第四次小测验

1. (10 分) 已知 A 为 2×2 矩阵, $\mathrm{tr}(A)=8$, $\det A=12$, 求 A 的特征值.

2. (10 分) 已知 A, B 均为 $n\times n$ 矩阵, 证明: 若 A 不存在等于 1 的特征值, 则矩阵方程 $XA+B=X$ 有唯一解.

3. (10 分) 假设 A 有 n 个不同的特征值. $p(\lambda)=\det(\lambda E-A)$. 证明 $p(A)=0$.

4. (20 分) 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & k & 3\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$,

   a) (5 分) 当 k 取何值时, A 可相似对角化?

   b) (8 分) 当 A 可以相似对角化时, 将 A 相似对角化.

   c) (7 分) 当 A 可以相似对角化时, 给出一个满足 $B^2=A$, 且特征值均为正的方阵 B.

5. (20 分) 已知 $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$,

   a) (10 分) 求正交矩阵 Q, 和对角阵 Λ, 使得 $Q^{-1}AQ=\Lambda$.

   b) (10 分) 求 A^{2023}.

6. (20 分) 令 $P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix}$.

   a) (10 分) 求正交矩阵 Q 和对角线元素全为正数的上三角矩阵 L, 使得 $P=QL$.

   b) (10 分) 证明上一问的答案唯一.

7. (10 分) 假设 A,B 为两个 $n\times n$ 矩阵且 $AB=BA$. 假设 A 有 n 个互不相同的特征值. 证明存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 和 $P^{-1}BP$ 都是对角矩阵.