线性代数（理工）

常寅山

第五章　特征值与特征向量

1. 矩阵的特征值与特征向量
   - 特征值与特征向量
   - 特征多项式
   - 求特征值与特征向量
2. 特征值和特征向量的性质
3. 矩阵的相似对角化

特征值与特征向量

定义 1 (特征值与特征向量)

设 A 是 n 阶复方阵. 若存在复数 λ 和非零复向量 X 使得

$$AX = \lambda X,$$

则称 λ 是 A 的一个特征值(eigenvalue), 称 X 是 A 的属于（关于）特征值 λ 的特征向量(eigenvector).

注 1

- 本章讨论的数都是复数.
- A 是方阵.
- 单位阵 E_n 的特征值是 1, 所有的 n 维非零向量都是对应的特征向量. 零矩阵的特征值是 0, 所有的 n 维非零向量都是对应的特征向量.

特征子空间

命题 1

设 λ 是 A 的特征值, $X_1, X_2, \ldots, X_t$ 是 A 属于 λ 的特征向量. 对任意复数 $k_1, k_2, \ldots, k_t$, 其非零线性组合
$k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_tX_t \neq 0$, 仍是 A 属于 λ 的特征向量.

证明.

$$A(k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_tX_t) = k_1AX_1 + k_2AX_2 + \cdots + k_tAX_t$$
$$= k_1\lambda X_1 + k_2\lambda X_2 + \cdots + k_t\lambda X_t$$
$$= \lambda(k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_tX_t).$$

□

注 2

由此可知, $H := \{A\text{的属于 }\lambda\text{ 的特征向量全体}\} \cup \{0\}$, 则 H 是子空间, 称为 A 的属于 λ 的特征子空间.

特征值的性质

命题 2

设 λ 是 A 的特征值，则

1) 当 m 是正整数时，有 λ^m 是 A^m 的特征值.
2) 当 A 可逆时，λ^{-1} 是 A^{-1} 的特征值.
3) 当 A 可逆，m 为任意整数时，λ^m 是 A^m 的特征值（当 $m < 0$ 时，$A^m = (A^{-1})^{|m|}$）.

特征值的性质

证明

1) 已知 λ 为 A 的特征值, 则存在非零向量 X, 使得 $AX = \lambda X$. 故
$A^m X = A^{m-1}(AX) = A^{m-1}(\lambda X) = \lambda A^{m-1} X$
$= \cdots = \lambda^m X$.
故 λ^m 为 A^m 的特征值.

特征值的性质

证明续

2) 我们首先证明，当 A 可逆时，0 不为 A 的特征值. 事实上，当 A 可逆时，齐次线性方程组 $AX=0$ 只有零解，故不存非零向量 X 满足 $AX=0$.
故 λ 为 A 的特征值时，$\lambda \neq 0$，且存在非零向量 X，使得 $AX=\lambda X$.
两边同乘 A^{-1} 得，$X=A^{-1}\lambda X$，故 $A^{-1}X=\lambda^{-1}X$.
所以 λ^{-1} 是 A^{-1} 的特征值.

特征值的性质

证明续.

3) 当 $m=0$ 时, $A=E$, $\lambda^0=1$, 显然 1 是单位阵 E 的特征值. 当 $m>0$ 时, 即 1). 当 $m<0$ 时, 由 1), 2) 可得. $\square$

特征值的性质

注 3

我们已经看到, 当 A 可逆时, 0 不是 A 的特征值; 反之, 当 A 不可逆时, 0 是 A 的特征值.

事实上, 当 A 不可逆时, $AX = 0$ 有非零解 X_0, 故 0 为特征值, X_0 为属于特征值 0 的特征向量.

命题 3

方阵 A 可逆, 当且仅当 0 不是 A 的特征值.

特征值的性质

命题 4

已知 λ 是 A 的特征值, $\varphi(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是多项式, 则 $\varphi(\lambda)$ 是 $\varphi(A)$ 的特征值.

证明.

设 X 是 A 的属于 λ 的特征向量, 则

$$A^iX=\lambda^iX,(i=1,\cdots,k),\quad EX=X.$$

故 $\varphi(A)X=(\sum_{i=0}^k a_iA^i)X=\sum_{i=1}^k(a_iA^iX)+a_0EX$
$=\sum_{i=1}^k a_i\lambda^iX+a_0X=\varphi(\lambda)X.$
故 $\varphi(\lambda)$ 是 $\varphi(A)$ 的特征值. $\square$

特征值的性质

命题 5

- λ 是 A 的特征值 $\Leftrightarrow 0$ 是 $\lambda E - A$ 的特征值;
- X_0 是 A 属于 λ 的特征向量
  $\Leftrightarrow X_0$ 是 $\lambda E - A$ 属于 0 的特征向量
  $\Leftrightarrow X_0$ 是 $(\lambda E - A)X = 0$ 的非零解.

定理 1

λ 是 A 的特征值 $\Leftrightarrow \det(\lambda E - A) = 0$.

注 4

我们要找 A 的特征值, 只需要求多项式 $f(\lambda) = \det(\lambda E - A) = 0$ 的根; 我们要求 A 关于 λ 的特征向量, 只需要求方程 $(\lambda E - A)X = 0$ 的非零解.

特征多项式

定义 2 (特征矩阵与特征多项式)

给定 n 阶方阵 A, 称含有参数 λ 的矩阵

$$\lambda E - A = \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix}$$

为 A 的特征矩阵; 称 A 的特征矩阵 $\lambda E - A$ 的行列式

$$f(\lambda) = |\lambda E - A| = \lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \cdots + b_{n-1}\lambda + b_n$$

为 A 的特征多项式.

代数基本定理

定理 2 (代数基本定理)

任何 n (n为正整数) 次多项式有且仅有 n 个复根（重根按重数计算）.

例 1

- $g(x)=x^2-1$ 有两个实根 $x_1=1$ 和 $x_2=-1$.
- $g(x)=(x-1)^2$ 有两个相等的实根 $x_1=x_2=1$, 此时称根 1 的代数重数为 2, 称 1 为 2 重根.
- $g(x)=x^3(x-1)(x+2)$ 有三重根 0, 两个单根 1, -2.
- $g(x)=x^2+1$ 没有实根, 但是有两个复根 $x_1=i$ 和 $x_2=-i$.

特征值与特征多项式

我们已经知道, λ 为 A 的特征值当且仅当 $\det(\lambda E - A) = 0$, 即 A 的特征值都是特征多项式的零点, 且特征多项式的零点都是 A 的特征值.

我们还知道, 特征多项式 $f(\lambda) = \det(\lambda E - A) = 0$ 的所有根, 共有 n 个 (计算重数), 故 A 有 n 个特征值 (计算重数).

特别的, 若 λ_0 是特征多项式 $\det(\lambda E - A) = 0$ 的 k 重根, 则 λ_0 为 A 特征值, 且其代数重数为 k.

求矩阵的特征值与特征向量

给定矩阵 A, 求它的特征值和特征向量算法:

1) 求出特征多项式 $f(\lambda) = \det(\lambda E - A)$;
2) 求特征多项式 $f(\lambda) = \det(\lambda E - A) = 0$ 的所有根, 共有 n 个 (计算重数), 记作 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$;
3) 对每个 λ_i, 解方程 $(\lambda_i E - A)X = 0$, 求出其非零解, 得属于 λ_i 的特征向量.
(求出基础解系 $X_1, \cdots, X_s$, 非零解为
$X = k_1 X_1 + \cdots + k_s X_s$, $k_1, \cdots, k_s$ 不全为零.)

求矩阵的特征值与特征向量

例 2 (P132 例 5.1.2)

求 $A=\begin{bmatrix}-1 & 4 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解

$$f(\lambda)=\det(\lambda E-A)=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -4 & 0\\ -1 & \lambda-2 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-3)^2$$

A 的特征值为 $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=\lambda_3=3.$

求矩阵的特征值与特征向量

解续

对 $\lambda_1 = -2$, 解方程 $(-2E - A)X = 0$, 对系数矩阵 $-2E - A$ 作初等行变换:

$$-2E - A = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$-2E - A$ 秩为 2, 基础解系含一个向量, 取 $\xi_1 = (-20, 5, 4)$ 故 A 属于特征值 -2 的特征向量为 $k_1\xi_1$, $k_1 \neq 0$.

求矩阵的特征值与特征向量

解续

对 $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$, 解方程 $(3E - A)X = 0$, 对系数矩阵作初等行变换:

$$3E - A = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$3E - A$ 秩为 2, 基础解系含一个向量, 取 $\xi_2 = (0, 0, 1)^T$, 故 A 属于特征值 3 的特征向量为 $k_2\xi_2$, $k_2 \neq 0$.

求矩阵的特征值与特征向量

例 3 (P133 例 5.1.4)

求 $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解

$$f(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda+1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+2)^2$$

A 的特征值为 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$.

对 $\lambda_1 = 1$, 解方程 $(E - A)X = 0$, 对系数矩阵作初等行变换:

求矩阵的特征值与特征向量

解续

$$E-A=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$E-A$ 秩为 2, 基础解系含一个向量, 取 $\xi_1=(1,1,1)^T$, 故 A 属于特征值 1 的特征向量为 $k_1\xi_1$, $k_1\neq 0$.

求矩阵的特征值与特征向量

解续

对 $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$, 解方程 $(-2E - A)X = 0$, 对系数矩阵作初等行变换:

$$E - A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$-2E - A$ 秩为 1, 基础解系含两个向量, 取 $\xi_2 = (-1, 1, 0)^T$, $\xi_3 = (-1, 0, 1)^T$ 故 A 属于特征值 -2 的特征向量为 $k_2\xi_2 + k_3\xi_3$, k_2, k_3 不全为 0.

求矩阵的特征值与特征向量

例 4 (P133 例 5.1.3)

求 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 的特征值和特征向量

解

$$\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1 = i$ 和 $\lambda_2 = -i$.

求矩阵的特征值与特征向量

解续

对 $\lambda_1 = i$, 解方程 $(iE - A)X = 0$, 对系数矩阵作初等行变换:

$$iE - A = \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$iE - A$ 的秩为 1, 基础解系含一个向量, 取 $\eta_1 = (-i, 1)^T$. 故 A 属于特征值 i 的特征向量为 $k_1\eta_1$, $k_1 \neq 0$.

求矩阵的特征值与特征向量

解续

对 $\lambda_2 = -i$, 解方程 $(-iE - A)X = 0$, 对系数矩阵作初等行变换:

$$iE - A = \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$-iE - A$ 的秩为 1, 基础解系含一个向量, 取 $\eta_2 = (i, 1)^T$.
故 A 属于特征值 $-i$ 的特征向量为 $k_2\eta_2$, $k_2 \neq 0$.

求矩阵的特征值与特征向量

注 5

对给定方阵 A,

- 一个特征值, 可能对应多个线性无关的特征向量. 我们后面会知道, 若 λ 是特征多项式 $\lambda E - A$ 的 s 重根, 则 $(\lambda E - A)X = 0$ 的解空间的维数 $\leq s$. （证明见第二节）
- 一个特征向量, 只能属于一个特征值. (证明见本节末)
- 属于不同特征值的特征向量线性无关的. （证明见本节末）

第五章 特征值与特征向量

矩阵多项式与特征值

已知 $\varphi(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 是多项式, A 为 n 阶矩阵.

- 我们已经知道, 若 λ 是 A 的特征值, 则 $\varphi(\lambda)$ 是 $\varphi(A)$ 的特征值.
- 我们还将证明, 若 λ 是 $\varphi(A)$ 的特征值, 则存在 A 的特征值 t, 使得 $\varphi(t) = \lambda$.

即 $\{\varphi(A)\text{的特征值}\} = \{\varphi(\lambda) : \lambda\text{为}A\text{的特征值}\}$

注 6

这里只是特征值的对应, 不考虑重数.

矩阵多项式与特征值

证明.

考虑多项式 $\varphi(x)-\lambda$, 其为 k 次多项式, 故有因式分解 $\varphi(x)-\lambda = a_k\prod_{i=1}^{k}(x-x_i)$, 其中 $x_1,\cdots,x_k$ 为常数.
则 $\varphi(A)-\lambda E = a_k\prod_{i=1}^{k}(A-x_iE)$.
已知 λ 是 $\varphi(A)$ 的特征值, 则

$$0=\det(\varphi(A)-\lambda E)=a_k^n\prod_{i=1}^{k}\det(A-x_iE).$$

故存在 i 使得 $\det(A-x_iE)=0$, 从而 x_i 是 A 的特征值.
$\varphi(x_i)-\lambda=0$, 故 $\varphi(x_i)=\lambda$. □

矩阵多项式与特征值

例 5

已知 $A^2-5A+6E=0$, 求 A 的特征值的可能范围.

解. 设 λ 是 A 的任意特征值, $g(x)=x^2-5x+6$. 所以, $g(\lambda)$ 是 $g(A)$ 的特征值. 因为 $g(A)=0$ 的特征值都是 0, 所以, $g(\lambda)=0$, 即

$$\lambda^2-5\lambda+6=0.$$

所以, $\lambda=2$ 或 3.

注 7

这里, 我们只求出了可能的特征值, 但并不知道特征值的重数.

特征值的乘积与和

定理 3

给定 n 阶方阵 A, 记它的 n 个特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. 则

1) A 的 n 个特征值之积等于 A 的行列式, 即

$$|A| = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

2) A 的 n 个特征值之和等于 A 的 n 个对角元素之和, 即

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = \sum_{j=1}^{n} a_{jj} \overset{\text{记作}}{=\!=} \mathrm{tr} A.$$

我们称其为 A 的迹 (*trace*) .

特征值的乘积与和

证明

由代数基本定理知, A 的特征多项式 $f(\lambda) = \det(\lambda E - A)$ 有 n 个根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 记作

$f(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \cdots + c_{n-1}\lambda + c_n$

$= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\dots(\lambda - \lambda_n)$

故 $c_n = (-\lambda_1)(-\lambda_2)\cdots(-\lambda_n) = (-1)^n \prod_{j=1}^n \lambda_j$,

$c_1 = -\lambda_1 - \lambda_2 - \cdots - \lambda_n = -(\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j)$.

$c_n = f(0) = \det(-A) = (-1)^n \det A$, 故

$$\det A = \lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n.$$

特征值的乘积与和

证明续.

考察 $\det(\lambda E - A)$ 中, λ^{n-1} 的系数: 观察 A 的特征多项式,

$$f(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

考虑行列式的全展开公式. 含 λ^{n-1} 的项只能来自于 $(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})\dots(\lambda - a_{nn})$, 所以 λ^{n-1} 的系数为 $-(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})$. 所以,

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n. \qquad \square$$

特征值的乘积与和

推论 4

A 可逆当且仅当 A 没有 0 特征值.

练习

例 6 (P136 例 5.1.5)

已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 $-1, 1, 2$. 求 $|A^2+2A-E|$, $|A^*|$, $|A^2+A^*+2E|$

解. 记 $\varphi(x)=x^2+2x-1$, 则 $\varphi(-1)=-2$, $\varphi(1)=2$, $\varphi(2)=7$ 是 $\varphi(A)$ 的特征值,
故 $|A^2+2A-E|=(-2)\times 2\times 7=-2$.
$|A|=-1\times 1\times 2=-2\neq 0$, $AA^*=(\det A)E$, 故
$|A||A^*|=|A|^3$, 即 $|A^*|=|A|^2=4$.
由于 $|A|=-2\neq 0$, 所以, A 可逆并且
$A^*=|A|\cdot A^{-1}=-2A^{-1}$. 故,
$A^2+A^*+2E=A^2-2A^{-1}+2E=A^{-1}(A^3+2A-2E)$.
$A^3+2A-2E$ 的特征值为 -5, 1, 10, 故其行列式为 -50.
$|A^{-1}|=1/|A|=-1/2$. 故
$|A^2+A^*+2E|=|A^{-1}||A^3+2A-2E|=25$.

练习

课堂练习

假设 $p(x)$ 是一个复系数多项式. n 阶复矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. 证明

$$|p(A)| = \prod_{i=1}^{n} p(\lambda_i).$$

提示. 考虑 $p(x)$ 的因式分解 $p(x) = c\prod_{j=1}^{m}(a_j - x)$.

推论 5

$|\lambda E - p(A)| = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - p(\lambda_i))$, 即 $p(A)$ 的特征值为 $p(\lambda_1), p(\lambda_2), \ldots, p(\lambda_n)$.

练习

思考

假设 n 阶复矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$. 证明

$$\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j=\sum_{i<j}\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj}\end{vmatrix}.$$

还可以考虑上述结果的推广.

盖尔圆盘定理

定义 3

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为任一 n 阶复矩阵, 复平面上的圆盘

$$G_i(A)=\{z\in\mathbb{C}:|z-a_{ii}|\le R_i\},\quad i=1,2,\cdots,n$$

其中 $R_i=\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|$, 称为矩阵 A 的盖尔圆盘, 简称盖尔圆.

定理 6

给定 n 阶复矩阵 A,

1) A 的特征值在 n 个盖尔圆盘的并集 $\cup_{i=1}^{n}G_i(A)$ 内.
2) 考虑 A 的盖尔圆盘的并集的连通分支, 若一个连通分支由 m 个圆盘构成, 则该区域内有且仅有 A 的 m 个特征值（计算重数）.

盖尔圆盘定理

定义 4

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶复矩阵, 若

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \quad i=1,2,\cdots,n$$

则称 A 为按行严格对角占优矩阵.

定理 7

按行严格严格对角占优矩阵可逆.

证明.

按行严格严格对角占优矩阵的盖尔圆盘均不包含 0 点, 从而 0 不是矩阵的特征值, 矩阵可逆. □

盖尔圆盘定理

例 7 (P136 例 5.1.6)

设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2\times3} & \frac{1}{3\times4} & \frac{1}{4\times5} & \cdots & \frac{1}{n(n+1)} \\ \frac{1}{2\times3} & 1 & \frac{1}{2\times3} & \frac{1}{3\times4} & \cdots & \frac{1}{(n-1)n} \\ \frac{1}{3\times4} & \frac{1}{2\times3} & 1 & \frac{1}{2\times3} & \cdots & \frac{1}{(n-2)(n-1)} \\ \frac{1}{4\times5} & \frac{1}{3\times4} & \frac{1}{2\times3} & 1 & \cdots & \frac{1}{(n-3)(n-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n(n+1)} & \frac{1}{(n-1)n} & \frac{1}{(n-2)(n-1)} & \frac{1}{(n-3)(n-2)} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

则 A 可逆.

解. 计算 A 的第 i 行的非对角元素的绝对值之和 $R_i < 1$. A 为按行严格对角占优矩阵, 故可逆.

盖尔圆盘定理

思考

证明定理 7可以推出盖尔圆盘定理的第一部分.

注 8

利用根关于多项式系数的连续性, 盖尔圆盘定理的第一部分可以推出盖尔圆盘定理的第二部分.

思考

为了直接证明定理 7, 不妨假设 $a_{ii} = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

注 9

如果方阵 X 充分小, $(E - X)^{-1} = E + X + X^2 + \cdots$. 由此可以在对角元均为 1 的情况下证明定理 7.

特征向量的性质

命题 6

一个特征向量只能属于一个特征值.

证明.

设 X_0 满足 $AX_0 = \lambda_1 X_0, AX_0 = \lambda_2 X_0, X_0 \neq 0$. 则

$$(\lambda_1 - \lambda_2)X_0 = AX_0 - AX_0 = 0.$$

所以, $\lambda_1 = \lambda_2$. $\square$

特征向量的性质

命题 7

属于不同特征值的特征向量线性无关.

证明

设 $X_1, X_2, \cdots, X_s$ 是属于不同特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ 的特征向量. 设 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 是方程 $k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots k_sX_s = 0$ 的解. 则

$0 = A(k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_sX_s) = k_1AX_1 + \cdots + k_sAX_s$

$= k_1\lambda_1X_1 + \cdots + k_s\lambda_sX_s.$

继续用 A 作用, 有

$0 = A(k_1\lambda_1X_1 + \cdots + k_s\lambda_sX_s) = k_1\lambda_1^2X_1 + \cdots + k_s\lambda_s^2X_s,$

$\ldots$

$0 = k_1\lambda_1^{s-1}X_1 + \cdots + k_s\lambda_s^{s-1}X_s$

特征向量的性质

证明续.

写成矩阵形式:

$$0=[k_1X_1,k_2X_2,\cdots,k_sX_s]\begin{bmatrix}1&\lambda_1&\cdots&\lambda_1^{s-1}\\1&\lambda_2&\cdots&\lambda_2^{s-1}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&\lambda_s&\cdots&\lambda_s^{s-1}\end{bmatrix}$$

上式右边的矩阵行列式为范德蒙行列式 $\neq 0$, 故矩阵可逆. 故

$$[k_1X_1,k_2X_2,\cdots,k_sX_s]=0.$$

即 $k_iX_i=0,\ i=1,\cdots,s.$
故 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0.$
$X_1,X_2,\cdots,X_s$ 线性无关. □

特征向量的性质

推论 8

不同特征值对应的特征子空间相交为 $\{0\}$.

推论 9

设 A 有不同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$, 且 $(\lambda_i E - A)X = 0$ 的基础解系为 $\eta_{i1}, \eta_{i2}, \cdots, \eta_{it_i}$, 则向量组

$$\eta_{11}, \eta_{12}, \cdots, \eta_{1t_1}, \eta_{21}, \eta_{22}, \cdots, \eta_{2t_2}, \cdots, \eta_{s1}, \eta_{s2}, \cdots, \eta_{st_s}$$

线性无关.

特征向量的性质

证明.

设 $k_{11}\eta_{11}+k_{12}\eta_{12}+\cdots k_{1t_1}\eta_{1t_1}+k_{21}\eta_{21}+k_{22}\eta_{22}+\cdots+k_{2t_2}\eta_{2t_2}+\cdots+k_{s1}\eta_{s1}+k_{s2}\eta_{s2}+\cdots+k_{st_s}\eta_{st_s}=0$,
记 $\beta_i=k_{i1}\eta_{i1}+k_{i2}\eta_{i2}+\cdots+k_{it_i}\eta_{it_i}$, $i=1,2,\cdots,s$,
则 β_i 是 λ_i 的特征向量的线性组合, 故要么为 0, 要么为 λ_i 的特征向量.
而 $\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_s=0$, 若存在 $\beta_i\neq 0$, 则不同特征值的特征向量线性相关（矛盾）,
故 $\beta_i=0$, $i=1,2,\cdots,s$.
由基础解系的线性无关性, $k_{ij}=0$, $i=1,2,\cdots,s$, $j=1,2,\cdots,t_i$.
所以向量组
$\eta_{11},\eta_{12},\cdots,\eta_{1t_1},\eta_{21},\eta_{22},\cdots,\eta_{2t_2},\cdots,\eta_{s1},\eta_{s2},\cdots,\eta_{st_s}$
线性无关. $\square$

习题选讲

例 8

给定 n 阶方阵 A, B, 证明 AB 与 BA 有相同的特征值.

思路: 计算 $|\lambda E - AB| = |\lambda E - BA|$, AB 与 BA 有相同的特征多项式, 故特征值相同.
或者也可以构造特征向量, 从而得到特征值.

思考

我们知道, 若 $n > m$, A 为 $n \times m$ 矩阵, B 为 $m \times n$ 矩阵, 则

$$|\lambda E_n - AB| = \lambda^{n-m}|\lambda E_m - BA|,$$

此时, AB 的特征值与 BA 的特征值有什么关系?

若 BA 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$,
则 AB 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m, 0, \cdots, 0$.

习题选讲

课堂练习

已知 A 为正交矩阵且 $\det A = -1$. 证明 -1 为 A 的特征值.

思路: 计算 $|-E-A| = 0$, 即 $|A+E| = 0$

证明.

$$(A+E)A^T = E + A^T = (E+A)^T$$

故

$$\det(A+E)\det A^T = \det(E+A)^T = \det(E+A)$$

注意到 $\det A^T = \det A = -1$, 故 $\det(A+E) = 0$. □

习题选讲

课堂练习 (练习册 P79 第四题)

已知 n 阶矩阵的各行元素之和为 2,

1) 证明 $\lambda = 2$ 是 A 的一个特征值, $\beta = [1, 1, \cdots, 1]^T$ 是对应的特征向量.
2) A^{-1} 的各行元素之和为多少?
3) $2A^{-1} + A^2 + 2A$ 的各行元素之和为多少.

简要答案: A^{-1} 的各行之和为 $\frac{1}{2}$. $3A^{-1} + A^2 + 2A$ 的各行元素之和为 9.

注 10

方阵各行元素之和相等, 当且仅当 $[1, 1, \cdots, 1]^T$ 为特征向量.

习题选讲

课堂练习

已知方阵 A 有特征值 λ, 对应的特征向量 X. 求 $P^{-1}AP$ 的一个特征值和对应的一个特征向量.

解. $AX=\lambda X$,
则

$$P^{-1}APP^{-1}X=P^{-1}AX=\lambda P^{-1}X,$$

故 $P^{-1}AP$ 有特征值 λ, 和对应的特征向量 $P^{-1}X$.

习题选讲

例 9

给定非零列向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$, $\beta = (1, b_2, \cdots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$, 且 $\alpha^T\beta = 0$. 令 $A = \alpha\beta^T$. 求

- A^2.
- A 的特征值和特征向量.

思路: $A^2 = 0$, 故 A 的特征值只有 0.
$r(A) = 1$, 故 $AX = 0$ 的解空间为 $n-1$ 维的, 且 $\beta^T X = 0$ 的解也为 $AX = 0$ 的解, 且 $\beta^T X = 0$ 的解空间也为 $n-1$ 维的, 故 $\beta^T X = 0$ 与 $AX = 0$ 同解. 我们求出 $\beta^T X = 0$ 的所有非零解, 即为 A 关于特征值 0 的特征向量.

习题选讲

注 11

这里, 特征值 0 的代数重数是 n, 但特征子空间的维数只有 $n-1$.

第五章 特征值与特征向量

矩阵的相似

定义 5 (矩阵相似)

设 A, B 是两个 n 阶方阵, 若存在可逆矩阵 P 使得

$$P^{-1}AP = B,$$

则称 A 与 B相似, 记为 $A \sim B$.

矩阵的相似

命题 8

矩阵相似是等价关系，即满足

(1) 自反性： $A \sim A$.

(2) 对称性： 若 $A \sim B$, 则 $B \sim A$.

(3) 传递性： 若 $A \sim B$ 且 $B \sim C$, 则 $A \sim C$.

证明.

(1) 因为 $E^{-1}AE = A$.

(2) 由 $P^{-1}AP = B$, 可得 $A = PBP^{-1} = (P^{-1})^{-1}BP^{-1}$.

(3) 由 $P^{-1}AP = B, Q^{-1}BQ = C$, 可得 $Q^{-1}P^{-1}APQ = C$, 即 $(PQ)^{-1}APQ = C$. □

矩阵相似

命题 9

若 $A \sim B$, 则 $A^m \sim B^m$, 其中 m 为正整数.

证明.

若 $A \sim B$, 则存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = B$. 故
$B^m = (P^{-1}AP)^m = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\dots(P^{-1}AP)$
$= P^{-1}A(PP^{-1})A(PP^{-1})\dots(PP^{-1})AP = P^{-1}A^mP.$
故 $A^m \sim B^m$. □

矩阵相似与特征值

命题 10

相似矩阵有相同的特征多项式, 从而有相同的特征值.

证明.

由 $B = P^{-1}AP$ 可得,

$\det(\lambda E - B) = \det(\lambda E - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(\lambda E - A)P)$

$= \det(P^{-1})\det(\lambda E - A)\det P = \det(\lambda E - A).$ □

注 12

反之, 矩阵有相同的特征值, 不一定相似, 如 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 与单位阵 $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 特征值均为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, 但它们不相似.

矩阵相似与特征值

推论 10

若 A 与对角阵 $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$ 相似，则 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的特征值.

思考

对相似矩阵，则下列量中，哪些相同，为什么？
特征值，迹，行列式，秩，奇异性.

矩阵的相似对角化

定义 6 (矩阵的相似对角化)

若矩阵 A 相似于一个对角阵, 我们称 A 可(相似) 对角化.

注 13

若 A 可相似对角化, 即 $P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$,

则 $A^m = P\Lambda^m P^{-1} = P \begin{bmatrix} \lambda_1^m & & & \\ & \lambda_2^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^m \end{bmatrix} P^{-1}$, 从而简化了计算.

矩阵的相似对角化

例 10 (P138 例 5.2.1)

已知 $P=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix},\Lambda=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$, $P^{-1}AP=\Lambda$, 求 A^{100}.

解. $A^{100}=(P\Lambda P^{-1})^{100}=P\Lambda^{100}P^{-1}$

$$=P\begin{bmatrix}1^{100} & 0\\ 0 & (-1)^{100}\end{bmatrix}P^{-1}=PEP^{-1}=E.$$

矩阵的相似对角化

定理 11

设 A 是 n 阶方阵. 那么 A 可对角化当且仅当 A 有 n 个线性无关的特征向量.

矩阵的相似对角化

证明

- 必要性:
  已知 A 可对角化, 即:

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

则 $AP = P\Lambda$.
将 P 按列向量分块 $P = [\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n]$, 则

$$[A\eta_1, A\eta_2, \cdots, A\eta_n] = [\lambda_1\eta_1, \lambda_2\eta_2, \cdots, \lambda_n\eta_n].$$

故 $A\eta_i = \lambda_i\eta_i, i = 1, 2, \ldots, n$,

矩阵的相似对角化

证明续.

又 P 可逆, 故 P 的列向量非零且线性无关, 且 η_i 是 A 关于 λ_i 的特征向量, $i=1,\cdots,n$.

- 充分性:
  设 $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n$ 是线性无关的特征向量. 则
  $A\eta_i=\lambda_i\eta_i, i=1,2,\ldots,n$.
  令 $P=(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n)$, 可得

$$AP=P\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}.$$

□

矩阵的相似对角化

注 14

由定理11, 要想将 n 阶矩阵对角化, 只需找它的 n 个线性无关的特征向量. (若没有, 则不能对角化.)

我们在上一节已经证明:

定理 12

属于不同特征值的特征向量线性无关.

推论 13

若 n 阶方阵 A 有 n 个不同的特征值, 则 A 一定可对角化.

矩阵的相似对角化

定理 14

已知 λ_0 为 A 的 s 重特征值, 且 $(\lambda_0 - A)X = 0$ 的基础解系的向量个数为 r, 则 $r \leq s$.

矩阵的相似对角化

证明.

取 $(\lambda_0 - A)X = 0$ 的基础解系 $\xi_1, \cdots, \xi_r$, 取向量 $\eta_1, \cdots, \eta_{n-r}$ 使得 $\xi_1, \cdots, \xi_r, \eta_1, \cdots, \eta_{n-r}$ 线性无关.

令 $P = [\xi_1, \cdots, \xi_r, \eta_1, \cdots, \eta_{n-r}]$, 则 P 可逆, 且

$AP = P\begin{bmatrix} \lambda_0 E_r & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$. A 与 $B = \begin{bmatrix} \lambda_0 E_r & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$ 相似, 故特征值相同.

$$\det(\lambda E - B) = \det\begin{pmatrix} (\lambda - \lambda_0)E_r & -C \\ 0 & \lambda E_{n-r} - D \end{pmatrix}$$

$= (\lambda - \lambda_0)^r \det(\lambda E_{n-r} - D)$, 故 λ_0 为 B 的至少 r 重特征值.

故 $r \leq s$. $\square$

矩阵的相似对角化

我们知道, n 阶矩阵的特征值计算重数一共 n 个, 对每个 s 重特征值 λ_i, $(\lambda_i E - A)X = 0$ 的基础解系的向量个数 $r \leq s$, 即属于 λ_i 的线性无关的特征向量最多 $r \leq s$ 个, 故要想找到 n 个线性无关的特征向量, 必须对每个特征值 λ_i, $(\lambda_i E - A)X = 0$ 的基础解系的向量个数 $=$ 特征值的重数.

我们在上一节还证明了

命题 11

设 A 有不同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$, 且 $(\lambda_i E - A)X = 0$ 的基础解系为 $\eta_{i1}, \eta_{i2}, \cdots, \eta_{it_i}$, 则向量组

$$\eta_{11}, \eta_{12}, \cdots, \eta_{1t_1}, \eta_{21}, \eta_{22}, \cdots, \eta_{2t_2}, \cdots, \eta_{s1}, \eta_{s2}, \cdots, \eta_{st_s}$$

线性无关.

矩阵的相似对角化

定理 15

n 阶矩阵可对角化
$\Leftrightarrow$ 对 A 的每个特征值 λ_i, 记其重数为 s_i, 则 A 恰有 s_i 个线性无关的属于 λ_i 的特征向量.
$\Leftrightarrow$ 对 A 的每个特征值 λ_i, 记其重数为 s_i, 则 $\lambda_i E - A$ 的秩为 $n - s_i$.

矩阵的相似对角化

小结: 矩阵相似对角化的方法

1 求 A 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$(互不相同).

2 对每一个 λ_i, 解 $(\lambda_i E - A)X = 0$, 求出基础解系.

2.1 若对每个 λ_i, 基础解系向量个数与特征值重数相等, 则 A 可对角化. 我们共得到 n 个线性无关的特征向量 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$;

2.2 若对某个特征值 λ_i, 基础解系向量个数小于特征值重数, 则 A 不可对角化.

3 当 A 可对角化时, 令 $P = [\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n]$, 则 $P^{-1}AP = \Lambda$ 为对角矩阵, 其第 i 个对角线元素为 η_i 对应的特征值.

矩阵的相似对角化

例 11 (P141 例 5.2.2)

设 $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{bmatrix}$, 问 A 是否可对角化? 若可以, 求出 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

解. $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -6 & 0 \\ 3 & \lambda + 5 & 0 \\ 3 & 6 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda - 1)^2.$

故 A 的特征值为 $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$

对 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, 解方程 $(E - A)X = 0$,

矩阵的相似对角化

解续. 对系数矩阵进行初等行变换得

$$E-A=\begin{bmatrix}-3&-6&0\\3&6&0\\3&6&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

方程的基础解系为 $\xi_2=(0,0,1)^T$, $\xi_3=(-2,1,0)^T$.
对 $\lambda_1=-2$, 解方程 $(-2E-A)X=0$.
对系数矩阵进行初等行变换得

$$-2E-A=\begin{bmatrix}-6&-6&0\\3&3&0\\3&6&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

方程的基础解系为 $\xi_1=(-1,1,1)^T$.

矩阵的相似对角化

解续. 故 A 可对角化, 令

$$P=[\xi_1,\xi_2,\xi_3]=\begin{bmatrix}-1&0&-2\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix},$$

则 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}.$

矩阵的相似对角化

例 12 (P141 例 5.2.3)

已知 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -8 \\ -4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, 问 A 是否可以对角化.

矩阵的相似对角化

解. $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 & -1 \\ -4 & \lambda+2 & 8 \\ 4 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-1)^2.$

故 A 的特征值为 $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

对 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, 解方程 $(E-A)X = 0$, 对系数矩阵进行初等行变换得

$$E - A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -4 & 3 & 8 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

方程的基础解系只含有一个向量, 故 A 不可对角化.

矩阵的相似对角化

例 13 (P142 例 5.2.4)

已知 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 求 A^n.

考虑将 A 对角化.

矩阵的相似对角化

解. $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2.$

A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2.$

对 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, 解方程 $(-E - A)X = 0$. 对系数矩阵进行初等行变换

$$-E - A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

矩阵的相似对角化

解续. 方程的基础解系为 $\xi_1 = (-1, 1, 0)^T, \xi_2 = (-1, 0, 1)^T$.
对 $\lambda_3 = 2$, 解方程 $(2E - A)X = 0$. 对系数矩阵进行初等行变换

$$2E - A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

方程的基础解系为 $\xi_3 = (1, 1, 1)^T$.

令 $P = [\xi_1, \xi_2, \xi_3] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,

则 $P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$,

矩阵的相似对角化

解续. $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,

$$A^n = P\Lambda^n P^{-1}$$
$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-1)^n & & \\ & (-1)^n & \\ & & 2^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2^n + 2(-1)^n & 2^n + (-1)^{n+1} & 2^n + (-1)^{n+1} \\ 2^n + (-1)^{n+1} & 2^n + 2(-1)^n & 2^n + (-1)^{n+1} \\ 2^n + (-1)^{n+1} & 2^n + (-1)^{n+1} & 2^n + 2(-1)^n \end{bmatrix}$$

习题选讲

课堂练习

已知 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&a\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$, $A\sim B$, 求 a, b.

思路: B 的特征值为: $2, b, -1$, $A\sim B$, 故 A 的特征值也应该为 $2, b, -1$.
故 $trA=2+a=2+b-1$, $\det A=2\times(-1)=2\times b\times(-1)$,
故 $a=0, b=1$.

习题选讲

课堂练习

已知 $A=\begin{bmatrix}0.4&5&6\\0&0.5&6\\0&0&0.6\end{bmatrix}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}A^n$.

思路: A 有三个不同的特征值 $0.4,0.5,0.6$, 故可对角化, 即存在可逆矩阵 P, 使得 $A=P\Lambda P^{-1}$, $\Lambda=\begin{bmatrix}0.4&&\\&0.5&\\&&0.6\end{bmatrix}$.

故 $\lim\limits_{n\to\infty}A^n=\lim\limits_{n\to\infty}P\Lambda^nP^{-1}=$

$$\lim_{n\to\infty}P\begin{bmatrix}0.4^n&&\\&0.5^n&\\&&0.6^n\end{bmatrix}P^{-1}=0.$$

习题选讲

课堂练习 (习题册 P86 第七题)

设 $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -k & -1 & k \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ 求

1. k 为何值时, A 相似于对角阵.
2. 求可逆阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

思路: 计算

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & 2 \\ k & \lambda+1 & -k \\ -4 & -2 & \lambda+3 \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+1)^2.$$

需考虑二重特征值 -1 对应的线性无关的特征向量个数, 即齐次线性方程组 $(-E-A)X=0$ 的基础解系向量个数.

习题选讲

例5续

设 $A^2-5A+6E=0$, 我们已经知道, A 的特征值为 2 或 3. 证明 A 可对角化.

证明.

$(2E-A)X=0$ 的基础解系向量个数为 $n-r(2E-A)$.
$(3E-A)X=0$ 的基础解系向量个数为 $n-r(3E-A)$.
所以, A 的线性无关的特征向量的个数为
$2n-r(2E-A)-r(3E-A)$.
又因为 $(A-2E)(A-3E)=A^2-5E+6E=0$, 所以,
$r(2E-A)+r(3E-A)\leq n$.
故 $2n-r(2E-A)-r(3E-A)\geq n$.
又因为 A 的线性无关的特征向量的个数至多 n 个, 故恰为 n 个. 所以,A 可对角化. $\square$

习题选讲

例 14

设 $n(n>1)$ 阶矩阵 A 的秩 $r(A)=1$, 求证:
(1) A 的特征值为 0 和 $tr(A)$.
(2) 当 $tr(A)=0$ 时, A 不可对角化. 当 $tr(A)\neq 0$ 时, A 可对角化.

证明. (1) $r(A)=1$, 则 $AX=0$ 有 $n-1$ 个线性无关的解,
故 0 为 A 的特征值, 且其重数 $\geq n-1$.
设 A 的特征值为 $0,\cdots,0,\lambda_n$, 则 $\lambda_n=tr(A)$.
故 $tr(A)$ 为 A 的特征值.
(2) 当 $tr(A)=0$ 时, 0 是 n 重特征值, 其特征子空间仅 $n-1$ 维, 故 A 不可对角化.
当 $tr(A)\neq 0$ 时, 0 是 $n-1$ 重特征值, 且我们有 $n-1$ 个属于 0 的线性无关特征向量; $tr(A)\neq 0$ 为 A 的单特征值, 有一个属于它的特征向量. 故 A 可对角化.