Лабораторная работа 4. Методы решения уравнения переноса. Вариант 2, задание 9

Петраков Иван
МФТИ

2021
Апрель

Описание задачи

Описание задачи представлено на рисунке 1:

Задание № 9

Дифференциальная задача

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=e^{t};\quad 0<t\le 1,\ \ 0<x\le 1,\\ &u(x,0)=x+1;\ u(0,t)=e^{t}-t. \end{aligned}\right\}$$

Разностная схема

$$D_h=\left\{\left(x_l,t^n\right):x_l=hl,hL=1,l=\overline{0,L};\ t^n=n\tau;\ \tau N=1,n=\overline{0,N}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned} &u_l^{n+1}=u_l^n+\frac{\tau}{2h}\left(-u_{l-2}^n+4u_{l-1}^n-3u_l^n\right)+\frac{\tau^2}{2h^2}\left(u_{l-2}^n-2u_{l-1}^n+u_l^n\right)+\\ &+\tau e^{t^n}\left(1+\frac{\tau}{2}\right),\ l=\overline{2,L},n=\overline{0,N-1};u_l^0=x_l+1,\ l=\overline{0,L};\\ &u_0^n=e^{t^n}-t^n,\ n=\overline{1,N};u_1^n=?,\ n=\overline{1,N}. \end{aligned}\right\}$$

Аналитическое решение

Воспользуемся предложенной научной литературой. Ищем характеристики:

$$dt=dx=\frac{du}{e^t} \tag{1}$$

$$\begin{cases} v_1(t,x)=t-x\\ v_2(t,u)=u-e^t \end{cases} \tag{2}$$

С помощью характеристик можно найти конечное аналитическое решение задачи:

$$u=e^t+x-t \tag{3}$$

Подстановкой решения в изначальную задачу убеждаемся, что решение найдено верно.

Исследование на аппроксимацию

Разложим след по Тейлору:

$$\begin{cases} u_l^{n+1} = u_l^n + \dot{u}_l^n \tau + \ddot{u}_l^n \frac{\tau^2}{2} + O(\tau^3) \\ u_{l-1}^n = u_l^n - u_l'^n h + u_l''^n \frac{h^2}{2} + O(h^3) \\ u_{l-2}^n = u_l^n - u_l'^n 2h + u_l''^n 2h^2 + O(h^3) \end{cases} \tag{4}$$

Подставив в схему, получим

$$r = \dot{u}_l^n + \frac{\ddot{u}_l^n}{2}\tau + O(\tau^2) + u_l'^n - O(h^2) - \frac{\tau}{2}u_l''^n - \frac{\tau}{2}O(h) - e^{t^n} - \frac{e^{t^n}}{2}\tau \tag{5}$$

Учтя, что

$$\dot{u}_l^n + u_l'^n - e^{t^n} = 0 \tag{6}$$

получим второй порядок аппроксимации по h и τ.

Исследование на устойчивость

Воспользовавшись формулой (46) из предложенной научной литературы (либо проделав все действия заново), получим, что условие устойчивости есть

$$\frac{\tau}{h} = \sigma \leq 2 \tag{7}$$

Дополнительные условия

Для решения задачи необходимо задать еще одно условие на u_1^n. Для этого разложим след по Тейлору:

$$u_1^n = u_0^n + u_0'^n h + u_0''^n \frac{h^2}{2} + O(h^3) \tag{8}$$

Такое разложение не нарушает наш порядок аппроксимации. Здесь,

$$\begin{cases} u_0^n = e^{t^n} - t^n \\ u_0'^n = -\dot{u}_0^n + e^{t^n} = -e^{t^n} + e^{t^n} + 1 = 1 \\ u_0''^n = 0 \end{cases} \tag{9}$$

Отсюда получим, что

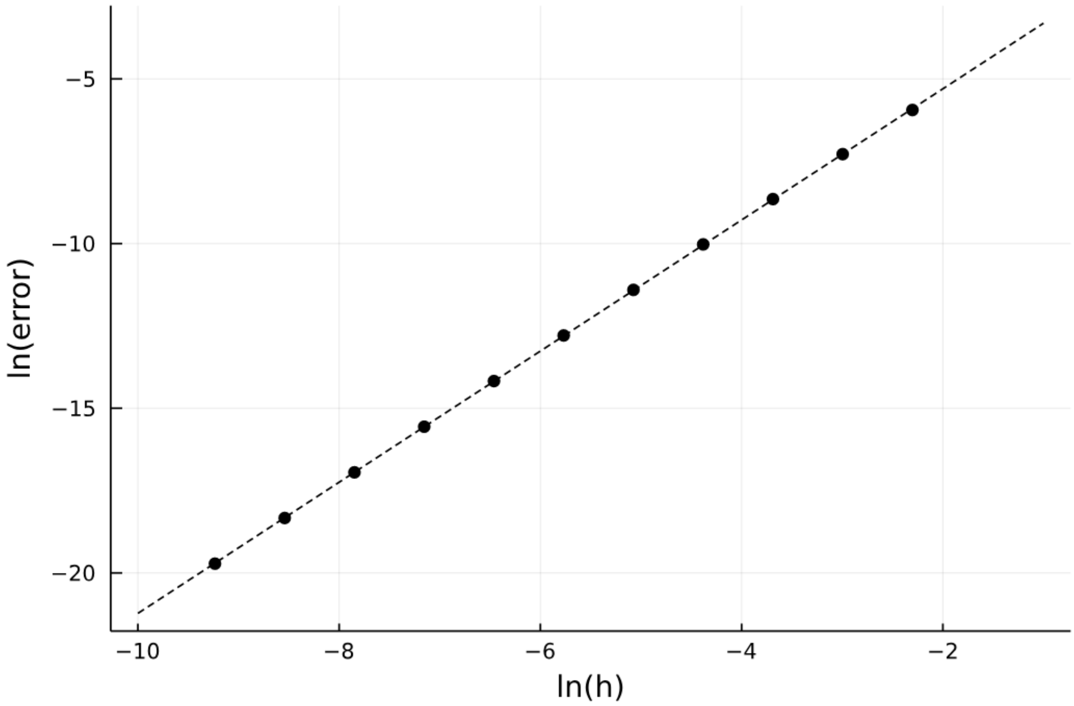
$$u_1^n = e^{t^n} - t^n + h \tag{10}$$

Программная реализация и практические исследования

Используя написанную мной на языке Julia1.6.0 программу, получим решение на последовательно удваеваемых сетках при $\sigma = 1.0$, что удовлетворяет условию спектральной усточивости.

Результаты представлены в файле `6sem_lab4_solution_main.txt`.

Ответим на поставленные вопросы. Для ответа на вопрос про аппроксимацию построим график зависимости логарифма ошибки от логарифма шага. Тогда наклон аппроксимационной прямой в точности есть порядок сходимости.

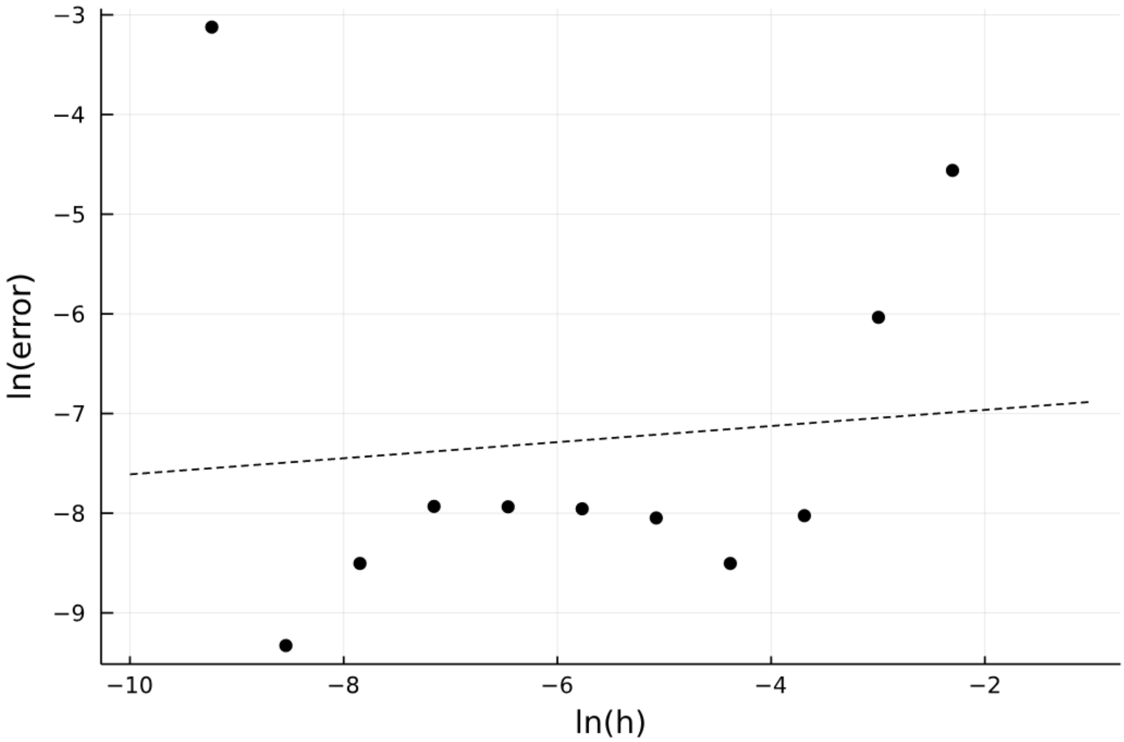


Уравнение прямой есть

$$fit(x) = -1.319 + 1.99084 \cdot x \tag{11}$$

Отсюда получаем второй порядок аппроксимации.

Далее, возьмем $\sigma = 2.001$. Решение при заданной так σ представлено в файле `6sem_lab4_solution.txt`. Видно, что при нарушении условия устойчивости нарушается сходимость решения. Для данной σ также можно построить график зависимости логарифма ошибки от логарифма шага, причем на нем достаточно хорошо наблюдается отсутствие сходимости.



При задании дополнительных разностных уравнений мы уже, на самом деле, оставили меньшее число слагаемых, чем это предполагалось, ведь третье слагаемое, соответствующее h^2 занулилось. Однако, при занулении второго слагаемого, соответствующего h порядок сходимости становится равным 1, что ухудшает порядок разностной схемы.

При изменении начальных условий результат не изменился, что связано, скорее всего, высоким порядком аппроксимации и достаточно большим количеством узлов, а зависимость от граничных условий, как было сказано выше, понижает порядок сходимости на 1.

Результаты и обсуждения

В данной работе найдено аналитическое решение поставленной задачи; разностная схема исследована на аппроксимацию, причем порядок аппроксимации, полученный из теоретических соображений и программно, одинаков; разностная схема исследована на устойчивость. Также найдены дополнительные условия, позволяющие детерминировать задачу. Были проведены практические исследования на основе программной реализации решения задачи, используя высокоуровневый язык программирования - Julia.