数学实验 exp1 实验报告

计 65 赖金霖 2016011377

〇、实现方法

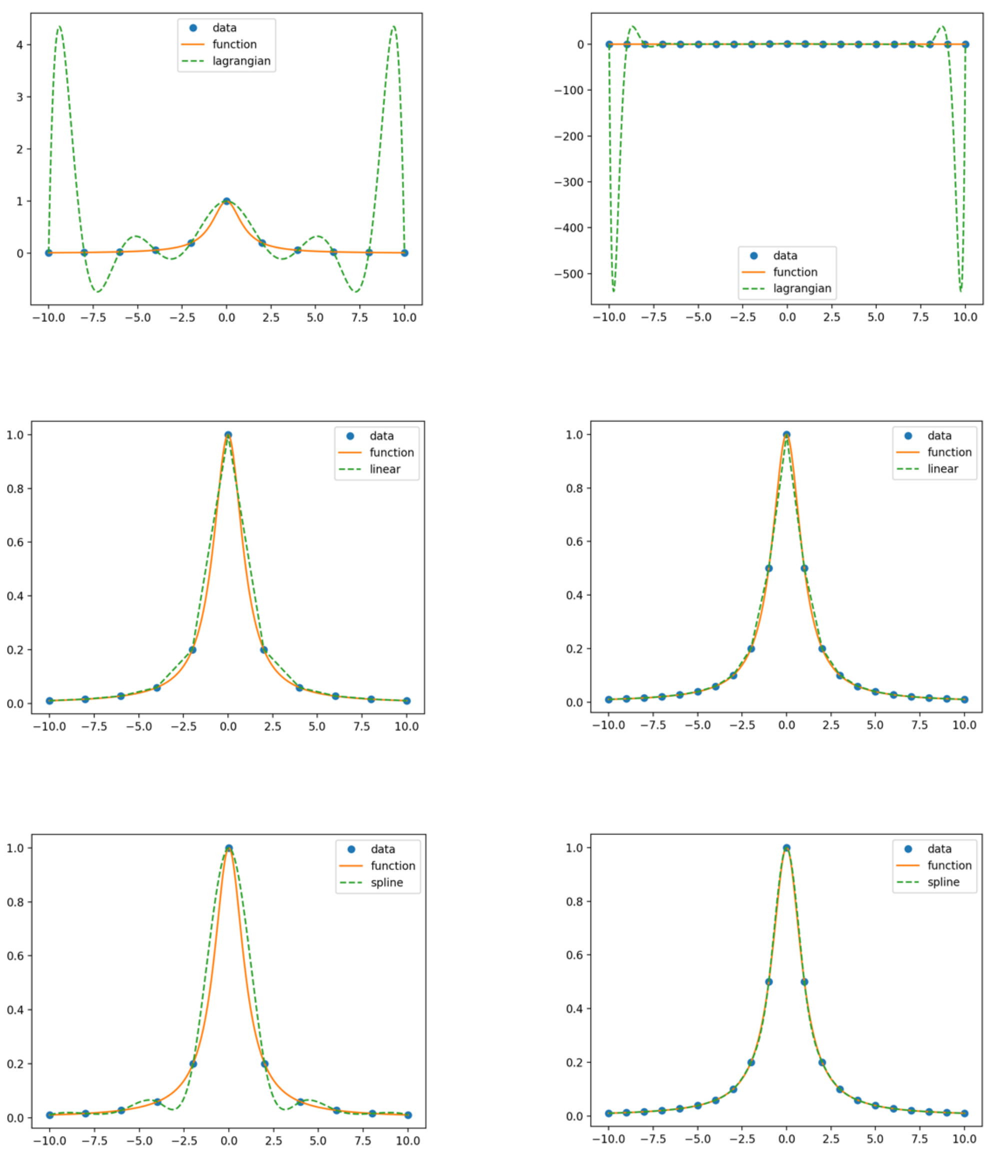
我使用 python3 完成了本次实验，实验代码可在 https://github.com/lll6924/math_exp 的 exp1 文件夹下找到，各函数实现细节在 utils 文件夹下。除手动实现部分公式外，用于计算的库为 numpy 和 scipy，用于画图的库为 matplotlib。

一、函数插值练习

1. 等间距插值

可以预见，随着节点数目增加，Lagrange 插值的高次项将影响到函数形状，而分段线性和三次插值会有较好的形状。

在节点数目为 11 时，三种插值结果如左下，节点数目为 21 时，插值结果如右下：

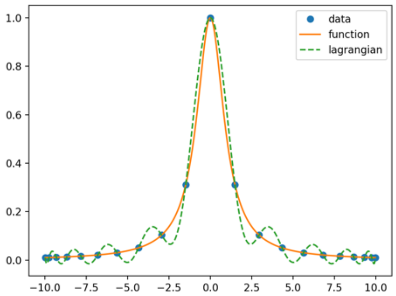


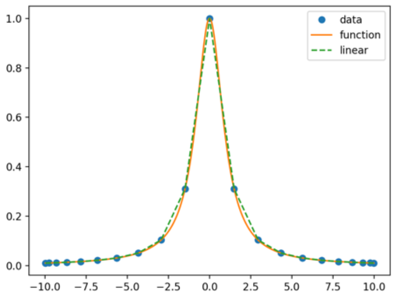
从上至下依次为 Lagrange 插值、分段线性插值、三次样条插值。

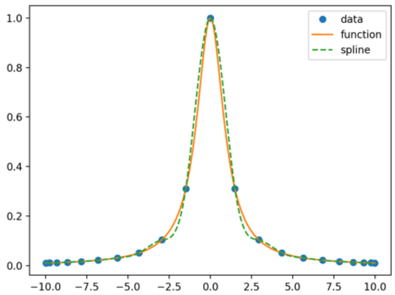
容易看出，次数较高时 Lagrange 插值已经崩溃，而分段线性插值和三次样条插值变得接近原始函数。而用肉眼观察，三次样条插值在采样点数为 21 时已经和原始函数没有什么区别了。

2. 非均匀插值

插值节点 $x_k = 10\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), k = 1,2,\cdots,n$ 的性质是两侧稠密，中间稀疏，可以猜想这种插值在横坐标绝对值较大的点能保持较好的函数形状，以 n=21 为例，三种插值方法的图像如下（从左至右分别为 Lagrange 插值，分段线性插值，三次样条插值）。







容易看出，使采样密度随坐标绝对值增大而增加拯救了高次的 Lagrange 插值，从插值函数中可以看出原始函数的大致形状。而与此同时，分段线性插值和三次样条插值失去了较多中间部分的信息，而不如均匀采样拟合得好。

这次插值实验说明了不同的插值方法适用不同的采样方法，同时，插值方法也要视具体情况而决定。

本部分绘图代码结构如下：

```
samp=isometry_sampler(-10.,10.,8)
x=samp.getAll()
func=function1()
int=lagrangian_interpolator(x=x,y=func.get(x),fun=func)
int.plot()
```

其中 isometry_sampler(等距采样)可替换成 strange_sampler(非均匀采样)，lagrangian_interpolator 可替换成 linear_interpolator 或 spline_interpolator。Sampler 的第三个参数是采样数。function1 是描述被拟合函数的函数对象。各函数的实现细节详见 exp1/interpolation.py 和 utils/function.py。

二、数值积分练习

假设复合辛普森公式的结果为 S(x)，quad 命令的结果为 Q(x)，误差为 Q_error(x)，真实值为Φ(x)，通过程序计算 x∈Z∩[0,5]时的答案如下表。

x	S(x)	Q(x)	Q_error(x)	Φ(x)
0	0.5000000011	0.4999999988	1e-10	0.5
1	0.8413447649	0.8413447458	2e-10	0.8413447461
2	0.9772498538	0.9772498704	3.3e-09	0.9772498681
3	0.998650099	0.9986501047	2.6e-09	0.998650102
4	0.9999683269	0.9999683256	4.4e-09	0.9999683288
5	0.9999997133	0.9999997008	3.5e-09	0.9999997133

在具体实现上，由于无法做到从负无穷开始积分，程序采取了在[-100,x]上积分。这里的依据是Φ(-100)已经小到不能被计算机表示。对复合辛普森公式,，程序采取了 m=1000 的采样，自适应积分设置的限制是最多取 2000 个区间，但实际没有采到这么多区间。

容易看出，在 x=1,2 时自适应辛普森要更接近真实值，在 x=0,3,4,5 时复合辛普森更接近真实值，这是因为调用库限制，无法控制采样点这一变量的结果。在采样点相同的情况下，复合辛普森公式的结果应该更准确。

代码结构如下：

```python
def get(x):
    res1=simpson_integration(x)
    print(round(res1,15))
    (res2,err)=quad_integration(x)
    print(round(res2,15))
    print(round(err,15))
    print(round(normal_cdf(x),15))
    return (res2,err)
```

此函数输入 x，分别输出 S(x),Q(x),Q_error(x)和Φ(x)，并返回Φ(x)的估计值和误差，其中 simpson_integration, quad_integration 和 normal_cdf 函数实现如下：

```python
def simpson_integration(x):
    int=simpson_integrator(SIMPSON_LEFT,x,function2(),SIMPSON_M)
    (res,err)=int.calc()
    return res

def quad_integration(x):
    int=quad_integrator(SIMPSON_LEFT,x,function2(),2*SIMPSON_M)
    (res,err)=int.calc()
    return (res,err)

def normal_cdf(x):
    res=norm.cdf(x)
    return res
```

所用到的 simpson_integrator 和 quad_integrator 见 utils/function.py 中的实现。norm.cdf 是 scipy 中的函数，function2()是表示正太概率分布的函数对象。