线性代数（理工）

常寅山

第四章 向量空间

1. 矩阵的秩
   - 行秩和列秩
   - 秩与极大非零子式
   - 关于矩阵秩的一些结果
2. 线性方程组的有解条件及解的结构

矩阵的行空间

定义 1

设 A 为 $m \times n$ 矩阵, A 的行空间 $\mathrm{Row}A$ 是 A 的行向量张成的空间. 记 $A = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{bmatrix}$, 则 $\mathrm{Row}A = \mathrm{span}\{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m\}$.

问题

如何求 $\mathrm{Row}A$ 的一组基?

矩阵的行空间

定理 1

矩阵 A 经初等行变换化为 B, 则 A, B 有相同的行空间. 特别的, 如果 B 为行阶梯形, 则 B 的非零行构成 $\mathrm{Row}A = \mathrm{Row}B$ 的一组基.

证明.

因 B 是 A 经初等行变换所得, 故 B 的行, 均为 A 的行的线性组合, $\mathrm{Row}B \subset \mathrm{Row}A$. 又因初等行变换可逆, 故 A 也可由 B 经初等行变化得到, $\mathrm{Row}A \subset \mathrm{Row}B$. 故 A 和 B 有相同的行空间.

特别的, 如果 B 为行阶梯形, 则它的非零行线性无关, 故构成 $\mathrm{Row}B = \mathrm{Row}A$ 的一组基. □

矩阵的行空间

求矩阵行空间基的办法

作初等行变换，化为阶梯形矩阵，取非零行即可.

另解

利用转置将行变为列，利用矩阵列空间基的办法.

矩阵的行空间

例 1 (P103 例 4.6.1)

求矩阵 $A=\begin{bmatrix}-2 & -5 & 8 & 0 & -17\\ 1 & 3 & -5 & 1 & 5\\ 3 & 11 & -19 & 7 & 1\\ 1 & 7 & -13 & 5 & -3\end{bmatrix}$ 行空间, 列空间, 和零空间的基.

解

将 A 作行初等变换, 化为行最简形式:

$$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

矩阵的行空间

解续.

初等行变换不改变行空间, 故行空间的一组基为

$$(1,0,1,0,1),\quad (0,1,-2,0,3),\quad (0,0,0,1,-5).$$

初等行变换不改变列向量的关系, B 的主元列为 $1,2,4$ 列, 故 A 的 $1,2,4$ 列构成列空间的一组基:

$$(-2,1,3,1)^T,\quad (-5,3,11,7)^T,\quad (0,1,7,5)^T.$$

$Ax=0$ 的通解为:$\begin{cases} x_1 = -x_3 - x_5 \\ x_2 = 2x_3 - 3x_5 \\ x_4 = 5x_5 \end{cases}$

故 $\mathrm{Nul}A$ 的一组基为: $(-1,2,1,0,0)^T$, $(-1,-3,0,5,1)^T$. □

矩阵的行秩与列秩

定义 2

设 A 是一个 $m \times n$ 阶矩阵. 称 A 的行向量组的秩为矩阵 A 的行秩, 称 A 的列向量组的秩为矩阵 A 的列秩.

引理 1

对矩阵做行 (或列) 的初等变换, 不会改变原矩阵的列秩和行秩.

定理 2

矩阵的行秩 = 列秩.

矩阵的秩

定义 3 (秩)

由于任意矩阵 A 的行秩等于列秩, 于是, 我们将 A 的行秩或者列秩定义为矩阵的秩, 记为秩 (A) 或 $r(A)$ 或 $\mathrm{rank}A$.

推论 3

1) 对矩阵 A 做初等变换, 不改变 A 的秩.
2) A 的秩等于与之等价的规范型 $\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 中 1 的个数.
3) 两个 $s \times n$ 矩阵 A 和 B 等价当且仅当 $r(A) = r(B)$.
4) $r(A) = 0$ 当且仅当 $A = 0$(零矩阵).
5) 对于 $k \neq 0$, $r(kA) = r(A)$.
6) $r(A) = r(A^T)$.

矩阵的 k 阶子式

定义 4 (矩阵的 k 阶子式)

在矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 中，任取 k 行 k 列，位于这些行于列交叉处的 k^2 个元素按照原来的顺序，构成的 k 阶行列式成为 A 的一个k 阶子式.

例 2

矩阵 $B=\begin{bmatrix}1&3&-5&1&5\\0&1&-2&2&-7\\0&0&0&-4&20\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$ 的第 $1,2,3$ 行和 $1,2,4$ 列组成的一个 3 阶子式为 $\begin{vmatrix}1&3&1\\0&1&2\\0&0&-4\end{vmatrix}=-4$. B 的所有 4 阶子式均为 0.

矩阵的 k 阶子式

命题 1

已知矩阵 A, 若 A 的所有 k 阶子式均为 0, 则 A 的所有 $k+1$ 阶子式也都为零.

证明.

对 A 的任意 $k+1$ 阶子式 $|B|=\det(b_{ij})_{(k+1)\times(k+1)}$ 按照行展开, 有

$$|B|=b_{11}B_{11}+b_{12}B_{12}+\cdots+b_{1(k+1)}B_{1(k+1)},$$

注意到, $(-1)^{1+j}B_{1j}$ 为 B 的 k 阶子式, 也是 A 的 k 阶子式, 故 $B_{1j}=0$, $j=1,2,\cdots,k+1$.
故 $|B|=0$. $\square$

矩阵的 k 阶子式

推论 4

已知矩阵 A, 若 A 的所有 k 阶子式均为 0, 则 A 的所有 t 阶 $(t > k)$ 子式也都为零.

矩阵的秩与极大非零子式

命题 2

已知矩阵 $A_{m\times n}$, 且 $r(A) < m < n$, 则 A 的任意 m 阶子式均为 0.

证明.

注意到, $r(A) < m$, 故 A 的任意 m 列线性相关. 故 A 的任意 m 列构成方阵的行列式, 即 A 的 m 阶子式, 均为 0. $\square$

矩阵的秩与极大非零子式

命题 3

已知矩阵 $A_{m\times n}$，且 $r(A)=r$，则 A 的任意 t 阶子式 $(t>r)$ 均为 0.

证明.

任取 A 的 t 行，得矩阵 $B_{t\times n}$. 则，$\mathrm{Row}B\subset \mathrm{Row}A$. 故，

$$r(B)=\dim(\mathrm{Row}B)\leq \dim(\mathrm{Row}A)=r(A)=r<t.$$

故 B 的任意 t 阶子式均为 0. 故 A 的任意 t 阶子式均为 0. □

矩阵的秩与极大非零子式

命题 4

已知矩阵 $A_{m\times n}$, 且 $r(A)=m<n$, A 存在非零的 m 阶子式.

证明.

注意到, $r(A)=m$, 可取 A 的 m 个线性无关列向量, 它们构成的方阵行列式非零. 此即 A 的一个非零的 m 阶子式. □

矩阵的秩与极大非零子式

命题 5

已知矩阵 $A_{m\times n}$, 且 $r(A)=r$, A 存在非零的 r 阶子式.

证明.

$r(A)=r$, 故可取 A 的 r 个线性无关行, 得矩阵 $B_{r\times n}$. B 的行线性无关, 故 $r(B)=r$. B 存在 r 阶非零子式, 其也是 A 的 r 阶非零子式. $\square$

矩阵的秩与极大非零子式

小结:

给定矩阵 A, $r(A) = r$, 则

- A 存在非零的 r 阶子式,
- A 的任意 t 阶 $(t > r)$ 子式均为 0.

定理 5

A 的秩等于 A 的非零子式的最高阶数.

注 1

要求矩阵 A 的秩, 我们现在有三种办法: 求行秩, 或求列秩, 或求 A 的非零子式的最高阶数.

矩阵的秩与极大非零子式

例 3

求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 6 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ 的秩.

解.

A 的二阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \neq 0$, A 没有 3 阶子式, 故 $r(A) = 2$. □

注 2

也可由行秩或列秩求.

矩阵的秩与极大非零子式

课堂练习

求 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 的秩.

矩阵的秩

小结:

给定矩阵 $A_{m\times n}$, 则它的

$$秩 = 行秩 = 列秩 = A的非零子式的最高阶数.$$

且

1) 对矩阵 A 做初等变换, 不改变 A 的秩.

1)' 设 P_m, Q_n 为可逆矩阵, 则
$r(A) = r(PA) = r(AQ) = r(PAQ)$

2) A 的秩等于与之等价的规范型 $\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 中 1 的个数.

3) 两个 $s \times n$ 矩阵 A 和 B 等价当且仅当 $r(A) = r(B)$.

秩定理

定理 6 (秩定理)

对 $m \times n$ 矩阵 A, 有 $\operatorname{rank} A + \dim \operatorname{Nul} A = n.$

证明.

A 的主元列构成 $\operatorname{Col} A$ 的一组基, 故 $\operatorname{rank} A = A$ 的主元列数;

$\operatorname{Nul} A$ 的维数

$=$ 方程 $AX = 0$ 的自由变量的个数

$= n - A$ 的主元列数;

故 $\operatorname{rank} A + \dim \operatorname{Nul} A = n$ $\square$

秩定理

例 4

设 $A_{s\times n}$ 的秩为 n(这蕴含了 $s \geq n$), 证明 $r(AB) = r(B)$.

证明.

$r(A) + \dim \mathrm{Nul} A = n$, 故 $\dim \mathrm{Nul} A = 0$, 即
$AX = 0 \Leftrightarrow X = 0$.
故 $ABX = 0$ 与 $BX = 0$ 同解, 即 $\mathrm{Nul}(AB) = \mathrm{Nul} B$.
设 B 有 m 列, 则由秩定理

$$r(AB) + \dim \mathrm{Nul}(AB) = m, \quad r(B) + \dim \mathrm{Nul} B = m,$$

故 $r(AB) = r(B)$. □

另证

另证.

根据题设, 我们有

$$A = P \begin{bmatrix} E_n \\ 0 \end{bmatrix} Q,$$

其中, P 和 Q 是可逆方阵. 由于初等变换不改变矩阵的秩, 所以, $r(B) = r(QB)$, $r(A) = \begin{bmatrix} E_n \\ 0 \end{bmatrix} QB$. 故只需证明对于任意的 n 阶方阵 C, $\begin{bmatrix} C \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_n \\ 0 \end{bmatrix} C$ 和 C 的秩相同. 通过考虑行秩, 这很容易得到证明. □

秩定理

例 5

假设 A 是 $m \times n$ 矩阵. 证明 $r(A^TA) = r(A)$.

证明.

注意到 $A^TAX = 0 \Longrightarrow X^TA^TAX = (AX)^T(AX) = 0 \Longrightarrow AX = 0 \Longrightarrow A^TAX = 0$. 所以, $\mathrm{Nul}(A) = \mathrm{Nul}(A^TA)$. 所以, 根据秩定理, 我们有

$$r(A^TA) = n - \dim \mathrm{Nul}(A) = n - \dim \mathrm{Nul}(A) = r(A).$$

□

练习

思考. 证明 $r(AA^T) = r(A)$.

矩阵乘积的秩

定理 7

$r(AB) \le \min\{r(A), r(B)\}$.

证明.

记 $C = AB$, 则 C 的列向量可由 A 的列向量线性表出, 所以

$$r(C) = 列秩(C) \le 列秩(A) = r(A).$$

因为 $C^T = B^T A^T$, 所以, C^T 的列向量可由 B^T 的列向量线性表出, 所以,

$$r(C) = 行秩(C) = 列秩(C^T) \le 列秩(B^T) = 行秩(B) = r(B).$$

$\square$

关于矩阵秩的一些结果

例 6 (P107 例 4.6.5)

设 A,B 分别为 $s\times n$, $s\times m$ 矩阵, 则
$\text{rank}[A,B]\le \text{rank}A+\text{rank}B$.

证明.

将 A,B 按照列向量分块 $A=[\alpha_1,\cdots,\alpha_n]$,
$B=[\beta_1,\cdots,\beta_m]$, 则 $[A,B]=[\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_m]$.
记 $r(A)=r$, $r(B)=t$. 分别取 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 一组极大线性无关组 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{ir}$ 和 $\beta_{i_1},\cdots,\beta_{i_t}$, 则
$\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_m$ 可由 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{ir},\beta_{i_1},\cdots,\beta_{i_t}$ 线性表出, 故 $r[A,B]\le r+t$. (秩是列向量的最小生成集的个数.) $\square$

关于矩阵秩的一些结果

例 7

证明 $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$.

证明.

$\mathrm{Col}(A+B) \subset \mathrm{Col}[A,B]$. 所以, $r(A+B) \leq r[A,B]$. 但是前面已证 $r[A,B] \leq r(A) + r(B)$. 所以,
$r(A+B) \leq r(A) + r(B)$. □

关于矩阵秩的一些结果

练习 (习题册 P62 第四题)

设 A 是 n 阶方阵, 求证: $n \leq r(A+E) + r(A-E)$.

证明.

因为
$$2E = (A+E) + (E-A).$$
所以, 由上个例子知
$$r(2E) \leq r(A+E) + r(E-A).$$
又因为 $r(2E) = n, r(A-E) = r(E-A)$, 所以,
$n \leq r(A+E) + r(A-E)$. $\square$

分块对角矩阵的秩

命题 6

$$r\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B).$$

证明.

设 $PAQ = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $P'BQ' = \begin{bmatrix} E_t & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 其中 P, P', Q, Q' 均为可逆矩阵. 则

$\square$

分块对角矩阵的秩

证续.

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & P' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PAQ & 0 \\ 0 & P'BQ' \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} E_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以, $r\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = r + t = r(A) + r(B)$. □

分块三角矩阵的秩

命题 7

$$r\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \geq r(A) + r(B).$$

证明.

设 $r(A) = r, r(B) = m$, 则 A 中有不为 0 的 r 阶子式 $|A'|$, 在 B 中有不为 0 的 m 阶子式 $|B'|$. 在 $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 对应子矩阵 A' 和 B' 取出行列得到 $r+m$ 阶子式 $\begin{vmatrix} A' & C' \\ 0 & B' \end{vmatrix} = |A'||B'| \neq 0$. 所以,

$$r\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \geq r + m = r(A) + r(B).$$

□

练习

思考. $r\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix} \geq r(A) + r(B)$.

分块三角矩阵的秩

例 8

设 A 是 $m\times n$ 阶, B 是 $n\times p$ 阶, 证明:
$r(AB)\geq r(A)+r(B)-n$.
特别地, 若 $AB=0$, 则 $r(A)+r(B)\leq n$.

证明.

$$r\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & AB \end{pmatrix} = r(E_n)+r(AB)=n+r(AB)$$

作广义初等行, 列变换 (不改变矩阵的秩):

$$\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & AB \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ A & AB \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} E_n & -B \\ A & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & 0 \\ E_n & -B \end{pmatrix}.$$

$$r\begin{pmatrix} A & 0 \\ E_n & -B \end{pmatrix} \geq r(A)+r(-B)=r(A)+r(B).$$

所以,$n+r(AB)\geq r(A)+r(B)$. $\square$

伴随矩阵的秩

例 9

设 A 是 n 阶方阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, 则

$$r(A^*) = \begin{cases} n, & A\text{可逆}, \\ 1, & r(A) = n-1, \\ 0, & r(A) < n-1. \end{cases}$$

证明

- 当 A 可逆时, 则 A^* 也可逆, 故 $r(A^*) = n$.
- 当 $r(A) = n-1$ 时, A 不可逆, $|A| = 0$. 所以, $AA^* = |A|E = 0$.
  由上个例子, $r(A) + r(A^*) \le n$, 即 $r(A^*) \le 1$.

伴随矩阵的秩

证明续.

又因为 $r(A)=n-1$ 可知 A 至少有一个 $n-1$ 阶子式不为 0, 所以, 至少有一个代数余子式 $A_{ij}\neq 0$. 所以, $A^*\neq 0$.
所以, $r(A^*)=1$.

- 当 $r(A)<n-1$ 时, 则 A 的任意 $n-1$ 阶子式都为 0. 所以, A 的任意代数余子式都为 0, 所以, $A^*=0$. □

第四章 向量空间

齐次线性方程组的解

齐次线性方程组 $AX=0$ 一定有零解, 我们关心:

- 其什么条件下有非零解?
- 解空间的结构?

齐次线性方程组的解空间和基础解系

定义 5 (解空间)

设 A 是 $m \times n$ 阶矩阵, 我们称 A 的零空间

$$\mathrm{Nul}A := \{\eta \in \mathbb{R}^n | A\eta = 0\} = \{AX = 0\text{的所有解}\},$$

为 $AX = 0$ 的解空间.

定义 6 (基础解系)

我们称解空间 $\mathrm{Nul}A$ 的一组基为齐次线性方程组 $AX = 0$ 的基础解系.

齐次线性方程组的解空间和基础解系

注 3

设 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t$ 是 $AX = 0$ 的基础解系, 则 $\mathrm{Nul}A = \mathrm{span}\{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t\}$. 通解 $\eta = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_t\eta_t$.

注 4

根据基的定义, 向量 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t$ 是 $AX = 0$ 的基础解系当且仅当其满足如下三个条件:

1. $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t$ 都是 $AX = 0$ 的解;
2. $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t$ 线性无关;
3. $AX = 0$ 的每一个解都可由 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t$ 线性表出.

齐次线性方程组的解

例 10 (P108 例 4.7.1)

解齐次线性方程组

$$\begin{cases} -2x_1 - 5x_2 + 8x_3 - 17x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 + 5x_5 = 0 \\ 3x_1 + 11x_2 - 19x_3 + 7x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 7x_2 - 13x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

并将其通解用基础解系表示.

求 $AX = 0$ 基础解系, 即求解空间 $\mathrm{Nul}A$ 的一组基.

齐次线性方程组的解

解

将系数矩阵 A 作初等行变换, 化为行最简形式:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

齐次线性方程组的解

解续.

取 x_3, x_5 为自由变量，故方程组的通解为 $\begin{cases} x_1 = -x_3 - x_5 \\ x_2 = 2x_3 - 3x_5 \\ x_4 = 5x_5 \end{cases}$

写成向量形式为 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$.

故方程组的基础解系为 $X_1 = (-1, 2, 1, 0, 0)^T$,
$X_2 = (-1, -3, 0, 5, 1)^T$.
通解为 $X = k_1 X_1 + k_2 X_2$, k_1, k_2 为任意实数. □

齐次线性方程组的解

课堂练习

已知 $AX=0$ 的系数矩阵经初等行变换化为

$$B=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&0&2&3&1&2\\0&0&0&0&a&0\end{bmatrix}$$

写出 $AX=0$ 的基础解系.

根据 a 是否等于零进行讨论.

齐次线性方程组的解

定理 8

设 A 是 $m \times n$ 阶矩阵，对齐次线性方程组 $AX = 0$，

1) $AX = 0$ 有非零解当且仅当 $r(A) < n$.
2) 当 $AX = 0$ 有非零解时，其基础解系中向量个数为 $n - r(A)$，等于自由变量的个数.

证明. 由秩定理 $r(A) + \dim \mathrm{Nul} A = n$ 可得.

齐次线性方程组的解

例 11

已知 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 为 3 阶矩阵, 若 α_1, α_2 线性无关, $\alpha_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2$, 求线性方程组 $AX = 0$ 的通解.

分析: 由 α_1, α_2, α_3 的关系, 我们容易找到齐次线性方程组 $AX = 0$ 的一个解 $(1, -2, 1)^T$. 要求通解, 我们还需要确定 $\mathrm{Nul}A$ 的维数.

解. $r(A) = 2$, 由秩定理, $\dim \mathrm{Nul}A = 1$.
又 $(1, -2, 1)^T$ 为 $AX = 0$ 的解,
故通解为 $X = k(1, -2, 1)^T$, k 为任意实数.

非齐次线性方程组的解

我们考虑非齐次方程 $AX=\beta$ 有解的条件, 以及解的结构.

- $AX=\beta$ 有解的条件: 增广矩阵 (A,β) 作初等行变换后, 所得阶梯形矩阵没有形如 $(0,\cdots,0,b)$, $b\neq 0$ 的行, 即, $[A,\beta]$ 的主元列数和 A 相同, 即 $[A,\beta]$ 的列秩等于 A 的列秩, 即 $r(A,\beta)=r(A)$.
- 解的结构?

非齐次线性方程组的解的结构

引理 2

设 X_1, X_2 为 $AX=\beta$ 的解，则 X_1-X_2 是齐次方程 $AX=0$ 的解.

证明.

$A(X_1-X_2)=AX_1-AX_2=0.$ □

引理 3

设 γ 是 $AX=\beta$ 的解，Y 是 $AX=0$ 的解，则 $\gamma+Y$ 是 $AX=\beta$ 的解.

证明.

因为 $A(\gamma+Y)=A\gamma+AY=\beta+0=\beta.$ □

非齐次线性方程组的解的结构

由上述两个引理可知:

推论 9

如果已知 $AX=\beta$ 的一个解 γ, 则它的所有解都可以写成 $\gamma+Y$ 的形式, 其中 Y 为 $AX=0$ 的解.

注 5

要求非齐次方程 $AX=\beta$ 的所有解, 我们只需要求出它的一个解, 以及 $AX=0$ 的基础解系.

非齐次线性方程组的解

定理 10

设 A 是 $m\times n$ 阶矩阵，非齐次线性方程组 $AX=\beta$，已知系数矩阵 A 和增广矩阵 (A,β)，则

1) $AX=\beta$ 有解当且仅当 $r(A)=r(A,\beta)$.

2.1) 若 $r(A)=r(A,\beta)=n$，则 $AX=\beta$ 有唯一解.

2.2) 若 $r(A)=r(A,\beta)=r<n$，则 $AX=\beta$ 有无穷多个解，且通解可表示为形式　$w=p+v_h$，
其中，p 为 $AX=\beta$ 的一个解 (称为特解)，v_h 为 $AX=0$ 的解.
特别的，如果 $Y_1,Y_2,\ldots,Y_{n-r}$ 是 $AX=0$ 的一个基础解系，则 $AX=\beta$ 的通解可以表示为

$$w=p+k_1Y_1+k_2Y_2+\cdots+k_{n-r}Y_{n-r}.$$

非齐次线性方程组的解

注 6

我们要注意, 齐次线性方程组 $AX=0$ 的解空间是线性空间; 但非齐次方程组 $AX=\beta$ 的解, 不再构成线性空间. 特别的, 几何上看, 如果 p 是 $AX=\beta$ 的一个特解,

- 如果 $AX=0$ 的解空间是一维线性空间: $\mathbb{R}^n$ 中一条过原点的直线 L , 则 $AX=\beta$ 的解集为 $L+p$, 是 L 沿着向量 p 的方向平移后所得的一条不过原点的直线.
- 如果 $AX=0$ 的解空间是二维线性空间: $\mathbb{R}^n$ 中一个过原点的平面 P , 则 $AX=\beta$ 的解集为 $P+p$, 是 P 沿着向量 p 的方向平移后所得的一个不过原点的平面.
- ...

非齐次线性方程组的解

注 7

我们还注意到, 若 p 为 $AX=\beta$ 的一个特解, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-r}$ 是 $AX=0$ 的一个基础解系, 则

1) $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-r}, p$ 线性无关.
2) $p, p+Y_1, \cdots, p+Y_{n-r}$ 也线性无关, $AX=\beta$ 有 $n-r+1$ 个线性无关的解.

注意到

$$[p, p+Y_1, \cdots, p+Y_{n-r}] = [p, Y_1, \cdots, Y_{n-r}]\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

非齐次线性方程组的解

例 12 (P109 例 4.7.2)

求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 2 \\ 4x_1 - 2x_2 - 7x_3 - 4x_4 = -2 \end{cases}$$

解

写出增广矩阵, 并用初等行变换变为行最简形式:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & -3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & -7 & -4 & -2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

$\operatorname{rank}A = \operatorname{rank}[A, \beta]$, 故方程组有解.

非齐次线性方程组的解

解续.

与原方程同解的方程组为 $\begin{cases} x_1 \qquad\quad -2x_3 \ -2x_4 = -2 \\ \qquad x_2 \ -\frac{1}{2}x_3 \ -2x_4 = -3 \end{cases}$

此方程的一个特解为 $(-2,-3,0,0)^T$,

对应的齐次方程 $\begin{cases} x_1 \qquad\quad -2x_3 \ -2x_4 = 0 \\ \qquad x_2 \ -\frac{1}{2}x_3 \ -2x_4 = 0 \end{cases}$ 的一个基础解系为 $(2,\frac{1}{2},1,0)^T,(2,2,0,1)^T$,

故原方程的通解为:

$$\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad k_1, k_2 \text{为任意实数.}$$

□

非齐次线性方程组的解

课堂练习

已知非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 的增广矩阵经初等行变化化为

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

求方程组的通解.

解空间的凸性

命题 8

假设 η 和 ξ 是非齐次方程 $Ax = b$ 的解. 那么, 对于 $\zeta = \lambda\eta + (1-\lambda)\xi$ 也是 $Ax = b$ 的解.

注 8

上述性质说明线性方程的解集是一个凸集.

非齐次线性方程组的解

例 13

设 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 是四元非齐次方程组 $Ax = b$ 的解, 且 $r(A) = 2$. 已知 $\beta_1 + \beta_2 = (1, 0, -1, 3)^T$, $\beta_2 + \beta_3 = (1, 1, 0, -1)^T$, $2\beta_3 - \beta_4 = (1, 1, -1, 0)^T$. 求 $Ax = b$ 的通解.

解.

$\alpha_1 = \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2) = (\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2})^T$,
$\alpha_2 = \frac{1}{2}(\beta_2 + \beta_3) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})^T$,
$\alpha_3 = 2\beta_3 - \beta_4 = (1, 1, -1, 0)^T$, 均为 $Ax = b$ 的解.
故 $\eta_1 = \alpha_2 - \alpha_1 = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -2)^T$,
$\eta_2 = \alpha_3 - \alpha_1 = (\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})^T$ 为 $Ax = 0$ 的解. 且易知 η_1, η_2 线性无关. 故 $Ax = b$ 的通解为 $x = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \alpha_3$, k_1, k_2 为任意实数. □

非齐次线性方程组的解

课堂练习

设 A 为 4×3 非零矩阵, 且已知 η_1,η_2,η_3 是 $AX=\beta$ 的三个线性无关解, k_1,k_2 为任意常数, 则 $AX=\beta$ 的通解为

A $\frac{1}{2}(\eta_2+\eta_3)+k_1(\eta_2-\eta_1)$,

B $\frac{1}{2}(\eta_2-\eta_3)+k_1(\eta_2-\eta_1)$,

C $\frac{1}{2}(\eta_2+\eta_3)+k_1(\eta_2-\eta_1)+k_2(\eta_3-\eta_1)$,

D $\frac{1}{2}(\eta_2-\eta_3)+k_1(\eta_2-\eta_1)+k_2(\eta_3-\eta_1)$,

非齐次线性方程组的解

例 14

求一个以 $k(2,1,-4,3)^T+(1,2,-3,4)^T$ 为通解的线性方程组.

分析: 若方程组为 $AX=b$, 则 A 有 4 列, 且 $r(A)=3$.
$AX=0$ 的基础解系为 $\eta=(2,1,-4,3)^T$.
故 A 的行 α_i 应满足 $\alpha_i\eta=0$. 即 α_i^T 为方程 $\eta^TX=0$ 的解.
故我们可以考虑解方程组 $\eta^TX=0$, 其基础解系有三个线性无关向量, 将其转置作为 A 的行即可.
$\beta=(1,2,-3,4)^T$ 为方程组的一个特解, 令 $b=A\beta$ 即可.

非齐次线性方程组的解

解.

解方程 $2x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0$,
其基础解系为 $\xi_1 = (1, -2, 0, 0)^T$, $\xi_2 = (2, 0, 1, 0)^T$,
$\xi_3 = (-3, 0, 0, 2)^T$.

$$令\ A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},\ b = A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix},$$

所求线性方程组即为 $AX = b$. □

线性方程组的解

例 15 (P109 例 4.7.3)

设 A 为 $s\times n$ 矩阵, B 为 $n\times m$ 矩阵, $AB=0$, 证明 $r(A)+r(B)\leq n$.

证明.

记 $B=[\beta_1,\cdots,\beta_m]$, 则 $AB=[A\beta_1,\cdots,A\beta_m]=[0,\cdots,0]$, B 的列向量 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 均为齐次线性方程组 $AX=0$ 的解.
从而 $r(B)\leq \dim \mathrm{Nul}A$.
由秩定理 $r(A)+\dim \mathrm{Nul}A=n$ 可知, $r(A)+r(B)\leq n$. □

线性方程组的解

课堂练习

已知 $A_{s\times n}$ 的秩为 n, $AB=AC$. 证明 $B=C$.

提示. 利用上一个例题.

线性方程组的解

例 16

矩阵 $A_{m\times n}$, 若 $AX=\beta$ 对任意 m 维列向量 β 都有解, 则 $r(A)=m$.

证明.

$AX=\beta$ 有解当且仅当 β 落在 A 的列空间 $\mathrm{Col}A$ 里面. 由 β 的任意性, 必有

$$\mathrm{Col}A=\mathbb{R}^m.$$

故, $r(A)=\dim\mathrm{Col}A=\dim\mathbb{R}^m=m$. □

线性方程组的解

例 17 (P109 例 4.7.4)

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^T$, 且方程组 $AY=\beta$ 有解. 证明: $A^TX=0$ 的任意解 $X=(x_1,\cdots,x_m)^T$ 必满足方程

$$b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_mx_m=0.$$

证明.

$b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_mx_m=X^T\beta=X^TAY=(A^TX)^TY=0.$ $\square$