线性代数 (理工)

常寅山

第二章 矩阵代数

几种特殊的矩阵

考虑 $m \times n$ 矩阵 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$.

- 若 A 的行数与列数相等, 即 $m = n$, 则称 A 为 n 阶方阵.
- 对 n 阶方阵 A, 其对角线元素 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$, 称为 A 的主对角线. 若方阵 A 的非 (主) 对角线元素均为 0, 则称其为对角矩阵. 如果对角矩阵的对角线元素都是 1, 则称其为单位矩阵, 记作 E_n 或者 E.
- 若矩阵的每个元素均为 0, 则称其为零矩阵, 记作 $0_{m\times n}$ 或 0.

向量

在平面上的向量: 二元有序数组 (x, y);
三维欧式空间中的向量: 三元有序数组 (x, y, z);

定义 1 (向量)

我们称由实 (复) 数组成的 n 元有序数组为 n 维向量. 若我们将 n 元数组表示为一个 $1 \times n$ 矩阵 $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$, 则称其为 n 维行向量; 若将 n 元数组表示为一个 $n \times 1$ 矩阵 $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$, 则称其为 n 维列向量.

注意. 行向量有时也记为 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.
注意. 分量全为 0 的向量被成为零向量.

向量

如线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 & = 4 \\ x_1 - x_2 & = 1 \end{cases}$ 的解 $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$, 既可以表示为 2 维行向量 $\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$, 也可以表示为 2 维列向量 $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

在用矩阵表示线性方程组时, 用列向量表示解较为方便, 在没有特别说明时, 都用列向量表示.

向量

定义 2 (n 维欧式空间)

我们将所有 $n \times 1$ 实矩阵构成的集合称为 n 维欧几里得空间 (欧氏空间)，记作 $\mathbb{R}^n$.

$\mathbb{R}^n$ 是由 n 维实列向量构成的集合.

向量

例 1 (P20 例 2.1.2)

线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$
的解为 n 维列向量 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

向量

例 1 续

给定 $m \times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$. 它的第 i 行是 n 维行向量,

记为 $\boldsymbol{\alpha}_i=\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\end{bmatrix}$, 则 $A=\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \end{bmatrix}$.

A 的每一列都为 m 维列向量, 记作 $A_j=\begin{bmatrix} a_{ij} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$, 则

$A=(A_1, A_2, \cdots, A_n)$.

若 A 为线性方程组的系数矩阵, 则 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 是第 i 个方程的系数构成的行向量, A_j 是各个方程中 x_j 的系数构成的列向量.

第二章 矩阵代数

向量加法

对于两个 n 维行向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 和 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, 可以定义其和 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$, 其中, $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, 而 $\forall i = 1, 2, \ldots, n$, $z_i = x_i + y_i$.

可见, 相同大小的行向量相加得到同样大小的行向量, 对应位置上元素相加即可.

注意. 向量可以表示成有向线段. 向量加法满足三角形法则/平行四边形法则.

类似的, 我们可以定义两个 n 维列向量的加法.

注意. n 维行向量和 n 维列向量无法作加法, 只有相同形状的向量可以作加法.

向量加法

例. 我们用 x_i 表示第 i 个同学的试卷的客观题得分, 用 y_i 表示第 i 个同学的试卷的主观题得分. 如果我们用行向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 表示这些同学的客观题得分的汇总数据, 用 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ 表示主观题的汇总数据, $\boldsymbol{z}$ 表示总成绩的汇总数据. 那么, $\boldsymbol{z}$ 恰好等于 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的 (向量) 和.

向量加法的运算律

向量加法的运算满足如下规律:
例 (交换律). $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$.
例 (结合律). $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$.
结合反映出来的规律: 多个同型向量按照顺序作加法时, 最后的结果其实和顺序无关, 所以, 没有必要使用规定运算优先级的小括号. 例如, 三个向量的加法可以写成 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}$. 而多个向量的加法可以记成 $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2+\cdots+\boldsymbol{x}_n$, 也可以缩略的记为 $\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i$, 其中, 希腊大写字母 Σ 表示连加号.

矩阵加法

定义 3 (同型矩阵)

若矩阵 A, B 具有相同的行数与列数, 则称它们为同型矩阵.

定义 4 (矩阵相等)

两个同型矩阵 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ 的对应元素均相等, 即 $a_{ij} = b_{ij}$, 则称 A 与 B 相等, 记作 $A = B$.

定义 5 (矩阵加法)

两个同型矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$ 的对应元素相加所得同型矩阵 $C = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$ 称为 A 与 B 之和, 记作 $C = A + B$.

矩阵加法是向量加法的推广.

矩阵加法

例 2

若 $A=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-3&0&4\\5&-1&2\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}3&1&2\\-5&5&-1\end{bmatrix}$,

则 $A+B$ 无意义,

$$B+C=\begin{bmatrix}-3&0&4\\5&-1&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&1&2\\-5&5&-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-3+3&0+1&4+2\\5-5&-1+5&2-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&6\\0&4&1\end{bmatrix}$$

矩阵加法

注 1

任意 $A_{m\times n}$, 有 $A_{m\times n}+0_{m\times n}=0_{m\times n}+A_{m\times n}=A_{m\times n}$, 也可以记作 $A+0=0+A=A$. 零矩阵对于矩阵加法的角色某些时候近似于数字 0 对于数的加法的角色.

向量数乘

我们可以定义数和 n 维行向量的二元运算: $(\lambda, \boldsymbol{x}) \mapsto \lambda\boldsymbol{x}$, 其中, $\lambda\boldsymbol{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$. 这样的运算被成为向量数乘.
类似的, 我们可以定义数 λ 对于 n 维列向量的乘法: 运算的结果仍然是一个 n 维列向量, 用 λ 乘以列向量的每一个分量.
假设作向量乘法的数是实数而不是复数, 并且 $\lambda > 0$. 当我们考虑向量对应的有向线段几何表示时, 有 $\lambda\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{x}$ 方向完全相同 (平行), 但是 $\lambda\boldsymbol{x}$ 的长度是 $\boldsymbol{x}$ 的 λ 倍. 而 $-\boldsymbol{x}$ 表示和 $\boldsymbol{x}$ 大小相同, 方向恰好相反的向量.

向量数乘

例. 用 $\boldsymbol{x}$ 表示同学们 5 分制的成绩的汇总数据. 如果我们希望把成绩转换成百分制, 那么, 我们只需用 20 数乘 $\boldsymbol{x}$ 得到 $20\boldsymbol{x}$ 即可.

向量数乘

例. $0\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$, 其中, 0 是复数 0, 而 $\mathbf{0}$ 表示零向量.

例. $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

例. $\lambda_1(\lambda_2\boldsymbol{x}) = (\lambda_1\lambda_2)\boldsymbol{x}$.

向量加法和数乘

向量的加法运算和数乘运算有很好的兼容性, 通过如下的运算律反映出来.

例 (分配律). $\lambda(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\lambda\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y}$, $(\lambda+\mu)\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{x}$.

矩阵数乘

定义 6 (数乘)

λ 为实 (复) 数, $A = (a_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵, 则数 λ 与矩阵 A 的乘积, 记作 λA, 定义为

$$\lambda A = \lambda(a_{ij})_{m\times n} = (\lambda a_{ij})_{m\times n}.$$

即 λA 和 A 是同型矩阵, (i,j) 位置上的元素为 λa_{ij}, 其中, a_{ij} 是矩阵 A 在位置 (i,j) 上的元素.

矩阵数乘

例 3

$$3\begin{bmatrix}2 & 1 & 5\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\times 2 & 3\times 1 & 3\times 5\\ 3\times 0 & 3\times(-2) & 3\times 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 3 & 15\\ 0 & -6 & 3\end{bmatrix}$$

线性运算的性质

加法与数乘统称为线性运算.

基本性质:

1. 加法交换律: $A+B=B+A$.
2. 加法结合律: $(A+B)+C=A+(B+C)$ (从而加法可以不写出括号).
3. $A+0=0+A=A$.
4. $A+(-A)=0$, 这里 $(-A)=(-1)A$.
5. 数乘 1: $1A=A$.
6. 数乘结合律: $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$.
7. 数乘对矩阵加法的分配律: $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$.
8. 矩阵对实 (复) 数加法的分配律: $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$.

线性运算性质

其他性质:

1. 消去律: $A+B=A+C$, 则 $B=C$.
2. $0A_{m\times n}=0_{m\times n}$.
3. $\lambda 0_{m\times n}=0_{m\times n}$.
4. 若 $\lambda A=0$, 则 $\lambda=0$ 或 $A_{m\times n}=0_{m\times n}$.

线性组合

我们分别介绍了两种不同的线性运算：矩阵加法和矩阵数乘. 混合应用这两种运算就可以自然导出如下线性组合的概念. 粗略来说, 线性组合就是把若干个矩阵按照线性运算的方式组合在一起算出的结果.

定义 7 (线性组合)

给定同型矩阵 $A_1, A_2, \cdots, A_m$, 则

$$B = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots \lambda_m A_m = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j A_j$$

称为 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 的线性组合, 其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 为常数. 此时, 称 B 可由 $A_1, A_2, \cdots, A_m$线性表出, 称 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ 是线性组合的系数.

线性组合

行 (列) 向量的线性组合是矩阵的线性组合的特殊情况. 理论上, 我们有时需要判断 B 是否是 $A_1, A_2, \ldots, A_m$ 的线性组合. 若是, 有时还需要求出线性组合的系数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. 这相当于寻找满足下列矩阵等式的未知量 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$:

$$B = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots + \lambda_m A_m.$$

根据矩阵相等, 矩阵数乘和矩阵加法的定义, 这其实相当于一个未知量是 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ 的线性方程组. 其中, 方程由有序对 (i, j) 编号, 编号为 (i, j) 的方程为

$$(A_1)_{ij}\lambda_1 + (A_2)_{ij}\lambda_2 + \cdots + (A_m)_{ij}\lambda_m = B_{ij}.$$

而线性方程组我们在第一章中已详细研究过了.

练习

例 4 (P22 例 2.2.1)

记 $M_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$, $M_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$, $M_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$, $M_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$. 证明任意二阶矩阵 $A=\begin{bmatrix}a_1&a_2\\a_3&a_4\end{bmatrix}$ 均为 M_1,M_2,M_3,M_4 的线性组合.

证明. $A=a_1M_1+a_2M_2+a_3M_3+a_4M_4$, 故为 M_1,M_2,M_3,M_4 的线性组合.

练习

例 5

证明任意 n 维向量 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 均可由
$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \cdots, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0)$,$\cdots$,
$\boldsymbol{e}_n = (0, \cdots, 0, 1)$ 线性表出.

线性组合

例 6 (P22 例 2.2.2)

线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn} = b_m, \end{cases}$

即 $x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

若将 x_i 的系数列记作 A_i, 常数项列记作 $\boldsymbol{b}$, 则线性方程组可写作 $x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots x_nA_n = \boldsymbol{b}$

则方程组有解当且仅当常数项列 $\boldsymbol{b}$ 可由各未知数的系数列向量 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 线性表出.

矩阵乘法

问题. 一元线性方程: $ax = b$, 如何将多元线性方程组表示为类似的简单的形式?

行向量乘以列向量

考虑多元线性方程 $2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5$,

系数矩阵 $A = (2, 1, 3)$, 变量 $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, 常数项 $b = 5$

我们希望 $2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5$ 有形式 $AX = b$.

定义乘积 $AX = (2, 1, 3) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 2x_1 + x_2 + 3x_3$.

则原方程可以写成 $AX = b$.

行向量乘以列向量

定义 8 (行向量乘以列向量)

考虑 n 维行向量 $A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 和 n 维列向量 $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. 定义它们的乘积

$$AX = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_nx_n.$$

这种运算和 $\mathbb{R}^n$ 上的内积(或数量积) 运算保持一致.
线性方程 $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, 可以写成 $AX = b$.

行向量乘以列向量

例. 考虑一个商店, 共有 n 种不同的商品. 假设 a_i 是第 i 种商品的销售量, x_i 是第 i 种商品的售价. 记 $A=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. 那么, AX 就是商店的总营业额.

练习

例. 设 $A=(1,2,3)$, $X=\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}$. 计算 AX.

矩阵与列向量的乘积

线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn} = b_m, \end{cases}$$

矩阵表示:
$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

矩阵与列向量的乘积

记系数矩阵为 A, 未知元写成列向量 X, 常数项写成列向量 b. 希望将上式表示成 $AX = b$. 所以, 定义

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn} \end{bmatrix}$$

第 i 行, 为系数矩阵第 i 行行向量 $(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$ 与列向量 $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ 的乘积.

矩阵与列向量的乘积

定义 9 (矩阵与列向量的乘积)

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$C=(c_j)_{n\times 1}$，定义

$$AC=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}c_1+a_{12}c_2+\cdots+a_{1n}c_n \\ a_{21}c_1+a_{22}c_2+\cdots+a_{2n}c_n \\ \vdots \\ a_{m1}c_1+a_{m2}c_2+\cdots+a_{mn}c_n \end{bmatrix}$$

注意. 矩阵 A 的列数, 与 C 的行数要相等, 才能作乘积. 同时, 这个运算推广了行向量和列向量的乘积.

矩阵乘以列向量

例. 考虑 m 个不同连锁专卖店销售 n 种不同的商品. 假设 a_{ij} 是第 i 个商店的第 j 种商品的销售量, x_i 是第 i 种商品的售价. (我们假设连锁专卖店中同一种商品的售价是一样的.) 记矩阵 $A=(a_{ij})$ 记录商品销售数量, 列向量 $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ 记录商品售价, $b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ 记录这 m 家店各自的营业额. 那么, $b=AX$.

练习

例. 假设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 9 \\ 10 \\ 11 \end{bmatrix}$. AX 是否有定义? AY 是否有定义? 若有定义, 请计算出结果.

矩阵与矩阵乘积

例. 考虑 m 个不同连锁专卖店销售 n 种不同的商品. 假设 a_{ij} 是第 i 个商店的第 j 种商品的销售量, x_{jk} 是第 j 种商品第 k 个月的售价. (我们假设连锁专卖店中同一种商品的售价是一样的. 售价每个月调整一次.) 记矩阵 $A=(a_{ij})$ 记录商品销售数量, 矩阵 $X=(x_{jk})$ 记录一年的各种商品售价, $B=(b_{ik})$ 记录这 m 家店各月的营业额. (其中, b_{ik} 是第 k 个月第 i 家店的营业额.) 那么, $b_{ik}=\sum_j a_{ij}x_{jk}$. 我们把这种从 (A,X) 到 B 的运算称为矩阵乘法.

矩阵与矩阵乘积

定义 10 (矩阵乘法)

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{jk})_{n\times s}$, 定义

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{ks} \\ \sum_{k=1}^n a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^n a_{2k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{2k}b_{ks} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{mk}b_{k1} & \sum_{k=1}^n a_{mk}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{mk}b_{ks} \end{bmatrix}$$

即: $C=AB$ 为 $m\times s$ 矩阵, 其 (i,j) 位置元素 $c_{ij}=\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$ 为 A 的第 i 行行向量与 B 的第 j 列列向量的乘积.

矩阵与矩阵乘积

注意. 矩阵 A 的列数, 与 B 的行数要相等, 才能作乘积.
注意. 矩阵和矩阵的乘积推广了矩阵和列向量的乘积.

矩阵乘法

例 7 (P25 例 2.2.3)

已知 $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}$.

则 AB 无意义,

$$BA=\begin{bmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 3 & 6\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

矩阵乘法

注 2

设 $A_{m\times n}$, $B_{n\times s}=(B_1,B_2,\cdots,B_s)$, 其中 B_j 为 B 的第 j 列 $(j=1,2,\cdots,s)$.
则 $AB=(AB_1,AB_2,\cdots,AB_s)$.

这说明矩阵和矩阵的乘法可以通过计算矩阵和列向量的乘法来得到.

矩阵与矩阵乘积

注 3

设 $A_{m\times n}=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_m\end{bmatrix}$, $B_{n\times s}$, 则,

$$AB=\begin{bmatrix}\alpha_1 B\\ \alpha_2 B\\ \vdots\\ \alpha_m B\end{bmatrix}$$

矩阵乘法

例 8 (P25 例 2.2.4)

设行向量 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, 列向量 $B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$.

则 $AB=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n.$

矩阵乘法

例 9 (P25 例 2.2.4)

$$BA=\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\begin{bmatrix} b_1a_1 & b_1a_2 & \cdots & b_1a_n\\ b_2a_1 & b_2a_2 & \cdots & b_2a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_na_1 & b_na_2 & \cdots & b_na_n\end{bmatrix}$$

AB 为 1×1 矩阵, BA 为 $n\times n$ 矩阵, 形状不同, 显然 $AB\neq BA$.

注意. 矩阵乘法不交换.

矩阵乘法

例 10 (P26 例 2.2.5)

设 $A=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}0&1\\0&-1\end{bmatrix}$.

则 $AB=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=\mathbf{0}$.

$BA=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2\\-2&-2\end{bmatrix}$

这里虽然 AB 与 BA 为同型矩阵, 但仍有 $AB\neq BA$. 矩阵乘法没有交换律!

矩阵乘法

例 11 (P26 例 2.2.5)

设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

则 $AC = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$.

$AC = \mathbf{0}$, 两个非零矩阵乘积可以为零!

矩阵乘法

例 12 (P26 例 2.2.5)

设 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$.

则 $AB=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\mathbf{0}.$

$AC=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\mathbf{0}.$

$AB=AC$, 但 $B\neq C$, 矩阵乘法没有消去律!

矩阵乘法

例 13

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, n 阶方阵 $E_n=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{bmatrix}$ 主对角线上元素为 1, 其余位置元素为 0.

矩阵乘法

例13续

则 $AE_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

矩阵乘法

例13续

类似的, $E_m A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

我们称 n 阶方阵 E_n 为 n 阶单位阵, 也记作 E.
上述例子告诉我们 $E_m A_{m\times n} = A_{m\times n} E_n = A_{m\times n}$. 在矩阵乘法中, 单位矩阵起到的作用有点类似于数的乘法中单位元 1 的作用.

矩阵乘法的性质

1. 结合律: $(AB)C = A(BC)$.
2. 分配律: $(A+B)C = AC + BC$, $A(B+C) = AB + AC$.
3. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.
4. 与零矩阵乘积: 即 $0_{s\times m}A_{m\times n} = 0_{s\times n}$, $A_{m\times n}0_{n\times r} = 0_{m\times r}$.
5. 与单位矩阵乘积: $E_m A_{m\times n} = A_{m\times n} = A_{m\times n}E_n$ 或简写为 $EA = A = AE$.

注 4

没有交换律! 没有消去律! 非零矩阵的乘积可以是零矩阵!

矩阵乘法

思考

说明: 为什么下列代数法则中, 将实数 a, b 用 n 阶矩阵 A, B 替换后, 一般不成立.

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

需要增加什么条件, 上述法则才可以对 n 阶方阵成立?

矩阵乘法

例 14 (P27 例 2.2.6)

已知变量 $z_1, z_2, \cdots, z_m$ 是变量 $y_1, y_2, \cdots, y_k$ 的线性函数

$$\begin{cases} z_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1k}y_k, \\ z_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2k}y_k, \\ \vdots \\ z_m = a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \cdots + a_{mk}y_k. \end{cases}$$

变量 $y_1, y_2, \cdots, y_k$ 是变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的线性函数

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n, \\ y_2 = b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n, \\ \vdots \\ y_k = b_{k1}x_1 + b_{k2}x_2 + \cdots + b_{kn}x_n. \end{cases}$$

求变量 $z_1, z_2, \cdots, z_m$ 和变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函数关系.

方阵的 k 次幂

设 A 为方阵, 则 $A^k = AA\cdots A$ 为 k 个 A 的乘积, k 为自然数.
特别的, 约定 $A^0 = E$.
性质:

- $A^k A^l = A^{k+l}$, k, l 为自然数.
- $(A^k)^l = A^{kl}$, k, l 为自然数.
- 一般的, $(AB)^k \neq A^k B^k$.

方阵的 k 次幂

例 15

设方阵 A 是 3 阶对角矩阵, 对角线元素依次为 $1, 2, 3$. 计算 A^2, A^3, A^4. 由此猜测 A^m 的表达式.

思考. 将上述结果推广到一般的对角矩阵.

方阵的 k 次幂

例 16

设方阵 $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, 计算 A^4.

提示. 利用矩阵乘法的结合律, 先计算行向量乘以列向量.

解.

令 $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$. 则,

$A^4 = (xy)(xy)(xy)(xy) = x(yx)(yx)(yx)y$. 而, $yx = 32$. 所以,

$$A^4 = x(32)^3y = 32^3xy = 32^3 \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \end{bmatrix}. \qquad \square$$

方阵的 k 次幂

思考. 假设 $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $y=\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}$, $A=xy$. 计算 A^m.

方阵的 k 次幂

课堂练习

假设 $N_{n\times n} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. 计算 N^2, N^3, N^4 并猜测 N^m 的表达式.

方阵的 k 次幂

例 17

假设 $A=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}$. 计算 A^n.

提示. 将 A 写成 $\lambda E+N$, 其中, $E=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$,
$N=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$. 注意到 E 和 N 可交换, 然后把 $(\lambda E+N)^n$ 仿照二项式定理展开.

方阵的 k 次幂

解.

$A^n=(\lambda E+N)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\lambda^{n-j}N^j$, 其中, $N^0 \overset{\text{def}}{=} E$. 注意到 $N^j=0$, $\forall j\geq 3$. 并且 $N^2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$.

所以, $A^n=\lambda^n E+n\lambda^{n-1}N+\frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}N^2$

$$=\begin{bmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ 0 & 0 & \lambda^n\end{bmatrix}.$$

□

注意到 $n\lambda^{n-1}$ 是 λ^n 的导数, $n(n-1)\lambda^{n-2}$ 是 λ^n 的二阶导数.

方阵的 k 次幂

思考. 假设 $A=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \lambda & \ddots & 0\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda\end{bmatrix}$. 计算 $A^m(m=0,1,2,\ldots)$.

方阵的多项式

设 A 为方阵, 则称方阵

$$f(A) = a_0 A^m + a_1 A^{m-1} + \cdots + a_{m-1} A + a_m E$$

为方阵 A 的多项式. 也称 $f(A)$ 为多项式

$$f(\lambda) = a_0 \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \cdots + a_{m-1} \lambda + a_m$$

当 $\lambda = A$ 的值.
重要性质. 若多项式 $f(\lambda) = \varphi(\lambda) + \psi(\lambda)$, $g(\lambda) = \varphi(\lambda)\psi(\lambda)$,
则 $f(A) = \varphi(A) + \psi(A)$, $g(A) = \varphi(A)\psi(A)$,

方阵的多项式

例 18

假设 $\varphi(x)=x-1,\ \psi(x)=x-2,\ g(x)=\varphi(x)\psi(x)$. 证明

$$g(A)=(A-E)(A-2E).$$

例 19

假设 $g(x)=(x-a)^n$. 证明 $g(A)=(A-aE)^n$.

方阵的多项式

例 20 (P28 例 2.2.7)

设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2+A+2E=0$, 证明存在 B 使得 $(A-2E)B=E$.

B 和 A 有关系, 猜测其形如 $B=c_1A+c_2E$, 并且方程 $(A-2E)B=E$ 和 $A^2+A+2E=0$ 有关系.

证明.

利用长除法 $\frac{\lambda^2+\lambda+2}{\lambda-2}=\lambda+3+\frac{8}{\lambda-2}$,
故, $\lambda^2+\lambda+2=(\lambda-2)(\lambda+3)+8$.
所以, $0=A^2+A+2E=(A-2E)(A+3E)+8E$,
即 $(A-2E)[-\frac{1}{8}(A+3E)]=E$,
令 $B=-\frac{1}{8}(A+3E)$ 即得. $\square$

练习

思考. 假设 n 阶方阵满足
$p(A) = a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \cdots + a_0 E = 0$. 其中, $a_0 \neq 0$.
证明存在 B 使得 $BA = AB = E$.
思考. 延续上题. 如果我们希望存在 C 使得 $(A - E)C = E$.
那么, 应该对系数 $a_0, a_1, \ldots, a_m$ 加什么条件?
提示. 令 $B = A - E$. 则 $0 = p(A) = p(B + E)$, 而后者显然
是 B 的多项式. 欲找 C 使得 $BC = E$.

练习

思考. 假设 $N_{n\times n} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. $A = aE_n + N$.

假设多项式 $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m$.
令 $B = f(A)$. 证明对于 $i > j$, $B_{ij} = 0$; 对于 $i \leq j$,
$B_{ij} = \frac{f^{(j-i)}(a)}{(j-i)!}$.

第二章 矩阵代数

逆矩阵

实数的乘法: $ab = 1$ 则 $a = b^{-1}$. 逆元在解方程中起到关键作用: $ax = c$, 那么, $x = a^{-1}c$.

问题

对矩阵乘法, 是否有类似情况? 若是, 那么, 对解矩阵方程 $AX = C$, 或者等价的, 解线性方程组中将起到重要作用.

矩阵乘法的单位元 E, 考虑 $AB = E$, $BA = E$.

逆矩阵

定义 11 (逆矩阵)

设 A 为 n 阶方阵, 若存在 n 阶方阵 B, 使得

$$AB = BA = E,$$

则称 A 为可逆的 (或非奇异, 可逆矩阵), 称 B 为 A 得逆矩阵, 简称为 A 的逆.
若 A 没有逆矩阵, 则称 A 为不可逆(或奇异矩阵).

- 容易看出, B 为 A 的逆矩阵, 则 A 也为 B 的逆矩阵.
- 只有对方阵, 才考虑是否有逆矩阵.
- 后面会学到, 如果 n 阶方阵 A 和 B 满足下列两个条件之一, 则 A 和 B 互为逆矩阵:
  1. $AB = E$,
  2. $BA = E$.

逆矩阵的性质

1. 逆矩阵唯一.
   A 的逆矩阵记作 A^{-1}. (不是除法, 不能写成 $\frac{1}{A}$)
2. $(A^{-1})^{-1} = A$.
3. 若 A, B 均为 n 阶可逆矩阵, 则 AB 可逆, 且
   $$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$
4. 若 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 均为 n 阶可逆矩阵, 则乘积 $A_1A_2\cdots A_m$ 可逆, 且
   $$(A_1A_2\cdots A_m)^{-1} = A_m^{-1}A_{m-1}^{-1}\cdots A_1^{-1}.$$
5. 设 A 为 n 阶可逆矩阵, 则对任意 $B = B_{m\times n}$, 矩阵方程
   $$AX = B, \quad (或 XA = B)$$
   有唯一解 $X = A^{-1}B$(或 $X = BA^{-1}$).

逆矩阵

命题 1

如果 $AX = AY$, 并且, A 可逆; 那么, $X = Y$. 即消去律此时成立.

证明.

$X = A^{-1}AX = A^{-1}AY = Y.$ □

逆矩阵

例 21

假设方阵 A 满足 $A^2 - A - 2E = 0$. 证明 $A + 2E$ 可逆, 并表达其逆.

证明.

因为 $\frac{\lambda^2-\lambda-2}{\lambda+2} = \lambda - 3 + \frac{4}{\lambda+2}$, 所以,
$\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda+2)(\lambda-3) + 4 = (\lambda-3)(\lambda+2) + 4$.
故, $0 = A^2 - A - 2E = (A+2E)(A-3E) + 4E = (A-3E)(A+2E) + 4E$.
令 $B = -\frac{1}{4}(A-3E)$. 则,
$AB = BA = E$. 故, $A + 2E$ 可逆, 逆为 $-\frac{1}{4}(A-3E)$. $\square$

矩阵的初等变换

回顾矩阵的三种初等行变换:

(1) 对换变换: 交换矩阵的两行;

(2) 数乘变换: 将某行全体元素都乘以某一非零常数;

(3) 倍加变换: 将某行用该行与另一行的常数倍的和替换, 即把另一行的常数倍加到某行上.

初等矩阵

- 第一类初等矩阵 $P(i,j)$: 交换 E 的 i,j 两行.
- 第二类初等矩阵 $P(i(\lambda))$: 用 $\lambda \neq 0$ 乘以 E 的第 i 行(列).
- 第三类初等矩阵 $P(i,j(\gamma))$: 将 E 的第 j 行的 γ 倍加到第 i 行上.

注 5

三种初等矩阵均可逆.

$$P(i,j)^{-1} = P(i,j),$$
$$P(i(\lambda))^{-1} = P(i(\tfrac{1}{\lambda})),$$
$$P(i,j(\gamma))^{-1} = P(i,j(-\gamma)).$$

初等行变换与初等矩阵

引理 1

- 对矩阵 A 进行初等行变换，其结果等于对 A 左乘相应的初等矩阵.
- 对矩阵 A 进行初等列变换，其结果等于对 A 右乘相应的初等矩阵.

矩阵可逆的等价条件

定理 1 (矩阵可逆的等价条件)

设 A 为 n 阶方阵，则下列命题等价：

1. A 可逆.
2. $A\mathbf{x}=0$ 只有零解.
3. A 的主元列数为 n.
4. A 与 n 阶单位阵行等价，即可经有限次初等行变化变为 E.
5. A 可表示为若干个初等矩阵的乘积.

推论 2

若 n 阶方阵 A 与 B 行等价，则 A 可逆当且仅当 B 可逆.

矩阵可逆的等价条件

例 22

假设 $A = (A_1, A_2, A_3)$ 是 3×3 矩阵, A_1, A_2, A_3 是矩阵 A 的三个列构成的列向量. 假设 $A_1 + 2A_2 - A_3 = \mathbf{0}$. 证明 A 不可逆.

证明.

注意到 $x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 = A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有非零解 $(1, 2, -3)$. 所以, A 不可逆. $\square$

求逆矩阵算法

思路:
A 可逆, 则可经过有限次初等行变换变为 E:
$P_kP_{k-1}\cdots P_1A=E$.
则 $A=(P_kP_{k-1}\cdots P_1)^{-1}$, $A^{-1}=P_kP_{k-1}\cdots P_1$.
如果我们记录下这些变换, 就可得到 A^{-1}.
$P_1[A,E]=[P_1A,P_1]$,
$P_2[P_1A,P_1]=[P_2P_1A,P_2P_1]$, $\cdots$

矩阵求逆的初等行变换算法

1. 写出 $(A|E)$
2. 对 $(A|E)$ 进行初等行变换, 直到具有形式 $(E|B)$, 此时 B 即为 A^{-1}.

求逆矩阵算法

例 23 (P36 例 2.3.1)

已知 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. 利用矩阵的初等行变换, 求 A^{-1}.

求逆矩阵算法

类似的, 我们还可以用列变换求逆:

$$\begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{bmatrix} E \\ A^{-1} \end{bmatrix}$$

课堂练习

分别用行变换算法和列变换算法求 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 的逆矩阵.

求逆矩阵算法

注 6

- 具体选择行变换算法还是列变换算法，可根据矩阵特点，选简单的.
- 我们在求逆矩阵算法时，不必事先判断 A 是否可逆. 若我们在进行行 (列) 变换时，左 (上) 边的矩阵某行 (列) 为零，则我们停止算计算，A 不可逆.

求逆矩阵算法

例 24 (P37 例 2.3.2)

求 n 阶矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ a & 1 & & & \\ a^2 & a & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a^{n-1} & a^{n-2} & a^{n-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ 的逆矩阵.

矩阵求逆与线性方程组的解

例 25

解方程组 $\begin{cases} \quad\;\; x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 \quad\;\; = 3. \end{cases}$

解. 此方程的系数矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ 可逆, 且

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (见 P36 例 2.3.1)

矩阵求逆与线性方程组的解

令 $B=\begin{bmatrix}1\\3\\3\end{bmatrix}$. 则, 方程组的解为

$$X=A^{-1}B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 4 & -2 & 1\\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}.$$

矩阵求逆与线性方程组的解

$$[A, B, E] \xrightarrow{\text{初等行变换}} [E, A^{-1}B, A^{-1}],$$

我们在求线性方程组 $AX = B$ 的解时, 不关心 A^{-1}, 仅关心 $A^{-1}B$. 故可只写:

$$[A|B] \xrightarrow{\text{初等行变换}} [E|A^{-1}B],$$

矩阵求逆与线性方程组的解

课堂练习

设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. 计算 $A^{-1}B$ 和 BA^{-1}.

矩阵等价

定义 12 (矩阵等价)

两个 $m \times n$ 矩阵 A, B

- 若 A 与 B 可通过一系列初等行变换进行转换, 则称 A 与 B 行等价.
- 若 A 与 B 可通过一系列初等列变换进行转换, 则称 A 与 B 列等价.
- 若 A 与 B 可通过一系列初等行,列变换进行转换, 则称 A 与 B 等价.

矩阵等价

命题

- 两个 $m \times n$ 矩阵 A 与 B 等价, 当且仅当存在 m 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q, 使得 $PAQ = B$.
- 任意 $m \times n$ 矩阵 A 都等价于一个规范矩阵
$$\begin{bmatrix} 1 & & & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$
$((1,1),(2,2),\cdots,(r,r)$ 位置为 1, 其余位置为 0.)
- 特别的, n 阶可逆矩阵 A 等价于 E_n.

第二章 矩阵代数

转置矩阵

定义 13 (转置)

设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, 则定义 A 的**转置**

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

特别的, 1×1 矩阵 a 的转置 $a^T = a$.

转置矩阵

例 26

求下列矩阵的转置:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix},\ B=[1,2,3],\ C=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\ E=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

$$\Lambda=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}1&2&4\\2&1&5\\4&5&1\end{bmatrix}$$

转置矩阵的性质

1. $(A^T)^T = A$.
2. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$.
3. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$, λ 为常数.
4. $(AB)^T = B^T A^T$.
5. 若方阵 A 可逆, 则 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

对称矩阵

定义 14 (对称矩阵)

若实矩阵 A 满足 $A^T = A$, 则称 A 为对称矩阵.

注 7

- 对称矩阵一定为方阵.
- $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 为对称阵当且仅当 $a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$.(即关于对角线的位置对称的元素都相等.)

对称矩阵

构造对称矩阵 1

给定实矩阵 $A_{m\times n}$, 则 AA^T 为 m 阶对称矩阵, A^TA 为 n 阶对称矩阵.

证明.

AA^T 为 m 阶方阵, 且 $(AA^T)^T=(A^T)^TA^T=AA^T$, 故 AA^T 为 m 阶对称矩阵.
类似的,A^TA 为 n 阶方阵, 且 $(A^TA)^T=A^T(A^T)^T=A^TA$, 故 A^TA 为 n 阶对称矩阵. □

对称矩阵

注 8

设 $AA^T = (b_{ij})_{m\times m}$, $A^TA = (c_{ij})_{n\times n}$. 则
$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk}$ 为 A 的第 i 行与第 j 行的乘积.
$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ki}a_{kj}$ 为 A 的第 i 列与第 j 列的乘积.

思考题

对 $m\times n$ 实矩阵 A, $AA^T = 0$ 或 $A^TA = 0$ 当且仅当 $A = 0$.

对称矩阵

构造对称矩阵 2

给定方阵 A, 则 $A + A^T$ 为对称矩阵.

证明.

$(A + A^T)^T = A^T + A.$ □

对称矩阵的性质

对称矩阵性质

若 A, B 均为 n 阶对称矩阵, 则

- $A+B$, λA, A^k 均为对称矩阵.
- 但 AB 通常不为对称矩阵.
- 若还有 $AB=BA$, 则 AB 仍为对称阵.

证明.

- $(A+B)^T = A^T + B^T = A+B$, $(\lambda A)^T = \lambda A^T = \lambda A$, $(A^k)^T = (A^T)^k = A^k$ 故均为对称矩阵.
- 如 $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{bmatrix}$
- $(AB)^T = B^T A^T = BA = AB$, 故 AB 仍为对称阵. $\square$

对称矩阵的性质

思考

已知可逆方阵 A 对称，A^{-1} 是否对称?

解.

设 $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$. 所以，$A^{-1}$ 对称. $\square$

反对称矩阵

定义 15 (反对称矩阵)

若实矩阵 A 满足若 $A^T = -A$，则称 A 为反对称矩阵.

注 9

- 反对称矩阵必为方阵.
- $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 为反对称矩阵当且仅当 $a_{ij} = -a_{ji}\ \forall i,j = 1,2,\ldots n$, 即主对角线元素为 0, 主对角线两侧对称的元素反号.
- 给定方阵 A, 则 $A - A^T$ 为反对称矩阵.

反对称矩阵的性质

反对称矩阵的性质

若 A, B 均为 n 阶反对称矩阵, 则

- $A+B$, λA 均为反对称矩阵.
- AB 通常不为反对称矩阵.
- 如果 $AB=BA$, 那么, AB 是对称矩阵.
- A^{2k} 为对称阵, A^{2k-1} 为反对称阵, $k\in\mathbb{N}^+$.

证明.

- $(A+B)^T=A^T+B^T=-A-B$, $(\lambda A)^T=\lambda A^T=-\lambda A$, 故均为反对称矩阵.
- 如 $\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$
- $(AB)^T=B^TA^T=(-B)(-A)=BA=AB$.
- $(A^m)^T=(A^T)^m=(-A)^m=(-1)^mA^m$. $\square$

反对称矩阵

思考

将任意 n 阶方阵 A 表示为对称矩阵与反对称矩阵之和.

提示: $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$.

注 10

该分解是唯一的. 试证明.

对角形矩阵

定义 16 (对角形矩阵)

形如 $A = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}$ 的 n 阶方阵 (除主对角线外的元素均为 0) 称为对角形矩阵. 也记作 $A = \operatorname{diag}\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$.

注 11

对角形矩阵 A, $A^T = A$, 也是对称的.

对角形矩阵的性质

- 若 n 阶矩阵 A, B 均为对角形矩阵, 则 $A+B$, λA, AB 均为对角形矩阵.

对角形矩阵的性质

- 若 $A=\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{bmatrix}$

则 $AB=\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} a_1b_1 & & & \\ & a_2b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_nb_n \end{bmatrix}=BA.$

对角形矩阵的性质

- 对角形矩阵 A 可逆, 当且仅当其主对角线元素均不为 0. 且若 $A = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}$ 可逆, 则

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a_1^{-1} & & & \\ & a_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^{-1} \end{bmatrix}.$$

正交矩阵

定义 17 (正交矩阵)

若 n 阶实矩阵 A 满足 $A^TA = AA^T = E$, 则称 A 为正交矩阵.

注 12

- 正交矩阵 A 可逆, 且 $A^{-1} = A^T$. 反之亦然.
- 若 A 为正交矩阵, 则 $A^T = A^{-1}$ 也为正交矩阵.

例 27

证明 $R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ 为正交矩阵并求 R^{-1}.

正交矩阵的性质

若 A 与 B 均为 n 阶正交矩阵, 则

- AB 也是正交矩阵.
  (归纳可知, 有限个同阶正交矩阵乘积仍然是正交矩阵.)
- 但 $A+B$ 一般不为正交矩阵.
  如 E 正交, 但 $E+E=2E$ 不是正交矩阵.

正交矩阵的性质

- n 阶实矩阵 $A=(a_{ij})$ 为正交矩阵, 当且仅当

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases} \quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases} \quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

中至少有一组成立.
即: 正交矩阵的每一行 (列) 的 n 个元素平方和为 1.
不同行 (列) 的内积为 0, 彼此正交.

第二章 矩阵代数

分块矩阵

想法: 通过把矩阵表示称若干个小矩阵为元素的矩阵以简化表达或计算, 如

$$A=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_m\end{bmatrix}=(A_1,A_2,\cdots,A_n).$$

定义 18

对任意 $m\times n$ 矩阵 A, 可以通过若干条水平直线和竖直线, 根据需要, 将 A 划分称若干个行数与列数较少的矩阵, 这种矩阵称为 A 的子阵或子块. 被划分了的矩阵 A 称为分块矩阵.

作为分块矩阵,A 的元素为一些小矩阵 (A 的子矩阵).

分块矩阵

$$A = (a_{ij})_{3\times 4} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right]$$

则

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}, \quad A_{12} = [a_{14}],$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} a_{24} \\ a_{34} \end{bmatrix},$$

是 A 的子块, A 可以记作

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = (A_{ij})_{2\times 2}.$$

分块矩阵的运算

- 加法: 考虑两个同型矩阵 A 与 B, 以相同的方式分块 $A=(A_{ij})_{\ell\times k}$, $B=(B_{ij})_{\ell\times k}$, 则

$$A+B=(A_{ij}+B_{ij})_{\ell\times k}$$

- 数乘:

$$\lambda A=\lambda(A_{ij})=(\lambda A_{ij})$$

- 转置: $A=(A_{ij})_{\ell\times k}$ 的转置矩阵: 将 A 的子块的行顺次改为列, 并把每个子块转置.

如 $A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}$ 的转置 $A^T=\begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \\ A_{13}^T & A_{23}^T \end{bmatrix}$

分块矩阵的运算

- 矩阵乘法: A 的列数 $=$ B 的行数, 且 A 关于列的分块方式, 与 B 关于行的分块方式相同. 即

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{\ell 1} & A_{\ell 2} & \cdots & A_{\ell s} \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1k} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & A_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{sk} \end{bmatrix}$$

且其中每一个 A_{ir} 的列数, 与 B_{rj} 的行数相同.

分块矩阵的运算

则 AB 的分块矩阵为

$$AB = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1k} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{\ell 1} & C_{\ell 2} & \cdots & C_{\ell k} \end{bmatrix},$$

其中，子块 C_{ij} 的行数和 A_{ir} 相同，C_{ij} 的列数和 B_{rj} 相同，并且 $C_{ij} = \sum_{r=1}^{s} A_{ir}B_{rj}$.

分块矩阵的运算

分块矩阵的相关运算可以把子矩阵看作元素进行. 通过矩阵的特点进行分块, 可以简化矩阵的符号表示, 方便我们进行矩阵分块运算.

分块矩阵的运算

例 28 (P46 例 2.5.1)

利用分块矩阵求 AB.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

如下分块可简化计算.

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right],$$

分块矩阵的运算

课堂练习

已知 $A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&0&1&0&1&1\\-1&2&0&1&1&2\\1&0&4&1&1&1\\-1&-1&2&0&2&0\end{bmatrix}$,

计算 AB.

如下分块方式:

$$A=\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\\hline 1&0&1&0\\0&1&0&1\end{array}\right],\ B=\left[\begin{array}{cc|cc|cc}1&0&1&0&1&1\\-1&2&0&1&1&2\\\hline 1&0&4&1&1&1\\-1&-1&2&0&2&0\end{array}\right],$$

分块矩阵的运算

例 29

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}_{s\times n} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}_{n\times m}$$

分块矩阵的运算

记

$$A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_s\end{bmatrix}(\text{行分块}),\qquad B=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m](\text{列分块}),$$

其中 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}),\ \beta_j=\begin{bmatrix}b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{nj}\end{bmatrix},$

$(i=1,2,\cdots,s,j=1,2,\cdots,m)$.

分块矩阵的运算

例29续

则

$$AB=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_s\end{bmatrix}[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m]=\begin{bmatrix}\alpha_1\beta_1 & \alpha_1\beta_2 & \cdots & \alpha_1\beta_m\\ \alpha_2\beta_1 & \alpha_2\beta_2 & \cdots & \alpha_2\beta_m\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_s\beta_1 & \alpha_2\beta_2 & \cdots & \alpha_s\beta_m\end{bmatrix}.$$

分块矩阵的运算

例29续

$$AB = A[\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m] = [A\beta_1, A\beta_2, \cdots, A\beta_m].$$

$$AB = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} \alpha_1 B \\ \alpha_2 B \\ \vdots \\ \alpha_s B \end{bmatrix}.$$

分块矩阵的运算

例 30

设 $A_{m\times n} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} \end{bmatrix}$. 那么, $AB = (\sum_{i=1}^{n} b_{i1}A_i, \sum_{i=1}^{n} b_{i2}A_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} b_{ik}A_i)$.
我们发现, AB 的每一列都是列向量 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的线性组合.

分块矩阵的运算

例 31

设 $A=\begin{bmatrix}2&1\\3&2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&2&1\\1&7&6\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1&0\\2&-1\\1&-1\end{bmatrix}$, 求矩阵 X, 满足矩阵方程

$$\begin{bmatrix}0&B\\A&0\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}C\\0\end{bmatrix}.$$

提示. 记 $X=\begin{bmatrix}Y_{2\times2}\\Z_{3\times2}\end{bmatrix}$. 则 $\begin{bmatrix}0&B\\A&0\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}BZ\\AY\end{bmatrix}$. 所以, 我们要求 $BZ=C$ 且 $AY=0$.

分块矩阵的运算

例 32 (P46 例 2.5.2)

已知分块矩阵 $M=\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix}$, 其中 $A=A_r$, $D=D_s$ 均为可逆方阵, 求 M^{-1}.

解. 设 $M^{-1}=\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & T \end{bmatrix}$, 则

$$MM^{-1}=\begin{bmatrix} AX & AY \\ CX+DZ & CY+DT \end{bmatrix}=E=\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & E_s \end{bmatrix}.$$

即 $\begin{cases} AX=E_r \\ AY=0 \\ CX+DZ=0 \\ CY+DT=E_s \end{cases}$, 故 $\begin{cases} X=A^{-1} \\ Y=0 \\ Z=-D^{-1}CA^{-1} \\ T=D^{-1} \end{cases}$.

故 $M^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix}$.

分块矩阵的运算

课堂练习

已知 A, B 均为可逆矩阵, 求 $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1}$ 和 $\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1}$.

分块矩阵的运算

课堂练习

已知分块矩阵 $M = \begin{bmatrix} A_{m\times m} & B_{m\times n} \\ 0_{n\times m} & 0_{n\times n} \end{bmatrix}$. 证明 M 不可逆.

提示. 考虑 $MN = E$, 利用分块矩阵的运算.

课堂练习

已知分块矩阵 $M = \begin{bmatrix} 0_{m\times m} & C_{m\times n} \\ 0_{n\times m} & D_{n\times n} \end{bmatrix}$. 证明 M 不可逆.

提示. 考虑 $NM = E$, 利用分块矩阵的运算

分块矩阵的运算

思考. 假设 $AB=E$, 其中 A 和 B 都是 n 阶方阵. 证明 A 等价于 E_n, 不可能等价于 $\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 其中, $r<n$. 从而, A 必然可逆. 再进一步说明 B 也可逆, 并且 $B=A^{-1}$.

提示. 反证法. 假设 $A=P\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q$, 其中, P 和 Q 是可逆矩阵. 那么, 根据 $AB=E_n$, 得到 $\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}QB=P^{-1}$. 所以, $C=\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}QB$ 是可逆矩阵. 但这不可能, 因为上述矩阵 C 形如 $\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

分块对角矩阵

定义 19 (分块对角矩阵)

形如

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix}$$

的 n 阶矩阵称为分块对角矩阵.

主对角线上子块 $A_i(i = 1, 2, \cdots, s)$ 均为方阵, 其余子块为零.

分块对角矩阵性质

- 两个同类型的分块对角矩阵

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_s \end{bmatrix},$$

的乘积为

$$AB=\begin{bmatrix} A_1B_1 & & & \\ & A_2B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_sB_s \end{bmatrix}$$

分块对角矩阵性质

- 分块对角矩阵可逆, 当且仅当 $A_1, A_2, \cdots, A_s$ 均可逆. 且

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{bmatrix}.$$

分块矩阵的广义初等变换

广义初等行变换:

1. 交换两行.
2. 用可逆矩阵 P左乘某一行.
3. 用矩阵 Q左乘某一行, 再加到另一行.

广义初等列变换:

1. 交换两列
2. 用可逆矩阵 P右乘某一列.
3. 用矩阵 Q 右乘某一列, 再加到另一列.

分块矩阵的广义初等变换

例 33 (P48 例 2.5.3)

设 A, D 均为 n 阶可逆矩阵. 求 $M=\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix}$ 的逆矩阵.

解. 对 $\left[\begin{array}{cc|cc} A & 0 & E & 0 \\ C & D & 0 & E \end{array}\right]$ 作广义初等行变换:

$$\xrightarrow{A^{-1}\text{左乘第一行}} \left[\begin{array}{cc|cc} E & 0 & A^{-1} & 0 \\ C & D & 0 & E \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-C\text{左乘第一行, 再加到第二行}} \left[\begin{array}{cc|cc} E & 0 & A^{-1} & 0 \\ 0 & D & -CA^{-1} & E \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{D^{-1}\text{左乘第二行}} \left[\begin{array}{cc|cc} E & 0 & A^{-1} & 0 \\ 0 & E & -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{array}\right]$$

故 $M^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix}$

分块矩阵的广义初等变换

课堂练习

利用广义初等变换求 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 的逆.

分块矩阵的广义初等变换

例 34

假设 A 是 $m\times n$ 矩阵, B 是 $n\times m$ 矩阵. 假设 E_m+AB 可逆. 证明 E_n+BA 也可逆. 并用 $(E_m+AB)^{-1}$ 表示 $(E_n+BA)^{-1}$.