数学实验 exp3 实验报告

计 65 赖金霖 2016011377

实验主要代码和图片可在 https://github.com/lll6924/math_exp/tree/master/exp3 下和 https://github.com/lll6924/math_exp/blob/master/utils/equationsolver.py 找到。

1. 条件数的意义及方程组性能的影响

（1）由于 b_1 和 b_2 分别是 A_1 和 A_2 的行和，所以方程组 $A_1x=b_1$ 和 $A_2x=b_2$ 的解都为$(1,\cdots,1)^T$。用左除、Jacobi、GS、PCG 方法求解的效果如下（取迭代误差满足$|x^{(k+1)}-x^{(k)}|_\infty<10-5$，对迭代方法初值取$(0,\cdots,0)^T$）：

$A_1x=b_1$:

方法	左除	Jacobi	GS	PCG
结果	[1. 1. 1. 1. 1.]	Failed	[0.99558627 1.01847843 0.97229097 1.01784145 0.99580817]	[1.00127032 0.99995445 0.99893021 0.998973 1.00097032]
迭代次数	-	-	1814	-

$A_2x=b_2$:

方法	左除	Jacobi	GS	PCG
结果	[1. 1. 1. 1. 1.]	Failed	[1.0001285 1.00016035 0.99328022 1.01593597 0.99023994]	[1.00096507 0.99129087 1.01266347 1.00663994 0.98754329]
迭代次数	-	-	1250	-

在两个方程的求解中 Jacobi 迭代都由于 B 矩阵有绝对值大于 1 的特征值而失败（分别为-3.316479299217419 和-3.4441421911659544）。

（2）条件数如下表

N	5	7	9	…
Cond(A1)	357402.36	87385014.4	5952811.9	…
Cond(A2)	476607.25	475367356.6	493153756446.9	…

可以看出这两个方程都是病态方程，下面做实验进行验证：

由（1）中的观察，左除的结果最精确，故取左除的结果为 x，并分析误差

方程	n	ε	方法	扰动元素	迭代次数	误差|△x|/x
$A_1x=b_1$	5	10^{-10}	Jacobi	A1	-	-
				b1	-	-
			GS	A1	1814	9.4943e-09
				b1	1814	9.6388e-09
			PCG	A1	-	4.2255e-10
				b1		4.2304e-10
			左除	A1		4.2251e-06
				b1		4.2308e-06
		10^{-8}		A1		2.07485e-05
				b1		2.07486e-05
		10^{-6}		A1		0.0020740
				b1		0.0020749
	7	10^{-10}		A1		3.17837e-06
				b1		3.19332e-06
		10^{-8}		A1		0.00031929
				b1		0.00031932
		10^{-6}		A1		0.031887
				b1		0.031932
$A_2x=b_2$	5	10^{-10}		A1		5.11820e-06
				b1		5.11822e-06
		10^{-8}		A1		0.00051160
				b1		0.00051182
		10^{-6}		A1		0.049020
				b1		0.051182
	7	10^{-10}		A1		0.0021008
				b1		0.0021032
		10^{-8}		A1		0.18931
				b1		0.21032
		10^{-6}		A1		1.73835
				b1		21.03243

*迭代方法都取迭代误差满足$|x^{(k+1)}-x^{(k)}|_\infty$<10-5，初值为$(0,\cdots,0)^T$

(3)取 n=7，ε=10^{-10},10^{-6}，结果如下：

方程	ε	误差|△x|/x	条件数估计误差
$A_1x=b_1$	10^{-6}	0.031887	-
		0.031932	1.36903
$A_2x=b_2$		1.73835	-
		21.03243	123.88888
$A_1x=b_1$	10^{-10}	3.17837e-06	0.00028951
		3.19332e-06	0.00013691
$A_2x=b_2$		0.0021008	0.029064
		0.0021032	0.012389

条件数估计误差为-的项是因为$|A^{-1}|\cdot|\delta A|\geqslant 1$ 而导致无法准确估计。
可以看出，用条件数估计的误差十分粗略，但也体现了扰动对方程的影响。
随着 n 增大，相同扰动对结果的影响变大。随着ε增大，对同一个方程结果的影响也变大。

3.

（1）结果如下：

x0	b	方法	迭代次数
$(0,\cdots,0)^T$	行和	Jacobi	16
		GS	11
	$(1,\cdots,1)^T$	Jacobi	15
		GS	10
	使解为$(0,\cdots,n-1)^T$	Jacobi	19
		GS	13
$(1000,\cdots,1000)^T$	行和	Jacobi	26
		GS	17
	$(1,\cdots,1)^T$	Jacobi	26
		GS	17
	使解为$(0,\cdots,n-1)^T$	Jacobi	26
		GS	17

可以看出，对同一个 A，对不同的 b 进行迭代可能有不同的迭代次数，而总体而言 GS 方法比 Jacobi 方法的迭代次数更小。另外，当初值离答案过远时，需要额外的迭代次数靠近答案。

（2）取 $b=(1,\cdots,1)^T$，$x0=(0,\cdots,0)^T$，两个方法的迭代次数随对角线倍数变化如下表：

倍数	1	2	3	4	5	6
Jacobi	15	8	6	5	4	4
GS	10	6	4	4	4	3

由此可以得出，随着对角线元素成倍增长，迭代次数在下降。可能是因为对角线元素增长减少了其他元素对答案的影响，使答案向量的各元素接近相等，而对这种方程，迭代有更好的结果。

常微偏微边值问题

$$\begin{cases} y'' + \dfrac{2}{x} y' - \dfrac{6}{x^2} y = 5 - 6x + 7x^2 \\ y(1) = \dfrac{1}{2}, y(2) = 4 + 4\ln 2 \end{cases}$$

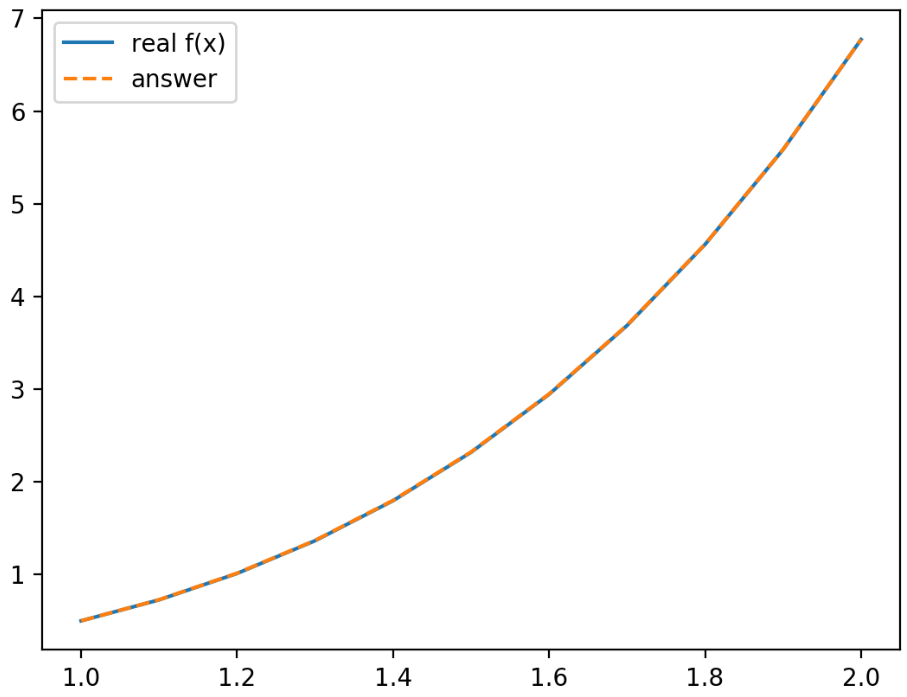
此方程可以化为如下的线性方程组求解(xn 为取样)：

$$(n^2 - \frac{n}{x})y(x_{i-1}) + (-2n^2 - \frac{6}{x^2})y(x_i) + (n^2 + \frac{n}{x})y(x_{i+1}) = 5 - 6x + 7x^2$$
$$y(1) = \frac{1}{2}$$
$$y(2) = 4 + 4ln2$$

设取点数为 n+1，对不同的 n 有如下的误差(|△y|/|y|)和最大误差：

n	10	20	50	100
平均误差	0.00123423	0.00022831	0.00064255	0.00280432
最大误差	0.00261077	0.00044012	0.00128672	0.00549347

当 n=10 时，图像如下(当 n=20，50，100 时由于误差小，有类似的形状)：



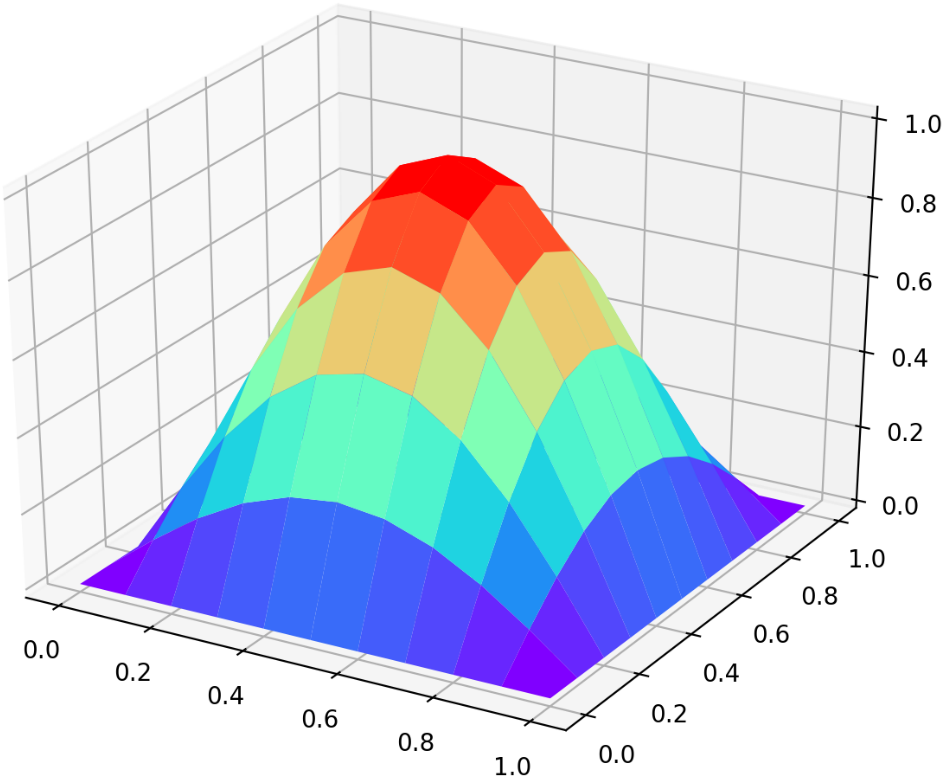
对 Poisson 问题，方程可以化为如下线性方程求解：

$$(-n^2)u(x_{i-1}, y_j) + (-n^2)u(x_{i+1}, y_j) + (-n^2)u(x_i, y_{j-1}) + (-n^2)u(x_i, y_{j+1}) + (4n^2)u(x_i, y_{j+1}) = 2\pi^2 sin\pi x_i sin\pi y_j$$
$$u(0, y) = 0$$
$$u(1, y) = 0$$
$$u(x, 0) = 0$$
$$u(x, 1) = 0$$

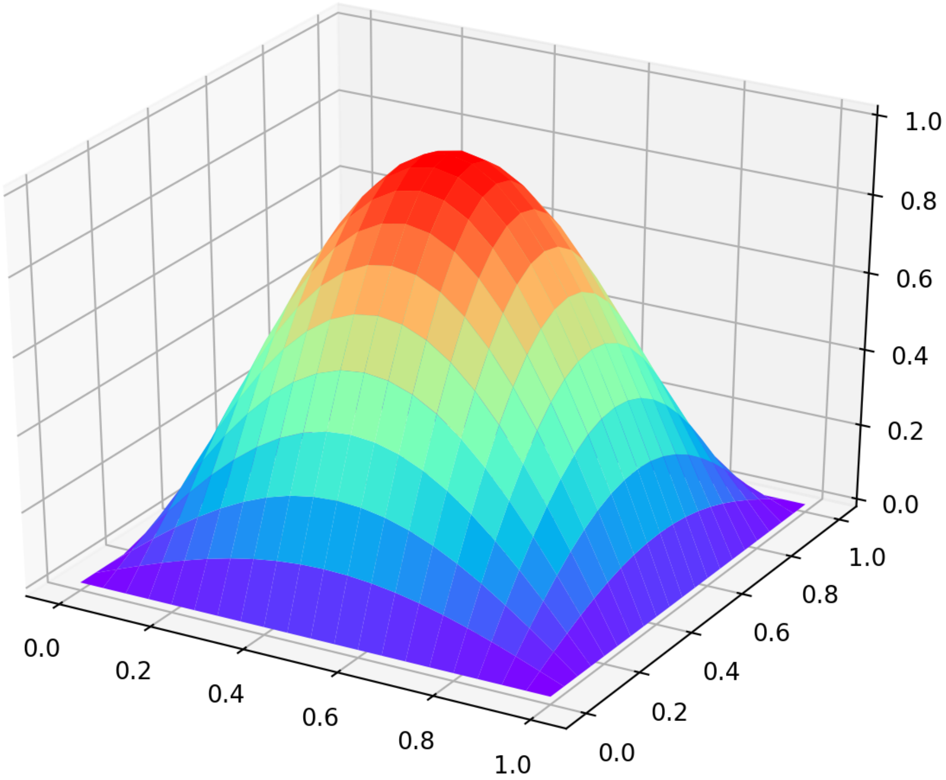
设取点数为(n+1)×(n+1)，对不同的 n 有如下的误差(|△u|/|u|)和最大误差：

n	10	20	50	100
平均误差	0.0055330	0.0016852	0.00030375	7.9026e-05
最大误差	0.0082654	0.0020587	0.00032905	8.2251e-05

当 n=10 时，图像如下：



当 n=20 时，图像如下：



当 n=100 时，图像如下：