坐标变换

一、三维空间刚体运动

1.1 概述

涉及问题：

①坐标系之间如何变换。

②如何计算同一向量在不同坐标系下的坐标。

在SLAM中，**有固定的世界坐标系，还有移动机器人的坐标系。**机器人坐标系随着机器人运动时刻改变，每个时刻都有新的坐标系。

1.2 旋转矩阵

在三维线性空间V中，假设同一个向量在两组不同的标准正交基下的坐标分别为ai和bi，那么在第一组基下与第二组基下的表示分别为：

$$\alpha = a_1\epsilon_1 + a_2\epsilon_2 + a_3\epsilon_3$$
$$\alpha = \beta_1\eta_1 + \beta_2\eta_2 + \beta_3\eta_3$$

显然上两式相等，那么令其相等，则有：

$$(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

等式两侧同时乘以：

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1^T \\ \epsilon_2^T \\ \epsilon_3^T \end{bmatrix}$$

可以得到：

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_1^T \\ \epsilon_2^T \\ \epsilon_3^T \end{bmatrix}(\eta_1, \eta_2, \eta_3)\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

我们把：

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1^T \\ \epsilon_2^T \\ \epsilon_3^T \end{bmatrix}(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$$

称作三维空间旋转矩阵，记为Rab。可以理解为将基η下的坐标经过Rab变换后得到基ε下的坐标。显然Rab可逆。下面介绍旋转矩阵的性质。

1.3 旋转矩阵的性质

（1）R是一个正交矩阵

（2）R的行列式值为+1

(3）RR'=I，det(R)=1

(4)

$$R_{21}=R_{12}^{-1}=R_{12}^{T}$$

(5)

$$\alpha_3=R_{32}\alpha_2=R_{32}R_{21}a_1=R_{31}a_1$$

1.4 齐次矩阵

三维线性空间V中，上述只描述了旋转的数学表示，现在加上平移。

齐次矩阵如下形式

$$T=\begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中，R为旋转矩阵，t为三维平移向量。利用齐次矩阵计算时，由于T是4×4的，因此在三维空间中的向量末尾加一个1变为四维向量，可以与T作运算。

▲下面，求解T的逆

分块矩阵求逆法：设T的逆为

$$T^{-1}=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

$$TT^{-1}=\begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} RA+tC & RB+tD \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因此，得到，C=(0 0 0)，D=1，代入第一行得到

$$\begin{gathered} RA=I \\ RB+t=O \end{gathered}$$

因此

$$T^{-1}=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} R^{-1} & -R^{T}t \\ O & 1 \end{bmatrix}$$

二、欧拉角以及四元数

2.1 欧拉角

将任意旋转分为三次绕不同轴上的转动（常见就是空间直角坐标系x，y，z轴），**轴可以分为定轴或者动轴转动**，其中动轴转动（X-Y-Z转动）表示：先按照原始坐标系的X轴转动，再按照第一次旋转后获得的Y轴转动，再按照第二次旋转后获得的Z轴转动。定轴转动（X-Y-Z转动）表示：这三次转动全是按照初始坐标系的X、Y、Z轴转动。**动轴转动的旋转矩阵按顺序相乘即可，定轴转动的旋转矩阵相乘顺序要相反。**

2.2 欧拉角形式与旋转矩阵的转换

详细推导以及理论在第三点中介绍，此处只给出公式

$$\begin{gathered} R=cos\theta\times I+(1-cos\theta)ww^{T}+sin\theta w^{`} \\ \theta=arccos(\frac{tr(R)-1}{2}) \\ Rw=w \end{gathered}$$

其中，θ为旋转角度，ω为旋转轴。ω'表示w_hat，是属于so(3)群的，在下一讲中介绍。

2.3 四元数

定义：四元数可以看作复数的扩充，它具有三个虚部，形式如下

$$q = w + xi + yj + zk$$

其具有如下性质：

$$\begin{gathered}(1)i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ (2)ij = -ji = k \\ (3)jk = -kj = i \\ (4)ki = -ik = j\end{gathered}$$

再定义四元数的乘法，我们把四元数标量和向量部分分开写

$$\begin{gathered}q_1 = s_1 + v_1 \\ q_2 = s_2 + v_2 \\ q_1 q_2 = s_1 s_2 - v_1 \cdot v_2 + s_1 v_2 + s_2 v_1 + v_1 \times v_2\end{gathered}$$

我们再定义共轭四元数：一个四元数q=s+v的共轭表示为q-=s-v，一个四元数和它的共轭的积等于该四元数与自身的点乘，也等于该四元数模的平方，即

$$qq^* = q^* q = q \cdot q = ||q||^2$$

我们再定义四元数的逆：一个非零四元数q的逆为其共轭除以自身的平方，即

$$q^{-1} = \frac{q^*}{||q||^2}$$

我们再定义四元数的点乘：

$$q_a q_b = s_a s_b + x_a x_b i + y_a y_b j + z_a z_b k$$

那么，**四元数如何表示旋转，下面推导四元数表示旋转的方式以及其与转轴角度旋转的关联。**

我们先假设，如下公式可以表示旋转：

$$\phi_q(P) = qPq^{-1}$$

我们还知道，旋转需要保持：**①长度不变②夹角不变③手性不变（handedness）**，对应这三点分别有三个公式如下

$$\begin{gathered}① ||\phi(P)|| = ||P|| \\ ② \phi(P_1) \cdot \phi(P_2) = P_1 \cdot P_2 \\ ③ \phi(P_1) \times \phi(P_2) = \phi(P_1 \times P_2)\end{gathered}$$

扩展函数Φ称为一个从H到其自身的映射，要求Φ(s+V)=s+Φ(V)，这样重新得到②+③的方程

$$④ \phi(P_1) \cdot \phi(P_2) = \phi(P_1 \cdot P_2)$$

我们假设的四元数表示旋转公式一定要满足①+④，因此我们进行验证。

$$① ||\phi_q(P)|| = ||qPq^{-1}|| = |q||P||q^{-1}| = |q||P|\frac{|q^*|}{|q|^2} = ||P||$$

其中，q与q共轭的模是相等的，①验证完毕

$$②\phi_q(P_1)\cdot\phi_q(P_2)=qP_1q^{-1}qP_2q^{-1}=\phi_q(P_1\cdot P_2)$$

验证四元数这种形式可以表示旋转后，现在来找其与旋转轴与旋转角度的关系。我们找一个单位四元数q=s+v，它的逆为q-1=s-v（用共轭条件即可），再给一个三维空间中的点P（标量为零的一个四元数），有

$$qPq^{-1}=(s+v)P(s-v)=s^2P+2sv\times P+(v\cdot P)v-v\times P\times v$$

根据定理，任意给定两个三维向量α，β，有

$$\alpha\times(\beta\times\alpha)=|\alpha|^2\beta-(\alpha\cdot\beta)\alpha$$

此处，我们再令v=tA，此处A是一个单位向量，则我们可以得到旋转后的向量表示为：

$$qPq^{-1}=(s^2-t^2)P+2stA\times P+2t^2(A\cdot P)A$$

再由指数形式的旋转矩阵R=exp(θω_hat)的公式得到

$$R=cos\theta\times I+(1-cos\theta)ww^T+sin\theta w_{hat}$$

对比可以得到方程组：

$$\begin{gathered}s^2-t^2=cos\theta\\2st=sin\theta\\2t^2=1-cos\theta\end{gathered}$$

联立解得：

$$\begin{gathered}t=\sqrt{\frac{1-cos\theta}{2}}=sin(\theta/2)\\s=cos(\theta/2)\end{gathered}$$

所以，我们找到了一个单位四元数 $\mathbf{q}$ ，其对应于绕旋转轴 $\mathbf{A}$ 旋转 $\boldsymbol{\theta}$ 角度的旋转变换(**重要结论**)：

$$\begin{aligned}q&=s+v\\&=s+tA\\&=cos(\theta/2)+Asin(\theta/2)\end{aligned}$$

这是一个四元数，标量为cos(θ/2)，向量部分以单位旋转轴向量为底，乘sin(θ/2)

三、李群与李代数

3.1 群(Group)

群(Group)是一种集合加上一种运算的代数结构。

定义为：**记集合为A，运算为·，那么当运算满足以下性质时，称（A，·）成群**

$$\begin{gathered}(1)\text{封闭性：}\forall a_1,a_2\in A,\ a_1\cdot a_2\in A\\(2)\text{结合律：}\forall a_1,a_2,a_3\in A,\ (a_1\cdot a_2)\cdot a_3=a_1\cdot(a_2\cdot a_3)\\(3)1\text{元：}\exists e\in A,\ s.t.\forall a\in A,\ e\cdot a=a\cdot e=a\\(4)\text{逆：}\forall a\in A,\ \exists a^{-1}\in A,\ s.t.a\cdot a^{-1}=e\end{gathered}$$

可以验证：旋转矩阵集合和矩阵乘法构成群；同样变换矩阵和矩阵乘法也构成群。**因此称它们为旋转矩阵群和变换矩阵群。**

3.2 SO(3)与SE(3)

上面介绍了群的定义，现在来看旋转矩阵群与变换矩阵群。

我们定义SO(n)如下

$$SO(n) = \{R \in R^{n \times n} : RR^T = I, detR = +1\}$$

很明显，SO(3)在矩阵乘法运算下构成群（Group）。

我们定义SE(3)如下，（特殊欧式群）

$$SE(3) = \{(t, R) : p \in R^3, R \in SO(3)\}$$
$$T = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.3 李代数基础

李代数：与李群对应的一种结构，位于向量空间。通常记作小写的so(3)和se(3)

李代数的引出：

先考虑R随时间的变化，有：

$$R(t)R(t)^T = I$$

求导得

$$\frac{dR(t)}{dt}R(t)^T + R(t)\frac{dR(t)^T}{dt} = 0$$

整理得到：

$$\frac{dR(t)}{dt}R(t)^T = -[\frac{dR(t)}{dt}R(t)^T]^T$$

这就是反对称矩阵，RT+R=0。我们把上式左侧记为ω_hat，两侧右乘R(t)，可以得到： R导数=ω__hat × R。可以看到，对R求导后，左侧多出一个 w hat 。我们定义这个hat运算符，是由向量到矩阵得映射。

3.4 李代数：so(3)和se(3)

定义：三维线性空间中，满足

$$w \times q = w_{hat} q$$

的矩阵，记为what，其为

$$w_{hat} = A = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

其中，w=(a1 , a2 , a3)^T

我们定义**so(3)**，李代数so(3)满足

$$so(n) = \{S \in R^{n \times n} | S^T = -S\}$$

这其实是反对称矩阵。

我们同样定义**se(3)**，

$$se(3)=\{(v,w_{hat}):v\in R^3,w_{hat}\in so(3)\}$$
$$\xi_{hat}=\begin{bmatrix} w_{hat} & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\in R^{4\times 4}$$
$$\xi=[v,w]^T\in R^6$$

其中，ξ是6维列向量，ξhat是4×4矩阵，通过运算符变换。

3.5 SO(3)与so(3)、SE(3)与se(3)的映射

指数映射：

$$e^{w_{hat}\theta}=cos\theta\times I+(1-cos\theta)w_{hat}^2+w_{hat}sin\theta$$
$$|w_{hat}|=1$$
$$e^{w_{hat}}\in SO(3)$$

定理：任取R∈SO(3)，有存在ωθ∈R3，||ω||=1且θ∈R+，使得R=exp(w_hat θ)，且有指数逆映射关系

$$log:SO(3)->so(3):R->log(R)=(w\theta)_{hat}$$

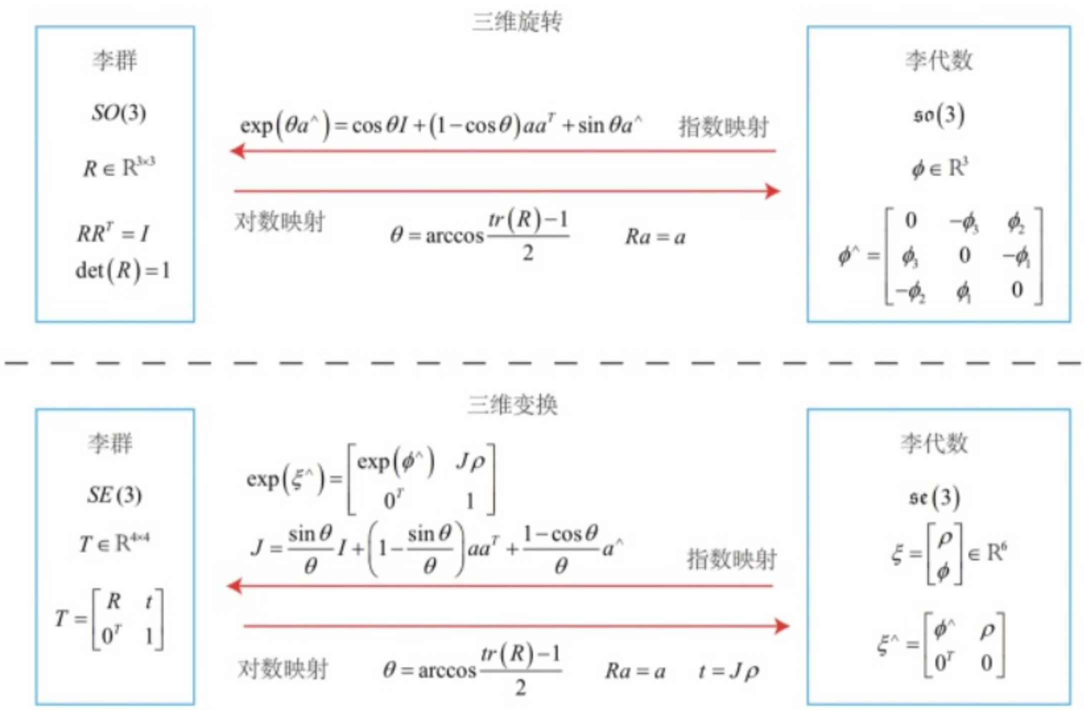
可见，w和θ变为旋转矩阵R可用第一条公式；旋转矩阵R变为w和θ可以用如下公式。它们之间存在映射关系。

$$\theta=arccos(\frac{tr(R)-1}{2})$$
$$w=\frac{1}{2sin\theta}\begin{bmatrix} r_{32}-r_{23} \\ r_{13}-r_{31} \\ r_{21}-r_{12} \end{bmatrix}$$

定理：给定一个g∈SE(3)，则存在ξhat∈se(3),，θ∈R，使得g=exp(ξhat θ)

$$log:SE(3)->se(3):g->log(g)=\xi_{hat}\theta$$
$$e^{\xi_{hat}\theta}=\begin{bmatrix} e^{w_{hat}\theta} & (I-e^{w_{hat}\theta})(w\times v)+ww^Tv\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\xi=[v\quad w]^T=[-w\times q\quad w]^T$$

另一种表示：如图



四、李代数求导以及优化

4.3.1 BCH公式与近似形式

使用李代数的一大动机是为了进行优化，而在优化过程中导数是非常重要的信息。

Baker-Campbell-Hausdorff公式

A，B为矩阵，则有下式成立：

$$ln(exp(A)exp(B)) \\ = A + B + \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{12}[A,[A,B]] - \frac{1}{12}[B,[A,B]] + ...$$

其中，[]为李括号。

BCH公式告诉我们：当处理两个矩阵指数的乘积时，它们会产生一些由李括号组成的余项。特别地，**考虑SO(3)上的李代数ln(exp(Φ1^)exp(Φ2^))时，当Φ1或Φ2为小量时，小量二次以上的项都可以被忽略掉：**

$$exp(ln(e^{\hat{\phi_1}} e^{\hat{\phi_2}})) \approx \begin{cases} J_l(\Phi_2)^{-1}\Phi_1 + \Phi_2 \;\;,\;\; if\ \Phi_1\ is\ small \\ J_r(\Phi_1)^{-1}\Phi_2 + \Phi_1 \;\;,\;\; if\ \Phi_2\ is\ small \end{cases}$$

以第一个近似为例，当对一个旋转矩阵R2左乘一个微小旋转矩阵R1时，可以看作在原有李代数Φ2上，加上了一个项，其中Jl为左乘，Jr为右乘。

本书以左乘为例。左乘 BCH 近似雅可比 $\boldsymbol{J}_l$ 事实上就是式（4.26）的内容：

$$\boldsymbol{J}_l = \boldsymbol{J} = \frac{\sin\theta}{\theta}\boldsymbol{I} + \left(1 - \frac{\sin\theta}{\theta}\right)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T + \frac{1-\cos\theta}{\theta}\boldsymbol{a}^\wedge. \tag{4.30}$$

它的逆为：

$$\boldsymbol{J}_l^{-1} = \frac{\theta}{2}\cot\frac{\theta}{2}\boldsymbol{I} + \left(1 - \frac{\theta}{2}\cot\frac{\theta}{2}\right)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T - \frac{\theta}{2}\boldsymbol{a}^\wedge. \tag{4.31}$$

而右乘雅可比仅需要对自变量取负号即可：

$$\boldsymbol{J}_r(\boldsymbol{\phi}) = \boldsymbol{J}_l(-\boldsymbol{\phi}). \tag{4.32}$$

BCH公式意义

假定对某个旋转R，对应的李代数为Φ。我们给它左乘微小旋转，记作ΔR，对应的李代数为ΔΦ。那么在李群中，得到的就是ΔR·R，而在李代数上，根据近似可以得到：

$$exp(\Delta\hat{\Phi})exp(\hat{\Phi}) = exp((J_l(\Phi)^{-1}\Delta\Phi + \Phi\hat{)})$$

4.3.2 SO(3)李代数上求导

假设机器人位姿为T，观察到了一个世界坐标位于p的点，产生观测数据z，根据变换关系：

$$z = Tp + w$$

其中，w为噪声。我们计算误差e：

$$e = z - Tp$$

我们求一个T使得整体误差最小化：

$$min_T J(T) = \sum_{i=1}^{N} ||z_i - Tp_i||^2$$

求解这个最小二乘法需要变换矩阵T的导数。*方法在非线性优化中有讲解*

4.3.3 李代数求导

我们考虑SO(3)上的情况。假设我们对一个空间点p进行了旋转，得到了Rp，现在我们要计算旋转之后点的坐标相对于旋转的导数：

$$\frac{d(exp(\hat{\Phi})p)}{d\Phi}$$

这里d只是一个符号，并不是微分标识符

根据导数定义：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\left(\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}\right)}{\partial\boldsymbol{\phi}} &= \lim_{\delta\boldsymbol{\phi}\to 0}\frac{\exp\left(\left(\boldsymbol{\phi}+\delta\boldsymbol{\phi}\right)^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}-\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}}{\delta\boldsymbol{\phi}} \\
&= \lim_{\delta\boldsymbol{\phi}\to 0}\frac{\exp\left(\left(\boldsymbol{J}_l\delta\boldsymbol{\phi}\right)^{\wedge}\right)\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}-\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}}{\delta\boldsymbol{\phi}} \\
&\approx \lim_{\delta\boldsymbol{\phi}\to 0}\frac{\left(\boldsymbol{I}+\left(\boldsymbol{J}_l\delta\boldsymbol{\phi}\right)^{\wedge}\right)\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}-\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}}{\delta\boldsymbol{\phi}} \\
&= \lim_{\delta\boldsymbol{\phi}\to 0}\frac{\left(\boldsymbol{J}_l\delta\boldsymbol{\phi}\right)^{\wedge}\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}}{\delta\boldsymbol{\phi}} \\
&= \lim_{\delta\boldsymbol{\phi}\to 0}\frac{-\left(\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}\right)^{\wedge}\boldsymbol{J}_l\delta\boldsymbol{\phi}}{\delta\boldsymbol{\phi}} = -\left(\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}\right)^{\wedge}\boldsymbol{J}_l.
\end{aligned}
$$

其中，第二行近似为BCH线性近似，第三行为泰勒展开舍去高次项后的近似，第四行与第五行将反对称符号视为叉乘（交换变号），最终约去小量δΦ，得到旋转后的点相对于李代数的导数：

$$\frac{d(Rp)}{d\Phi} = (-Rp\hat{)}J_l$$

4.3.4 扰动模型(左乘)

由于4.3.3中导数的形式中含有Jl，这个Jl比较复杂，因此我们介绍扰动模型。

另一种求导方式：对R进行一次扰动ΔR，这个扰动可以乘在左边也可以乘在右边(结果会有微小差异)，此处以左扰动为例：

设左扰动ΔR对应的李代数为φ，对φ求导：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\left(\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}\right)}{\partial\boldsymbol{\varphi}} &= \lim_{\boldsymbol{\varphi}\to 0}\frac{\exp\left(\boldsymbol{\varphi}^{\wedge}\right)\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}-\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{\varphi}} \\
&\approx \lim_{\boldsymbol{\varphi}\to 0}\frac{\left(1+\boldsymbol{\varphi}^{\wedge}\right)\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}-\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{\varphi}} \\
&= \lim_{\boldsymbol{\varphi}\to 0}\frac{\boldsymbol{\varphi}^{\wedge}\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{\varphi}} = \lim_{\boldsymbol{\varphi}\to 0}\frac{-\left(\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}\right)^{\wedge}\boldsymbol{\varphi}}{\boldsymbol{\varphi}} = -\left(\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}\right)^{\wedge}.
\end{aligned}
$$

注：扰动相当于一个微小的Δx

4.3.5 SE(3)上的李代数求导

此处，给出SE(3)上的扰动模型。假设某空间点p经过一次变换T(ξ)，得到Tp。现在，给T左乘一个扰动ΔT=exp(δξ^)，我们设扰动项的李代数为：δξ=[δρ，δΦ]^T，那么有：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(\boldsymbol{T}\boldsymbol{p})}{\partial\delta\boldsymbol{\xi}} &= \lim_{\delta\boldsymbol{\xi}\to\mathbf{0}} \frac{\exp\left(\delta\boldsymbol{\xi}^{\wedge}\right)\exp\left(\boldsymbol{\xi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p} - \exp\left(\boldsymbol{\xi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}}{\delta\boldsymbol{\xi}} \\
&\approx \lim_{\delta\boldsymbol{\xi}\to\mathbf{0}} \frac{\left(\boldsymbol{I} + \delta\boldsymbol{\xi}^{\wedge}\right)\exp\left(\boldsymbol{\xi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p} - \exp\left(\boldsymbol{\xi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}}{\delta\boldsymbol{\xi}} \\
&= \lim_{\delta\boldsymbol{\xi}\to\mathbf{0}} \frac{\delta\boldsymbol{\xi}^{\wedge}\exp\left(\boldsymbol{\xi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}}{\delta\boldsymbol{\xi}} \\
&= \lim_{\delta\boldsymbol{\xi}\to\mathbf{0}} \frac{\begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\phi}^{\wedge} & \delta\boldsymbol{\rho} \\ \mathbf{0}^{T} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}\boldsymbol{p} + \boldsymbol{t} \\ 1 \end{bmatrix}}{\delta\boldsymbol{\xi}} \\
&= \lim_{\delta\boldsymbol{\xi}\to\mathbf{0}} \frac{\begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\left(\boldsymbol{R}\boldsymbol{p} + \boldsymbol{t}\right) + \delta\boldsymbol{\rho} \\ 0 \end{bmatrix}}{\delta\boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & -(\boldsymbol{R}\boldsymbol{p} + \boldsymbol{t})^{\wedge} \\ \mathbf{0}^{T} & \mathbf{0}^{T} \end{bmatrix} \triangleq (\boldsymbol{T}\boldsymbol{p})^{\odot}.
\end{aligned}
$$

最终结果中的运算符可以把一个齐次坐标的空间点变换成一个4×6的矩阵。