线性代数（理工）

常寅山

第三章 行列式

行列式的起源

行列式最早起源于 Cramer 法则, 是利用行列式解线性方程组的一种方法. 参见 1750 年出版的法语书 «Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques».

行列式的应用

行列式有很多的应用:

1. 行列式可以用于判断方阵的可逆性: 行列式非零等价于矩阵可逆.
2. 行列式可以用于计算逆矩阵.
3. 行列式可以用于求解线性方程组.
4. 行列式可以用于计算平行多面体的有向体积, 广泛出现在多重积分的换元公式中.
5. 行列式可以用于定义方阵的特征多项式, 和方阵的特征值和相似标准型密切相关.

行列式的定义

行列式有几种不同的计算公式:

1. 主元 (pivot) 公式
2. 行列式展开的代数余子式公式
3. 行列式的完全展开式
4. 特征值的乘积的公式

行列式的性质

1. 单位矩阵的行列式等于 1.
2. 行列式关于矩阵的某一行 (列) 线性.
3. 交换行列式的两行, 行列式取相反数.
4. 方阵转置的行列式不变.
5. 方阵乘积的行列式等于行列式的乘积.
6. 上 (下) 三角矩阵的行列式等于对角线元素的乘积.
7. 方阵可逆当且仅当行列式非零.
8. $\cdots$

一阶方阵的行列式

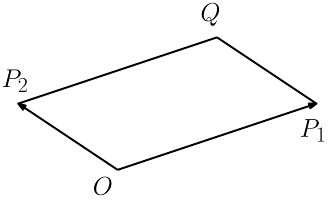
对于一阶方阵 $A = [a]$, 定义其行列式

$$\det A = a.$$

二阶方阵的行列式

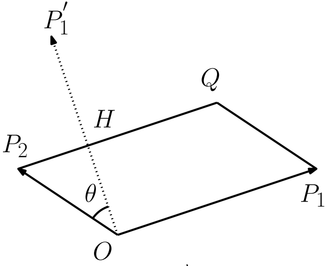
二阶方阵 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}=(A_1,A_2)$, 其中, A_1 是 A 的第一列, A_2 是 A 的第二列.

我们在二维平面中用从原点出发的有向线段 $\overrightarrow{OP_1}$ 代表向量 A_1, 用 $\overrightarrow{OP_2}$ 代表向量 A_2. 根据 O,P_1,P_2 确定点 Q, 使得 OP_1QP_2 构成平行四边形. 我们希望把行列式 $\det A$ 定义成平行四边形 OP_1QP_2 的有向面积.



方阵的行列式的定义

注意到平行四边形的面积 S 等于底长 $|\overrightarrow{OP_1}|$ 乘以高 $|\overrightarrow{OH}|$.



我们取将 $\overrightarrow{OP_1}$ 逆时针旋转 90 度, 得到 $\overrightarrow{OP_1'}$. 那么, $|\overrightarrow{OP_1}| = |\overrightarrow{OP_1'}|$, 并且, P_1' 的坐标为 $(-a_{21}, a_{11})^T$. 而 $|\overrightarrow{OH_1}| = |\overrightarrow{OP_2}|\cos\theta$. 所以,

$S = |\overrightarrow{OP_1}||\overrightarrow{OH}| = |\overrightarrow{OP_2}||\overrightarrow{OP_1'}|\cos\theta = \langle \overrightarrow{OP_1'}, \overrightarrow{OP_2}\rangle$
$= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

方阵的行列式的定义

此有向面积的正负号取决于 θ 角是否小于 $\pi/2$. 可以发现, 如果 P_2 点在 $\overrightarrow{OP_1}$ 的左侧, 符号为正; 如果 P_2 点在 $\overrightarrow{OP_1}$ 的右侧, 符号为负; 若 $\overrightarrow{OP_1}$ 和 $\overrightarrow{OP_2}$ 共线, 那么, 面积为 0.

于是, 我们得到二阶矩阵的行列式的定义:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

三阶方阵的行列式

三阶方阵 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = (A_1, A_2, A_3)$, 其中, A_1 是 A 的第一列, A_2 是 A 的第二列, A_3 是 A 的第三列.

我们在三维空间中用从原点出发的有向线段 $\overrightarrow{OP_1}$ 代表向量 A_1, 用 $\overrightarrow{OP_2}$ 代表向量 A_2, 用 $\overrightarrow{OP_3}$ 代表向量 A_3. 以这三个向量为三条共点的棱, 可以唯一的构造一个平行六面体. 我们希望把行列式 $\det A$ 定义成该平行六面体的有向体积 V.

三阶方阵的行列式

我们可以先计算 $\overrightarrow{OP_1}$ 和 $\overrightarrow{OP_2}$ 构成的平行四边形底面的面积 S.

为此, 我们需要三维空间中向量的向量积的概念. 在三维空间中的两个向量 $x=(x_1,x_2,x_3)^T$ 和 $y=(y_1,y_2,y_3)^T$ 的向量积 $z=(z_1,z_2,z_3)=x\times y$ 是一个向量, 定义如下:

$z_1=x_2y_3-x_3y_2$, $z_2=x_3y_1-x_1y_3$, $z_3=x_1y_2-x_2y_1$. 可以验证, z 的大小为由 x 和 y 确定的平行四边形的面积 S, z 的方向根据右手螺旋定则给出.

令 $\overrightarrow{OP_3}$ 和 $\overrightarrow{OP_1}\times\overrightarrow{OP_2}$ 的夹角为 θ. 那么,

$V=|\overrightarrow{OP_3}||\overrightarrow{OP_1}\times\overrightarrow{OP_2}|\cos\theta=\langle\overrightarrow{OP_3},\overrightarrow{OP_1}\times\overrightarrow{OP_2}\rangle$. 所以, 我们有

$\det A=V=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}$.

方阵的行列式的定义

对于一般的 n 阶矩阵 A, 列向量分别为 $A_1, A_2, \ldots, A_n$. 我们希望把 $\det A$ 定义成由这些列向量构成的 n 维平行多面体的有向体积. 我们希望计算由 $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ 构成的 $n-1$ 维平行多面体的这一底面的有向体积, 然后乘以高(即 A_n 对应的有向线段的终点到底面的垂线的长度). 为此, 我们需要 $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ 的向量积 $\vec{S}$, 然后和 A_n 作内积.

方阵的行列式的定义

得到一般的表达式比较麻烦, 但是, 我们可以发现行列式满足的一些基本性质:

(1) $\det E = 1$.

(2) 如果有两列成比例, 行列式等于零.

(3) 行列式关于第 i 个列向量是线性的, 即,
$$\det(x_1, \ldots, x_{i-1}, cx_i + dy_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$
$$= c\det(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$
$$+d\det(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

幸运的是, 这三条抽象的性质已经足够决定行列式的表达式了.

方阵的行列式的定义

矩阵 $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ 的行列式记作 $\det A$, 也记作

$$|A| \text{ 或者 } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

方阵的行列式的性质

(4) 如果矩阵 A 有一行是零向量, 那么, 行列式为零.

证明. 根据第 (3) 条性质,

$\det(x_1, \dots, x_{i-1}, \mathbf{0}, x_{i+1}, \dots, x_n)$

$= \det(x_1, \dots, x_{i-1}, 0 \times \mathbf{0} + 0 \times \mathbf{0}, x_{i+1}, \dots, x_n)$

$= 2 \times 0 \times \det(x_1, \dots, x_{i-1}, \mathbf{0}, x_{i+1}, \dots, x_n) = 0.$

方阵的行列式的性质

(5) 用常数 c 乘以矩阵的某一列, 那么, 行列式变为原来的 c 倍. 即若 $P = P(i(\lambda))$, 那么, $\det(AP) = \lambda \det A$. 特别的, 取 $A = E$, 可得 $\det P = \lambda$, 从而,
$\det(AP) = \det A \det P$.

证明. 利用第 (3) 条性质.

方阵的行列式的性质

(6) 对矩阵的列的倍加变换不改变行列式, 即若 $P = P(i, j(\gamma))$, 那么, $\det(AP) = \det(A)$. 特别的, 取 $A = E$, 可得 $\det P = 1$, 从而, $\det(AP) = \det A \det P$.

证明. 根据第 (2),(3) 条性质,

$\det(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + \gamma x_j, x_{i+1}, \ldots, x_n)$
$= \det(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$
$+\gamma \det(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.

对于 $i \neq j$, 矩阵 $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ 的第 i, j 列相同, 行列式为零.

所以, $\det(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + \gamma x_j, x_{i+1}, \ldots, x_n)$
$= \det(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.

方阵的行列式的性质

(7) 交换方阵的两列, 行列式取相反数. 即若 $P = P(i, j)$, 那么, $\det(AP) = -\det A$. 特别的, 取 $A = E$, 可得, $\det P = -1$. 从而, $\det(AP) = \det A \det P$.

证明. 固定 $x_k (k \neq i, j)$. 那么, 行列式只和第 i, j 列有关, 记为 $\omega(x_i, x_j)$. 根据第 (2),(3) 条性质,

$0 = \omega(x_i + x_j, x_i + x_j) - \omega(x_i, x_i) - \omega(x_j, x_j)$

$= \omega(x_i, x_j) + \omega(x_j, x_i)$, 得证.

方阵的行列式的性质

(8) 方阵不可逆则行列式为零.

证明. 假设 n 阶方阵 $A = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ 不可逆, 那么, 存在不全为零的常数 $c_1, c_2, \ldots, c_n$, 使得
$c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n = 0$. 存在 i, 使得 $\boldsymbol{x}_i = \sum_{j\neq i} d_j\boldsymbol{x}_j$.
所以, 根据第 (3) 条性质,
$\det A = \sum_{j\neq i} d_j \det(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{i-1}, \boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{x}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$.
再根据第 (2) 条, $\det(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{i-1}, \boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{x}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = 0$. 所以, $\det A = 0$.

方阵的行列式的性质

(9) 方阵乘积的行列式等于行列式的乘积, 即
$\det(AB) = \det A \det B$.

证明. 如果 B 不可逆, 那么, 存在 $\boldsymbol{x} \neq 0$, $B\boldsymbol{x} = 0$, 从而, $AB\boldsymbol{x} = 0$. 故, 此时, AB 也不可逆. 根据第 (8) 条, $\det(AB) = 0 = \det B$. 所以, $\det(AB) = \det A \det B$.
如果 B 可逆, 那么, B 可以分解成初等矩阵的乘积: $B = P_1 P_2 \dots P_k$. 利用第 (5),(6) 和 (7) 条性质, 对于任意的方阵 A 和初等矩阵 P, 有 $\det(AP) = \det A \det P$. 所以,
$\det(AB) = \det(AP_1P_2 \cdots P_k) = \det(AP_1P_2 \cdots P_{k-1}) \det P_k$
$= \cdots = \det A \det P_1 \det P_2 \cdots \det P_k$.
在上式中取 $A = E$, 得到 $\det B = \det P_1 \det P_2 \cdots \det P_k$. 综上, 有 $\det(AB) = \det A \det B$.

方阵的行列式的性质

(10) 假设 A 可逆, 那么, $\det A^{-1} = 1/\det A$. 特别的, $\det A \neq 0$.

证明. 由于 $AA^{-1} = E$, 利用第 (9) 条,
$\det A \det A^{-1} = \det E = 1$.
所以, $\det A^{-1} = 1/\det A$.

方阵的行列式的性质

推论 1

方阵 A 可逆当且仅当 $\det A \neq 0$.

推论 2

若方阵 A, B 满足 $AB = E$, 则 A, B 互为逆矩阵.

证明.

若 $AB = E$, 则 $\det A \det B = 1$, $\det B \neq 0$, 从而 B 可逆. 则 $A = ABB^{-1} = B^{-1}$. □

注 1

对方阵 A, B, 只需要条件 $AB = E$ 即可判断 A,B 互为逆矩阵, 从而有 $AB = BA = E$.

方阵的行列式的性质

(11) $\det A^T = \det A$.

证明. 由于 A 可逆当且仅当 A^T 可逆, 所以, 当 A 不可逆时, A^T 也不可逆. 此时, 根据第 (8) 条, $\det A^T = 0 = \det A$. 当 A 可逆时, 存在初等矩阵 $P_1, P_2, \ldots, P_k$ 使得 $A = P_1 P_2 \cdots P_k$. 根据第 (9) 条,
$\det A = \det P_1 \det P_2 \cdots \det P_k$. 类似的,
$\det A^T = \det P_1^T \det P_2^T \cdots \det P_k^T$. 对于初等矩阵 P_i, 其转置 P_i 仍为初等矩阵, 且利用 (5),(6) 和 (7), 有 $\det P_i^T = \det P_i$.
所以, 综上, 我们有 $\det A = \det A^T$.

方阵的行列式的性质

(12) 如果矩阵 A 有两行成比例, 或者如果矩阵 A 有一行等于零, 那么, 行列式为零.

(13) 行列式关于第 i 个行向量是线性的.

(14) 交换矩阵的两行, 行列式取相反数.

(15) 对矩阵的行作倍加变换, 不改变行列式.

(16) 矩阵的某一行乘以常数 c, 行列式变为原先的 c 倍.

推论 3

若方阵的某行 (列) 是另一行 (列) 的倍数, 则行列式为零.

方阵的行列式的性质

(17) 假设 A 是对角阵, 对角元分别为 $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$. 那么, $\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

证明. 注意到 $A = P(1(a_{11}))P(2(a_{22}))\cdots P(n(a_{nn}))$. 而 $\det P(i(a_{ii})) = a_{ii}$. 利用方阵乘积的行列式等于行列式的乘积即可得证.

方阵的行列式的性质

(18) 假设在方阵 A 中, $a_{21}=a_{31}=\cdots=a_{n1}=0$. B 是从 A 中把第一行和第一列去掉后得到的方阵. 那么, $\det A = a_{11}\det B$.

证明. 如果 $a_{11}=0$, 那么, A 的第一列为零, 行列式为零. 结论成立. 如果 $a_{11}\neq 0$, 可以利用初等列变换将 $a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n}$ 消去, 而不改变行列式. 故我们不妨设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$. 从第一列中提出常数 a_{11}, 可得 $\det A = a_{11}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix}$. 只需证明 $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix}=|B|$. 如果 B 不可逆, 那么, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ 也不可逆. 那么, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix}=0=|B|$.

方阵的行列式的性质

如果 B 可逆, 那么, $B = P_1 P_2 \ldots P_k$, 其中, $P_1, P_2, \ldots, P_k$ 是初等矩阵. 那么,
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_k \end{bmatrix}$. 注意到 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_t \end{bmatrix}$ 也是初等矩阵, 并且其行列式等于 $|P_t|$. 再利用方阵乘积的行列式等于行列式的乘积, 即可得到 $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} = |B|$. 证毕.

余子式

定义 1 (余子式)

对 n 阶方阵, 用 M_{ij} 表示 A 删除第 i 行和第 j 列得到的方阵的行列式, 称为元素 a_{ij} 的余子式; 定义 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式.

若 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, 则

$$M_{11}=a_{22},\quad M_{12}=a_{21},\quad M_{21}=a_{12},\quad M_{22}=a_{11}.$$

$$A_{11}=a_{22},\quad A_{12}=-a_{21},\quad A_{21}=-a_{12},\quad A_{22}=a_{11}.$$

余子式

若 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{22} \end{bmatrix}$, 则

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

按余子式展开

命题 1

一个 n 阶方阵的行列式, 记为 $\det A$ 或 $|A|$, 满足:

$$\det A = \begin{cases} a_{11}, & \text{当 } n = 1; \\ a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}, & \text{当 } n > 1. \end{cases}$$

其中 $A_{1j} = (-1)^{1+j}M_{ij}$ 为元素 a_{1j} 的代数余子式.

按余子式展开

证明. 注意到
$(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}) = a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{12}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{1n}\boldsymbol{e}_n$. 利用行列式对第一行的线性性质, 可以将行列式展开, 得到
$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}|B_j|$,
其中, B_j 的第一行是 $\boldsymbol{e}_j$, 剩下的行和 A 相同. 将第 j 列和第 $j-1$ 列, 第 $j-2$ 列, ..., 第 1 列依次对换, 可以得到矩阵 C_j, $|B_j| = (-1)^{j-1}|C_j|$. 而 C_j 的第一行为 $\boldsymbol{e}_1$. 将 C_j 的第一行第一列去掉后得到的方阵和从 A 中去掉第一行第 j 列得到的方阵完全相同. 根据第 (18) 条, $|C_j| = M_{1j}$. 综上即可得证.

行列式展开定理

定理 4 (行列式展开定理)

$A=(a_{ij})_n$, $n\geq 2$. 则 A 的行列式可按照任意行或列展开计算. 即

$$\begin{aligned}\det A &= a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\\ &= a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots a_{nj}A_{nj},\end{aligned}$$

其中 $i,j=1,2,\cdots,n$.

证略.

行列式展开定理应用

例 1

已知 4 阶行列式 D 中第三列元素依次为 $-1, 2, 0, 1$, 它们的余子式依次分别为 $5, 3, -7, 4$, 则 $D = ?$

证明.

$D = \sum_{i=1}^{4} a_{i3}(-1)^{i+3} M_{i3}$
$= (-1) \times (-1)^4 \times 5 + 2 \times (-1)^5 \times 3 + 0 + 1 \times (-1)^7 \times 4$
$= -15.$ $\square$

行列式展开定理应用

例 2 (P59 例 3.1.3)

按照第二行展开行列式 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ 并求值.

行列式展开定理应用

例 3 (P59 例 3.1.4)

求 n 阶行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的值.

类似的, 下三角矩阵行列式, 也等于其主对角线元素乘积.

推论 5

上（或下）三角矩阵的行列式, 等于其主对角线元素的乘积.

行列式的展开定理的推论

定理 6

设 X 为 n 阶方阵, A_{ij} 为 X 的 (i,j) 位置元素对应的代数余子式. 用 Y 表示把 X 的第 i 行元素从左至右依次换为 $b_1, b_2, \ldots, b_n$ 构成的新矩阵. 则,

$$\det Y = b_1 A_{i1} + b_2 A_{i2} + \cdots + b_n A_{in}.$$

用 Z 表示把 X 的第 j 列元素自上至下依次换为 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 构成的新矩阵. 则,

$$\det Z = c_1 A_{1j} + c_2 A_{2j} + \cdots + c_n A_{nj}.$$

行列式的展开定理的推论

例 4

设 $D = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix}$. 将 $2A_{11} + A_{21} - 4A_{31}$ 表示成三阶行列式.

行列式的展开定理的推论

定理 7

设 A 为 n 阶方阵, 则

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} |A|, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

证明.

- 若 $i = j$, 则左边恰为方阵 A 得行列式按照第 i 行展开式.
- 若 $i \neq j$, 则左边为将 A 的第 j 行替换为第 i 行所得方阵 B 的行列式, 而 B 的第 i 行和第 j 相等, 故 $\det B = 0$. $\square$

练习

例. 求 $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ 第四行各元素余子式之和, 第二行代数余子式之和, 以及 $A_{11} + 2A_{21} + 4A_{41}$? (利用 4 阶矩阵的行列式表示.)

提示. 所求分别为

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

练习

思考. 已知 $A_{r\times r}, B_{s\times s}$ 为方阵, $M=\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & E_s \end{bmatrix}$, $N=\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$, $F=\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$, 证明:

(1). $\det M=\det A$, $\det N=\det B$.

(2). $\det F=\det A\det B$. (提示. $F=MN$.)

逆序数

定义 2

对 n 个不同自然数的一个排列, 若某个数字的右边有 r 个比它小的数字, 则称该数字在此排列中有 r 个逆序; 一个排列中所有逆序之和, 称为该排列的逆序数. 排列 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 的逆序数, 记作 $\tau(j_1, j_2, \cdots, j_n)$.

例如:

- $\tau(31254) = 2+0+0+1+0 = 3$,
- $\tau(12345) = 0$,
- $\tau(315) = 1+0+0$,
- $\tau(n(n-1)\cdots 21) = (n-1)+(n-2)+\cdots+1+0 = \frac{n(n-1)}{2}$.

逆序数

思考

如果 n 元排列 $j_1, j_2, \ldots, j_n$ 的逆序数为 r, 求 $\tau(j_n, j_{n-1}, \ldots, j_2, j_1) =?$

解

$j_1, j_2, \ldots, j_n$ 中的逆序 (顺序) 一定是 $j_n, j_{n-1}, \ldots, j_2, j_1$ 中的顺序 (逆序).
所以,$j_n, j_{n-1}, \ldots, j_2, j_1$ 中的顺序有 r 对.
而 $j_n, j_{n-1}, \ldots, j_2, j_1$ 中从左到右构成的总数对为 $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, 故

$$\tau(j_n, j_{n-1}, \ldots, j_2, j_1) = \frac{n(n-1)}{2} - r.$$

奇偶排列

定义 3 (奇排列和偶排列)

逆序数为奇数的排列叫奇排列; 逆序数为偶数的排列叫偶排列.

n 个不同自然数的排列中, 从小到大的排列称为标准排列或自然排列.

例如:

- 12345 为自然排列, 逆序数为 0, 也为偶排列.
- 134 也为自然排列, 逆序数为 0, 也为偶排列.
- 213 逆序数为 1, 为奇排列.
- 312 逆序数为 2, 为偶排列.

对换与奇偶排列

对换: 把一个排列中的两个不同数字位置交换, 其他数字不动.

例如:

- 把排列 1234 (偶排列) 的 3 和 4 互换位置, 得到 1243(奇排列).
- 把排列 321 (奇排列) 的 3 和 2 互换位置, 得到 231(偶排列).

对换与奇偶排列

引理 1

对换改变排列的奇偶性. 即一次对换将奇排列变成偶排列, 将偶排列变成奇排列.

证明.

- 对换相邻两个数:
  $k_1, \ldots, k_r, i, j, k_{r+3}, \ldots, k_n \to k_1, \ldots, k_r, j, i, k_{r+3}, \ldots, k_n$
  则对换后的逆序数增加或减少 1, 即奇偶性改变.
- 对换不相邻两个数:
  $\ldots, i, l_1, l_2, \ldots, l_t, j, \cdots \to \ldots, j, l_1, l_2, \ldots, i, \ldots$
  这一过程是对换
  $(i, l_1), (i, l_2), \ldots, (i, l_t), (i, j), (l_t, j), (l_{t-1}, j), \ldots (l_1, j)$ 这 $2t + 1$ 次相邻对换的合成, 即原来排列的奇偶性改变了 $2t + 1$ 次, 故原排列奇偶性改变. □

对换与奇偶排列

定理 8

n 个不同自然数的任一排列，可经过有限次对换变成标准排列，且对换次数的奇偶性与该排列的奇偶性一致.

证明.

先经过 k_1 次 $(k_1 \geq 0)$ 对换可将数字 1 换到第 1 个位置，再依次将 $2, 3, \ldots, n-1$ 换到第 $2, 3, \ldots, n-1$ 位置. 从而，经过 s 次对换变成 $1, 2, \ldots, n$。

因为 $1, 2, \ldots, n$ 为偶排列，对换 s 次意味着改变了 s 次排列的奇偶性，所以 s 的奇偶性与排列的奇偶性一致. $\square$

行列式的定义

定义 4 (行列式)

方阵 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 的行列式

$$\det A = \sum_{j_1, j_2, \cdots, j_n} (-1)^{\tau(j_1, j_2, \cdots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

其中 $\sum\limits_{j_1, j_2, \cdots, j_n}$ 表示对 $1, 2, \cdots, n$ 的一切排序取和.

行列式的定义

例 5

计算 $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

解.

$$\det A = (-1)^{\tau(1,2,3)} a_{11} a_{22} a_{33} + (-1)^{\tau(1,3,2)} a_{11} a_{23} a_{32} + (-1)^{\tau(2,1,3)} a_{12} a_{21} a_{33} + (-1)^{\tau(2,3,1)} a_{12} a_{23} a_{31} + (-1)^{\tau(3,1,2)} a_{13} a_{21} a_{32} + (-1)^{\tau(3,2,1)} a_{13} a_{22} a_{31}$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}$$

$\square$

行列式的定义

例 6

求 $\det A = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$

解.

$$\det A = (-1)^{\tau(2,3,4,\dots,n-1,n,1)} a_{12} a_{23} a_{34} \cdot \dots \cdot a_{(n-1)n} a_{n1}$$

$$= (-1)^{n-1} a_{12} a_{23} a_{34} \cdot \dots \cdot a_{(n-1)n} a_{n1}.$$

□

行列式的定义

例 7

计算 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ 0 & 0 & 0 & c_1 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & d_1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_2 \end{vmatrix}$

解.

因为最后三行中选取不同列的元素时，至少有一个元素为 0，从而导致行列式的每一项都为 0，故原行列式为 0。 □

行列式的定义

例 8

求多项式 $P(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 3\\ 0 & \lambda-1 & 2\\ 1 & 1 & \lambda-1\end{vmatrix}$ 中, λ^3 的系数.

解.

在行列式中, 只有项 $(-1)^{\tau(123)}(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-1)$ 有 λ^3, 故 λ^3 系数为 1. □

第三章 行列式

行列式的计算

计算行列式的方法

- 利用行列式展开定理降阶;
- 利用行列式的第二种定义;
- 通过初等行 (列) 变换, 将其变为上/下三角矩阵;
- 观察矩阵特点, 利用行列式的性质;
- 升阶法 (加边法).

行列式的计算

例 9 (P64 例 3.2.1)

计算行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

方法: 通过初等行列变换, 将矩阵化成上三角矩阵.

解

$$|A| = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

行列式的计算

解续

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 8 \times \frac{5}{2} = 40.$$

行列式的计算

例 10 (P65 例 3.2.2)

计算行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & d & c & b \\ c & d & a & b \\ c & b & a & d \end{vmatrix}$$

行列式的计算

解.

将第二行 $\times(-1)$ 加到第一行, 第四行 $\times(-1)$ 加到第三行得:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & b-d & 0 & d-b \\ a & d & c & b \\ 0 & d-b & 0 & b-d \\ c & b & a & d \end{vmatrix} = 0, \text{因一三行成比例.} \qquad \square$$

行列式的计算

例 11 (P65 例 3.2.3)

计算 n 阶行列式

$$|D| = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

观察: 每一行元素和为 $a+(n-1)b$

行列式的计算

解.

将第 $2, 3, \cdots, n$ 列加到第一列, 得

$$|D| = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$\square$

行列式的计算

解续

$$= (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

将第一行 $\times(-1)$ 分别加到第 $2, 3, \cdots, n$ 行, 得

$$|D| = (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}.$$

行列式的计算

例 12 (P66 例 3.2.4)

计算 n 阶行列式

$$|D_n| = \begin{vmatrix} a & c & c & \cdots & c \\ b & a & c & \cdots & c \\ b & b & a & \cdots & c \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

行列式的计算

解

从上至下, 每一行减去其后面一行得:

$$|D_n| = \begin{vmatrix} a-b & c-a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a-b & c-a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b & c-a \\ b & b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

行列式的计算

解续

按第一列展开得 $|D_n| =$

$$(a-b)|D_{n-1}| + (-1)^{n+1} b \begin{vmatrix} c-a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a-b & c-a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b & c-a \end{vmatrix}$$

$= (a-b)|D_{n-1}| + (-1)^{n+1} b(c-a)^{n-1}$

即 $|D_n| = (a-b)|D_{n-1}| + b(a-c)^{n-1}$.

又 $|D_1| = a$, 由递归公式可得, 当 $b \neq c$ 时,

$|D_n| = \frac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c}$;

当 $b = c$ 时, $|D_n| = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$.

行列式的计算

例 13 (P68 例 3.2.5)

证明范德蒙德 (Vandermonde) 行列式 $V(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j).$$

用归纳法证明.

证明

当 $n = 2$ 时, $V(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$, 结论成立.

行列式的计算

证明续

假设 $n-1$ 阶时, $V(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) = \Pi_{1\le j<i\le n-1}(x_i - x_j)$, 对 $V(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 从下至上, 每行减去前一行的 x_1 倍,

$$V(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

行列式的计算

证明续

$$
= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}
$$

$$
= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\, V(x_2, x_3, \cdots, x_n)
$$

$$
= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\Pi_{2\le j<i\le n}(x_i - x_j)
$$

$$
= \Pi_{1\le j<i\le n}(x_i - x_j).
$$

故 $V(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \Pi_{1\le j<i\le n}(x_i - x_j)$, 对任意 $n \ge 2$ 成立.

行列式的计算

例 14

已知 D 为可逆矩阵, α, β 为列向量, 则

$$|D-\alpha\beta^T| = \begin{vmatrix} D & \alpha \\ \beta^T & 1 \end{vmatrix} = |D||1-\beta^T D^{-1}\alpha|$$

例 15

计算 $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$.

第三章 行列式

1. 方阵的行列式
2. 行列式的计算
3. 行列式的应用
   - 伴随矩阵
   - 克莱姆法则
4. 补充：分块三角矩阵的行列式

伴随矩阵

定义 5 (伴随矩阵)

对矩阵 $A=(a_{ij})$, 记 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式. 我们定义 A 的伴随矩阵

$$A^*=(A_{ij})^T=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

例 16

$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的伴随矩阵为 $A^*=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

伴随矩阵

练习

$(kA)^* = (\quad)A^*$, $|(kA)^*| = (\quad)|A^*|$

解

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \dots & ka_{nn} \end{bmatrix}$$

其第 (i,j) 元素对应的代数余子式为 $k^{n-1}A_{ij}$.
所以,$(kA)^* = k^{n-1}A^*$, $|(kA)^*| = k^{n(n-1)}|A^*|$.

伴随矩阵

性质

$A^*A = AA^* = (\det A)E.$

证明.

AA^* 的 (i,j) 位元素为

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} \det A, & i = j \\ 0. & i \neq j \end{cases}$$

A^*A 的 (i,j) 位元素为

$$A_{1i}a_{1j} + A_{2i}a_{2j} + \cdots + A_{ni}a_{nj} = \begin{cases} \det A, & i = j \\ 0. & i \neq j \end{cases}$$

故 $A^*A = AA^* = (\det A)E.$ $\square$

伴随矩阵与方阵的逆

定理 9

若 n 阶方阵A 可逆, 则 $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$

证明.

注意到 $A^*A = AA^* = (\det A)E$,
特别的, 若 A 可逆, 则

$$\frac{1}{\det A} A^*A = A(\frac{1}{\det A} A^*) = E,$$

故 $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$. □

注 2

可用伴随矩阵求方阵的逆.

伴随矩阵与方阵的逆

例 17 (P70 例 3.3.1)

设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, 则 A 可逆当且仅当 $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 且

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

伴随矩阵

思考

已知 A 可逆, 则 $(A^*)^* = (\quad)A$.

分析: 如果 A 可逆, 那么, $A^* = \det(A)A^{-1}$ 也可逆.

解

令 $B = A^*$. 则, $B = \det(A)A^{-1}$, 也是可逆矩阵. 所以, $B^* = \det(B)B^{-1}$. 注意到 $B = \det(A)A^{-1}$, 所以, $\det(B) = \det(A)^n\det(A^{-1}) = \det(A)^{n-1}$, $B^{-1} = \frac{1}{\det(A)}A$. 故, $(A^*)^* = B^* = \det(A)^{n-2}A$.

思考续. 令 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 不计算余子式, 求 $\begin{vmatrix} A_{22} & A_{32} \\ A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}$.

伴随矩阵

例 18

设 A 为三阶矩阵. 假设 $|A| = 1/2$. 计算 $|(3A)^{-1} - 2A^*|$.

解.

注意到 $A^* = \det(A)A^{-1} = \frac{1}{2}A^{-1}$. 所以, 所求为
$|A^{-1}/3 - A^{-1}| = |-2A^{-1}/3| = (-2/3)^3|A^{-1}|$
$= -8/27 * 1/|A| = -16/27.$ □

克莱姆法则

定理 10 (克莱姆法则)

n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

当其系数矩阵 A 的行列式 $|A| \neq 0$ 时，存在唯一解:

$$x_j = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & b_1 & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(j-1)} & b_2 & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & b_n & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{|D_j|}{|A|},$$

其中，D_j 为将系数矩阵 A 的第 j 列换成常数项列所得矩阵.

克莱姆法则

证明.

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{|A|}A^*B = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

故 $x_j = \frac{1}{|A|}(A_{1j}b_1 + A_{2j}b_2 + \cdots + A_{nj}b_n)$

$$= \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & b_1 & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(j-1)} & b_2 & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & b_n & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

□

克莱姆法则

例 19 (P72 例 3.3.2)

解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

解

系数矩阵的行列式 $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 27 \neq 0,$

克莱姆法则

解续

$$|D_1| = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 81,$$

$$|D_2| = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix} = -108,$$

$$|D_3| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -27$$

克莱姆法则

解续

$$|D_4| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 27,$$

故方程组的解为

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{|D_1|}{|A|}, \frac{|D_2|}{|A|}, \frac{|D_3|}{|A|}, \frac{|D_4|}{|A|}\right) = (3, -4, -1, 1).$$

注 3

用克莱姆法则解线性方程组计算量较大.

行列式与线性方程组的解

推论 11

1) n 个 n 元齐次线性方程组 $AX = 0$ 只有零解的充要条件为 $\det A \neq 0$.
2) n 个 n 元非齐次线性方程组 $AX = b$ 有唯一解的充要条件为 $\det A \neq 0$.

第三章 行列式

分块三角矩阵的行列式

命题 2

已知 A 为 m 阶方阵, B 为 n 阶方阵, 则

1) $\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & D \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A||B|$

2) $\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & A \\ B & D \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|$

提示. 如果 A 可逆, 那么,

$$\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ C & B \end{bmatrix}.$$

分块三角矩阵的行列式

例 20

- 设 A, B 是 n 阶方阵, 那么 $|E-AB| = |E-BA|$.
- 设 A 是 $n\times m$ 矩阵, B 是 $m\times n$ 矩阵, $m\le n$, 则对任意数 λ, 有

$$\lambda^m|\lambda E_n - AB| = \lambda^n|\lambda E_m - BA|$$

提示. 利用两种方案计算下列矩阵的行列式:

$$\begin{vmatrix} \lambda E_m & \lambda B \\ A & \lambda E_n \end{vmatrix}$$