数学部分总结

1. **反演与容斥**
   1. 综述：
      1. 定义：反演就是序列函数的互反关系，即转移矩阵互逆。
      2. 作用：将“恰好”之类的严格，放宽成更简洁的条件，方便统计。
      3. 另一种理解：求出一个不是那么正确的答案，用反演来修正式子。
      4. 分类：二项式反演、斯特林反演、莫比乌斯反演、欧拉反演、Min-max 反演、集合反演等等，下面分别介绍。
   2. 二项式反演：
      1. 形式：
      2. 使用：题目中若是出现“恰好” 个满足条件，就可以反演成“指定” 个满足条件，方便计数；但是实际中可能会出现没想到反演的情况。
      3. 利用（差）卷积加速二项式反演：将式子化成如下形式，就可以是 。
   3. 斯特林反演：

同理，可以目瞪出它的剩下三种形式；使用上比较有技巧（指我不会）。

* 1. 数论反演：
     1. 莫比乌斯反演：

可以用来解决背包计数的逆问题，并且可以 计算。

* + 1. 欧拉反演：

可以用于解决带有 的一类计数问题，例如 2020 D2T3。

* 1. Min-max 容斥：

另有拓展 Min-max 容斥：

喜闻乐见，它对于期望也成立；对于求 个东西期望什么时候全部完工之类问题的时候就可以使用；数据范围也不一定特别小，因为有一些小trick。

* 1. 集合反演：

从而可以得到一个重要式子：

可以用来带“交集”形式的式子，详情请见《数树》。

1. **经典数列：**
   1. 组合数：
      1. 定义：。
      2. 递推式：
      3. 求和式中提取公因式常用的式子：
      4. 生成函数形式（用于解决相当多的组合数求和/卷积）：

*例如在2017的《组合数问题》中就可以用这种方法快速解决问题。*

* + 1. Lucas 定理：
  1. 第一类斯特林数：
     1. 定义： 个元素分成 个环的方案数，记作 。
     2. 递推式：
     3. 重要式子：
     4. 关于生成函数：咕咕咕
  2. 第二类斯特林数：
     1. 定义： 个元素分成 个非空集合的方案数，记作 。
     2. 递推式：
     3. 重要式子：
     4. 关于生成函数：咕咕咕。
  3. 贝尔数：咕咕咕。
  4. 伯努利数：咕咕咕。
  5. 斐波那契数：
     1. 定义：
     2. 性质：

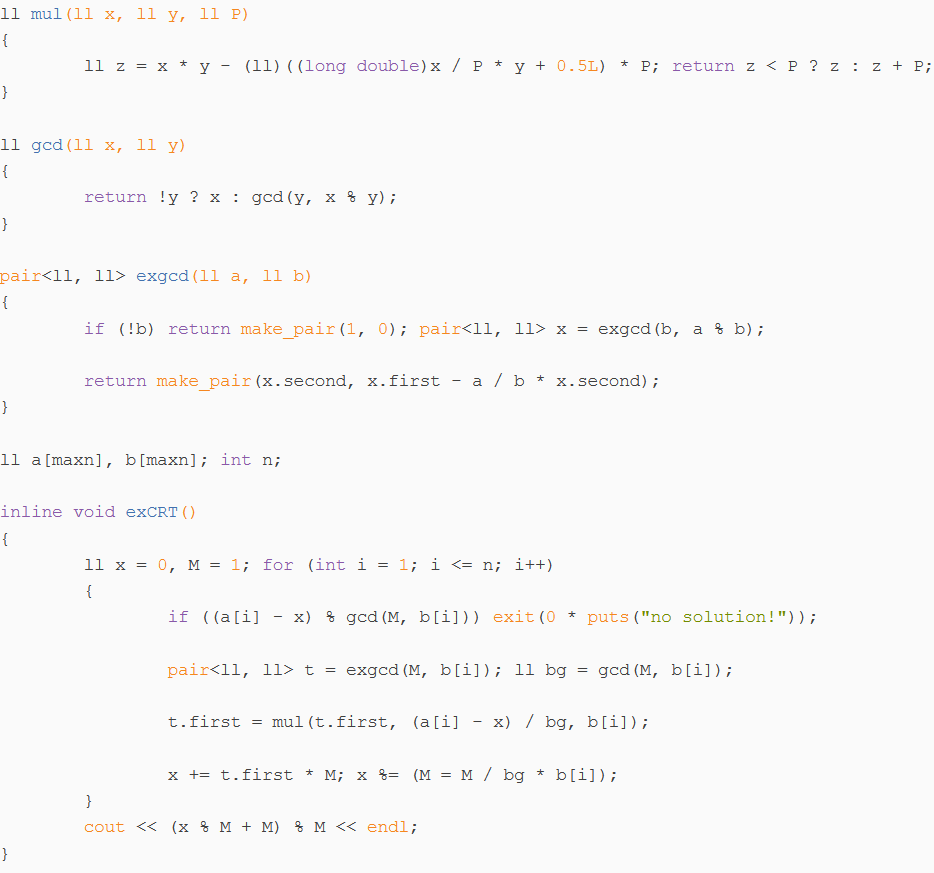
1. 数论部分：
   1. 线性求逆元：

线性求出集合 的逆元。

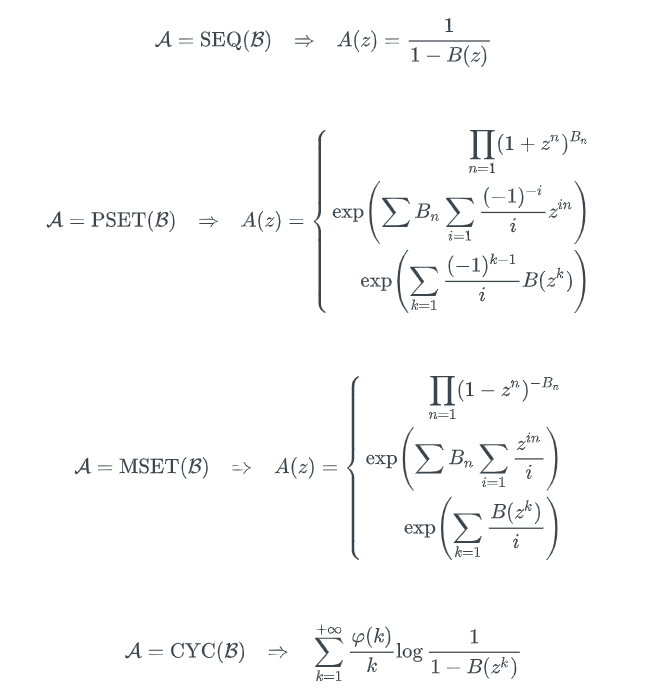
先求出前缀积数组 ，再求出 的逆元 ；

再根据 求出整个的前缀逆元；

最后根据 得出整个序列的逆元。

* 1. 扩展欧拉定理：
  2. 快速乘、扩展欧几里得与扩展中国剩余定理的板子：
  3. 迪利克雷卷积相关：
  4. 线性筛与杜教筛：
     1. 线性筛：只要函数满足积性就可以使用线性筛。
     2. 杜教筛：设 和 是积性函数， 是 的前缀和，于是：
  5. 原根：
     1. 阶数：设 表示最小的 满足 。
     2. 原根：满足 的所有 。
     3. 原根判定： 是 的原根当且仅当对于任意 的非自身且非 因数都满足 。
     4. 原根大小：。
  6. BSGS：用于求解 ，本质上就是分块。

1. 生成函数：
   1. Ordinary Generating Function
      1. 定义：，形容一个无标号组合类。
      2. 加法运算：表示合并两个集合。
      3. 乘法运算：表示两个无标号集合的笛卡尔积。
      4. 常用的组合构造：



* 1. Exponential Generating Function
     1. 定义：，形容一个有标号组合类。
     2. 加法：定义同上。
     3. 乘法：表示有标号类的有序合并。
     4. 重要的组合构造：基本同理。例如： 表示 构造， 表示有标号无顺序组合等等。
     5. 关于泰勒展开：下面是一些常用式子的 EGF 的封闭形式：
  2. 常用方法：
     1. 组合构造的逆构造（方程解）：
        1. 已知 和 ，那么就可以用 求出 。
        2. 背包的 和 （即 01背包和完全背包）均可以用 和莫比乌斯反演求逆。
        3. 列出方程来大力解出生成函数的封闭形式。
     2. 位移算子：
        1. OGF 的平移算子：。
        2. OGF 的按位放大算子：。
        3. EGF 的平移算子：。

（这也是为什么会有需要解微分方程的情况，也就出现了多项式 之类东西的组合意义——微分方程的一个解）。

* + 1. 取模的 Trick：
       1. 对 取模来实现下面这类求和：
       2. 循环卷积：对于模 意义下的多项式乘法。
    2. 拉格朗日反演：

可以用来解很多的方程；第二个式子则可以用来求出与解相关的式子的值。

* + 1. Equivalence theorem (Kleene–Rabin–Scott) 等价定理：

设 为一个确定性有限状态自动机的矩阵表示， 是终止节点的集合，，于是可以得出这个字符串类的 OGF 是：

本质上和高斯消元非常类似。