

**ПРОБЛЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИРОДНЫХ  
И АНТРОПОГЕННЫХ ПРОЦЕССОВ  
В АРКТИЧЕСКОЙ ЗОНЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

© 2018 г. *И.Б. Петров*

Московский физико-технический институт (государственный университет)  
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва  
petrov@mipt.ru

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ, проект № 14-11-00434.

Представлен обзор работ по математическому моделированию воздействий природных явлений на индустриальные объекты в Арктической зоне Северных морей Российской Федерации, а также работ, касающихся решения задач индустриального освоения Арктического шельфа. Приведено описание актуальных вычислительных задач, связанных с освоением Арктики. Обсуждаются численные методы, использующиеся для их решения, проблемы, возникающие при этом, приводятся результаты расчетов. Приведен перечень наиболее актуальных вычислительных задач освоения Арктического шельфа России.

Ключевые слова: математическое моделирование, численные методы, механика сплошных сред, исследования Арктики, высокопроизводительные вычислительные системы.

**PROBLEMS OF SIMULATION OF NATURAL  
AND ANTHROPOGENOUS PROCESSES  
IN THE ARCTIC ZONE OF THE RUSSIAN FEDERATION**

*I.B. Petrov*

Moscow Institute of Physics and Technology (State University)  
Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow

The review of works on mathematical modeling of impacts of the natural phenomena on industrial objects in the Arctic zone of the North Sea of the Russian Federation, and also the works concerning the solution of problems of industrial development of the Arctic shelf is submitted. The description of the urgent computing tasks connected with development of the Arctic is provided. The numerical methods which are used for their decision, the problems arising at the same time are discussed calculation result are given. The list of the most urgent computing problems of development of the Arctic shelf of Russia is provided.

Key words: mathematical modeling, numerical methods, mechanics of continuous environments, researches of the Arctic, high-performance computing systems.

В ближайшие годы Российский сектор Арктики будет по-прежнему играть ведущую роль по добыче газа и значительную – по добыче нефти. После распада Советского Союза все арктическое побережье от Колымского до Чукотского полуострова осталось в составе территории Российской арктической зоной площадью почти на 4500 кв. км, т.е. 25% от всей территории страны (при этом население составляет приблизительно 2%).

В Арктической зоне сконцентрирована большая часть залежей углеводородов страны. В настоящее время в этом регионе открыто 594 месторождения нефти, 159 газа. Начально извлекаемые ресурсы Арктической зоны России оцениваются в 258 млрд т условного топлива, что составляет 60% углеводородных ресурсов страны. Неразведанный потенциал Арктической зоны, по оценкам, составляет приблизительно 90% на шельфе, в пределах 200-мильной зоны, и 53% на суше. Начально извлекаемые разведанные запасы нефти в Российской зоне Арктики составляют, приблизительно, 7,8 млрд т (500 млн т – на шельфе), газа – 65 млрд т (10 млрд т – на шельфе) [1].

По добыче газа основной базой остается Ямало-Ненецкий автономный округ, причем добыча газа, по-видимому, будет смещаться на полуостров Ямал: Бованенское, Харасовейское, Тамбейское и др. месторождения. В Надым-Пурском районе этого округа будет расти добыча жидкого газа. В тридцатые годы XX века в республике Коми было открыто первое в мире нефтяное месторождение в Арктике – Ярегское, практически одновременно с ним была открыта Тимано-Печорское нефтегазоносное месторождение. В 60-е годы была открыта огромная Западно-Сибирская провинция, на Европейском Севере страны в Тимано-Печорской провинции были открыты крупное Вуктымское газоконденсатное месторождение (1964г.), в 80-е годы открыто месторождение им. Требса (1987г.), им. Титова (1989г.). В 1962 году открыты первое газовое месторождение Тазовское в арктической части Западно-Сибирской зоны, в Ямало-Ненецком округе. Затем последовали открытия других богатейших месторождений – нефтегазоконденсатных: Новопортовского (1964г.), Губкинского (1965г.), Уренгойского (1966г.), газовых: Заполярного (1965г.), Медвежьего (1967г.), Арктического (1968г.), Ямбургского (1969г.). В 1971 году открыто уникальное газовое месторождение Ямало-Бованенское, 1974г. — Харасавейское и Южно-Тамбейское, в 1968 году – Ростовцевское. В 80-90-х годах начаты поиски углеводородов в шельфовой зоне Карского моря: в 1989 открыто богатое Русановское, в 1990 году – Ленинградское месторождения; уже в XXI веке было открыто гигантское месторождение – “Победа” [1]. В 80-90-е годы были открыты на северо-востоке Западно-Сибирской провинции – Ванкорское, Тагульское, Лодочное и Сузунское месторождения. В период с 1983 по 1992 годы на Арктическом шельфе Российской Федерации открыты запасы газа, содержащие суммарно объемы до 2.7 трлн м<sup>3</sup>. В Баренцовом море открыты Ледовое (1992г.), Лудовское (1990г.), Мурманское (1983г.), в Печерском – Поморское (1985г.) и Северо-Гуляковское (1986г.) месторождения газа. Запасы каждого из этих месторождений превышают 100 млрд м<sup>3</sup>, а двух последних – более 500 млрд м<sup>3</sup> [2].

Отметим, что как в зарубежных, так и в наших средствах массовой информации порой высказывается мнение о заморозке работ на шельфовых Арктических зонах Северного Ледовитого Океана. Обычно называют две причины: первая – страна и так богата углеводородами, вторая – санкции, отсутствие инвестиций, кредитов, технологий и прочее. Скорее всего, об этом говорят неспециалисты. Дело в том, что геологоразведочные работы и подготовка к эксплуатации месторождений длятся годы, а порой и десятилетия. Это трудный и долгий процесс, который нельзя откладывать в “долгий ящик”. Что же касается санкций, то наша страна всегда была под ними – это не беда, а условия жизни. Важным обстоятельством является то, что в настоящее время в России ведется переоценка запасов углеводородного сырья, что требует новых методов обработки сейс-

мических данных, в первую очередь, современных вычислительных, способных давать подробное описание сложнейших волновых процессов, происходящих в существенно неоднородных средах с искомыми месторождениями нефти и газа. Заметим также, что обоснованными представляются перспективы нефтегазоносности как суши, так и шельфа Берингова моря (Хатирский, Нортон, Анадырский район морей Лаптева, Восточно-Сибирского и Чукотского морей). Эти предполагаемые месторождения предстоит еще разведывать. Таким образом, одной из основных задач освоения арктической зоны России является задача численно-экспериментальной геологической разведки углеводородов в этом мегарайоне [1,2].

Следующая проблема освоения Арктики – обустройство инфраструктуры месторождений углеводородов в тяжелых ледовых условиях наших северных морей. Здесь уже не могут быть использованы известные средства освоения морских нефтегазовых ресурсов южных морей. Для шельфовых акваторий необходима разработка новых технологий и реализация новых технических средств, которые способны обеспечить эксплуатацию месторождений в условиях замерзающих акваторий. Это связано с наличием больших ледяных образований (айсберги, торосы, ледяные поля, торосы, вмороженные в ледяные поля), в основном, дрейфующих, которые оказывают интенсивные силовые воздействия на технические шельфовые сооружения, например, ледостойские платформы (ЛСП), а также создают заметные трудности для судов ледового класса, транспортирующих большие объемы нефти и газа. Инженерная и расчетная проработка этой непростой проблемы показывает, что наиболее эффективными инженерными сооружениями в условиях арктического шельфа северных морей Российской Федерации являются ледостойские платформы, устанавливаемые на дне моря. Важнейшей проблемой (учитывая возможность аварий, действия стихийных природных факторов) является обеспечение безопасности этих сооружений и, в частности, численные расчеты на прочность. Это требование может быть обеспечено, если для решения задач расчета на стойкость инженерных шельфовых конструкций будут использоваться современные вычислительные методы для численного решения прочностных задач на основе полной замкнутой системы уравнений механики сплошных сред и современные высокопроизводительные многопроцессорные вычислительные системы. Проблемы использования суперЭВМ для решения актуальных задач нефтегазового комплекса рассмотрены в работе Б.Н. Четверушкина с соавторами [3]. Задача расчета проектной надежности морских сооружений, предназначенных для освоения шельфа морей, связана с разработкой механико-математических моделей, описывающих поведение ледовых образований, их контакта с инженерными конструкциями, расчетом ледовых нагрузок, образующихся при их нагружении дрейфующими ледяными полями, торосами, айсбергами. Проблема оценки ледовых воздействий в этих условиях оказывается одной из самых актуальных, наряду с предсказанием ледовой обстановки в условиях замерзающих морей, в частности, дрейфа айсбергов, ледяных полей с торосами, отдельных льдин [4-8]. Эти исследования существенно осложняются тем, что использование натурных экспериментов для получения окончательного инженерного решения представляется нереальным из-за больших затрат времени и средств, а также по причине целого ряда как технических, так и организационных проблем. По этим причинам возникает необходимость в разработке и реализации адекватных натурному эксперименту расчетных методов, с помощью которых можно было бы на основе исследования прочности отдельных частей и конструкций большого

объекта решать комплексные задачи, описывающие поведение объекта в целом, при воздействии на него ледовых силовых нагрузок. Используя адекватные математические модели и вычислительные методы, можно спрогнозировать поведение любой части объекта, вычислить все интересующие механические характеристики. Таким образом, другой важнейшей арктической задачей является численное исследование поведения систем “ЛСП-ЛО” (ЛО – ледовое образование), т.е. изучение взаимодействия шельфовых и плавающих сооружений с окружающей их внешней средой. Отметим, что определение реологии льда, как твердой деформируемой среды, представляется непростой задачей. Его механические характеристики зависят от температуры, солёности, неоднородностей, наличия трещин, пор, водонасыщенности. Расчет этих характеристик также представляет собой трудоемкую расчетно-экспериментальную задачу, которая до сих пор до конца не решена. Это проблеме посвящено много работ (см., например, [4,8,9]). В [4] рассматривались прочностные характеристики льда и инженерных сооружений при их взаимодействии, т.е. проблема изучалась экспериментально-расчетным путем. Наиболее перспективным путем определения механических и прочностных характеристик льда представляется расчетно-экспериментальный, т.е. определение значений характеристик путем проведения прямого численного моделирования и эксперимента, а также сопоставления численных и экспериментальных результатов. Такой подход предлагается в [8].

Проблема прочности судов ледового класса и ледовых полей, при интенсивном их нагружении, встает и в задачах судоходства в ледовой обстановке, в частности, при проводке судов ледоколами (см., например, [9-14]). Ее актуальность определяется тем фактом, что Северный морской путь – кратчайший маршрут, который связывает европейскую часть континента и стран Азиатско-Тихоокеанского региона. Так, расстояние от Санкт-Петербурга до Владивостока по Северному морскому пути приблизительно 14000 км, но при его преодолении южным путем, через Суэцкий канал, судно проходит более 23000 км. Плавание судов из Мурманска в Йокогаму по Северному морскому пути сокращает длительность маршрута на 10 суток и экономит около 800 т топлива (для среднестатистического судна) по сравнению с плаванием через Суэцкий канал. Сравнительно недавно, в связи с таянием арктических льдов, этот путь начал привлекать и зарубежные компании; например в 2012г. этим путем проведено 46 судов и состоялась первая в мире перевозка сжиженного природного газа (танкер, зафрахтованный компанией “Газпром” перевез 134500 м<sup>3</sup> газа из Норвегии в Японию). Таким образом, основные проблемы освоения Северного морского пути от Новой Земли до Берингова пролива (2200-2900 морских миль) связаны со сложными ледовыми условиями и использованием мощных ледоколов, которые могут двигаться в условиях ледового покрова толщиной до 2 м. Ледовые поля, айсберги, торсы представляют собой серьезные препятствия для судов ледового класса. Специфика вычислительных задач о движении ледокола во льдах состоит как в необходимости использования адекватных реологических моделей льда, как твердого деформируемого и разрушаемого тела, так и в учете существенной разномасштабности (во времени и пространстве) рассматриваемых процессов. Например, при проводке судов ледоколами масштаб длины прокладываемого канала имеет порядок километра, масштаб, соответствующий длине ледокола, порядка сотен метров, напряженно-деформируемое состояние ледяных полей и разрушение кромки льда у корпуса судна зависят от толщины поля, порядка 1 м.

Механико-математическое описание поведения ледового покрова в арктических морях при различных динамических воздействиях и температурах является одной из самых актуальных задач в современной инженерной арктической практике. Дело в том, что дрейфующие ледовые образования (отдельные айсберги, поля с замороженными торосами) могут представлять опасность как для стационарных платформ, так и для плавающих, а также для судов ледового класса. Задачи взрывного и ударного разрушения ледовых образований рассматривались в [15-17]. Кроме того, лед испытывает существенные нагрузки при движении по нему различных транспортных средств. Так, поведение ледового покрова при движении по нему техники рассматривалось в статьях [18-20]. Задачи моделирования поведения плавающего ледового поля в приближении тонкой пластины при движении по нему автотранспорта и при приземлении самолетов содержатся в [21,22] и частично будут приведены ниже. Плавающими в шельфовой зоне объектами являются также и нестационарные, т.е. плавучие, либо якорные конструкции нефтегазовой индустрии. Как стационарные, так и плавучие платформы подвергаются интенсивным силовым воздействиям упомянутых ледовых образований.

Одной из непростых проблем, с которыми сталкиваются конструкторы, является т.н. заторашивание, т.е. нагромождение льдин вблизи инженерного объекта [4,15,23-25]. Дело в том, что заторашивание является частым явлением вблизи ледостойких платформ, что мешает подходу к ним танкеров (нагромождение льдин), торосы влияют на ветровые нагрузки, на мелководье шельфа могут пропахивать дно, воздействуя на поддонные трубопроводы, затруднять движение судов ледового класса.

Для изучения вероятности столкновений различных ледовых образований (ЛО), необходимо решать задачи их дрейфа в Северных морях, чему посвящены работы [7,26,27]. Например, большую часть года Печерское и Карское моря покрыты дрейфующими льдами, скорость движения которых достигает 5 м/с, толщина ледяных полей — до 2 метров, киль торосов — до 20 м. Среди этих образований самыми опасными представляются айсберги (киль — подводная часть айсберга может быть более 50 м), айсберги, замороженные в ледяные поля, характерные размеры которых могут достигать сотен метров и даже километры. Для решения задач о дрейфе необходимо, в первую очередь, рассчитывать (либо измерять) поля скоростей морских течений, воздушных масс, иметь карту глубин моря (киль айсберга может взаимодействовать с дном), рассчитывать изменение геометрии ЛО. Задача в такой постановке представляется довольно сложной, как для построения всех необходимых моделей гидроаэродинамики, механики деформируемого твердого тела (лед, грунт), взаимодействия вода-воздух, лед-грунт, так и в вычислительном плане. При этом построение моделей тороса или айсберга представляет отдельную задачу, т.к. торосы появляются при деформациях и разрушении ледовых полей, айсберги “откалываются” от огромных ледовых массивов и имеют как консолидированную, надводную часть (парус), так и неконсолидированную, подводную часть (киль), их прочностные свойства зависят от распределения температуры, солености. Построение адекватной модели торосов является важной задачей для правдоподобного описания их взаимодействия с плавающими и стационарными шельфовыми сооружениями. Задача образования тороса на основе численного решения нестационарного уравнения теплопроводности с учетом фазовых переходов (задача Стефана) рассматривалась в [28]. Отметим, что движение ледовых образований происходит под действием ветровых нагрузок и течений, в ледяные поля могут заморожены торосы, айсберги, в са-

мих полях могут находиться трещины и развоя. Наличие торосов заметно влияет на шероховатость поверхности льда и приводит к увеличению сил ветров и течений. При этом среднее расстояние между парусами торосов в разных арктических зонах может составлять 200-300 м, высота паруса может достигать нескольких метров, глубина (киль) до 2 десятков метров [7,24].

Одной из важнейших задач нефтегазовой промышленности является проблема транспортировки углеводородов при помощи газо-нефтепроводов. Последние могут находиться над сушей, быть частично в грунте или под его дном. Во всех случаях встают задачи безопасности (прочности) трубопроводов, специфические для каждого упомянутого случая. В случае наземных трубопроводов главной опасностью является рост давления в трубах, а также сейсмическая активность. В случае поддонного трубопровода существенную опасность представляют ледовые образования, взаимодействующие с участком дна моря, находящимся над трубопроводом, поскольку сжимающие напряжения, обусловленные таким воздействием на грунт, передаются на трубопровод. Следствием такого воздействия может быть его деформация или даже локальное разрушение [29,30]. Численное моделирование таких процессов также представляет заметные трудности: необходимо решать задачи напряжено-деформируемого состояния ЛО, находящегося в воде и взаимодействующего с деформируемым водонасыщенным грунтом, например – деформируемого состояния рассматриваемой части трубопровода, помещенного в поддонный грунт с внутренним давлением газа. Задача является нестационарной, однако, характерные времена взаимодействия длительные (от минут до часов), что представляет собой определенные трудности для численного решения (квазистационарные задачи).

В связи с важностью всех указанных задач, касающихся проблем воздействия природных арктических факторов на стационарные и плавающие объекты нефтегазовой инфраструктуры, становится понятной актуальность моделирования динамических процессов, происходящих в водных и воздушных бассейнах Арктики с обработкой наблюдений, и прогнозирования на этой основе динамики ледовой обстановки и дальнейшей оценки устойчивости стационарных и плавающих платформ, поддонных трубопроводов, степени безопасности плавания судов ледового класса. На решение этой проблемы направлены работы [31-35].

Таким образом, можно выделить следующий круг актуальных задач освоения арктической зоны России, которые могут быть численно решены с помощью адекватных механико-математических моделей, современных численных методов и высокопроизводительных многопроцессорных вычислительных систем:

- прямые и обратные задачи сейсморазведки; задачи миграции и инверсии;
- прямые и обратные задачи электроразведки, задачи миграции и инверсии;
- комплексные задачи сеймо- и электроразведки;
- расчет механических и прочностных характеристик льда как твердого деформируемого тела;
- задачи миграции (дрейфа) крупных ледовых образований;
- задачи безопасности морских стационарных ледостойких платформ и плавающих (якорных) платформ нефтегазовой промышленности при воздействии на них природных факторов;
- задачи затораживания ледостойких платформ;

- моделирование процессов образования ледовых образований;
- расчет на прочность нефтегазо-проводов, наземных и поддонных;
- проблемы безопасного плавания судов ледового класса при наличии ледовых образований;
- посадка самолета на плавающую льдину (ледовое поле);
- расчет на прочность ледового покрытия при движении по нему транспортных средств;
- воздействия периодических технических и сейсмических нагрузок на технические сооружения в Арктике;
- климатические задачи Арктики;
- прогнозирование динамики ледовой обстановки с учетом обработки данных наблюдений на воздушном и водном бассейнах Арктики;
- обнаружение “метановых бомб” на Ямале;
- задачи геомеханики (расчет локализации контактных поверхностей в геологических средах);
- определение положения газоносных слоев вблизи скважины (задачи безопасности скважин);
- расчет поля температур в ледовых образованиях с учетом фазовых переходов, солнечной радиации и разрушения льда при их движении в Северных морях;
- задачи фильтрации.

Отметим, что разумеется важными для освоения Арктической зоны также являются проблемы спутниковой связи и адаптации организма человека в условиях Арктического климата; однако они являются предметом другой большой научной работы.

Определяющими уравнениями, описывающими рассматриваемые процессы, являются уравнения механики сплошных сред, в частности, системы уравнений в частных производных механики деформируемого твердого тела, акустики, аэродинамики, гидродинамики, а также система уравнений Максвелла.

Задачи, о которых идет речь, в большинстве своем представляют значительные трудности для их численного решения. Имеются в виду, в первую очередь, построение адекватных реологических моделей поведения сплошных сред (лед, поддонный грунт), контактных условий лед – технический объект, взаимодействие ветров и ледяных полей, килей айсбергов и дна и др. Далее, для численного моделирования указанных процессов необходимо разрабатывать либо подбирать и адаптировать под них адекватные вычислительные методы. Так, для решения стационарных задач наиболее приемлемыми представляются итерационные методы (см., например, [36-38]), а также метод конечных элементов [39,40]. Стационарными являются проблемы устойчивости ледостойких платформ, расчет на прочность ледовых полей, несущих нагрузки, наземных и поддонных трубопроводов. Динамическими являются задачи сейсморазведки и электроразведки, комплексные задачи сейсмо- и электроразведки, задачи взаимодействия ледовых образований с шельфовыми Арктическими сооружениями и судами ледового класса, проблемы безопасности буровых установок, сейсмической опасности, ледовых аэродромов (при посадке летательных аппаратов) и ледовых полей при движении по ним полярного транспорта, фильтрации, а также задачи прочности трубопроводов при динамических воздействиях.

Особенностью задач георазведки (как сейсмической, так и электрической) является их волновой характер. Вычислительным методам решения систем динамических уравнений Максвелла, распространения электромагнитных полей в различных средах, посвящена большая работа [41]. Решение обратных задач электроразведки рассмотрено в статьях [42-47]; этой проблеме посвящена монография [44], в которой подробно изложены вопросы распространения электромагнитных полей в геологических средах, геофизические методы исследования месторождений, магнитотеллурические методы и магнитовариационные методы, методы морской электроразведки. Основная часть монографии посвящена математическим методам решения обратных задач электроразведки, проблемам инверсии электромагнитных данных и миграции электромагнитных полей. По-видимому, это наиболее подробная книга, посвященная этим проблемам. Комплексное решению обратных задач сейсмо- и электроразведки рассматривается в [45]; это направление представляется новым и перспективным для решения поисковых задач Арктического шельфа. Математическая теория решения обратных задач изложена в монографиях [47-49] (разумеется, этой проблеме посвящено много работ).

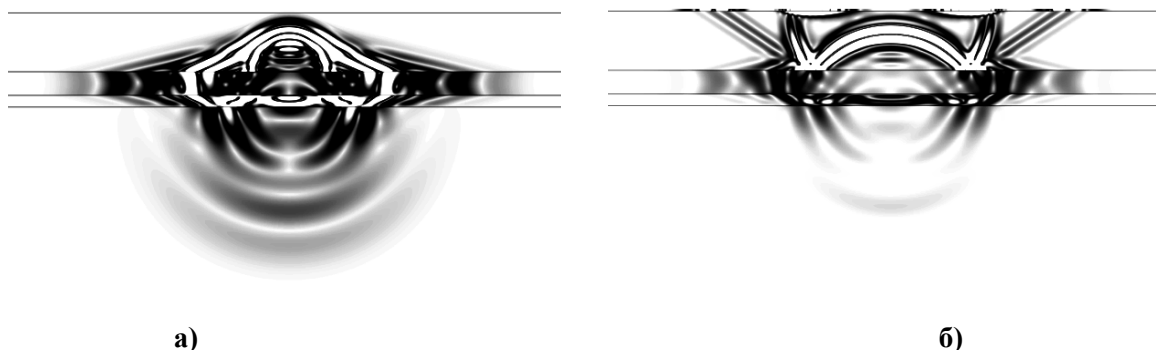
Численному моделированию волновых процессов в геологических средах (прямые задачи сейсморазведки) в Арктическом шельфе России посвящены работы [50-54]. Особенностью этих задач является наличие трех сред: морская вода, донный грунт (вообще говоря, многослойный) с месторождениями и ледовое поле. Одной из основных задач сейсмической разведки является создание достоверной модели подповерхностного пространства геологической среды. Сейсмическая разведка была применена впервые более ста лет назад и значительно развита и усовершенствована к настоящему времени. Можно выделить два основных направления: сейсмическая миграция и сейсмическая инверсия. Результатом процесса инверсии является пространственное распределение параметров среды, тогда как миграция позволяет установить положения отражающих горизонтов и, возможно, точечных отражателей – трещин, включений; таким образом, может быть определена геометрия месторождения углеводородов. Решение этого класса задач и соответствующий обзор представлен в работах [44,49,55] и др.

Сложность возникающих в подобных процессах волновых процессов обусловлена наличием нескольких поверхностей раздела сред: лед-вода, вода-грунт, с различными скоростями распространения звука  $c_p$  и  $c_s$  (скорости распространения продольных и сдвиговых упругих волн соответственно) и свободной верхней границей. Кроме того, в морской воде сдвиговые волны отсутствуют, однако на контактных поверхностях вода-лед, вода-грунт появляются волны Стоунли, в трещинах конечной толщины – волны Крауклиса. Также появляются поверхностные волны на верхней границе ледового поля – Рэлея и Лява, многочисленные кратные волны, обусловленные переотражениями упругих волн от контактных границ в слоистом грунте, волны во льду, обусловленные отражениями от верхней свободной поверхности и контактной границы лед-вода, акустические волны в воде, появляющиеся из-за переотражений от донного грунта и ледового поля. Следует изучить также влияние на волновую картину больших ледовых образований — айсбергов, торосов, а также неровностей дна моря [53]. Изучение этих сложнейших явлений представляется непростой вычислительной задачей, для численного решения которой требуется разработка методов, способных адекватно передавать все их особенности, не иницируя нефизичных осцилляций численных решений, обусловленных



немонотонностью схем, а также нефизичной диссипации, что может быть обусловлено наличием аппроксимационной вязкости. Разработке таких методов, адаптированных под численное исследование волновых процессов, посвящены многие работы. Среди пионерских работ, посвященных таким методам (хотя они разрабатывались и для других приложений), можно отметить [56-63]. Причем в последних двух работах применялся сеточно-характеристический метод, использующий характеристические свойства систем уравнений в частных производных гиперболического типа, который позволяет наиболее корректно строить вычислительные алгоритмы на границах области интегрирования, контактных границах, а также, в определенной степени, учитывать физику задачи (распространение возмущений вдоль характеристик). Подобный обзор таких методов приведен в книгах [57,64-66]. Для численного решения динамических задач механики сплошных сред разрабатывались методы повышенного порядка точности, см., например, [67-84]. В монографии [80] разработаны компактные разностные схемы высокого порядка точности и дан подробный обзор работ по численным методам этого класса. Важное свойство монотонности разностных схем порядка точности выше первого (они немонотонны, в соответствии с теоремой Годунова) учитывалось в [66,71-76] и др. Обзор работ по разработке и численной реализации таких вычислительных методов приведен в статье [72].

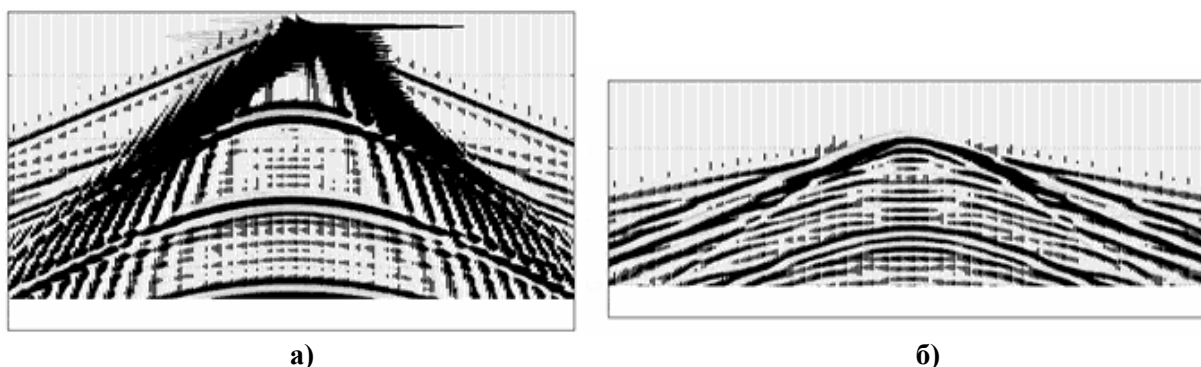
Ввиду большой вычислительной сложности рассматриваемых задач, для их численного решения использовались высокопроизводительные многопроцессорные вычислительные системы, для работы с которыми необходимо разрабатывать параллельные вычислительные алгоритмы (см., например, работы [77,85-87]. Представим результаты численного решения некоторых актуальных задач освоения Арктического шельфа России. На рис.1 представлены волновые картины, возникающие при численном решении задач сейсмической разведки в условиях Арктического шельфа (представлены изоповерхности модуля скорости). На рис.1а рассматривается источник, расположенный во льду, на рис.1б – расположенный на дне, на рис.2 представлены сейсмограммы, соответствующие исследуемым случаям, зафиксированным на приемниках, расположенных на льду и измеряющим вертикальную компоненту скорости [51,53].



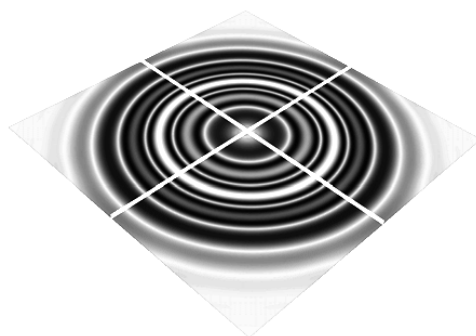
**Рис.1.** Волновые картины. Сравнение расположения источников во льду и на дне. Случай со льдом.

На рис.3 показана волновая картина, возникающая в расчетной области интегрирования в момент времени  $4.510 \cdot 10^{-4}$  с после действия сейсмического источника при численном решении аналогичной задачи (3D-визуализация). Горизонтальный срез располо-

жен на глубине 2 м от поверхности льда [52].

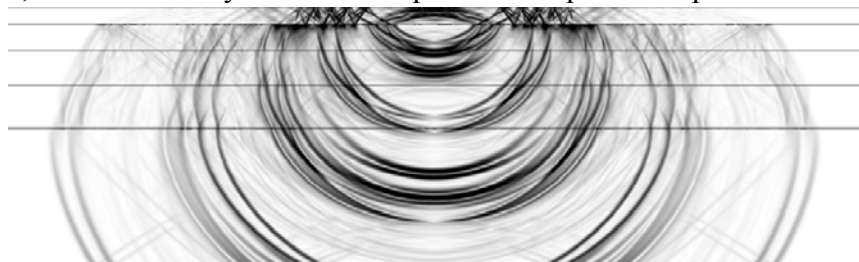


**Рис.2.** Сейсмограммы (вертикальная компонента скорости). Сравнение расположения источников во льду и на дне. Случай со льдом.



**Рис.3.** Распространение волн в толще льда.

На рис.4 приведены волновые картины распространения волн в многослойной среде, верхним слоем которой является морская вода одного из Северных морей [79]; соответственно, градацией серого показан модуль скорости. В верхнем слое видно распространение кратных волн между морским дном и поверхностью моря, вниз распространяются упругие волны, взаимодействующие с поверхностями раздела сред в поддонной зоне.



**Рис.4.** Распространение волн в многослойной среде (верхний слой – морская вода).

На рис.5. представлены результаты численного моделирования воздействия льдин на нефтедобывающую платформу в условиях заторашивания [15]. Явление заторашивания (среди полярных исследователей “стамуха”) представляет опасность для судов ледового класса, танкеров, подходящих к платформе, поскольку нагромождение льдин перекрывает подходы к шельфовым сооружениям. Моделирование этого явления позволяет предсказать ледовую обстановку вблизи платформы и предложить средства по ее нейтрализации (расчет проведен А.В. Санниковым). Картина заторашивания наклонной балки, расположенной на рисунке справа, обозначенной черным цветом, многочисленными льдинами, при наезде ледового поля на объект, показана на рис.6 [23].

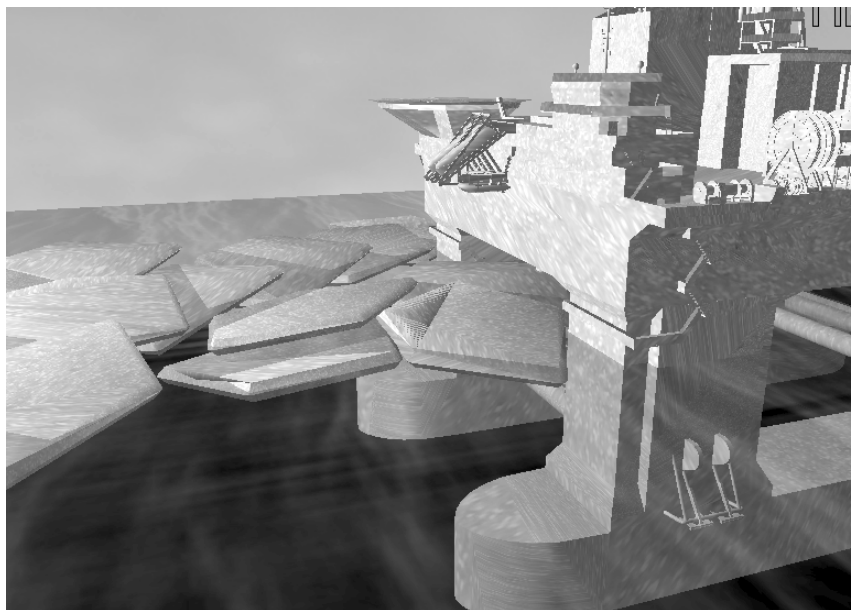


Рис.5. Воздействие льдин на нефтедобывающую платформу.

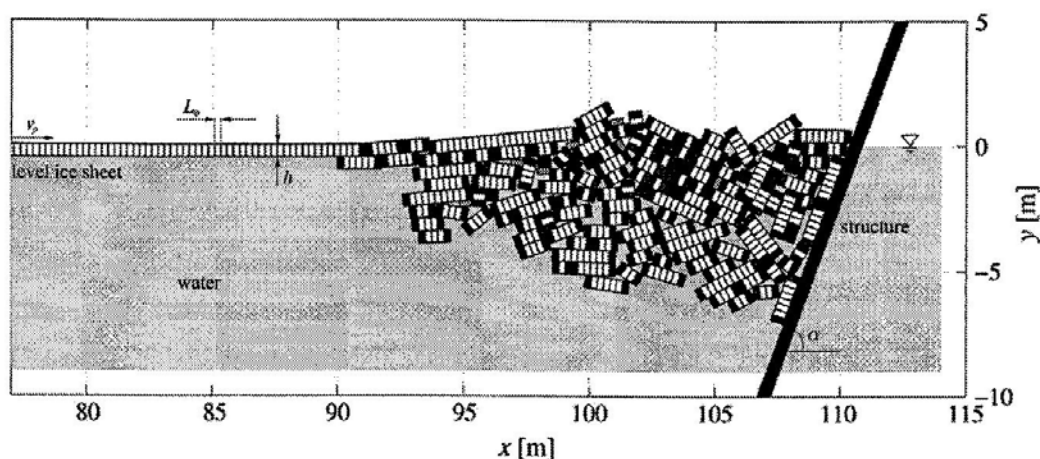
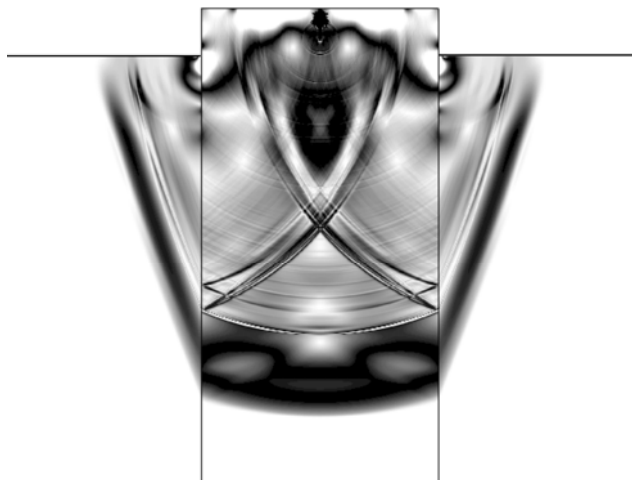


Рис.6.

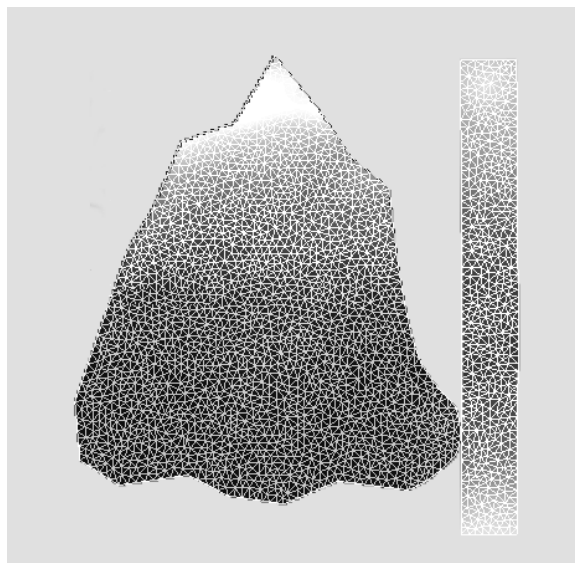
На рис.7. представлена волновая картина, возникающая при взрывном воздействии на айсберг, белым цветом показана образующаяся система трещин, градацией серого цвета показан модуль скорости, более темный цвет соответствует максимальному значению. Расчет проводился сеточно-характеристическим методом, разрушения рассчитывались на основании критерия Мизеса [50].

На рис.8 представлены расчетная сетка и волновая картина, возникающая при соударении айсберга со стойкой нефтедобывающей платформы. Расчет проводился на нерегулярной расчетной сетке с помощью разрывного метода Галеркина (градацией серого цвета показан модуль скорости [88]). При численном решении рассматриваемых задач использовалась пространственная система динамических определяющих уравнений механики деформируемого твердого тела (см., например, [63]), для описания волновых процессов в морской среде – система акустических уравнений.

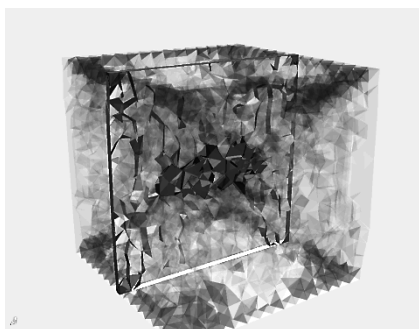
В то время, как внешняя картина разрушений достаточно наглядна и легко поддается качественному сравнению с натурным экспериментом, картина внутренних разрушений достаточно сложна и более подробно её структуру можно видеть в разрезе (рис.9), где показаны сдвиговые и откольные разрушения после сжатия ледового куба [8].



**Рис.7.** Воздействие на айсберг.  
Волновая картина.



**Рис.8.** Столкновение айсберга со стойкой  
нефтедобывающей платформы.



**Рис.9.** Сечение картины разрушений ледяного образца.



Полученную картину разрушений можно качественно сравнить с натурными экспериментами, проведёнными в аналогичных условиях (рис.10), [4].



**Рис.10.** Картины разрушения ледяного образца в натурных экспериментах.

С помощью разрывного метода Галёркина, разработанного для решения рассматриваемых задач в [78,79] и описанной выше модели численно решалась серия задач взаимодействия ледяного поля с вертикальной опорой [88]. Ледяное поле толщиной 1 м и длиной 10 м сталкивается с зафиксированным препятствием (на правой торцевой границе ледяного образования задана фиксированная скорость, что соответствует модели полубесконечного поля). В этой модели независимо варьировались четыре параметра: модуль Юнга  $E$  предел текучести  $k$  предел прочности на растяжение  $\sigma_{\max}$  пластическая

деформация разрушения  $\varepsilon_p^{\max}$ . Другие параметры, такие как плотность, коэффициент Пуассона  $\nu$ , не варьировались, так как они в отличие от параметров, приведённых выше, являются постоянными в широком диапазоне температур и солёностей. Для каждого набора параметров проводили численный эксперимент и рассчитывали максимальную глобальную нагрузку, действующую на опору. Начальные параметры льда были взяты из [4]. Параметры льда модуль Юнга  $E = 5 \times 10^9$  Па, предел текучести  $k = 2.5 \times 10^6$  Па, предел прочности на растяжение  $\sigma_{\max} = 1.2 \times 10^6$  Па и пластическая деформация разрушения  $\varepsilon_p^{\max} = 0.012$ .

Картина прорезания стойкой платформы ледового поля и его разрушения, при его движении по направлению к ней показана на рис.11а. Расчет выполнялся с помощью разрывного метода Галёркина с учетом разрушения ледового поля [88] (расчет В.А. Мирахи). Решение этой задачи важно для предсказания последствий взаимодействия ледового поля и ледостойкой платформы в зоне шельфа, а также для проектирования самих платформ и обеспечения их безопасности. Разрушения в этом процессе имеют сдвиговой характер. На рис.11б видна картина разрушений ледового поля при его взаимодействии со стойкой ледостойкой платформы. Темная зона вблизи стойки соответствует сдвиговым разрушениям (дробление льда), трещины, обусловленные откольными разрушениями, распространяются от углов стойки, имеющей 8 углов. Характер разрушения ледового поля при его взаимодействии с препятствием (стойкой ЛСП) представлен на рис.11в. В данном процессе реализуются сдвиговые разрушения, на ледовой пластине образуется срез под уклон  $\sim 45^\circ$ .

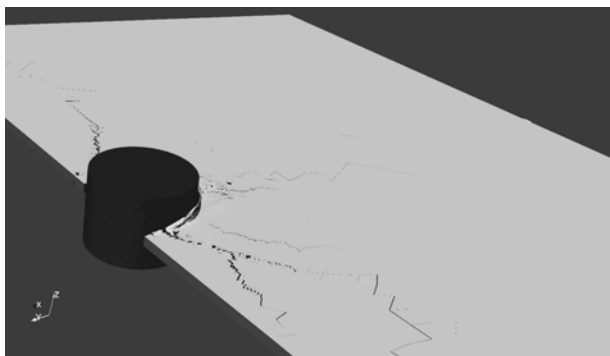


Рис.11а.



Рис.11б.

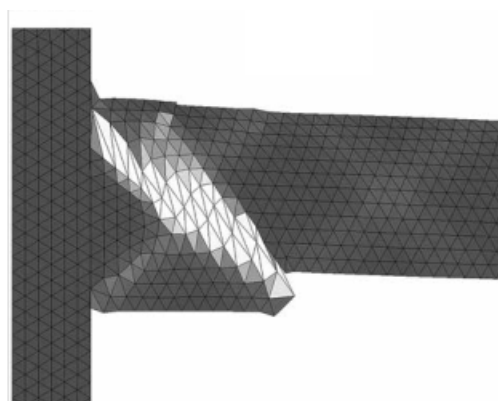
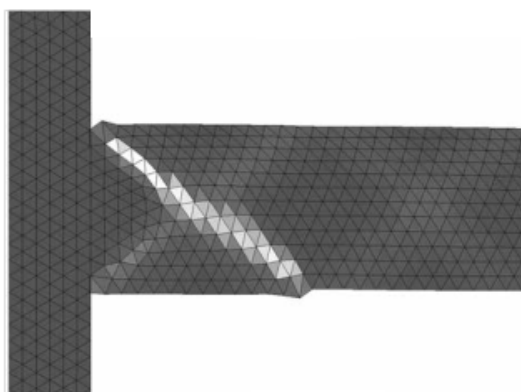


Рис.11в. Характерные картины разрушений ледяного образования. Оттенком показана величина работы пластической деформации

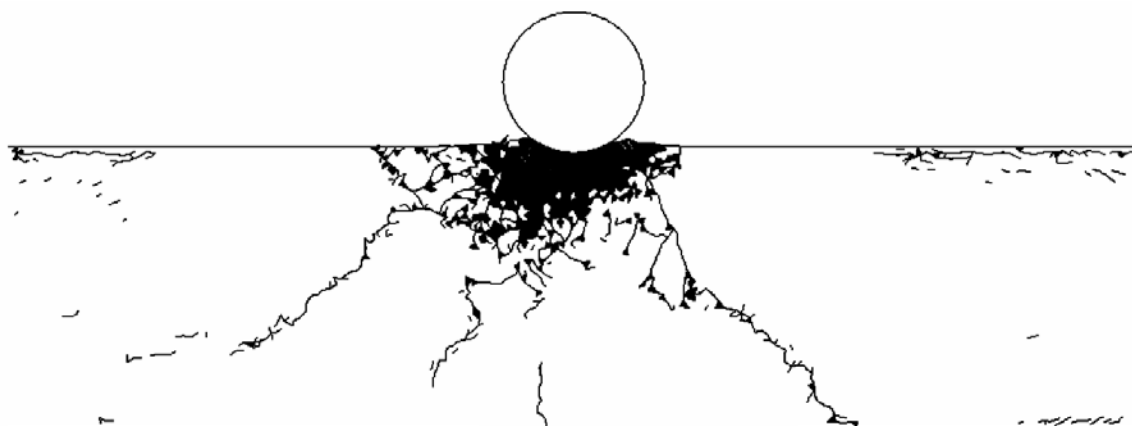
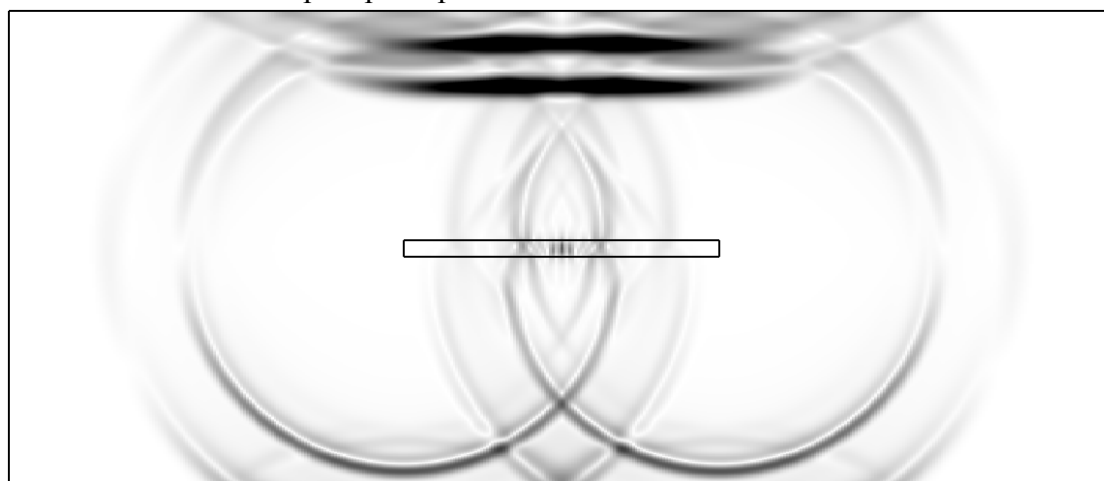


Рис.12.

Расчетная картина разрушения ледового слоя при ударном воздействии на него откольным шариком показана на рис.12. В расчете ставились критерии разрушения на сдвиг и откол [89]. Сплошные зоны соответствуют дроблению льда при выполнении сдвигового критерия разрушения, линии соответствуют трещинам, образующимся при выполнении откольного критерия прочности.



**Рис.13.** Пример волновой картины сред при задании однородного газового трещиноватого кластера методом эффективной среды.

Сложная волновая картина, образующаяся при прохождении сейсмического импульса через углеводородосодержащий слой представлена на рис.13. Вверху видны два фронта отраженных от прямоугольного кластера волн – продольных и поперечных (по ним определяется глубина залегания месторождения и толщина); две кольцевидные волны образуются на концах резервуара (по ним можно определять его горизонтальный размер) [90].

Изоповерхности модуля скорости среды при расчете волновых картин в двухслойной среде морская вода-грунт при наличии двух крупных ледовых образований (на рис. – два параллелепипеда, плавающих вблизи верхней поверхности моря) видны на рис.14. Дело в том, что крупные ледовые образования влияют на картину поверхностных волн, но их влияние может сказаться и на всю волновую картину, т.к. Северные моря Российской Федерации неглубокие (приблизительно до 300 м глубины), а кили больших айсбергов могут достигать величины до 100 м<sup>2</sup> [53].

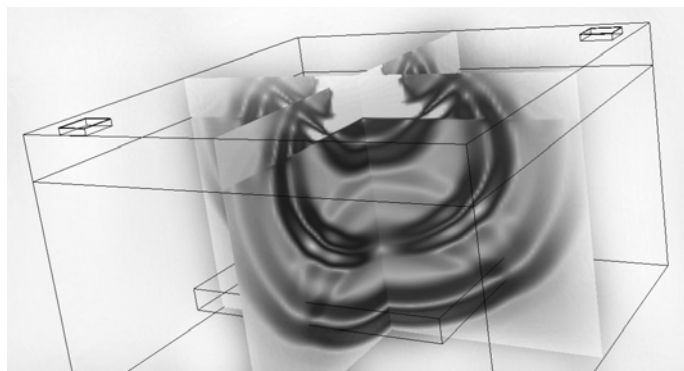


Рис.14. Волновые картины в момент времени 0.45 с. в слоях: вода, грунтовый слой.

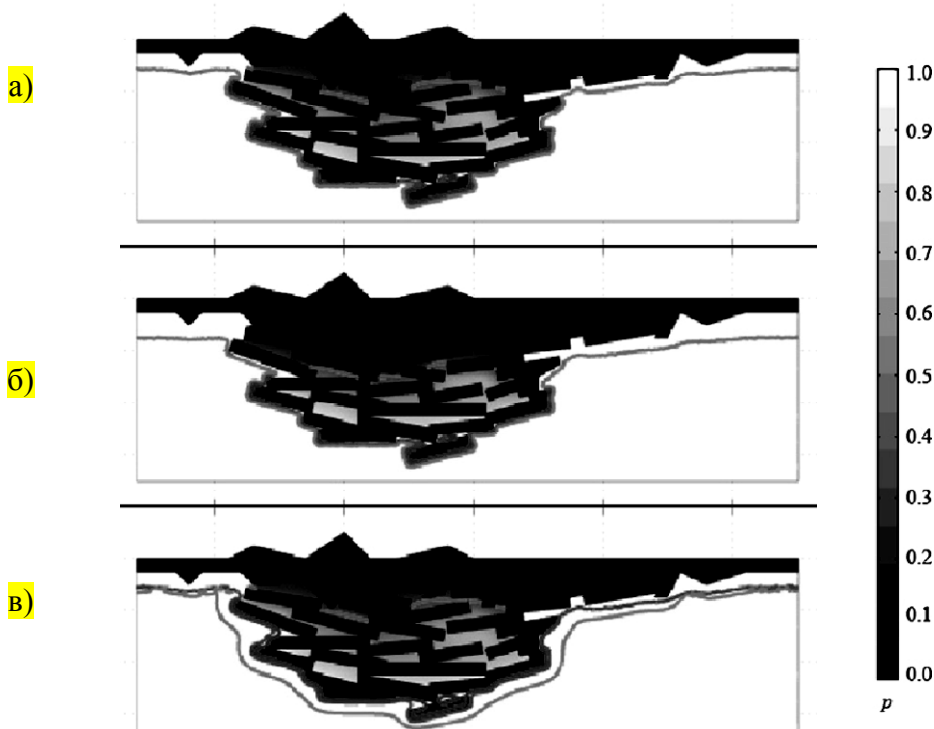


Рис.15. а – температура воздуха,  $T_b = -15^\circ$ ; б – температура воздуха,  $T_b = -30^\circ$ .

Модель образования торосов в морской воде была разработана в работах [24,28]. Торосы образуются при разрушении ледовых полей под действием ветровых нагрузок. Верхняя часть тороса консолидирована (лед), нижняя представляет собой набор плавающих под водой льдин. Математическое моделирование образования тороса проводится путем численного решения задачи Стефана (нестационарное неоднородное уравнение теплопроводности с учетом теплоты фазового перехода). Пример такого моделирования приведен на рис.15 (расчет проведен в [28]).

Проблема дрейфа айсбергов в Северных морях рассматривалась, например, в [26]. Учет всех физических факторов, воздействующих на движение крупных ледовых образований, представляется непростой задачей (расчет либо измерения морских течений, морских ветров в Арктической зоне, влияние формы дна неглубоких северных морей, изменение формы айсберга из-за фазовых переходов, частичных разрушений, солнечной радиации). На рис.16 приведены сопоставления расчетных и экспериментальных данных по движению айсберга в Карском море, полученные в данной работе. Видно, что необходимо уточнение используемых моделей и необходимых для расчетов измерений для

более точного решения поставленной проблемы (на рис.16 изображены расчетная и измеренная траектории айсберга, дрейфовавшего в периоде 19.09.1989г. по 22.11.1989г. в Северном море).

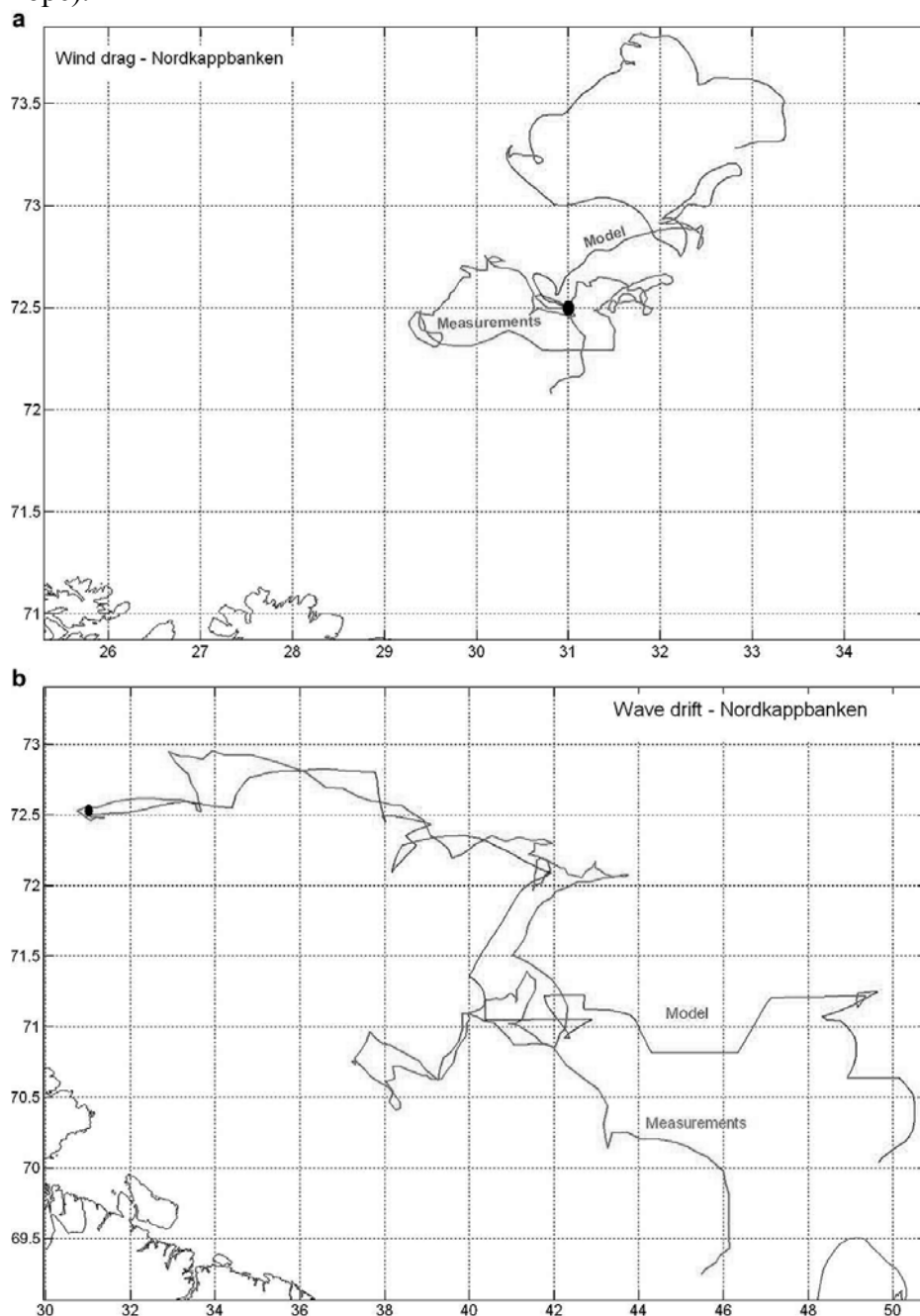


Рис.16.

Последствия столкновения нефтяного танкера с айсбергом показаны на рис.17 [14]. Для предсказания таких катастроф необходимо численно решать задачу взаимодействия килей крупного ледового образования и судна ледового класса, что представляется весьма трудной вычислительной задачей столкновения двух сложных пространственных конструкций. Подход к численному решению подобных задач применительно к иным конструкциям разработан в [88,89], где использован сеточно-характеристический метод [57,63], поскольку в рассматриваемых процессах присутствуют как деформационные, так и волновые процессы.



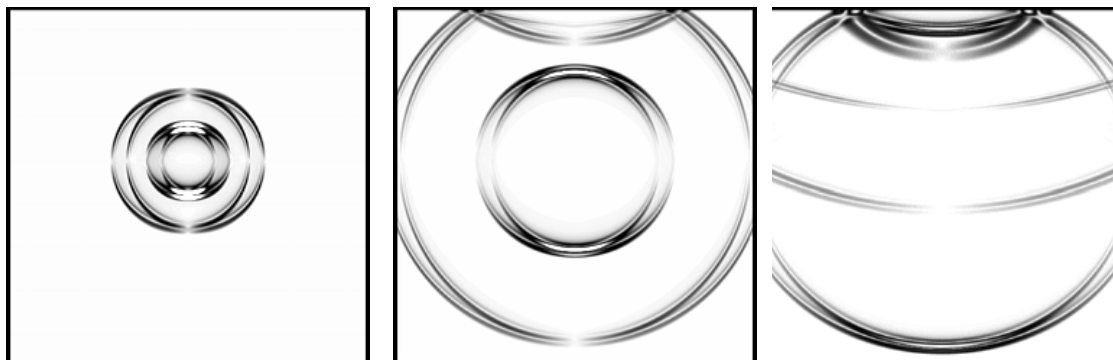


Рис.17.

Актуальной проблемой для безопасности сооружений нефтегазовой индустрии является сейсмическая активность в Арктической зоне Российской Федерации [91,92], влияющая на стойкость стационарных ледостойких платформ и искусственных ледовых островов, находящихся в контакте с ледовыми полями толщиной до 2.5м. Эта задача может численно решаться двумя путями: в первом случае данные для ее решения могут браться из показаний сейсмодатчиков, установленных на донных станциях либо на платформах, во втором – расчет проводится с измельчением сетки вдали от очага землетрясения. В последнем случае численно моделируются процессы, происходящие в эпицентре, затем решается вычислительно трудоемкая пространственная задача о распространения волн в толще Земли от эпицентра до морского дна, после чего проводится измельчение расчетной сетки (используются иерархические сетки – [рис.19а](#)), вследствие большой разницы в характерных размерах исследуемых объектов. Примеры таких расчетов приведены на рис.18, 19.

На рис.18а изображены сейсмические волны, распространяющиеся от очага землетрясения, в момент времени 0.3 с. Можно видеть сформированные Р-волну (продольную волну) и S-волну (поперечную волну). На рис.18б приведена волновая картина в момент времени 0.8 с, Р-волна отражается от дневной поверхности и формируются обменные РР-волна (продольная волна, возникающая при отражении Р-волны) и PS-волна (поперечная волна, возникающая при отражении Р-волны). А на рис.18в видно отражение S-волны от дневной поверхности в момент времени 1.5 с и формирование обменных SP-волны (продольной волны, возникающей при отражении S-волны) и SS-волны (поперечной волны, возникающей при отражении S-волны).

Проблема безопасности поддонных трубопроводов при дрейфе ледовых образований в мелководных частях шельфа рассмотрена в [29,30]. При дрейфе крупных ледовых образований (скоплений льдин – “стамух”, дрейфующих вместе с большими ледовыми полями, айсбергов), происходит вспахивание морского дна килем ЛО и реализуется давление на донный грунт, а через него – на поддонные трубопроводы. Схематическое изображение этих процессов показано на рис.20а (действие стамухи) и рис.20б (действие айсберга [93]). Численное решение этой задачи представляется необходимым на стадии проектирования поддонных трубопроводов в северных морях.



а. Сейсмические волны от очага землетрясения. Момент времени 0.3 с.

б. Отражение Р-волны от дневной поверхности. Момент времени 0.8 с.

в. Отражение S-волны от дневной поверхности. Момент времени 1.5 с.

Рис.18.

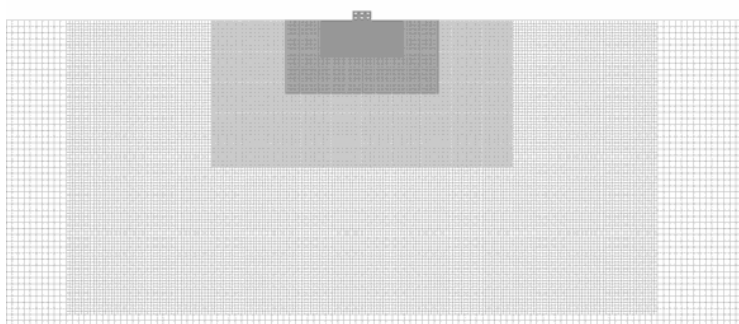


Рис.19а. Система вложенных иерархических сеток.



19б. Повреждения в наземном сооружении.

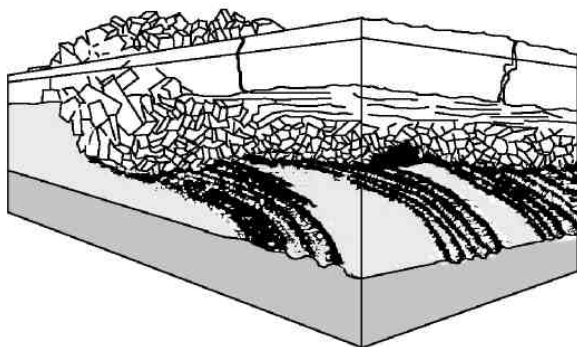


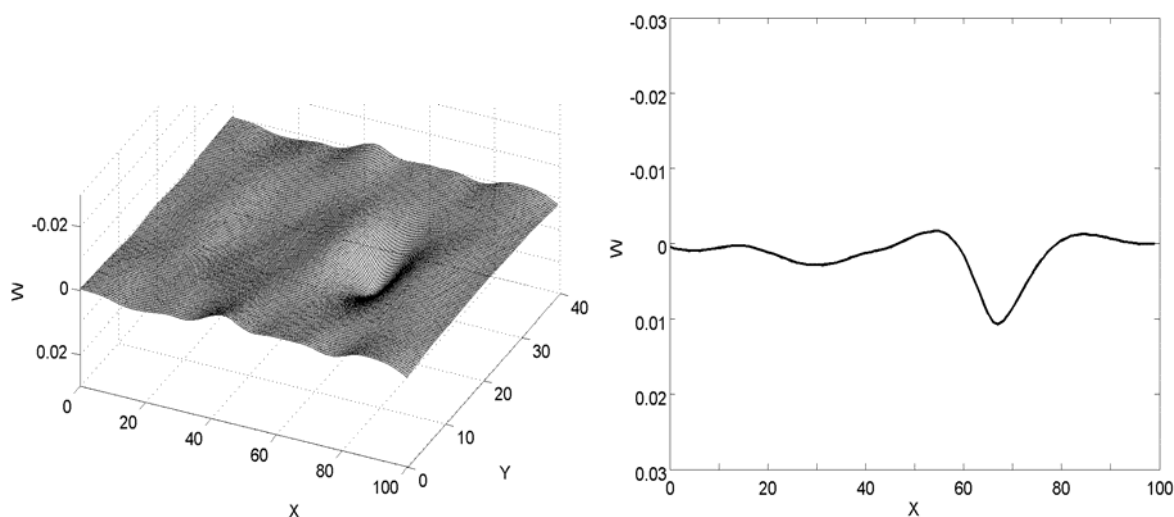
Рис.20а. Механизм выпахивания дна за счет воздействия дрейфующих ледяных полей на кромку припая.



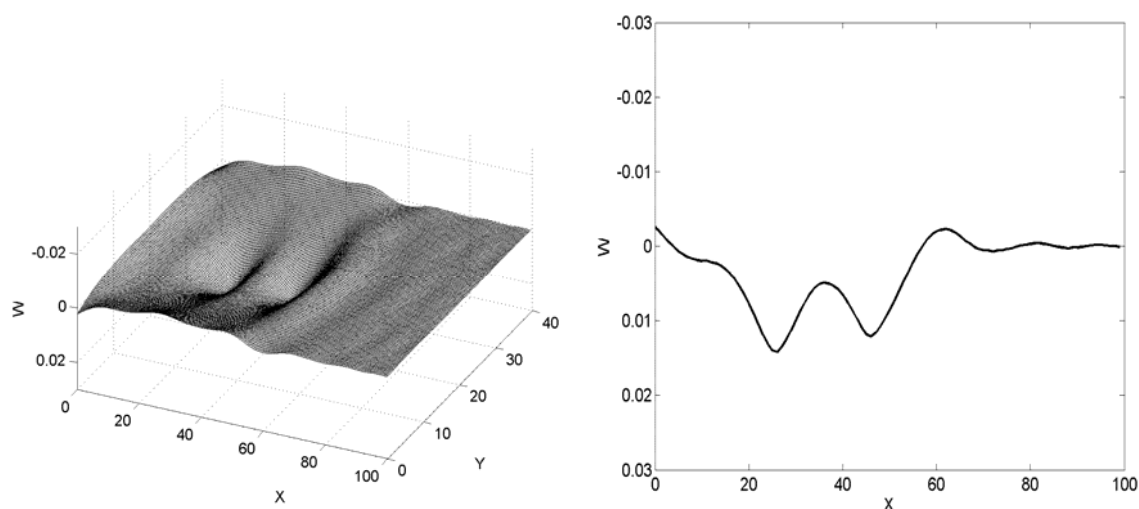
Рис.20б. Экзарация дна торосом, вмерзшим в дрейфующее ледяное поле.

В [21] приведены результаты численных экспериментов по изучению поведения плавающего ледяного покрова при движении по нему автотранспорта. Ледяной покров моделировался в приближении тонкой упругой пластины, лежащей на упругом (вода) основании. Для численного решения задачи авторами был разработан и обоснован новый конечно-разностный метод аппроксимации [21,94-96]. В проведенных вычислительных экспериментах брались следующие параметры: линейные размеры ледяного покрова постоянной толщины –  $100 \text{ м} \times 40 \text{ м}$ , размер сетки –  $500 \times 200$  узлов, шаг по времени определялся из условия устойчивости метода решения системы разностных уравнений; значения физических параметров ледяного покрова: модуль упругости  $E = 5.1 \cdot 10^8 \text{ н/м}^2$ , коэффициент Пуассона  $\sigma = 0.35$ , прочность льда на растяжение  $0.5\text{--}1.0 \text{ МПа}$ , прочность

льда на сжатие 2–3 МПа. В качестве критериев разрушения выбирались минимальные значения прочности на растяжение и сжатие. На рис.21 представлены результаты численного моделирования движения одного автомобиля массой 2.2 тонны со скоростью 15 м/с по ледяному покрову толщиной 0.26 м. Разрушения льда в этом эксперименте не происходит. На правых рисунках изображена волновая картина в разрезе. Значительный интерес представляет случай совместного движения двух или более объектов по ледяному покрову. При этом, в зависимости от расстояния между объектами, волны, распространяющиеся от них, могут гаситься или складываться с увеличением амплитуды. На рис.22 представлены результаты численного моделирования одновременного движения двух одинаковых автомобилей массой по 2.2 тонны с одинаковой скоростью 15 м/с на расстоянии 20 м по ледяному покрову толщиной 0.29 м. После того как волна от движения первого автомобиля достигает второго автомобиля, наблюдается увеличение амплитуды колебаний, рассчитываемые в программе максимальные напряжения превышают минимальное значение прочности льда на растяжение 0.5 МПа и происходит разрушение ледяного покрова.



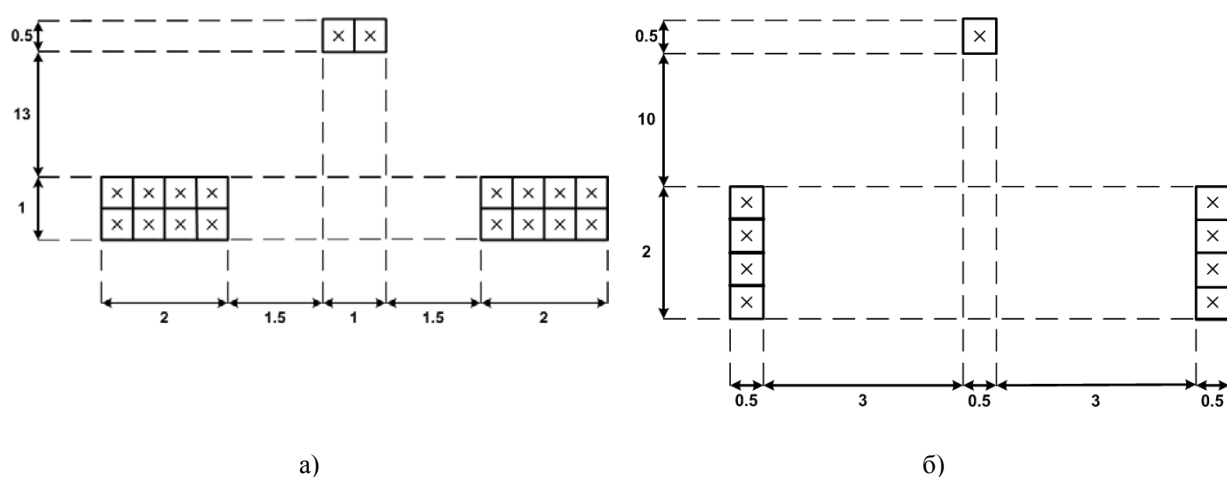
**Рис.21.** Движение одного автомобиля по ледяному покрову на поверхности воды. Параметры эксперимента: масса автомобиля – 2.2 т; скорость – 15 м/с; толщина льда – 0.26 м.



**Рис.22.** Движение двух автомобилей по ледяному покрову на поверхности воды. Параметры эксперимента: масса каждого автомобиля – 2.2 т; скорость – 15 м/с; толщина льда – 0.29 м; расстояние между автомобилями – 20 м.

В [22] приведены результаты численных экспериментов по изучению поведения плавающего ледяного покрова при приземлении на него самолетов. В численных экспериментах задавались следующие значения физических параметров ледяного покрова: модуль упругости  $E = 5 \cdot 10^9$  н/м<sup>2</sup>, коэффициент Пуассона  $\sigma = 0.33$ , прочность льда на растяжение  $0.5 \div 1.0$  МПа, прочность льда на сжатие  $-3 \div -2$  МПа. Моделировалась задача о колебаниях ледяного покрова постоянной толщины со свободным краем. В расчетах рассматривался ледяной покров с линейными размерами  $2500 \text{ м} \times 250 \text{ м}$ . Размеры сетки –  $5000 \times 500$  узлов при одинаковых шагах сетки  $\Delta x = \Delta y = 0.5 \text{ м}$  – позволили учитывать давление на лед каждого колеса шасси самолета.

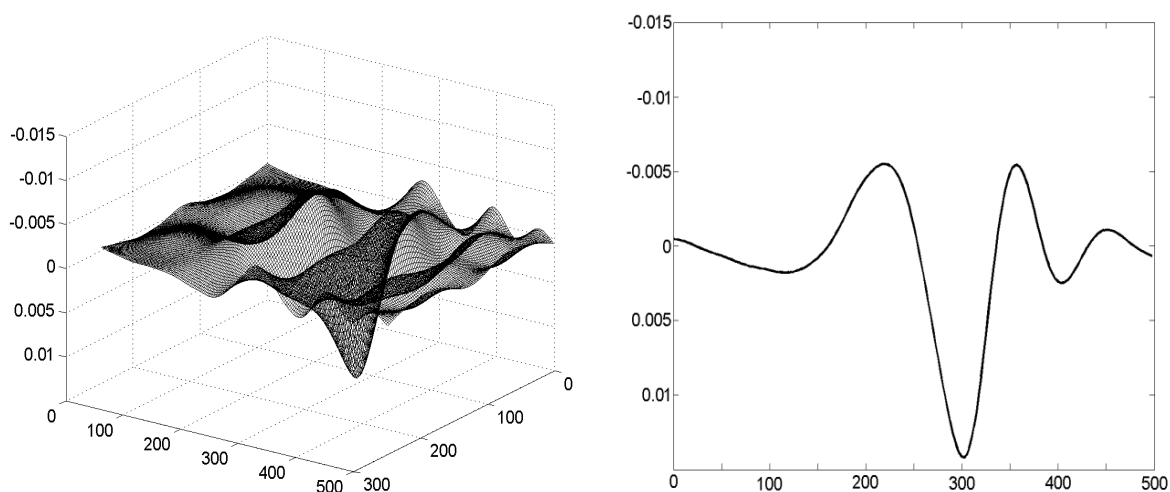
На рис.23 показаны схемы распределения нагрузки на лед от шасси самолетов ИЛ-76ТД и С-130Н Hercules, размеры приведены в метрах, каждый прямоугольник обозначает соответствующую стойку шасси самолета, а каждый квадрат внутри обозначает отдельное колесо, крестиками обозначены узлы сетки, в которых задается нагрузка от каждого колеса.



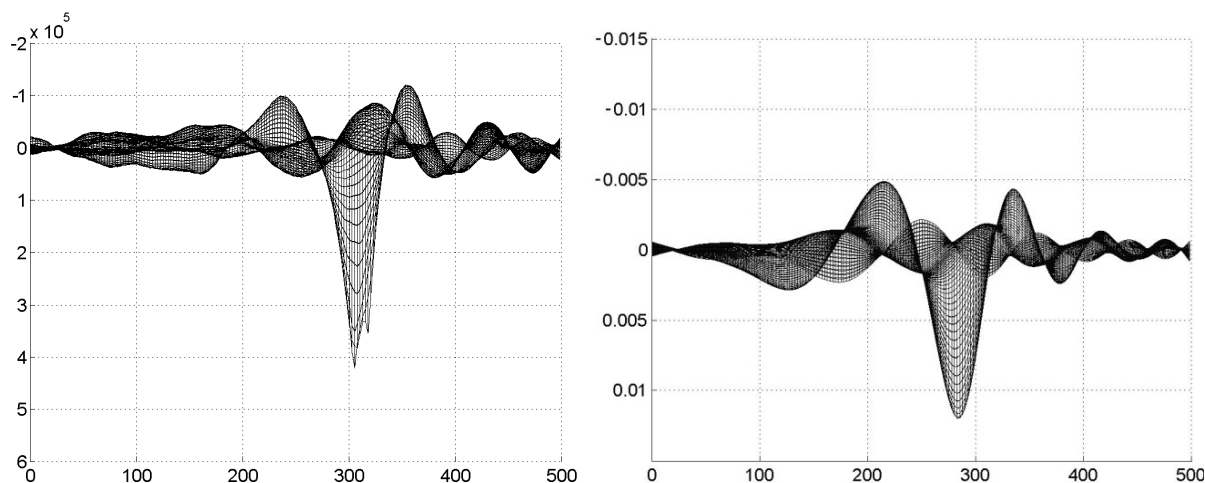
**Рис.23.** Схема распределения нагрузки от шасси самолетов: а) ИЛ-76 ТД, б) С-130Н Hercules.

На рис.24,25 представлены результаты численного моделирования посадки самолета ИЛ-76 массой 151.5 тонны со скоростью 55 м/с на ледяной покров толщиной 5 м. На рис.24 представлена волновая картина поперечных прогибов ледяного покрова во времени (на правых рисунках волновая картина в поперечном разрезе по линии движения центра передней стойки шасси). На рис.25 видны значения нормальной компоненты тензора напряжений  $\sigma_{xx}$  во времени. На рис.25 можно видеть максимальное напряжение, возникающее под задними стойками шасси самолета, и локальный максимум напряжений от передней стойки шасси. Разрушения льда в проведенном расчете не происходит. На рис.26 представлена волновая картина поперечных прогибов ледяного покрова во времени по результатам расчета посадки самолета С-130Н Hercules массой 50 т со скоростью 50 м/с на ледяной покров толщиной 2.5 м. Разрушения льда в проведенном расчете не происходит.

Результаты расчета значений поперечных прогибов льда (см. рис.25) сравнивались с результатами моделирования посадки самолета С-130Н Hercules на ледовый аэродром McMurdo Sound в Антарктиде, полученным в работе канадских ученых F.Milinazzo, M.Shinbrot, N.W.Evans [97] на основе аналитического метода решения и аппроксимации полученного интеграла квадратурной формулой.



**Рис.24.** Результаты расчета значений поперечных прогибов льда  $W$  [м] при посадке самолета ИЛ-76. Параметры расчета: масса самолета – 151.5 т; начальная скорость – 55 м/с; толщина льда – 5 м.



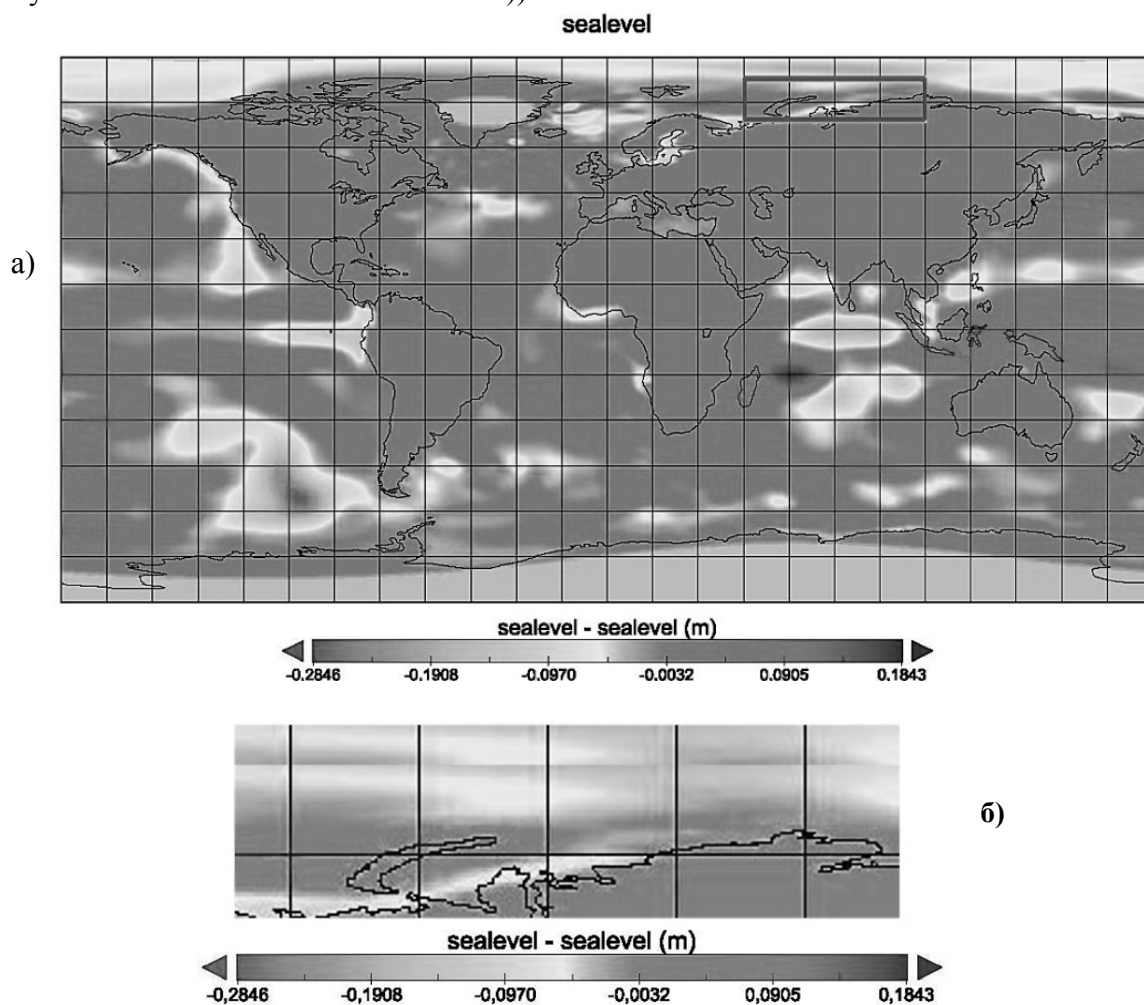
**Рис.25.** Результаты расчета значений нормальной компоненты тензора напряжений  $\sigma_{xx}$  [Па] при посадке самолета ИЛ-76 на плавающий лед. Параметры расчета: масса самолета – 151.5 т; начальная скорость – 55 м/с; толщина льда – 5 м.

**Рис.26.** Результаты расчета значений поперечных прогибов льда  $W$  [м] при посадке самолета С-130. Параметры расчета: масса самолета – 50 т; начальная скорость – 50 м/с; толщина льда – 2.5 м.

В ходе численных экспериментов было также проведено исследование предельной толщины ледяного покрова, при которой не происходит его разрушения. В качестве критериев разрушения выбирались минимальные значения прочности на растяжение и сжатие. Для самолета ИЛ-76 массой 151.5 т минимальная толщина льда, при которой минимальные значения прочности на растяжение и сжатие не достигались, равна 4.2 м. Для самолета С-130Н Hercules массой 50 т минимальная толщина льда, при которой минимальные значения прочности на растяжение и сжатие не достигались, равна 1.7 м.

В [33,34] для модели динамики океана разработан новый гибридный метод усвоения данных наблюдений калмановского типа, в котором для коррекции значений выходных параметров модели на временном шаге используются их значения на текущем и

предыдущем шагах по времени. Данные наблюдений, в отличие от стандартной схемы Калмана, которая не учитывает динамику модели и использует для коррекции рассчитанных параметров модели только значения параметров и данные наблюдений на текущем шаге и не использует скорректированные значения параметров с предыдущего шага. В этом состоит преимущество метода. В [35] описано применение разработанного метода усвоения данных совместно с вычислительной климатической моделью Max Planck Institute Earth System model (MPIESM), созданной в Институте Макса Планка по метеорологии в г. Гамбург, Германия [98]. В численных экспериментах использовались данные по уровню и температуре поверхности океана и другие данные из архива AVISO (Archiving, Validating and Interpolating Satellite Ocean, [www.ifremer.ocean.fr](http://www.ifremer.ocean.fr)). Особое внимание было уделено анализу параметров в Арктической зоне России. В качестве важных характеристик Арктической зоны рассматривались характеристики ледового покрытия: толщина льда и его концентрация (компактность). Для коррекции расчетов использовались данные спутниковых наблюдений (<http://nsidc.org> in Arctic zone (MASAM2: Daily 4-Km Arctic Sea Ice Concentration)).

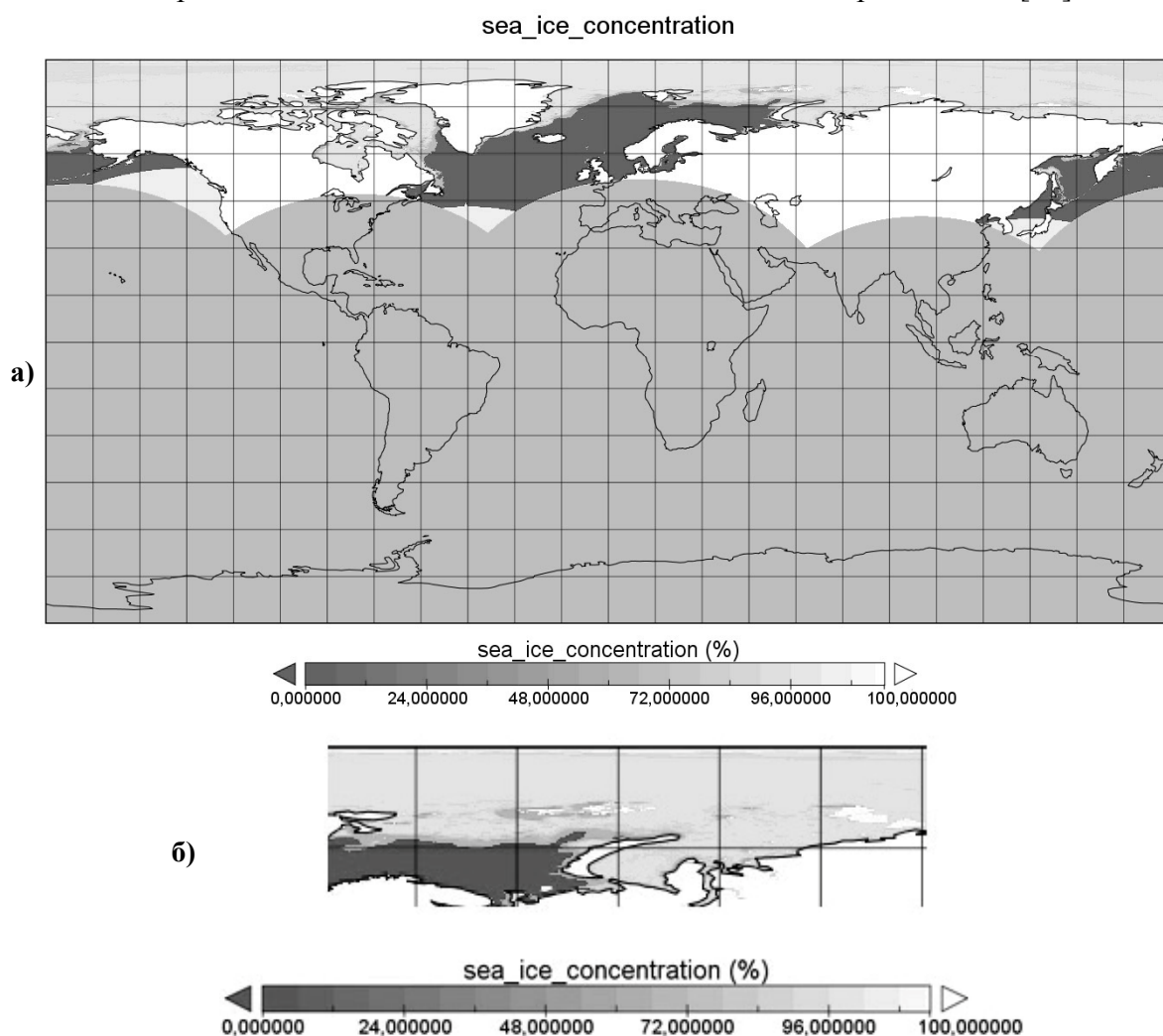


**Рис.27.** Разница расчетных значений уровня океана (м) через 18 мес. до и после усвоения (а) и в выделенном Арктическом регионе России (б).

На рис.27 показана разница расчетных значений уровня океана (м) через 18 мес. до и после усвоения (а). В выделенном Арктическом регионе России (б) наблюдается значительное увеличение уровня океана (до 0.12м) после усвоения данных наблюдений, по



сравнению с расчетом по модели без усвоения данных. Проведенное в [35] сравнение наблюдаемой концентрации (компактности) морского льда (рис.28) и расчетов с усвоением данных показали хорошее соответствие. Так, в районе Карского моря наблюдаемые значения концентрации льда составляют 70-80%, в то время как модельные расчеты с усвоением данных для того же района дали значения – около 70%. Отметим, что проблеме моделирования климата и его изменений посвящена обзорная статья [99].

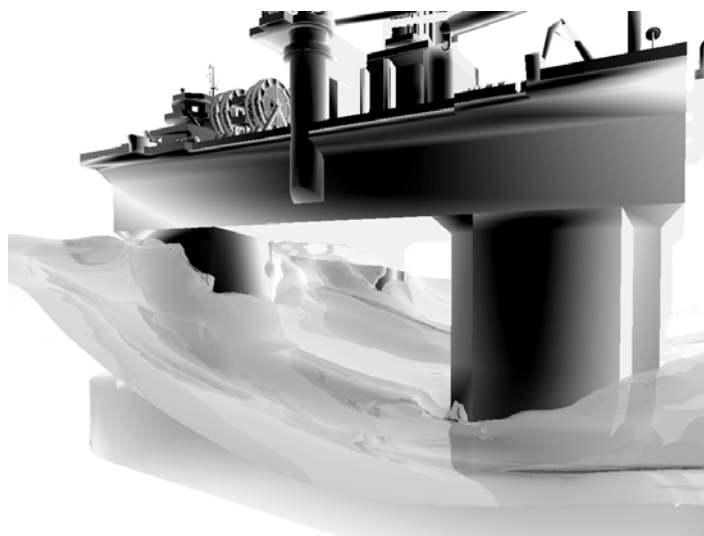


**Рис.28.** Концентрация (компактность в %) морского льда по данным наблюдений MASAM2 в Арктической зоне (а) и в выделенном Арктическом регионе России (б).

Одно из важнейших приложений решения климатических задач в Арктике — предсказание морских штормов и штормовых ветров, а также и расчет их воздействия на стационарные и плавающие конструкции нефтегазового комплекса. В работе [100] решается сложная пространственная задача о гидродинамическом обтекании полупогруженной стационарной нефтяной платформы, заданной в расчетах в Карском море с целью определения силовых нагрузок, действующих на платформу со стороны морских волн. Для моделирования брались максимально высокие волны, наблюдаемые в Карском море. Пример 3D-визуализации морских волн приведен на рис.29.

Также важными задачами для изучения движения нефти в пористых геологических средах (не только в Северных районах страны) являются задачи фильтрации. По-видимому, одними из наиболее продвинутых в этой области представляются [65,101-105].

В заключение отметим, что в работе приведены проблемы освоения Арктического шельфа России, которые могут быть решены путем численного моделирования, а также методы, которые можно использовать для их решения и обзор работ, в которых проводятся такие исследования. Несмотря на сложность постановок этих проблем, их решение представляется реальным, если использовать современные численные методы, механико-математические модели и высокопроизводительные вычислительные системы. Отметим, что численное моделирование рассмотренных процессов требует намного меньше вложений, чем натурные эксперименты, и в то же время позволяет получить намного больше информации (числовых характеристик), характеризующих исследуемые процессы.



**Рис.29.** 3D-визуализация обтекающих платформу волн.

Автор выражает искреннюю благодарность за помощь в работе над статьей и полезные консультации академику РАН Б.Н. Четверушкину, академику РАН А.С. Холодову, члену-корреспонденту РАН В.Ф. Тишкину, д.ф.-м.н. А.А. Кулешову, д.ф.-м.н. А.В. Беккеру, к.ф.-м.н. А.В. Фаворской, к.ф.-м.н. Н.И. Хохлову, к.ф.-м.н. В.А. Миряхе, к.ф.-м.н. А.В. Санникову, к.ф.-м.н. Муратову М.В., В.А. Бирюкову, Д.П. Григорьевых, Д.И. Петрову, П.В. Стогний, Д.В. Кибардиной.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Н.П. Лаверов, В.И. Васильев, А.А. Макоско (ред.).* Научно-технические проблемы освоения Арктики. Научная сессия Общего собрания членов РАН, 16.12.2014г. – М.: Наука, 2015, 420с.; *N.P. Laverov, V.I. Vasiliev, A.A. Makosko (red.).* Nauchno-tehnicheskie problemy osvoeniya Ark-tiki. Nauchnaya sessiya Obshego sobraniya chlenov RAN. 16.12.2014. – М.: Nauka, 2015, 420s.
2. *Ю.Г. Новиков, С.В. Гажуля.* Особенности оценки месторождений углеводородного сырья Арктического шельфа России и их переоценки в соответствии с новой классификацией запасов // Нефтегазовая геология. Теория и практика. 2008, т.3, №1, с.1-19;  
*U.G. Novikov, S.V. Gagulya.* Osobennosti otsenki mestorogdeniy uglevodorodnogo syriya Ark-ticheskogo shelfa Rossii i ih pereotcenki v sootvetstvii s novoi klassifikatsiei zapasov // Neftega-zovaya geologiya. Teoriya i praktika, 2008, t.3, №1, s.1-19.
3. *Б.Н. Четверушкин, А.А. Кулешов, Е.Б. Савенков.* Проблемы применения методов математического моделирования с использованием суперкомпьютеров для решения задач нефтедобычи // Нефтегазопромысловый инжиниринг, 2014, №9, с.26-35;  
англ. пер.: *B.N. Chetverushkin, A.A.Kuleshov, E.B. Savenkov.* Supercomputing challenges in



- mathematical modeling for petroleum industry // Oil & Gas Field Engineering, 2014, №9, p.26-35.
4. *А.Т. Беккер.* Вероятные характеристики ледовых нагрузок на сооружения континентального шельфа. – Владивосток: Дальнаука, 2005, 345с.  
*A.T. Bekker.* Veroyatnostnye harakteristiki ledovyh nagruzok na soorugeniya kontinentalnogo shelfa. – Vladivostok: Dalnauka, 2005, 345s.
5. *J. Weiss.* Drift, deformation and fracture of sea ice. A perspective across scales. Springer, 2013, 83p.
6. *Р.В.Гольдштейн, Н.М. Осипенко.* Вопросы механики разрушения льда и ледяного покрова при анализе ледяных нагрузок. В сб. Вести газовой науки. Современные подходы и перспективные технологии в проектах освоения нефтегазовых месторождений российского шельфа. – М.: Газпром ВНИИГАЗ, 2013, №3(14), с.104-112;  
*R.V. Goldshtein, N.M. Osipenko.* Voprosy mehaniki razrusheniya l'da i ledyanogo pokrova pri analize ledyanyh nagruzok. V sb. Vesti gazovoi nauki. Sovremennye podhody i perspektivnye tehnologii v proektah osvoeniya neftegazovyh mestorogdeniy rossiiskogo shelfa. – M.: Gazprom VNIIGAZ, 2013, №3(14), s.104-112.
7. *В.Е. Бородачев.* Льды Карского моря. – СПб.: Гидрометиздат. 1998, 182с.;  
*V.E. Borodachev.* L'dy Karskogo morya. – SPb. Gidrometizdat. 1998, 182p.
8. *А.В. Санников, В.А. Мuryаха, И.Б. Петров.* Численное моделирование экспериментов по исследованию прочности льда // Труды третьей международной научной конференции “Полярная механика”, 27-30 сентября 2016г., г.Владивосток, с.141-150;  
*A. Sannikov, V. Miryaha, I. Petrov.* Numerical simulation of ice strength experiments // Proceedings of the Third International Scientific Conference “Polar Mechanics”, 27-30 September 2016, Vladivostok, Russia. 2016, p.141-150.
9. *Р.В. Гольдштейн, Н.М. Осипенко.* Трещиностойкость и разрушение ледяного покрова ледоколами // Труды ААНИИ, 1986, т.391, с.137-156;  
*R.V. Goldshtein, N.M. Osipenko.* Treshinostoikost i razrushenie ledyanogo pokrova ledokolami // Trudy AANII, 1986, t.391, s.137-156.
10. *A. Bolshev.* Static and dynamics of anchored floating structures with non-linear characteristics of anchored system. – Zhdansk, 1993, 218p.
11. *V.A. Kulesh, S.A. Ogay, M.V. Voyloshnikov.* The safety and the effectiveness of ships navigation in ice // Marine intellectual technologies, 2013, №1, p. 11-20.
12. *R.E. Gagnon.* Physical modeling experiments to asses the hydrodynamic interaction between floating glacial ice masses and a transiting tanker // Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering, 2005, v.126, №4, p.297-309.
13. *Z. Liu, J. Amdahl, S. Loset.* Integrated numerical analysis of an iceberg collisions with a foreship structure // Marine Structure 2011, v.24, №4, p.377-395.
14. *R.E. Gagnon, J. Wang.* Numerical simulations of a tanker collision with a bergy bit incorporating hydrodynamics, a validated ice model and damage to the vessel // Cold Regions Science and Technology, 2012, p.1-10.
15. *И.Б. Петров.* Воздействие льда и воды на оффшорные структуры и прибрежные зоны в Арктике. В кн. Научно-технические проблемы освоения Арктики. – М.: Наука, 2015, с.230-237;  
*I.B. Petrov.* Vozdeistvie l'da i vody na offshornye struktury i pribreznye zony v Arktike. V kn. Nauchno-tehnicheskie problemi osvoeniya Arktiki. – M.: Nauka, 2015, s.230-237.
16. *Д. Козлов.* Математическая модель удара сферического тела по поверхности льда // Труды третьей международной научной конференции “Полярная механика”, 27-30 сентября 2016г., г.Владивосток, с.115-122;  
*D. Kozlov.* Mathematical model of transverse impact of a solid spherical body on the ice cover surface // Proceedings of the Third International Scientific Conference “Polar Mechanics”, 27-30 September 2016, Vladivostok, Russia. 2016, p.115-122.
17. *В.П. Глазырин, М.Ю. Орлов.* Разрушение льда при ударном и взрывном нагружении // Вычислительные технологии, 2008, т.13, №1, спецвыпуск, с.425-432;

- V.P. Glazyrin, M.U. Orlov.* Razrushenie l'da pri udarnom i vzryvnom nagruenii. Vychislitelnye tehnologii. 2008, t. 13, №1, spetsvypusk, s. 425-432.
18. *A.B. Pogorelova.* Соппротивление волны транспортного средства воздушной подушки в неустойчивом движении по ледовому щиту // Журнал прикладной механики и технической физики. 2008, т.49, №1, с.71-79;  
*A.V. Pogorelova.* Wave resistance of an air-cushion vehicle in unsteady motion over an ice sheet // Journal of applied mechanics and technical physics. 2008, v.49, №1, p.71-79.
  19. *A. Korobin, T. Khabakhpaset, A. Papin.* Wave propagation along a channel with ice cover // European Journal of Mechanics, B/Fluids. 2014, v.47, p.166-175.
  20. *И. Стурова, Л. Ткачева.* Оцилляции ледовой оболочки под локальным динамическим действием // Труды третьей международной научной конференции "Полярная механика", 27-30 сентября 2016, г.Владивосток, с.141-150;  
*I. Sturova, L. Tkacheva.* Oscillations of restricted ice cover under local dynamic action // Proceedings of the Third International Scientific Conference "Polar Mechanics", 27-30 September 2016, Vladivostok, Russia. 2016, p.997-1007.
  21. *А.А. Кулешов, В.В. Мырмин.* Моделирование колебаний плавающего льда в приближении тонкой упругой пластины // Матем. моделирование, 2009, т.21, №6, с.28-40;  
*A.A. Kuleshov, V.V. Myrmin.* Modelirovaniye vibratsiy plavayushchego l'da v priblizhenii tonkoy uprugoy plastiny // Math. Modelirovanie, 2009, t.21, №6, s.28-40.
  22. *А.А. Кулешов, В.В. Мырмин.* Моделирование колебаний плавающего льда при посадке самолетов на ледовые аэродромы // Вычислительные методы и программиров., 2010, т.11, с.7-13;  
*A.A. Kuleshov, V.V. Myrmin.* Modeling of floating ice vibrations at plane landing to ice airdromes // Vychislitel'nyye metody i programmirovaniye, 2010, t.11, s.7-13.
  23. *J. Paavilainen, J. Tuhkuri.* Pressure distributions and force chains during simulated ice rubbing against Hoped structures // Cold region Science and Technology, 2013, v.52, p.157-174.
  24. *A.B. Марченко.* Модель торошения морских льдов // Успехи механики, 2002, №3, с.67-129;  
*A.V. Marchenko.* Model' torosheniya morskikh l'dov // Uspehi mehaniki, 2002, №3, s.67-129.
  25. *Y. Shinohara.* A redistribution function applicable to a dynamic sea ice model // J. Geophysics. Res. 1999, v.95, p.13423-13431.
  26. *E. Kenneth.* Iceberg drift modeling and validation of applied metocean hindcast data // Cold Region Science and Technology, 2009, v.57, p.67-90.
  27. *V. Pavlov, O. Pavlova, R. Korsnes.* Sea ice fluxes and drift trajectories from potential sources, computed with a statistical sea ice model of the Arctic ocean // Journal of marine Systems, 2004, v.48, p.133-157.
  28. *A. Marchenko.* Thermodynamics consolidation and melting of sea ice ridges // Cold region Science and Technology, 2008, v.52, p.278-301.
  29. *В.В. Алешин, В.Е. Селезнев, В.В. Кобяков и др.* Численный анализ прочности подземных трубопроводов. Издательство – М.: Едиториал УРСС, 2003, 320 с.;  
*V.V. Aleshin, V.E. Selesnev, V.V. Kobayakov et al.* Numerical analysys of strength of underground pipelines. – М.: Editorial URSS, 2003, 320p.
  30. *L. Muravieva.* Problem for safety assessment of subsea pipeline with longi tudinal buckling. Polar Mechanics. Ed. Bekker A.V. 2016, p.537-546.
  31. *М.Н. Кауркин, Р.А.Ибраев, К.П. Беляев.* Усвоение данных наблюдений в модели динамики океана высокого пространственного разрешения с применением методов параллельного программирования // Метеорология и гидрология, 2016, №7, с.47-57;  
*M.N. Kaurkin, R.A. Ibraev, K.P. Belyaev.* Usvoenie dannyh nabludeniy v modeli dinamiki okeana vysokogo prostranstvennogo razresheniya s primeneniem metodov parallel'nogo programmirovaniya // Meteorologiya i Gidrologiya. 2016, №7, s. 47-57.
  32. *Е.М. Володин и др. Н.Г. Яковлев (ред).* Математическое моделирование Земной системы: коллективная монография. – М.: МАКС Пресс, 2016, 328с.;

- V.M. Volodin and other. Ed. by N.G. Yakovlev. Mathematical Modeling of the Earth System: Collective monograph. – M.: MAKS Press, 2016, 328p.*
33. *К.П. Беляев, А.А. Кулешов, Н.П. Тучкова, К.А. Танажура. Метод коррекции расчетов динамической модели данными наблюдений и его применение к анализу динамики Атлантического океана // Матем. моделирование, 2015, т.27, №12, с.20-32;*  
*K.P. Belyaev, A.A. Kuleshov, N.P. Tuchkova, C.A.S. Tanajura. A correction method for dynamic model calculations using observational data and its application in Oceanography // Mathematical Models and Computer Simulations, 2016, v. 8, №4, p.391-400.*
34. *К.П. Беляев, А.А. Кулешов, Н.П. Тучкова, С.А.С. Танажура. An optimal data assimilation method and its application to the numerical simulation of the ocean dynamics // Math. and Comp. Modelling of Dynamical Systems, 2017, p.1-15. (eprint) DOI: 10.1080/13873954.2017.1338300.*
35. *К. Беляев, А. Кулешов, И. Кирхнер, Н. Тучкова. Numerical experiments with MPI-ESM coupled Atmosphere-Land-Ocean model in conjunction with data assimilations in Arctic Region. Proc. Int. Conf. of Computational Methods in Sciences and Engineering 2016 (ICCMSE-2016), edited by T. E. Simos et al. // AIP Conference Proceedings, 2016, v.1790, 150005, p.1-4.*
36. *А.А. Самарский, Е.С. Николаев. Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука. Физматлит, 1978, 560с.;*  
*A.A. Samarskii, E.S. Nikolaev. Metody resheniya setochnyh uravneniy. – M.: Nauka, Fizmatlit, 1978, 560p.*
37. *Г.И. Марчук. Методы вычислительной математики. – СПб.: Лань, 2009, 608с.;*  
*G.I. Marchuk. Metody vychislitel'noy matematiki. – Saint Petersburg: Lan, 2009, 608s.*
38. *А.Н. Коновалов. Численные методы в статических задачах теории упругости // Сибирский мат. журнал, 1995, т.36, №3, с.573-89;*  
*A.N. Konovalov. Numerical methods for static problems of elasticity // Siberian math. Journal, 1995, v.36, №3, p. 491-505.*
39. *К.-Ю. Батэ. Методы конечных элементов. – М.:Физматлит, 2010, 416с.;*  
*K.U. Bate. Metody konechnyh elementov. – M.: Fizmatlit, 2010, 416s.*
40. *Г.И. Марчук, В.И. Агошков. Введение в проекционно-сеточные методы. – М.: Наука, 1981, 416с.;*  
*G.I. Marchuk, V.I. Agoshkov. Vvedenie v proektcionno-setochnye metody. – M.: Nauka, 1981, 416s.*
41. *A. Taflov, S.C. Hagness. Computation electrodynamics. Boston, London. Artech House, 2005, 1006p.*
42. *М.И. Эпов, В.Н. Глинских. Электромагнитный каротаж: моделирование и инверсия. – Новосибирск: Академическое издательство Гео. 2005г., 98с.;*  
*M.I. Epov, V.N. Glinskih. Elektromagnitnyi karotag: modelirovanie i inversiya. – Novosibirsk. Akademicheskoe izdatel'stvo Geo. 2005, 98s.*
43. *М.Н. Бердичевский, О.Н. Жданова, М.С. Жданов. Глубинная электричка в океане. – М.: Наука. 1989г., 80с.;*  
*M.N. Berdichevskiy, O.N. Gdanova, M.S. Gdanov. Glubinnaya elektrichka v okeane. – M.: Nauka. 1989, 80s.*
44. *М.С. Жданов. Геофизическая электромагнитная теория и методы. – М.: Научный мир, 2012, 679с.;*  
*M.S. Gdanov. Geofizicheskaya elektromagnitnaya teoriya i metody. – M.; Nauchnyi mir, 2012, 679s.*
45. *M.S. Zhdanov, A. Gribenko, E. Wilson. Generalized joint inversion of multimodel geophysical data using Gramian constrains. Geophysical Research constraints // Geophysical Research Letters, 2012, v.39, L09301, p.1-7.*
46. *С.Ш. Бимуратов, С.И. Кабанихин. Решение одномерных обратных задач электродинамики методом Ньютона-Канторовича // Ж. выч. мат. и мат. физ., 1992, т.32, №12, с.1900-1915;*  
*S.Sh. Bimuratov, S.I. Kabanikhin. The solution of one-dimensional inverse problems of electrodynamics by the Newton-Kantorovich method // Computational mathematics and mathematical physics, 1992, v.32, №12, p.1729-1743.*
47. *В.П. Романов. Обратные задачи для дифференциальных уравнений. – Новосибирск: НГУ, 1973, 252с.;*

- V.P. Romanov.* Obratnye zadachi dlya differentsial'nyh uravneniy. – Novosibirsk: NGU, 1973, 252s.
48. *А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич.* Численные методы решения обратных задач математической физики. – М.: 2009, 480с.;  
*A.A. Samarskiy, P.N. Vabishevich.* Chislennye metody resheniya obratnykh zadach matematicheskoy fiziki. – М.: 2009, 480s.
  49. *С.И. Кабанихин.* Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск: Сибирское научное изд-во, 2009, 457с.;  
*S.I. Kabanihin.* Obratnye i nekorrektnye zadachi. – Novosibirsk: Sibirskoe nauchnoe izdatel'stvo, 2009, 457s.
  50. *А.В. Фаворская, И.Б. Петров, Д.И. Петров, Н.И. Хохлов.* Численное моделирование волновых процессов в слоистых средах в условиях Арктики // Математ. модел., 2015г., т.27, №11, с.63-75;  
*A.V. Favorskaya, I.B. Petrov, D.I. Petrov, N.I. Khokhlov.* Numerical modeling of wave processes in layered media in the Arctic // Mathem. Models and Computer Simulations. 2015, v.27. №11, p.63-75.
  51. *Д.И. Петров, И.Б. Петров, А.В. Фаворская, Н.И. Хохлов.* Численное решение задач сейсморазведки в условиях Арктики сеточно-характеристическим методом // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2016, т.56, с.1149-1153;  
*D.I. Petrov, I.B. Petrov, A.V. Favorskaya, N.I. Khokhlov.* Numerical solution of seismic exploration problems in the Arctic region by applying the grid-characteristic method // Computational mathematics and mathematical physics, 2016, v.56, №6, p.1164-1173.
  52. *А.В. Фаворская, И.Б. Петров.* Волновые отклики от нефтяных резервуаров шельфовой зоне Арктики // Доклады РАН. Науки о Земле, 2016, т.466, ч.2, с.214-217;  
*A.V. Favorskaya, I.B. Petrov.* Wave Responses from oil reservoirs in the Arctic shelf zone // Doklady Earth Science, 2016, v.466, part 2, p.214-217.
  53. *Р.В. Стогний, Д.И. Петров, Н.И. Хохлов, И.Б. Петров.* Modeling of seismic processes in geoprospecting works in a shelf zone of the Arctic // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling, 2017 (in print).
  54. *И.Е. Квасов, И.Б. Петров.* Расчет процессов в неоднородных пространственных структурах // Математическое моделирование. 2009., т.21, №5, с.3-9;  
*I.E. Kvasov, I.B. Petrov.* Raschet protsessov v neodnorodnykh prostranstvennykh strukturakh // Matematicheskoe modelirovanie. 2009., t.21, №5, s.3-9
  55. *О.Я. Войнов, В.И. Голубев, М.С. Жданов, И.Б. Петров.* Построение метода упругой миграции сейсмических данных в приближении Бора // Труды МФТИ, 2016, т.8, №2, с.60-66;  
*O.Ya. Vojnov, V.I. Golubev, M.S. Zhdanov, I.B. Petrov.* Postroenie metoda uprugoy migratsii sejsmicheskikh dannyh v priblizhenii Bora // MIPT Transactions, 2016, t.8, №2, s.60-66.
  56. *О.М. Белоцерковский.* Численное моделирование в механике сплошных сред. – М.: Физматлит, 1994, 442с.;  
*O.M. Belotserkovskiy.* Chislennoe modelirovanie v mehanike sploshnyh sred. – М.: Fizmatlit, 1994, 442s.
  57. *К.М. Магомедов, А.С. Холодов.* Сеточно-характеристические методы. – М.: Наука, 1988, 288с.;  
*K.M. Magomedov, A.S. Kholodov.* Setochno-harakteristicheskie metody. – М.: Nauka, 1988, 288s.
  58. *С.К. Годунов, А.В. Забродин, М.Н. Иванов, А.Н. Крайно, Г.П. Прокопов.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. – М.: Наука, 1976, 400с.;  
*S.K. Godunov, A.V. Zabrodin, M.Ya. Ivanov, A.N. Krajno, G.P. Prokopov.* Chislennoe reshenie mnogomernykh zadach gazovoy dinamiki. – М.: Nauka, 1976, 400s.
  59. *Р.П. Федоренко.* Применение разностных схем высокой точности для численного решения гиперболических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, т.2, №6, с.1172-1188;  
*R.P. Fedorenko.* Primenenie raznostnykh skhem vysokoj tochnosti dlya chislennogo resheniya giperbolicheskikh uravnenij // Zh. vychisl. mathem. i mathem. fiziki, 1962, t.2, №6, s.1172-1188.
  60. *В.П. Колган.* Применение принципа минимальных значений производной к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Ученые записки ЦАГИ, 1972, т.3, №6, с.68-77;

- V.P. Kolgan.* Primenenie principa minimal'nyh znachenij proizvodnoj k postroeniyu konechno-raznostnyh skhem dlya rascheta razryvnyh reshenij gazovoj dinamiki // *Uchenyj zapiski CAGI*, 1972, t.3, №6, s.68-77.
61. *A.J. Harten.* High resolution schemes for hyperbolic conservation law // *J. Comp. Phys.*, 1983, v.49, p.357-393.
62. *И.Б. Петров, А.С. Холодов.* О регуляризации разрывных численных решений уравнений гиперболического типа // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1984, т.24, №8, с.1172-1188;  
*I.B. Petrov, A.S. Holodov.* O regularizacii razryvnyh chislennyh reshenij uravnenij giperbolicheskogo tipa // *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki*, 1984, t.24, №8, s.1172-1188.
63. *И.Б. Петров, А.С. Холодов.* Численное исследование некоторых динамических задач механики деформируемого твердого тела сеточно-характеристическим методом // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1984, т.24, с.722-739;  
*I.B. Petrov, A.S. Holodov.* Chislennoe issledovanie nekotoryh dinamicheskikh zadach mekhaniki deformiruемого tverdogo tela setочно-harakteristicheskim metodom // *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki*, 1984, t.24, s.722-739.
64. *А.Г. Куликовский, Н.В. Погорелов, А.Ю. Семенов.* Математические вопросы решения гиперболических систем уравнений. – М.: Физматлит, 2001, 608с.;  
*A.G. Kulikovskij, N.V. Pogorelov, A.YU. Semenov.* Matematicheskie voprosy resheniya giperbolicheskikh sistem uravnenij. – М.: Fizmatlit, 2001, 608s.
65. *B.N. Chetverushkin, N.G. Churbanova, A.A. Kuleshov, A.A. Lyupa, M.A. Trapeznikova.* Application of kinetic approach to porous medium flows simulation in environmental hydrology problems on high-performance computing systems // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Model.*, 2016, v.31, №4, p.187-196.
66. *E.F. Toro.* Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. Springer Dordrecht Heidelberg London New York, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009, 721p.
67. *В.В. Русанов.* Разностные схемы третьего порядка точности для сквозного счета разрывных решений // *ДАН СССР*, 1968, т.180, №6, с.1303-1305;  
*V.V. Rusanov.* Raznostnye skhemy tret'ego poryadka tochnosti dlya skvoznogo scheta razryvnyh reshenij // *DAN SSSR*, 1968, t.180, №6, s.1303-1305.
68. *S.Z. Burstein, A. Mirin.* Third order difference method for hyperbolic equations // *J. Comp. Phys.*, 1968, v.5, №3, p.547-557.
69. *А.А. Тушева, Ю.Н. Шокин, Н.Н. Яненко.* О построении разностных схем повышенного порядка аппроксимации на основе дифференциальных следствий. Сб. Некоторые проблемы вычислительной и прикладной математики. – Новосибирск: Наука, 1975, с.184-191;  
*A.A. Tusheva, Yu.N. Shokin, N.N. Yanenko.* O postroenii raznostnyh skhem povyshennogo poryadka approssimacii na osnove differencial'nyh sledstvij. Nekotorye problemy vychislitel'noj i prikladnoj matematiki. – Novosibirsk, Nauka. 1975, s.184-191.
70. *А.С. Холодов.* О построении разностных схем повышенного порядка точности для уравнений гиперболического типа // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, т.20, №26, с.1601-1620;  
*A.S. Kholodov.* O postroenii raznostnyh skhem povyshennogo poryadka tochnosti dlya uravnenij giperbolicheskogo tipa // *Zh. vychislitel'noy matem. i matem. fiziki*, t.20, №26, s.1601-1620.
71. *C.-W. Shu, S. Osher.* Efficient Implementation of Essentially Non oscillatory Schemes Shock-Capturing Schemes // *J. Comp. Phys.*, 1989, v.83, p.32-78.
72. *А.С. Холодов, Я.А. Холодов.* О критериях монотонности разностных схем для уравнений гиперболического типа // *Ж. вычисл. матем. и матем. физики*, 2006, т.46, №9, с.1638-1667;  
*A.S. Kholodov, Ya.A. Kholodov.* Monotonicity criteria for difference schemes designed for hyperbolic equations // *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2006, v.46, №9, 1560-1588.
73. *М.Н. Михайловская, Б.В. Rogov.* Монотонные биокомпактные схемы бегущего счета для систем уравнений гиперболического типа // *Ж. выч. матем. и матем. физ.*, 2012, т. 52, №4, с.672-695;  
*M.N. Mikhailovskaya, B.V. Rogov.* Monotone compact running schemes for systems of hyperbolic equations // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2012, v.52, №4, p.578-600.

74. В.И. Голубев, И.Б. Петров, Н.И. Хохлов. Компактные сеточно-характеристические схемы повышенного порядка точности для трехмерного линейного уравнения переноса // Математическое моделирование, 2016, т.28, №2, с.123-132;  
*V.I. Golubev, I.B. Petrov, N.I. Khokhlov. Compact grid-characteristic schemes of higher orders for 3D linear transport equation // Math. Models and Computer Simulations, 2016, v.8, №5, p.577-584.*
75. А.В. Фаворская, И.Б. Петров, А.В. Санников, И.Е. Квасов. Сеточно-характеристический метод с использованием интерполяций высокого порядка на тетраэдральных сетках с кратным шагом // Математическое моделирование, 2013, т.25, №2, с.409-415;  
*A.V. Favorskaya, I.B. Petrov, A.V. Sannikov, I.E. Kvasov. Grid-characteristic method using high order interpolation on tetrahedral hierarchical meshes with a multiple time step // Mathematical Models and Computer Simulations, 2013, v.5, №5, p.409-415.*
76. В.Б. Левянт, И.Е. Квасов, И.Б. Петров. Оценка возможностей обнаружения и картирования зон развития мезотрещин в пластах при использовании обменных рассеянных волн // Технологии сейсморазведки, 2016, №1, с.14-30;  
*V.B. Leviant, I.E. Kvasov, I.B. Petrov. Assessment of possibility of detecting and mapping formation mesofractures using scattered converted waves // Seismic Technologies, 2016, №1, p.14-30.*
77. И.Б. Петров, Н.И. Хохлов. Моделирование задач 3D-сейсмики на высокопроизводительных вычислительных системах // Математическое моделирование, 2014, т.26, №1, с.83-95;  
*I.B. Petrov, N.I. Khokhlov. Modeling 3D seismic problems using high-performance computer systems // Mathematical Models and Computer Simulation, 2014, v.6, №4, p.342-350.*
78. M. Kaser, M. Dumbser. An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes. The two-dimensional isotropic case with external source terms // Geophysics Journal International, 2006, v.166, №2, p.855-877.
79. В.А. Миряха, А.В. Санников, И.Б. Петров. Численное моделирование динамических процессов в твердых деформируемых телах разрывным методом Галеркина // Математическое моделирование, 2015, т.27, №3, с.96-108;  
*V.A. Miryaha, A.V. Sannikov, I.B. Petrov. Discontinuous galerkin method for numerical simulation of dynamic processes in solids // Math. Models Comput. Simul., 2015, v.7, № 5 446-455.*
80. А.И. Толстых. Компактные и мультиоператорные аппроксимации высокой точности для уравнений в частных производных. – М.: Наука, 2015, 350с.;  
*A.I. Tolstyh. Kompaktnye i mul'tioperatornye approksimacii vysokoj tochnosti dlya uravnenij v chastnyh proizvodnyh. – M.: Nauka, 2015, 350s.*
81. И.С. Меньшов. Повышение порядка аппроксимации схемы Годунова на основе решения обобщенной задачи Римана // Ж. вычисл. матем. и математ. физ., 1990г., т.30, №9, с.1357-1371;  
*I.S. Menshov. Povyshenie poryadka approximatsii shemi Godunova na osnove obobschennoi zadachi reamana // Zh. vychisl. matematiki i matematicheskoy fiziki, 1990, v.30, №9, p.1357-1371.*
82. М.Е. Ладонкина, В.Ф. Тишкин. Обобщение метода Годунова, использующее кусочно-полиномиальные аппроксимации // Дифференциальные уравнения, 2015, т.51, №7, с.899-907;  
*M.E. Ladonkina, V.F. Tishkin. Godunov method: a generalization using piecewise polynomial approximations // Differential Equations, 2015, v.51, №7, p.895-903.*
83. М.Е. Ладонкина, В.Ф. Тишкин. О методах типа Годунова высокого порядка точности // Доклады академии наук, 2015, т. 461, № 4, с. 390-393;  
*M.E. Ladonkina, V.F. Tishkin. On Godunov-type methods of high order of accuracy // Doklady Mathematics, 2015, v.91, №2, p.189-192.*
84. М.Е. Ладонкина, О.А. Неклюдова, В.Ф. Тишкин. Использование разрывного метода Галеркина при решении задач газовой динамики // Матем. моделирование, 2014, т.26, №1, с.17-32;  
*M.E. Ladonkina, O.A. Neklyudova, V.F. Tishkin. Application of the RKDG method for gas dynamics problems // Mathematical Models and Computer Simulations, 2014, v.6, №4, p.397-407.*
85. Б.Н. Четверушкин. Прикладная математика и проблемы использования высокопроизводительных вычислительных систем // Труды МФТИ. 2011, т.3, №4, с.55-67;

- B.N. Chetverushkin. Prikladnaya matematika i problemy ispol'zovaniya vysokoproizvoditel'nyh vychislitel'nyh system // MIPT Transactions, 2011, t.3, №4, s.55-67.*
86. *Г.Э. Норман, Н.Д. Орехов, В.В. Писарев и др. Зачем и какие суперкомпьютеры экзафлопсного класса нужны в естественных науках // Программные системы: теория и приложения, 2015, т.6, №4, с.243-311;*  
*G.E. Norman, N.D. Orekhov, V.V. Pisarev et al. Zachem i kakie superkomp'yutery ehkzaflopsnogo klassa nuzhny v estestvennyh naukah // Programmnye sistemi: teoriya i prilozheniya. 2015, t.6, №4, s.243-311.*
  87. *Н.И. Хохлов, И.Б. Петров. Применение современных высокопроизводительных технологий для задач сейсмологии и геофизики. В сб. "Вычислительные технологии в естественных науках". Ч.3. Под редакцией Назирова Н.Н., Щура Л.Н. – М.: ИКИ РАН, 2015, с.173-185;*  
*N.I. Khokhlov, I.B. Petrov. Primenenie sovremennyh vysokoproizvoditel'nyh tekhnologij dlya zadach sejsmiki i geofiziki. V sb. "Vychislitel'nye tekhnologii v estestvennyh naukah". Ch.3, Pod redakciej Nazirova N.N., Shura L.N. – M.: IKI RAN. 2015, s.173-185.*
  88. *В.А. Бирюков, В.А. Миряха, И.Б. Петров. Анализ зависимости глобальной нагрузки от механических параметров льда при взаимодействии ледяного поля с конструкцией путем численного моделирования // Доклады Академии Наук, 2017, т.474, №6, с.696-699;*  
*V.A. Biryukov, V.A. Miryaha, I.B. Petrov. Analysis of the Dependence of the global load dependence on ice properties for the interaction between an ice field and a structure by a numerical simulation // Doklady, 2017, v.474, №6, p.327-330.*
  89. *Д.П. Григорьевых, Н.И. Хохлов, И.Б. Петров. Расчет динамического разрушения в твердых деформируемых телах // Математическое моделирование, 2017г., т.29, №4, с.45-58;*  
*D.P. Grigorevykh, N.I. Khokhlov, I.B. Petrov. Raschet dinamicheskogo razrusheniia v tverdykh deformiruemykh telakh // Matematicheskoe modelirovanie, 2017g., t.29, №4, s.45-58.*
  90. *Д.Н. Ворошчук, В.А. Миряха, И.Б. Петров. Исследование 3D-сейсмического отклика от вертикального геологического разлома разрывным методом Галеркина // Труды МФТИ, 2016, с.54-64;*  
*D.N. Voroshchuk, V.A. Miryaha, I.B. Petrov. Issledovanie 3D-sejsmicheskogo otklika ot vertikal'nogo geologicheskogo razloma razryvnym metodom Galerkina // Trudy MFTI, MIPT Transactions, 2016, s.54-64.*
  91. *A.V. Favorskaya, I. Petrov, N. Khokhlov. Numerical modeling of wave processes during seismic exploration // Science Direct Procedia Computer science 96, 2016, p.920-929.*
  92. *А.В. Фаворская, И.Б. Петров, Н.И. Хохлов. Численное моделирование сеточно-характеристическим методом воздействия землетрясений на сооружения // Математическое моделирование, 2015, т.27, №12, с.109-120;*  
*A.V. Favorskaia, I.B. Petrov, N.I. Khokhlov. Chislennoe modelirovanie setochno-kharakteristicheskim metodom vozdeistvie zemletriasenii na sooruzheniia // Matemat. model., 2015, t.27, №12, s.109-120.*
  93. *С.А. Огородов, А.С. Шестов, В.В. Архипов и др. Современный ледово-экзарационный рельеф на шельфе Западного Ямала: натурные исследования и моделирование // Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ., 2013, т.13, №3, с.77-89;*  
*S.A. Ogorodov, A.S. Shestov, V.V. Arhipov et al. Sovremennyy ledovo-ehkzaracionnyj rel'ef na shel'fe Zapadnogo Yamala: naturnye issledovaniya i modelirovanie // Vestn. NGU. Ser. matem., mekh., inform., 2013, t.13, №3, s.77-89.*
  94. *А.А. Кулешов. О разностной аппроксимации задачи поперечных колебаний тонких упругих пластин // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2005, т.45, №4, с.718-740;*  
*A.A. Kuleshov. Difference approximation of the problem of bending vibrations of a thin elastic plates // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2005, v.45, №1, p.694-715.*
  95. *А.А. Кулешов, В.В. Мырмин, А.В. Разгулин. О сильной сходимости разностных аппроксимаций в задаче поперечных колебаний тонких упругих пластин // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2009, т.49, №1, с.152-177;*

- A.A. Kuleshov, V.V. Mymrin, A.V. Razgulin.* Strong convergence of difference approximations in the problem of transverse vibrations of thin elastic plates // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2009, v.49, №1, p.146-171.
96. *A.A. Kuleshov.* Reduction method with finite-difference approximation for the model of small transverse vibrations in thin elastic plates and some applications. In *Computers and Simulation in Modern Science*, v. 4. – WSEAS Press, 2010, p.101-110.
  97. *F. Milinazzo, M. Shinbrot, N.W. Evans.* A mathematical analysis of the steady response of floating ice to the uniform motion of a rectangular load // *J.Fluid Mech.*, 1995, v.287, p.173-197.
  98. *P. Wetzel, H. Haak, J. Jungclaus, E. Maier-Reimer.* The Max-Planck-Institute Global Ocean/Sea-Ice Model MPI-OM. Technical report, URL <http://www.mpimet.mpg.de/fileadmin/models/MPIOM/>
  99. *В.П. Дымников, В.Н. Лыкосов, Е.М. Володин.* Моделирование климата и его изменений // *Вестник Российской Академии Наук*, 2012, т.82, №3, с.227-236;  
*V.P. Dymnikov, V.N. Lykosov, E.M. Volodin.* Modelirovanie klimata i ego izmenenii // *Vestnik Rossiiskoi Akademii Nauk*, 2012, v.82, №3, p.227-236.
  100. *K.D. Nikitin, M.A. Olshanskii, K.M. Terekhov, Yu.V. Vassilevski, R.M. Yanbarisov.* An adaptive numerical method for free surface flows passing rigidly mounted obstacles // *Computers and Fluids*, 2017, v.148, p.56-68.
  101. *В.А. Гасилов, И.В. Гасилова, Л.В. Ключкова, Ю.А. Повещенко, В.Ф. Тишкин.* Разностные схемы на основе метода опорных операторов для задач динамики флюидов в коллекторе, содержащем газогидраты // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2015, т.55, №8, с.1341–1355;  
*V.A. Gasilov, I.V. Gasilova, L.V. Klochkova, Y.A. Poveshchenko, V.F. Tishkin.* Difference schemes based on the support operator method for fluids dynamics problems in a collector containing gas hydrates // *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2015, v.55, p.1310-1323.
  102. *Р.В. Жалнин, М.Е. Ладонкина, В.Ф. Масыгин, В.Ф. Тишкин.* Применение разрывного метода Галеркина для решения параболических задач в анизотропных средах на треугольных сетках // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование*, 2016, т.9, №3, с.144-151;  
*R.V. Zhalnin, M.E. Ladonkina, V.F. Masyagin, V.F. Tishkin.* Application of the discontinuous Galerkin method for solving parabolic problems in anisotropic media on triangular meshes // *Bulletin of the south Ural state university. Series-mathematical modelling programming & computer software*, 2016, v.9, №3, p.144-151.
  103. *В.А. Балашов, Е.Б. Савенков.* Численное исследование квазигидродинамической системы уравнений для расчета течений при малых числах Маха // *ЖВМиМФ*, 2015, т.55, №10, с.1773-1782;  
*V.A. Balashov, E.B. Savenkov.* Numerical study of a quasi-hydrodynamic system of equations for flow computation at small Mach numbers // *Comp. Math. and Math. Phys.*, 2015, v.55, №10, p.1743–1751.
  104. *V.A. Balashov, E.B. Savenkov, A.A. Kuleshov.* Direct numerical simulation of a fluid flow in core samples based on quasi-hydrodynamic equations. *Proc. Int. Conf. of Computational Methods in Sciences and Engineering 2016 (ICCMSE-2016)*, edited by T. E. Simos et al. // *AIP Conference Proceedings*, 2016, v.1790, 150006, p.1-4.
  105. *В.А. Балашов, Е.Б. Савенков.* Применение квазигидродинамической системы уравнений для прямого моделирования течений в образцах керна // *ДАН*, 2016, т.467, № 5, с.534-536;  
*V.A. Balashov, E.B. Savenkov.* Direct pore-scale flow simulation using quasi-hydrodynamic equations // *Doklady Physics*, 2016, v.61, №4, p.192–194.