线性代数 (理工)

常寅山

第一章　线性方程组

1. 线性方程组与矩阵
   - 线性方程组
   - 高斯消元法
   - 矩阵
2. 矩阵行变化与线性方程组求解

鸡兔同笼问题

例. 一个笼子里有鸡和兔子共 25 只, 共有 70 只脚, 问鸡和兔子各有多少只?

解. 假设鸡有 x 只, 兔子有 y 只. 那么, 根据已知条件,

$$\begin{cases} x + y = 25 & (1) \\ 2x + 4y = 70 & (2) \end{cases}$$

这样我们得到一个二元一次方程组.
如何求解?
由 (1) 式, 我们得到 $x = -y + 25$. 由 (2) 式, 我们得到 $x = -2y + 35$. 所以, $-y + 25 = x = -2y + 35$. 解得 $y = 10$. 再代入 (1) 式, 得 $x = 15$.

鸡兔同笼问题

$$\begin{cases} x+y=25 & (1) \\ 2x+4y=70 & (2) \end{cases}$$

或者等价的, (2)-(1)×2 消去未知元 x: $2y=20$, 得到 $y=10$.
把 $y=10$ 带入 (1): 得到 $x=15$.
结论: 15 只鸡, 10 只兔子.

鸡兔同笼

上述二元一次方程组是一般线性方程组的特殊情况.

上面消元化简方程组进行求解的方法称为高斯消元法.

线性方程

定义 1 (n 元线性方程)

含有 n 个未知变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 且具有如下形式的方程称为n 元线性方程:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

其中, 系数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 与常数项 b 均为已知实数 (或复数).

线性方程组

定义 2 (线性方程组)

含有 n 个未知变量的 m 个线性方程:

$$\left\{\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}\right. \tag{1}$$

构成的组称为 线性方程组, 其中系数 a_{ij} 和常数项 b_i, $(i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n)$ 均为已知的实数 (或复数).

- 当 $b_1 = \cdots = b_m = 0$ 时, 称 (1) 为齐次线性方程组.
- 当 $b_1, \ldots, b_m$ 不全为 0 时, 称 (1) 为非齐次线性方程组.

练习

例 1

$$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 2 = x_1, \\ x_2 = 2(\sqrt{6} - x_1) + x_3, \end{cases}$$ 是否为线性方程组?

是 (非齐次) 线性方程组, 因为该方程整理后为

$$\begin{cases} 3x_1 & -5x_2 & & = -2, \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & = 2\sqrt{6}, \end{cases}$$

写法: 未知数对齐, 系数为 0 的空出来.

练习

例 2

$$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 2 = x_1 x_2, \\ x_2 = 2\sqrt{x_1} - 6, \end{cases}$$ 是否为线性方程组?

不是线性方程组, 因为 $x_1 x_2$ 和 $2\sqrt{x_1}$ 不是一次的.

线性方程组的解

定义 3 (线性方程组的解)

方程组的解是一组满足方程组的 n 元有序数组 $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$. 方程组的解的全体称为解集.

练习

例. 观察齐次线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 & -5x_2 & & = 0, \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & = 0, \end{cases}$$

不通过复杂的计算, 你能否迅速发现上述方程组的一个特殊解?

解. 我们观察到 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ 一定是上述齐次方程组的解.

练习

例. 推广上面的想法, 关于下面的一般的齐次线性方程组, 你能肯定的做出怎样的断言?

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

解. $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 一定是解.

思考. 上述问题的反问题是否成立? 即考虑一个线性方程组, 如果 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 是解, 那么, 该方程组是否一定是齐次的?

零解和非零解

定义 4

- 如果 n 元数组 $(0, \cdots, 0)$ 为方程组的解, 就称其为方程组的零解;
- 若 n 元有序数组 $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ 为方程组的解, 且元素 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 不全为零, 就称其为非零解.

线性方程组的解

在解线性方程组的具体例子中，我们发现线性方程组解的大致分为三种情况：

- 无解;
- 有唯一解;
- 有无穷多解.

线性方程组的解

线性方程组的三个基本问题

1) 是否有解 (解的存在性问题);
2) 若有解, 是否唯一 (解的唯一性问题).
3) 若有解, 如何求出所有的解.

线性方程组的解

例. $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases}$ 有唯一解 $x=1, y=0.$

$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \\ 2x+3y=3 \end{cases}$ 无解. 因为前两个方程要求 $x=1,\ y=0.$
而它不满足第三个方程.

$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y-z=1 \end{cases}$ 有无穷多解, 解集为
$\{(x,y,z): x=1, y+z=0\}.$

线性方程组的解

对线性方程组,

- 若方程组无解, 则称方程组不相容
- 若方程组有解, 则称方程组相容

同解/等价

我们回顾如下线性方程组的求解过程: $\begin{cases} x+y=1 \ (1) \\ x-y=1 \ (2) \end{cases}$

我们首先用 (2) 式减去 (1) 式, 得到

$$-2y=0 \ (3).$$

然后求出 $y=0$, 再代入 (1) 式, 求出 $x=1$. 实际上, 这相当于我们用如下线性方程组替换原方程组: $\begin{cases} x+y=1 \ (1) \\ -2y=0 \ (3) \end{cases}$

由于 (1) 和 (2) 能推出 (3). 而 (2)=(1)+(3). 所以, 满足 (1)&(2) 与满足 (1)&(3) 完全等价. 这两个方程组有完全相同的解集.

同解/等价

若两个线性方程组解集相同，则称两个方程组同解或等价.

从上面的例子，我们看到线性方程组的求解过程实际上是一个等价替换的过程. 通过不断的用同解的但更简单的线性方程组替换原方程组，我们不断化简问题，最终求出原问题的解集.

配平化学方程式

例. 植物通过光合作用, 利用阳光的能量, 可以将二氧化碳 CO_2 和水 H_2O 合成为葡萄糖 $C_6H_{12}O_6$ 和氧气 O_2. 我们需要知道反应物和生成物的比例关系, 即要得到如下反应方程式

$$x_1 CO_2 + x_2 H_2 O = x_3 C_6 H_{12} O_6 + x_4 O_2,$$

其中, x_1, x_2, x_3, x_4 是最大公约数为 1 的正整数系数.

分析. 根据物质守恒定律, 方程式两端各原子总数相等. 有多少 X 原子参与反应, 那么生成物中必然有相同数量的 X 原子.

问题 1. 根据 C, H, O 三种原子的物质守恒定律, 试写出 x_1, x_2, x_3, x_4 需要满足的方程.

配平化学方程式

解. $x_1 = 6x_3$, $2x_2 = 12x_3$, $2x_1 + x_2 = 6x_3 + 2x_4$.
等价的, 我们把这个线性方程组写成

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad -6x_3 \quad\quad = 0 & (1) \\ \quad 2x_2 - 12x_3 \quad\quad = 0 & (2) \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 - 2x_4 = 0 & (3) \end{cases}$$

问题 2. 利用高斯消元法求解上述线性方程组.

解. 由方程 (1) 解得 $x_1 = 6x_3$. 将之带入 (2) 和 (3), 可以用 x_3 表示 x_1, 达到消去 x_1 的目的. 这样, 我们得到

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad -6x_3 \quad\quad = 0 & (1) \\ \quad 2x_2 - 12x_3 \quad\quad = 0 & (2) \\ \quad x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 0 & (3a) \end{cases}$$

配平化学方程式

接下来, 我们只需要先求解 (2) 和 (3a) 构成的关于 x_2, x_3, x_4 的子方程组. 而解出 x_2, x_3, x_4 后代入 (1) 式即可得到 x_1.
接下来, 利用 (2), 我们可以用 x_3, x_4 表达 x_2. 为了得到这个表达式, 我们可以对 (2) 式左右两端同除以 x_2 之前的系数 2, 得到 $x_2 - 6x_3 = 0$. 从而, $x_2 = 6x_3$ 代入 (3a), 得到

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad -6x_3 \quad\quad\quad = 0 & (1) \\ \quad\quad x_2 \; -6x_3 \quad\quad\quad = 0 & (2a) \\ \quad\quad\quad\quad 12x_3 \; -2x_4 = 0 & (3b) \end{cases}$$

最后, (3b) 式左右同除以 12, 得到

配平化学方程式

$$\begin{cases} x_1 & & -6x_3 & & = 0 & (1) \\ & x_2 & -6x_3 & & = 0 & (2a) \\ & & x_3 & -\frac{1}{6}x_4 & = 0 & (3c) \end{cases}$$

从 (3c), 我们得到 $x_3 = \frac{1}{6}x_4$. 代入 (2a), 我们得到 $x_2 = x_4$. 再代入 (1) 式, 得到 $x_1 = x_4$.
等价的, 我们得到

$$\begin{cases} x_1 & & & -x_4 & = 0 & (1) \\ & x_2 & & -x_4 & = 0 & (2a) \\ & & x_3 & -\frac{1}{6}x_4 & = 0 & (3c) \end{cases}$$

这时, 三个方程有一个公共未知元 x_4. 除去这个公共未知元, 每个方程额外的恰有一个非公共未知元, 且这个非公共未知元彼此不同. 那么, 方程的公共未知元决定了非公共未知元的取值, 确定方程的解等价于确定方程的公共未知元的取值.

配平化学方程式

取 x_4 是自由变量. 最后, 我们求出解集

$$\{(x, x, \frac{1}{6}x, x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

最后, 我们得到配平后的化学方程式为

$$6\,CO_2 + 6\,H_2O = C_6H_{12}O_6 + 6\,O_2.$$

配平化学方程式

问题 3. 在上述求解过程中, 我们对原方程组做了一系列的变换. 前一步的方程组总能推出后一步的方程组. 所以, 最后得到的必然包括所有解. 问题是这恰好是所有的解了么? 在变换的过程中是否有额外增加解的情况出现? 或者等价的, 每步变形是否都是等价变形, 后一步的方程组是否也能够推出前一步的方程组?

请以其中的某一步为例, 分析这个问题.

配平化学方程式

第一步, 我们将

$$\begin{cases} x_1 & & -6x_3 & & = 0 & (1) \\ & 2x_2 & -12x_3 & & = 0 & (2) \\ 2x_1 & +x_2 & -6x_3 & -2x_4 & = 0 & (3) \end{cases}$$

变成

$$\begin{cases} x_1 & & -6x_3 & & = 0 & (1) \\ & 2x_2 & -12x_3 & & = 0 & (2) \\ & x_2 & +6x_3 & -2x_4 & = 0 & (3a) \end{cases}$$

这相当于我们保持 (1) 和 (2) 不变, 但是用 (3a)$= -2\times(1)+(3)$ 替换了 (3). 这一步是可逆的, 只需要 (1) 式乘以 2 加到 (3a) 即可恢复 (3) 式. 所以, 这两个方程组是完全等价的, 互相能够推出彼此, 有相同的解.

配平化学方程式

由此, 我们得到方程组等价变形的第一种基本方法:
将某一个方程乘以常数加到另一个方程上去.

线性方程

其中有一步我们做了如下变形

$$\begin{cases} x_1 & & -6x_3 & & = 0 & (1) \\ & 2x_2 & -12x_3 & & = 0 & (2) \\ & x_2 & +6x_3 & -2x_4 & = 0 & (3a) \end{cases}$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{cases} x_1 & & -6x_3 & & = 0 & (1) \\ & x_2 & -6x_3 & & = 0 & (2a) \\ & x_2 & +6x_3 & -2x_4 & = 0 & (3a) \end{cases}$$

这里, 我们用 1/2 乘以方程 (2) 得到了方程 (2a). 这一步也是可逆的, 只需要用 2 乘以方程 (2a) 即可得到 (2). 所以, 上面的方程组和下面的方程组可以互相推出来, 两者是等价的方程组, 有相同的解.

配平化学方程式

由此, 我们得到方程组等价变形的第二种基本方法:
将某一个方程乘以非零常数.

配平化学方程式

最后, 虽然在这个例子里我们没有用到, 但是方程组等价变形里还有第三种基本方法. 那就是,
交换两个方程.
比如, 把

$$\begin{cases} \quad\; x_2 - x_3 = 0 & (1) \\ x_1 \quad\;\; - x_3 = 0 & (2) \end{cases}$$

变成

$$\begin{cases} x_1 \quad\;\; - x_3 = 0 & (2) \\ \quad\; x_2 - x_3 = 0 & (1) \end{cases}$$

配平化学方程式

和配平化学方程式的例子类似, 对于一般的线性方程组

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\
\qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m,
\end{cases}
$$

综合使用上述三个基本方法, 总可将其等价变形为如下形式

配平化学方程式

$$\begin{cases} x_{i_1} & & & & + \sum_{k\notin I} c_{1k}x_k = d_1, \\ & x_{i_2} & & & + \sum_{k\notin I} c_{2k}x_k = d_2, \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & x_{i_\ell} & + \sum_{k\notin I} c_{\ell k}x_k = d_\ell, \\ & & & & 0 = d_{\ell+1}, \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 = d_m \end{cases}$$

其中, $\ell \leq m$, $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_\ell \leq n$, $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_\ell\}$.

配平化学方程式

如果 $\ell < m$ 且 $d_{\ell+1}, \ldots, d_m$ 不全为零, 那么, 方程组显然无解.

否则, 方程组有解. 除了 $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_\ell}$ 都是自由变量, 可得方程组的解为

$$\left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} x_{i_1} = d_1 - \sum_{k \notin I} c_{1k} x_k, \\ \cdots \\ x_{i_\ell} = d_\ell - \sum_{k \notin I} c_{\ell k} x_k. \end{array} \right\}$$

高斯消元法

线性方程组的初等变换:

(1) 交换两个方程位置;

(2) 一个方程的两端乘以一个非零常数;

(3) 将一个方程的常数倍加到另一个方程上.

线性方程组的初等变换是可逆的.

高斯消元法: 通过对线性方程组做初等变换, 得到可以直接求解的同解的简单的线性方程组.

注 1

能用高斯消元法的原因: 对线性方程组做初等变换, 得到的是一个同解方程组.

练习

例 3

证明下列两个线性方程组同解:

$$(A)\begin{cases} 2x_1+2x_2 \quad -x_3 = 3, & [A.1] \\ \qquad x_2 \qquad\quad = 2, & [A.2] \\ \qquad\qquad 2x_3 = 6, & [A.3] \end{cases}$$

$$(B)\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, & [B.1] \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = -1, & [B.2] \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 9, & [B.3] \end{cases}$$

练习

$$(A)\begin{cases} 2x_1+2x_2 \quad -x_3 = 3, & [A.1] \\ \qquad x_2 \qquad\quad = 2, & [A.2] \\ \qquad\qquad 2x_3 = 6, & [A.3] \end{cases}$$

$$(B)\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3=3, & [B.1] \\ -2x_1-x_2+x_3=-1, & [B.2] \\ 2x_1+2x_2+x_3=9, & [B.3] \end{cases}$$

- $[A.1]=[B.1]$,
  $[A.2]=[B.1]+[B.2]$,
  $[A.3]=[B.3]-[B.1]$.
  我们由 (B) 得到了 (A), (B) 的解必为 (A) 的解.
- 反之, $[B.1]=[A.1]$,
  $[B.2]=[A.2]-[A.1]$,
  $[B.3]=[A.1]+[A.3]$.
  我们也可由 (A) 得到 (B), 故 (A) 的解必为 (B) 的解.

练习

例 4

求解线性方程组: $(A)\begin{cases} 2x_1+2x_2 \quad -x_3 = 3, & [A.1] \\ \qquad x_2 \qquad\qquad = 2, & [A.2] \\ \qquad\qquad\quad 2x_3 = 6, & [A.3] \end{cases}$

解. 由 [A.2], [A.3] 得 $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, 再代入 [A.1] 得 $x_1 = 1$. 故 (A) 的解为 $(1, 2, 3)$.

练习

例 5

求解线性方程组:
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 & (1) \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 0 & (2) \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 = 0 & (3) \end{cases}$$

解. 将 (1) 乘以 -3 加到 (2) 式上, 将 (1) 乘以 -5 加到 (3) 式上, 消去 x_1, 得到
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 & (1) \\ -4x_2 - 8x_3 = 0 & (2a) \\ -8x_2 - 16x_3 = 0 & (3a) \end{cases}$$

练习

将 (2a) 式乘以 $-1/4$, 将 (2a) 式 x_2 前的系数化为 1, 得到

$$\begin{cases} x_1 & +3x_2 & +5x_3 & =0 & (1) \\ & x_2 & +2x_3 & =0 & (2b) \\ & -8x_2 & -16x_3 & =0 & (3a) \end{cases}$$

将 (2b) 式乘以 -3 加到 (1) 式上, 将 (2b) 乘以 8 加到 (3a) 式上, 消去 x_2, 得到,

$$\begin{cases} x_1 & & -x_3 & =0 & (1a) \\ & x_2 & +2x_3 & =0 & (2b) \\ & & 0 & =0 & (3b) \end{cases}$$

最后, 取 x_3 是自由变量, 知道解为

$$\{(z,-2z,z) : z \in \mathbb{R}\}.$$

练习

例 6

求解线性方程组: $\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 1 & & (1) \\ 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & = & 3 & & (2) \\ x_1 & -x_2 & -2x_3 & = & 0 & & (3) \end{cases}$

解. 将 (1) 乘以 -2 加到 (2) 上, 将 (1) 乘以 -1 加到 (3) 上, 消去 x_1, 得到 $\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 1 & & (1) \\ & -x_2 & -x_3 & = & 1 & & (2a) \\ & -3x_2 & -3x_3 & = & -1 & & (3a) \end{cases}$

(2a) 乘以 -1, 将 x_2 前的系数化为 1, 得到

练习

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 1 & (1) \\ & x_2 & +x_3 & = & -1 & (2b) \\ & -3x_2 & -3x_3 & = & -1 & (3a) \end{cases}$$

将 (2b) 乘以 -2 加到 (1) 上, 将 (2b) 乘以 3 加到 (3a) 上,

消去 x_2, 得到, $\begin{cases} x_1 & & -x_3 & = & 3 & (1a) \\ & x_2 & +x_3 & = & -1 & (2b) \\ & & 0 & = & -4 & (3b) \end{cases}$

由于 (3b), 方程组无解.

练习

例 7

求解线性方程组: $\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 1 & (1) \\ x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 2 & (2) \\ 2x_1 & +3x_2 & +3x_3 & = & 4 & (3) \end{cases}$

解. 令 (2a)=(2)−(1), (3a)=(3)−2(1), 消去 x_1, 得到,

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 1 & (1) \\ & & x_3 & = & 1 & (2a) \\ & x_2 & +x_3 & = & 2 & (3a) \end{cases}$$

我们只保留第一行中的 x_1, 用第一行将其他行中的 x_1 消去. 接下来, 我们试图消去 x_2. 这时, 我们不能用第二行消去其他行中的 x_2, 这是因为第二行中 x_2 的系数为 0. 我们也不能用第一行, 因为用第一行消去其他行的 x_2 时又会将 x_1 带到其他行上去. 所以, 我们只能利用第三行.

练习

为了标准和美观, 我们将第三行和第二行调换, 这样调换之后, 新的第二行里 x_2 的系数非零, 可以用于消元.

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 1 & \quad (1) \\ & x_2 & +x_3 & = & 2 & \quad (2b) \\ & & x_3 & = & 1 & \quad (3b) \end{cases}$$

接下来, 令 (2c)=(2b)−(3b), (1a)=(1)−(2b), 得到

$$\begin{cases} x_1 & & & = & -1 & \quad (1a) \\ & x_2 & & = & 1 & \quad (2c) \\ & & x_3 & = & 1 & \quad (3b) \end{cases}$$

最后, 解为 $(-1, 1, 1)$.

练习

例 8

求解线性方程组: $\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 1 & (1) \\ & & x_3 & +x_4 & = & 0 & (2) \\ & & x_3 & -x_4 & = & 0 & (3) \end{cases}$

分析. 我们已经消去第二行和第三行中的 x_1. 第二行和第三行中的 x_2 也没有出现. 这时, 我们跳过 x_2, 直接对 x_3 和 x_4 进行消元.

解. 令 (3a)=(3)−(2), 得到

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 1 & (1) \\ & & x_3 & +x_4 & = & 0 & (2) \\ & & & -2x_4 & = & 0 & (3a) \end{cases}$$

令 (3b)$= -\frac{1}{2}$(3a), 得到

练习

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 1 & \quad (1) \\ & & x_3 & +x_4 & = & 0 & \quad (2) \\ & & & x_4 & = & 0 & \quad (3b) \end{cases}$$

令 (2a)=(2)−(3b), (1a)=(1)−(2), 得到

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & & & = & 1 & \quad (1a) \\ & & x_3 & & = & 0 & \quad (2a) \\ & & & x_4 & = & 0 & \quad (3b) \end{cases}$$

最后, 解为 $\{(1-x, x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\}$.

练习

思考. λ 为何值时, 下列方程组无解? 有唯一解? 无穷多解?

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + (2-\lambda)x_3 = 1 \\ (2-\lambda)x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 = 1 \\ (3-2\lambda)x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 = \lambda \end{cases}$$

矩阵

在 Gauss 消元法的过程中, 只是对方程组的系数 a_{ij} 和常数项 b_i 进行计算, 而未知变量 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 没有参与任何计算, 所以在进行消元法时可以只写出系数与常数项, 这样我们得到一个数表, 称这个数表为矩阵.

矩阵

定义 5 (矩阵)

由 $m \times n$ 个实 (或复) 数排成一个 m 行 n 列的长方形数表称为 $m \times n$ 矩阵, 记为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

其中 a_{ij} 称为矩阵的第 i 行第 j 列元素.

常用大写字母 $A, B, C, \ldots$ 表示矩阵;
当需要表示出它的元素时, 可记为 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $\cdots$;
当需要表示出行数和列数时, 可记为 $A_{m\times n}$.
元素 a_{ij} 的位置可用 (i, j) 表示.

矩阵

特别的,

- 当矩阵的行数与列数均为 n 时, 称为 n 阶矩阵, n 阶方阵, 或方阵, 可记为 A_n 或 A_{nn};
- 一阶矩阵是由一个元素构成的矩阵;
- $A_{1\times n}$ 是行向量, $A_{m\times 1}$ 是列向量;
- 两个矩阵 A_{mn} 和 B_{rs} 相等, 当且仅当 $m=r,\ n=s$, 且 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m, j=1,2,\cdots,n)$.

系数矩阵和增广矩阵

对线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn} = b_m, \end{cases}$$

该方程组的**系数矩阵**: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$

该方程组的**增广矩阵**: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$

矩阵的初等行变换

线性方程组的初等变换对应着增广矩阵的行变换:
矩阵的初等行变换:

(1) 对换变换: 交换矩阵的两行;

(2) 数乘变换: 将某行全体元素都乘以某一非零常数;

(3) 倍加变换: 将某行用该行与另一行的常数倍的和替换, 即把另一行的常数倍加到某行上.

注 2

矩阵的初等行变换是可逆的.

练习

例 9 (P3 例 1.1.1)

求解线性方程组 $\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +x_3 & = 0, \\ & 2x_2 & +x_3 & = 7, \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & = 1. \end{cases}$

分别采用方程组记号和矩阵记号呈现消元过程.

练习

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +x_3 & = 0, & (1) \\ & 2x_2 & +x_3 & = 7, & (2) \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & = 1. & (3) \end{cases} \xRightarrow{(3a)=(3)-2\times(1)} \begin{cases} x_1 & -2x_2 & +x_3 & = 0, & (1) \\ & 2x_2 & +x_3 & = 7, & (2) \\ & 5x_2 & -3x_3 & = 1. & (3a) \end{cases}$$

$$\xRightarrow{(2a)=\frac{1}{2}\times(2)} \begin{cases} x_1 & -2x_2 & +x_3 & = 0, & (1) \\ & x_2 & +\frac{1}{2}x_3 & = \frac{7}{2}, & (2a) \\ & 5x_2 & -3x_3 & = 1. & (3a) \end{cases}$$

$$\xRightarrow{(3b)=(3a)-5\times(2a)} \begin{cases} x_1 & -2x_2 & +x_3 & = 0, & (1) \\ & x_2 & +\frac{1}{2}x_3 & = \frac{7}{2}, & (2a) \\ & & -\frac{11}{2}x_3 & = \frac{33}{2}. & (3b) \end{cases}$$

$$\xRightarrow{(3c)=-\frac{2}{11}\times(3b)} \begin{cases} x_1 & -2x_2 & +x_3 & = 0, & (1) \\ & x_2 & +\frac{1}{2}x_3 & = \frac{7}{2}, & (2a) \\ & & x_3 & = 3. & (3c) \end{cases}$$

$$\xRightarrow{(2b)=(2a)-\frac{1}{2}(3c)} \begin{cases} x_1 & -2x_2 & +x_3 & = 0, & (1) \\ & x_2 & & = 2, & (2b) \\ & & x_3 & = 3. & (3c) \end{cases}$$

$$\xRightarrow{(1a)=(1)+2\times(2b)-(3c)} \begin{cases} x_1 & & & = 1, & (1a) \\ & x_2 & & = 2, & (2b) \\ & & x_3 & = 3. & (3c) \end{cases}$$

所以，解为 $x_1 = 1$，$x_2 = 2$，$x_3 = 3$.

练习

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 7\\ 2 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix} \xRightarrow{r_3=r_3-2r_1} \begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 7\\ 0 & 5 & -3 & 1\end{bmatrix}$$

$$\xRightarrow{r_2=\frac{1}{2}r_2} \begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2}\\ 0 & 5 & -3 & 1\end{bmatrix} \xRightarrow{r_3=r_3-5r_2} \begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2}\\ 0 & 0 & -\frac{11}{2} & \frac{33}{2}\end{bmatrix}$$

$$\xRightarrow{r_3=-\frac{2}{11}r_3} \begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2}\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{bmatrix} \xRightarrow{r_2=r_2-r_3} \begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

$$\xRightarrow{r_1=r_1+2r_2-r_3} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

所以，解为 $x_1 = 1$，$x_2 = 2$，$x_3 = 3$.

矩阵行等价

定义 6 (矩阵行等价)

两个矩阵若可以通过一系列初等行变换进行转化，则称两个矩阵行等价.

- 线性方程组通过初等行变换变成等价的线性方程组;
- 对应的增广矩阵通过对应的矩阵行初等变换，变成行等价的矩阵.

定理 1

若两个线性方程组的增广矩阵行等价，则他们同解.

第一章　线性方程组

阶梯形矩阵

留意一些方程组的求解过程，用其增广矩阵的初等行变换表示．最后，我们会把其增广矩阵变成所谓“行最简形矩阵”，在中间过程中我们会遇到阶梯型矩阵．从行最简形矩阵，我们可以直接写出方程组的解集；而从阶梯形矩阵，我们可以从下至上逐个解出方程组的解．所以这两种形式的增广矩阵在方程组以矩阵形式求解的过程中尤为重要．

定义 7 (阶梯形矩阵)

若矩阵满足

(1) 所有非零行均在零行之上，

(2) 每一行首个非零元所在的列，都在上一行首个非零元所在列的右边，

则称该矩阵具有阶梯形，称该矩阵为阶梯形矩阵．

行最简形矩阵

定义 8 (行最简形矩阵)

如果一个阶梯形矩阵还满足

(3) 非零行中的非零首元均为 1,

(4) 每个非零首元在其所处的列中, 是唯一的非零元素,

则称其具有行简化阶梯形式, 称该矩阵为行最简形矩阵或Jordan 阶梯形矩阵.

阶梯形矩阵

定义 9 (主元)

矩阵 A 的阶梯形中, 非零首元对应的位置称为 A 的主元位置, 位于主元位置的元素称为主元, 主元所在列称为一个主元列

阶梯形矩阵

例 10

下列矩阵是否为阶梯形矩阵:

1. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,
2. $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$,
3. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,
4. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

1. 是阶梯形, 主元位置 $(1, 2)$,
2. 是阶梯形, 主元位置 $(1, 1), (2, 3), (3, 4)$,
3. 是阶梯形, 且是 Jordan 型, 主元位置 $(1, 2)$, $(2, 4)$.
4. 不是阶梯形.

阶梯化和最简化

利用高斯消元法的矩阵形式, 我们知道线性方程组对应的增广矩阵都可以 (行) 等价的变换成阶梯形和 Jordan 形.

注 3

更一般的, 任意一个非零矩阵 A 都可以通过矩阵的初等行变换化为阶梯形, 进而化为行最简形;

提示. 利用三种初等行变换.

矩阵的行化简算法

矩阵的行化简算法

1. 从矩阵最左边的非零列开始, 主元位置在该列第一行. 若该位置上的元素为零, 应用行对换变换, 交换两行位置, 把该位置变为非零元, 得到第一个主元.
2. 应用倍加变换, 将主元下方的元素化为零.
3. 忽略主元位置所在行及其上方的所有行, 对余下的子矩阵重复上面步骤, 直到得到阶梯形矩阵.

若要得到 Jordan 阶梯形, 则将步骤 2 变为:

2'. 利用倍加变换, 将主元列中, 除主元外的所有元素化为零, 并用数乘变换, 将主元化为 1.

或者在阶梯形矩阵的基础上, 作步骤 $2'$.

阶梯化和最简化

例 11 (P6 例 1.2.1)

将矩阵 $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & 1 & 6 \\ 2 & -4 & 3 & -4 & -11 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & -6 & 10 & -8 & -28 \end{bmatrix}$ 化为行最简形, 并求 A 的行最简形对应的主元列.

问题. 不同答案? 不同的人化为行最简形的方法可能不唯一, 上述例题的答案是否唯一? 即行最简形是否唯一, 主元列是否唯一.

唯一性

注 4

- 非零矩阵 A 通过不同顺序的行初等变换, 所得阶梯形矩阵可以不唯一, 但是主元位置唯一, 主元位置完全由非零矩阵 A 所决定;
- 任意一个非零矩阵 A 都可以通过矩阵的初等行变换化为 Jordan 形矩阵, 并且 Jordan 形矩阵唯一.

思考

问题. 为什么一个矩阵的行最简形矩阵唯一?
提示. 考虑反证法. 由于矩阵的初等行变换是行等价变换, 所以只需证明对于两个不同的 Jordan 形矩阵, 它们并不行等价即可.

思考

问题. 为什么同一个矩阵 A 通过初等行变换变换出来的两个可能不同的阶梯形矩阵的主元位置反而是唯一的? 更一般的, 为什么等价的两个矩阵 A 和 B 有相同的主元位置.

利用矩阵行化简算法求解线性方程组

例 12 (无解情况, P8 例 1.2.3)

求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ -x_1 - x_2 + x_5 = -1, \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_5 = 1, \\ x_3 + x_4 + 3x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 4 \end{cases}$$

解. 写出增广矩阵并化为行最简形式:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 = r_2 + r_1 \\ r_3 = r_3 + 2r_1 \\ r_5 = r_5 - r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

利用矩阵行化简算法求解线性方程组

$$\xRightarrow{\begin{array}{l} r_3 = r_3 - 2r_2 \\ r_4 = r_4 - r_2 \\ r_5 - r_5 - r_2 \end{array}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xRightarrow{\text{交换}r_3\text{和}r_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xRightarrow{r_5 = r_5 - r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

利用矩阵行化简算法求解线性方程组

对应的线性方程组:

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 1, \\ & & x_3 & +x_4 & +2x_5 & = & 0, \\ & & & & x_5 & = & 3, \\ & & & & 0 & = & 3. \end{cases}$$

方程组无解.

注 5

观察可知

- 增广矩阵具有行 $[0, \cdots, 0, b]$, $b \neq 0$.
- 此方程系数矩阵的主元列比增广矩阵的主元列少 1, 即最后一列是主元列.

利用矩阵行化简算法求解线性方程组

对增广矩阵进行行化简, 对应着线性方程组的高斯消元法.

例 13 (P7 例 1.2.2)

求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ -x_1 - x_2 + x_5 = -1, \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_5 = 1, \\ x_3 + x_4 + 3x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 4 \end{cases}$$

解. 写出增广矩阵并进行行化简:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

利用矩阵行化简算法求解线性方程组

对应的线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 & & = 4, \\ & x_3 + x_4 & = -6, \\ & & x_5 = 3. \end{cases} \tag{1}$$

解出
$$\begin{cases} x_1 = 4 - x_2, \\ x_3 = -6 - x_4, \\ x_5 = 3. \end{cases} \tag{2}$$

其中, 变量 x_1, x_3, x_5 与阶梯矩阵的主元位置对应, 称为基本变量; 余下的变量 x_2, x_4 称为自由变量. 通过自由的选取自由变量的值, 我们可以由 (2) 得到原方程的解. 故方程组 (2) 的解称为原方程的通解.

利用矩阵行化简算法求解线性方程组

注 6

观察可知:

1) 基本变量对应 Jordan 矩阵的主元位置.
2) 基本变量个数 + 自由变量个数 = 未知数总个数.
3) 方程有无穷多个解的原因: 自由变量个数 > 0.
4) 此方程系数矩阵的主元列数 = 增广矩阵的主元列数, 即最后一列不是主元列.

解的存在性

定理 2

一个线性方程组有解当且仅当增广矩阵的最右边一列不为主元列，当且仅当系数矩阵和增广矩阵的主元列数相同，即增广矩阵的阶梯形式没有形如 $[0, \cdots, 0, b]$, $b \neq 0$ 的行.

当线性方程组有解时,

- 如果没有自由变量, 则方程组有唯一解, 此时系数矩阵的主元列数和增广矩阵的主元列数和未知量个数相同;
- 如果至少有一个自由变量, 则方程组有无穷多解, 此时增广矩阵的主元列数严格小于未知量个数.

解的存在性

特别的，我们可以把上述理论应用于一类特殊的线性方程组——齐次线性方程组.

推论 3

- 齐次线性方程组一定有解. *(零解)*
- $m \times n$ 的齐次线性方程组只有零解，当且仅当其系数矩阵的主元列数等于未知量的个数 n.
- $m \times n$ 的齐次线性方程有非零解，当且仅当其系数矩阵的主元列数小于未知量的个数 n.
- 若 $m < n$，则 $m \times n$ 的齐次线性方程一定有非零解. *(因为主元个数一定不超过 $\min(m, n)$.)*

思考

问题. 非齐次线性方程组有唯一解当且仅当对应的齐次线性方程组只有零解. 非齐次线性方程组有无穷多解当且仅当对应的齐次线性方程组有非零解.

小结

求解线性方程组步骤:

1) 写出方程组的增广矩阵.
2) 使用矩阵的初等行变换得到阶梯形矩阵, 从而根据主元列判断方程组是否有解. 如果无解, 则停止; 如果有解, 继续下一步.
3) 继续进行初等行变换, 将阶梯形矩阵化为行最简形式.
4) 写出 Jordan 形矩阵对应的线性方程组.
5) 将第 4 步得到的线性方程组中的基本变量用自由变量表示出来, 得到通解.