No.

DATE / /

〈曲线积分与曲面积分解题总结〉

一、计算方法归纳

1. 直接利用性质计算（如对称性）
2. 直接化为定积分或二重积分
3. 利用积分与路径无关
4. 利用格林公式计算平面闭曲线积分
5. 利用斯托克斯公式计算空间闭曲线积分
6. 利用高斯公式计算闭曲面积分

Atten. 3 优先通过 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 判断一下

再考虑其他情况

Special Example. 积分与路径无关常常能简化运算

最终转化 $\int_L P\,dx+Q\,dy$ 为

$\int_{(a_1,b_1)}^{(a_2,b_2)} d(u(x,y))$

其中 $u(x,y)$ 是 P, Q 的不定积分即 $du(x,y)=P\,dx+Q\,dy$

Ex. 计算 $\int_L (1+3x^2+e^x\sin y)\,dx+(2y+e^x\cos y)\,dy$

其中 L 是有向曲线 $x=2t-t^2$，$y=2\arctan t$

从 $t=0$ 到 $t=1$ 的曲线段

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=e^x\cos y$ 积分与路径无关

$$\int_L (1+3x^2+e^x\sin y)\,dx+(2y+e^x\cos y)\,dy=\int_{(0,0)}^{(1,\frac{\pi}{2})} d(x+x^3+e^x\sin y+y^2)$$

$$=\left[x+x^3+e^x\sin y+y^2\right]_{(0,0)}^{(1,\frac{\pi}{2})}=2+e+\frac{\pi^2}{4}$$

// $u(x,y)=x+x^3+e^x\sin y+y^2$

$d\,u(x,y)=1+3x^2+e^x\sin y+e^x\cos y+2y$ ✓

No.

DATE / /

二、常用对称性结论归纳

1. 积分曲线L关于y轴对称，

$$\int_L f(x,y)=\begin{cases}0 & (f对x为奇函数)\\ 2\int_{L_1}(x,y)ds & (f对x为偶函数)\end{cases}$$

2. 积分曲线L关于x轴对称

$$\int_L f(x,y)ds=\begin{cases}0 & (f对y为奇函数)\\ 2\int_{L_1}(x,y)ds & (f对y为偶函数)\end{cases}$$

3. 空间积分曲线L关于平面y=x对称、

$$\int_L f(x)dx=\int_L f(y)dy$$

Atten. 以上性质对于被积函数的整体 $(f(x,y))$ 与有向函数的部分 $(P(x,y)$ 与 $Q(x,y))$ 都适用，可用于简化部分计算

Ex. 计算 $\iint\limits_{x^2+y^2\le4}(2+ye^{|y|}+\sqrt{4-x^2})dxdy$

由对称性得 $\iint\limits_D ye^{|y|}=0$ 部分简化

$$原式=\iint\limits_D(2+\sqrt{4-x^2})dxdy$$

$$=\iint\limits_D 2\,dxdy+\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}dy$$

$$=8\pi+\frac{64}{3}$$

4. 若积分曲面Σ关于xoy面对称，

则 $\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \begin{cases} 0 & (f对z为奇函数) \\ 2\iint_{\Sigma} R(x,y,z)ds & (f对z为偶 \end{cases}$

$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \begin{cases} 0 & (R对z为偶函数) \\ 2\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy & (R对z为奇 \end{cases}$

Atten. 曲面积分的对称性仅对部分被积函数有效

且奇偶对应与整体函数相反

(其他面的对称性以此类推，

或可与“投影的归一性”相结合)

三、常用计算技巧总结

1. 若积分与路径无关，可重新选取特殊路径.

2. 是否可以添加辅助线(面)后使用格林公式

(记得最后减去所添线(面))

3. 可以只投影到一个坐标面上以简化计算

如 $\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$

$= \iint_{\Sigma} [(-z_x)P + (-z_y)Q + R]dxdy$

4. 使用格林公式转化时，注意是否含有无定义点，

可能需要分类讨论

如