Задача о течении в канале

Рассматривается задача о развитом течении в канале (Plane Poiseuille flow), см. [1].

Границы канала - $y = -1$ и $y = 1$. Ось канала $y = 0$. Канал плоский.

1. Khorrami, M. R., & Malik, M. R. (1993). Efficient computation of spatial eigenvalues for hydrodynamic stability analysis. Journal of Computational Physics, 104(1), 267-272.

In [16]:

```
# Plane poiseuille flow profile
def get_U(y):
    return 1 - y**2

def get_dudy(y):
    return -2*y
```

Сформируем матрицы для решения задачи на собственные значения на собственные значения

Поскольку задача здесь рассматривается во временной постановке, то рассматриваем задачу $A\phi = \omega B\phi$. Матрицы A и B получаются после аппроксимации краевой задачи $E_1\phi_yy + E_2\phi_y + E_3\phi = \omega E_4\phi$. Необходимо на основании уравнений 8-10 из статьи [1] выписать матрицы E_2 и E_3 (реализовать метод getE2 и getE3). Матрицы E_1 и E_4 уже выписаны. Далее необходимо сформировать матрицу A (метод getA_matrix). Метод для формирования матрицы B уже реализован (getB_matrix).

In [17]:

```
from scipy.sparse import block_diag
import numpy as np

def getE1(Re):
    return np.array([[1/Re, 0, 0],
                     [0, 1/Re, 0],
                     [0, 0, 0]])

#done
def getE2():
    return np.array([[0, 0, 0],
                     [0, 0, -1],
                     [0, 1, 0]])

#done
def getE3(alpha, Re, u, dudy):
    return np.array([[-1j * alpha * u - alpha**2 / Re, -dudy, -1j * alpha],
                     [0, -1j * alpha * u - alpha**2 / Re, 0],
                     [1j * alpha, 0, 0]])

# artificial compressibility added (gamma). See:
# Khorrami, M. R., Malik, M. R., & Ash, R. L. (1989). Application of spectral collocati
# to the stability of swirling flows. Journal of Computational Physics, 81(1), 206-229.
def getE4():
    gamma = 0.0001
    return np.array([[-1j, 0, 0],
                       [0, -1j, 0],
```

```
                        [0, 0, -gamma]])

def get_y(j, h):
    return -1 + h*j

def getA_matrix(alpha, Re, N, comp_num = 3):
    h = 2 / (N - 1) #done
    matrix_list = list()

    # Form first line of matrix A
    line = list()
    y = get_y(1, h)
    u = get_U(y)
    dudy = get_dudy(y)
    E1 = getE1(Re)
    E2 = getE2()
    E3 = getE3(alpha, Re, u, dudy)

    L2 = E3 - 2./h**2*E1
    line.append(L2)
    L3 = 1./h**2*E1 + 1./(2*h)*E2
    line.append(L3)
    for i in range(3,N):
        line.append(np.zeros((comp_num,comp_num)))
    matrix_list.append(line)

    # Form inner lines of matrix A
    for i in range(2, N-1):
        line = list()
        y = get_y(i, h)
        u = get_U(y)
        dudy = get_dudy(y)
        E1 = getE1(Re)
        E2 = getE2()
        E3 = getE3(alpha, Re, u, dudy)
        #E4 = getE4()
        for j in range(1, N):
            if j==i-1:
                L1 = E1 / h**2 - E2 / (2 * h) #done
                line.append(L1)
            elif j==i:
                L2 = E3 - 2 * E1 / h**2 #done
                line.append(L2)
            elif j==i+1:
                L3 = E1 / h**2 + E2 / (2 * h) #done
                line.append(L3)
            else:
                line.append(np.zeros((comp_num,comp_num)))
        matrix_list.append(line)

    # Form last line of matrix A
    line = list()
    for i in range(1, N-2):
        line.append(np.zeros((comp_num,comp_num)))

    y = get_y(N-1, h)
    u = get_U(y)
    dudy = get_dudy(y)
    E1 = getE1(Re)
    E2 = getE2()
```

```
    E3 = getE3(alpha, Re, u, dudy)
    #E4 = getE4()
    L1 = E1 / h**2 - E2 / (2 * h) #done
    line.append(L1)
    L2 = E3 - 2 * E1 / h**2 #done
    line.append(L2)
    matrix_list.append(line)

    return np.bmat(matrix_list)

def getB_matrix(alpha, Re, N, comp_num = 3):
    h = 2 / (N - 1) #done
    print('h = ', h)
    matrix_list = list()
    for i in range(1,N):
        E4 = getE4()
        matrix_list.append(E4)
    return block_diag(matrix_list).toarray()
```

Теперь решим задачу о поиске неустойчивых мод для течения в канале с числом Рейнольдса $Re = 10000$ для возмущений с волновым числом α. Сначала задаем число узлов в сетке для решения одномерной задачи N и формируем матрицы A и B.

In [26]:

```
# Test case
import sympy as sp
N = 500 #изменил здесь число узлов посмотреть, как меняется решение
# test 1
alpha = 1
Re = 10000
A = getA_matrix(alpha, Re, N)
B = getB_matrix(alpha, Re, N)
```

```
h =  0.004008016032064128
```

Решаем задачу на собственные значения

In [27]:

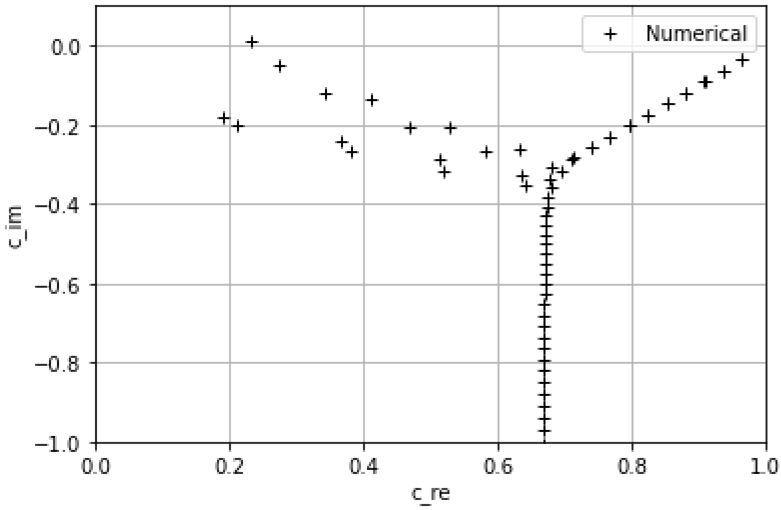
```
import scipy.linalg as la
eigvals = la.eigvals(A, B)
eigvals = eigvals/alpha # на графике частоты делят на alpha
```

Строим график для для всех мод

In [28]:

```
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt

plt.plot(eigvals.real, eigvals.imag, '+b', label='Numerical', color = 'black')
plt.legend()
# test 1
plt.xlim(0, 1)
plt.ylim(-1, 0.1)
plt.grid()
plt.xlabel('c_re')
plt.ylabel('c_im')
plt.savefig('Temporal spectrum.jpg', dpi=200) #png плохо отображается в темной теме, по
```



Присутствуют ли на графике физичные неустойчивые моды? Если да, укажите ω.

In [29]:

```
#физически неустойчивые моды будут определяться следующим образом:
tmp = [0 < x < 0.1 for x in eigvals.imag]
real = eigvals.real[tmp][0]
imag = eigvals.imag[tmp][0]
w = str(real) + '+' + str(imag) + 'j'
print(w)
```

```
0.23298450959528028+0.010805082439825375j
```