal{Q}) \max_{y \in Y} g(y)$. Будем говорить, что задача $\mathcal{P}$ *сводится к задаче* $\mathcal{Q}$, если из оптимального решения y^* задачи $\mathcal{Q}$ можно построить оптимальное решение x^* задачи $\mathcal{P}$ с помощью эффективного алгоритма. Будем обозначать это $\mathcal{P} \longmapsto \mathcal{Q}$.

Остаётся вопрос: как понять, что построенное решение x^* — оптимальное?

Замечание

Везде далее всегда будем оптимизировать именно $\max$, а не $\min$.

Утверждение 3 (сведение к другой задаче)

Пусть есть 2 задачи: $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$, при этом

1. x^0 — допустимое решение задачи $\mathcal{P}$,
2. y^* — оптимальное решение задачи $\mathcal{Q}$,
3. $f(x^0) \geq g(y^*)$,
4. $\forall x \in X \ \exists y \in Y : \qquad f(x) \leq g(y)$,

тогда x^0 — оптимальное решение задачи $\mathcal{P}$.

Доказательство

Пусть задача $\mathcal{P}$ имеет оптимальное решение x^*. По четвёртому пункту для x^* существует некоторый y^0 такой, что

$$f(x^*) \leq g(y^0). \tag{*}$$

Поскольку y^* является оптимальным решением задачи $\mathcal{Q}$, то верно следующее

$$g(y^*) \geq g(y^0). \tag{**}$$

Составим цепочку неравенств:

$$f(x^0) \overset{(3)}{\geq} g(y^*) \overset{(**)}{\geq} g(y^0) \overset{(*)}{\geq} f(x^*).$$

Таким образом имеем неравенство

$$f(x^0) \geq f(x^*)$$

хотя x^* — оптимальное решение задачи $\mathcal{P}$. Значит $x^0 = x^*$, то есть x^0 является оптимальным.

Пример

$(\mathcal{P})$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max_{(x_j)},$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b,$$

$$x_1 + x_2 = d,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1 \ldots n.$$

Заметим, что x_1 можно выразить через x_2 (и наоборот). Рассмотрим другую задачу:

($\mathcal{Q}$)

$$c_1(d - y_2) + \sum_{j=2}^{n} c_j y_j \to \max_{(y_j)},$$

.

$$a_1(d - y_2) + \sum_{j=2}^{n} a_j y_j \leq b,$$

.

$$\text{«какие-то ограничения на } y_j\text{»}, \quad j = 2 \ldots n.$$

Покажем, что задача $\mathcal{P}$ сводится к задаче $\mathcal{Q}$.

Доказательство

Пусть $y^* = (y_1^*, \ldots y_n^*) = (y_j^*)$ — это оптимальное решение задачи $\mathcal{Q}$. Будем строить вектор x^0 (предполагаемое оптимальное решение задачи $\mathcal{P}$) следующим образом:

$$x_1^0 = d - y_2,$$

$$x_j^0 = y_j, \quad j = 2 \ldots n,$$