

## 数学实验 exp4 实验报告

计 65 赖金霖 2016011377

实验主要代码和图片可在 [https://github.com/lll6924/math\\_exp/tree/master/exp4](https://github.com/lll6924/math_exp/tree/master/exp4) 下和 [https://github.com/lll6924/math\\_exp/blob/master/utils/nonlinearsolver.py](https://github.com/lll6924/math_exp/blob/master/utils/nonlinearsolver.py) 找到。

3.

设利率为  $x$ ，还款期数为  $n$ ，初始欠款额为  $A$ ，每期还钱  $B$ ，那么有

$$\frac{A}{B} = \frac{1}{x} \left[ 1 - \left( \frac{1}{1+x} \right)^n \right]$$

(1)

构造迭代方程

$$x_{k+1} = \frac{B}{A} \left[ 1 - \left( \frac{1}{1+x_k} \right)^n \right]$$

取初值  $x_0=0.5$ ， $B/A=1/150$ ， $n=180$ ，解得  $x=0.002081163889460337$ 。根据  $A$  反解得  $B=1000.0000000000442$ ，可以认为结果十分正确。

设  $y=1/x$ ，原变形成

$$\frac{A}{B} - y \left[ 1 - \left( \frac{y}{1+y} \right)^n \right] = 0$$

取左式为  $f(y)$ ，可以尝试使用 Newton 迭代或者 fzero 的方法求解。

使用 Newton 迭代的解得  $x=0.0022827$ ，反解得  $B=1017.1644733425986$ ，不如直接迭代准确。

使用 fzero 的方法解得  $x=0.00208116$ ，反解得  $B=999.999999999794$ ，准确度和直接迭代类似。

(2)

根据(1)中的效果，本题统一使用 fzero 方法。

对第一家银行，解得月利率为 0.00585079，年利率为 0.07020951；对第二家银行，年利率为 0.06394878。所以第二家银行较优惠。

5.

本题需要求解如下方程 ( $x$  为下降高度  $c$ ， $S=\pi r^2$ ， $C=p_0(Sl_0)^\gamma$ )：

$$\frac{Fab}{\sqrt{b^2+x^2}} - \frac{CSb}{(S(0.5-x))^\gamma} = 0$$

取左式为  $f(x)$ ，使用 fzero 方法可以求得  $x$ 。

那么  $\alpha$  如下：

$$\alpha = \arctan\left(\frac{x}{b}\right)$$

解得  $x=0.11554776772034778$ ， $\alpha=0.43294564673531283$  (24.80595831649531°)。

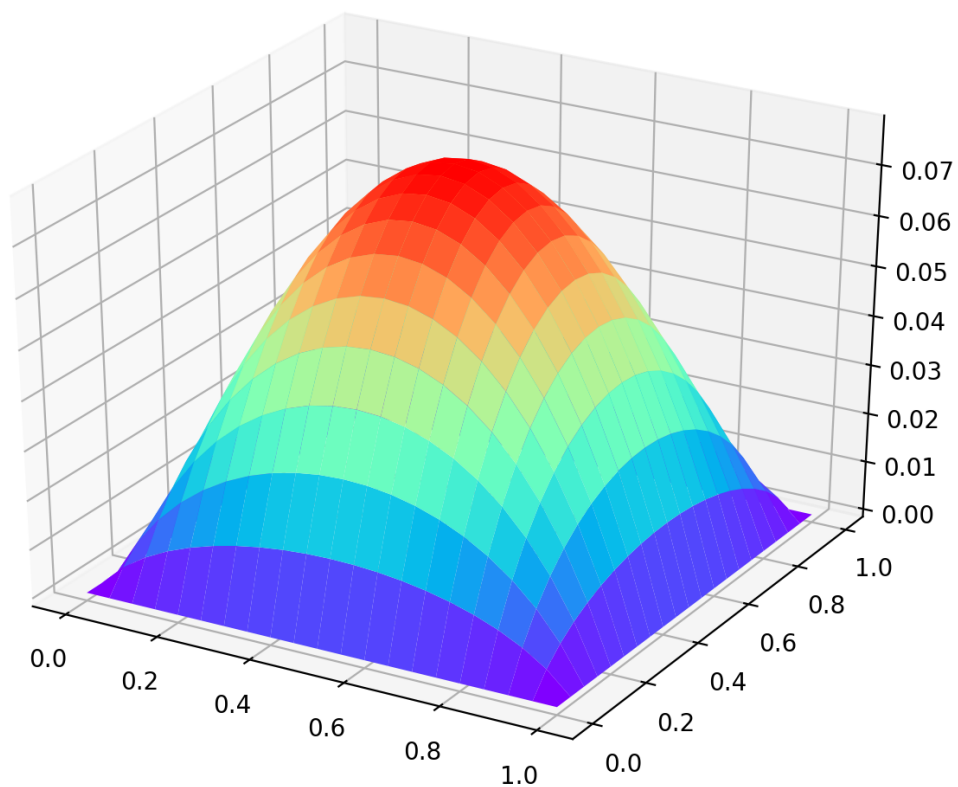
### 附加题

本题有如下方程组( $x_i, y_i$  都是  $[0,1]$  上等距的  $(n+1)$  个 sample)：

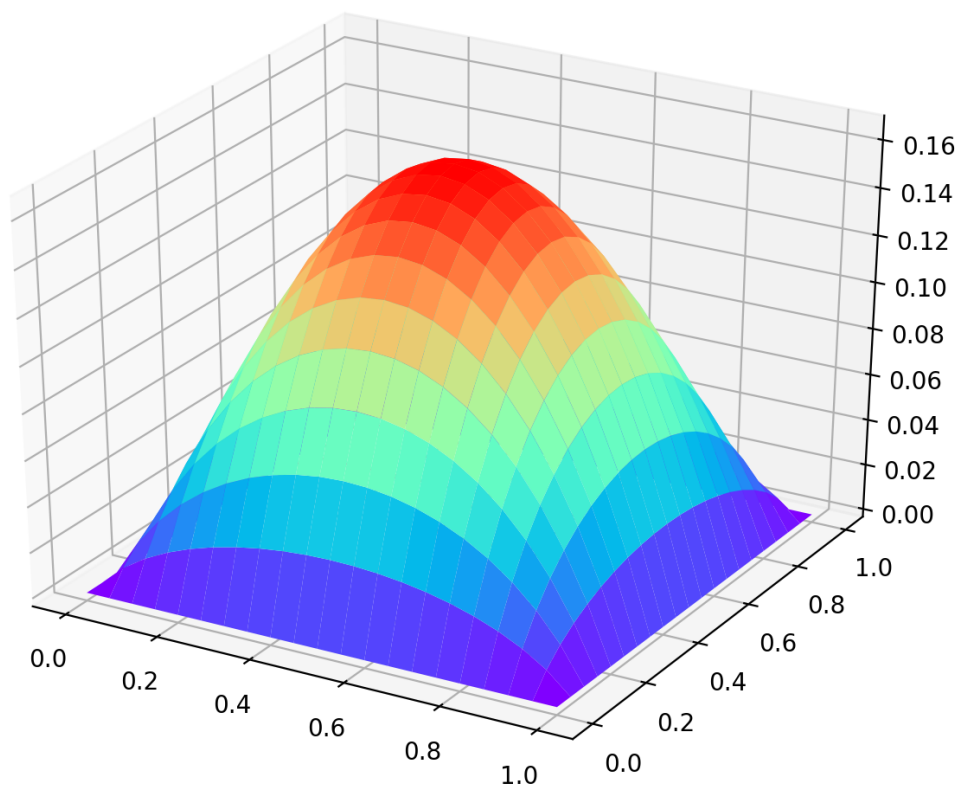
$$\begin{aligned} n^2(u(x_{i-1}, y_j) + u(x_{i+1}, y_j) + u(x_i, y_{j-1}) + u(x_i, y_{j+1}) - 4u(x_i, y_j)) &= \lambda e^{u(x_i, y_j)} \\ u(x_0, y) = u(x_n, y) = u(x, y_0) = u(x, y_n) &= 0 \end{aligned}$$

此方程组共有  $(n+1)*(n+1)$  项，不是线性方程组，但 jacobi 矩阵容易计算，故可以使用 fsolve 方法。考虑计算和画图速度，以下均取  $n=20$ 。

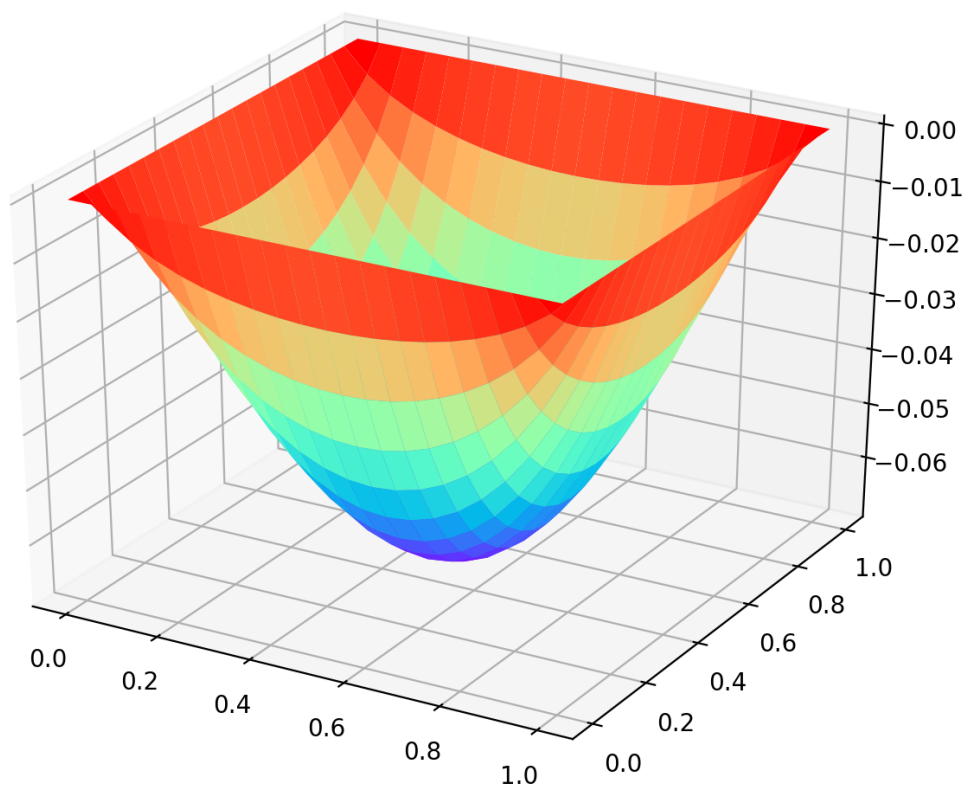
当 $\lambda=1$  时，解如下：



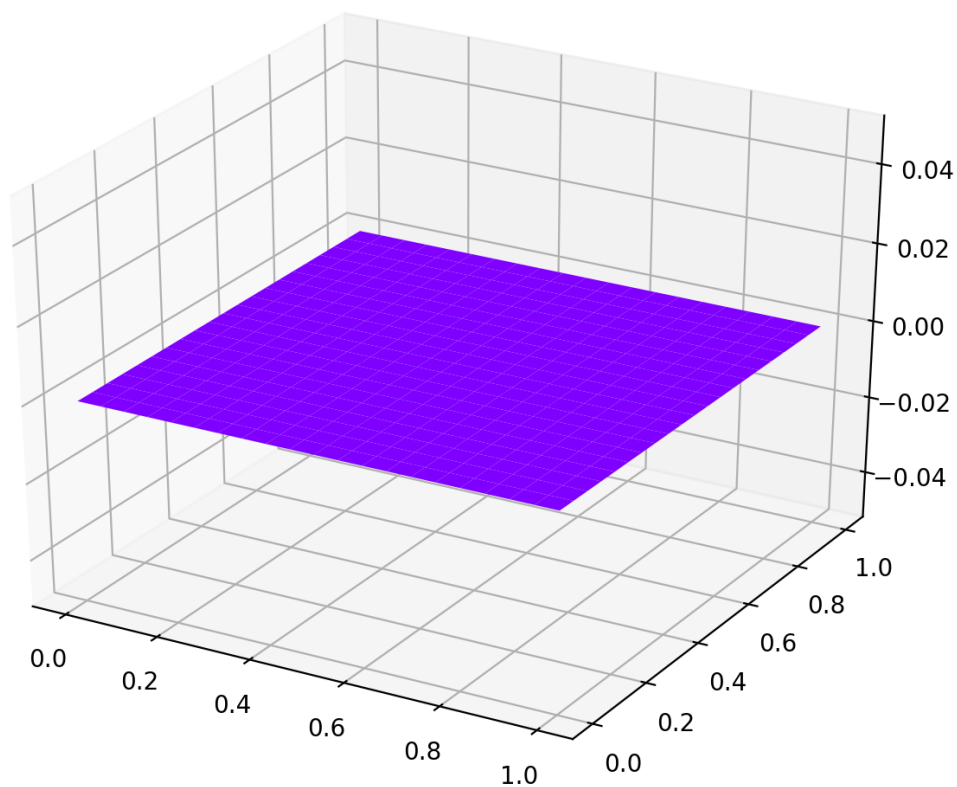
当 $\lambda=2$  时，解如下：



当 $\lambda=-1$  时，解如下：



当 $\lambda=0$  时，解如下：



容易看出， $\lambda$ 的符号决定了解的正负， $\lambda$ 的绝对值越大，解的最大值的绝对值越大。