1、对于任意 n 个点二维 (x,y)，我们都可以用插值法进行插值，得到一个 $n-1$ 次的曲线

对于 n 个点 (x_i,y_i) 来说，可以用如下公式

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\prod_{j\neq i}(x-x_j)}{\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)}y_i$$

多维数据可以简单进行扩展。

如果需要进行额外修正，可以增加高次额外项 $g(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)h(x)$ 满足要求。

2、不妨按照书中，向量 $\vec{x}$ 都是列向量。

线性回归:(此时为标量 x)

$$\begin{aligned}(\omega^*,b^*)&=arg\ min_{(\omega,b)}\sum_{i=1}^{m}(f(x_i)-y_i)^2 &(1)\\ &=arg\ min_{(\omega,b)}\sum_{i=1}^{m}(y_i-\omega x_i-b)^2 &(2)\end{aligned}$$

$E(\omega,b)=\sum_{i=1}^{m}(y_i-\omega x_i-b)^2$

对 ω,b 分别求偏导数：(这里不是很清楚如何判断多参数的函数是否为凸函数，但是这里单独看每个参数，都是一个二次函数，因此偏导为 0 的点就是最优)

$\frac{\partial E}{\partial\omega}=2\sum_{i=1}^{m}(\omega x_i^2+x_i(b-y_i))$

$\frac{\partial E}{\partial b}=2\sum_{i=1}^{m}(b+(\omega x_i-y_i))$

所以我们有：

$b=\frac{\sum_{i=1}^{m}(y_i-\omega x_i)}{m}=\bar{y}-\omega\bar{x}$

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{m}(\omega x_i^2 + x_i(b - y_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{m}(\omega x_i^2 + x_i(\bar{y} - \omega\bar{x} - y_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\omega x_i^2 + \bar{y} * \sum_{i=1}^{m} x_i + \omega\bar{x}\sum_{i=1}^{m} x_i - \sum_{i=1}^{m} x_i y_i \\
&= \sum_{i=1}^{m}\omega x_i^2 + m\bar{x}\bar{y} + m\omega\bar{x}^2 - \sum_{i=1}^{m} x_i y_i
\end{aligned}
$$

因此有：

$$
\omega = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i y_i - m\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{m} x_i^2 - m\bar{x}^2}
$$

其中：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} x_i y_i - m\bar{x}\bar{y} \\
=&\sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \\
=&\sum_{i=1}^{m} x_i(y_i - \bar{y}) \\
=&\sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x})y_i
\end{aligned}
$$

在进行多维度扩充的时候，首先需要了解矩阵的求导。

矩阵 Y_{m*n} 对矩阵 X_{p*q} 求导:

$$
\frac{\partial Y}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_{11}}{\partial X} & \cdots & \frac{\partial y_{1n}}{\partial X} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_{m1}}{\partial X} & \cdots & \frac{\partial y_{mn}}{\partial X} \end{bmatrix}
$$

不难看出，这是一个递归定义，于是乎，还需要有标量 y 对矩阵 X_{p*q} 的求导:

$$
\frac{\partial y}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial X_{11}} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial X_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y}{\partial X_{m1}} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial X_{mn}} \end{bmatrix}
$$

向量：

这里可以令 $\hat{\omega} = [\omega; b], X_i = [x_i^T \ 1]$ 那么 $X = [X_1; X_2; ...; X_n]$

变为优化 $\hat{\omega}^* = arg\ min_{\hat{\omega}} ||X\hat{\omega} - y||$

$E(\hat{\omega}) = ||X\hat{\omega} - y|| = (X\hat{\omega} - y)^T(X\hat{\omega} - y)$

求偏导数：

$\frac{\partial E}{\partial \hat{\omega}} = 2X^T(X\hat{\omega} - y)$

当 X 为满秩矩阵时，有逆，因此：

$\hat{\omega} = (X^T X)^{-1} y$

这里简单的对求导的过程进行推导解释：

$$
\begin{aligned}
E(\hat{\omega}) &= ||X\hat{\omega} - y|| \\
&= \begin{bmatrix} X_1\hat{\omega} - y_1 \\ \vdots \\ X_n\hat{\omega} - y_n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X_1\hat{\omega} - y_1 \\ \vdots \\ X_n\hat{\omega} - y_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_1^T\omega + b - y_1 \\ \vdots \\ x_n^T\omega + b - y_n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1^T\omega + b - y_1 \\ \vdots \\ x_n^T\omega + b - y_n \end{bmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (x_i^T\omega + b - y_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{m} x_{ij}\omega_j + b - y_i)^2
\end{aligned}
$$

解析完 E 的形式后，就可以对其求偏导:

$$
\frac{\partial E}{\partial \hat{\omega}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial E}{\partial \omega_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial E}{\partial \omega_m} \\ \frac{\partial E}{\partial b} \end{bmatrix}
$$

逐行分析：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial \omega_j} &= \sum_{i=1}^{n} 2x_{ij}(\sum_{j=1}^{m} x_{ij}\omega_j + b - y_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} 2x_{ij}(x_i^T\omega + b - y_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} 2x_{ij}(X_i\hat{\omega} - y_i) \\
&= 2\begin{bmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X_1\hat{\omega} - y_1 \\ \vdots \\ X_n\hat{\omega} - y_n \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial b} &= \sum_{i=1}^{n} 2(\sum_{j=1}^{m} x_{ij}\omega_j + b - y_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} 2(X_i\hat{\omega} - y_i) \\
&= 2\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X_1\hat{\omega} - y_1 \\ \vdots \\ X_n\hat{\omega} - y_n \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial E}{\partial \hat{\omega}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial E}{\partial \omega_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial E}{\partial \omega_m} \\ \frac{\partial E}{\partial b} \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1m} & \cdots & x_{nm} \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1\hat{\omega} - y_1 \\ \vdots \\ X_n\hat{\omega} - y_n \end{bmatrix} = 2X^T(X\hat{\omega} - y)
$$

对数线性回归：令 $y' = lny$ 然后求解。