Моделирование волн в упругих средах

Иван Львович Софронов

Д.ф.-м.н., в.н.с., Schlumberger Moscow Research

Лекции и семинары (практические занятия с компьютером)

7-й семестр – дифференцированный зачет

8-й семестр – экзамен

Темы годового курса

1. Гиперболические задачи для линейных волновых процессов

2. Численные методы решения задач сейсмического моделирования, система 2-го порядка

3. Неотражающие граничные условия

4. Численные методы решения задач сейсмического моделирования, система 1-го порядка

5. Общие численные подходы для систем 1-го и 2-го порядков

Тема 3: Неотражающие граничные условия

Внешние начально-краевые задачи:

1. Проблема неотражающих граничных условий
2. Подходы построения неотражающих граничных условий
3. Прозрачные граничные условия (ПГУ)
4. Примеры задач с ПГУ
5. Квазианалитические прозрачные граничные условия для уравнений упругости
6. Численная реализация ПГУ. **Практикум по ПГУ для 1D уравнения Клейна-Гордона**
7. Усеченные прозрачные граничные условия

ЗАДАНИЕ 6. Прозрачное граничное условие для одномерного уравнения Клейна-Гордона

Рассмотрим одномерное уравнение Клейна-Гордона

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda^2 u = 0, \qquad \lambda = 0, 1, 2, \ldots$$

Оно возникает, например, из двумерного ВУ

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

если применить дискретное преобразование Фурье по y

$$w(t,x,y) = \sum_{\lambda} u_{\lambda}(t,x) e^{i\lambda y}$$

и рассмотреть по отдельности уравнения для каждого коэффициента

$$u \equiv u_{\lambda}(t,x)$$

ПГУ для одномерного уравнения Клейна-Гордона

Возьмем отрезок $X_{\min} \le x \le X_{\max}$ и сформулируем следующие начально-краевые задачи для u :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda^2 u = 0, \quad t > 0 \\ u\,\big|_{t=+0} = v_0(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\,\Big|_{t=+0} = v_1(x) \\ u\,\big|_{x=X_{\min}} = 0,\ t > 0 \\ \boldsymbol{T} u\,\big|_{x=X_{\max}} = 0,\ t > 0 \end{cases}$$

где значение $\lambda = 0, 1, 2, \ \ldots$

ПГУ для одномерного уравнения Клейна-Гордона

Начальные возмущения $v_0(x),\ v_1(x)$ задаются формулой

$$v(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{-4(2x-(a+b))^2}{(b-a)^2-(2x-(a+b))^2}\right), & a < x < b \\ 0, & x \le a,\ \ x \ge b \end{cases}$$

Параметры (например):

$$X_{\min} = 0,\ \ X_{\max} = 1.8,\ \ \ c = 1.5$$
$$v_0 :\ \ \ a = 0.6,\ b = 1.2$$
$$v_1 = 0$$

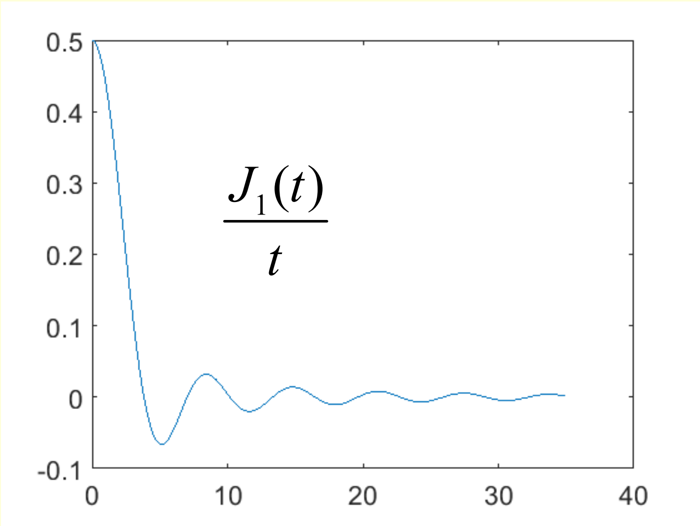
ПГУ для одномерного уравнения Клейна-Гордона

Оператор ПГУ имеет вид

$$\mathrm{T}u \equiv \frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + K_{\lambda,c}(t) * u = 0$$

$$K_{\lambda,c}(t) = c\lambda^2 \frac{J_1(c\lambda t)}{c\lambda t}$$

$$\frac{J_1(t)}{t} \approx \sum_{l=1}^{L} \alpha_l \exp(\beta_l t)$$



$$K_{\lambda,c}(t) \approx \tilde{K}(t) \equiv \sum_{l=1}^{L} \tilde{\alpha}_l \exp(\tilde{\beta}_l t); \qquad \tilde{\alpha}_l = c\lambda^2 \alpha_l, \;\; \tilde{\beta}_l = c\lambda\beta_l$$

Коэффициенты $\{\alpha_l, \; \beta_l\}$ известны и находятся в отдельном файле

ПГУ для одномерного уравнения Клейна-Гордона

Аппроксимация уравнения проводится по разностной схеме *O22* с симметричным шаблоном типа «крест» на сетке

$$x_i = X_{\min} + (i - 0.5)h, \quad i = 0, 1, \cdots, N; \;\; h = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{N - 1}$$

$$t_n = n\tau, \quad n = 0, 1, \cdots, \qquad \tau = C\,\frac{h}{c}, \quad C \le 1$$

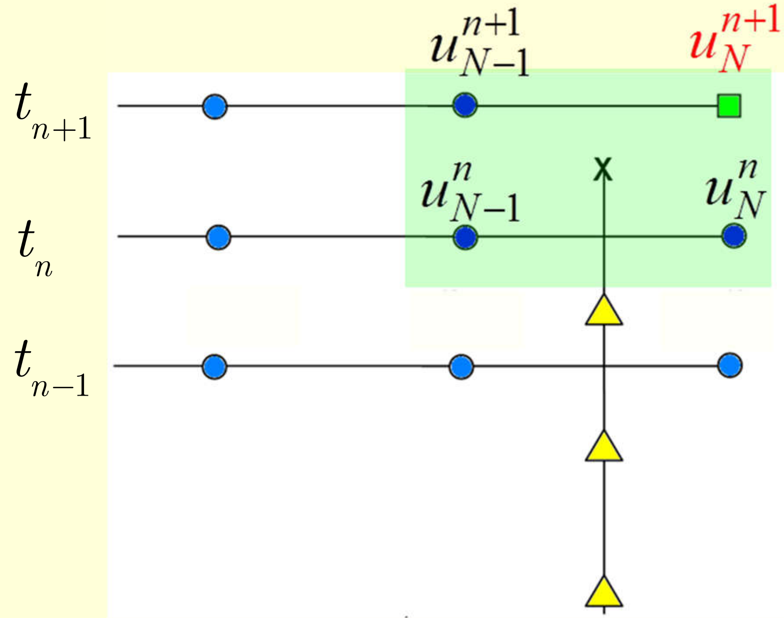
Начальные условия и граничное условие при $x = X_{\min}$ аппроксимируются так же как и в Задании 1.

Аппроксимация ПГУ проводится способом, рассказанным в лекции, см. также следующий слайд

Численная реализация ПГУ

$$\frac{1}{c}\frac{u_{N-1}^{n+1}+u_N^{n+1}-u_{N-1}^{n}-u_N^{n}}{2\tau}+\frac{u_N^{n}+u_N^{n+1}-u_{N-1}^{n}-u_{N-1}^{n+1}}{2h}+\tilde{K}(t)*\frac{u_N^{n}+u_{N-1}^{n+1}}{2}=0$$

$$\boldsymbol{T}u\equiv\frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}-K_{\lambda,c}(t)*u=0$$



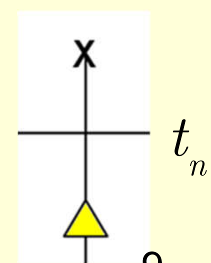
Дискретизация свертки $\tilde{K}(t)*u$

$$\tilde{K}(t)=\sum_{l=1}^{L}\tilde{\alpha}_l\exp(\tilde{\beta}_l t)$$

Для каждой экспоненты используем рекуррентную формулу

$$A(t_{n+0.5}):=\int_0^{t_{n+0.5}}e^{b(t-t')}u(t')dt'=e^{b\tau}A(t_{n-0.5})+\int_{t_{n-0.5}}^{t_{n+0.5}}e^{b(t-t')}u(t')dt'$$

Вычисление интеграла реализуется по формуле парабол,
т.е. по трем точкам $t_n-0.5\tau,\ t_n,\ t_n+0.5\tau$ на интервале



Численные эксперименты с ПГУ

1) Для проверки точности работы ПГУ рассмотрите одновременно две начально-краевые разностные задачи: на исходном отрезке и на расширенной области с $X^{ext}_{\max} = 2X_{\max} - X_{\min}$ Шаг сетки должен быть одинаковым для обеих задач.

2) Для разных моментов времени (например, *t=0,1,2,3,…*) нарисуйте графики решений (на своем отрезке для каждой из задач) и разность решений этих задач (на общем отрезке). Нарисуйте график ошибки: норма разности решений на отрезке от времени.

3) Проделайте эти эксперименты с параметром *N-1 = 30,90,270*, чтобы проверить второй порядок сеточной сходимости.

4) Изучите, как влияет выбор параметра *L=17,33,65* на точность (аппроксимация суммами экспонент). Для этого возьмите *N-1 = 270,* $\lambda = 3$ и нарисуйте три графика ошибки (п. 2) на одной картинке

5) Изучите, как влияет выбор параметра $\lambda = 0,\ 1,\ 3,\ 6$ на точность.

Пояснение для вычисления интеграла свертки

В архиве kern.zip находятся файлы с различными наборами коэффициентов для ядра свертки, а также файл на Матлабе по проверке точности аппроксимации аналитического ядра.

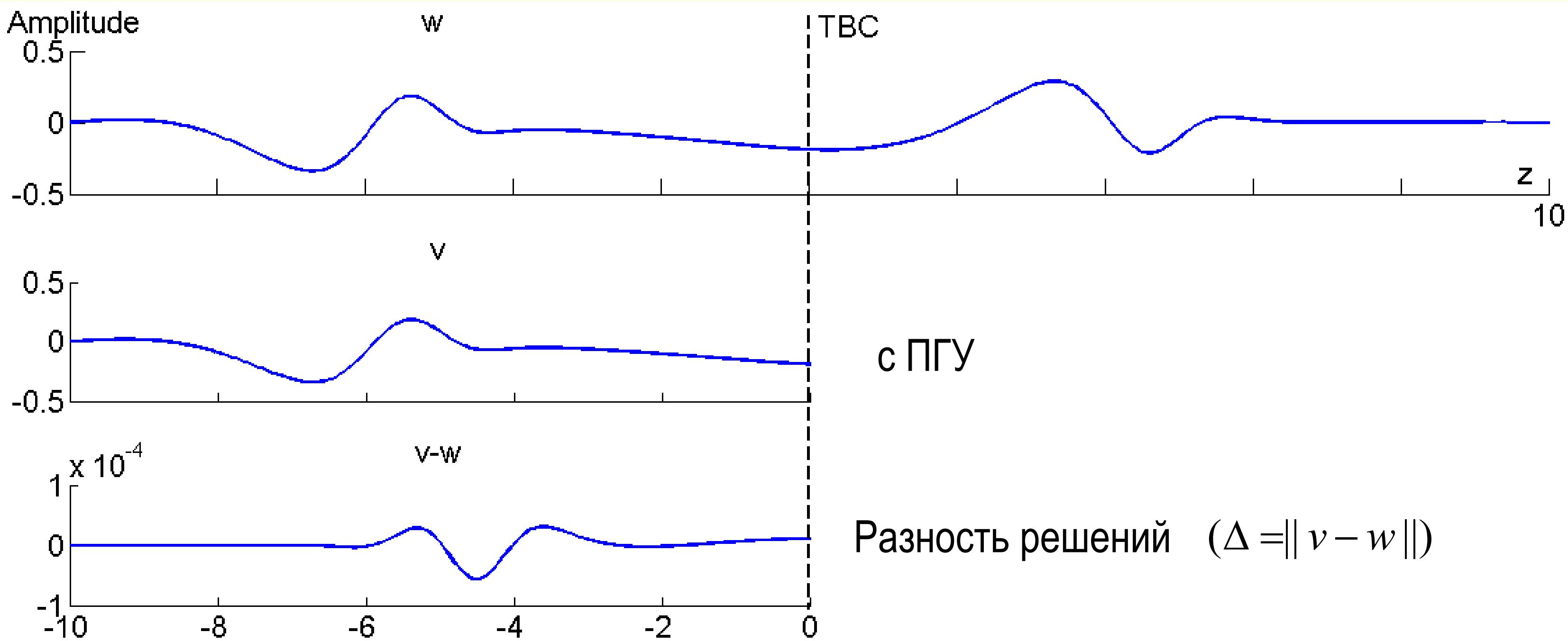
Нужно иметь в виду, что в ядре свертки все комплексные α и β имеют свою сопряженную пару. Поэтому результат свертки с действительной функцией всегда действительный. Однако, в файлах коэффициентов приведен только один набор для каждой такой пары, т.е., в каждой строке содержится четверка действительных чисел - действительная и мнимая части для α и для β (парная четверка получается сопряжением).

Поэтому, для вычисления свертки нужно просуммировать только по тем коэффициентам, что в файлах, а затем взять действительную часть от суммы. Эта продемонстрировано в примере с матлабовским скриптом по проверке точности.

Советы

1) Лучше начать со случая $\lambda = 0$, чтобы проверить работу схемы без свертки
2) Отладочный процесс добавления свертки в граничные условия можно разбить на три этапа:
   а) сначала считать ее непосредственно интегралом свертки с аналитическим ядром
   б) затем заменить ядро в этом интеграле на сумму экспонент
   в) наконец, реализовать этот интеграл рекуррентными формулами

ПГУ высокого порядка аппроксимации для волнового уравнения (одна Фурье-гармоника)



Решение по разностной схеме 6-го порядка точности по пространству

τ	N	Δ $\lambda=1$	EOC $\lambda=1$	Δ $\lambda=3$	EOC $\lambda=3$	Δ $\lambda=6$	EOC $\lambda=6$
1,00e-2	32	1,59e-4		2,02e-4		1,39e-3	
1,25e-3	64	2,81e-6	**5,8**	2,70e-6	**6,2**	2,04e-5	**6,1**
1,56e-4	128	4,56e-8	**5,9**	4,12e-8	**6,0**	3,66e-7	**5,8**
1,95e-5	256	7,1e-10	**6,0**	6,6e-10	**6,0**	3,46e-9	**6,7**

В этом примере использовалась сетка с целыми узлами, поэтому число узлов N удваивалось.

Estimated order of convergence

$$EOC = \log_2 \frac{\Delta_N}{\Delta_{2N}}$$

Напоминание построения начальных условий
(см. Тема 2: 1.1 Разностные схемы для волнового уравнения)

Начальные условия (здесь $d = 1,\ r \equiv x$)

Заданы $u(0,r) = v_0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,r) = v_1$

для вычислений нужны $u^0 \equiv u(0,r) = v_0$ и $u^1 \equiv u(\tau,r) = ?$

$$u(\tau,r) = u(0,r) + \tau \frac{\partial u}{\partial t}(0,r) + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0,r) + \frac{\tau^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(0,r) + \dots$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0,r) = c^2 \frac{1}{r^{d-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{d-1}\frac{\partial v_0}{\partial r}\right) - f(0,r)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(0,r) = c^2 \frac{1}{r^{d-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{d-1}\frac{\partial v_1}{\partial r}\right) - \frac{\partial f}{\partial t}(0,r)$$

Граничные условия Дирихле для $x = X_{\min}$

$$u_0^n + u_1^n = 0, \qquad n = 1, 2, \dots$$