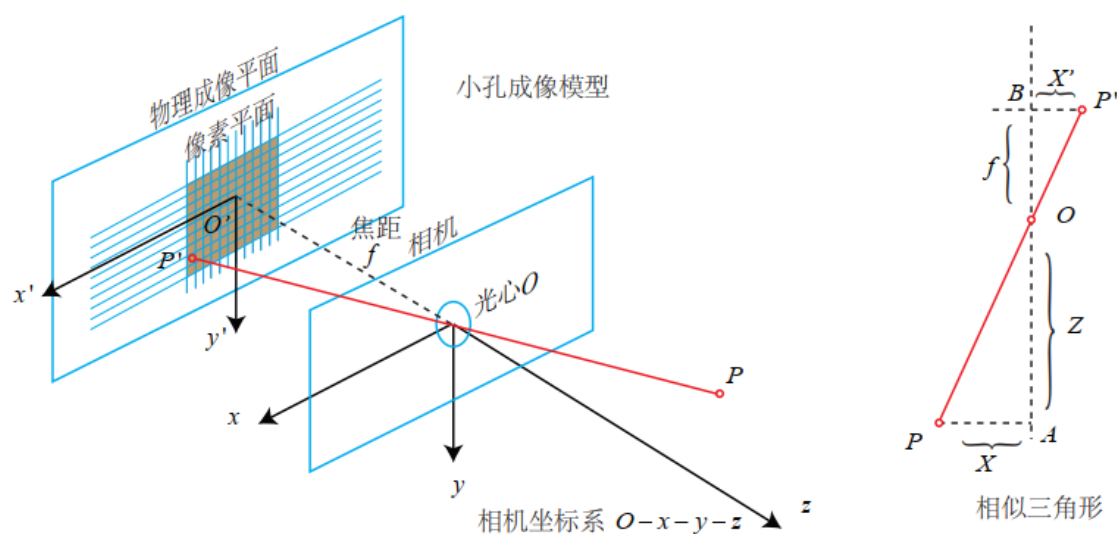


相机模型

一、针孔相机模型

在本节我们先给出相机的针孔模型，再对透镜的畸变模型进行讲解。这两个模型能够把外部的三维点投影到相机内部成像平面，**构成了相机的内参数**。

1.1 针孔相机模型



我们对这个针孔模型进行几何建模。设Oxyz为相机坐标系（习惯一般让z轴指向相机前方，x向右，y向下）。**O为摄像机的光心**，也是针孔模型中的针孔。

现实世界的空间点P经过小孔O投影后，落在物理成像平面O'x'y'上，称为像点P'。设焦距为f，则f与Z的关系则由下式表示

$$\frac{Z}{f} = -\frac{X}{X'} = -\frac{Y}{Y'}$$

为了简洁，我们对等式两侧取绝对值，不影响其他计算。为了得到像在像平面中的位置，我们对上式进行化简。

$$X' = f \frac{X}{Z}$$
$$Y' = f \frac{Y}{Z}$$

上是描述了点P和它的像之间的空间关系。**但在相机中，我们获得的是一个像素，这需要在成像平面上对像进行采样和量化（离散点）**。我们设在物理成像平面上固定着一个像素平面o-u-v，我们得到P'的像素坐标： $[u,v]^T$ 。

像素坐标系与成像平面之间，相差了一个缩放和一个原点的平移。因此我们可以得到下式

$$\begin{cases} u = \alpha X' + c_x \\ v = \beta Y' + c_y \end{cases}$$

带入上上式得到：

$$\begin{cases} u = \alpha f \frac{X}{Z} + c_x = f_x \frac{X}{Z} + c_x \\ v = \beta f \frac{Y}{Z} + c_y = f_y \frac{Y}{Z} + c_y \end{cases}$$

其中，f的单位为米， α 、 β 的单位为像素每米， f_x 、 f_y 的单位为像素。写成矩阵形式，加入齐次坐标形式。

$$Z \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x & 0 & c_x \\ 0 & f_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = KP$$

我们把矩阵K称为相机的内参数矩阵，通常认为，相机的内参在出厂之后固定的，在使用过程中不会发生变化。

除了内参之外，还有相对的外参。上式我们使用的是P在相机坐标系下的坐标。由于相机在运动，所以P的相机坐标应该是它的世界坐标根据相机当前位姿，变换到相机坐标系下的结果。相机的位姿由它的旋转矩阵R和平移向量t来描述。

$$P = RP_w + t$$

$$ZP_w = Z \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = K(RP_w + t) = KTP_w$$

这里，R，t又称为相机的外参数（Camera Extrinsics）。外参会随着相机运动发生改变，同时也是SLAM中待估计的目标，代表机器人的轨迹。

1.2 畸变

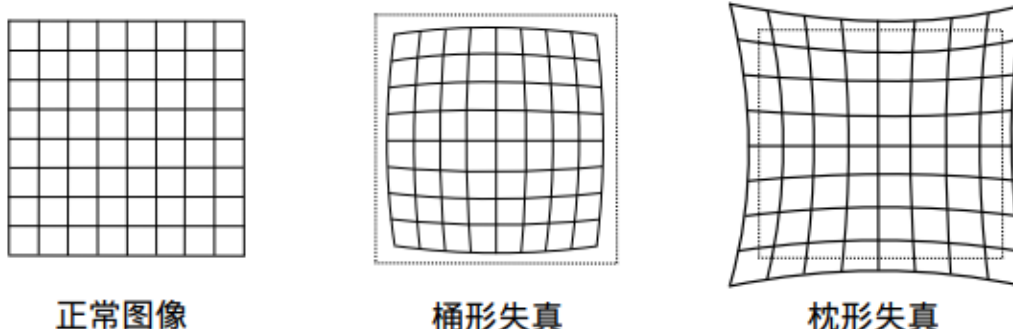


图 5-3 径向畸变的两种类型。

由透镜形状引起的畸变称之为**径向畸变**。它们主要分为两大类：**桶形畸变**和**枕形畸变**。

桶形畸变是由于图像放大率随着光轴距离增加而减小，而枕形畸变恰好相反。

为了处理畸变，我们用数学问题描述它。

①**对于径向畸变**，无论是桶形畸变还是枕形畸变，由于它们都是随着中心距离增加而增加，我们可以用一个多项式函数来描述畸变前后的坐标变化：

$$x_{correct} = x(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6)$$

$$y_{correct} = y(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6)$$

其中，x、y是为纠正的坐标点， $x_{correct}$ 、 $y_{correct}$ 是纠正的坐标点，它们都是**归一化平面上的点**，而不是像素平面上的点。

②**对于切向畸变**，可以使用另外两个参数 p_1, p_2 来进行纠正：

$$x_{correct} = x + 2p_1 xy + p_2(r^2 + 2x^2)$$

$$y_{correct} = y + p_1(r^2 + 2y^2) + 2p_2 xy$$

1.3 畸变的纠正

因此，联合上面两种情况，对于相机坐标系中的一点 $P(X, Y, Z)$ ，我们能够通过五个畸变系数找到这个点在像素平面上的正确位置：

(1) 将三维空间点投影到归一化图像平面，设它归一化坐标为 $[x, y]^T$

(2) 对归一化平面上的点进行径向畸变和切向畸变纠正。

$$x_{correct} = x(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6) + 2p_1 xy + p_2(r^2 + 2x^2)$$

$$y_{correct} = y(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6) + p_1(r^2 + 2y^2) + 2p_2 xy$$

(3) 将纠正后的点通过内参数矩阵投影到像素平面，得到该点在图像上的正确位置。

$$\begin{cases} u = f_x x_{correct} + c_x \\ v = f_y y_{correct} + c_y \end{cases}$$

实际应用中，也可以不用五个畸变项，用三个或更少或更多也可以，比如只选择 k_1, p_1, p_2 这三个系数。

我们可以选择先对整张图进行去畸变，之后根据针孔模型建立投影关系，然后讨论此图像上的点的空间位置。

1.4 单目相机成像过程

总结一下：

(1) 首先，世界坐标系下有一个固定的点 P ，世界坐标 P_w ；

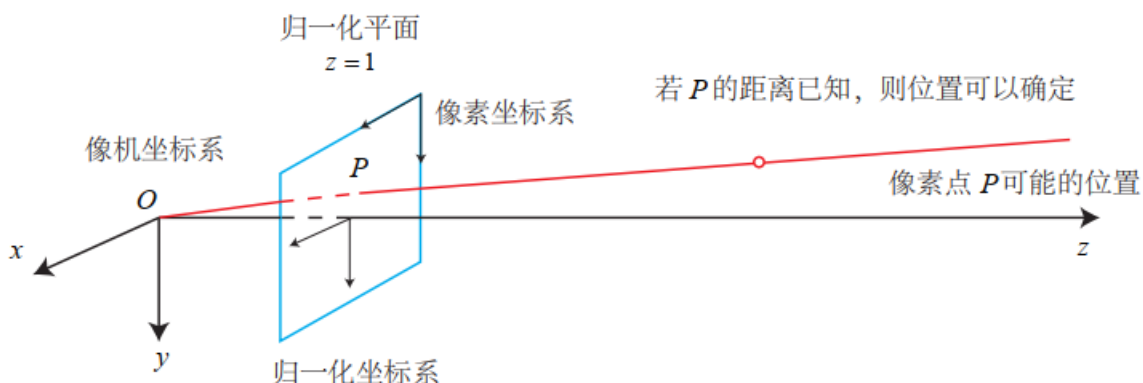
(2) 由于相机在运动，它的运动由 R, t 或者变换矩阵 $T \in SE(3)$ 描述。 P 的相机坐标为： $P_c = RP_w + t$ ；

(3) 这时的 P_c 仍有 X, Y, Z 三个量，把它们投影到归一化平面 $Z=1$ 上，得到 P 的归一化相机坐标： $P_c = [X/Z, Y/Z, 1]^T$ ；

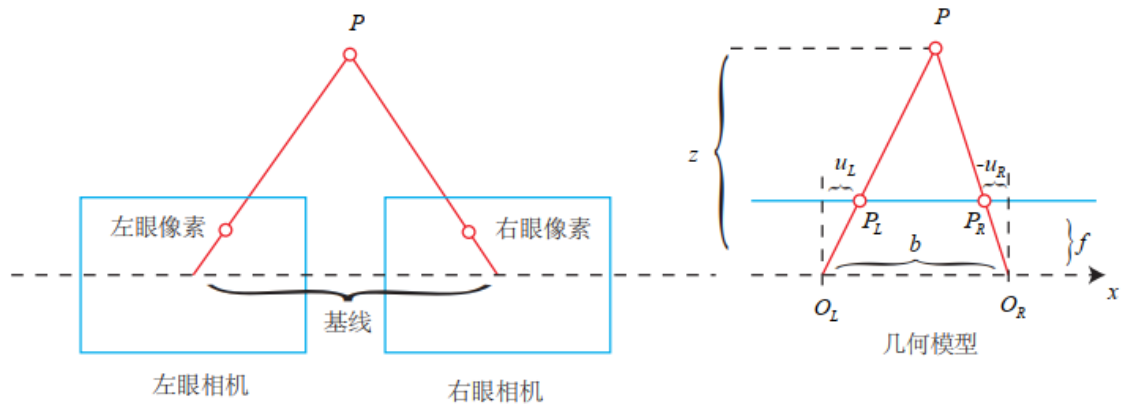
(4) 最后， P 的归一化坐标经过内参后，对应到它的像素坐标 $P_{uv} = KP_c$ 。

二、双目相机模型

针孔相机模型描述了单个相机的成像模型。但是单个普通相机不能描述点的距离（深度）。



双目相机的成像模型如下图所示：



其中， O_L ， O_R 为左右光圈中心，蓝色框为成像平面， f 为焦距。 u_L 和 u_R 为成像平面的坐标。双目相机利用视觉差可以估计每一个像素的深度。

双目相机一般由左眼和右眼两个水平放置的相机组成。两个相机光圈中心都位于 x 轴上，它们的距离称为双目相机的**基线**（Baseline，记作 b ），是双目重要参数。

现在，考虑一个空间点 P ，它在左眼和右眼各成一像，记作 P_L 、 P_R 。根据相似三角形关系，有：

$$\frac{\triangle PP_L P_R \text{ 与 } \triangle PO_L O_R}{\frac{z-f}{z} = \frac{b-u_L+u_R}{b}}$$

令**视差**： $d=u_L-u_R$ ，整理得到：

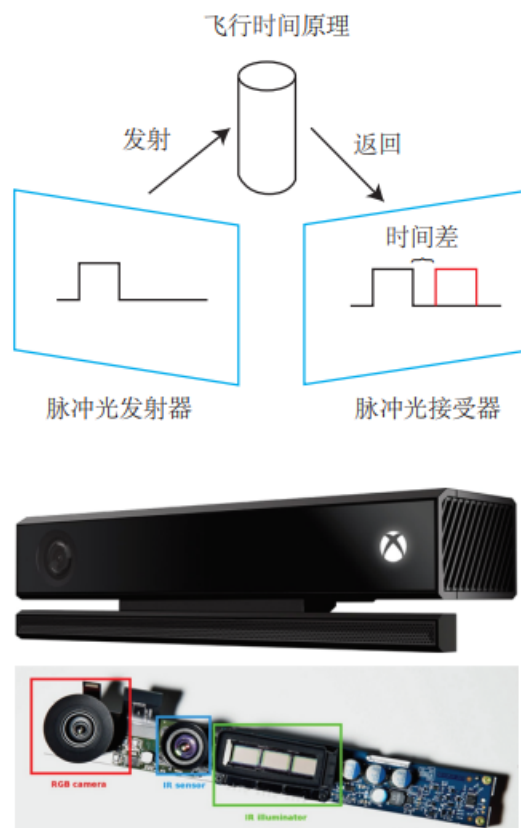
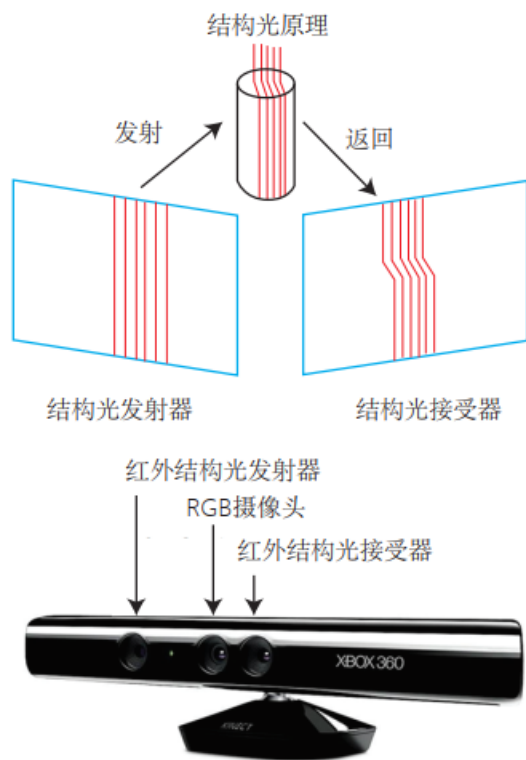
$$z = \frac{fb}{d}$$

$$d = u_L - u_R$$

这个估计距离公式看似简单，但是确切地知道左眼图像某个像素出现在右眼图像的哪一个位置是很困难的，由于计算量的原因，双目深度估计仍需要使用GPU或FPGA来计算，这个问题之后讲解。

三、RGB-D相机模型

RGB-D相机能够主动测量每个像素的深度，目前的RGB-D相机按原理可以分为两大类：通过红外结构光来测量像素距离的、通过飞行时间法原理测量像素距离的。



在测量深度之后，RGB-D相机通常按照生产时的各个相机摆放位置，自己完成深度与彩色图像之间的配对，输出一一对应的彩色图和深度图。我们可以在同一个图像位置，读取到彩色信息和距离信息，计算像素的3D相机坐标，生成**点云 (Point Cloud)**。对RGB-D数据，既可以在图像层面进行处理，亦可在点云层面处理。

四、图像