线性代数（理工）

常寅山

第四章 向量空间

欧几里得向量空间

平面上的向量全体:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y)|x, y \in \mathbb{R}\}$$

对向量 $\alpha = (x_1, y_1)$, $\beta = (x_2, y_2)$, 有加法

$$\alpha + \beta = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

数乘 $k\alpha = (kx_1, ky_1)$.

欧几里得向量空间

三维欧氏空间:

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)|x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

对向量 $\alpha = (x_1, y_1, z_1)$, $\beta = (x_2, y_2, z_2)$, 有加法

$$\alpha + \beta = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2),$$

数乘 $k\alpha = (kx_1, ky_1, kz_1)$.

欧几里得向量空间

定义 1 (n 维向量)

n 元有序数组 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 称为 n 维行向量; 若写为

$$\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix},$$

则称为 n 维列向量. 称数 a_i 为 α 的第 i 个分量.

n 维行向量和 n 维列向量都称为 n 维向量.

欧几里得向量空间

两个 n 维向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$, 数 k,

- 向量相等: $\alpha = \beta$ 当且仅当 $a_i = b_i (i = 1, 2, \cdots, n)$.
- 加法: $\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)$.
- 数乘: $k\alpha = (ka_1, ka_2, \cdots, ka_n)$.
- 加法和数乘统称线性运算.

向量线性运算的性质

1. 加法交换律: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.
2. 加法结合律: $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.
3. 加法零元 0: $\alpha + 0 = \alpha$.
4. 加法负元: $\alpha + (-\alpha) = 0$.
5. 数乘单位元 1: $1\alpha = \alpha$.
6. 数乘的结合律: $k(\ell\alpha) = (k\ell)\alpha$.
7. 对向量加法的分配律: $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$.
8. 对数的加法的分配律: $(k + \ell)\alpha = k\alpha + \ell\alpha$.

欧几里得向量空间

定义 2 (n 维向量空间)

全体 n 维实行向量构成的集合 $\mathbb{R}^{1\times n}$, 对向量的加法, 实数与向量的数乘运算, 构成 n 维实行向量空间.
类似的, 全体 n 维实列向量构成的集合 $\mathbb{R}^{n\times 1}$, 对向量的加法, 实数与向量的数乘运算, 构成 n 维实列向量空间.
用 $\mathbb{R}^n$ 表示 $\mathbb{R}^{1\times n}$ 或 $\mathbb{R}^{n\times 1}$, 称为 n 维实向量空间.

欧几里得向量空间

例 1 (P85 例 4.1.1)

已知 $\alpha_1 = (1, -1, 2)$, $\alpha_2 = (1, 2, 0)$, $\alpha_3 = (1, 0, -3)$, $\alpha = \alpha_1 - 2\alpha_2 + 12\alpha_3$. 则 $\alpha = (11, -5, -34)$.

线性组合

定义 3

给定 $\mathbb{R}^n$ 中的向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$, 实数 $k_1, k_2, \cdots, k_p$, 经线性运算

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_p\alpha_p = \sum_{i=1}^{p} k_i\alpha_i = \beta$$

得到的向量 β 称为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ 的一个线性组合, 称 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ 线性表出.

例 2 (P85 例 4.1.2)

$\sqrt{3}\alpha_1 + \alpha_2$, $\frac{1}{2}\alpha_1 = \frac{1}{2}\alpha_1 + 0\alpha_2$, $0 = 0\alpha_1 + 0\alpha_2$ 均为 α_1, α_2 的线性组合.

线性表出

例 3 (P85 例 4.1.3)

$\mathbb{R}^n$ 中零向量可以由任意向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ 线性表出.

$$0 = 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \cdots + 0\alpha_p.$$

例 4 (P85 例 4.1.4)

任意 n 维向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 均为向量组
$e_1 = (1, 0, \cdots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \cdots, 0)$, $\cdots$, $e_n = (0, \cdots, 0, 1)$
的线性组合:

$$\alpha = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n.$$

线性表出与线性方程组的解

例 5

线性方程组: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn} = b_m, \end{cases}$

若将每个未知量 x_j 的系数记为 α_j, 常数项列记为 β, 即

$$\alpha_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, j = 1, 2, \cdots, n, \quad \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

则线性方程组可表示为 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$.
方程组有解当且仅当 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表出.

线性表出与线性方程组的解

例 6 (P85 例 4.1.5)

已知 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$. 则 β 能否写成 α_1 与 α_2 的线性组合?

解

问题等价于方程 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = \beta$ 是否有解, 即

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & = 7 \\ -2x_1 & +5x_2 & = 4 \\ -5x_1 & +6x_3 & = -3 \end{cases}$$

解方程得 $x_1 = 3$, $x_2 = 2$.
故 $\beta = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$.

线性表出

注 1

一般的, 判断 β 是否可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ 线性表出, 即判断方程

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots x_p\alpha_p = \beta$$

是否有解.

当 $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ 为列向量时, 方程对应的增广矩阵为 $[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p, \beta]$.

向量空间

定义 4 (向量空间)

令 V 为一定义了加法和数乘运算的集合, 即:

i) 任意 $x, y \in V$, 存在唯一 $x + y \in V$;

ii) 任意 $x \in V$ 与数 k, 存在唯一 $ka \in V$.

如果 V 及其上的加法及数乘运算满足如下八条公理, 则称其为向量空间.

1. 加法交换律: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.
2. 加法结合律: $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.
3. 存在加法零元 0: $\alpha + 0 = \alpha$.
4. 对任意 $\alpha \in V$, 存在加法负元 $-\alpha$ 满足: $\alpha + (-\alpha) = 0$.

向量空间

定义4（向量空间）续

5. 数乘单位元 1: $1\alpha = \alpha$.
6. 数乘的结合律: $k(\ell\alpha) = (k\ell)\alpha$.
7. 对向量加法的分配律: $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$.
8. 对数的加法的分配律: $(k + \ell)\alpha = k\alpha + \ell\alpha$.

注 2

此定义包含了向量空间对加法和数乘运算的封闭性.

向量空间

例 7

- $W = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$, 在其上按照通常的方法定义向量的加法和数乘运算, 构成向量空间;
- $W' = \{(x, y, 1) : x, y \in \mathbb{R}\}$, 在其上按照通常的方法定义向量的加法和数乘运算, 不构成向量空间.

例 8

考虑所有 $m \times n$ 矩阵的集合 $M_{m\times n}$, 在其上定义的矩阵加法, 实数与矩阵的数乘, 构成向量空间.

向量空间

例 9

考虑所有的多项式构成的集合 P.

- 对 $p(x), q(x) \in P$, 定义 $(p+q)(x) = p(x) + q(x)$;
- 对 $p(x) \in P$, $k \in \mathbb{R}$, 定义 $(kp)(x) = kp(x)$.

则我们得到一个向量空间.

例 10

考虑闭区间 $[0, 1]$ 上的所有连续函数构成的集合 $C[0, 1]$,

- 对两个函数 $f, g \in C[0, 1]$, 定义 $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$,
- 对 $f \in C[0, 1]$, $k \in \mathbb{R}$, 定义 $(kf)(x) = kf(x)$.

则我们得到一个向量空间.

第四章 向量空间

子空间

例 11

考察 $\mathbb{R}^3$ 中过原点的平面 P, 以及向量加法和数乘运算, 则仍构成一个向量空间. 另一方面, 它是向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的一部分, 故可称其为 $\mathbb{R}^3$ 的子空间.

问题

哪些性质保证向量空间 V 的子集 H 仍然构成向量空间?

子空间

定义 5 (子空间)

向量空间 V 的一个非空子集 H 如果满足:

i) 对任意 $\alpha, \beta \in H$, 则 $\alpha + \beta \in H$,

ii) 对任意数 k, 任意向量 $\alpha \in H$, 有 $k\alpha \in H$.

则称 H 是 V 的一个子空间.

注 3 (理解" 子空间":)

- 抽象: H 是 V 的子集, 它对 V 中加法与数乘封闭, 且仍然满足向量空间的 8 条公理, 是向量空间.
- 几何直观: 平面上过原点的直线, 空间中过原点的平面, 空间中过原点的直线.

子空间

注 4

(1) 设 H 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间, 则 $0 \in H$.

(2) {零向量} (称为零子空间) 和全空间 $\mathbb{R}^n$ 都是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, 称为 $\mathbb{R}^n$ 的平凡子空间.

子空间

例 12 (P94 例 4.4.2)

在欧氏空间中, 过原点的直线为子空间; 不过原点的直线不是子空间.

例 13 (P94 例 4.4.3)

在欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中, 设

$$\begin{aligned} W_1 &= \{(x, y, 0)^T \mid x, y \in \mathbb{R}\}, \\ W_2 &= \{(x, 0, z)^T \mid x, z \in \mathbb{R}\}, \\ W_3 &= \{(0, y, z)^T \mid y, z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

即 W_1 是 XY 平面, W_2 是 XZ 平面, W_3 是 YZ 平面, 他们均为 $\mathbb{R}^3$ 的子空间.

子空间

例 14 (P93 例 4.4.1)

若 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^n$, 则 $H = \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 | k_1, k_2 \in \mathbb{R}\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间.

证明 H 对加法和数乘封闭即可.

证明.

- 任取 $\beta = s_1\alpha_1 + s_2\alpha_2$, $\gamma = t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2$, 则

$$\beta + \gamma = (s_1 + t_1)\alpha_1 + (s_2 + t_2)\alpha_2 \in H.$$

- 任取 $\beta = s_1\alpha_1 + s_2\alpha_2$, $k \in \mathbb{R}$,

$$k\beta = (ks_1)\alpha_1 + (ks_2)\alpha_2 \in H.$$

故 H 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. □

向量集合张成的子空间

命题 1

给定向量空间 V, 则 $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in V$ 的所有可能的线性组合构成的集合

$$\text{span}\{\alpha_1, \cdots, \alpha_p\} = \{k_1\alpha_1 + \cdots + k_p\alpha_p | k_1, k_2, \cdots, k_p \in \mathbb{R}\}$$

是 V 的子空间.

证明 $\text{span}\{\alpha_1, \cdots, \alpha_p\}$ 对加法和数乘封闭即可.

证明.

- 任取 $\beta = k_1\alpha_1 + \cdots + k_p\alpha_p$, $\gamma = s_1\alpha_1 + \cdots + s_p\alpha_p$, 则 $\beta+\gamma = (k_1+s_1)\alpha_1+\cdots+(k_p+s_p)\alpha_p \in \text{span}\{\alpha_1, \cdots, \alpha_p\}$
- 任取 $\beta = k_1\alpha_1 + \cdots + k_p\alpha_p$, $\lambda \in \mathbb{R}$, 则 $\lambda\beta = (\lambda k_1)\alpha_1 + \cdots + (\lambda k_p)\alpha_p \in \text{span}\{\alpha_1, \cdots, \alpha_p\}$.

故 $\text{span}\{\alpha_1, \cdots, \alpha_p\}$ 为 V 的子空间. $\square$

向量集合张成的子空间

定义 6

给定向量空间 V, 则 $\alpha_1,\dots,\alpha_p \in V$ 的所有可能的线性组合构成的集合

$$\mathrm{span}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_p\} = \{k_1\alpha_1 + \cdots + k_p\alpha_p | k_1, k_2, \cdots, k_p \in \mathbb{R}\}$$

称为由 $\alpha_1,\alpha_2\dots,\alpha_p$ 生成 (或张成) 的子空间, 称 $\{\alpha_1,\alpha_2\dots,\alpha_p\}$ 为该子空间的一个生成集 (或张集).

几何上看, 若 $\alpha \in \mathbb{R}^n$ 为非零向量, 则 $\mathrm{span}\{\alpha\}$ 为向量 α 确定的直线; 若两个非零向量 $\alpha,\beta \in \mathbb{R}^n$ 不共线, 则 $\mathrm{span}\{\alpha,\beta\}$ 为 α 和 β 确定的平面,

向量集合张成的子空间

例 15

下列哪些向量组可以张成 $\mathbb{R}^3$?

1) $\{e_1, e_2, e_3\}$, 是
2) $\{e_1, e_2, e_3, (1,2,3)^T\}$, 是
3) $\{(1,1,1)^T, (1,1,0)^T, (1,0,0)^T\}$, 是
4) $\{(1,0,1)^T, (0,1,0)^T\}$, 否
5) $\{(1,2,4)^T, (2,1,3)^T, (4,-1,1)^T\}$. 否

$\mathrm{span}\{(1,0,1)^T, (0,1,0)^T\} = \{(a,b,a) | a, b \in \mathbb{R}\}$
$\mathrm{span}\{(1,2,4)^T, (2,1,3)^T, (4,-1,1)^T\}$
$= \{(a,b,c) | 3c - 5b - 2a = 0\} \subset \mathbb{R}^3$.

值域空间

定义 7

设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 记 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]$. A 的列向量张成的空间

$$\begin{aligned} \mathrm{Col} A &= \mathrm{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\} \\ &= \{Ax | x \in \mathbb{R}^n\} \end{aligned}$$

称为 A 的列空间或值域空间

注 5

$A_{m \times n}$ 的值域空间是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间.

值域空间

例 16 (P94 例 4.4.4)

设 $A=\begin{bmatrix}1 & -3 & -4\\ -4 & 6 & -2\\ -3 & 7 & 6\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}3\\ 3\\ -4\end{bmatrix}$. 判断 b 是否属于 $\mathrm{Col}A$.

分析: 即判断是否存在 x 使得 $Ax=b$.

解

$b\in \mathrm{Col}A$ 当且仅当方程 $Ax=b$ 有解.
对增广矩阵 $[A,b]$ 作初等行变化得:

$$\begin{bmatrix}1 & -3 & -4 & 3\\ -4 & 6 & -2 & 3\\ -3 & 7 & 6 & -4\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -3 & -4 & 3\\ 0 & -6 & -18 & 15\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

方程组相容, 故有解.
故 $b\in \mathrm{Col}A$.

零空间

定义 8 (零空间)

设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 则齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的所有解构成的集合

$$\mathrm{Nul} A = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\}$$

称为 A 的零空间

零空间

注 6

$\mathrm{Nul}A$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间.

证明.

- 任取 $\alpha, \beta \in \mathrm{Nul}A$, 则 $A(\alpha+\beta) = A\alpha + A\beta = 0$, 即 $\alpha+\beta \in \mathrm{Nul}A$.
- 任取 $\alpha \in \mathrm{Nul}A$, $k \in \mathbb{R}$, 则 $A(k\alpha) = kA\alpha = 0$, 即 $k\alpha \in \mathrm{Nul}A$.

故 $\mathrm{Nul}A$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. $\square$

零空间

例 17 (P95 例 4.4.5)

令 $A=\begin{bmatrix}-3 & 6 & -1 & 1 & 7\\ 1 & -2 & 2 & 3 & 1\\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4\end{bmatrix}$, 求 Nul$A$ 的一个生成集.

解

求解 $Ax=0$. 对 A 进行初等行变换化为行最简形式:

$$A\to\begin{bmatrix}1 & -2 & 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

即 $\begin{cases} x_1-2x_2 \qquad\quad -x_4+3x_5 &=0\\ \qquad\qquad x_3+2x_4-2x_5 &=0\end{cases}$

通解为 $\begin{cases} x_1=2x_2+x_4-3x_5\\ x_3=-2x_4+2x_5\end{cases}$

零空间

解续

也可写为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_2 \\ -2x_4 + 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

记 $\alpha = (2, 1, 0, 0, 0)^T$, $\beta = (1, 0, -2, 1, 0)^T$, $\gamma = (-3, 0, 2, 0, 1)^T$, 则 $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ 为 Nul$A$ 的一个生成集.

第四章 向量空间

线性相关性

引例

设 $S=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}\subset\mathbb{R}^3$,

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},$$

则 $\mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}=\mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2\}=\{(x,y,0)^T|x,y\in\mathbb{R}\}$

问题

考虑向量组张成的子空间, 如何找子空间最简单的生成集? 或者如何判断生成集元素是最少的?

线性相关性

问题

考虑向量组张成的子空间, 如何找子空间最简单的生成集? 或者如何判断生成集元素是最少的?

- 如果某个向量可以由其他向量线性表出, 则可以将它剔除.
- 给定 k 个向量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$, 可以将其中一个向量表示为其余 $k-1$ 个向量的线性组合的充要条件为存在不全为零的常数 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 使得

$$c_1\alpha_1 + \cdots + c_k\alpha_k = 0$$

线性相关性

定义 9 (线性相关性)

已知 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的一组向量,

- 如果方程 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_p\alpha_p = 0$ 仅有零解, 则称 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\}$线性无关;
- 如果存在不全为零的常数 $k_1, k_2, \cdots, k_p$, 使得
$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_p\alpha_p = 0$$
则称 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\}$线性相关.

注 7

- 给定向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\}$, 它要么线性相关，要么线性无关.
- 向量组的线性相关性, 与向量组的排列顺序无关.

线性相关性

例 18 (P86 例 4.2.1)

$\mathbb{R}^n$ 中的基本向量组 $e_1 = (1, 0, \cdots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \cdots, 0)$, $\cdots$, $e_n = (0, \cdots, 0, 1)$ 线性无关.

证明.

设 $k_1 e_1 + k_2 e_2 + \cdots + k_n e_n = 0$, 即 $[k_1, k_2, \cdots, k_n] \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = 0.$

即 $[k_1, k_2, \cdots, k_n] E = 0$,
故 $[k_1, k_2, \cdots, k_n] = 0$.
向量组 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 线性无关. $\square$

线性相关性

例 19 (P87 例 4.2.2)

包含零向量的向量组线性相关.

证明.

设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, 且 $\alpha_i = 0$. 则取 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 使得 $k_i = 1$, $k_j = 0, j \neq i$. 则

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0.$$

向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性相关. $\square$

线性相关性

例 20 (P87 例 4.2.3)

已知 $\alpha_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$.

(1) 判断 α_1,α_2, α_3 的线性相关性;

(2) 若线性相关, 求 α_1,α_2, α_3 之间的一个非平凡线性关系.

考虑方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$ 是否有零解, 即:

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = 0.$$

线性相关性

解

考虑方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$.
将系数矩阵 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 作初等行变换, 化为行最简形式

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

故方程有非零解, 即 α_1,α_2, α_3 的线性相关.
方程组等价于 $\begin{cases} x_1 \qquad -2x_3 = 0 \\ \qquad x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$
其一个非零解为 $(2, -1, 1)$, 故 $2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0$.

线性相关性

例 21 (P88 例 4.2.4)

判断 $A=\begin{bmatrix}0&1&4\\1&2&-1\\5&8&0\end{bmatrix}$ 的列线性相关性与行的线性相关性.

列的线性相关性: $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$, 需考虑 $AX=0$ 是否有非零解.

行的线性相关性: $A=\begin{bmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\end{bmatrix}$, $x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=0$ 当且仅当 $[x_1,x_2,x_3]A=0$. 我们考虑 $XA=0$ 是否有零解.

注 8

方阵 A 的列线性无关 $\Leftrightarrow \det A\neq 0 \Leftrightarrow A$ 的行线性无关.

线性相关性

例 22 (P88 例 4.2.5)

行阶梯形矩阵的非零行构成一个线性无关的行向量集合.
如

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

线性相关性

例 23 (P88 例 4.2.6)

已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中三个线性无关的向量. 若

$$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_3 + \alpha_1,$$

证明 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关.

思路: 证明方程 $x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = 0$ 只有零解.

线性相关性

证明.

考虑方程 $x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = 0$,
则 $x_1(\alpha_1+\alpha_2) + x_2(\alpha_2+\alpha_3) + x_3(\alpha_3+\alpha_1) = 0$,
整理得, $(x_1+x_3)\alpha_1 + (x_1+x_2)\alpha_2 + (x_2+x_3)\alpha_3 = 0$.
因 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 故

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

解得 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. 故 β_1,β_2,β_3 线性无关. $\square$

线性相关性

另一个观点: 不妨设均为列向量.

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\text{ 记作 }(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A.$$

$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)X=0$ 当且仅当 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)AX=0$,
当且仅当 $AX=0$. 关键是 $\det A\neq 0$.

线性相关性

小结

考虑向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 的线性相关性, 只需考虑方程

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = 0$$

是否有非零解.
特别的, 如果 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 为列向量, 记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$, 上述方程即为齐次线性方程组 $AX = 0$,

- $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性相关当且仅当 $AX = 0$ 有非零解;
- $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性无关当且仅当 $AX = 0$ 只有零解.

线性相关性

性质 1

- 一个向量 α 线性相关当且仅当 $\alpha = 0$.
- 两个向量 α,β 线性相关, 当且仅当其中一个是另一个的倍数. (几何上看, 两个向量线性无关, 当且仅当不共线.)
- 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p, (p \geq 2)$ 线性相关当且仅当其中至少一个可由其余 $p-1$ 个线性表出.

线性相关性

$p \geq 2$ 时的证明.

- 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ 线性相关, 则存在不全为 0 的数 $k_1, \cdots, k_p$ 使得 $k_1\alpha_1 + \cdots + k_p\alpha_p = 0$.
  不妨设 $k_i \neq 0$, 则

$$\alpha_i = -\frac{k_1}{k_i}\alpha_1 - \cdots - \frac{k_{i-1}}{k_i}\alpha_{i-1} - \frac{k_{i+1}}{k_i}\alpha_{i+1} - \cdots - \frac{k_p}{k_i}\alpha_p$$

  即 α_i 可由其余 $p-1$ 个向量线性表出.
- 另一方面, 若
  $\alpha_i = k_1\alpha_1 + \cdots + k_{i-1}\alpha_{i-1} + k_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + k_p\alpha_p$,
  则 $k_1\alpha_1 + \cdots + k_{i-1}\alpha_{i-1} - \alpha_i + k_{i+1}\alpha_i + \cdots + k_p\alpha_p = 0$,
  故 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ 线性相关. □

线性相关性

例 24 (P89 例 4.2.7)

向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\}$ (I) 线性无关, $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p, \beta\}$ (II) 线性相关, 则 β 可由 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\}$ 线性表出.

证明.

因 (II) 线性相关, 故存在不全为零的数 $k_1, \cdots, k_p, k$ 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_p\alpha_p + k\beta = 0.$$

若 $k = 0$, 则 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_p\alpha_p = 0$, 且 $k_1, k_2, \cdots, k_p$ 不全为零, 与 (I) 线性相关矛盾.
故 $k \neq 0$.

$$\beta = -\frac{k_1}{k}\alpha_1 - \frac{k_2}{k}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_p}{k}\alpha_p. \qquad \square$$

线性相关性

性质 2

向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\}$ 的一个部分线性相关, 则 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\}$ 线性相关.

证明.

不妨设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_t (t \leq p)$ 线性相关. 则存在不全为零的数 $k_1, \cdots, k_t$, 使得 $k_1\alpha_1 + \cdots + k_t\alpha_t = 0$.
从而存在不全为零的数 $k_1, \cdots, k_t, 0, \cdots, 0$, 使得

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_t\alpha_t + 0\alpha_{t+1} + \cdots + 0\alpha_p = 0.$$

即 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\}$ 线性相关. □

逆否命题: 若向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\}$ 线性无关, 则其中的任意 t 个 ($t \geq 1$) 向量也线性无关.

线性相关性

- 给定一个线性无关向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\}$,
  - 从中剔除几个向量, 剩下的向量仍然线性无关.
  - 往里添加几个向量, 新的向量组可能线性相关, 可能线性无关.
- 给定一个线性相关向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\}$,
  - 往里添加几个向量, 新的向量组仍然线性相关.
  - 从中剔除几个向量, 剩下的向量可能线性相关, 可能线性无关.

线性相关性

性质 3

向量组 $\alpha_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{sj})^T$, $j=1,2,\cdots,p$ 线性无关, 分别在 α_j 的后面添加 t 个 $(t\geq 1)$ 分量得 $\beta_j=(a_{1j},\cdots,a_{sj},a_{(s+1)j},\cdots,a_{(s+t)j})^T$, $j=1,2,\cdots,p$. 则 $\beta_1,\cdots,\beta_p$ 线性无关.

证明.

考虑线性方程组 $k_1\beta_1+\cdots+k_p\beta_p=0$, (1)

此方程组的前 s 个方程即 $k_1\alpha_1+\cdots+k_p\alpha_p=0$, (2)

由于 $\alpha_1,\cdots,\alpha_p$ 线性无关, 方程组 (2) 只有零解, 故方程组 (1) 也只有零解, 故 $\beta_1,\cdots,\beta_p$ 线性无关. . □

线性相关性

性质 4

n 个 n 维列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性相关的充要条件是 n 阶行列式

$$\det(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = 0.$$

证明.

n 维列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性相关当且仅当

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$$

存在非零解, 即 $[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]X = 0$ 存在非零解.
而后者当且仅当 $\det(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = 0$. □

推论 1

n 个 n 维列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关的充要条件是 n 阶行列式 $\det(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \neq 0$.

线性相关性

性质 5

如果向量组所含的向量个数比向量的分量数目更多, 则向量组线性相关. 即: 若 $m > n$, 则 $\mathbb{R}^n$ 中的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关.

证明.

考虑线性方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = 0,$$

它有 n 个方程, m 个未知数, $m > n$, 故一定有非零解. 故 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关. $\square$

第四章 向量空间

向量组的极大线性无关组和秩

问题

给定一个向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\}$. 我们希望找到 $H = \mathrm{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\}$ 的较为简单的生成集. 我们已经知道, 如果向量组线性相关, 则其中某个向量可由其他向量线性表出, 剔除这个向量后, 剩下的向量仍然张成 H.

- 如果 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\}$ 线性无关, 它是否就是 H 的一个最简单 (向量个数最少) 的生成集?
- H 可不可以由其他向量组生成? 如果可以, 这个向量组 $\{\beta_1, \cdots, \beta_t\}$ 和 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_p\}$ 有什么关系?

向量组等价

定义 10

如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$(I) 的每个向量都可以由向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ (II) 线性表出, 则称向量组 (I) 可由 (II)线性表出; 如果向量组 (I) 和 (II) 可以互相线性表出, 则称 (I) 和 (II)等价,

注 9

- 向量组的部分可由全组线性表出;
- $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ 线性相关, 当且仅当 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ 可由某个部分组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_s}$, $s < p$, 线性表出.

线性表示与矩阵乘法

命题 2

- $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$ 线性表出当且仅当存在 $t \times s$ 矩阵 A 使得

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t)A.$$

- 若 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$ 线性表出，$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$ 可由 $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_l$ 线性表出，则 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 可由 $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_l$ 线性表出.

线性表示与矩阵乘法

证明

- $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$ 线性表出当且仅当存在实数 a_{ij} （$i = 1, \cdots, t; j = 1, \cdots, s$）使得
  $\alpha_1 = a_{11}\beta_1 + a_{21}\beta_2 + \cdots + a_{t1}\beta_t,$
  $\ldots$
  $\alpha_s = a_{1s}\beta_1 + a_{2s}\beta_2 + \cdots + a_{ts}\beta_t,$

线性性表示与矩阵乘法

证续.

写成矩阵乘法形式即为:

$$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s)=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{ts} \end{bmatrix}$$

- $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s)=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t)A_{ts}$,
  $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t)=(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_l)B_{lt}$
  故 $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s)=(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_l)B_{lt}A_{ts}$,
  即 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 可由 $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_l$ 线性表出. $\square$

线性相关性与向量个数

定理 2

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性表出, 且 $p > t$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ 线性相关.

证明.

设 $[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p] = [\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t]A_{t\times p}$,
任取齐次线性方程组 $AX = 0$ 的非零解
$X = [k_1, k_2, \cdots, k_p]^T$, 则
$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_p\alpha_p = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p]X$
$= [\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t]AX = 0$,
故 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ 线性相关. □

例 25

任意 $n+1$ 个 n 维向量线性相关, 因它可由向量组 $e_1 = (1, 0, \cdots, 0)^T, \cdots, e_n = (0, \cdots, 0, 1)^T$ 线性表出.

线性相关性与向量个数

推论 3

若线性无关的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性表出，则 $p \le t$.

定理 4

两个等价的线性无关向量组含有相同个数的向量.

证明.

设两个等价的线性无关向量组为 (I):$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$
(II):$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$.
因为 (I) 可由 (II) 线性表出, (I) 线性无关, 所以, $s \le t$.
因为 (II) 可由 (I) 线性表出, (II) 线性无关, 所以, $t \le s$.
故 $s = t$ □

等价关系

定义 11 (等价关系)

一般的, 考虑非空集合中任意两个元素的二元关系, 如果它满足如下三条性质,

1. 自反性,
2. 对称性,
3. 传递性,

则称其为等价关系.

特别的, 向量组等价满足如上三条性质.

极大线性无关组

定义 12 (极大线性无关组)

设 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r}$ (II) 是向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$(I) 的部分向量. 如果

1) $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r}$ (II) 线性无关,
2) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$(I) 可由 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r}$ (II) 线性表出,

则称 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r}$(II) 是 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$(I) 的极大线性无关组.

极大线性无关组

注 10

“极大”: 由于原向量组可由它们线性表出, 所以, 任意再加入一个向量到这个组中, 这个组都会变为线性相关. 所以, 极大线性无关组是原向量组中最大的那个线性无关组.

注 11

同时, 极大线性无关组也是极小可线性表出组: 它是可以线性表出原向量组 (I) 的子向量组在包含关系下的极小组. 任何比极大线性无关组严格小的向量组都不能完全的线性表出 (I).

极大线性无关组

定理 5

向量组 (I) :$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 的任意两个极大线性无关组的向量个数相等.

证明.

设 (II): $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r}$ 和 (III):$\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \ldots, \alpha_{j_m}$ 是 (I) 的任意两组极大线性无关组.
则 (II) 和 (III) 均为线性无关组, 且可以互相线性表出, 故 $r = m$. □

注 12

极大线性无关组中向量的个数与无关组的选择无关, 它是原向量组的本质属性. 我们称这个数为向量组的秩.

秩

定义 13 (秩)

称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 的一个极大线性无关组中向量的个数为原向量组的秩, 记为 $r\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\}$ 或秩 $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\}$.
特别的, 对零向量组 $\{0\}$, 规定其秩为 0.

推论 6

设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 的秩为 r,

- 若 $r < s$, 则向量组线性相关;
- 若 $r = s$, 则向量组线性无关.

秩

定理 7

如果 (I) : $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 可由 (II) : $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$ 线性表出，则

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) \leq r(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t).$$

证明.

设 (III)$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r}$ 和 (IV):$\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \ldots, \beta_{j_m}$ 是 (I) 和 (II) 的极大线性无关组.
所以, (III) 可由 (I) 线性表出, (I) 可由 (II) 线性表出, (II) 可由 (IV) 线性表出, 所以, (III) 可由 (IV) 线性表出.
又因为 (III) 线性无关, 所以, $r \leq m$. □

秩

推论 8

等价的向量组的秩相等.

注 13

秩相等的两个向量组不一定等价.
例如：$\alpha_1 = (1,0,0)^T, \alpha_2 = (0,1,0)^T$ 和向量组
$\beta_1 = (1,0,0)^T, \beta_2 = (0,0,1)^T$.

秩

例 26

证明: 设 $r(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) = r$, 则其中任意 $t > r$ 个向量 (I):$\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_t}$ 线性相关.

证明.

设 (II):$\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \ldots, \alpha_{k_r}$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 的极大线性无关组.
则 (I) 可由 (II) 线性表出, 故 $r(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_t}) \leq r$.
又因 $t > r \geq r(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_t})$, 所以 (I) 线性相关. $\square$

秩

例 27

证明: 设 $r(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)=r$, 且 (I):$\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_r}$ 线性无关, 则 (I) 是原向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 的一个极大线性无关组.

思路: 需证明 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 可由 (I) 线性表出.

证明.

可考虑反证法. 设 α_j 不能由 (I) 线性表出, 将 α_j 加入 (I) 中得到新的向量组 $\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_r},\alpha_j$, 此向量组线性无关, 故秩 $=r+1$.

但 $r(\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_r},\alpha_j)\le r(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)=r$, 矛盾.

故 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 可由 (I) 线性表出, 从而则 (I) 是原向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 的一个极大线性无关组. $\square$

初等行变换求列向量组的极大无关组

定理 9

对 n 维列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 作相同的初等行变换，其线性相关性不变. 即，对任意可逆矩阵 P 有
$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$ 当且仅当

$$k_1 P\alpha_1 + k_2 P\alpha_2 + \cdots + k_s P\alpha_s = 0.$$

证明.

记 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s]$, P 为可逆矩阵, 则齐次线性方程 $AX = 0$ 与 $PAX = 0$ 同解. $\square$

注 14

初等行变换不改变矩阵的列之间的线性关系.

初等行变换求列向量组的极大无关组

例 28 (P92 例 4.3.1)

求列向量组

$$\alpha_1 = (-1, 1, 0, 0)^T, \alpha_2 = (-1, 2, -1, 1)^T,$$

$$\alpha_3 = (0, -1, 1, -1)^T, \alpha_4 = (1, -3, 2, 3)^T,$$

$$\alpha_5 = (2, -6, 4, 1)^T$$

的秩与一个极大无关组. 并用该极大无关组表示向量组中的其余向量.

解

对 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_5]$ 作初等行变化变为行最简形式:

初等行变换求列向量组的极大无关组

解续

$$C=\begin{bmatrix}1&0&1&0&1\\0&1&-1&0&-2\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=[\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4,\gamma_5]$$

C 的列向量的线性无关组 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_4$, 满足 $\gamma_3=\gamma_1-\gamma_2$, $\gamma_5=\gamma_1-2\gamma_2+\gamma_4$. 对应着 A 的列向量的极大线性无关组, 故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 为一个极大线性无关组.

对应的, $\alpha_3=\alpha_1-\alpha_2$, $\alpha_5=\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_4$.

注. 主元列对应列向量的极大线性无关组, 化成阶梯型矩阵即可判断出.

初等行变换求列向量组的极大无关组

思考

向量组 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_5)$ 是否还有其他极大无关组?

观察行最简形式:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5]$$

初等行变换不改变列向量的线性关系

练习（练习册 P54 第八题）

设向量组 $\alpha_1=(1,0,1)^T$,$\alpha_2=(0,1,1)^T$, $\alpha_3=(1,3,5)^T$, $\beta_1=(1,1,1)^T$, $\beta_2=(1,2,3)^T$, $\beta_3=(3,4,a)^T$.

- 若向量组 α_1,α_2,α_3 不能由向量组 β_1, β_2, β_3 线性表出，求 a.
- 将 β_1,β_2,β_3 用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出.

第四章 向量空间

基

问题

对于给定向量空间 V, 其最小的生成集 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$ 应满足哪些性质?

- V 中向量均能由 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$ 线性表出
- $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$ 线性无关.

基

定义 14 (基)

对向量空间 V 中的向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, 如果:

1) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 线性无关.
2) V 中每一个向量都可由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 线性表出

那么称 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 是 V 的一组基.

注 15

当 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 是 V 的一组基时, 有

$$V = \operatorname{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r\}.$$

基

例 29

向量组 $e_1 = (1, 0, \cdots, 0)^T$, $e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0)^T$, $\cdots$, $e_n = (0, \cdots, 0, 1)^T$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基. (称为标准基.)

基

例 30 (P96 例 4.5.2)

可逆 n 阶方阵 A 的 n 个列向量, 构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组基.

证明.

- A 可逆, 故齐次线性方程组 $AX = 0$ 只有零解, 故 A 的 n 个列向量线性无关.
- A 可逆, 则对任意 $\beta \in \mathbb{R}^n$, $AX = \beta$ 存在唯一解, 故任意列向量 β 可写成 A 的 n 个列向量的线性组合, 故 A 的 n 个列向量张成 $\mathbb{R}^n$.

综上, A 的 n 个列向量, 构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组基. $\square$

向量组张成空间的基

定理 10

设 $S=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_p\}\subset\mathbb{R}^n$, $H=\mathrm{span}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_p\}$.

i) 如果 S 中某个向量 α_k 是 S 中其余向量的线性组合, 则 $S\setminus\{\alpha_k\}$ 仍是 H 的生成集.

ii) 如果 $H\neq\{0\}$, 则 S 的某个子集是 H 的基.

证明

- 不妨设 α_p 是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{p-1}$ 的线性组合, 即

$$\alpha_p=c_1\alpha_1+\cdots+c_{p-1}\alpha_{p-1}$$

H 中任意向量 α 可以表示为

$$\alpha=k_1\alpha_1+\cdots+k_{p-1}\alpha_{p-1}+k_p\alpha_p,$$

带入 α_p 可得, α 可表示为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{p-1}$ 的线性组合.

向量组张成空间的基

证明续.

- 如果 S 线性无关, 则为 H 的基.
  否则, S 中的某个向量 α_k 是其余向量的线性组合. 由 i) 可知, $S\setminus\{\alpha_k\}$ 仍是 H 的生成集. 重复这一过程, 直到新的生成集 S' 线性无关. (因 $H\neq\{0\}$, S' 至少含有一个向量.) 则 S' 为 H 的基. □

注 16

由此可知, 已知向量空间 H 的生成集 S, 找出 S 的极大线性无关组, 即为 H 的基.

零空间的基

例 31 (P97 例 4.5.3)

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 6 & -1 & 1 & -7\\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1\\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4\end{bmatrix},$$ 求 Nul$A$ 的一组基.

想法: 先找生成集, 再确定其极大线性无关组.

解

利用初等行变换, 将 A 化为行最简形式:

$$A\to\begin{bmatrix}1 & -2 & 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

即 $$\begin{cases} x_1-2x_2 \qquad\qquad -x_4+3x_5=0,\\ \qquad\qquad\qquad x_3+2x_4-2x_5=0,\end{cases}$$

零空间的基

解续

$Ax=0$ 的通解为 $\begin{cases} x_1 = 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_3 = -2x_4 + 2x_5 \end{cases}$

也可写为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_2 \\ -2x_4 + 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

记 $\alpha = (2,1,0,0,0)^T$, $\beta = (1,0,-2,1,0)^T$, $\gamma = (-3,0,2,0,1)^T$, 则 $\{\alpha,\beta,\gamma\}$ 为 $\mathrm{Nul}A$ 的一个生成集. 另一方面, α,β,γ 线性无关 (观察第 2,4,5 分量), 故 $\{\alpha,\beta,\gamma\}$ 为 $\mathrm{Nul}A$ 的一组基.

列空间的基

例 32 (P98 例 4.5.4)

求行最简矩阵 $B=\begin{bmatrix}1&0&-3&5&0\\0&1&2&-1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$, 求 $\mathrm{Col}B$ 的一组基.

解.

记 $B=[\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5]$. 则 β_1, β_2, β_5 为主元列,

$$\beta_3=-3\beta_1+2\beta_2,\quad \beta_4=5\beta_1-\beta_2,$$

是主元列的线性组合.
$\mathrm{Col}B=\mathrm{span}\{\beta_1,\cdots,\beta_5\}=\mathrm{span}\{\beta_1,\beta_2,\beta_5\}$, 故 $\{\beta_1,\beta_2,\beta_5\}$ 为 $\mathrm{Col}B$ 的生成集. 另一方面, β_1,β_2,β_5 线性无关, 故 $\{\beta_1,\beta_2,\beta_5\}$ 为 $\mathrm{Col}B$ 的一组基. □

列空间的基

注 17

对于行最简形式矩阵 B, B 的主元列构成了 $\mathrm{Col}B$ 的一组基.

回忆

定理 11

矩阵的初等行变换, 不改变矩阵列之间的线性关系.

证明.

对可逆矩阵 P, 线性方程组 $Ax = 0$ 与 $PAx = 0$ 同解. $\square$

定理 12

A 的主元列构成 $\mathrm{Col}A$ 的一组基.

列空间的基

例 33 (P98 例 4.5.5)

已知 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5]=\begin{bmatrix}1&3&3&2&-9\\-2&-2&2&-8&2\\2&3&0&7&1\\3&4&-1&11&8\end{bmatrix}$,

求 Col$A$ 的一组基.

解.

将 A 作初等行变换, 化为行最简形式: $\begin{bmatrix}1&0&-3&5&0\\0&1&2&-1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$,

其主元列为第 1, 2, 5 列, 故 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5\}$ 是 Col$A$ 的一组基. □

基

课堂练习 (练习册 P57 第三题)

已知 $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 9 & -2 \\ 6 & 5 & 1 & 12 \\ 3 & 4 & 8 & -3 \end{bmatrix}$ 求 $\mathrm{Col}A$ 和 $\mathrm{Nul}A$ 的一组基.

维数

问题

向量空间的基并不唯一. 讨论其不同的基, 所含向量个数.

我们将证明, 向量空间的基, 所含向量个数相同, 并将其个数定义为向量空间的维数.

维数

引理 1

设 $S=\{\beta_1,\cdots,\beta_p\}$ 是向量空间 H 的生成集. 设 $m>p$, 则 H 中任意 m 个向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性相关.

证明.

记 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=(\beta_1,\cdots,\beta_p)A_{p\times m}$,
因 $m>p$, 线性方程组 $Ax=0$ 有非零解, 取一个非零解 $(c_1,c_2,\cdots,c_m)$,
则 $c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_m\alpha_m=0$.
故 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性相关. □

维数

定理 13

H 的一组基包含 p 个向量, 则 H 的任一组基都包含 p 个向量.

证明.

设 $B=\{\beta_1,\cdots,\beta_p\}$ 是 H 的一组基, $S=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_k\}$ 是 H 的另一组基.
由于 B 是 H 的生成集, 则 H 中任意多于 p 个向量线性相关. 而 S 是 H 的基, $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 线性无关. 故 $k\leq p$.
类似可得, $p\leq k$.
故 $p=k$. □

即 H 的基, 含向量个数相同.

维数

定义 15

设 H 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间且 $H \neq \{0\}$, 称 H 的一组基中向量的个数为 H 的维数, 记为 $\dim H$.
规定子空间 $\{0\}$ 的维数为 0.

注 18

维数是空间的内在性质, 与基的选择无关.

例 34

$e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T, \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)^T$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基, $\dim \mathbb{R}^n = n$.

维数

例 35 (P99 例 4.5.6)

将 $\mathbb{R}^3$ 的子空间按照维数分类:

- 0 维子空间: $\{0\}$;
- 1 维子空间: 过原点的直线;
- 2 维子空间: 过原点的平面;
- 3 维子空间: $\mathbb{R}^3$.

例 36 (P99 例 4.5.7)

对矩阵 A, $\mathrm{Nul}A$ 的维数为 $Ax = 0$ 中自由变量的个数, $\mathrm{Col}A$ 的维数等于 A 的主元列数,

基与维数

定理 14

若向量空间 H 的维数 $\dim H = p \geq 1$，则

1) H 中任意 p 个线性无关的向量构成 H 的一组基；
2) 如果 H 中 p 个向量构成 H 的生成集，则这 p 个向量也构成 H 的一组基.

定理 15

若向量空间 H 的维数为 $p \geq 1$，则

1) 没有少于 p 个向量的集合能张成 H；
2) 任何少于 p 个的线性无关向量，可以通过添加新的线性无关向量，扩展为 H 的一组基；
3) 任何多于 p 个向量的张集，可以通过删除其中的向量得到 H 的一组基.

张集, 基与维数

定理 16

设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ 和 $\beta_1, \cdots, \beta_t$ 是向量空间 H 的两个向量组. 则

1) $\operatorname{span}\{\alpha_1, \cdots, \alpha_p\} = \operatorname{span}\{\beta_1, \cdots, \beta_t\}$ 当且仅当 $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ 与 $\beta_1, \cdots, \beta_t$ 等价.
2) $\dim \operatorname{span}\{\alpha_1, \cdots, \alpha_p\} = r\{\alpha_1, \cdots, \alpha_p\}$, 且 $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ 的极大线性无关组可作为 $\operatorname{span}\{\alpha_1, \cdots, \alpha_p\}$ 的一组基.

基与坐标

定理 17

若 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\}$ 是向量空间 H 的一组基, 则 H 中任一向量可以表示成 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ 的线性组合, 且表示方法是唯一的.

证明.

因 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\}$ 是向量空间 H 的一组基, 故任意 $\alpha \in H$ 可以表示成 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ 的线性组合.
设 $\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_p\alpha_p = t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2 + \cdots + t_p\alpha_p$,
则 $(k_1 - t_1)\alpha_1 + (k_2 - t_2)\alpha_2 + \cdots + (k_p - t_p)\alpha_p = 0$.
又因为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ 是基, 故线性无关, 所以

$$k_1 - t_1 = 0, k_2 - t_2 = 0, \cdots, k_p - t_p = 0$$

表示方法唯一. $\square$

坐标

定义 16

设 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 是向量空间 H 的一组基. 则对任意 $\alpha \in H$, 有唯一的表示 $\alpha = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_s\beta_s$. 则称 $(k_1, k_2, \ldots, k_s)^T$ 为 α 在基 $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s\}$ 下的坐标.

习惯上, 我们将坐标写成列向量的形式.

坐标

例 37 (P100 例 4.5.8)

$\beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\beta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的一组基, $\alpha \in \mathbb{R}^2$ 相对与 β_1, β_2 的坐标为 $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$. 求 α.

解.

$$\alpha = (\beta_1, \beta_2) \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = -2\beta_1 + 3\beta_2 = -2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

□

坐标

例 38 (P100 例 4.5.9)

$\mathbb{R}^n$ 中向量 $\alpha = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 在标准基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 下的坐标表示即为 $\alpha = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$.

坐标

例 39 (P100 例 4.5.10)

求在 $\mathbb{R}^3$ 中, 向量 $\alpha=(1,7,3)^T$ 在基 $\beta_1=(2,0,-1)^T$, $\beta_2=(1,3,2)^T$, $\beta_3=(2,1,1)^T$ 下的坐标.

解.

设 α 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标为 $(x_1,x_2,x_2)^T$, 则

$$\alpha=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}, \quad \text{即} \begin{bmatrix}2&1&2\\0&3&1\\-1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\7\\3\end{bmatrix}$$

此方程组的解 $(1,3,-2)^T$ 即为 α 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标. $\square$

坐标

一般的, 对 p 维向量空间 H, 通过对给定一组基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_p$, 建立坐标系统后, 我们有 H 到 $\mathbb{R}^p$ 的一一映射:

$$\begin{array}{ccc} H & \rightarrow & \mathbb{R}^p \\ \alpha & \mapsto & \alpha\text{关于基}\beta_1, \cdots, \beta_p\text{的坐标} \end{array}$$

在这个意义下, H 和 $\mathbb{R}^p$ 具有类似的结构.

坐标

课堂练习

求向量 $\alpha = (1,2,3)^T \in \mathbb{R}^3$

1) 在基 $\alpha_1 = (1,0,0)^T$, $\alpha_2 = (1,1,0)^T$, $\alpha_3 = (1,1,1)^T$ 下的坐标.
2) 在基 $\beta_1 = (0,0,1)^T$, $\beta_2 = (0,1,0)^T$, $\beta_3 = (1,0,1)^T$ 下的坐标.

过渡矩阵

定义 17

设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ (I) 与 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$(II) 是向量空间 H 中的两组基. 则基 (II) 可由基 (I) 线性表出, 即存在 $n \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})$, 使得

$$(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)A$$

我们称以上矩阵 $A = (a_{ij})$ 是由基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 到基 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 的过渡矩阵.

注 19

1) 请分清是哪一组基到哪一组基的过渡矩阵.
2) 过渡矩阵 A 的列向量是对应向量在该组基下的坐标.

过渡矩阵与坐标变换

定理 18

设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ *(I)* 与 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$*(II)* 是向量空间 H 中的两组基，且

$$(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)A.$$

若 $\alpha \in H$ 在基 *(I)* 和 *(II)* 下的坐标分别是 X 和 Y，则

1) A 可逆，且

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)A^{-1}.$$

2) $X = AY$, $Y = A^{-1}X$.

过渡矩阵与坐标变换

证明.

1) $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ (I) 与 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$(II) 均为基, 故存在方阵 B 使得

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)B.$$

故
$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)B = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)AB,$
由坐标的唯一性, $AB = E$. A 可逆, 且 $B = A^{-1}$.

2) $\alpha \in H$ 在基 (I) 和 (II) 下的坐标分别是 X 和 Y, 则
$\alpha = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)X = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)Y$
$= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)AY.$
由坐标的唯一性, $X = AY$. 从而 $Y = A^{-1}X$. □

过渡矩阵与坐标变换

例 40 (P102 例 4.5.11)

考虑 $\mathbb{R}^2$ 中的两组基

$$(\mathrm{I}){:}\varepsilon_1=\begin{bmatrix}1\\-4\end{bmatrix},\varepsilon_2=\begin{bmatrix}3\\-5\end{bmatrix},\quad (\mathrm{II}){:}\eta_1=\begin{bmatrix}-9\\1\end{bmatrix},\eta_2=\begin{bmatrix}-5\\-1\end{bmatrix}$$

求基（I）到基 (II) 的过渡矩阵.

解.

记基（I）到基 (II) 的过渡矩阵为 A, 则 $(\eta_1,\eta_2)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)A$,

即 $\begin{bmatrix}1 & 3\\-4 & -5\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}-9 & -5\\1 & -1\end{bmatrix}$.

解方程得 $A=\begin{bmatrix}6 & 4\\-5 & -3\end{bmatrix}$. □

过渡矩阵与坐标变换

例 41 (P102 例 4.5.12)

在 $\mathbb{R}^3$ 中, 由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\beta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\beta_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 的过渡矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- 求基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.
- 已知向量 α 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$, 求 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标.

过渡矩阵与坐标变换

解.

- 已知 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A$, 故
$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)A^{-1}$$
$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 0 & 3 & -11 \\ -1 & 4 & -12 \end{bmatrix}$$
故 $\alpha_1 = (2, 0, -1)^T$, $\alpha_2 = (-3, 3, 4)^T$, $\alpha_3 = (8, -11, -12)^T$.
- α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标为
$$X = A \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

□