1、对于任意 n 个点二维 (x,y)，我们都可以用插值法进行插值，得到一个 $n-1$ 次的曲线

对于 n 个点 (x_i,y_i) 来说，可以用如下公式

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\prod_{j\neq i}(x-x_j)}{\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)}y_i$$

多维数据可以简单进行扩展。

如果需要进行额外修正，可以增加高次额外项 $g(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)h(x)$ 满足要求。

2、不妨按照书中，向量 $\vec{x}$ 都是列向量。

标量 y 对向量 $\vec{x}$ 求导

$$\frac{\partial y}{\partial \vec{x}}=(\frac{\partial y}{\partial x_1},...\frac{\partial y}{\partial x_n})$$

于是乎 $\frac{\partial \vec{x}^T\vec{y}}{\partial \vec{x}}=\vec{y},(\vec{x}^T\vec{y}=\vec{y}^T\vec{x})$

线性回归:(此时为标量 x)

$$(\omega^*,b^*)=arg\ min_{(\omega,b)}\sum_{i=1}^{m}(f(x_i)-y_i)^2 \tag{1}$$

$$=arg\ min_{(\omega,b)}\sum_{i=1}^{m}(y_i-\omega x_i-b)^2 \tag{2}$$

$E(\omega,b)=\sum_{i=1}^{m}(y_i-\omega x_i-b)^2$

对 ω,b 分别求偏导数：(这里不是很清楚如何判断多参数的函数是否为凸函数，但是这里单独看每个参数，都是一个二次函数，因此偏导为 0 的点就是最优)

$\frac{\partial E}{\partial \omega}=2\sum_{i=1}^{m}(\omega x_i^2+x_i(b-y_i))$

$\frac{\partial E}{\partial b}=2\sum_{i=1}^{m}(b+(\omega x_i-y_i))$

所以我们有：

$b=\frac{\sum_{i=1}^{m}(y_i-\omega x_i)}{m}=\bar{y}-\omega\bar{x}$

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{m}(\omega x_i^2 + x_i(b - y_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{m}(\omega x_i^2 + x_i(\bar{y} - \omega\bar{x} - y_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\omega x_i^2 + \bar{y} * \sum_{i=1}^{m} x_i + \omega\bar{x}\sum_{i=1}^{m} x_i - \sum_{i=1}^{m} x_i y_i \\
&= \sum_{i=1}^{m}\omega x_i^2 + m\bar{x}\bar{y} + m\omega\bar{x}^2 - \sum_{i=1}^{m} x_i y_i
\end{aligned}
$$

因此有：

$$\omega = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i y_i - m\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{m} x_i^2 - m\bar{x}^2}$$

其中：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} x_i y_i - m\bar{x}\bar{y} \\
=&\sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \\
=&\sum_{i=1}^{m} x_i(y_i - \bar{y}) \\
=&\sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x})y_i
\end{aligned}
$$

向量：

这里可以令 $\hat{\omega} = [\omega; b], X_i = [x_i^T\ 1]$ 那么 $X = [X_1; X_2; ...; X_n]$

变为优化 $\hat{\omega}^* = arg\ min_{\hat{\omega}}||X\hat{\omega} - y||$

$E(\hat{\omega}) = ||X\hat{\omega} - y|| = (X\hat{\omega} - y)^T(X\hat{\omega} - y)$

求偏导数：

$\frac{\partial E}{\partial \hat{\omega}} = 2X^T(X\hat{\omega} - y)$

当 X 为满秩矩阵时，有逆，因此：

$\hat{\omega} = (X^TX)^{-1}y$

对数线性回归：令 $y' = lny$ 然后求解。