Математические модели и методы принятия оптимальных решений

Береснев Владимир Леонидович

ФИТ НГУ

10 сентября 2025 г.

Оглавление

Глава 1

Введение

Определение

Организованные системы — системы, в которых решения принимаются «сознательно». Примеры таких систем: люди, промышленные предприятия, магазины.

Примеры задач:

- Где построить магазин, чтобы получать наибольшую прибыль?
- Сколько производить деталей на заводе, чтобы отношение между доходом и выручкой было наибольшим?

Примерно до второй мировой войны все сложные решения принимались лишь на основе опыта и здравого смысла. Однако позже появились сложные системы, в которых опыта и здравого смысла оказалось недостаточно.
Тогда же появилась **идея** рассматривать числовые характеристики систем для принятия решения, при этом должны использоваться *математические модели* — упрощённые, но адекватные описания реальной жизни.

1.1 Построение математических моделей

Математические модели строятся на основании *исходных данных* — конкретных проблем в конкретных жизненных ситуациях.

Примерный алгоритм построения математических моделей

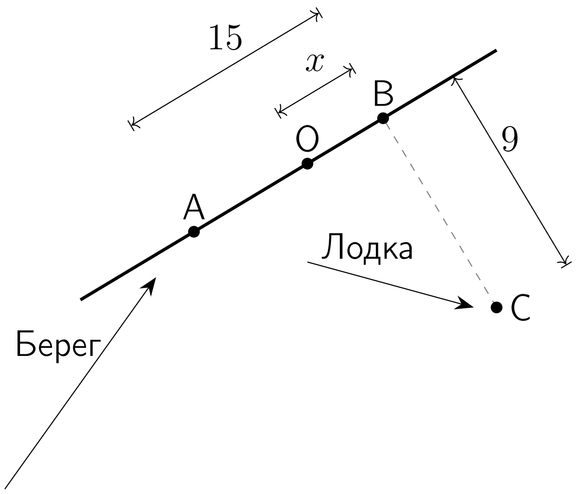
1. Нужно понять, *что будем оптимизировать?* По каким критериям будет оценивать решения? Например, если нас спрашивают, где построить магазин, то нам

нужно понять, как выбрать для этого место. Нужно, чтобы была максимальная прибыль или чтобы наибольшая удалённость от конкурентов? Если мы закупаем детали для предприятия, то нужно узнать, хочется ли нам наибольшую прибыль или же минимальные издержки. А может нам важно количество произведённой продукции?

2. Нужно понять, *какие характеристики существенно влияют на оптимизируемую характеристику*? Например, если наша оптимизируемая характеристика — это прибыль предприятия, то нужно определить, из чего складываются выручка и затраты.
3. *Формулировка задачи* с точным указанием всех характеристик. Каждая из характеристик должна относиться либо к *переменным*, либо к *параметрам*. Первые могут меняться (обозначаются они через $x, y, z, \ldots$), а вторые — это константы (обозначаются они через $a, b, c, \ldots$). Например, переменные — это выручка и затраты предприятия, а параметры — это площадь помещения, количество станков, количество работников.
4. Выбор всех обозначений и математическая запись с учётом ограничений и требований для переменных.
5. Понимание, что изначальная проблема состоит в другом, не учтены такие-то параметры, значит нужно вернуться к самому началу...

Пример

Ваш друг плывёт на лодке, ему нужно попасть в определённую точку на берегу, и он спрашивает вас, куда ему нужно причалить.



Характеристики рассматриваемой системы

- C — текущее местоположение лодки;
- A — точка, в которую нужно попасть;
- B — ближайшая к лодке точка берега;
- O — точка причаливания;

- $AB = 15$ км;
- $BC = 9$ км (расстояние от лодки до берега);
- $v_{\text{по суше}} = 5$ км/ч;
- $v_{\text{лодки}} = 4$ км/ч;
- $OB = x$;
- течения воды нет, то есть скорость течения равна нулю;
- цвет лодки не существенен.

Будем оптимизировать время t

$$t = \underbrace{\frac{OC}{v_{\text{по воде}}}}_{\text{движение по воде}} + \underbrace{\frac{OA}{v_{\text{по суше}}}}_{\text{движение по суше}}$$
$$= \boxed{\frac{\sqrt{x^2+81}}{4} + \frac{15-x}{5} \to \min_x}$$

Установим **ограничение**

$$0 \leq x \leq 15,$$

потому что иначе решение будет точно неоптимальным.

Решим задачу, найдя нули производной

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{2x}{8\sqrt{x^2+81}} - \frac{1}{5} = 0,$$

$$\frac{x}{4\sqrt{x^2+81}} = \frac{1}{5},$$
$$\frac{x^2}{16(x^2+81)} = \frac{1}{25},$$
$$25x^2 = 16x^2 + 16 \cdot 81,$$

$$9x^2 = 16 \cdot 81,$$

$$x^2 = 16 \cdot 9,$$

$$x_1 = -12, \qquad x_2 = 12.$$

Решение $x_1 = -12$ не подходит ввиду ограничения выше, а вот $\boxed{x = 12}$ является ответом (упражнение).

Глава 2

Оптимизационные (экстремальные) задачи

Определение (экстремальная задача)

Экстремальная задача формулируется следующим образом

1. Есть функция $f(x)$, значение которой нужно оптимизировать;
2. Есть набор ограничений $g_1(x) \leq b_1, g_2(x) \leq b_2, \ldots$;
3. $x \in X$, X — *множество всех решений*,

при этом *нужно найти*

$$\min_{x \in X} f(x) \quad \text{или} \quad \max_{x \in X} f(x).$$

Определение

Допустимые решения — множество всех значений $x \in X$, которые удовлетворяют всем ограничения $\{g_i\}$.

Определение

Допустимое решение x^* называется *оптимальным решением задачи*, если

$$\forall x \in X \qquad f(x^*) \geq f(x).$$

или то же самое

$$f(x^*) = \max_{x \in X} f(x).$$

Замечание

Ограничения $\{g_i\}$ могут быть какими угодно.

Пример

Пусть наши исходные данные это

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max_x,$$

$$g(x) = ax_1 + bx_2 \le d,$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Нужно найти x_1 и x_2.

Определение

Будем говорить, что есть $\mathcal{P}$ — *общая задача*, а $p \in \mathcal{P}$ — конкретная задача, в которой c_1, c_2, a, b, d — это конкретные числа. То есть *общая задача* — это множество конкретных задач.

Определение

Длина входа задачи — это количество ячеек в памяти, которое занимает задача с допущением, что каждое число занимает в памяти ровно одну ячейку. Будем обозначать это $|p|$.

2.1 Алгоритмы

Определение

Элементарные операции — арифметические операции и операции сравнения.

Определение

Трудоёмкость алгоритма A решения задачи $p \in \mathcal{P}$ — это количество элементарных операций, используемых в этом алгоритме. Будем обозначать это $T_A(p)$.

Замечание

Чем больше $|p|$, тем больше $T_A(p)$, поэтому будем оценивать трудоёмкость так

$$T_A(p) \le f_A\big(|p|\big).$$

Определение

Если $f_A\big(|p|\big) = C \cdot |p|^k$, то такой алгоритм будем называть *«хорошим»* (*полиномиальным*).

Примерами задач, для которых существуют «хорошие» алгоритмы, являются математические задачи, в которых x — множество векторов (линейное и нелинейное программирование), и задачи комбинаторики (например, перестановки).

Определение (задача линейного программирования)

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max_{(x_j)},$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, \quad i = 1 \dots m,$$

$$x_j \in \{0,1,2,\dots\} \text{ или то же самое } x_j \ge 0, \quad j = 1 \dots n.$$

Распространённый частный случай: $x_j \in \{0,1\}$.

2.2 Свойства оптимизационных задач

Утверждение 1

$$\max_x f(x) = \max_x \Big(\big(-1 \big) \cdot \big(-f(x) \big) \Big) = \underbrace{- \min_x \big(-f(x) \big)}_{\text{новая задача}}.$$

Утверждение 2 (оценка сверху, релаксированные задачи)

Если $X \subseteq X'$, то

$$\max_{x \in X} f(x) \le \max_{x \in X'} f(x).$$

Определение

Пусть есть две общие задачи: $(\mathcal{P}) \max_{x \in X} f(x)$ и $(\mathcal{Q}) \max_{y \in Y} g(y)$. Будем говорить, что задача $\mathcal{P}$ *сводится к задаче* $\mathcal{Q}$, если

$$\forall p \in \mathcal{P} \quad \forall q \in \mathcal{Q}$$

1. существует полиномиальный алгоритм A_1, который переводит входные данные задачи p во входные данные задачи q;

$$p \qquad \xrightarrow{A_1} \qquad q$$

2. существует полиномиальный алгоритм A_2, с помощью которого можно из оптимального решения y^0 задачи q построить оптимальное решение x^* задачи p.

$$x^* \qquad \xleftarrow{A_2} \qquad y^0$$

Остаётся вопрос: как понять, что построенное решение x^* — оптимальное?

Замечание

Везде далее всегда будем оптимизировать именно $\max$, а не $\min$.

Утверждение 3 (сведение к другой задаче)

Пусть есть 2 задачи: $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$, при этом

1. x^0 — допустимое решение задачи $\mathcal{P}$,
2. y^* — оптимальное решение задачи $\mathcal{Q}$,
3. $f(x^0) \geq g(y^*)$,
4. $\forall x \in X \; \exists y \in Y \quad f(x) \leq g(y)$,

тогда x^0 — оптимальное решение задачи $\mathcal{P}$.

Доказательство

Пусть задача $\mathcal{P}$ имеет оптимальное решение x^*. По четвёртому пункту для x^* существует некоторый y^0 такой, что

$$f(x^*) \leq g(y^0). \tag{*}$$

По условию y^* является оптимальным решением задачи $\mathcal{Q}$, значит верно следующее

$$g(y^*) \geq g(y^0). \tag{**}$$

Составим цепочку неравенств

$$f(x^0) \overset{(3)}{\geq} g(y^*) \overset{(**)}{\geq} g(y^0) \overset{(*)}{\geq} f(x^*).$$

Таким образом имеем неравенство

$$f(x^0) \geq f(x^*)$$

хотя x^* — оптимальное решение задачи $\mathcal{P}$. Значит $x^0 = x^*$, то есть x^0 является оптимальным.

Пример

$(\mathcal{P})$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max_{(x_j)},$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b, \tag{1}$$

$$x_1 + x_2 = d, \tag{2}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1 \dots n. \tag{3}$$

Заметим, что x_1 можно выразить через x_2 (и наоборот). Рассмотрим другую задачу

$(\mathcal{Q})$

$$c_1(d - y_2) + \sum_{j=2}^{n} c_j y_j \to \max_{(y_j)},$$

.

$$a_1(d - y_2) + \sum_{j=2}^{n} a_j y_j \le b,$$

.

$$y_j \ge 0, \quad j = 1 \dots n,$$

$$y_2 \le d.$$

Покажем, что задача $\mathcal{P}$ сводится к задаче $\mathcal{Q}$.

Доказательство

Пусть $y^* = \begin{pmatrix} y_1^* & \dots & y_n^* \end{pmatrix}$ — это оптимальное решение задачи $\mathcal{Q}$. Будем строить решение x^0 задачи $\mathcal{P}$ следующим образом

$$x_j^0 = \begin{cases} d - y_2, & j = 1 \\ y_j, & j > 1 \end{cases}$$

то есть $x^0 = \begin{pmatrix} d - y_2 & y_2 & y_3 & \dots & y_n \end{pmatrix}$.

1. Покажем, что x^0 — допустимое решение задачи $\mathcal{P}$. Для этого нужно показать, что оно удовлетворяет всем ограничениям. Заметим, что без условия $y_2 \le d$ значение x_1 может быть меньше нуля, а значит решение x^0 точно было бы не допустимым (ограничение 3).

   (a) Проверим ограничение 2

   $$x_1^0 + x_2^0 = d - y_2^* + y_2^* = d.$$

   (b) Проверим ограничение 1

   $$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j^0 &= a_1 x_1^0 + a_2 x_2^0 + \dots + a_n x_n^0 \\ &= a_1(d - y_2^*) + a_2 y_2^* + \dots + a_n y_n^* \\ &= a_1(d - y_2^*) + \sum_{j=2}^{n} a_j y_j^* \le b. \end{aligned}$$

   Значит x^0 удовлетворяет всем ограничениям, а поэтому x^0 — допустимое решение.

2. Мы показали, что x^0 — допустимое решение задачи $\mathcal{P}$. Осталось показать, что оно оптимальное. Для этого будет использовать утверждение 3 (сведение к другой задаче).

   (a) Выполнимость условия $f(x^0) \geq g(y^*)$ следует из того, что при подстановке, использованной при проверке ограничения 1, получится равенство
   $$f(x^0) = g(y^*).$$

   (b) Выполнимость условия
   $$\forall x \in X \, \exists y \in Y \quad f(x) \leq g(y)$$
   следует из того, что по любому $x = (x_j)$ можно построить $y = (y_j)$ следующим образом
   $$y_j = \begin{cases} d - x_2, & j = 1 \\ x_j, & j > 1 \end{cases}$$
   И вновь если всё аккуратно подставить, то получится равенство
   $$f(x) = g(y).$$

Таким образом мы доказали, что соблюдаются все условия для применения утверждения 3 (сведение к другой задаче). Значит исходная задача $\mathcal{P} \mapsto \mathcal{Q}$.

Мы взяли задачу с n переменными и перешли от неё к задаче с $n-1$ переменными. Разве не круто?!

Глава 3

Использование булевых переменных

3.1 Импликация для скаляров

Пусть есть переменные x и y. Хочется с помощью алгебраической записи записать условие: «если $x = 0$, то $y = 0$».

Ответ: $x \geq y$.

Пусть теперь хочется: «если $x = 0$, то $y = 1$». Ответ: $x \geq 1 - y$.

Пусть теперь хочется: «если $x = 1$, то $y = 0$». Ответ: $1 - x \geq y$.

Пусть теперь хочется: «если $x = 1$, то $y = 1$». Ответ: $1 - x \geq 1 - y$.

3.2 Импликация для векторов

Пусть теперь x и y — это вектора, то есть $x = (x_i)$, при этом $i \in I$, $y = (y_i)$, $i \in K$.

Предположим, что есть два множества:

$$I^0 \subset I, \qquad I^1 \subset I$$

$$I^0 \cap I^1 = \emptyset$$

И хочется следующее: если x имеет следующий вид:

$$x_i = \begin{cases} 1, & i \in I^1 \\ 0, & i \in I^0 \end{cases}$$

то $y = (0, 0, \dots, 0) = 0$.

Делается это так

$$\forall j \sum_{i \in I^1} (1 - x_i) + \sum_{i \in I^0} x_i \geq y_j$$

Если бы нам хотелось, чтобы y равнялся 1, то справа нужно было бы написать $1 - y$.

Пусть теперь хочется немножко в обратную сторону. Если $x = 0$, то

$$y_i = \begin{cases} 1, & i \in K^1 \\ 0, & i \in K^0 \end{cases}$$

при этом условия на K^0 и K^1 аналогичны условиям на I^0 и I^1.

Делается это так:

$$\forall j x_j \geq \sum_{i \in K^0} y_i + \sum_{i \in K^1} (1 - y_i)$$

Однако здесь есть нюанс. Нам бы хотелось, чтобы если $x = 0$, то y принимал определённые значения, а вот если $x \neg 0$, то есть $x = 1$, то чтобы y мог принимать любые значения. Однако теоретически справа может стоять довольно большое число (например, если в K^0 содержится много индексов, а у вектора y в соответствующих позициях стоят единицы). Тогда получится неравенство $1 \geq$ «большое число», то есть неравенство не выполняется. Хоть исходная посылка ложна, а значит y может принимать любые значения.

Чтобы этого не было необходимо модифицировать неравенство, добавление коэффициента слева:

$$\forall j x_j \cdot \left| K^0 \cup K^1 \right| \geq \sum_{i \in K^0} y_i + \sum_{i \in K^1} (1 - y_i)$$

где $\left| K^0 \cup K^1 \right|$ — мощность объединения множеств K^0 и K^1.

Теперь рассмотрим самый общий случай:

$$x_i = \begin{cases} 1, & i \in I^1 \\ 0, & i \in I^0 \end{cases} \Rightarrow y_i = \begin{cases} 1, & i \in K^1 \\ 0, & i \in K^0 \end{cases}$$

Чтобы этого не было необходимо модифицировать неравенство, добавление коэффициента слева:

$$\left| K^0 \cup K^1 \right| \cdot \Big(\sum_{i \in I^0} x_i + \sum_{i \in I^1} (1 - x_i) \Big) \geq \sum_{i \in K^0} y_i + \sum_{i \in K^1} (1 - y_i)$$

Коэффициент слева был добавлен по аналогии с предыдущим пунктом.

3.3 Альтернативные переменные

Пусть в нашей задаче сформулированы 2 ограничения:

$$f_1(x) \geq b_1,$$
$$f_2(x) \geq b_2,$$

однако нам достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из них. Тогда эти условия называются *альтернативными*. Как это можно записать?

Предположим, что мы реализуем алгоритм, который решает нашу проблему, при этом он находит решения, которые удовлетворяют всем условиям.

Введём переменную $y \in \{0, 1\}$, значение которой будет следующим: если $y = 1$, то выполнено первое условие, а если $y = 0$, то — второе. В идеальном случае наш алгоритм сам выберет значение нашей переменной y (0 или 1), однако какое бы значение он не выбрал, то итоговое решение будет удовлетворять или первому ограничению, или второму.

Как теперь записать это алгебраически? Записывать нужно так

$$f_1(x) \geq b_1 - W(1 - y),$$

где W — это какая-то большая величина. Какое конкретно значение эта величина принимает, зависит от конкретной задачи. Где-то можно положить $W = 10^6$, где-то $W = 50$. Однако полностью избавиться от W и записать условие без него не получится.

Второе ограничение записывается похожим образом

$$f_2(x) \geq b_2 - Wy$$

Если $y = 10$, то имеем

$$f_1(x) \geq b_1,$$
$$f_2(x) \geq b_2 - W \approx -\infty$$

Первое неравенство верно, как и второе. Однако важно, что выполнено первое.

Если $y = 0$, то имеем

$$f_1(x) \geq b_1 - W \approx -\infty,$$
$$f_2(x) \geq b_2$$

Аналогично, оба неравенства выполнено, но важно, что второе неравенство выполнено безоговорочно.

Другой способ

Можно было ввести две переменные $y_1, y_2 \in \{0, 1\}$ и записать следующим образом:

$$f_1(x) \geq b_1 - W(1 - y_1), f_2(x) \geq b_2 - W(1 - y_2), y_1 + y_2 = 1.$$

Это почти то же самое. Условие на сумму $y_1 + y_2$ нужно, чтобы либо $y_1 = 0$, а $y_2 = 1$, либо $y_1 = 1$, а $y_2 = 0$.

Другие ограничения

Предположим теперь у нас ограничения с другим знаком неравенства

$$f_1(x) \leq b_1,$$
$$f_2(x) \leq b_2,$$

Как теперь записать то же самое условие алгебраически?

$$f_1(x) \leq b_1 + W(1 + y_1),$$

$$f_2(x) \leq b_2 + Wy_2.$$

Аналогично можно было бы записать через y.

3.4 Обработка нелинейностей

Пусть мы встретили какую-то нелинейность $x \cdot y$. Введём новую переменную

$$z = x \cdot y.$$

Однако просто заменить в выражении $x\cdot$ на z нельзя, поскольку нужно изменить ограничения. Нам нужно ввести ограничение на новую переменную $z = 1 \iff x = 1$ и $y = 1$.

Это можно раскрыть через две импликации: 1) если $z = 1$, то $x = 1$ и $y = 1$. 2) Если $x = 1$ и $y = 1$, то $z = 1$.

Распишем каждую импликацию

3.5 Нахождение минимума

Пусть в нашем выражении где-то встретилось $u = \min\{x_1, x_2\}$.