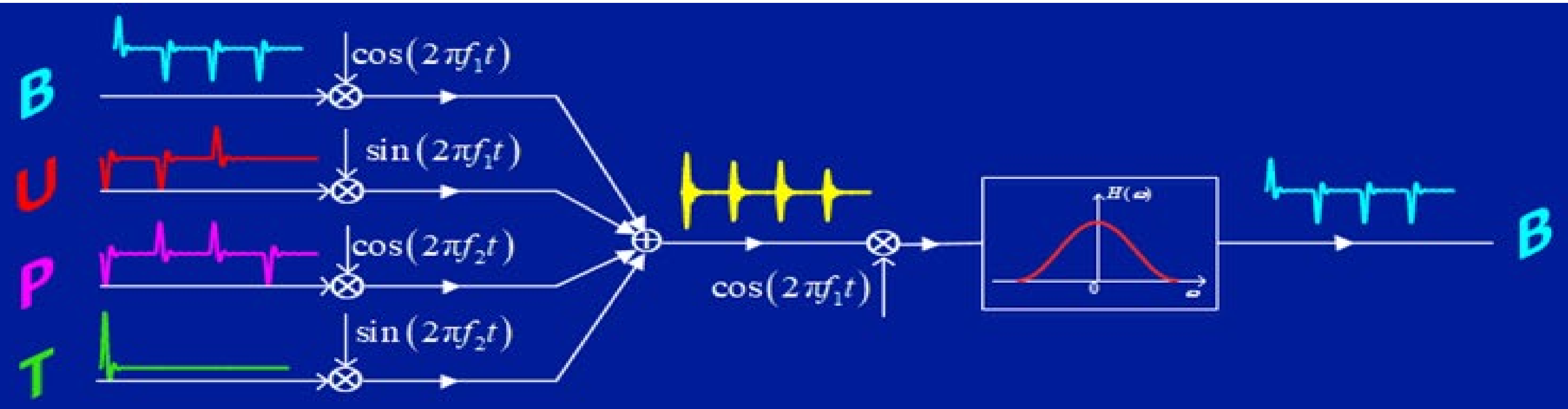
北京郵電大學
Beijing University of Posts and Telecommunications

7 拉普拉斯变换

电子工程学院 侯宾 尹霄丽



主要内容

1. 拉普拉斯变换的符号表示
2. 拉普拉斯变换的部分分式展开法
3. 连续LTI系统的表示
4. 不稳定系统的稳定
5. 由零极点分布分析系统的频率响应特性

1. 拉普拉斯变换的符号表示

(1) 拉普拉斯变换

- 基于Sympy库得到解析解
  - 正变换（ft->Fs）：laplace_transform(ft,t,s)
  - 返回值（Fs、收敛域、辅助收敛条件）
  - 可选参数：
    - noconds=True,只返回Fs
    - simplify=True,简化返回表达式
  - 注意这里求的是单边s变换

▶ 1. 拉普拉斯变换的符号表示

- 基于Sympy库得到解析解
  - 反变换（Fs ->ft）：inverse_laplace_transform(Fs, s, t)
  - 返回值：ft表达式

$$F(s)=\frac{e^{-2s}}{s^2+3s+2} \Rightarrow f(t)=\left[e^{-(t-2)}-e^{-2(t-2)}\right]u(t-2)$$

(exp(t) - exp(2))*exp(2 - 2*t)*Heaviside(t - 2)

$$F(s)=\frac{s^2+3}{(s+2)(s^2+2s+5)} \Rightarrow f(t)=\frac{7}{5}e^{-2t}+e^{-t}\left[-\frac{2}{5}\cos(2t)-\frac{4}{5}\sin(2t)\right]$$

(-4*exp(-t)*sin(2*t)/5 - 2*exp(-t)*cos(2*t)/5)*Heaviside(t) + 7*exp(-2*t)*Heaviside(t)/5

1. 拉普拉斯变换的符号表示

- 基于Sympy库得到解析解
  - 反变换（Fs ->ft）：inverse_laplace_transform(Fs, s, t)
  - 返回值：ft表达式

$$F(s)=\frac{s^2}{(s+2)(s+1)^2} \Longrightarrow f(t)=4\mathrm{e}^{-2t}-3\mathrm{e}^{-t}+t\,\mathrm{e}^{-t}$$

t*exp(-t)*Heaviside(t) - 3*exp(-t)*Heaviside(t) + 4*exp(-2*t)*Heaviside(t)

$$F(s)=\frac{s^3+5s^2+9s+7}{s^2+3s+2} \Longrightarrow f(t)=\delta'(t)+2\delta(t)+2\mathrm{e}^{-t}u(t)-\mathrm{e}^{-2t}u(t)$$

3*DiracDelta(t) + 2*exp(-t)*Heaviside(t) - exp(-2*t)*Heaviside(t)

有误，无法正确得到多项式项

例1

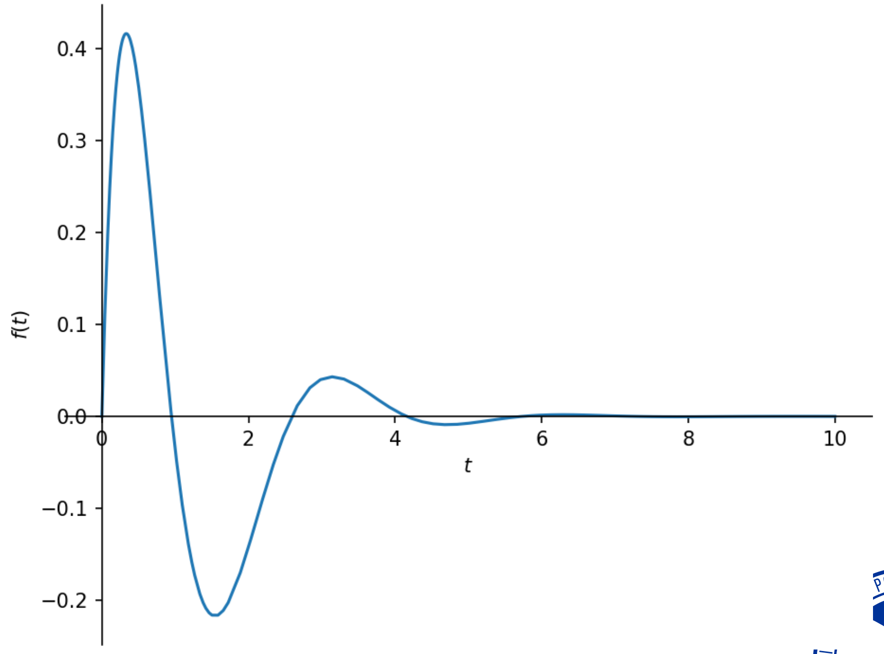
已知系统的传输函数为$H(s)=\dfrac{3s+1}{s^2+2s+5}$，求该系统对激励信号$x(t)=\mathrm{e}^{-3t}u(t)$的响应。

解：

$$X(s)=\mathscr{L}\left[x(t)\right]$$

$$Y(s)=H(s)X(s)$$

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[Y(s)\right]$$



2. 拉普拉斯变换的部分分式展开法

```
        b(s)     b[0] s**(M) + b[1] s**(M-1) + ... + b[M]
H(s) = ------ = --------------------------------------------
        a(s)     a[0] s**(N) + a[1] s**(N-1) + ... + a[N]
```

关键：找到极点，并找出各项分式的系数

r,p,k =scipy.signal.residue(*b, a, tol=0.001*)

返回值：r（分式系数）,p（极点）,k(直接多项式系数)

逆运算： **b,a = signal.invres**

▶ 2. 拉普拉斯变换的部分分式展开法

$$F(s)=\frac{s^2}{(s+2)(s+1)^2}=\frac{4}{s+2}+\frac{-3}{s+1}+\frac{1}{(s+1)^2}$$

[-3.+0.j 1.+0.j 4.+0.j] [-1.+0.j -1.+0.j -2.+0.j] []

注意对于重根系数的排列可以看作“升幂”顺序

$$\Longrightarrow \quad f(t)=4\mathrm{e}^{-2t}-3\mathrm{e}^{-t}+t\,\mathrm{e}^{-t}$$

poly: 由根（极点）形式得到多项式的形式，输出为多项式的系数，和roots函数是反函数

```
roots = np.poly([-2,-1,-1])
```

得到**[1. 4. 5. 2.]**

2. 拉普拉斯变换的部分分式展开法

$$F(s)=\frac{s^2+3}{(s+2)(s^2+2s+5)} \quad =\frac{1.4}{s+2}+\frac{-0.2+0.4j}{s+1-\mathrm{j}2}+\frac{-0.2-0.4j}{s+1+\mathrm{j}2}$$

[1.4+0.j -0.2+0.4j -0.2-0.4j] [-2.+0.j -1.+2.j -1.-2.j] []

根据公式：

$$f_{\mathrm{C}}(t)=L^{-1}\left[\frac{A+jB}{s+\alpha-\mathrm{j}\beta}+\frac{A-jB}{s+\alpha+\mathrm{j}\beta}\right]=\mathrm{e}^{-\alpha t}\left[2A\cos(\beta t)-2B\sin(\beta t)\right]$$

$$\Rightarrow \quad f(t)=\frac{7}{5}\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-t}\left[-\frac{2}{5}\cos(2t)-\frac{4}{5}\sin(2t)\right]$$

简化计算：

```
roots = np.roots([1,2,5])
a = np.poly([-2,roots[0],roots[1]])#这里手动确定了roots中的根数量
```

2. 拉普拉斯变换的部分分式展开法

$$F(s)=\frac{s^3+5s^2+9s+7}{s^2+3s+2}=s+2+\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

[2. -1.] [-1. -2.] [1. 2.]

注意返回值中k的顺序，可以看作是求导次数的“降序”

$$\Longrightarrow \quad f(t)=\delta'(t)+2\delta(t)+2\mathrm{e}^{-t}u(t)-\mathrm{e}^{-2t}u(t)$$

例3

某系统的传递函数为$H(s)=\dfrac{4s^2+4s+4}{s^3+3s^2+2s}$，求系统的单位阶跃响应。

解：$$Y(s)=X(s)H(s)=\frac{-3}{s+2}+\frac{4}{s+1}+\frac{-1}{s}+\frac{2}{s^2}$$

```
from scipy import signal
r,p,k = signal.residue([0,4,4,4],[1,3,2,0,0])
print(r,p,k)
```

3. 连续LTI系统的表示与分析

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n r(t)}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1} r(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} + a_0 r(t)$$

$$= b_m \frac{\mathrm{d}^m e(t)}{\mathrm{d}t^m} + b_{m-1}\frac{\mathrm{d}^{m-1} e(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} + b_0 e(t)$$

系统的传递函数可以表示为

$$H(s) = \frac{R(s)}{E(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

系数a_i和b_j以递降的次序存入向量A和B

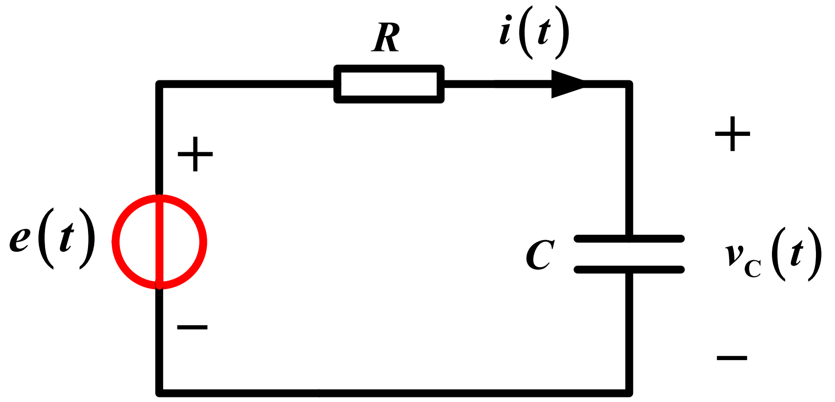
$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 \end{bmatrix} \quad \mathrm{B}=\begin{bmatrix} b_m & b_{m-1} & \cdots & b_0 \end{bmatrix}$$

例4：求冲激响应

$$\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}+av_C(t)=ae(t)$$

$$\Downarrow$$

$$sV_C(s)+aV_C(s)=aE(s)\Rightarrow H(s)=\frac{V_C(s)}{E(s)}=\frac{a}{s+a}$$




```
system = ([a], [1, a])
t, y = signal.impulse(system, T=t1)
```

3. 连续LTI系统的表示与分析

- LTI系统可以利用H(s)表示，即利用传输函数（ Transfer Function ）表示，在不同的库中有不同的表达方式和属性语法。
  - 一般利用B、A系数数组表示
  - 也有一些库有LTI的概念，但和传输函数的用法是类似的
- 有些库（scipy、control）提供了利用z、p、k（增益）的系统表示
  - 互转功能：
  - b, a = signal.zpk2tf(z, p, k)
    z, p, k = signal.tf2zpk(b, a)

3. 连续LTI系统的表示与分析

- sympy.physics.control.Lti：
    - TransferFunction
- Control:
    - tf
- Control.matlab:
    - TransferFunction
- Scipy. Signal：
    - Lti/dlti
    - TransferFunction

- LTI系统的常见分析需求：
    - H(s)的零极点
    - zeros/poles/pzmap等
    - 频响特性分析和频响特性波特图
    - freqs/ freqresp /bode
    - 冲激响应、阶跃响应和求具体输入信号的响应
    - Impulse/step/lsim
- 不同库和子模块的函数名和语法有差异
- 其他分析需求还包括：
    - （控制系统的）稳定性,可控性与可观测性等

Scipy中的连续/离散系统分析方法（对比）

连续系统	离散系统
lti系统分析（方法名均为：bode、freqresp、impulse、step等）	
Lti	dlti
TransferFunction分析（基于lti或B/A数组等）	
Impulse/step/lsim/freqresp/bode	dImpulse/dstep/dlsim/dfreqresp/dbode
Filter design类方法	
Freqs/freqs_zpk	Freqz/freqz_zpk
Residue/invres	Residuez/invresz

例5：分析系统的频响特性、零极点等

$$H(s)=\frac{s^2+1}{s^4+4s^3+6s^2+5s+2}$$

基于Sympy实现：

```
tf1 = TransferFunction(s**2 + 1, s**4 + 4*s**3
+ 6*s**2 + 5*s + 2, s)
#零极点图
pole_zero_plot(tf1)
#波特图
bode_plot(tf1, initial_exp=0.2, final_exp=0.7)
#冲激响应
impulse_response_plot(tf1)
```

基于Contol实现：

```
sys = ct.tf(b,a)
#波特图
Gmag, Gphase, Gomega  =
ct.bode_plot(sys,dB=True,margins=True,Hz=False)
plt.show()
#零极点图
zp = ct.pzmap(sys, plot=True ,title="零极点图",)
plt.show()
```

例5：分析系统的频响特性、零极点等

$$F(s)=\frac{s^2+1}{s^4+4s^3+6s^2+5s+2}$$

基于Scipy实现：

```
ys  = signal.lti(b, a)

'''
#波特图
输出为角频率、以分贝[dB]表示的幅度和以角度[deg]表示的相位
'''
omega, mag, phase = sys.bode(w = np.logspace(-1, 2, 1000) )
p = sys.poles
z = sys.zeros
```

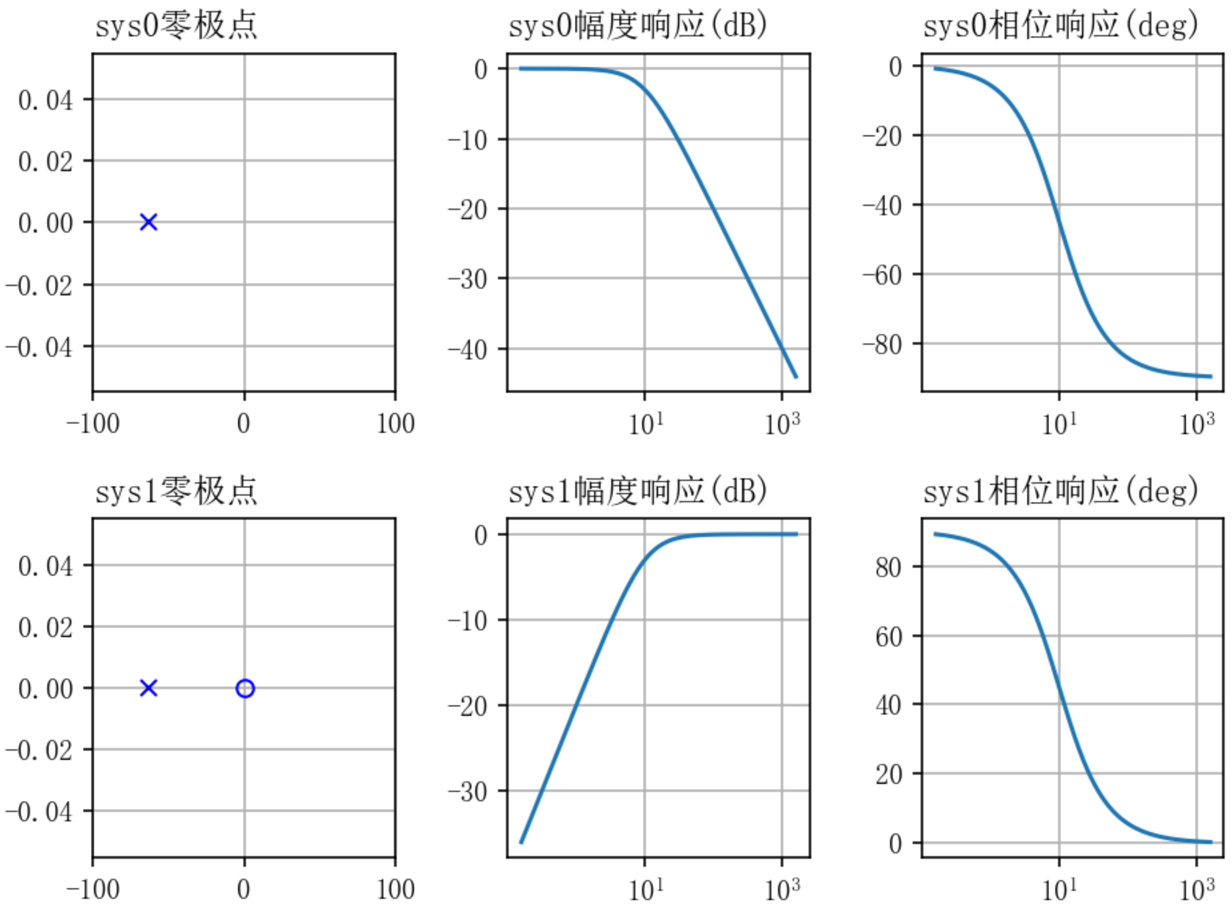
注意Scipy. Signal方法有连续和离散系统的区别

例如lti和dlti

例6：一阶系统的零极点和频响特性

$$H(s)=\frac{\omega_c}{s+\omega_c}$$

$$H(s)=\frac{s}{s+\omega_c}$$



例7：二阶系统的频响特性

$$H(s)=\frac{ks}{(s+\omega_{cl})(s+\omega_{ch})}$$

一个低通和一个高通级联

方法1，直接定义bpf:

```
wpl = 10 * 2 * np.pi
wph = 100 * 2 * np.pi

'''bpf的表示'''
bpf_a = np.poly([-wpl,-wph])
bpf_b = [wph,0]
bpf = signal.lti(bpf_b, bpf_a)
```

- 方法2，体现系统的级联特性：

- 如何表现出级联关系？
- 根据卷积定理，级联系统的H(jw)是乘法关系
- 则幅度谱为两个子系统的幅度谱之积，**但如果取分贝坐标，则为加法关系**
- 相位谱为两个子系统的相位谱之和
- 零极点为所有零极点的总和
    - 零极点相消情况？

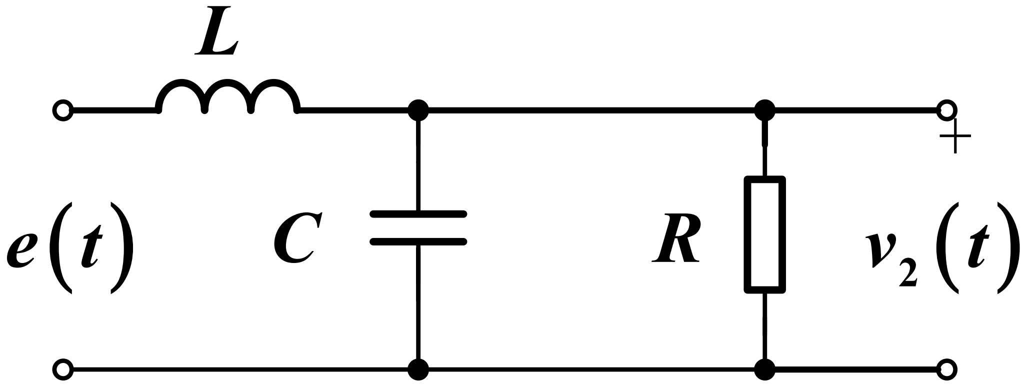
例7：二阶系统的频响特性

下图所示网络中，L=2H，C=0.1F，R=20Ω。

- 写出电压转移函数

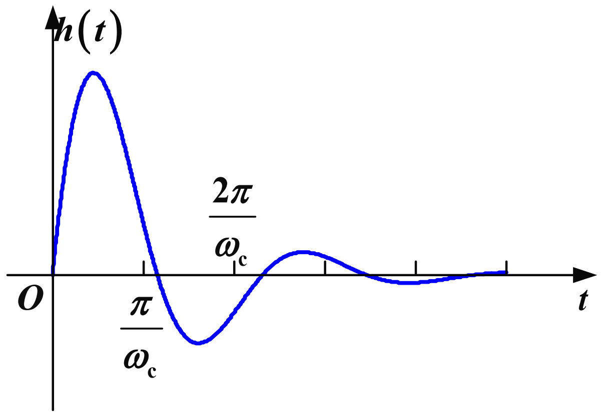
$$H(s)=\frac{V_2(s)}{E(s)}=\frac{R}{RLCs^2+Ls+R}$$

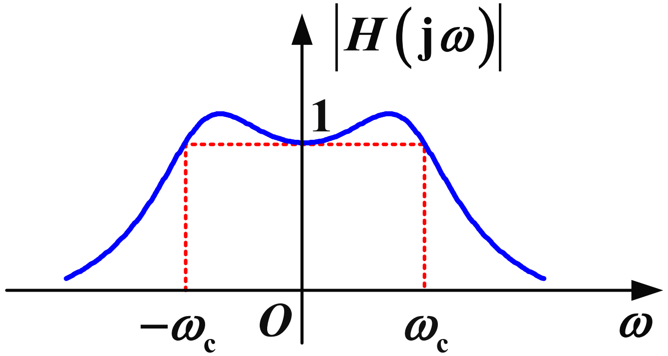
- 求冲激响应、阶跃响应。
- 画频率响应特性曲线

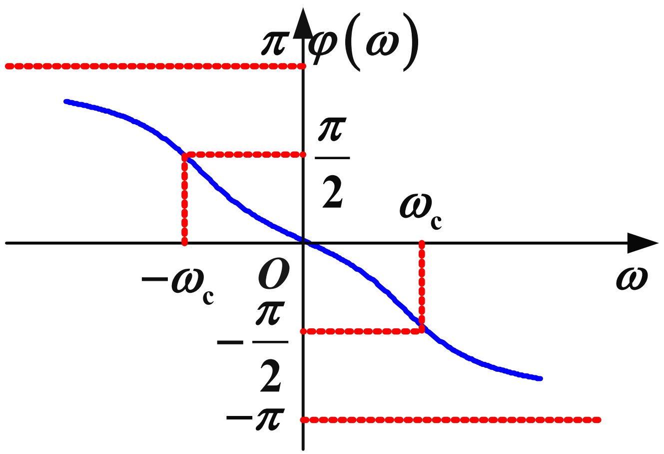


▶ 例7

当网络满足 $R=\sqrt{L/C}$，且令 $\omega_c=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ 其幅频特性与相频特性近似理想低通滤波器。







例8：有源低通滤波器

- 如何描述串联系统？

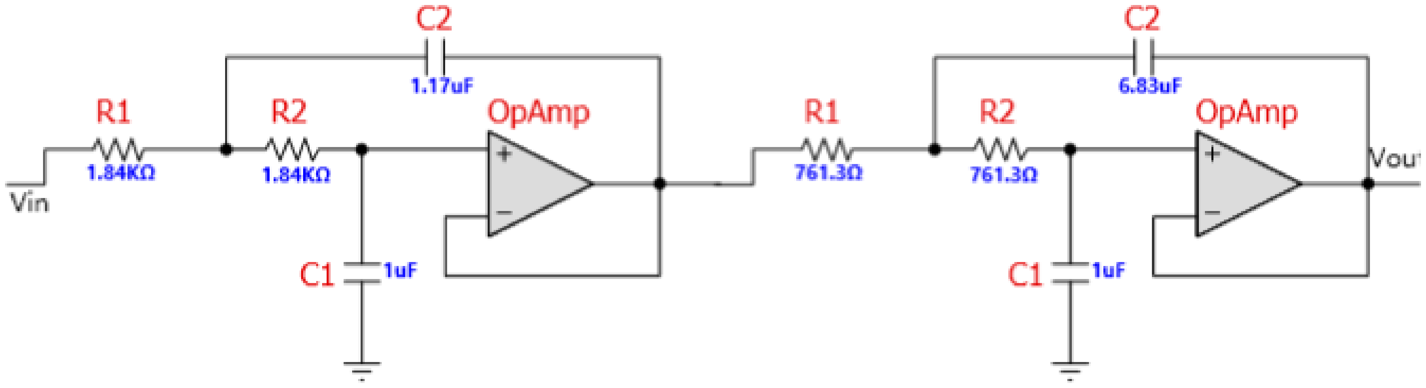
滤波器1:

$R1 = 1.84k\Omega$

$R2 = 1.84k\Omega$

$C1 = 1\mu F$

$C2 = 1.17\mu F$



Filter Stage:	1	Filter Stage:	2
Passband Gain	1	Passband Gain	1
Cutoff Frequency	80 Hz	Cutoff Frequency	80 Hz
QualityFactor	0.54	QualityFactor	1.31
Filter	Butterworth	Filter	Butterworth
Circuit	SallenKey	Circuit	SallenKey
Min GBW	4.32 kHz	Min GBW	10.48 kHz

滤波器2:

$R1 = 761.3\Omega$

$R2 = 761.3\Omega$

$C1 = 1\mu F$

$C2 = 6.83\mu F$

$$H(s) = \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2 s^2 + C_1 (R_1 + R_2) s + 1}$$

▶ 例9：二阶系统的阻尼比

$$H(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

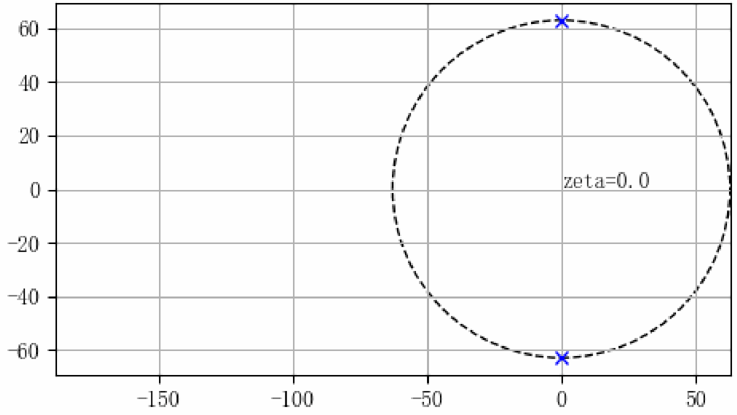
ζ :阻尼比　　(\zeta)

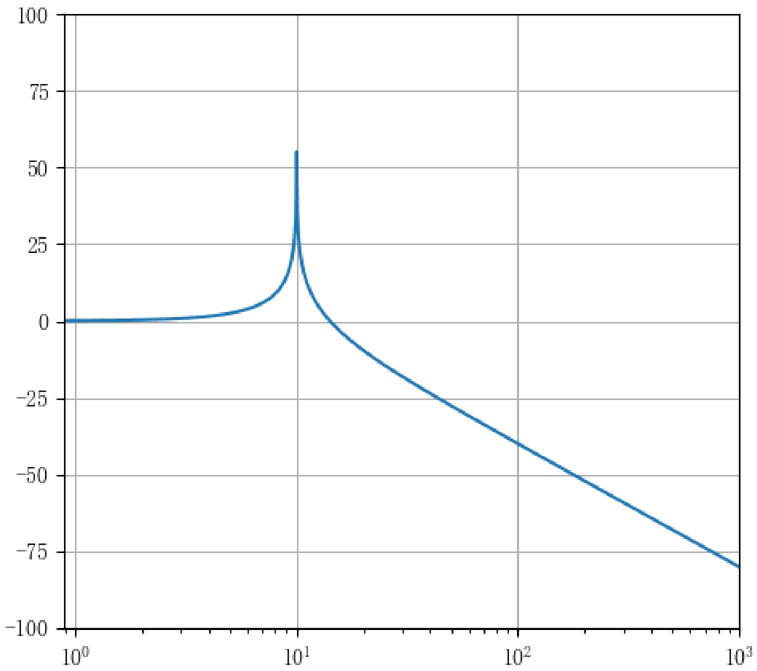
ω_n :自然频率

•阻尼比ζ和自然频率ω_n的值完全确定了极点的位置，因此也就确定了这个系统的特性行为。

•极点位置是如何影响系统的频率响应特性的？

例9





当$\zeta < 1$，$D(s)$有一对共轭复根

当$\zeta > 1$，$D(s)$有一对实根

例7：巴特沃兹滤波器

对于频率选择性滤波来说，巴特沃兹滤波器是广泛应用的一类连续时间LTI系统。它们在频率响应上的简单解析形式从工程立场来说，使巴特沃兹滤波器最具吸引力。

一个N阶巴特沃兹低通滤波器其频率响应的幅值满足

$$\left|H(\mathrm{j}\omega)\right|^2=\frac{1}{1+\left(\mathrm{j}\omega/\mathrm{j}\omega_c\right)^{2N}}$$

如何确定其极点的位置？
如何根据极点分布得到H(s)
如何画出频响特性

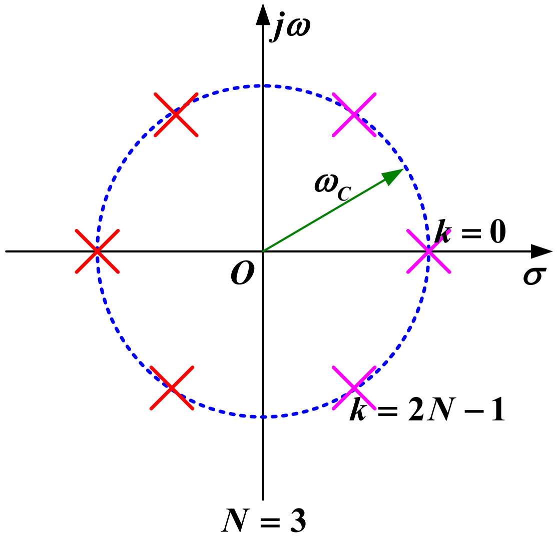
$$|H(\mathrm{j}\omega)|^2=\frac{1}{1+(\mathrm{j}\omega/\mathrm{j}\omega_c)^{2N}}$$

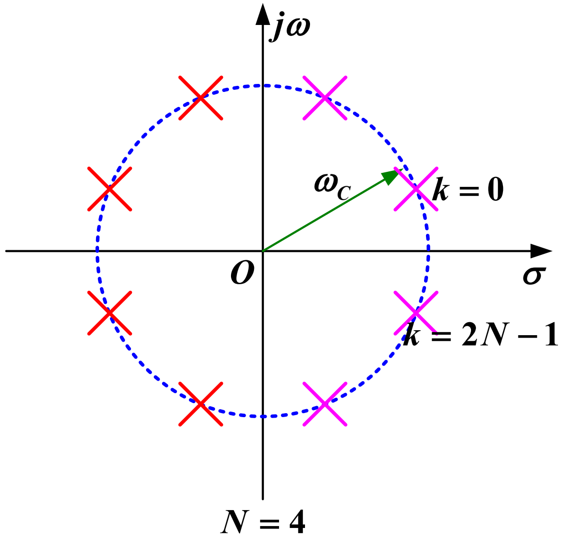
▶ 例7：巴特沃兹滤波器

$H(s)H(-s)$有$2N$个极点，等间隔地分布在半径为ω_C的圆上；

若极点p属于$H(s)$，则相应虚轴对称的另一个极点一定属于$H(-s)$。

对于稳定系统极点分布在s平面的左半平面；





poles: $p_k=\omega_C e^{j\frac{2\pi}{2N}\left(\frac{N+1}{2}+k\right)}\quad k=0,1,\cdots,2N-1$

例13

- 思路1：
- 直接利用freqs_zpk函数和p、z、k即可得到频响特性

- 手动计算正确的极点位置，存入list或np.array，设为p
  - 注意极点都在左半平面
- 不存在零点，即z=[]
- K应保证 $|H(\mathrm{j}0)|=1$ 可以设置：k=np.power(wc,N)
- 利用zpk2tf函数，可以得到b和a

- 思路2：
  - 利用poly函数得到A系数数组
  - 基于上面分析，b=np.power(wc,N)
  - 直接利用系统函数进行分析

- 思路3：
  - b, a = signal.butter(3, 10, 'low', analog=True)

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+(j\omega/j\omega_c)^{2N}}$$

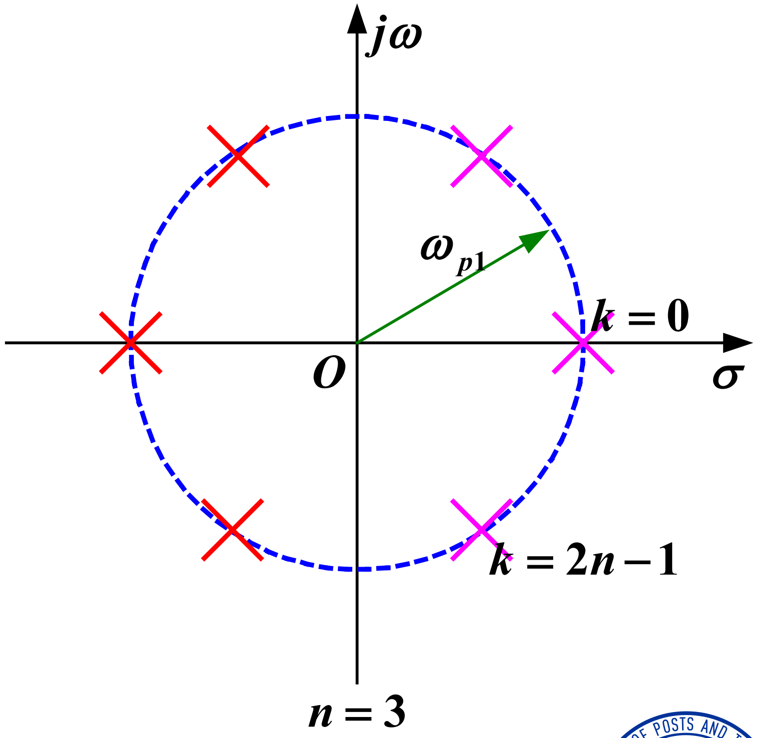
例7：巴特沃兹滤波器

Given that $|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+64\omega^6}$, determine the analog filter system function $H(s)$.

SOLUTION: $$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+64\omega^6} = \frac{1}{1+\left[\left(\frac{\omega}{0.5}\right)^2\right]^3}$$

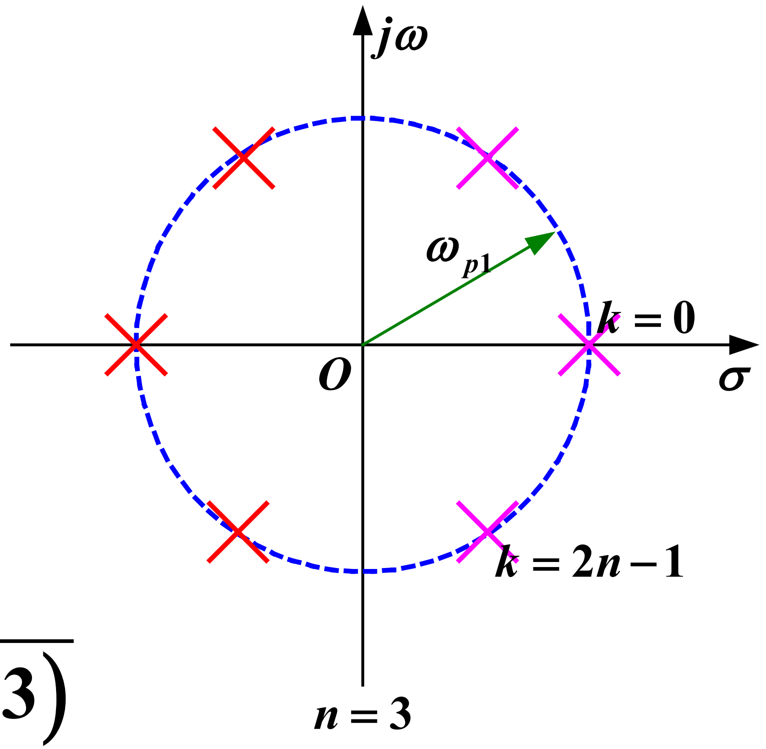
$$\boxed{\begin{matrix} N=3 \\ \omega_c = 0.5 \end{matrix}}$$

$$p_k = \omega_C e^{j\frac{2\pi}{2N}\left(\frac{N+1}{2}+k\right)} \Rightarrow \begin{aligned} p_2 &= 0.5e^{j\frac{2\pi}{3}} \\ p_3 &= 0.5e^{j\frac{3\pi}{3}} \\ p_4 &= 0.5e^{j\frac{4\pi}{3}} \end{aligned}$$



▶ 例7：巴特沃兹滤波器

$$p_2 = 0.5e^{j\frac{2\pi}{3}} \quad p_3 = 0.5e^{j\frac{3\pi}{3}} \quad p_4 = 0.5e^{j\frac{4\pi}{3}}$$



$$H(s) = \frac{\omega_c^{\ N}}{(s-p_2)(s-p_3)(s-p_4)}$$

$$= \frac{(0.5)^3}{(s+0.25-j0.433)(s+0.5)(s+0.25+j0.433)}$$

$$= \frac{0.125}{(s+0.5)(s^2+0.5s+0.25)}$$

学好信号与系统
低通高通路路通

北京邮电大学信号与系统

智慧教学研究组