

第三次小测验

1. (10 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. 将 $A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14}$ 表示成 4 阶行列式并计算其取值.

2. (10 分) 已知方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解, 求 a 的值.

3. (10 分) 计算如下 n 阶三对角矩阵的行列式:

$$A_n = \begin{bmatrix} a & b & & \\ c & a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ & & c & a \end{bmatrix}.$$

4. (10 分) 假设 A 是元素为整数的 n 阶方阵. 假设 $\det A = 1$. 利用伴随矩阵, 说明 A 的逆矩阵的元素也都是整数.

5. (10 分) 用克莱姆法则解方程组:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5 \\ 4x_1 + 9x_2 + 4x_3 = 25 \end{cases}$$

6. (10 分) 利用升阶法计算行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 + x_1y_1 & 1 + x_1y_2 & \cdots & 1 + x_1y_n \\ 1 + x_2y_1 & 1 + x_2y_2 & \cdots & 1 + x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 + x_ny_1 & 1 + x_ny_2 & \cdots & 1 + x_ny_n \end{vmatrix}$$

7. (10 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$, 计算 $\det A$.

8. (10 分) 通过计算伴随矩阵, 求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ 的逆矩阵.

9. (10 分) 假设 A 是可逆方阵, D 是方阵. 证明 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D - CA^{-1}B|$.
10. (10 分) 假设 $n \geq 2$, $\det A_n = 0$. 假设 A^* 是 $A = A_n$ 的伴随矩阵. 证明 $\det A^* = 0$.