矩阵

一、矩阵的运算

1.1 矩阵加法

满足交换律与结合律，即

$$A+B=B+A$$
$$A+B+C=A+(B+C)$$

秩的关系：

$$r(A+B) \le r(A)+r(B)$$

1.2 矩阵乘法

满足结合律，但通常不满足交换律

$$A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$$

秩的关系：

$$r(A\times B) \le min[r(A),r(B)]$$

矩阵的乘法和加法还满足分配律

$$A\times(B+C)=A\times B+A\times C$$

幂次：

$$A^kA^l=A^{k+l}$$
$$(A^k)^l=A^{kl}$$

1.3 数乘

用数k乘矩阵就是把矩阵的每个元素都乘上k。其满足：

$$(k+l)A=kA+lA$$
$$k(A+B)=kA+kB$$
$$k(lA)=(kl)A$$
$$1\times A=A$$
$$k(AB)=(kA)B=A(kB)$$

1.4 转置

$$(AB)^T=B^TA^T$$

1.5 矩阵乘积的行列式

定理：设A,B是数域P上的两个n维矩阵，那么有

$$|AB|=|A|\times|B|$$

即矩阵乘积的行列式等于它的银子的行列式的乘积

二、矩阵的逆

2.1 可逆矩阵

定义：n级方阵A称为可逆的，如果有n级方阵B，使得

$$AB = BA = E$$

这里E=I，是单位阵

2.2 逆矩阵的求解

定义：伴随矩阵：设Aij是矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

中元素aij的代数余子式，则矩阵

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

称为A的伴随矩阵

元素aij的代数余子式：把第i行和第j列的元素划掉后，得到的矩阵的行列式，符号由i+j决定：i+j为偶数则正，奇数为负

定理：矩阵A是可逆的充分必要条件是矩阵A非奇异，且有

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$$

2.3 矩阵的逆其他推论

定理：若矩阵A、B可逆，则A'与AB也可逆，且有

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

定理：A是一个s×n矩阵，若P是s×s的可逆矩阵，Q是n×n可逆矩阵，则有

$$r(A) = r(PA) = r(AQ)$$

简单的证明：

$$r(PA) \le min[r(A), r(P)] = r(A)$$
$$\text{设} PA = B$$
$$\text{则有：} A = P^{-1}B$$
$$r(P^{-1}B) \le r(B) = r(PA)$$
$$\text{即} r(A) \le r(PA)$$

由推断可知：

$$r(PA) \le r(A)$$
$$r(A) \le r(PA)$$

所以定理证毕。

这个定理说明，满秩（可逆）线性变换不改变矩阵的秩。

三、矩阵的分块

3.1 分块介绍

3.2 分块矩阵计算

3.3 分块对角矩阵

对于两个有相同分块的准对角矩阵

$$\begin{bmatrix} A_1 & & O \\ & A_2 & \\ \dots & \dots & \\ O & & A_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & & O \\ & B_2 & \\ \dots & \dots & \\ O & & B_l \end{bmatrix}$$

有：

$$AB = \begin{bmatrix} A_1B_1 & & O \\ & A_2B_2 & \\ \dots & \dots & \\ O & & A_lB_l \end{bmatrix} A+B = \begin{bmatrix} A_1+B_1 & & O \\ & A_2+B_2 & \\ \dots & \dots & \\ O & & A_l+B_l \end{bmatrix}$$

其次，若Al都是可逆矩阵，则有

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & & O \\ & A_2^{-1} & \\ \dots & \dots & \\ O & & A_l^{-1} \end{bmatrix}$$

四、初等矩阵

4.1 初等矩阵

定义：由单位矩阵I经过一次初等变换得到的矩阵为初等矩阵。

定理：对一个s×n矩阵A作一次初等行（列）变换就相当于在A的左（右）边乘上相应的s×s维初等矩阵。

定义：矩阵A与B，若B可以由A经过一系列初等变换得到，则A与B称为等价的。

初等矩阵包括：

①互换矩阵I的第i行和第j行，用P(i，j)表示。

②用数域P中非零数c乘I的第i行，用P(i (c))表示。

③把矩阵I的第j行乘k倍加到i行，用P(i，j (k))表示。

4.2 初等矩阵应用

定理：n维矩阵A为可逆的充分必要条件是它能表示成一些初等矩阵的乘积

推论1：两个s×n矩阵A，B等价的充分必要条件为，存在可逆的s级矩阵P与可逆的n级矩阵Q，使得

$$A = PBQ$$

推论2：可逆矩阵总是可以经过一系列初等行变换化成单位矩阵。

矩阵逆手算求法：

作n×2n维矩阵（A　I），用初等行变换把它的左边一半化成E，这是，右边一半就是A的逆。