

Работа 1. Анализ результатов численного  
моделирования обтекания пластины, скругленной  
по цилиндру

Петраков Иван  
МФТИ

2021  
Сентябрь

## Описание задачи

---

Имеется пластина, скругленная у кромки. Она обтекается совершенным газом, направленным параллельно пластине. Заданы параметры газа: число Маха  $M = 1.5$  и число Рейнольдса  $Re = 6 \cdot 10^6$ .

В задаче требуется:

- 1) построить и сравнить графики трения на пластине на сетках с разным первым пристеночным шагом и объяснить их расхождение;
- 2) Сравнить профили скорости при решении задачи в рамках уравнения Эйлера и Навье-Стокса по нормали от т. (0,1) до (0, 1.01) и от т. (0, 1) до (0, 1.002) и объяснить расхождение;
- 3) Исследовать график сходимости в зависимости от CFL для решения в рамках уравнения Навье-Стокса на сетке с шагом  $10^{-6}$ . Найти пограничное значение CFL, при увеличении которого не наблюдается ускорения сходимости.

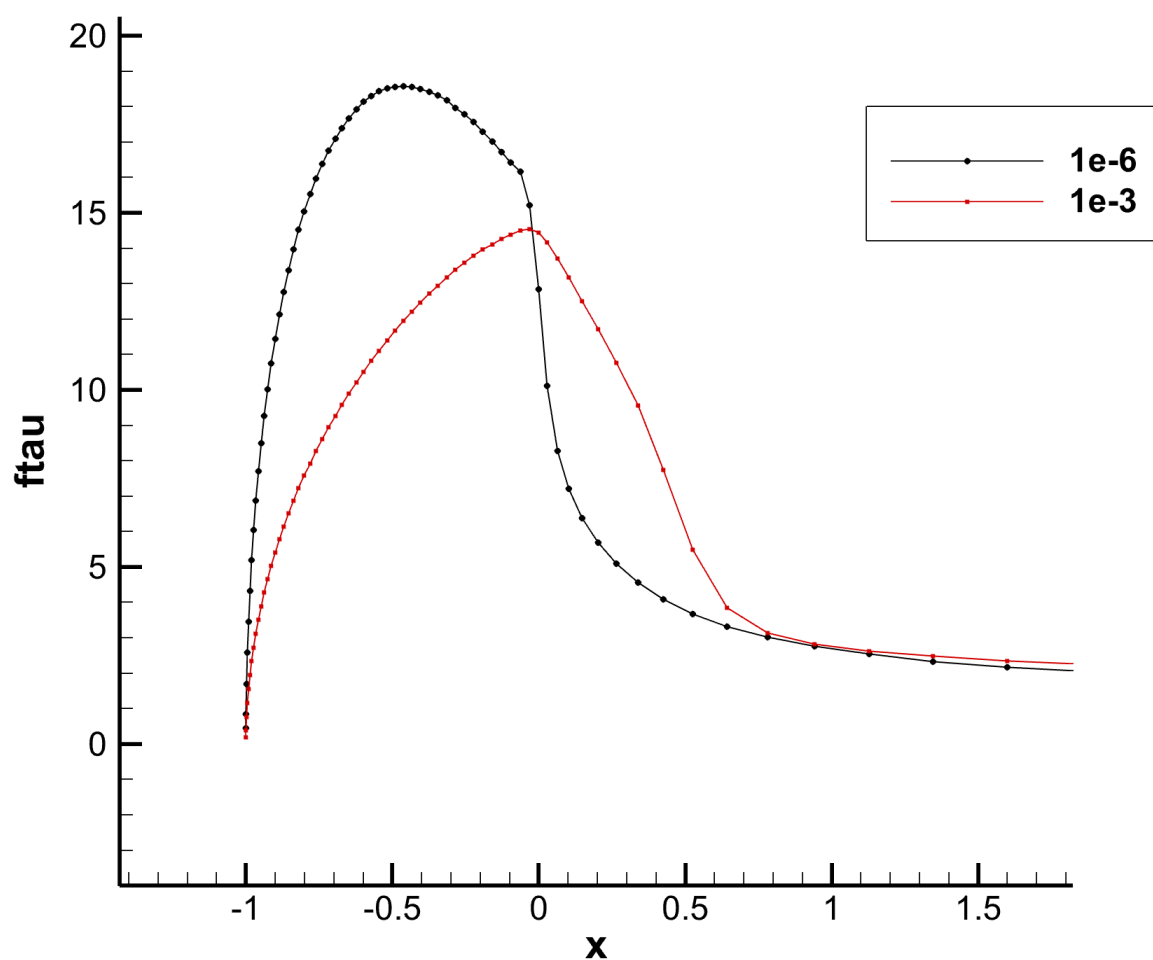
Численные расчеты предлагалось делать с использованием уже скомпилированной программы. Изменение параметров для решения задач происходило в соответствующих .ini файлах. Расчет происходил на кластере в силу медленной работы последовательной версии программы.

## Результаты работы

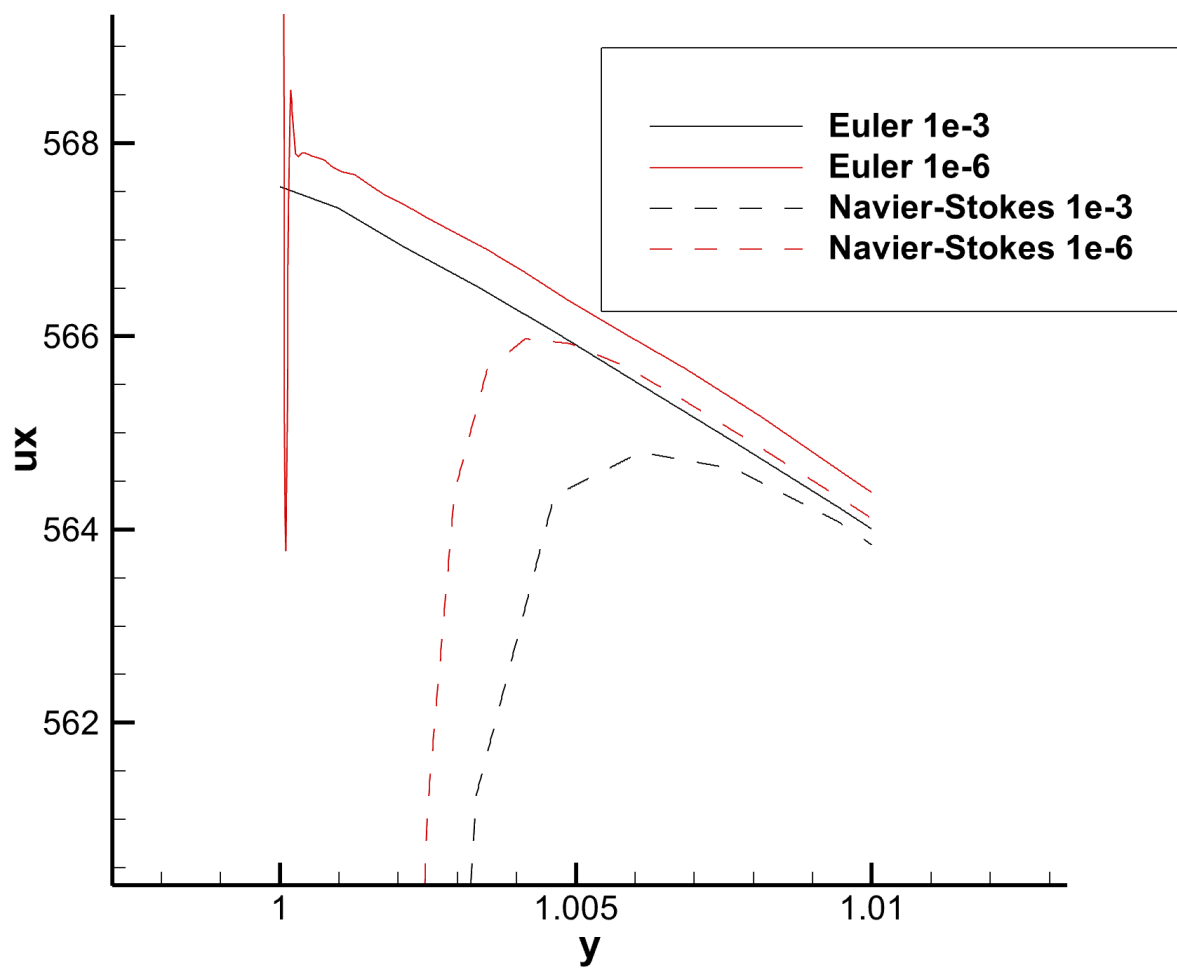
---

Все результаты работы основаны на проведенных мной расчетах на кластере. Расчеты хранятся в папке Petrakov.

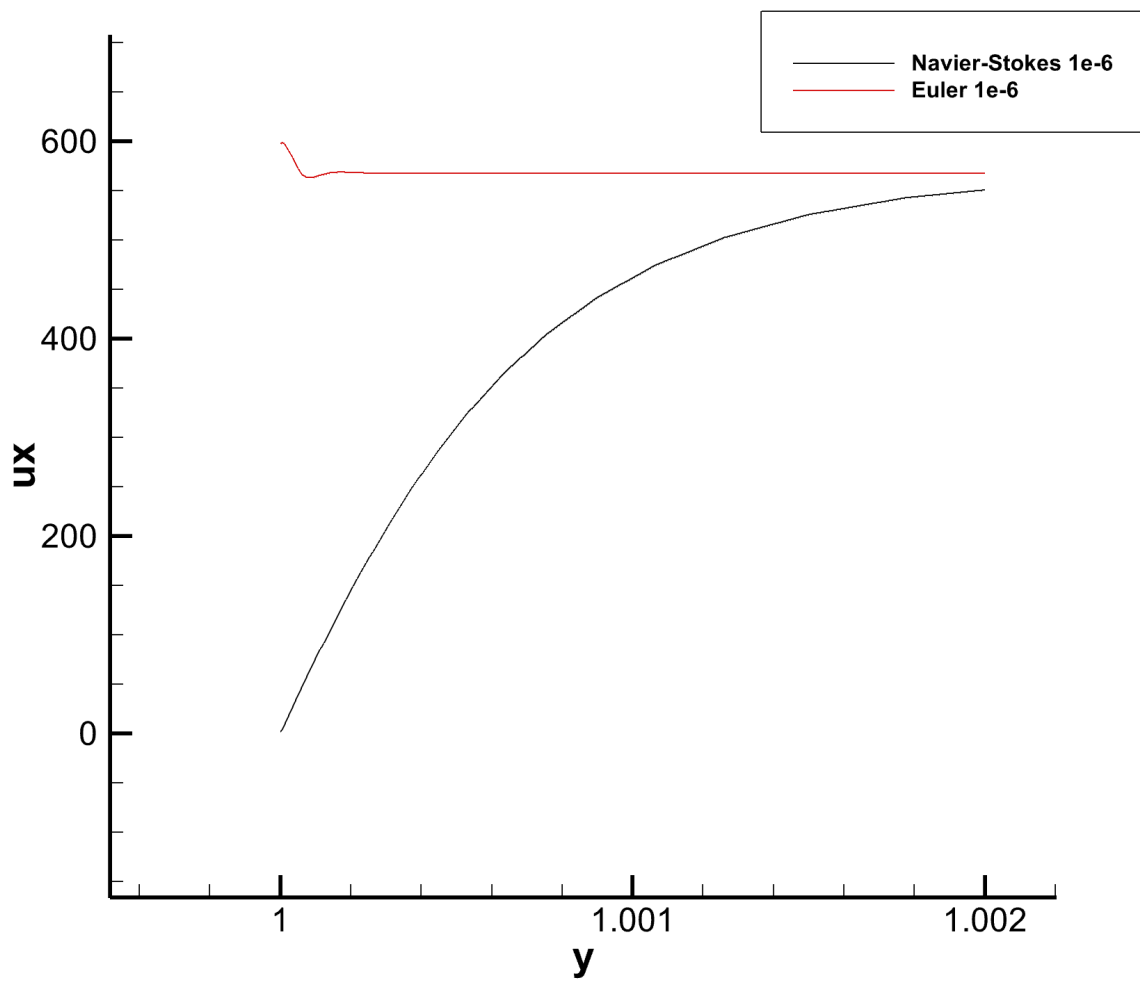
**Сравнение сил трения** Построим график зависимости силы трения от координаты для разных первых пристеночных шагов. В нашем случае использовались следующие шаги:  $10^{-3}$  и  $10^{-6}$ . Получим следующие результаты:



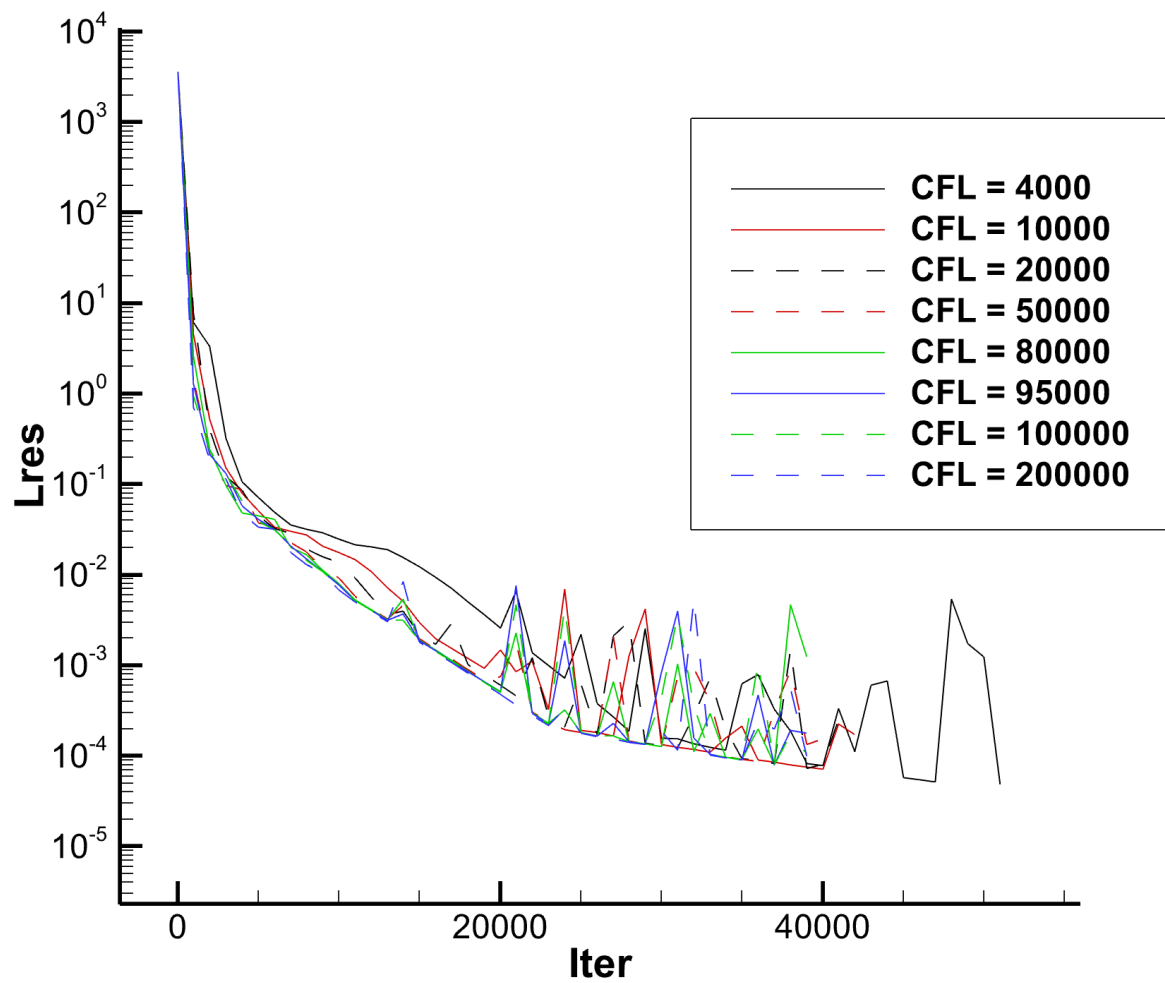
**Сравнение профилей скоростей** Построим график зависимости скорости потока в направлении координаты  $x$  от координаты  $y$ . Строить зависимости будем при/без учета/а вязкости, а также при разных пристеночных шагах. Получим следующие результаты:



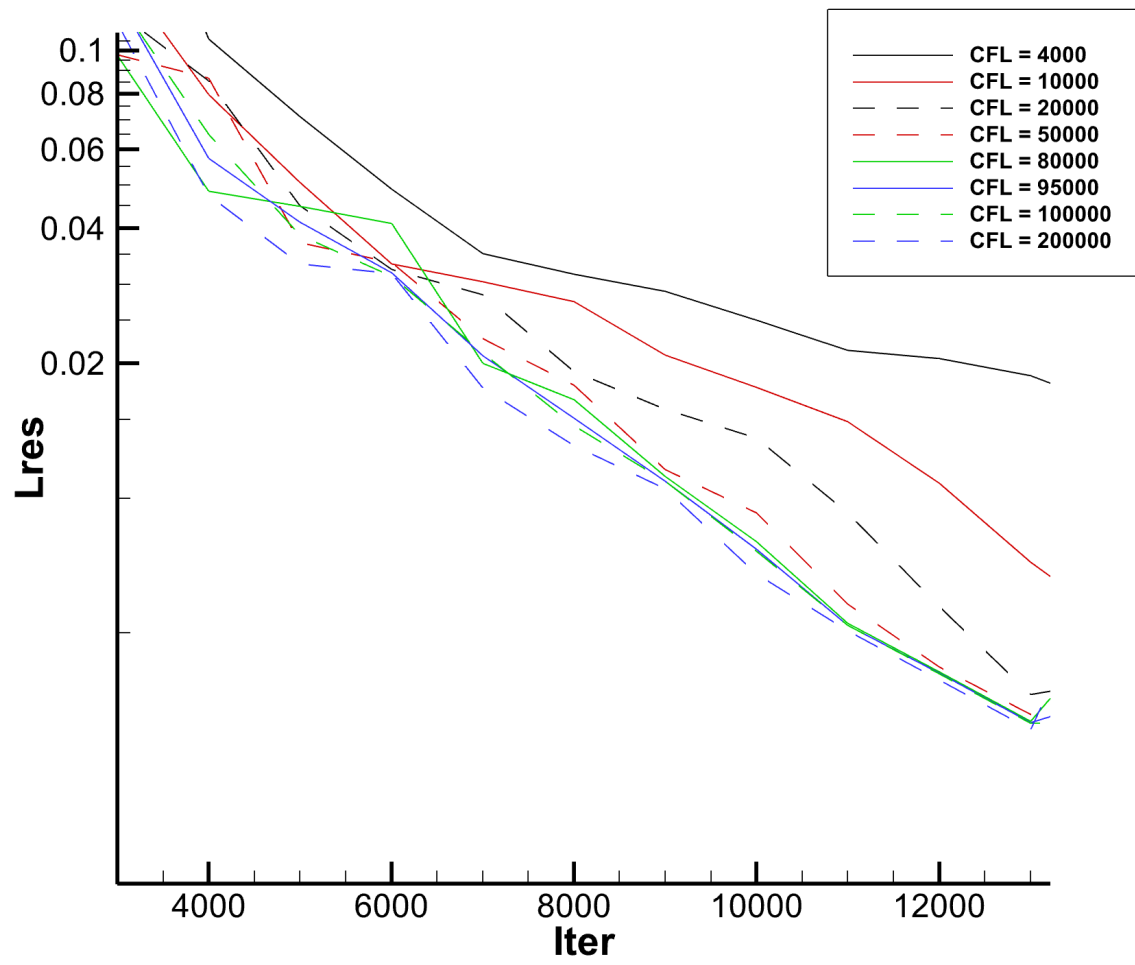
Рассмотрим также графики зависимости скорости потока в направлении координаты  $x$  от координаты  $y$  в рамках уравнений Навье-Стокса и Эйлера для одного значения первого пристеночного шага ( $10^{-6}$ ). Получим следующие результаты:

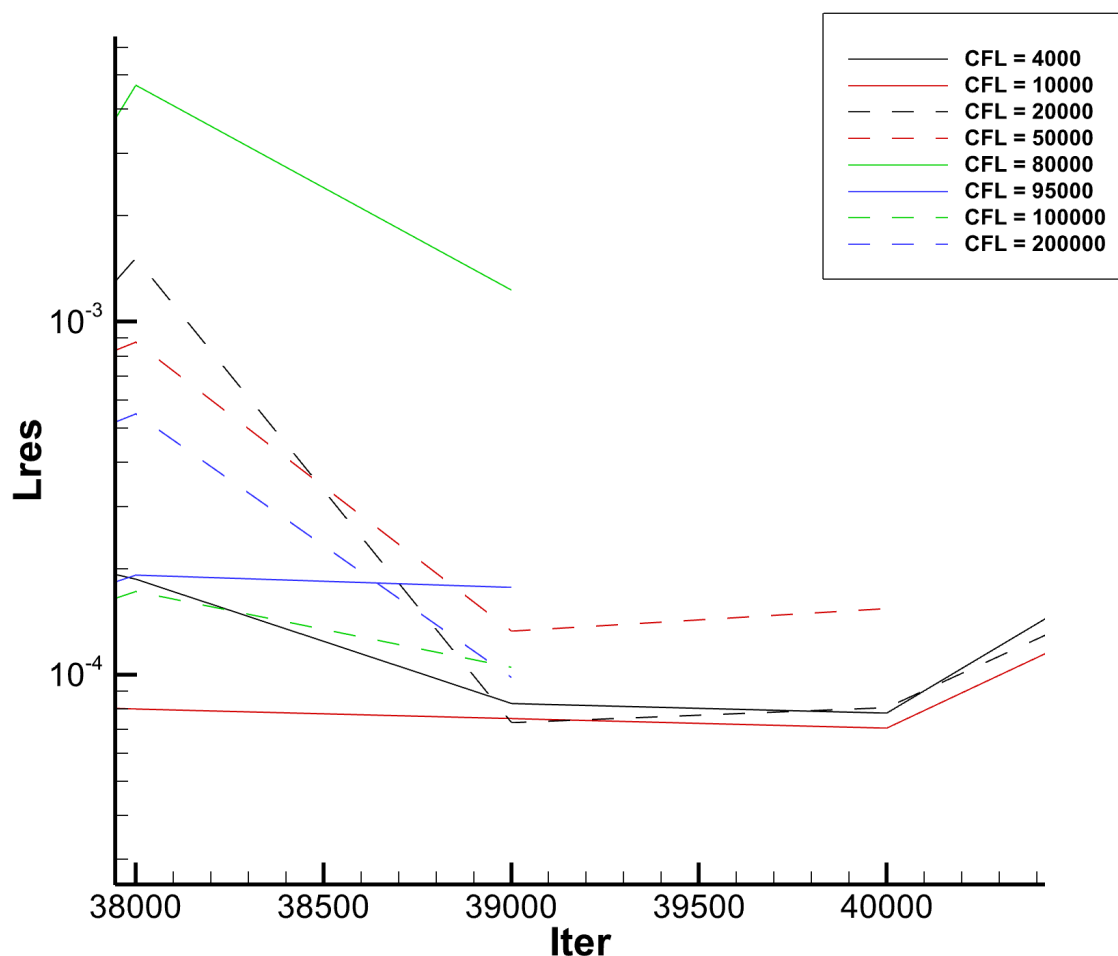


**Исследование на критическое значение CFL** Проведем расчеты в рамках уравнений Навье-Стокса и с первым пристеночным шагом, равным  $10^{-6}$ , в большом диапазоне CFL. Получим следующие результаты:



Как видно, работать с такими данными очень сложно, поэтому выделим более-менее линейный участок, на котором и будем исследовать ускорение сходимости, а также участок графика, где достигается необходимая погрешность (для определения количества итераций). Получим следующие результаты:





## Обсуждения результатов

**Сравнение сил трения** Не сложно заметить расхождение в двух графиках. Видно, что они выходят на какую-то постоянную одинаковую величину, однако максимально достигаемое значение силы трения отличается. Обратимся к степенному закону вязкости жидкости. Для неньютоновской жидкости он выглядит как

$$\tau = K \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^n \quad (1)$$

где  $K$  - коэффициент густоты потока,  $n$  - показатель поведения жидкости,  $u$  - скорость потока, параллельного стенке,  $y$  - расстояние до стенки.

В общем случае, имеем немного другое уравнение

$$\tau = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} \quad (2)$$

где  $\mu$  - динамическая вязкость.

Считая первый пристеночный шаг достаточно малым (что и присутствует в наших расчетах), скорость прямо у стенки нулевой, получим, что частные производные



можно заменить приращением. Тогда, в итоге, сила трения обратно пропорциональна расстоянию до стенки, что и отражено на графике. Достижение максимума в различных точках, возможно, связана с различной скоростью потока, а также с ошибкой, появившейся, когда мы заменяли частные производные.

**Сравнение профилей скоростей** Рассмотрим полученные зависимости скорости от координаты  $y$ . Из первого графика видно, что, действительно, скорость отличается в зависимости от значения первого пристеночного шага, что подтверждает выводы, сделанные в предыдущем параграфе. Из первого и второго графика видно, что зависимости ведут себя по-разному, в зависимости от того, в условиях каких уравнений мы решаем задачу. Расхождение связано с наличием вязкости (а следовательно, вязкого трения) при решении задачи в условиях уравнений Навье-Стокса, что и отражается на графиках (резкое снижение скорости). В случае уравнения Эйлера, скорость достигается сразу максимальная. Оба графика показывают снижение скорости в зависимости от расстояния от пластинки, что подтверждается курсом механики сплошных сред.

**Исследование на критическое значение CFL** Как было сказано в предыдущем разделе, обсуждать первый график нет никакого смысла - он не особо информативный. Рассмотрим второй график. Очевидно, что чем ниже кривая, тем быстрее сходимость. Наблюдаем увеличение скорости сходимости при увеличении CFL. Однако, есть некоторые точки ( $Iter = 6000, 9000, 13000$ ), в которых значения  $L_{res}$  для последних трех чисел CFL совпадает. Это может косвенно говорить нам о достижении критического значения CFL, после которого не наблюдается увеличения скорости сходимости (дело в том, что если провести через совпадающие точки прямые, то получим одинаковый наклон у каждого графика, что и говорит об одинаковой скорости сходимости).

Теперь рассмотрим последний в работе график. Видно, что для последних 4х чисел CFL график обрывается на одном и том же значении, что говорит о достижении поставленной погрешности.

Исходя из данных выводов, можно сделать предположение о критическом CFL, равным около 100000. Считаю, что находить ошибку определения данного значения в рамках данной задаче не имеет смысла - это требовало бы более длительных расчетов на большем количестве чисел CFL.

## Выводы

---

В работе были решены поставленные задачи с использованием предоставленной программе, объяснены расхождения между некоторыми результатами, а также было найдено критическое значение CFL, при увеличении которого не наблюдается ускорения сходимости.