Лабораторная работа 5. Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона методом установления. Вариант 2

Петраков Иван
МФТИ

2021
Май

Описание задачи

Имеем задачу Дирихле для уравнения Пуассона:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -25\pi^2 sin(3\pi x) sin(4\pi y)| \\ u|_\Gamma = 0 \end{cases} \tag{1}$$

x и y заданы на отрезке от 0 до 1.

Аналитическое решение

Аналитическое решение можно подобрать, заметив, что можно искать решение в виде $u = a \cdot sin(3\pi x) sin(4\pi y)$. Тогда, подставив решение в таком виде в исходное уравнение, найдем, что $a = 1$. Итоговое аналитическое решение есть $u = sin(3\pi x) sin(4\pi y)$.

Программная реализация и практические исследования

В качестве разностной схемы рассмотрим:

$$\begin{cases} \frac{u^{n+1}_{l,m} - u^n_{l,m}}{\tau_n} = \frac{u^n_{l+1,m} - 2u^n_{l,m} + u^n_{l-1,m}}{h_x^2} + \frac{u^n_{l,m+1} - 2u^n_{l,m} + u^n_{l,m-1}}{h_y^2} + 25\pi^2 sin(3\pi x)(sin(4\pi y) \\ l = 1, 2, ..., L-1, m = 1, 2, ..., M-1, n = 0, 1, ..., N \\ u^0_{l,m} = \psi_{l,m}, l = 0, 1, ..., L, m = 0, 1, ..., M \\ u^n_{0,m} = u^n_{L,m} = u^n_{l,0} = u^n_{l,M} = 0, l = 1, 2, ..., L-1, m = 0, 1, ..., M, n = 0, 1, ..., N \end{cases} \tag{2}$$

Здесь ψ - произвольная функция, определенная в области интегрирования. Для удобства зададим ее равной нулю.

Определимся с оптимальными шагами по времени. Они задаются следующим выражением:

$$\tau_n = \frac{2}{2\pi^2 + 4(L^2 + M^2) + [4(L^2 + M^2) - 2\pi^2] cos(\frac{\pi(2n-1)}{2N})} \tag{3}$$

Для придания устойчивости необходимо изменить порядок следования элементов в полученной последовательности τ_n. Как это сделать - написано в предложенной к лабораторной работе литературы. Здесь же будет приведена итоговая последовательность с измененным порядком для каждой тройки L, M, N.

В нашем случае, ошибка ϵ задана равной 10^{-4}. Для придания устойчивости N оценивается как

$$N >= ln(\frac{2}{\epsilon}) / ln \frac{\sqrt{4(L^2 + M^2)} + \sqrt{2\pi^2}}{\sqrt{4(L^2 + M^2)} - \sqrt{2\pi^2}} \tag{4}$$

Поэтому, задавая набор L, M мы сразу определяем и необходимое значение N, и

набор τ_n.

Перейдем к расчетам. Их будем проводить на последовательно удваеваемых сетках L = M, начиная с L = 5, заканчивая L = 320.

```
----------------------------------------------------------------------------------------------------
N = 16, L = 5, M = 5
thetta(n) = [1.0, 31.0, 15.0, 17.0, 7.0, 25.0, 9.0, 23.0, 3.0, 29.0, 13.0, 19.0, 5.0, 27.0, 11.0, 21.0]
Numerical solution:
6×6 DataFrame
 Row │ 0.0      0.2        0.4        0.6        0.8        1.0
     │ Float64  Float64    Float64    Float64    Float64    Float64
─────┼──────────────────────────────────────────────────────────────
   1 │     0.0   0.0         0.0        0.0        0.0          0.0
   2 │     0.0   0.884718   -1.4315     1.4315    -0.884718     0.0
   3 │     0.0  -0.546786    0.884718  -0.884718    0.546786     0.0
   4 │     0.0  -0.546786    0.884718  -0.884718    0.546786     0.0
   5 │     0.0   0.884718   -1.4315     1.4315    -0.884718     0.0
   6 │     0.0   0.0         0.0        0.0        0.0          0.0
Analytical solution:
6×6 DataFrame
 Row │ 0.0      0.2        0.4        0.6        0.8        1.0
     │ Float64  Float64    Float64    Float64    Float64    Float64
─────┼──────────────────────────────────────────────────────────────
   1 │     0.0   0.0         0.0        0.0        0.0          0.0
   2 │     0.0   0.559017   -0.904508   0.904508  -0.559017     0.0
   3 │     0.0  -0.345492    0.559017  -0.559017    0.345492     0.0
   4 │     0.0  -0.345492    0.559017  -0.559017    0.345492     0.0
   5 │     0.0   0.559017   -0.904508   0.904508  -0.559017     0.0
   6 │     0.0   0.0         0.0        0.0        0.0          0.0
Error:
6×6 DataFrame
 Row │ 0.0      0.2       0.4       0.6       0.8       1.0
     │ Float64  Float64   Float64   Float64   Float64   Float64
─────┼──────────────────────────────────────────────────────────
   1 │     0.0  0.0       0.0       0.0       0.0          0.0
   2 │     0.0  0.325701  0.526996  0.526996  0.325701     0.0
   3 │     0.0  0.201295  0.325701  0.325701  0.201295     0.0
   4 │     0.0  0.201295  0.325701  0.325701  0.201295     0.0
   5 │     0.0  0.325701  0.526996  0.526996  0.325701     0.0
   6 │     0.0  0.0       0.0       0.0       0.0          0.0
Max error = 0.5269958645393001
----------------------------------------------------------------------------------------------------
```

```
----------------------------------------------------------------------------------------------------
N = 32, L = 10, M = 10
thetta(n) = [1.0, 63.0, 31.0, 33.0, 15.0, 49.0, 17.0, 47.0, 7.0, 57.0, 25.0, 39.0, 9.0, 55.0, 23.0, 41.0, 3.0, 61.0, 29.0, 35.
0, 13.0, 51.0, 19.0, 45.0, 5.0, 59.0, 27.0, 37.0, 11.0, 53.0, 21.0, 43.0]
Numerical solution:
6×6 DataFrame
 Row │ 0.0      0.2        0.4        0.6        0.8        1.0
     │ Float64  Float64    Float64    Float64    Float64    Float64
─────┼──────────────────────────────────────────────────────────────
   1 │     0.0   0.0         0.0        0.0        0.0          0.0
   2 │     0.0   0.624343   -1.01021    1.01021   -0.624343     0.0
   3 │     0.0  -0.385865    0.624343  -0.624343    0.385865     0.0
   4 │     0.0  -0.385865    0.624343  -0.624343    0.385865     0.0
   5 │     0.0   0.624343   -1.01021    1.01021   -0.624343     0.0
   6 │     0.0   0.0         0.0        0.0        0.0          0.0
Analytical solution:
6×6 DataFrame
 Row │ 0.0      0.2        0.4        0.6        0.8        1.0
     │ Float64  Float64    Float64    Float64    Float64    Float64
─────┼──────────────────────────────────────────────────────────────
   1 │     0.0   0.0         0.0        0.0        0.0          0.0
   2 │     0.0   0.559017   -0.904508   0.904508  -0.559017     0.0
   3 │     0.0  -0.345492    0.559017  -0.559017    0.345492     0.0
   4 │     0.0  -0.345492    0.559017  -0.559017    0.345492     0.0
   5 │     0.0   0.559017   -0.904508   0.904508  -0.559017     0.0
   6 │     0.0   0.0         0.0        0.0        0.0          0.0
Error:
6×6 DataFrame
 Row │ 0.0      0.2        0.4        0.6        0.8        1.0
     │ Float64  Float64    Float64    Float64    Float64    Float64
─────┼──────────────────────────────────────────────────────────────
   1 │     0.0  0.0         0.0        0.0        0.0          0.0
   2 │     0.0  0.0653258   0.105699   0.105699   0.0653258    0.0
   3 │     0.0  0.0403736   0.0653258  0.0653258  0.0403736    0.0
   4 │     0.0  0.0403736   0.0653258  0.0653258  0.0403736    0.0
   5 │     0.0  0.0653258   0.105699   0.105699   0.0653258    0.0
   6 │     0.0  0.0         0.0        0.0        0.0          0.0
Max error = 0.11113892056633368
----------------------------------------------------------------------------------------------------
```

N = 63, L = 20, M = 20

thetta(n) = [1.0, 125.0, 61.0, 65.0, 29.0, 97.0, 33.0, 93.0, 13.0, 113.0, 49.0, 77.0, 17.0, 109.0, 45.0, 81.0, 5.0, 121.0, 57.0, 69.0, 25.0, 101.0, 37.0, 89.0, 9.0, 117.0, 53.0, 73.0, 21.0, 105.0, 41.0, 85.0, 3.0, 123.0, 59.0, 67.0, 27.0, 99.0, 35.0, 91.0, 11.0, 115.0, 51.0, 75.0, 19.0, 107.0, 43.0, 83.0, 7.0, 119.0, 55.0, 71.0, 23.0, 103.0, 39.0, 87.0, 15.0, 111.0, 47.0, 79.0, 31.0, 95.0, 63.0]

Numerical solution:

6×6 DataFrame

Row	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
	Float64	Float64	Float64	Float64	Float64	Float64
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.0	0.574759	-0.929979	0.929979	-0.574759	0.0
3	0.0	-0.35522	0.574759	-0.574759	0.35522	0.0
4	0.0	-0.35522	0.574759	-0.574759	0.35522	0.0
5	0.0	0.574759	-0.929979	0.929979	-0.574759	0.0
6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Analytical solution:

6×6 DataFrame

Row	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
	Float64	Float64	Float64	Float64	Float64	Float64
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.0	0.559017	-0.904508	0.904508	-0.559017	0.0
3	0.0	-0.345492	0.559017	-0.559017	0.345492	0.0
4	0.0	-0.345492	0.559017	-0.559017	0.345492	0.0
5	0.0	0.559017	-0.904508	0.904508	-0.559017	0.0
6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Error:

6×6 DataFrame

Row	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
	Float64	Float64	Float64	Float64	Float64	Float64
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.0	0.0157416	0.0254704	0.0254704	0.0157416	0.0
3	0.0	0.00972883	0.0157416	0.0157416	0.00972883	0.0
4	0.0	0.00972883	0.0157416	0.0157416	0.00972883	0.0
5	0.0	0.0157416	0.0254704	0.0254704	0.0157416	0.0
6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Max error = 0.026781161447603896

N = 127, L = 40, M = 40

thetta(n) = [1.0, 253.0, 125.0, 129.0, 61.0, 193.0, 65.0, 189.0, 29.0, 225.0, 97.0, 157.0, 33.0, 221.0, 93.0, 161.0, 13.0, 241.0, 113.0, 141.0, 49.0, 205.0, 77.0, 177.0, 17.0, 237.0, 109.0, 145.0, 45.0, 209.0, 81.0, 173.0, 5.0, 249.0, 121.0, 133.0, 57.0, 197.0, 69.0, 185.0, 25.0, 229.0, 101.0, 153.0, 37.0, 217.0, 89.0, 165.0, 9.0, 245.0, 117.0, 137.0, 53.0, 201.0, 73.0, 181.0, 21.0, 233.0, 105.0, 149.0, 41.0, 213.0, 85.0, 169.0, 3.0, 251.0, 123.0, 131.0, 59.0, 195.0, 67.0, 187.0, 27.0, 227.0, 99.0, 155.0, 35.0, 219.0, 91.0, 163.0, 11.0, 243.0, 115.0, 139.0, 51.0, 203.0, 75.0, 179.0, 19.0, 235.0, 107.0, 147.0, 43.0, 211.0, 83.0, 171.0, 7.0, 247.0, 119.0, 135.0, 55.0, 199.0, 71.0, 183.0, 23.0, 231.0, 103.0, 151.0, 39.0, 215.0, 87.0, 167.0, 15.0, 239.0, 111.0, 143.0, 47.0, 207.0, 79.0, 175.0, 31.0, 223.0, 95.0, 159.0, 63.0, 191.0, 127.0]

Numerical solution:

6×6 DataFrame

Row	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
	Float64	Float64	Float64	Float64	Float64	Float64
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.0	0.562903	-0.910796	0.910796	-0.562903	0.0
3	0.0	-0.347893	0.562903	-0.562903	0.347893	0.0
4	0.0	-0.347893	0.562903	-0.562903	0.347893	0.0
5	0.0	0.562903	-0.910796	0.910796	-0.562903	0.0
6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Analytical solution:

6×6 DataFrame

Row	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
	Float64	Float64	Float64	Float64	Float64	Float64
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.0	0.559017	-0.904508	0.904508	-0.559017	0.0
3	0.0	-0.345492	0.559017	-0.559017	0.345492	0.0
4	0.0	-0.345492	0.559017	-0.559017	0.345492	0.0
5	0.0	0.559017	-0.904508	0.904508	-0.559017	0.0
6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Error:

6×6 DataFrame

Row	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
	Float64	Float64	Float64	Float64	Float64	Float64
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.0	0.00388559	0.00628701	0.00628701	0.00388559	0.0
3	0.0	0.00240142	0.00388559	0.00388559	0.00240142	0.0
4	0.0	0.00240142	0.00388559	0.00388559	0.00240142	0.0
5	0.0	0.00388559	0.00628701	0.00628701	0.00388559	0.0
6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Max error = 0.006950747671868429

N = 253, L = 80, M = 80

thetta(n) = [1.0, 505.0, 251.0, 255.0, 125.0, 381.0, 127.0, 379.0, 61.0, 445.0, 191.0, 315.0, 65.0, 441.0, 187.0, 319.0, 29.0, 477.0, 223.0, 283.0, 97.0, 409.0, 155.0, 351.0, 33.0, 473.0, 219.0, 287.0, 93.0, 413.0, 159.0, 347.0, 13.0, 493.0, 239.0, 267.0, 113.0, 393.0, 139.0, 367.0, 49.0, 457.0, 203.0, 303.0, 77.0, 429.0, 175.0, 331.0, 17.0, 489.0, 235.0, 271.0, 109.0, 397.0, 143.0, 363.0, 45.0, 461.0, 207.0, 299.0, 81.0, 425.0, 171.0, 335.0, 5.0, 501.0, 247.0, 259.0, 121.0, 385.0, 131.0, 375.0, 57.0, 449.0, 195.0, 311.0, 69.0, 437.0, 183.0, 323.0, 25.0, 481.0, 227.0, 279.0, 101.0, 405.0, 151.0, 355.0, 37.0, 469.0, 215.0, 291.0, 89.0, 417.0, 163.0, 343.0, 9.0, 497.0, 243.0, 263.0, 117.0, 389.0, 135.0, 371.0, 53.0, 453.0, 199.0, 307.0, 73.0, 433.0, 179.0, 327.0, 21.0, 485.0, 231.0, 275.0, 105.0, 401.0, 147.0, 359.0, 41.0, 465.0, 211.0, 295.0, 85.0, 421.0, 167.0, 339.0, 3.0, 503.0, 249.0, 257.0, 123.0, 383.0, 129.0, 377.0, 59.0, 447.0, 193.0, 313.0, 67.0, 439.0, 185.0, 321.0, 27.0, 479.0, 225.0, 281.0, 99.0, 407.0, 153.0, 353.0, 35.0, 471.0, 217.0, 289.0, 91.0, 415.0, 161.0, 345.0, 11.0, 495.0, 241.0, 265.0, 115.0, 391.0, 137.0, 369.0, 51.0, 455.0, 201.0, 305.0, 75.0, 431.0, 177.0, 329.0, 19.0, 487.0, 233.0, 273.0, 107.0, 399.0, 145.0, 361.0, 43.0, 463.0, 209.0, 297.0, 83.0, 423.0, 169.0, 337.0, 7.0, 499.0, 245.0, 261.0, 119.0, 387.0, 133.0, 373.0, 55.0, 451.0, 197.0, 309.0, 71.0, 435.0, 181.0, 325.0, 23.0, 483.0, 229.0, 277.0, 103.0, 403.0, 149.0, 357.0, 39.0, 467.0, 213.0, 293.0, 87.0, 419.0, 165.0, 341.0, 15.0, 491.0, 237.0, 269.0, 111.0, 395.0, 141.0, 365.0, 47.0, 459.0, 205.0, 301.0, 79.0, 427.0, 173.0, 333.0, 31.0, 475.0, 221.0, 285.0, 95.0, 411.0, 157.0, 349.0, 63.0, 443.0, 189.0, 317.0, 253.0]

Numerical solution:

6×6 DataFrame

Row	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
	Float64	Float64	Float64	Float64	Float64	Float64
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.0	0.559983	-0.906072	0.906072	-0.559983	0.0
3	0.0	-0.346089	0.559983	-0.559983	0.346089	0.0
4	0.0	-0.346089	0.559983	-0.559983	0.346089	0.0
5	0.0	0.559983	-0.906072	0.906072	-0.559983	0.0
6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Analytical solution:

6×6 DataFrame

Row	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
	Float64	Float64	Float64	Float64	Float64	Float64
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.0	0.559017	-0.904508	0.904508	-0.559017	0.0
3	0.0	-0.345492	0.559017	-0.559017	0.345492	0.0
4	0.0	-0.345492	0.559017	-0.559017	0.345492	0.0
5	0.0	0.559017	-0.904508	0.904508	-0.559017	0.0
6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Error:

6×6 DataFrame

Row	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
	Float64	Float64	Float64	Float64	Float64	Float64
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.0	0.00096622	0.00156338	0.00156338	0.00096622	0.0
3	0.0	0.000597157	0.00096622	0.00096622	0.000597157	0.0
4	0.0	0.000597157	0.00096622	0.00096622	0.000597157	0.0
5	0.0	0.00096622	0.00156338	0.00156338	0.00096622	0.0
6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Max error = 0.0017284271030424403

N = 505, L = 160, M = 160

thetta(n) = [1.0, 1009.0, 503.0, 507.0, 251.0, 759.0, 253.0, 757.0, 125.0, 885.0, 379.0, 631.0, 127.0, 883.0, 377.0, 633.0, 61.0, 949.0, 443.0, 567.0, 191.0, 819.0, 313.0, 697.0, 65.0, 945.0, 439.0, 571.0, 187.0, 823.0, 317.0, 693.0, 29.0, 981.0, 475.0, 535.0, 223.0, 787.0, 281.0, 729.0, 97.0, 913.0, 407.0, 603.0, 155.0, 855.0, 349.0, 661.0, 33.0, 977.0, 471.0, 539.0, 219.0, 791.0, 285.0, 725.0, 93.0, 917.0, 411.0, 599.0, 159.0, 851.0, 345.0, 665.0, 13.0, 997.0, 491.0, 519.0, 239.0, 771.0, 265.0, 745.0, 113.0, 897.0, 391.0, 619.0, 139.0, 871.0, 365.0, 645.0, 49.0, 961.0, 455.0, 555.0, 203.0, 807.0, 301.0, 709.0, 77.0, 933.0, 427.0, 583.0, 175.0, 835.0, 329.0, 681.0, 17.0, 993.0, 487.0, 523.0, 235.0, 775.0, 269.0, 741.0, 109.0, 901.0, 395.0, 615.0, 143.0, 867.0, 361.0, 649.0, 45.0, 965.0, 459.0, 551.0, 207.0, 803.0, 297.0, 713.0, 81.0, 929.0, 423.0, 587.0, 171.0, 839.0, 333.0, 677.0, 5.0, 1005.0, 499.0, 511.0, 247.0, 763.0, 257.0, 753.0, 121.0, 889.0, 383.0, 627.0, 131.0, 879.0, 373.0, 637.0, 57.0, 953.0, 447.0, 563.0, 195.0, 815.0, 309.0, 701.0, 69.0, 941.0, 435.0, 575.0, 183.0, 827.0, 321.0, 689.0, 25.0, 985.0, 479.0, 531.0, 227.0, 783.0, 277.0, 733.0, 101.0, 909.0, 403.0, 607.0, 151.0, 859.0, 353.0, 657.0, 37.0, 973.0, 467.0, 543.0, 215.0, 795.0, 289.0, 721.0, 89.0, 921.0, 415.0, 595.0, 163.0, 847.0, 341.0, 669.0, 9.0, 1001.0, 495.0, 515.0, 243.0, 767.0, 261.0, 749.0, 117.0, 893.0, 387.0, 623.0, 135.0, 875.0, 369.0, 641.0, 53.0, 957.0, 451.0, 559.0, 199.0, 811.0, 305.0, 705.0, 73.0, 937.0, 431.0, 579.0, 179.0, 831.0, 325.0, 685.0, 21.0, 989.0, 483.0, 527.0, 231.0, 779.0, 273.0, 737.0, 105.0, 905.0, 399.0, 611.0, 147.0, 863.0, 357.0, 653.0, 41.0, 969.0, 463.0, 547.0, 211.0, 799.0, 293.0, 717.0, 85.0, 925.0, 419.0, 591.0, 167.0, 843.0, 337.0, 673.0, 3.0, 1007.0, 501.0, 509.0, 249.0, 761.0, 255.0, 755.0, 123.0, 887.0, 381.0, 629.0, 129.0, 881.0, 375.0, 635.0, 59.0, 951.0, 445.0, 565.0, 193.0, 817.0, 311.0, 699.0, 67.0, 943.0, 437.0, 573.0, 185.0, 825.0, 319.0, 691.0, 27.0, 983.0, 477.0, 533.0, 225.0, 785.0, 279.0, 731.0, 99.0, 911.0, 405.0, 605.0, 153.0, 857.0, 351.0, 659.0, 35.0, 975.0, 469.0, 541.0, 217.0, 793.0, 287.0, 723.0, 91.0, 919.0, 413.0, 597.0, 161.0, 849.0, 343.0, 667.0, 11.0, 999.0, 493.0, 517.0, 241.0, 769.0, 263.0, 747.0, 115.0, 895.0, 389.0, 621.0, 137.0, 873.0, 367.0, 643.0, 51.0, 959.0, 453.0, 557.0, 201.0, 809.0, 303.0, 707.0, 75.0, 935.0, 429.0, 581.0, 177.0, 833.0, 327.0, 683.0, 19.0, 991.0, 485.0, 525.0, 233.0, 777.0, 271.0, 739.0, 107.0, 903.0, 397.0, 613.0, 145.0, 865.0, 359.0, 651.0, 43.0, 967.0, 461.0, 549.0, 209.0, 801.0, 295.0, 715.0, 83.0, 927.0, 421.0, 589.0, 169.0, 841.0, 335.0, 675.0, 7.0, 1003.0, 497.0, 513.0, 245.0, 765.0, 259.0, 751.0, 119.0, 891.0, 385.0, 625.0, 133.0, 877.0, 371.0, 639.0, 55.0, 955.0, 449.0, 561.0, 197.0, 813.0, 307.0, 703.0, 71.0, 939.0, 433.0, 577.0, 181.0, 829.0, 323.0, 687.0, 23.0, 987.0, 481.0, 529.0, 229.0, 781.0, 275.0, 735.0, 103.0, 907.0, 401.0, 609.0, 149.0, 861.0, 355.0, 655.0, 39.0, 971.0, 465.0, 545.0, 213.0, 797.0, 291.0, 719.0, 87.0, 923.0, 417.0, 593.0, 165.0, 845.0, 339.0, 671.0, 15.0, 995.0, 489.0, 521.0, 237.0, 773.0, 267.0, 743.0, 111.0, 899.0, 393.0, 617.0, 141.0, 869.0, 363.0, 647.0, 47.0, 963.0, 457.0, 553.0, 205.0, 805.0, 299.0, 711.0, 79.0, 931.0, 425.0, 585.0, 173.0, 837.0, 331.0, 679.0, 31.0, 979.0, 473.0, 537.0, 221.0, 789.0, 283.0, 727.0, 95.0, 915.0, 409.0, 601.0, 157.0, 853.0, 347.0, 663.0, 63.0, 947.0, 441.0, 569.0, 189.0, 821.0, 315.0, 695.0, 505.0]

Numerical solution:

6×6 DataFrame

Row	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
	Float64	Float64	Float64	Float64	Float64	Float64
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.0	0.559256	-0.904896	0.904896	-0.559256	0.0
3	0.0	-0.345639	0.559256	-0.559256	0.345639	0.0
4	0.0	-0.345639	0.559256	-0.559256	0.345639	0.0
5	0.0	0.559256	-0.904896	0.904896	-0.559256	0.0
6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Analytical solution:

6×6 DataFrame

Row	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
	Float64	Float64	Float64	Float64	Float64	Float64
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.0	0.559017	-0.904508	0.904508	-0.559017	0.0
3	0.0	-0.345492	0.559017	-0.559017	0.345492	0.0
4	0.0	-0.345492	0.559017	-0.559017	0.345492	0.0
5	0.0	0.559017	-0.904508	0.904508	-0.559017	0.0
6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Error:

6×6 DataFrame

Row	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
	Float64	Float64	Float64	Float64	Float64	Float64
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.0	0.000239216	0.00038706	0.00038706	0.000239216	0.0
3	0.0	0.000147844	0.000239216	0.000239216	0.000147844	0.0
4	0.0	0.000147844	0.000239216	0.000239216	0.000147844	0.0
5	0.0	0.000239216	0.00038706	0.00038706	0.000239216	0.0
6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Max error = 0.00042792310977457504

N = 1009, L = 320, M = 320

thetta(n) = [1.0, 2017.0, 1007.0, 1011.0, 503.0, 1515.0, 505.0, 1513.0, 251.0, 1767.0, 757.0, 1261.0, 253.0, 1765.0, 755.0, 126
3.0, 125.0, 1893.0, 883.0, 1135.0, 379.0, 1639.0, 629.0, 1389.0, 127.0, 1891.0, 881.0, 1137.0, 377.0, 1641.0, 631.0, 1387.0, 6
1.0, 1957.0, 947.0, 1071.0, 443.0, 1575.0, 565.0, 1453.0, 191.0, 1827.0, 817.0, 1201.0, 313.0, 1705.0, 695.0, 1323.0, 65.0, 195
3.0, 943.0, 1075.0, 439.0, 1579.0, 569.0, 1449.0, 187.0, 1831.0, 821.0, 1197.0, 317.0, 1701.0, 691.0, 1327.0, 29.0, 1989.0, 97
9.0, 1039.0, 475.0, 1543.0, 533.0, 1485.0, 223.0, 1795.0, 785.0, 1233.0, 281.0, 1737.0, 727.0, 1291.0, 97.0, 1921.0, 911.0, 110
7.0, 407.0, 1611.0, 601.0, 1417.0, 155.0, 1863.0, 853.0, 1165.0, 349.0, 1669.0, 659.0, 1359.0, 33.0, 1985.0, 975.0, 1043.0, 47
1.0, 1547.0, 537.0, 1481.0, 219.0, 1799.0, 789.0, 1229.0, 285.0, 1733.0, 723.0, 1295.0, 93.0, 1925.0, 915.0, 1103.0, 411.0, 160
7.0, 597.0, 1421.0, 159.0, 1859.0, 849.0, 1169.0, 345.0, 1673.0, 663.0, 1355.0, 13.0, 2005.0, 995.0, 1023.0, 491.0, 1527.0, 51
7.0, 1501.0, 239.0, 1779.0, 769.0, 1249.0, 265.0, 1753.0, 743.0, 1275.0, 113.0, 1905.0, 895.0, 1123.0, 391.0, 1627.0, 617.0, 14
01.0, 139.0, 1879.0, 869.0, 1149.0, 365.0, 1653.0, 643.0, 1375.0, 49.0, 1969.0, 959.0, 1059.0, 455.0, 1563.0, 553.0, 1465.0, 20
3.0, 1815.0, 805.0, 1213.0, 301.0, 1717.0, 707.0, 1311.0, 77.0, 1941.0, 931.0, 1087.0, 427.0, 1591.0, 581.0, 1437.0, 175.0, 184
3.0, 833.0, 1185.0, 329.0, 1689.0, 679.0, 1339.0, 17.0, 2001.0, 991.0, 1027.0, 487.0, 1531.0, 521.0, 1497.0, 235.0, 1783.0, 77
3.0, 1245.0, 269.0, 1749.0, 739.0, 1279.0, 109.0, 1909.0, 899.0, 1119.0, 395.0, 1623.0, 613.0, 1405.0, 143.0, 1875.0, 865.0, 11
53.0, 361.0, 1657.0, 647.0, 1371.0, 45.0, 1973.0, 963.0, 1055.0, 459.0, 1559.0, 549.0, 1469.0, 207.0, 1811.0, 801.0, 1217.0, 29
7.0, 1721.0, 711.0, 1307.0, 81.0, 1937.0, 927.0, 1091.0, 423.0, 1595.0, 585.0, 1433.0, 171.0, 1847.0, 837.0, 1181.0, 333.0, 168
5.0, 675.0, 1343.0, 5.0, 2013.0, 1003.0, 1015.0, 499.0, 1519.0, 509.0, 1509.0, 247.0, 1771.0, 761.0, 1257.0, 257.0, 1761.0, 75
1.0, 1267.0, 121.0, 1897.0, 887.0, 1131.0, 383.0, 1635.0, 625.0, 1393.0, 131.0, 1887.0, 877.0, 1141.0, 373.0, 1645.0, 635.0, 13
83.0, 57.0, 1961.0, 951.0, 1067.0, 447.0, 1571.0, 561.0, 1457.0, 195.0, 1823.0, 813.0, 1205.0, 309.0, 1709.0, 699.0, 1319.0, 6
9.0, 1949.0, 939.0, 1079.0, 435.0, 1583.0, 573.0, 1445.0, 183.0, 1835.0, 825.0, 1193.0, 321.0, 1697.0, 687.0, 1331.0, 25.0, 199
3.0, 983.0, 1035.0, 479.0, 1539.0, 529.0, 1489.0, 227.0, 1791.0, 781.0, 1237.0, 277.0, 1741.0, 731.0, 1287.0, 101.0, 1917.0, 90
7.0, 1111.0, 403.0, 1615.0, 605.0, 1413.0, 151.0, 1867.0, 857.0, 1161.0, 353.0, 1665.0, 655.0, 1363.0, 37.0, 1981.0, 971.0, 104
7.0, 467.0, 1551.0, 541.0, 1477.0, 215.0, 1803.0, 793.0, 1225.0, 289.0, 1729.0, 719.0, 1299.0, 89.0, 1929.0, 919.0, 1099.0, 41
5.0, 1603.0, 593.0, 1425.0, 163.0, 1855.0, 845.0, 1173.0, 341.0, 1677.0, 667.0, 1351.0, 9.0, 2009.0, 999.0, 1019.0, 495.0, 152
3.0, 513.0, 1505.0, 243.0, 1775.0, 765.0, 1253.0, 261.0, 1757.0, 747.0, 1271.0, 117.0, 1901.0, 891.0, 1127.0, 387.0, 1631.0, 62
1.0, 1397.0, 135.0, 1883.0, 873.0, 1145.0, 369.0, 1649.0, 639.0, 1379.0, 53.0, 1965.0, 955.0, 1063.0, 451.0, 1567.0, 557.0, 146
1.0, 199.0, 1819.0, 809.0, 1209.0, 305.0, 1713.0, 703.0, 1315.0, 73.0, 1945.0, 935.0, 1083.0, 431.0, 1587.0, 577.0, 1441.0, 17
9.0, 1839.0, 829.0, 1189.0, 325.0, 1693.0, 683.0, 1335.0, 21.0, 1997.0, 987.0, 1031.0, 483.0, 1535.0, 525.0, 1493.0, 231.0, 178
7.0, 777.0, 1241.0, 273.0, 1745.0, 735.0, 1283.0, 105.0, 1913.0, 903.0, 1115.0, 399.0, 1619.0, 609.0, 1409.0, 147.0, 1871.0, 86
1.0, 1157.0, 357.0, 1661.0, 651.0, 1367.0, 41.0, 1977.0, 967.0, 1051.0, 463.0, 1555.0, 545.0, 1473.0, 211.0, 1807.0, 797.0, 122
1.0, 293.0, 1725.0, 715.0, 1303.0, 85.0, 1933.0, 923.0, 1095.0, 419.0, 1599.0, 589.0, 1429.0, 167.0, 1851.0, 841.0, 1177.0, 33
7.0, 1681.0, 671.0, 1347.0, 3.0, 2015.0, 1005.0, 1013.0, 501.0, 1517.0, 507.0, 1511.0, 249.0, 1769.0, 759.0, 1259.0, 255.0, 176
3.0, 753.0, 1265.0, 123.0, 1895.0, 885.0, 1133.0, 381.0, 1637.0, 627.0, 1391.0, 129.0, 1889.0, 879.0, 1139.0, 375.0, 1643.0, 63
3.0, 1385.0, 59.0, 1959.0, 949.0, 1069.0, 445.0, 1573.0, 563.0, 1455.0, 193.0, 1825.0, 815.0, 1203.0, 311.0, 1707.0, 697.0, 132
1.0, 67.0, 1951.0, 941.0, 1077.0, 437.0, 1581.0, 571.0, 1447.0, 185.0, 1833.0, 823.0, 1195.0, 319.0, 1699.0, 689.0, 1329.0, 27.
0, 1991.0, 981.0, 1037.0, 477.0, 1541.0, 531.0, 1487.0, 225.0, 1793.0, 783.0, 1235.0, 279.0, 1739.0, 729.0, 1289.0, 99.0, 1919.
0, 909.0, 1109.0, 405.0, 1613.0, 603.0, 1415.0, 153.0, 1865.0, 855.0, 1163.0, 351.0, 1667.0, 657.0, 1361.0, 35.0, 1983.0, 973.
0, 1045.0, 469.0, 1549.0, 539.0, 1479.0, 217.0, 1801.0, 791.0, 1227.0, 287.0, 1731.0, 721.0, 1297.0, 91.0, 1927.0, 917.0, 1101.
0, 413.0, 1605.0, 595.0, 1423.0, 161.0, 1857.0, 847.0, 1171.0, 343.0, 1675.0, 665.0, 1353.0, 11.0, 2007.0, 997.0, 1021.0, 493.
0, 1525.0, 515.0, 1503.0, 241.0, 1777.0, 767.0, 1251.0, 263.0, 1755.0, 745.0, 1273.0, 115.0, 1903.0, 893.0, 1125.0, 389.0, 162
9.0, 619.0, 1399.0, 137.0, 1881.0, 871.0, 1147.0, 367.0, 1651.0, 641.0, 1377.0, 51.0, 1967.0, 957.0, 1061.0, 453.0, 1565.0, 55
5.0, 1463.0, 201.0, 1817.0, 807.0, 1211.0, 303.0, 1715.0, 705.0, 1313.0, 75.0, 1943.0, 933.0, 1085.0, 429.0, 1589.0, 579.0, 143
9.0, 177.0, 1841.0, 831.0, 1187.0, 327.0, 1691.0, 681.0, 1337.0, 19.0, 1999.0, 989.0, 1029.0, 485.0, 1533.0, 523.0, 1495.0, 23
3.0, 1785.0, 775.0, 1243.0, 271.0, 1747.0, 737.0, 1281.0, 107.0, 1911.0, 901.0, 1117.0, 397.0, 1621.0, 611.0, 1407.0, 145.0, 18
73.0, 863.0, 1155.0, 359.0, 1659.0, 649.0, 1369.0, 43.0, 1975.0, 965.0, 1053.0, 461.0, 1557.0, 547.0, 1471.0, 209.0, 1809.0, 79
9.0, 1219.0, 295.0, 1723.0, 713.0, 1305.0, 83.0, 1935.0, 925.0, 1093.0, 421.0, 1597.0, 587.0, 1431.0, 169.0, 1849.0, 839.0, 117
9.0, 335.0, 1683.0, 673.0, 1345.0, 7.0, 2011.0, 1001.0, 1017.0, 497.0, 1521.0, 511.0, 1507.0, 245.0, 1773.0, 763.0, 1255.0, 25
9.0, 1759.0, 749.0, 1269.0, 119.0, 1899.0, 889.0, 1129.0, 385.0, 1633.0, 623.0, 1395.0, 133.0, 1885.0, 875.0, 1143.0, 371.0, 16
47.0, 637.0, 1381.0, 55.0, 1963.0, 953.0, 1065.0, 449.0, 1569.0, 559.0, 1459.0, 197.0, 1821.0, 811.0, 1207.0, 307.0, 1711.0, 70
1.0, 1317.0, 71.0, 1947.0, 937.0, 1081.0, 433.0, 1585.0, 575.0, 1443.0, 181.0, 1837.0, 827.0, 1191.0, 323.0, 1695.0, 685.0, 133
3.0, 23.0, 1995.0, 985.0, 1033.0, 481.0, 1537.0, 527.0, 1491.0, 229.0, 1789.0, 779.0, 1239.0, 275.0, 1743.0, 733.0, 1285.0, 10
3.0, 1915.0, 905.0, 1113.0, 401.0, 1617.0, 607.0, 1411.0, 149.0, 1869.0, 859.0, 1159.0, 355.0, 1663.0, 653.0, 1365.0, 39.0, 197
9.0, 969.0, 1049.0, 465.0, 1553.0, 543.0, 1475.0, 213.0, 1805.0, 795.0, 1223.0, 291.0, 1727.0, 717.0, 1301.0, 87.0, 1931.0, 92
1.0, 1097.0, 417.0, 1601.0, 591.0, 1427.0, 165.0, 1853.0, 843.0, 1175.0, 339.0, 1679.0, 669.0, 1349.0, 15.0, 2003.0, 993.0, 102
5.0, 489.0, 1529.0, 519.0, 1499.0, 237.0, 1781.0, 771.0, 1247.0, 267.0, 1751.0, 741.0, 1277.0, 111.0, 1907.0, 897.0, 1121.0, 39
3.0, 1625.0, 615.0, 1403.0, 141.0, 1877.0, 867.0, 1151.0, 363.0, 1655.0, 645.0, 1373.0, 47.0, 1971.0, 961.0, 1057.0, 457.0, 156
1.0, 551.0, 1467.0, 205.0, 1813.0, 803.0, 1215.0, 299.0, 1719.0, 709.0, 1309.0, 79.0, 1939.0, 929.0, 1089.0, 425.0, 1593.0, 58
3.0, 1435.0, 173.0, 1845.0, 835.0, 1183.0, 331.0, 1687.0, 677.0, 1341.0, 31.0, 1987.0, 977.0, 1041.0, 473.0, 1545.0, 535.0, 148
3.0, 221.0, 1797.0, 787.0, 1231.0, 283.0, 1735.0, 725.0, 1293.0, 95.0, 1923.0, 913.0, 1105.0, 409.0, 1609.0, 599.0, 1419.0, 15
7.0, 1861.0, 851.0, 1167.0, 347.0, 1671.0, 661.0, 1357.0, 63.0, 1955.0, 945.0, 1073.0, 441.0, 1577.0, 567.0, 1451.0, 189.0, 182
9.0, 819.0, 1199.0, 315.0, 1703.0, 693.0, 1325.0, 1009.0]

Numerical solution:

6×6 DataFrame

Row	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
	Float64	Float64	Float64	Float64	Float64	Float64
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.0	0.559075	-0.904602	0.904602	-0.559075	0.0
3	0.0	-0.345527	0.559075	-0.559075	0.345527	0.0
4	0.0	-0.345527	0.559075	-0.559075	0.345527	0.0
5	0.0	0.559075	-0.904602	0.904602	-0.559075	0.0
6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Analytical solution:

6×6 DataFrame

Row	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
	Float64	Float64	Float64	Float64	Float64	Float64
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.0	0.559017	-0.904508	0.904508	-0.559017	0.0
3	0.0	-0.345492	0.559017	-0.559017	0.345492	0.0
4	0.0	-0.345492	0.559017	-0.559017	0.345492	0.0
5	0.0	0.559017	-0.904508	0.904508	-0.559017	0.0
6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Error:

6×6 DataFrame

Row	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
	Float64	Float64	Float64	Float64	Float64	Float64
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.0	5.7692e-5	9.33476e-5	9.33476e-5	5.7692e-5	0.0
3	0.0	3.56556e-5	5.7692e-5	5.7692e-5	3.56556e-5	0.0
4	0.0	3.56556e-5	5.7692e-5	5.7692e-5	3.56556e-5	0.0
5	0.0	5.7692e-5	9.33476e-5	9.33476e-5	5.7692e-5	0.0
6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Max error = 0.00010320254066420453

Результаты и обсуждения

В данной работе представлена схема, по которой проводились численные расчеты, найдено аналитическое решение и ее след. Выявлен набор τ_n для каждой тройки N, L, M. Найдено численное решение для каждой тройки с учетом выбранного чебышевского набора, причем наблюдается устойчивость и сходимость решения на последовательно удваеваемых сетках. На последовательно удваеваемых сетках также наблюдается уменьшение ошибки примерно в 4 раза при уменьшении сетки вдвое по каждой оси.