

## 数学实验 exp5 实验报告

计 65 赖金霖 2016011377

6.

①分别设各证券购入金额为 A、B、C、D、E 万元，则问题转化为在

$$\begin{cases} 2A + 2B + C + D + 5E \leq 1400 \\ 9A + 15B + 4C + 3D + 2E \leq 5000 \\ -B - C - D \leq -400 \\ A + B + C + D + E = 1000 \\ A, B, C, D, E \geq 0 \end{cases}$$

的约束条件下，最小化

$$-4.3A - 2.7B - 2.5C - 2.2D - 4.5E$$

使用 `scipy.optimize.linprog` 函数可以直接求解这个问题，结果为

$$\begin{cases} A = 218.18181818 \\ B = 0 \\ C = 736.36363636 \\ D = 0 \\ E = 45.45454545 \end{cases}$$

投资收益为 29.83636 万元。

②设借款为 F，则修改约束条件如下

$$\begin{cases} 2A + 2B + C + D + 5E - 1.4F \leq 1400 \\ 9A + 15B + 4C + 3D + 2E - 5F \leq 5000 \\ -B - C - D \leq -400 \\ F \leq 100 \\ A + B + C + D + E - F = 1000 \\ A, B, C, D, E, F \geq 0 \end{cases}$$

修改优化目标为

$$-4.3A - 2.7B - 2.5C - 2.2D - 4.5E + 2.75F$$

问题的解为

$$\begin{cases} A = 240 \\ B = 0 \\ C = 810 \\ D = 0 \\ E = 50 \\ F = 100 \end{cases}$$

投资收益为 30.06 万元。

③若证券 A 的税前收益增加为 4.5%，求解得投资组合相对①不变，收益为 30.27273 万元。

若证券 C 的税前收益减少为 4.8%，投资组合变为

$$\begin{cases} A = 336 \\ B = 0 \\ C = 0 \\ D = 648 \\ E = 16 \end{cases}$$

收益为 29.424 万元。

8. 设平均每匹马每天, 干草、燕麦片、饲料块、高蛋白浓缩料的购买量分别为 A、B、C、D (可以为小数), 则问题转化为在

$$\begin{cases} -0.5A - B - 2C - 6D \leq -40 \\ -2A - 4B - 0.5C - D \leq -20 \\ -5A - 2B - C - 2.5D \leq -45 \\ A, B, C, D \geq 0 \end{cases}$$

的条件下最小化

$$1.8A + 3.5B + 0.4C + D$$

解为

$$\begin{cases} A = 5 \\ B = 0 \\ C = 20 \\ D = 0 \\ 1.8A + 3.5B + 0.4C + D = 17 \end{cases}$$

值得注意的是，在这一组合下，每匹马每日摄入 42.5 磅蛋白质，高于最低营养需求，这意味着线性规划的最优解中，可能有不起作用的表达式。

10. 设江水量为  $A$ ，污水浓度为  $f_A$ ；某个工厂的污水流量为  $B$ ，污水浓度为  $f_B$ ，则融合之后的水量  $C$  和污水浓度  $f_C$  为

$$\begin{cases} C = A + B \\ f_C = \frac{Af_A + Bf_B}{A + B} \end{cases}$$

当  $A \gg B$  时，我们可以近似水量和污水浓度为

$$\begin{cases} C = A \\ f_C = f_A + \frac{Bf_B}{A} \end{cases}$$

在本题的背景下，上述近似误差不超过 0.5%。设三家工厂降低的污水浓度分别为  $A$ 、 $B$ 、 $C$ ，则

(1) 根据上述近似，可以列出如下约束条件

$$\begin{cases} \frac{5(100 - A)}{1000} + 0.8 \leq 1 \\ \frac{5(60 - B)}{1000} + 0.9\left[\frac{5(100 - A)}{1000} + 0.8\right] \leq 1 \\ \frac{5(50 - C)}{1000} + 0.6\left\{\frac{5(60 - B)}{1000} + 0.9\left[\frac{5(100 - A)}{1000} + 0.8\right]\right\} \leq 1 \\ A \leq 100 \\ B \leq 60 \\ C \leq 50 \\ A, B, C \geq 0 \end{cases}$$

化简得到

$$\begin{cases} -5A \leq -300 \\ -4.5A - 5B \leq -470 \\ -2.7A - 3B - 5C \leq -132 \\ A \leq 100 \\ B \leq 60 \\ C \leq 50 \\ A, B, C \geq 0 \end{cases}$$

费用为（万元）

$$5A + 5B + 5C$$

使用线性规划求解，得最少费用和相应的组合为

$$\begin{cases} A = 60 \\ B = 40 \\ C = 0 \\ 5A + 5B + 5C = 500 \end{cases}$$

(2) 根据近似，可以列出如下约束条件（工厂3的处理站没有意义）

$$\begin{cases} 0.9\left[\frac{5(100-A)}{1000} + 0.8\right] \leq 1 \\ 0.6\left\{\frac{5(60-B)}{1000} + 0.9\left[\frac{5(100-A)}{1000} + 0.8\right]\right\} \leq 1 \\ A \leq 100 \\ B \leq 60 \\ A, B \geq 0 \end{cases}$$

化简得到

$$\begin{cases} -4.5A \leq -170 \\ A \leq 100 \\ B \leq 60 \\ A, B \geq 0 \end{cases}$$

费用为（万元）

$$5A + 5B$$

使用线性规划求解，得最少费用和相应的组合为

$$\begin{cases} A = 37.77777778 \\ B = 0 \\ 5A + 5B = 188.88888888888889 \end{cases}$$

## 附录

代码可以在 [https://github.com/lll6924/math\\_exp/blob/master/exp5/linear\\_programming.py](https://github.com/lll6924/math_exp/blob/master/exp5/linear_programming.py)

找到。