线性方程组

一、线性相关

1.1 线性组合与向量组的等价

定义：向量a成为向量组b1...bn的一个线性组合，如果有数域P中的数k，使下式成立

$$\alpha=k_1\beta_1+k_2\beta_2+\ldots+k_s\beta_s$$

定义：如果向量组a1,...,at中每一个向量ai都可以经过向量组b1,...,bs线性表出，那么向量组a就可以称为可以经向量组b 线性表出 。如果两个向量组互相可以线性表出，则它们就称为等价

例如：

$$\begin{aligned}\alpha_1&=(1,1,1)\\\alpha_2&=(1,2,0)\\\beta_1&=(1,0,2)\\\beta_2&=(0,1,-1)\end{aligned}$$

向量组a和b可以互相表示，则等价。

1.2 线性相关与线性无关

定义：向量组a1,...,as,称为线性相关的，如果有数域P中不全为零的数k1,...,ks，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_s\alpha_s=0\\(s\geq 1)$$

定义：向量组a1,...,as称为线性无关的，如果没有k1,...,ks使得上式成立。

线性无关也可以如此定义：当由上式推出，ks=0时，则向量组a称为线性无关。

线性无关的向量组的一个性质：如果一向量组线性无关，则它的任何一个非空子向量组也线性无关。

定义：极大线性无关组：一个向量组的一个部分组称为一个极大线性无关组，若这个部分组本身是线性无关的，且从这个向量组中任意添加一个向量，所得的部分向量组都线性相关。

▲极大线性无关组基本性质：

①任意一个极大线性无关组都与向量组本身等价。

②一个向量组的任意两个极大线性无关组都等价。

③一向量组的极大线性无关组都含有相同个数的向量。

1.3 向量组是否线性相关的判断

构建方程组求解是否存在一组ks不全为零，使得下式成立

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_s\alpha_s=0$$

假设：

$$\alpha_1=(1,1,1,2)$$
$$\alpha_2=(1,2,0,-2)$$
$$\alpha_3=(1,0,2,0)$$

可得：

$$k_1(1,1,1,2)^T+k_2(1,2,0,-2)^T+k_3(1,0,2,0)^T=0$$
$$\begin{cases}k_1+k_2+k_3=0\\k_1+2k_2+0=0\\k_1+0+2k_3=0\\2k_1-2k_2+0=0\end{cases}$$

解此方程组即可。**若此方程组只有零解，则向量组线性无关；若有非零解，则向量组线性相关。**

若在线性无关的向量组后多加一维，例如：a=(1,1)变为a=(1,1,1)。加任意实数，怎么加，向量组还是线性无关的。这是因为加了之后得到的新的方程组的解必然满足原方程组，即原方程组的解就是新方程组的解。若原方程组只有0解，则新的也只有0解。

1.4 向量组的秩与矩阵的秩

定义：向量组的极大线性无关组所含向量的个数称为这个向量组的秩

性质：

①向量组线性无关充分必要条件为：它的秩与其所含向量个数相同。

②等价向量组必含有相同的秩

③全部由零向量组成的向量组没有极大线性无关组，我们规定这样的向量组**秩为零。**

定义：矩阵的秩：指矩阵行(列)向量组的秩(二者相等)。

定理：矩阵的秩若小于矩阵的维数，则其行列式值为0

※矩阵秩定理：矩阵的秩是r的充分必要条件为：矩阵中有一个r级子式不为零，所有r+1级子式为零

计算矩阵的秩：把矩阵经过初等行变换或初等列变换变换为阶梯型即可。有多少行(列)不为零，矩阵的秩就是多少。

1.5 线性方程组

定理：若线性方程组的未知数个数大于等式数，则其有非零解，即下式s<n

$$\begin{cases}a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\a_{s1}x_1+\ldots+a_{sn}x_n=b_s\end{cases}$$

定理：上述线性方程组有解的充分必要条件为：系数矩阵A与增广矩阵(A b)具有相同的秩。

1.6 线性方程组解的结构

线性方程组在有无穷多解时，全部解可以用有限多个解表示出来。

考虑齐次线性方程组(b=0)的解的集合中，两个解的和还是方程组的解，一个解的倍数还是方程组的解。

定义：基础解系：齐次线性方程组的一组解n1,...,nt，称为齐次线性方程组的一个基础解系，如果满足

（1）齐次线性方程组的任一个解都能表示成n1,...,nt的线性组合

（2）n1,…,nt线性无关

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+\ldots+a_{2n}x_n=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1+\ldots+a_{sn}x_n=0 \end{cases}$$

定理：※在齐次线性方程组有非零解的情况下，它有基础解系，且基础解系所含解的个数等于n-r，这里r表示系数矩阵的秩(n-r也是自由未知量的个数)

基础解系求法：

例如：

$$x_1+2x_2+3x_3=0$$

基础解系中所含像两个数为2。我们直接让：

$$\begin{aligned} x_2=1; x_3=0 \\ x_2=0; x_3=1 \end{aligned}$$

两组数解除两个x1，这就构成基础解系。

$$\begin{aligned} \alpha_1=(-2,1,0)^T \\ \alpha_2=(-3,0,1)^T \end{aligned}$$