

第一题

证明：

对于 X 的近似解 $X^* = \arg \min_X \|AX - B\|_2^2$ ，可得最优条件为 $A^T * A * X^* = A^T * B$

由于 A 矩阵是列满秩的矩阵，故 $(A^T * A)^{-1} * (A^T * A)$ 不是零矩阵。

等式两边同时左乘 $(A^T * A)^{-1}$ ，可得

$$X^* = (A^T * A)^{-1} * A^T * B$$

$$\text{令 } A^+ = (A^T * A)^{-1} * A^T$$

即证

$$X^* = A^+ * B$$

第二题

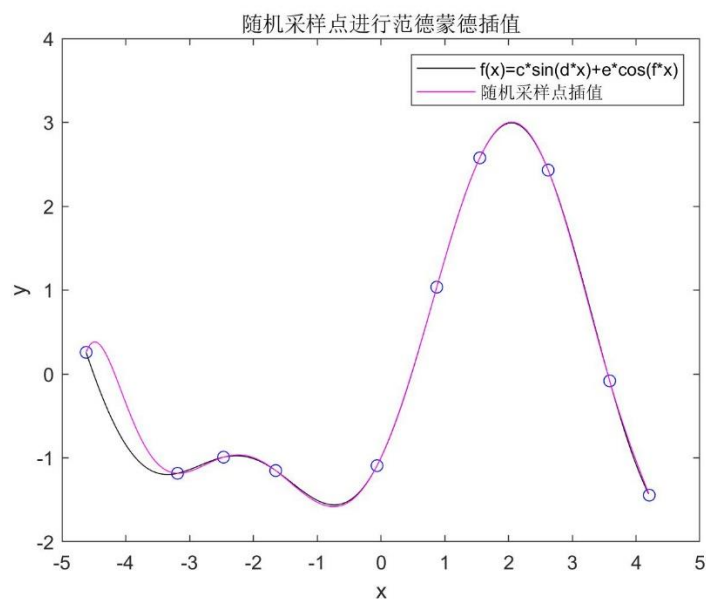
取区间 $[-5, 5]$,

对于 $f(x) = c * \sin(d * x) + e * \cos(f * x)$ ，取 $c=2, d=0.8, e=-1, f=1.5$ ，11 个采样点与 20 个实验点。

方案一：随机采样点

实验结果如下图所示（每次运行的图像和平均误差都不同）：

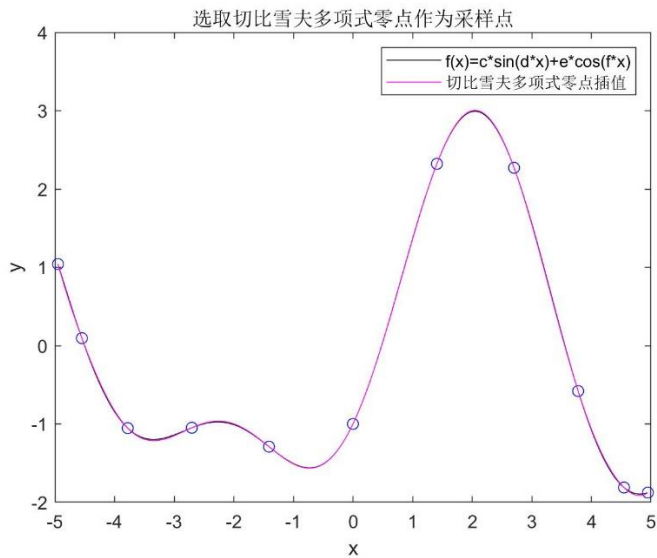
平均误差为 0.0343



方案二：取切比雪夫多项式零点作为采样点

实验结果如下图所示：

平均误差为 0.0065



对于上述两个方案,取切比雪夫多项式零点作为采样点的方案使用的范德蒙德多项式插值绘制的曲线更加贴近真实值,误差更小。

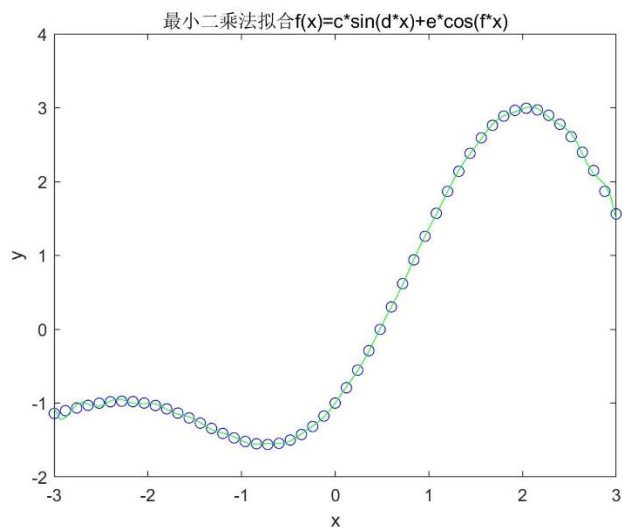
第三题

取区间 $[-3, 3]$,

对于 $f(x) = c * \sin(d * x) + e * \cos(f * x)$, 取 $c=2, d=0.8, e=-1, f=1.5$, 31 个采样点与 20 个实验点。

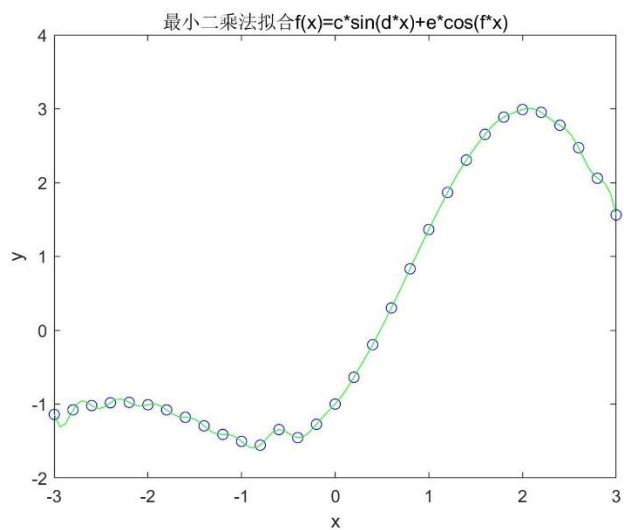
实验结果如下图所示:

平均误差为 0.0291



在这里对 Y 增加一点扰动 ($y_i(13) = y_i(13) + 0.2;$), 实验结果如下图所示:

平均误差为 0.0355



对于扰动后的图像，可以看出，拟合曲线只在扰动部分产生较大变化，其他部分的拟合效果较好，误差变化较小。