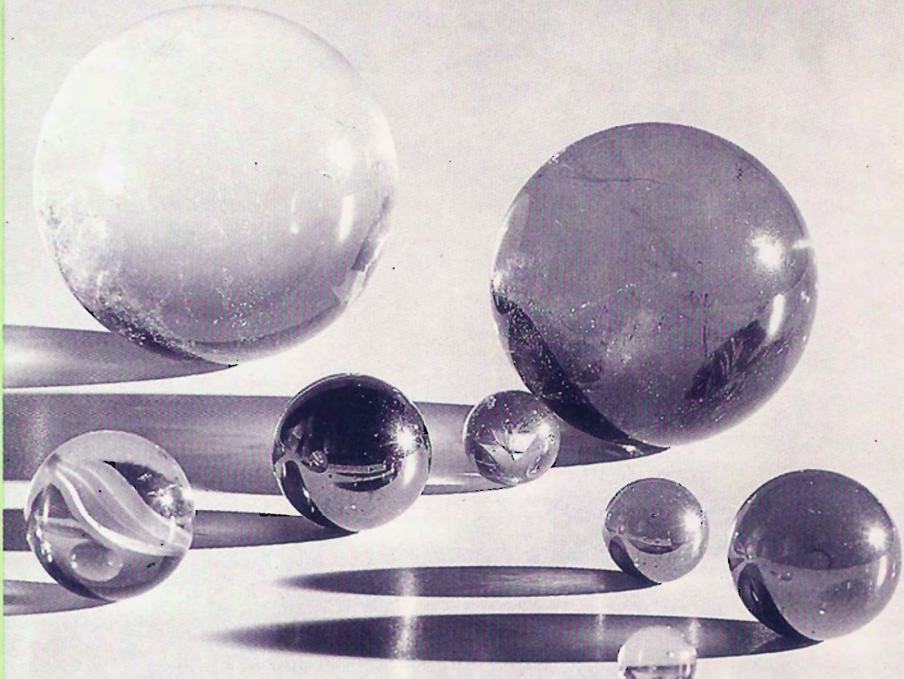
10

Fundamentos de Matemática Elementar

Osvaldo Dolce
José Nicolau Pompeo



· geometria espacial
posição e métrica

ATUAL EDITORA

OSVALDO DOLCE
JOSÉ NICOLAU POMPEO

FUNDAMENTOS DE

MATEMÁTICA ELEMENTAR 10

GEOMETRIA ESPACIAL POSIÇÃO E MÉTRICA

116 exercícios resolvidos
1128 exercícios propostos com resposta
273 testes de vestibulares com resposta

5ª edição
6ª reimpressão

ATUAL EDITORA

Sumário

Para mais, acesse: http://fuvestibular.com.br/

CAPÍTULO I

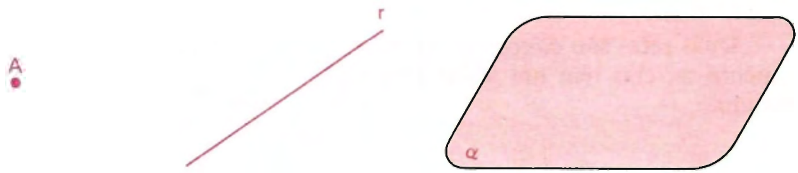
Introdução

I. Conceitos primitivos e postulados

1. As *noções* (*conceitos, termos, entes*) geométricas são estabelecidas por meio de *definições*. Em particular, as primeiras noções, os *conceitos primitivos* (noções primitivas) da Geometria, são adotadas sem definição.

Adotaremos sem definir os conceitos de:

PONTO, RETA e PLANO.



O ponto A. A reta r. O plano α.

Do ponto, da reta e do plano temos um conhecimento intuitivo decorrente da experiência e da observação.

O *espaço* é o conjunto de todos os pontos. Nesse conjunto desenvolveremos a Geometria Espacial.

2. As *proposições* (*propriedades*) geométricas são aceitas mediante *demonstrações*. Em particular, as primeiras proposições, as *proposições primitivas* ou *postulados* são aceitos sem demonstração.

Assim, iniciamos a Geometria com alguns *postulados*, relacionando o ponto, a reta e o plano.

3. *Postulado da existência*

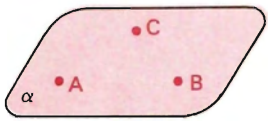
a) Existe reta e numa reta, bem como fora dela, há infinitos pontos.
b) Existe plano e num plano, bem como fora dele, há infinitos pontos.

4. *Postulado da determinação*

a) Dois pontos distintos determinam uma única reta que passa por eles.

b) Três pontos *não colineares* determinam um único plano que passa por eles.

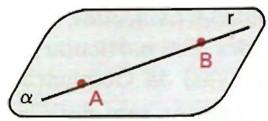
$r = \overleftrightarrow{AB}$



$\alpha = (A, B, C)$

5. *Postulado da inclusão*

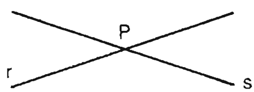
Se uma reta tem dois pontos distintos num plano, então ela está contida no plano.



$(A \neq B,\ r = \overleftrightarrow{AB},\ A \in \alpha,\ B \in \alpha) \Rightarrow r \subset \alpha.$

6. *Retas concorrentes — definição*

Duas retas são *concorrentes* se, e somente se, elas têm um único ponto comum.

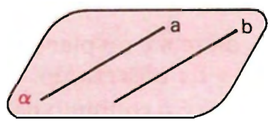


$r \cap s = \{P\}$

7. *Retas paralelas — definição*

Duas retas são *paralelas* se, e somente se, ou são coincidentes ou são coplanares e não têm ponto comum.

$a = b \Rightarrow a \,/\!/\, b$



$(a \subset \alpha,\ b \subset \alpha \text{ e } a \cap b = \varnothing) \Rightarrow a \,/\!/\, b$

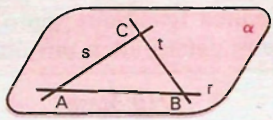
EXERCÍCIOS

1. Demonstre que num plano existem infinitas retas.

Solução

Consideremos um plano α e nele dois pontos distintos A e B. Estes pontos determinam uma reta r, que está contida em α, pois tem dois pontos distintos em α. Consideremos em α e fora de r um ponto C. Os pontos A e C determinam uma reta s, que está em α. Os pontos B e C determinam uma reta t que está em α.

Desse modo podemos construir em α "tantas retas quantas quisermos", isto é, "infinitas" retas.



2. Quantas retas há no espaço? Demonstre.

3. Quantas e quais são as retas determinadas por pares de pontos A, B, C e D, dois a dois distintos, se:

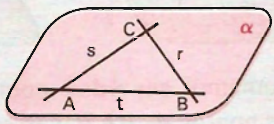
a) A, B e C são colineares.

b) A, B, C e D não são coplanares.

4. Quantos são os planos determinados por quatro pontos distintos dois a dois?

5. Três retas, duas a duas concorrentes, não passando por um mesmo ponto, estão contidas no mesmo plano.

Solução



Sejam r, s e t as retas tais que

$r \cup s = \{C\}$, $r \cup t = \{B\}$, $s \cup t = \{A\}$

e A, B e C não colineares.

Pelo postulado da determinação existe o plano $\alpha = (A, B, C)$.

Pelo postulado da inclusão, temos: $(A \neq B;\ A, B \in \alpha) \implies t \subset \alpha$.

Analogamente temos: $A \subset \alpha$ e $r \subset \alpha$.

6. E comum encontrarmos mesas com *4* pernas que, mesmo apoiadas em um piso plano, balançam e nos obrigam a colocar um calço em uma das pernas se a quisermos firme. Explique, usando argumentos de geometria, por que isso não acontece com uma mesa de *3* pernas.

II. Determinação de plano

8. Existem quatro modos de determinar planos.

1º modo: por três pontos não colineares.
2º modo: por uma reta e um ponto fora dela.
3º modo: por duas retas concorrentes.
4º modo: por duas retas paralelas distintas.

O primeiro modo é postulado e os demais são os três teoremas que seguem.

9. *Teorema 1*

> Se uma reta e um ponto são tais que o ponto não pertence à reta, então eles determinam um único plano que os contém.

Hipótese — *Tese*

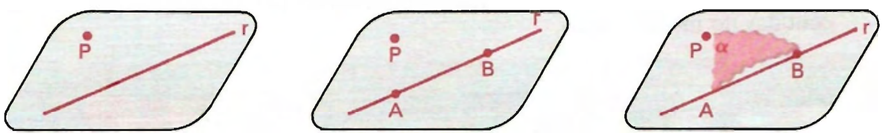
$$(P \notin r) \implies (\exists \mid \alpha \mid P \in \alpha \quad e \quad r \subset \alpha)$$

Demonstração

Sendo um problema de existência e unicidade, dividimos a demonstração nestas duas partes.

1ª parte: Existência

a) Construção:



Tomamos em r dois pontos distintos, A e B.

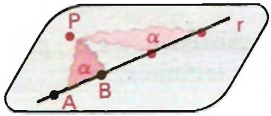
Os pontos A, B e P, não sendo colineares (A, $B \in r$ e $P \notin r$), determinam um plano α.

b) Prova de que α é o plano de r e P.

$$\alpha = (A, B, P) \implies P \in \alpha \qquad \left.\begin{array}{l}\alpha = (A, B, P) \\ A \neq B;\ A, B \in r\end{array}\right\} \implies r \subset \alpha$$

Logo, existe pelo menos o plano α construído por r e P. Indicaremos por $\alpha = (r, P)$. (1)

2ª parte: Unicidade



Provemos que α é o único plano determinado por r e P.

Se existissem α e α' por r e P, teríamos:

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha = (r, P);\ A, B \in r) \implies \alpha = (A, B, P) \\ (\alpha' = (r, P);\ A, B \in r) \implies \alpha' = (A, B, P)\end{array}\right\} \implies \alpha = \alpha'$$

Logo, não existe mais que um plano (r, P). (2)

Conclusão: ((1) e (2)) $\implies \exists \mid \alpha \mid P \in \alpha$ e $r \subset \alpha$.

10. Teorema 2

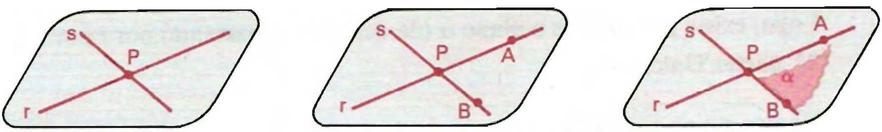
Se duas retas são concorrentes, então elas determinam um único plano que as contém.

Hipótese		*Tese*
$(r \cap s = \{P\})$	$\implies$	$(\exists \mid \alpha \mid r \subset \alpha$ e $s \subset \alpha)$

Demonstração

1ª parte: Existência

a) Construção:



Tomamos um ponto A em r e um ponto B em s, ambos distintos de P.

Os pontos A, B e P, não sendo colineares (A, $P \in r$ e $B \notin r$), determinam um plano α.

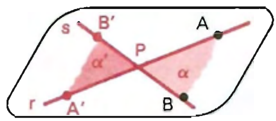
b) Prova de que α é o plano de r e s.

$(\alpha = (A, B, P);\ A, P \in r;\ A \neq P) \implies r \subset \alpha$

$(\alpha = (A, B, P);\ B, P \in s;\ B \neq P) \implies s \subset \alpha$

Logo, existe pelo menos o plano α construído, passando por r e s. Indicaremos por $\alpha = (r, s)$. (1)

2ª parte: Unicidade



Se existissem α e α', por r e s concorrentes, teríamos:

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha = (r, s);\ A, P \in r;\ B \in s) \implies \alpha = (A, B, P) \\ (\alpha' = (r, s);\ A, P \in r;\ B \in s) \implies \alpha' = (A', B', P)\end{array}\right\} \implies \alpha = \alpha'$$

Logo, não existe mais que um plano (r, s). (2)
Conclusão: $((1) \text{ e } (2)) \implies \exists | \alpha | r \subset \alpha \text{ e } s \subset \alpha$.

11. *Teorema 3*

> Se duas retas são paralelas entre si e distintas, então elas determinam um único plano que as contém.

Hipótese — *Tese*

$$(t /\!/ s,\ r \neq s) \implies (\exists | \alpha | r \subset \alpha \text{ e } s \subset \alpha)$$

Demonstração

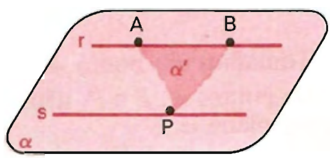
1ª parte: Existência

A existência do plano $\alpha = (r, s)$ é conseqüência da definição de retas paralelas (ou da existência dessas retas), pois:

$$(r /\!/ s,\ r \neq s) \implies (\exists\ \alpha | r \subset \alpha,\ s \subset \alpha \text{ e } r \cap s = \varnothing).$$

Logo, existe pelo menos o plano α (da definição), passando por r e s. (1)

2ª parte: Unicidade



Vamos supor que por r e s passam dois planos α e α' e provemos que eles coincidem.

Se existissem α e α', por r e s paralelas e distintas, tomando-se A e B distintos em r e P em s, teríamos:

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha = (r, s);\ A, B \in r;\ P \in s) \implies \alpha = (A, B, P) \\ (\alpha' = (r, s);\ A, B \in r;\ P \in s) \implies \alpha' = (A, B, P)\end{array}\right\} \implies \alpha = \alpha'$$

Logo, não existe mais que um plano (r, s). (2)
Conclusão: $((1) \text{ e } (2)) \implies \exists | \alpha | r \subset \alpha \text{ e } s \subset \alpha$.

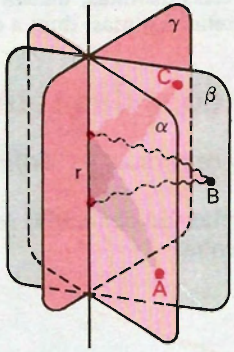
EXERCÍCIOS

7. Quantos são os planos que passam por uma reta?

Solução

Infinitos.

a) Construção:



Seja r a reta. Tomamos um ponto A fora de r. A reta r e o ponto A determinam um plano α. Fora de α, tomamos um ponto B. A reta r e o ponto B determinam um plano β. Fora de α e β, tomamos um ponto C. A reta r e o ponto C determinam um plano γ.

Desse modo podemos construir, por r, tantos planos quantos quisermos, isto é, construímos infinitos planos.

b) Prova:

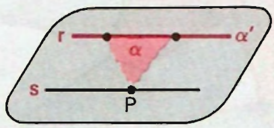
Todos os planos assim construídos passam por r, que com os pontos correspondentes os está determinando.

8. Quantos planos passam por dois pontos distintos?

9. Prove que duas retas paralelas distintas e uma concorrente com as duas são coplanares.

10. Se duas retas são paralelas e distintas, todo plano que contém uma delas e um ponto da outra, contém a outra.

Solução



Sejam r e s as duas retas, P um ponto de s e α o plano (r, P). As retas r e s determinam um plano α'. Temos, então:

$(\alpha' = (r, s), P \in s) \implies \alpha' = (r, P) \implies \alpha' = \alpha.$

Se $\alpha = \alpha'$ contém s, então o plano α contém a reta s.

11. Num plano α há uma reta r e um ponto P não pertencente a r. Prove que: se conduzimos por P uma reta s, paralela a r, então s está contida em α.

12. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

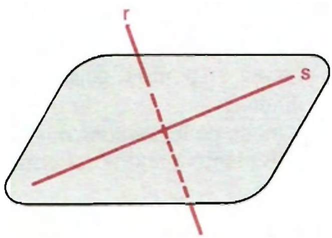
a) Três pontos distintos determinam um plano.
b) Um ponto e uma reta determinam um único plano.
c) Duas retas distintas paralelas e uma concorrente com as duas determinam dois planos distintos.
d) Três retas distintas, duas a duas paralelas, determinam um ou três planos.
e) Três retas distintas, duas a duas concorrentes, determinam um ou três planos.

III. Posições das retas

12. *Retas reversas — definição*

Duas retas são chamadas retas *reversas* se, e somente se, não existe plano que as contenha.

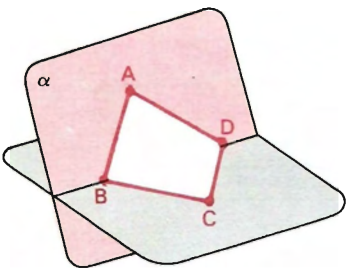
a e b reversas
não existe plano (a, b) e
$a \cap b = \varnothing$

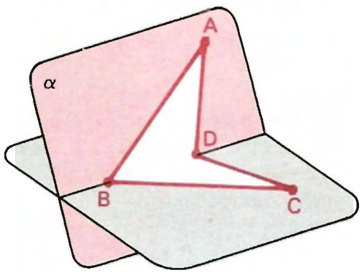


r reversa com s
não existe plano (r, s) e
$r \cap s = \varnothing$

13. *Quadrilátero reverso — definição*

Um quadrilátero é chamado *quadrilátero reverso* se, e somente se, não existe plano contendo seus quatro vértices.





Se $\alpha = (A, B, D)$ e $C \notin \alpha$, então $ABCD$ é quadrilátero reverso.

14. *Observação*

Chamamos *figura* a todo conjunto de pontos. Uma *figura* é *plana* quando seus pontos pertencem a um mesmo plano, e os pontos são ditos *coplanares*; caso contrário, a figura é chamada *figura reversa* e os pontos, *não coplanares*.

15. *Posições relativas de duas retas*

Em vista de definições anteriores, dadas duas retas distintas r e s, ou elas são *concorrentes*, ou *paralelas* ou *reversas*. Essas posições podem ser sintetizadas da seguinte forma:

$$\begin{array}{c} r \text{ e } s \\ \text{distintas} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{c} r \text{ e } s \\ \text{coplanares} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} r \text{ e } s \text{ têm ponto comum} \longrightarrow r \text{ e } s \text{ concorrentes} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\text{ou} \\ r \text{ e } s \text{ não têm ponto comum} \longrightarrow r \text{ e } s \text{ paralelas} \end{array} \right. \\ \qquad\quad \text{ou} \\ r \text{ e } s \text{ reversas} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{c} r \text{ e } s \\ \text{distintas} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} r \text{ e } s \text{ têm ponto comum} \longrightarrow r \text{ e } s \text{ são concorrentes} \\ \qquad\qquad \text{ou} \\ \begin{array}{c} r \text{ e } s \text{ não} \\ \text{têm ponto comum} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} r \text{ e } s \text{ coplanares} \longrightarrow r \text{ e } s \text{ são paralelas} \\ \qquad\qquad\qquad\quad \text{ou} \\ r \text{ e } s \text{ não coplanares} \longrightarrow r \text{ e } s \text{ são reversas} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Se as retas r e s são *coincidentes* (ou iguais), elas são *paralelas*.

EXERCÍCIOS

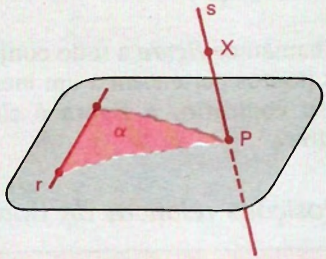
13. Prove a existência de retas reversas.

Solução

a) Construção:

Consideremos uma reta r e um ponto P fora de r. A reta r e o ponto P determinam um plano $\alpha = (r, P)$.

Tomemos fora de α um ponto X.
Os pontos distintos P e X determinam uma reta $s = \overleftrightarrow{PX}$.



b) Prova de que r e s são reversas:

Se existe um plano $\beta = (r, s)$, temos:

$(r \subset \beta \;\text{ e }\; P \in \beta) \implies \beta = (r, P) \implies \beta = \alpha$
$(\beta = \alpha, s \subset \beta, X \in s) \implies X \in \alpha$ (o que é absurdo, pois tomamos $X \notin \alpha$).

Logo, não existe um plano contendo r e s.

Assim, obtivemos duas retas r e s, reversas.

14. Prove que um quadrilátero reverso não é paralelogramo.

15. As diagonais de um quadrilátero reverso são reversas.

16. Duas retas distintas r e s, reversas a uma terceira reta t, são reversas entre si?

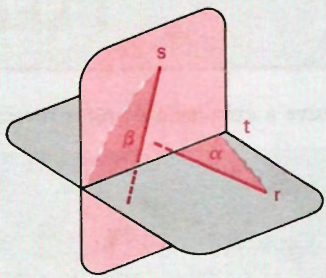
17. Duas retas reversas e uma concorrente com as duas determinam dois planos distintos.

Solução

Sejam r e s duas retas reversas e t uma reta concorrente com r e concorrente com s.

As retas concorrentes r e s determinam um plano α.
As retas concorrentes s e t determinam um plano β.

Os planos α e β são distintos pois, se $\alpha = \beta$, as retas r (de α) e s (de β) estariam neste plano $\alpha = \beta$, o que é absurdo, pois contraria a hipótese de serem reversas.



18. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Duas retas ou são coincidentes ou são distintas.
b) Duas retas ou são coplanares ou são reversas.
c) Duas retas distintas determinam um plano.
d) Duas retas concorrentes têm um ponto comum.
e) Duas retas concorrentes têm um único ponto comum.
f) Duas retas que têm um ponto comum são concorrentes.
g) Duas retas concorrentes são coplanares.
h) Duas retas coplanares são concorrentes.
i) Duas retas distintas não paralelas são reversas.
j) Duas retas que não têm ponto comum são paralelas.
k) Duas retas que não têm ponto comum são reversas.
l) Duas retas coplanares ou são paralelas ou são concorrentes.
m) Duas retas não coplanares são reversas.

Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) $r \cap s = \varnothing \implies r$ e s são reversas.
b) r e s são reversas $\implies r \cap s = \varnothing$.
c) $r \cap s = \varnothing \implies r$ e s são paralelas.
d) $r /\!/ s,\ r \neq s \implies r \cap s = \varnothing$.
e) A condição $r \cap s = \varnothing$ é necessária para que r e s sejam reversas.
f) A condição $r \cap s = \varnothing$ é suficiente para que r e s sejam reversas.
g) A condição $r \cap s = \varnothing$ é necessária para que duas retas distintas r e s sejam paralelas.
h) A condição $r \cap s = \varnothing$ é suficiente para que duas retas r e s sejam paralelas.

IV. Interseção de planos

16. *Postulado da interseção*

Se dois planos distintos têm um ponto comum, então eles têm pelo menos um outro ponto comum.

$$(\alpha \neq \beta,\ P \in \alpha \ \text{ e } \ P \in \beta \implies (\exists\, Q \mid Q \neq P,\ Q \in \alpha \ \text{ e } \ Q \in \beta)$$

17. *Teorema da interseção*

Se dois planos distintos têm um ponto comum, então a interseção desses planos é uma única reta que passa por aquele ponto.

Hipótese — *Tese*

$$(\alpha \neq \beta,\ P \in \alpha,\ P \in \beta) \implies (\exists \mid i \mid \alpha \cap \beta = i \ \text{ e } \ P \in i)$$

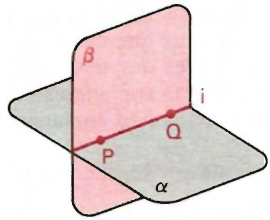
Demonstração

1ª parte: Existência

$$(\alpha \neq \beta,\ P \in \alpha,\ P \in \beta) \implies (\exists\ Q \neq P,\ Q \in \alpha \ \text{ e } \ Q \in \beta)$$

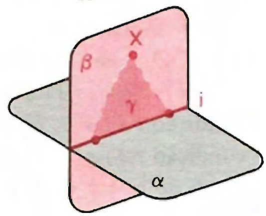
$$\left.\begin{array}{l} \alpha \neq \beta,\ P \in \alpha,\ P \in \beta \\ Q \neq P,\ Q \in \alpha,\ Q \in \beta \end{array}\right\} \implies (\exists\ i \mid i = \overleftrightarrow{PQ},\ i \subset \alpha \ \text{ e } \ i \subset \beta)$$

A reta *i* determinada pelos pontos *P* e *Q* é comum aos planos α e β.



2ª parte: Unicidade

Da 1ª parte concluímos que todos os pontos de *i* estão em α e em β. Para provarmos que *i* é a interseção de α e β, basta provarmos que todos os pontos que estão em α e em β estão em *i*. É o que segue:



Se existe um ponto X tal que $X \in \alpha$, $X \in \beta$ e $X \notin i$, temos:
$X \notin i \implies \exists \mid \gamma \mid \gamma = (i, X)$

$$\left.\begin{array}{l} (i \subset \alpha,\ X \in \alpha,\ \gamma = (i, X)) \implies \gamma = \alpha \\ (i \subset \beta,\ X \in \beta,\ \gamma = (i, X)) \implies \gamma = \beta \end{array}\right\} \implies \alpha = \beta$$

Os planos α e β coincidem com o plano $\gamma = (i, X)$, o que é absurdo, pois contraria a hipótese de que $\alpha \neq \beta$.

Logo, *i* é a interseção de α e β.

18. *Planos secantes — definição*

Dois planos distintos que se interceptam (ou se cortam) são chamados planos *secantes* (ou *concorrentes*). A reta comum é a *interseção* desses planos ou o *traço* de um deles no outro.

19. *Observações*

1ª) Para se obter a interseção de dois planos distintos, basta obter dois pontos distintos comuns a esses planos.

2ª) Para se provar que três ou mais pontos do espaço são colineares, basta provar que eles pertencem a dois planos distintos.

EXERCÍCIOS

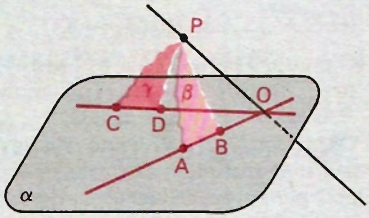
20. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Se dois planos distintos têm um ponto comum, então eles têm uma reta comum que passa pelo ponto.
b) Dois planos distintos que têm uma reta comum, são secantes.
c) Se dois planos têm uma reta comum, eles são secantes.
d) Se dois planos têm uma única reta comum, eles são secantes.
e) Dois planos secantes têm interseção vazia.
f) Dois planos secantes têm infinitos pontos comuns.
g) Dois planos secantes têm infinitos pontos comuns.
h) Se dois planos têm um ponto comum, eles têm uma reta comum.

21. Num plano α há duas retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ concorrentes num ponto O. Fora de α há um ponto P. Qual é a interseção dos planos $\beta = (P, A, B)$ e $\gamma = (P, C, D)$?

Solução

Os planos β e γ são distintos e P pertence a ambos.



$\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{O\} \implies$

$\begin{cases} O \in \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow O \in \beta \\ O \in \overleftrightarrow{CD} \Rightarrow O \in \gamma \end{cases}$

Logo, $\beta \cap \gamma = \overleftrightarrow{OP}$.

22. Num plano α há dois segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, contidos em retas não paralelas e, fora de α, há um ponto P. Qual é a interseção dos planos $\beta = (P, A, B)$ e $\gamma = (P, C, D)$?

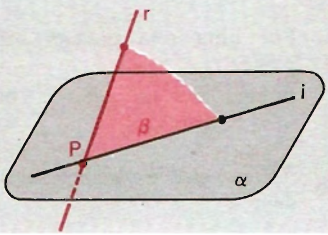
23. Um ponto P é o traço de uma reta r num plano α. Se β é um plano qualquer que passa por r, o que ocorre com a interseção $\alpha \cap \beta = i$?

Solução

$(P \in r, r \subset \beta) \implies P \in \beta$

$(\alpha \neq \beta, P \in \alpha, P \in \beta) \implies P \in i$

Logo, a interseção de β com α passa por P.



24. Duas retas r e s são reversas. Em r há um ponto R e em s há um ponto S. Qual é a interseção dos planos $\alpha = (r, S)$ e $\beta = (s, R)$?

25. Qual é a interseção de duas circunferências de raios congruentes, centros comuns e situadas em planos distintos?

26. As retas que contêm os lados de um triângulo ABC furam um plano α nos pontos O, P e R. Prove que O, P e R são colineares.

27. Os triângulos não coplanares ABC e $A'B'C'$ são tais que as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{A'B'}$ são concorrentes em O; $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{A'C'}$ são concorrentes em P; $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{B'C'}$ são concorrentes em R. Prove que O, P e R são colineares.

Solução

Sendo $\alpha = (A, B, C)$ e $\alpha' = (A', B', C')$, temos:

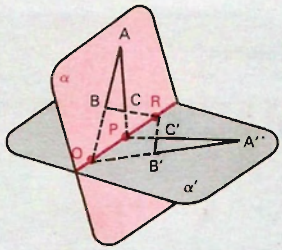
$\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = \{O\} \Rightarrow O \in \overleftrightarrow{AB}$ e $O \in \overleftrightarrow{A'B'}$

$(O \in \overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AB} \subset \alpha) \implies O \in \alpha$

$(O \in \overleftrightarrow{A'B'}, \overleftrightarrow{A'B'} \subset \alpha') \implies O \in \alpha'$

O ponto O pertence a α e α' distintos. Analogamente, $P \in \alpha$ e $P \in \alpha'$, $R \in \alpha$ e $R \in \alpha'$.

Os pontos O, P e R, sendo comuns a α e α' distintos, são colineares, pois pertencem à interseção desses planos, que é uma *única* reta.



28. **Teorema dos três planos secantes**

Se três planos α, β e γ são distintos e dois a dois secantes, segundo três retas a, b, c ($\beta \cap \gamma = a$, $\alpha \cap \gamma = b$, $\alpha \cap \beta = c$), estude essas três retas.

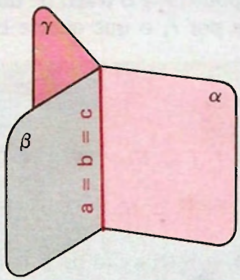
Solução

1º caso:

Por uma reta passam infinitos planos.

Então, por $a = b = c$ passam α, β e γ.

As retas a, b e c podem ser coincidentes.



2º caso:

Supondo que as retas a, b e c são duas a duas distintas ($a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$), para estudarmos as três, começaremos por duas delas: a e b. Essas duas retas (a e b) são distintas e coplanares ($a \subset \gamma$ e $b \subset \gamma$) pela hipótese. Então, ou a e b são concorrentes, ou a e b são paralelas.

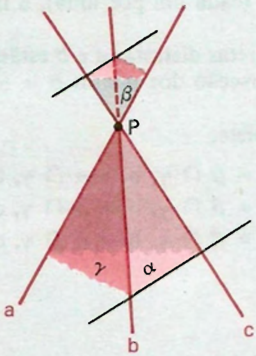
1º) a e b são concorrentes:

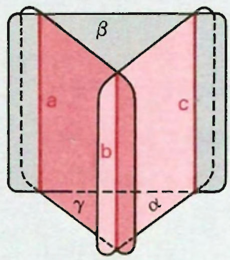
Supondo, então, que existe P tal que $a \cap b = \{P\}$ e usando as igualdades $a = b \cap \gamma$, $b = \alpha \cap \gamma$ e $\alpha \cap \beta = c$, para substituições, temos:

$$a \cap b = \{P\} \implies (\beta \cap \gamma) \cap (\alpha \cap \gamma) = \{P\} \implies \alpha \cap \beta \cap \gamma = \{P\} \implies$$
$$\implies (\alpha \cap \beta) \cap \gamma = \{P\} \implies c \cap \gamma = \{P\} \implies P \in c.$$

Logo, se $a \cap b = \{P\}$, então $a \cap b \cap c = \{P\}$.

1ª conclusão: Se três planos são distintos e dois a dois secantes, segundo três retas distintas, e duas dessas retas são concorrentes, então todas as três incidem num mesmo ponto.





2º) a e b são paralelas (distintas):

Estudemos as retas a e c. As retas a e c distintas são coplanares ($a, c \subset \beta$) por hipótese.

Se $\exists\, Q \mid a \cap c = \{Q\}$, temos, pelo item anterior:

$$a \cap c = \{Q\} \implies a \cap b \cap c = \{Q\},$$

o que é absurdo, por contrariar a hipótese em estudo (a e b não têm ponto comum).

Logo, *a* e *c* são paralelas.

Considerando *b* e *c*, de modo análogo, concluímos que *b* e *c* são paralelas.

> *2ª conclusão*: Se três planos são distintos e dois a dois secantes, segundo três retas distintas, e duas dessas retas são paralelas, todas as três são paralelas (duas a duas).

Reunindo as conclusões, temos o teorema dos três planos secantes:

> Se três planos distintos são dois a dois secantes, segundo três retas, ou essas retas passam por um mesmo ponto ou são paralelas duas a duas.

29. Se dois planos que se cortam passam respectivamente por duas retas paralelas distintas (cada um por uma), a interseção desses planos é paralela às retas.

30. Duas retas distintas *a* e *b* estão num plano α e fora de α há um ponto *P*. Estude a interseção dos planos $\beta = (a, P)$ e $\gamma = (b, P)$ com relação às retas *a* e *b*.

31. Complete:

a) $(a = \beta \cap \gamma,\ b = \alpha \cap \gamma,\ c = \alpha \cap \beta \text{ e } a \cap c = \{P\}) \implies \ldots$

b) $(a = \beta \cap \gamma,\ b = \alpha \cap \gamma,\ c = \alpha \cap \beta \text{ e } a /\!/ c) \implies \ldots$

c) $(a = \beta \cap \gamma,\ b = \alpha \cap \gamma,\ c = \alpha \cap \beta) \implies \ldots$

CAPÍTULO II

Paralelismo

I. Paralelismo de retas

20. *Postulado das paralelas — postulado de Euclides*

Por um ponto existe uma *única* reta paralela a uma reta dada.

21. *Transitividade do paralelismo de retas*

Se duas retas são paralelas a uma terceira, então elas são paralelas entre si.

Hipótese		*Tese*
$(a \parallel c,\ b \parallel c)$	$\Longrightarrow$	$(a \parallel b)$

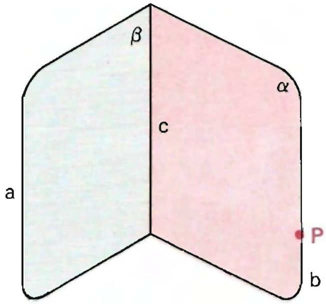
Demonstração

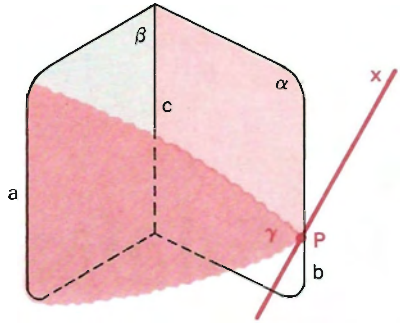
Consideremos o caso mais geral: $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$ e a, b, c não coplanares:

1. Pelo postulado das paralelas concluímos que a e b não têm ponto comum.

2. As retas a e c determinam um plano β; b e c determinam um plano α e $c = \alpha \cap \beta$.

Tomemos um ponto P em b e teremos $\gamma = (a, P)$.





Os planos distintos α e γ têm o ponto P comum, então têm uma reta comum que nomearemos de x (não podemos dizer que é b para não admitirmos a tese).

$$(a = \beta \cap \gamma,\ x = \alpha \cap \gamma,\ c = \alpha \cap \beta \ \text{ e } \ a /\!/ c) \implies (a /\!/ x \ \text{ e } \ c /\!/ x)$$

O ponto P pertence, então, às retas b e x e ambas são paralelas à reta c. Logo, pelo postulado das paralelas, $x = b$.

Como $a /\!/ x$ e $x = b$, vem que $a /\!/ b$.

EXERCÍCIOS

32. Os pontos médios dos lados de um quadrilátero reverso são vértices de um paralelogramo.

33. Num quadrilátero reverso $ABCD$, os pontos M, N, P, Q, R e S são respectivamente pontos médios de $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{CD}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$ e $\overline{AC}$. Prove que $MNPQ$, $MSPR$ e $NSQR$ são paralelogramos.

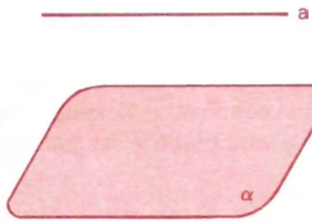
34. Considere um quadrilátero reverso e três segmentos: o primeiro com extremidades nos pontos médios de dois lados opostos, o segundo com extremidades nos pontos médios dos outros dois lados opostos, o terceiro com extremidades nos pontos médios das diagonais. Prove que esses três segmentos se interceptam num ponto.

II. Paralelismo entre retas e planos

22. *Definição*

Uma reta é paralela a um plano (ou o plano é paralelo à reta) se, e somente se, eles não têm ponto comum.

$$a \,/\!/\, \alpha \Leftrightarrow a \cap \alpha = \varnothing$$



23. *Teorema da existência de retas e planos paralelos*

a) Condição suficiente

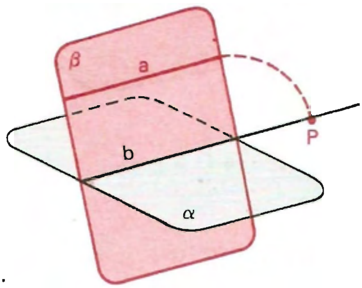
> Se uma reta não está contida num plano e é paralela a uma reta do plano, então ela é paralela ao plano.

Hipótese		*Tese*
$(a \not\subset \alpha,\ a \,/\!/\, b,\ b \subset \alpha)$	$\Longrightarrow$	$a \,/\!/\, \alpha$

Demonstração

$(a \,/\!/\, b,\ a \cap b = \varnothing) \implies \exists\ \beta = (a, b)$

$(b \subset \alpha,\ b \subset \beta,\ \alpha \neq \beta) \implies b = \alpha \cap \beta$



Se a e α têm um ponto P comum, vem:

$(P \in a,\ a \subset \beta) \implies P \in \beta$

com $P \in \beta$ e $P \in \alpha$, decorre $P \in b$. Então $P \in a$ e $P \in b$, o que é absurdo visto que $a \cap b = \varnothing$.

Logo a e α não têm ponto comum, isto é, $a \,/\!/\, \alpha$.

24. *Observações*

1ª) Outro enunciado do teorema acima:

Se duas retas são paralelas e distintas, todo plano que contém uma e não contém a outra, é paralelo a essa outra.

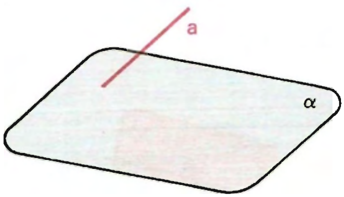
2ª) O teorema acima dá a seguinte *condição suficiente*:

Uma condição suficiente para que uma reta, não contida num plano, seja paralela a esse plano é ser paralela a uma reta do plano.

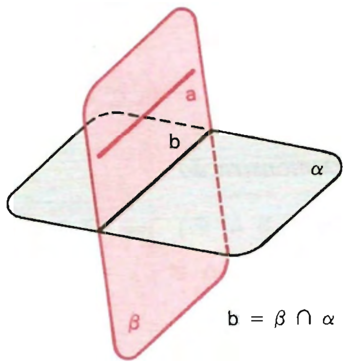
b) Condição necessária

Se uma reta é paralela a um plano, então ela é paralela a uma reta do plano.

Hipótese		*Tese*
$a \parallel \alpha$	$\Longrightarrow$	$(\exists\, b \subset \alpha \mid a \parallel b)$



$a \cap \alpha = \varnothing$



$b = \beta \cap \alpha$

Demonstração

Conduzimos por a um plano β que intercepta α em b.

As retas a e b são coplanares, pois estão em β, e não têm ponto comum, pois:

$(a \cap \alpha = \varnothing, b \subset \alpha) \Longrightarrow a \cap b = \varnothing$

Logo, $a \parallel b$.

25. *Observações*

1ª) Outros enunciados do teorema anterior:

Se dois planos são secantes e uma reta de um deles é paralela ao outro, então essa reta é paralela à interseção.

$(\beta \cap \alpha = b,\ a \subset \beta,\ a /\!/ \alpha) \implies a /\!/ b$

Se uma reta dada é paralela a um plano dado, então qualquer plano que passa pela reta e intercepta o plano dado, o faz segundo uma reta paralela à reta dada.

$(a /\!/ \alpha,\ \beta \supset a,\ \beta \cap \alpha = b) \implies b /\!/ a$

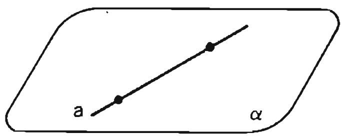
2ª) Condição necessária e suficiente:

> Uma condição necessária e suficiente para que uma reta (a), não contida num plano (α), seja paralela a esse plano, é ser paralela a uma reta (b), contida no plano.

III. Posições relativas de uma reta e um plano

26. Uma reta e um plano podem apresentar em comum:

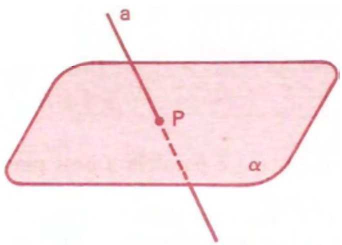
1º) dois pontos distintos:



a reta está contida no plano.

$a \subset \alpha,\ a \cap \alpha = a$

2º) um único ponto:



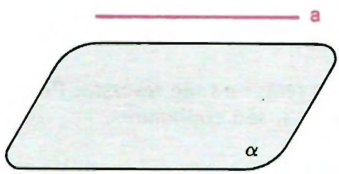
a reta e o plano são concorrentes

ou

a reta e o plano são secantes.

$a \cap \alpha = \{P\}$

3º) nenhum ponto comum:



a reta e o plano são paralelos.

$a \cap \alpha = \varnothing$

EXERCÍCIOS

35. Construa uma reta paralela a um plano dado.

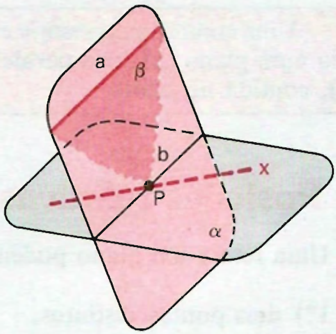
36. Construa um plano paralelo a uma reta dada.

37. Se uma reta é paralela a um plano e por um ponto do plano conduzimos uma reta paralela à reta dada, então a reta conduzida está contida no plano.

Solução

Hipótese *Tese*

$(a \parallel \alpha,\ P \in \alpha,\ P \in b,\ b \parallel a) \implies b \subset \alpha$



Demonstração

O plano $(a, P) = \beta$ intercepta o plano α numa reta x que passa por P e é paralela à reta a, pois $a \parallel \alpha$.

$(\beta \cap \alpha = x,\ a \subset \beta,\ a \parallel \alpha) \implies a \parallel x$

Pelo postulado das paralelas, as retas x e b coincidem, pois passam por P e são paralelas à reta a.
Logo: $x = b$.
Então: $(x = b,\ x = \beta \cap \alpha) \implies b = \beta \cap \alpha \implies b \subset \alpha$.

38. Se uma reta é paralela a dois planos secantes, então ela é paralela à interseção.

39. Se duas retas paralelas são dadas e uma delas é paralela a um plano, então a outra é paralela ou está contida no plano.

40. Dadas duas retas reversas r e s, construa por s um plano paralelo a r.

41. Duas retas r e s são reversas. Prove que as retas paralelas a r, conduzidas por pontos de s, são coplanares.

42. Construa por um ponto uma reta paralela a dois planos secantes.

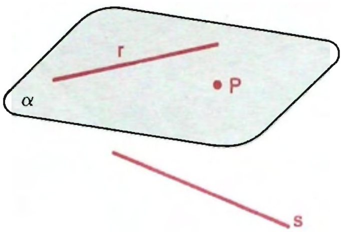
IV. Duas retas reversas

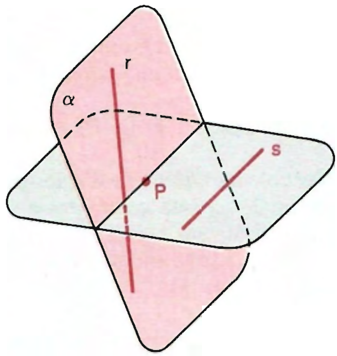
27. Problemas que se referem a duas retas reversas (r e s) e a um ponto (P) devem ser analisados em três possíveis hipóteses:

1º caso: O ponto pertence a uma das retas.

2º caso: O ponto e uma das retas determinam um plano paralelo à outra reta.

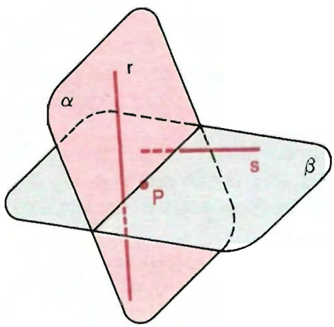
Por exemplo: $\alpha = (r, P)$ e $\alpha // s$.





3º caso: O ponto e qualquer uma das retas determinam um plano não paralelo à outra.

$\alpha = (r, P)$ e α não paralelo a s e $\beta = (s, P)$ e β não paralelo a r.



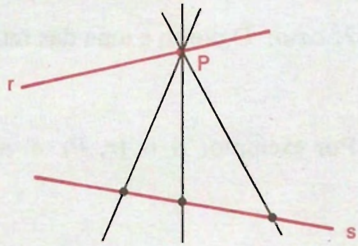
EXERCÍCIOS

43. Construa por um ponto P uma reta que se apóia em duas retas reversas r e s dadas.

Solução

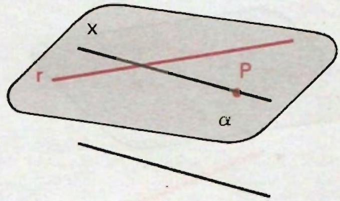
1º caso: O ponto pertence a uma das retas. Por exemplo: $P \in r$.
O problema tem *infinitas* soluções.

São as retas determinadas por P e pelos pontos de s, tomados um a um.



2º caso: O ponto e uma das retas determinam um plano paralelo à outra.
Por exemplo: $\alpha = (r, P)$ e $\alpha /\!/ s$.

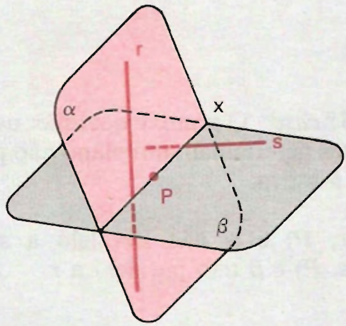
O problema *não tem* solução, porque qualquer reta x, que passa por P e se apóia em r, está em α e por isso não pode se apoiar em s, visto que $s \cap \alpha = \varnothing$.



3º caso: $\alpha = (r, P)$, α não paralelo a s e $\beta = (s, P)$, β não paralelo a r.
O problema admite *uma única* solução, que é a reta x interseção de α e β.

x é concorrente com r, pois x e r são coplanares (estão em α) e não são paralelas (pois r não é paralela a β).

x é concorrente com s, pois x e r são coplanares (estão em β) e não são paralelas (pois s não é paralela a α).



A reta x é única, pois se existisse outra reta x', distinta de x, nas condições pedidas, teríamos o plano (x, x') com $r \subset (x, x')$ e $s \subset (x, x')$, o que é absurdo.

44. Construa por um ponto P um plano paralelo a duas retas reversas r e s dadas.

45. Dadas duas retas reversas, existem pontos P pelos quais não passa nenhuma reta que se apóie em ambas?

46. Dadas duas retas reversas, prove que o plano paralelo a uma delas, conduzida pela outra, é único.

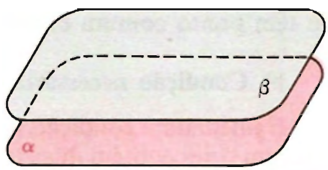
47. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Uma reta e um plano que têm um ponto comum são concorrentes.
b) Uma reta e um plano secantes têm um único ponto comum.
c) Uma reta e um plano paralelos não têm ponto comum.
d) Um plano e uma reta secantes têm um ponto comum.
e) Se uma reta está contida num plano, eles têm um ponto comum.
f) Se uma reta é paralela a um plano, ela é paralela a qualquer reta do plano.
g) Se um plano é paralelo a uma reta, qualquer reta do plano é reversa à reta dada.
h) Se uma reta é paralela a um plano, existe no plano uma reta concorrente com a reta dada.
i) Se uma reta e um plano são concorrentes, então a reta é concorrente com qualquer reta do plano.
j) Se uma reta é paralela a um plano, ela é paralela a infinitas retas do plano.
k) Se duas retas distintas são paralelas a um plano, então elas são paralelas entre si.
l) Uma condição necessária e suficiente para uma reta ser paralela a um plano é ser paralela a uma reta do plano e não estar nele.
m) Por um ponto fora de um plano passam infinitas retas paralelas ao plano.
n) Por um ponto fora de uma reta passa um único plano paralelo à reta.

48. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Dadas duas retas reversas, qualquer reta que encontra uma, encontra a outra.
b) Dadas duas retas reversas, sempre existe reta que se apóie em ambas.
c) Dadas duas retas reversas, qualquer plano que passa por uma, encontra a outra.
d) Por qualquer ponto é possível conduzir uma reta que se apóia em duas retas reversas dadas.

V. Paralelismo entre planos



28. *Definição*

Dois planos são paralelos se, e somente se, eles não têm ponto comum ou são iguais (coincidentes).

$$\alpha /\!/ \beta \Leftrightarrow (\alpha \cap \beta = \varnothing \quad \text{ou} \quad \alpha = \beta)$$

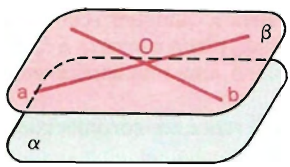
29. *Teorema da existência de planos paralelos*

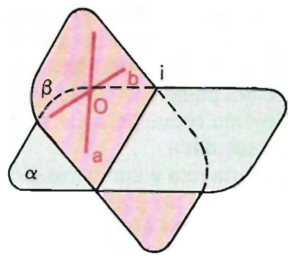
a) Condição suficiente

Se um plano contém duas retas *concorrentes*, ambas paralelas a um outro plano, então esses planos são paralelos.

Hipótese — *Tese*

$$(a \subset \beta,\ b \subset \beta;\ a \cap b = \{O\};\ a \,/\!/\, \alpha,\ b \,/\!/\, \alpha) \implies \alpha \,/\!/\, \beta$$





Demonstração

Os planos α e β são distintos. Provemos que eles são paralelos, pelo método indireto de demonstração.

Se existisse uma reta i tal que $i = \alpha \cap \beta$, teríamos:

$$(a \,/\!/\, \alpha,\ a \subset \beta,\ i = \alpha \cap \beta) \implies a \,/\!/\, i$$
$$(b \,/\!/\, \alpha,\ b \subset \beta,\ i = \alpha \cap \beta) \implies b \,/\!/\, i$$

O fato de a e b serem concorrentes e ambas paralelas a i é um absurdo, pois contraria o postulado das paralelas (postulado de Euclides). Logo, α e β não têm ponto comum e, portanto, $\alpha \,/\!/\, \beta$.

b) Condição necessária e suficiente

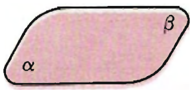
É imediata a condição necessária: Se dois planos distintos são paralelos, então um deles contém duas retas *concorrentes*, ambas paralelas ao outro. Daí temos a condição que segue:

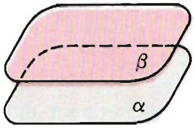
Uma condição necessária e suficiente para que dois planos distintos sejam paralelos é que um deles contenha duas retas *concorrentes*, ambas paralelas ao outro.

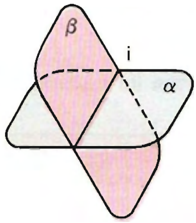
VI. Posições relativas de dois planos

30. Dois planos podem ocupar as seguintes posições relativas:

1º) coincidentes (ou iguais) | 2º) paralelos distintos | 3º) secantes







$\alpha \cap \beta = \alpha = \beta$ $\qquad$ $\alpha \cap \beta = \varnothing$ $\qquad$ $\alpha \cap \beta = i$

EXERCÍCIOS

49. Se dois planos distintos são paralelos, toda reta de um deles é paralela ao outro.

50. Por um ponto P, fora de um plano α, construa um plano paralelo a α.

51. Se dois planos são paralelos e uma reta é concorrente com um deles, então essa reta é concorrente com o outro.

52. Se dois planos são paralelos, todo plano que encontra um deles, encontra o outro.

53. Se dois planos paralelos interceptam um terceiro, então as interseções são paralelas.

Solução *Hipótese* *Tese*

$(\alpha /\!/ \beta,\ \alpha \cap \gamma = a,\ \beta \cap \gamma = b) \implies (a /\!/ b)$

Demonstração

1. Se $\alpha = \beta$, temos:

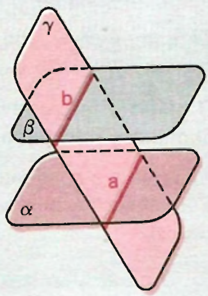
$\alpha = \beta \implies a = b \implies a /\!/ b$

2. Se $\alpha \cap \beta = \varnothing$, temos:

$(\alpha \cap \beta = \varnothing,\ a \subset \alpha,\ b \subset \beta) \Rightarrow a \cap b = \varnothing$

$(a \cap b = \varnothing,\ a \subset \gamma,\ b \subset \gamma) \Rightarrow a /\!/ b$

Como a e b estão em γ, vem que $a /\!/ b$.



54. Dois planos paralelos distintos determinam em retas paralelas distintas segmentos congruentes.

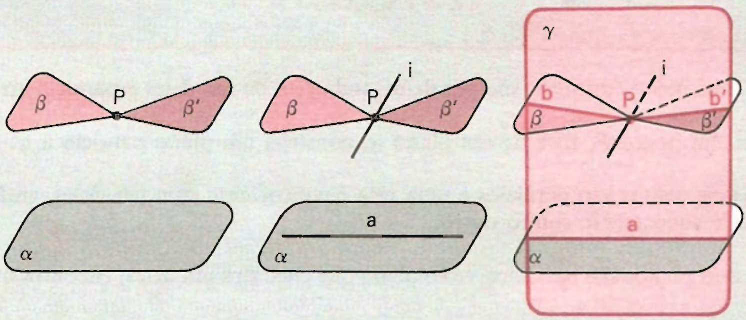
55. Se dois planos são paralelos, toda reta paralela a um deles é paralela ou está contida no outro.

56. Teorema da unicidade

Por um ponto fora de um plano passa um único plano paralelo ao plano dado.

Solução

Sejam P e α os dados, $P \notin \alpha$.



Se existissem dois planos distintos β e β' passando por P e ambos paralelos a α, teríamos:

1) β e β' interceptam-se numa reta i que é paralela a α.

2) Tomamos em α uma reta a, não paralela a i. A reta a e o ponto P determinam um plano α.

3) O plano γ intercepta β em uma reta b (distinta de i) paralela à reta a. O plano γ intercepta β' em uma reta b' (distinta de i) paralela à reta a.

4) As retas b e b' são concorrentes em P e ambas paralelas à reta a, o que é um absurdo, pois contraria o postulado das paralelas (postulado de Euclides).

Logo, o plano paralelo a α, passando por P, é único.

57. Prove a *transitividade* do paralelismo de planos, isto é, se dois planos são paralelos a um terceiro, então eles são paralelos entre si.

58. Se dois planos são, respectivamente, paralelos a dois planos que se interceptam, então eles se interceptam e sua interseção é paralela à interseção dos dois primeiros.

59. Dadas duas retas reversas, existem dois planos paralelos, e somente dois, cada um contendo uma das retas.

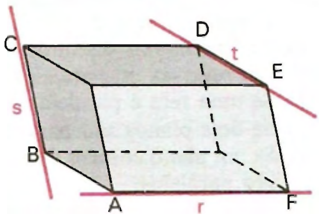
60. Conduza uma reta, que encontra uma reta dada a, seja paralela a um plano α e passe por um ponto P dado fora do plano e da reta dada. Discuta.

VII. Três retas reversas duas a duas

31. Problemas que se referem a três retas (r, s, t), duas a duas reversas, devem ser analisados em duas hipóteses possíveis:

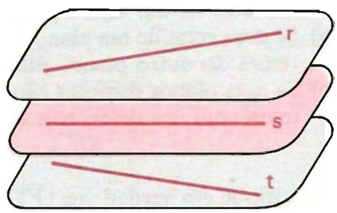
1º caso: Não existe plano paralelo às três retas.

O plano conduzido por uma das retas, paralelo a outra delas, não é paralelo à terceira reta.



2º caso: Existe plano paralelo às três retas.

O plano conduzido por uma das retas, paralelo a outra delas, é paralelo à terceira reta.



EXERCÍCIOS

61. Dadas três retas r, s e t, reversas duas a duas, construa uma reta x, paralela a t, concorrente com r e concorrente com s.

62. Dados dois planos secantes α e β e duas retas reversas r e s, construa uma reta x paralela a α e a β e concorrente com r e s.

63. Construa uma reta que se apóie em três retas r, s e t, reversas duas a duas.

64. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Se dois planos são secantes, então qualquer reta de um deles é concorrente com o outro.
b) Se dois planos são secantes, então uma reta de um deles pode ser concorrente com uma reta do outro.
c) Se dois planos são secantes, então uma reta de um deles pode ser reversa com uma reta do outro.
d) Dois planos distintos paralelos têm um ponto comum.
e) Se dois planos distintos são paralelos, então uma reta de um deles é paralela ao outro.
f) Se dois planos distintos são paralelos, então uma reta de um e outra reta de outro podem ser concorrentes.
g) Se dois planos distintos são paralelos, então toda reta de um deles é paralela a qualquer reta do outro.
h) Se dois planos distintos são paralelos, uma reta de um e uma reta do outro são reversas ou paralelas.
i) Se uma reta é paralela a dois planos, então esses planos são paralelos.
j) Se dois planos são paralelos a uma reta, então são paralelos entre si.
k) Se um plano contém duas retas paralelas a um outro plano, então esses planos são paralelos.
l) Se um plano contém duas retas distintas paralelas a um outro plano, então esses planos são paralelos.
m) Uma condição suficiente para que dois planos sejam paralelos é que duas retas distintas de um sejam paralelas ao outro.
n) Se duas retas de um plano são, respectivamente, paralelas a duas retas concorrentes do outro plano, então esses planos são paralelos.
o) Se dois planos distintos são paralelos, então toda reta que tem um ponto comum com um deles, tem um ponto comum com o outro.

65. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Se três retas são, duas a duas, reversas e não paralelas a um mesmo plano, então por qualquer ponto de uma passa uma reta que se apóia nas outras duas.
b) Se três retas são, duas a duas, reversas e paralelas a um mesmo plano, então por qualquer ponto de uma passa uma reta que se apóia nas outras duas.
c) Dadas três retas, duas a duas reversas, uma condição necessária e suficiente para que por qualquer ponto de uma sempre passe uma reta que se apóia nas outras duas é as três serem paralelas a um mesmo plano.
d) Dadas três retas, duas a duas reversas, sempre existe uma reta paralela a uma delas e que se apóia nas outras duas.

VIII. Ângulo de duas retas — Retas ortogonais

32. *Postulado da separação dos pontos de um plano*

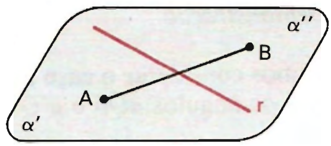
Uma reta r de um plano α separa esse plano em dois subconjuntos α' e α'' tais que:

a) $\alpha' \cap \alpha'' = \varnothing$

b) α' e α'' são convexas

c) $(A \in \alpha', B \in \alpha'') \implies \overline{AB} \cap r \neq \varnothing$

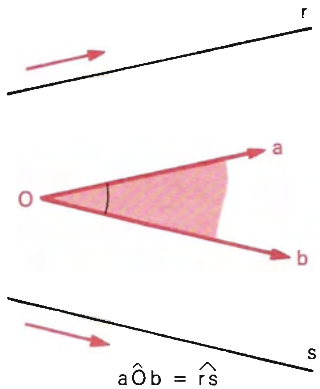
Os subconjuntos α' e α'' são chamados semiplanos abertos e os conjuntos $r \cup \alpha'$ e $r \cup \alpha''$ são chamados semiplanos. A reta r é a origem de cada um desses semiplanos.



33. *Ângulo de duas retas quaisquer — definição*

Um ângulo é chamado ângulo de duas retas *orientadas* quaisquer se, e somente se, ele tem vértice arbitrário e seus lados têm sentidos respectivamente concordantes com os sentidos das retas.

Na figura ao lado o ângulo plano $a\hat{O}b$ é o ângulo das retas reversas (orientadas) r e s.



34. *Observações*

1ª) A definição acima visa, principalmente, estabelecer o conceito de ângulo de duas retas reversas.

2ª) Se duas semi-retas têm sentidos concordantes (ou discordantes), elas estão em retas paralelas.

3ª) A arbitrariedade do vértice é garantida pelo teorema que segue:

35. *Teoremas sobre ângulos de lados respectivamente paralelos*

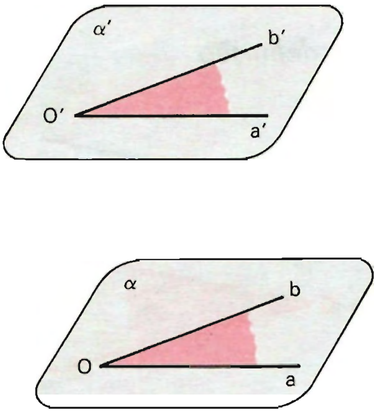
a) Se dois ângulos têm os lados com sentidos respectivamente concordantes, então eles são congruentes.

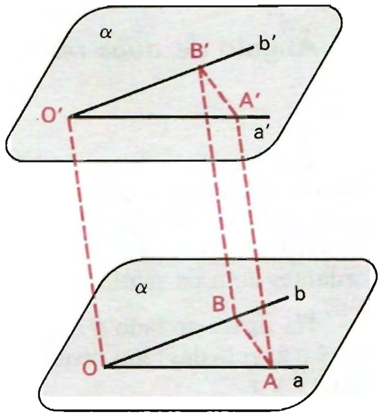
Hipótese | *Tese*

$$\left(\begin{array}{l} Oa \text{ e } O'a' \text{ têm sentidos concordantes} \\ Ob \text{ e } O'b' \text{ têm sentidos concordantes} \end{array}\right) \Longrightarrow (\text{a}\hat{\text{O}}\text{b} \equiv \text{a}'\hat{\text{O}}'\text{b}')$$

Demonstração

Vamos considerar o caso mais geral: Oa e Ob não são coincidentes nem opostas e os ângulos $a\hat{O}b$ e $a'\hat{O}'b'$ não são coplanares.





Notemos que os planos α e α' dos ângulos $a\hat{O}b$ e $a'\hat{O}'b'$ são paralelos. Tomemos os pontos $A \in a$, $B \in b$, $A' \in a'$ e $B' \in b'$ tais que:

$$\overline{OA} \equiv \overline{O'A'} \quad \text{e} \quad \overline{OB} \equiv \overline{O'B'}. \quad (1)$$

O quadrilátero $OAA'O'$ é paralelogramo, pois as semi-retas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{O'A'}$ têm sentidos concordantes e os segmentos $\overline{OA}$ e $\overline{O'A'}$ são congruentes. Logo,

$$\overline{OO'} \parallel \overline{AA'} \quad \text{e} \quad \overline{OO'} \equiv \overline{AA'}. \quad (2)$$

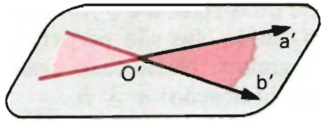
Analogamente, temos que $OBB'O'$ é paralelogramo e daí $\overline{OO'} \parallel \overline{BB'}$ e $\overline{OO'} \equiv \overline{BB'}$. (3)

$((2) \text{ e } (3)) \Longrightarrow (\overline{AA'} \parallel \overline{BB'} \text{ e } \overline{AA'} \equiv \overline{BB'}) \Rightarrow AA'B'B$ é paralelogramo $\Rightarrow$
$\Longrightarrow \overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ (4)

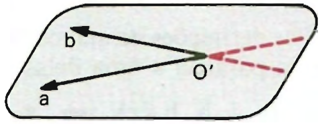
$((1) \text{ e } (4)) \Longrightarrow \triangle AOB \equiv \triangle A'O'B' \Rightarrow A\hat{O}B \equiv A'\hat{O}'B' \Rightarrow a\hat{O}b \equiv a'\hat{O}'b'$

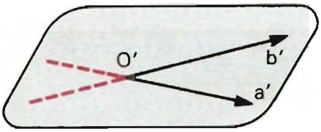
b) Se dois ângulos têm os lados com sentidos respectivamente discordantes, então eles são congruentes.

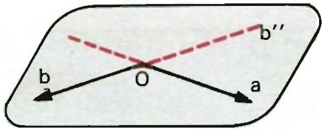
É uma aplicação do teorema anterior e ângulos opostos pelo vértice.



c) Se dois ângulos são tais que um lado de um deles tem sentido concordante com um lado do outro e os outros dois lados têm sentidos discordantes, então eles são suplementares.







Hipótese		*Tese*
$\left(\begin{array}{l} Oa \text{ e } O'a' \text{ têm sentidos concordantes} \\ Ob \text{ e } O'b' \text{ têm sentidos discordantes} \end{array}\right)$	$\Longrightarrow$	$\left(\begin{array}{c} a\hat{O}b \text{ e } a'\hat{O}'b' \\ \text{são suplementares} \end{array}\right)$

Demonstração

Tomando a semi-reta Ob'' oposta à semi-reta Ob, temos $a\hat{O}b'' \equiv a'\hat{O}'b'$. Como $a\hat{O}b$ e $a\hat{O}b''$ são suplementares, vem que $a\hat{O}b$ e $a'\hat{O}'b'$ são suplementares.

Resumindo as conclusões acima, temos:

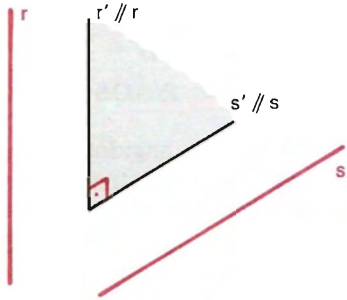
> Se dois ângulos possuem lados respectivamente paralelos, então eles são congruentes ou suplementares:
>
> a) congruentes, se os lados têm sentidos respectivamente concordantes ou respectivamente discordantes;
>
> b) suplementares, se os sentidos de um lado de um e um lado do outro são concordantes e os outros dois lados têm sentidos discordantes.

36. *Retas ortogonais — definição*

Duas retas são ortogonais se, e somente se, são reversas e formam ângulo reto.

Usaremos o símbolo $\perp$ para ortogonalidade.

Se duas retas *a* e *b formam ângulo reto*, então elas são perpendiculares ou ortogonais. Nesse caso usaremos a seguinte indicação: $a \ \underline{\perp}\ b$.



$$a \ \underline{\perp}\ b \iff (a \perp b \ \text{ ou } \ a \perp b)$$

Das definições acima, conclui-se que: se duas retas formam ângulo reto, toda reta paralela a uma delas forma ângulo reto com a outra.

$$(a \ \underline{\perp}\ b,\ b \parallel c) \implies a \ \underline{\perp}\ c \qquad (a \ \underline{\perp}\ b,\ a \parallel c) \implies b \ \underline{\perp}\ c$$

EXERCÍCIO

66. Classifique em verdadeiro (*V*) ou falso (*F*):

a) Duas retas perpendiculares são sempre concorrentes.
b) Se duas retas formam ângulo reto, então elas são perpendiculares.
c) Se duas retas são perpendiculares, então elas formam ângulo reto.
d) Se duas retas são ortogonais, então elas formam ângulo reto.
e) Duas retas que formam ângulo reto podem ser reversas.
f) Duas retas perpendiculares a uma terceira são perpendiculares entre si.
g) Duas retas perpendiculares a uma terceira são paralelas entre si.
h) Se duas retas formam ângulo reto, toda paralela a uma delas forma ângulo reto com a outra.

CAPÍTULO III

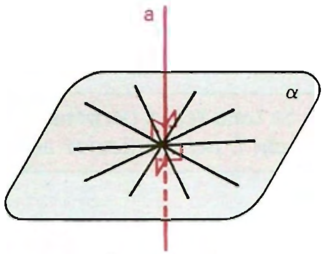
Perpendicularidade

I. Reta e plano perpendiculares

37. *Definição*

Uma reta e um plano são *perpendiculares* se, e somente se, eles têm um ponto comum e a reta é perpendicular a todas as retas do plano que passam por esse ponto comum.

Se uma reta *a* é perpendicular a um plano α (ou o plano α é perpendicular à reta *a*), o traço de *a* em α é chamado pé da perpendicular.

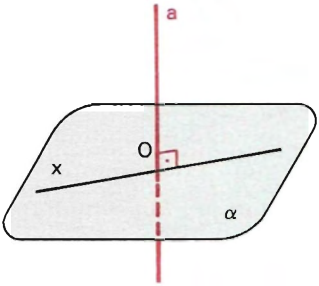


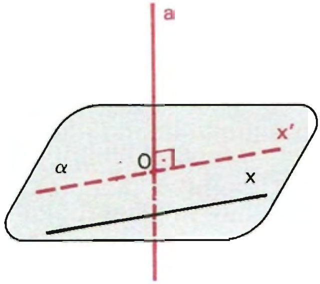
$a \perp \alpha$ ou $\alpha \perp a$

Uma reta e um plano são *oblíquos* se, e somente se, são concorrentes e não são perpendiculares.

38. *Conseqüência da definição*

Se uma reta é perpendicular a um plano, então ela forma ângulo reto com qualquer reta do plano.





De fato, sendo a perpendicular a α em O e x é uma reta qualquer de α, temos dois casos a considerar:

1º caso: x passa por O.
Neste caso, pela definição, $a \perp x$. (1)

2º caso: x não passa por O.
Neste caso, tomamos por O uma reta x', paralela a x. Pela definição, $a \perp x'$ e, então, $a \perp x$. (2)
De (1) e (2) vem: $(a \perp \alpha, x \subset \alpha) \implies a \perp x$.

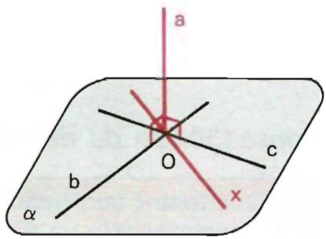
39. *Teorema fundamental — condição suficiente*

> Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular ao plano.

Hipótese *Tese*

$$(a \perp b, a \perp c; b \cap c = \{O\}; b \subset \alpha, c \subset \alpha) \implies a \perp \alpha$$

Demonstração



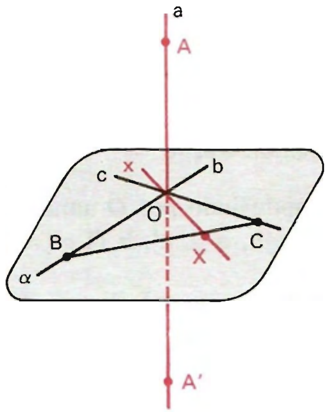
1º) Para provarmos que $a \perp \alpha$, devemos provar que a é perpendicular a todas as retas de α que passam por O. Para isso, basta provarmos que a é perpendicular a uma reta x genérica de α, que passa por O.

2º) Tomemos em a dois pontos A e A', simétricos em relação a O: $\overline{OA} \equiv \overline{OA'}$.

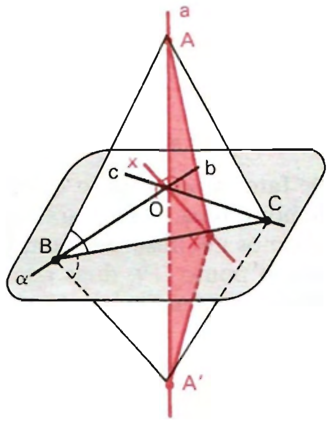
Tomemos ainda um ponto $B \in b$ e um ponto $C \in c$, tais que $\overline{BC}$ intercepta x num ponto X (basta que B e C estejam em semiplanos opostos em relação a x).

Notemos que, nessas condições, b é mediatriz de $\overline{AA'}$, c é mediatriz de $\overline{AA'}$ e por isso: $\overline{AB} \equiv \overline{A'B}$ e $\overline{AC} \equiv \overline{A'C}$.

Notemos, ainda, que para chegarmos à tese, basta provarmos que x é mediatriz de $\overline{AA'}$.



3º) $(\overline{AB} \equiv \overline{A'B}, \overline{AC} \equiv \overline{A'C}, \overline{BC}$ comum$) \Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle A'BC \Rightarrow$
$\Rightarrow \widehat{ABC} \equiv \widehat{A'BC} \Rightarrow \widehat{ABX} \equiv \widehat{A'BX}$
$(\overline{AB} \equiv \overline{A'B}, \widehat{ABX} \equiv \widehat{A'BX}, \overline{BX}$ comum$) \Rightarrow \triangle ABX \equiv \triangle A'BX \Rightarrow$
$\Rightarrow \overline{XA} \equiv \overline{XA'}$



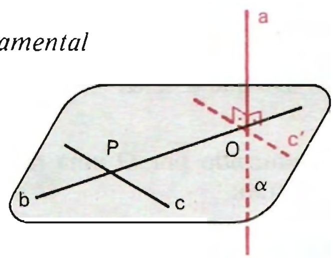
4º) $\overline{XA} \equiv \overline{XA'} \Rightarrow x$ é mediatriz de

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AA'} \Rightarrow x \perp a \Rightarrow a \perp x \\ x \text{ genérica, } x \subset \alpha,\ O \in x \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp \alpha$$

40. *Observações*

1ª) Conseqüências do teorema fundamental

a) Num plano (α) há duas retas (b e c) concorrentes (em P). Se uma reta (a) é perpendicular a uma delas (b em O) e ortogonal à outra (c), então essa reta (a) é perpendicular ao plano (α).



Hipótese *Tese*

$(a \perp b \text{ em } O,\ a \perp c;\ b \cap c = \{P\};\ b \subset \alpha,\ c \subset \alpha) \implies a \perp \alpha$

Demonstração

Conduzindo por O uma reta $c' /\!/ c$, temos $a \perp c'$. Então:
$(a \perp b,\ a \perp c',\ b \cap c' = \{O\};\ b \subset \alpha,\ c' \subset \alpha) \implies a \perp \alpha$.

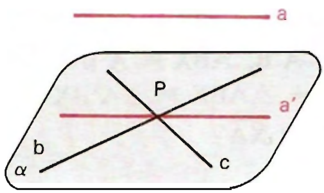
b) Se uma reta é ortogonal a duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular ao plano.

Hipótese *Tese*

$(a \perp b,\ a \perp c;\ b \cap c = \{P\};\ b \subset \alpha,\ c \subset \alpha) \implies a \perp \alpha$

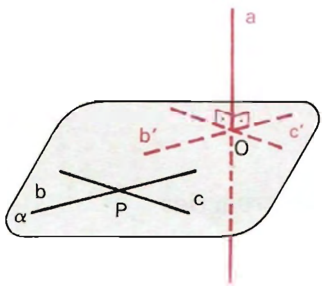
Demonstração

1º) De que a e α são concorrentes.



De fato, se $a /\!/ \alpha$ ou $a \subset \alpha$, conduzindo por P uma reta a' paralela à reta a, teríamos um absurdo: num plano (α), por um ponto (P), duas retas distintas (b e c) perpendiculares a uma reta (a').

Logo, a e α são concorrentes. Seja O o ponto tal que $a \cap \alpha = \{O\}$.



2º) De que $a \perp \alpha$.

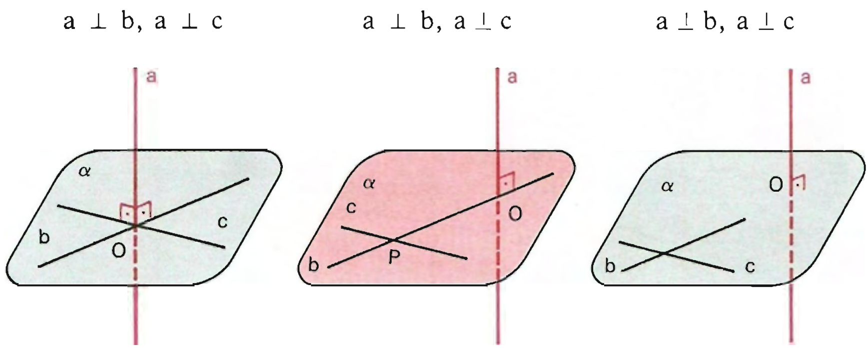
Conduzindo por O uma reta $b' /\!/ b$ e uma reta $c' /\!/ c$, temos $a \perp b'$ e $a \perp c'$. Então:

$(a \perp b',\ a \perp c';\ b' \cap c' = \{O\};\ b' \subset \alpha,\ c' \subset \alpha) \implies a \perp \alpha$.

2ª) Generalização do teorema fundamental

Em vista das conseqüências acima, vale o teorema:

> Se uma reta *forma ângulo reto* com duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular ao plano.



$$(a \perp b,\ a \perp c;\ b \cap c = \{O\};\ b \subset \alpha,\ c \subset \alpha) \implies a \perp \alpha.$$

3ª) Condição necessária e suficiente

O teorema enunciado acima e a conseqüência da definição de reta e plano perpendiculares nos dão a seguinte condição necessária e suficiente:

> Uma condição necessária e suficiente para que uma reta seja perpendicular a um plano é formar *ângulo reto* com duas retas *concorrentes* do plano.

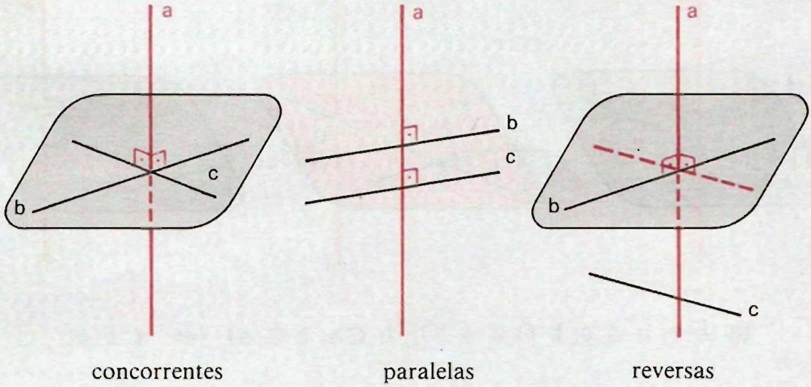
EXERCÍCIOS

67. Um triângulo ABC, retângulo em B, e um paralelogramo $BCDE$ estão situados em planos distintos. Prove que as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{DE}$ são ortogonais.

68. a, b e c são três retas no espaço tais que $a \perp b$ e $c \perp a$. Que se pode concluir a propósito das posições relativas das retas b e c?

Solução

As retas b e c podem ser:
concorrentes, caso em que a é perpendicular ao plano (b, c);
paralelas, caso em que a, b e c são coplanares; ou
reversas, caso em que b e c, sendo perpendiculares à reta a, não são coplanares.



69. Dois triângulos ABC e BCD são retângulos em B. Se o cateto $\overline{AB}$ é ortogonal à hipotenusa $\overline{CD}$, prove que o cateto $\overline{BD}$ é ortogonal à hipotenusa $\overline{AC}$.

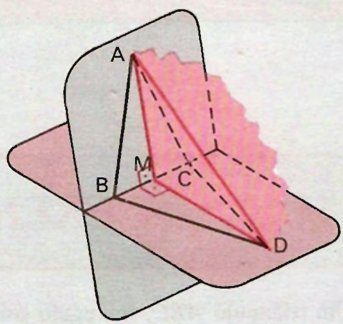
70. Os triângulos ABC e DBC são isósceles, de base $\overline{BC}$, e estão situados em planos distintos. Prove que as retas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são ortogonais.

Solução

Sendo M o ponto médio de $\overline{BC}$, as retas $\overleftrightarrow{AM}$ e $\overleftrightarrow{DM}$ são concorrentes, pois os planos (A, B, C) e (D, B, C) são distintos.

$$\left.\begin{array}{l}\triangle ABC \text{ isósceles} \Rightarrow \overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AM} \\ \triangle DBC \text{ isósceles} \Rightarrow \overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{DM}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overleftrightarrow{BC} \perp (A, M, D) \Rightarrow \overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AD}$$

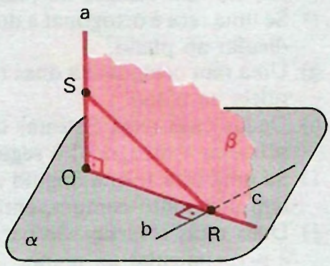


71. Num quadrilátero reverso de lados congruentes entre si e congruentes às diagonais, prove que os lados opostos são ortogonais, assim como as diagonais também são ortogonais (em outros termos: prove que as arestas opostas de um tetraedro regular são ortogonais).

72. **Teorema das três perpendiculares**

Uma reta a é perpendicular a um plano α num ponto O. Uma reta b de α não passa por O e uma reta c de α passa por O e é perpendicular a b em R. Se S é um ponto qualquer da a, então a reta $\overleftrightarrow{SR}$ é perpendicular à reta b.

Solução



Hipótese | *Tese*

$$\left.\begin{array}{l} a \perp \alpha,\ a \cap \alpha = \{O\} \\ b \subset \alpha,\ O \notin b \\ c \subset \alpha,\ O \in c \\ c \perp b,\ c \cap b = \{R\} \\ \qquad S \in a \end{array}\right\} \Longrightarrow \overleftrightarrow{SR} \perp b$$

Demonstração

Seja β o plano determinado por a e c.

$$(a \perp \alpha,\ b \subset \alpha) \Longrightarrow a \perp b$$

$$(b \perp a,\ b \perp c;\ a \cap c = \{O\};\ a \subset \beta,\ c \subset \beta) \Longrightarrow b \perp \beta$$

$$(b \perp \beta,\ b \cap \beta = \{R\},\ \overleftrightarrow{SR} \subset \beta) \Longrightarrow b \perp \overleftrightarrow{SR} \Longrightarrow \overleftrightarrow{SR} \perp b.$$

Caso $s = O$, então $\overleftrightarrow{SR} = c$; como $c \perp b$, vem que $\overleftrightarrow{SR} \perp b$.

73. Uma reta a é perpendicular a um plano α num ponto O. Uma reta b de α não passa por O e uma reta c de α passa por O e é concorrente com b em R. Se S é um ponto qualquer de a e a reta $\overleftrightarrow{SR}$ é perpendicular à reta b, então b é perpendicular a c. (Recíproca do teorema das três perpendiculares.)

74. Seja P o pé da reta r perpendicular a um plano β e s uma reta de β que não passa por P. Traçando-se por P uma perpendicular a s, esta encontra s em um ponto Q. Se A é um ponto qualquer de r, diga qual é o ângulo de AQ com s. Justifique.

75. Uma reta e um plano perpendiculares a uma reta em pontos distintos são paralelos.

76. Duas retas não paralelas entre si são paralelas a um plano. Toda reta que forma ângulo reto com ambas, é perpendicular ao plano.

77. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Para que uma reta e um plano sejam perpendiculares é necessário que eles sejam secantes.
b) Uma reta perpendicular a um plano é perpendicular a todas as retas do plano.
c) Uma reta perpendicular a um plano forma ângulo reto com qualquer reta do plano.
d) Se uma reta é perpendicular a duas retas distintas de um plano, então ela é perpendicular ao plano.
e) Se uma reta é perpendicular a duas retas paralelas e distintas de um plano, então ela está contida no plano.
f) Se uma reta é ortogonal a duas retas distintas de um plano, então ela é perpendicular ao plano.
g) Uma reta ortogonal a duas retas paralelas e distintas de um plano pode ser paralela ao plano.
h) Dadas duas retas distintas de um plano, se uma outra reta é perpendicular à primeira e ortogonal à segunda, então ela é perpendicular ao plano.
i) Se uma reta forma ângulo reto com duas retas de um plano, distintas e que têm um ponto comum, então ela é perpendicular ao plano.
j) Duas retas reversas são paralelas a um plano. Toda reta ortogonal a ambas é perpendicular ao plano.
k) Duas retas não paralelas entre si são paralelas a um plano. Se uma reta forma ângulo reto com as duas, então ela é perpendicular ao plano.
l) Uma reta e um plano são paralelos. Toda reta perpendicular à reta dada é perpendicular ao plano.
m) Uma reta e um plano são perpendiculares. Toda reta perpendicular à reta dada é paralela ao plano ou está contida nele.
n) Uma reta e um plano, perpendiculares a uma outra reta em pontos distintos, são paralelos.

78. Existência e unicidade do plano perpendicular à reta por um ponto

Por um ponto P pode-se conduzir um único plano perpendicular a uma reta a.

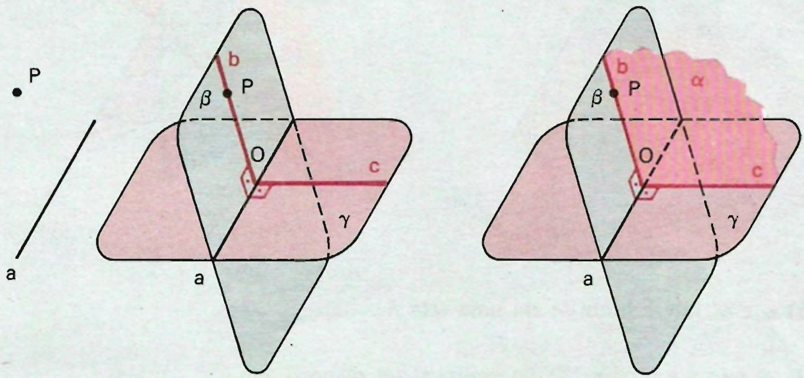
Solução

1º caso: $P \notin a$ *2º caso*: $P \in a$

1ª parte: Existência

No 1º caso ($P \notin a$).

a) Construção:



1º) Tomamos o plano $\beta = (a, P)$ e um plano γ, contendo a reta a, distinto de β.

2º) Em β, pelo ponto P traçamos a reta b perpendicular à reta a. Seja O a interseção de b com a.
Em γ, construímos a reta c, passando por O, perpendicular à reta a.

3º) As retas b e c determinam um plano $\alpha = (b, c)$ pedido.

b) Prova:

1º) O plano $\alpha = (b, c)$ passa por P, pois a reta b foi conduzida por P.

2º) $(a \perp b,\ a \perp c;\ b \cap c = \{O\};\ b \subset \alpha,\ c \subset \alpha) \implies a \perp \alpha$.

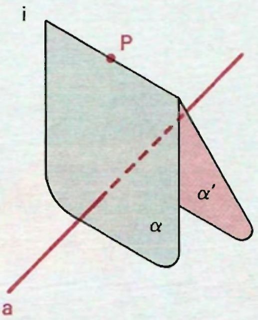
Logo, existe pelo menos um plano (α) passando por P, perpendicular à reta a.

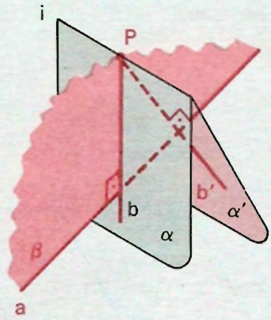
No 2º caso ($P \in a$), a construção é análoga, sendo β e γ planos distintos quaisquer contendo a reta a.

2ª parte: Unicidade

No 1º caso ($P \notin a$).

Se existissem dois planos distintos α e α' perpendiculares à reta a, por P, teríamos:





1) α e α' interceptam-se em uma reta i.

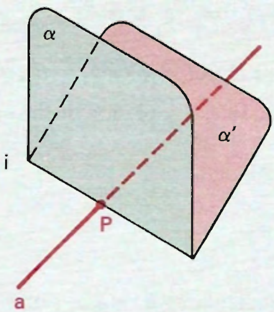
2) A reta a e o ponto P determinam um plano β que não contém i.

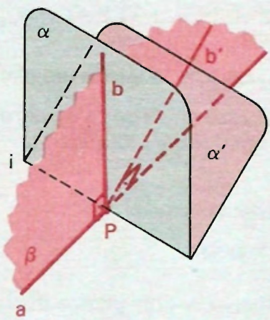
3) O plano β intercepta α em uma reta b, perpendicular à reta a. O plano β intercepta α' em uma reta b', perpendicular à reta a.

4) Em β, as retas b e b' são concorrentes em P e ambas perpendiculares à reta a, o que é absurdo, pois num plano, por um ponto, passa uma única reta perpendicular a uma reta dada.

Logo, o plano perpendicular à reta a passando por P é único.

No 2º caso ($P \in a$), o procedimento é análogo, sendo β um plano qualquer que passa por a.





79. Existência e unicidade da reta perpendicular ao plano por um ponto

> Por um ponto P pode-se conduzir uma única reta perpendicular a um plano α.

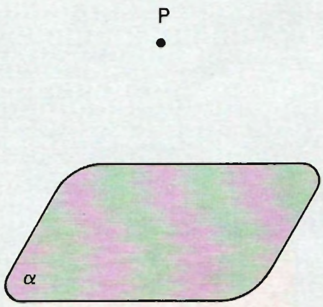
Solução

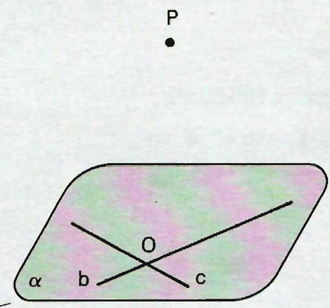
1º caso: $P \notin \alpha$ *2º caso*: $P \in \alpha$

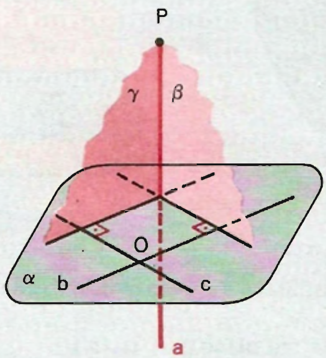
1ª parte: Existência

No 1º caso ($P \notin \alpha$).

a) Construção:







1º) Tomamos em α duas retas b e c concorrentes num ponto O.

2º) Consideremos por P os planos β perpendicular à reta b e γ perpendicular à reta c (como ensina o exercício anterior).

3º) Os planos β e γ são distintos (pois são respectivamente perpendiculares a duas retas b e c concorrentes) e têm o ponto P comum. Logo, eles se interceptam segundo uma reta a, que é a reta pedida.

b) Prova:

A reta a passa por P, pois é a interseção dos planos β e γ conduzidos por P.

$(b \perp \beta,\ a \subset \beta) \implies b \perp a$ $\qquad$ $(c \perp \gamma,\ a \subset \gamma) \implies c \perp a$

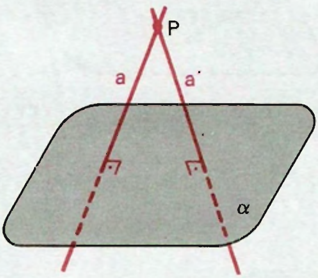
$(a \perp b,\ a \perp c;\ b \cap c = \{O\};\ b \subset \alpha,\ c \subset \alpha) \implies a \perp \alpha$

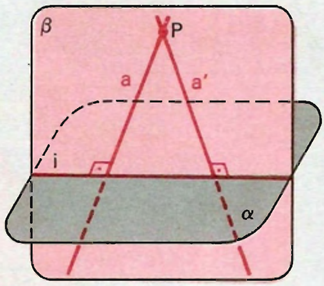
Logo, existe pelo menos uma reta (a) passando por P, perpendicular ao plano α.

No 2º caso ($P \in \alpha$), a construção é análoga, bastando tomar em α as retas b e c concorrentes no ponto P.

2ª parte: Unicidade

No 1º caso ($P \notin \alpha$).





Se existissem duas retas distintas a e a' perpendiculares a α, por P, teríamos:

1) Essas retas determinam um plano $\beta = (a, a')$.
2) O plano β intercepta α em uma reta i.
3) Em β temos duas retas distintas a e a', passando por um ponto P e perpendiculares a uma reta i, o que é absurdo.

Logo, a reta perpendicular ao plano α, passando por P, é única.

No 2º caso ($P \in \alpha$), o procedimento é idêntico ao executado para $P \notin \alpha$.

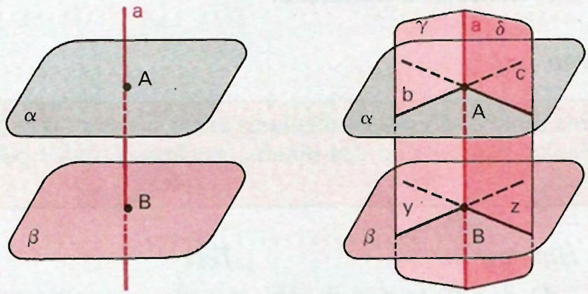
80. Relacionamento entre paralelismo e perpendicularismo

a) Se dois planos são perpendiculares a uma mesma reta, então eles são paralelos entre si.
b) Se dois planos são paralelos, então toda reta perpendicular a um deles é perpendicular ao outro.

Solução

Hipótese *Tese*

$(\alpha /\!/ \beta,\ a \perp \alpha) \implies a \perp \beta$



Demonstração

1º) Se $\alpha /\!/ \beta$, sendo $\alpha = \beta$, temos: $(\alpha = \beta,\ a \perp \alpha) \implies a \perp \beta$.
2º) Se $\alpha /\!/ \beta$, sendo $\alpha \cap \beta = \varnothing$, vem:

1. A reta a que intercepta α num ponto A, também intercepta β num ponto B.
2. Consideremos um plano γ passando pela reta a. O plano γ intercepta α numa reta b e intercepta β numa reta y e ainda $b /\!/ y$ (pois $\alpha /\!/ \beta$).

Consideremos outro plano δ, distinto de γ, passando pela reta a. O plano δ intercepta α numa reta c e intercepta β numa reta z e ainda $c /\!/ z$ (pois $\alpha /\!/ \beta$).

3. $(a \perp \alpha$ em A; $b \subset \alpha$, $A \in b$; $c \subset \alpha$, $A \in c) \implies (a \perp b$ e $a \perp c)$.
4. Em γ, temos: $(a \perp b,\ b /\!/ y) \implies a \perp y$.
   Em δ, temos: $(a \perp c,\ c /\!/ z) \implies a \perp z$.
5. $(a \perp y,\ a \perp z;\ y \cap z = \{B\};\ y \subset \beta,\ z \subset \beta) \implies a \perp \beta$.

c) Se duas retas são paralelas, então todo plano perpendicular a uma delas é perpendicular à outra.
d) Se duas retas são perpendiculares a um mesmo plano, então elas são paralelas entre si.

81. Duas retas, respectivamente perpendiculares a dois planos paralelos, são paralelas.

82. Dois planos, respectivamente perpendiculares a duas retas paralelas, são paralelos.

II. Planos perpendiculares

41. Definição

Um plano α é perpendicular a um plano β se, e somente se, α contém uma reta perpendicular a β.

A existência de um plano perpendicular a outro baseia-se na existência de uma reta perpendicular a um plano.

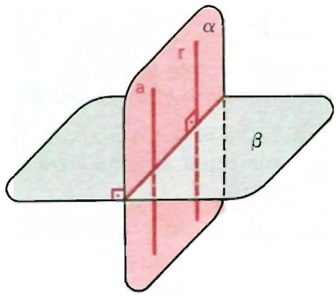
42. Teorema

> Se dois planos são perpendiculares entre si e uma reta de um deles é perpendicular à interseção dos planos, então essa reta é perpendicular ao outro lado.

Hipótese *Tese*

$(\alpha \perp \beta, \ i = \alpha \cap \beta, \ r \subset \alpha, \ r \perp i) \implies r \perp \beta$

Demonstração

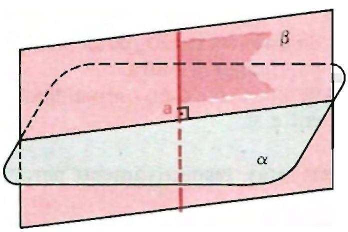


Se $\alpha \perp \beta$, então α contém uma reta a, perpendicular a β. Essa reta a é, então, perpendicular a i.

Em α, temos: $(a \perp i, r \perp i) \implies$
$\implies a \parallel r$.

Agora, se $a \parallel r$ e sendo $a \perp \beta$, vem que $r \perp \beta$.

43. Observações



1ª) Pela definição, se uma reta é perpendicular a um plano, qualquer outro plano que a contenha é perpendicular ao primeiro.

$(a \perp \alpha, \beta \supset a) \implies \beta \perp \alpha$

2ª) Condição necessária e suficiente:

Reunindo os resultados acima, podemos formular o seguinte enunciado:

Uma condição necessária e suficiente para que dois planos secantes sejam perpendiculares é que toda reta de um deles, perpendicular à interseção, seja perpendicular ao outro.

3º) Planos oblíquos:

Dois planos secantes, não perpendiculares, são ditos planos oblíquos.

EXERCÍCIOS

83. Se um plano α contém uma reta a, perpendicular a um plano β, então β contém uma reta perpendicular a α.

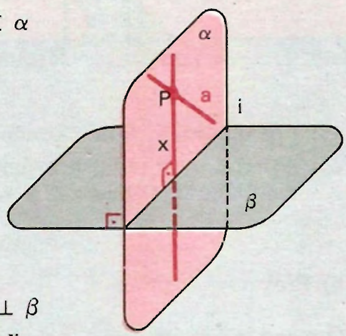
84. Se uma reta a está num plano α, perpendicular a uma reta b, então a reta b também está num plano perpendicular à reta a.

85. Se dois planos são perpendiculares entre si e uma reta perpendicular a um deles tem um ponto comum com o outro, então essa reta está contida nesse outro plano.

Solução

Hipótese *Tese*

$(\alpha \perp \beta,\ a \perp \beta,\ P \in a,\ P \in \alpha) \implies a \subset \alpha$



Demonstração

Consideremos em α, por P, a reta x, perpendicular à interseção i de α e β. Notemos que $x \subset \alpha$.

$(\alpha \perp \beta,\ i = \alpha \cap \beta,\ x \subset \alpha,\ x \perp i) \Rightarrow x \perp \beta$

$(P \in a,\ a \perp \beta,\ P \in x,\ x \perp \beta) \implies a = x$

$(a = x,\ x \subset \alpha) \implies a \subset \alpha$

86. Se dois planos são perpendiculares entre si, toda reta perpendicular a um deles é paralela ou está contida no outro.

87. Se dois planos são paralelos, todo plano perpendicular a um deles é perpendicular ao outro.

88. Se uma reta a e um plano α são paralelos, todo plano β, perpendicular à reta a, também é perpendicular ao plano α.

89. **Existência e unicidade**

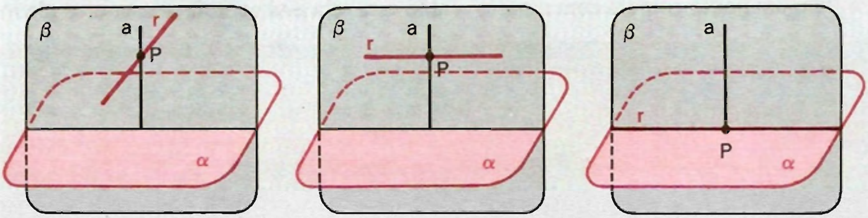
> Por uma reta r não perpendicular a um plano α, existe um único plano β perpendicular a α.

Solução

1ª parte: Existência

a) Construção:

r oblíqua a α — $r \parallel \alpha$ — $r \subset \alpha$



1º) Por um ponto P de r conduzimos a reta a perpendicular ao plano α.
2º) As retas a e r são concorrentes ($a \perp \alpha$ e $r \not\perp \alpha$) e então determinam um plano β. O plano $\beta = (a, r)$ é o plano construído.

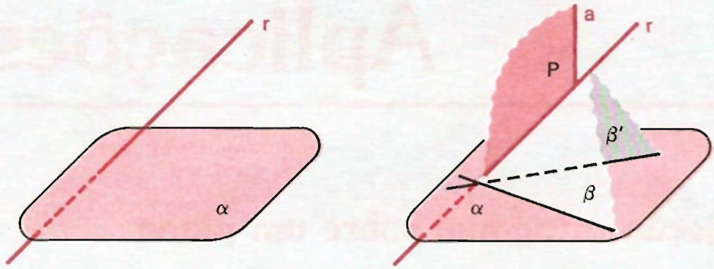
b) Prova:

O plano β contém a reta a e, como a é perpendicular ao plano α, resulta que o plano $\beta = (a, r)$ é perpendicular ao plano α.

2ª parte: Unicidade

Se existissem dois planos distintos β e β', perpendiculares a α, por r, teríamos:

1) Uma reta a, perpendicular a α por um ponto P de r, está contida em β e em β'.
2) Duas retas a e r concorrentes em P estão determinando dois planos distintos β e β', o que é absurdo, pois contraria um teorema de determinação de plano.



Logo, o plano perpendicular ao plano α, passando por uma reta r não perpendicular a α, é único.

90. Se um plano é perpendicular a dois planos secantes, então ele é perpendicular à interseção desses planos.

91. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Se dois planos são secantes, então eles são perpendiculares.
b) Se dois planos são perpendiculares, então eles são secantes.
c) Se dois planos são perpendiculares, então toda reta de um deles é perpendicular ao outro.
d) Se uma reta é perpendicular a um plano, por ela passa um único plano, perpendicular ao plano dado.
e) Dois planos perpendiculares a um terceiro são perpendiculares entre si.
f) Se dois planos são perpendiculares a um terceiro, então eles são paralelos.
g) Se dois planos são perpendiculares, então toda reta perpendicular a um deles é paralela ao outro ou está contida neste outro.
h) Se dois planos são paralelos, todo plano perpendicular a um deles é perpendicular ao outro.
i) Uma reta e um plano são paralelos. Se um plano é perpendicular ao plano dado, então ele é perpendicular à reta.
j) Por uma reta passa um plano perpendicular a um plano dado.
k) Se dois planos são perpendiculares, então toda reta de um deles forma ângulo reto com qualquer reta do outro.

CAPÍTULO IV

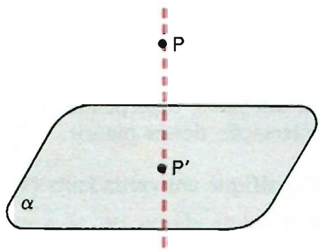
Aplicações

I. Projeção ortogonal sobre um plano

44. *Projeção de um ponto*

Definição

Chama-se projeção ortogonal de um ponto sobre um plano ao pé da perpendicular ao plano conduzida pelo ponto. O plano é dito plano de projeção e a reta é a reta projetante do ponto.

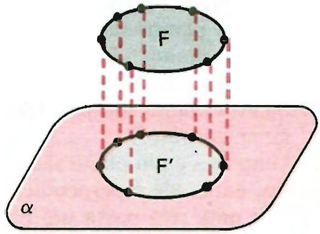


$P' = proj_\alpha P$

45. *Projeção de uma figura*

Definição

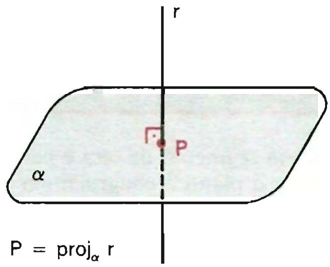
Chama-se projeção ortogonal de uma figura sobre um plano ao conjunto das projeções ortogonais dos pontos dessa figura sobre o plano.



$F' = proj_\alpha F$

46. *Projeção de uma reta*

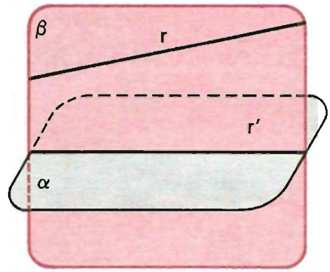
Com base na definição anterior, temos:



P = $proj_{\alpha}$ r

a) Se a reta é perpendicular ao plano, sua projeção ortogonal sobre o plano é o traço da reta no plano.

b) Se a reta não é perpendicular ao plano, temos a particular definição seguinte:



r' = $proj_{\alpha}$ r

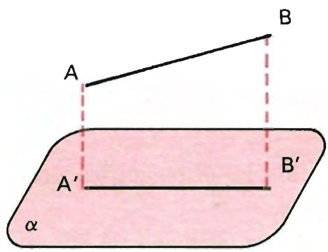
Chama-se projeção ortogonal de uma reta r, não perpendicular a um plano α, sobre esse plano, ao traço em α, do plano β, perpendicular a α, conduzido por r.

α é o plano de projeção e β é o plano projetante de r.

47. *Projeção de um segmento de reta*

Definição

Chama-se projeção ortogonal sobre um plano α de um segmento $\overline{AB}$, contido numa reta não perpendicular a α, ao segmento $\overline{A'B'}$ onde $A' = proj_{\alpha} A$ e $B' = proj_{\alpha} B'$.



EXERCÍCIOS

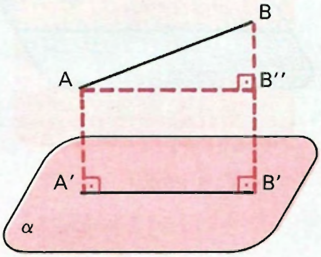
92. Se um segmento de reta é paralelo a um plano, então a sua projeção ortogonal sobre o plano é congruente a ele.

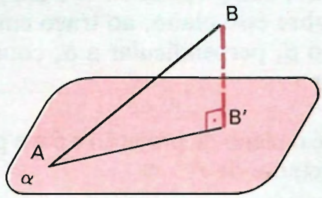
93. A projeção ortogonal de um segmento oblíquo a um plano, sobre esse plano, é menor que o segmento.

Solução

Hipótese $\qquad$ *Tese*

$$(\overleftrightarrow{AB} \text{ oblíqua a } \alpha,\ \overline{A'B'} = \text{proj}_\alpha\ \overline{AB}) \implies (\overline{A'B'} < \overline{AB})$$





Demonstração

Por A conduzimos uma reta paralela à reta $\overleftrightarrow{A'B'}$ que intercepta a reta projetante de B em B''.

$$\left.\begin{array}{l} AA'B'B'' \text{ é retângulo} \implies \overline{A'B'} \equiv \overline{AB''} \\ \triangle AB''B \text{ é retângulo em } B' \implies \overline{AB''} < \overline{AB} \end{array}\right\} \implies \overline{A'B'} < \overline{AB}$$

Se uma das extremidades, por exemplo A, pertence ao plano de projeção, temos:

$$\triangle AB'B \text{ é retângulo em } B' \implies \overline{AB'} < \overline{AB} \implies \overline{A'B'} < \overline{AB}.$$

94. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) A projeção ortogonal de um ponto sobre um plano é um ponto.
b) A projeção ortogonal de uma reta sobre um plano é uma reta.
c) A projeção ortogonal de um segmento sobre um plano é sempre um segmento.
d) A projeção ortogonal de um segmento oblíquo a um plano, sobre o plano, é menor que o segmento.
e) A projeção ortogonal, sobre um plano, de um segmento contido numa reta, não perpendicular ao plano, é menor que o segmento ou congruente a ele.
f) Se um segmento tem projeção ortogonal congruente a ele, então ele é paralelo ao plano de projeção ou está contido nele.
g) Se dois segmentos são congruentes, então suas projeções ortogonais sobre qualquer plano são congruentes.
h) Se dois segmentos não congruentes são oblíquos a um plano, então a projeção ortogonal, sobre o plano, do maior deles é maior.
i) A projeção ortogonal de um triângulo, sobre um plano, é sempre um triângulo.

95. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Se as projeções ortogonais de duas retas, sobre um plano, são paralelas, então as retas são paralelas.
b) Duas retas paralelas não perpendiculares ao plano de projeção têm projeções paralelas.
c) Se os planos projetantes de duas retas não perpendiculares ao plano de projeção são paralelos, então as projeções dessas retas são paralelas.
d) Se dois planos são perpendiculares, as projeções dos pontos de um deles sobre o outro é o traço dos planos.
e) A projeção ortogonal de um ângulo sobre um plano pode ser uma semi-reta.
f) A projeção ortogonal de um ângulo sobre um plano pode ser um segmento de reta.
g) A projeção ortogonal de um ângulo sobre um plano pode ser uma reta.

96. Quais as posições relativas das projeções ortogônais, sobre um plano, de duas retas concorrentes?

97. Quais são as posições relativas das projeções ortogonais, sobre um plano, de duas retas reversas?

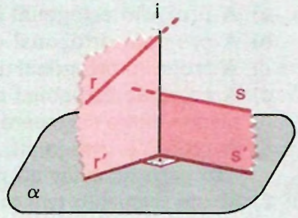
98. Se duas retas formam ângulo reto, uma delas é paralela ou está contida no plano de projeção e a outra não é perpendicular a esse plano, então as projeções ortogonais das retas, sobre o plano, são perpendiculares.

Solução

Hipótese *Tese*

$$\left(\begin{array}{l} r \perp s;\ s \parallel \alpha \ \text{ ou } \ s \subset \alpha; \\ r \text{ não é perpendicular a } \alpha; \\ r' = \text{proj}_\alpha\, r,\ s' = \text{proj}_\alpha\, s \end{array}\right) \Longrightarrow (r' \perp s')$$

Demonstração



$(s \,/\!/\, \alpha \text{ ou } s \subset \alpha,\ s' = \text{proj}_\alpha\, s) \implies s' \,/\!/\, s$
$(s' \,/\!/\, s,\ r \perp s) \implies r \perp s'$

Sendo i a interseção dos planos projetantes de r e de s, temos:
$(i \perp \alpha,\ s' \subset \alpha) \implies i \perp s'$
$(s' \perp r,\ s' \perp i,\ r \text{ e } i \text{ concorrentes}) \implies s' \perp (r, i)$

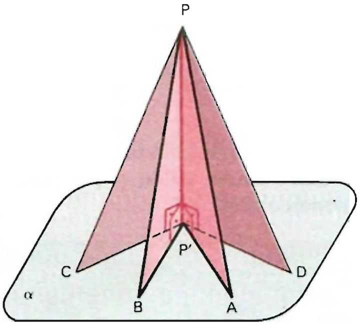
Sendo $s' \perp (r, i)$, então $s' \perp r' \subset (r, i)$ e r' é concorrente com s'.

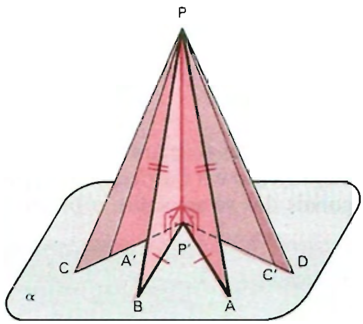
99. Se as projeções de duas retas, sobre um plano, são perpendiculares, uma delas é paralela ou está contida no plano de projeção e a outra não é perpendicular àquele plano, então as duas retas formam ângulo reto.

100. Se duas retas formam ângulo reto, suas projeções ortogonais, sobre um plano, são perpendiculares e uma delas é oblíqua àquele plano, então a outra é paralela ou está contida no plano.

II. Segmento perpendicular e segmentos oblíquos a um plano por um ponto

Se por um ponto P não pertencente a um plano α conduzimos os segmentos $\overline{PP'}$, $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$, $\overline{PD}$, ..., o primeiro perpendicular e os demais oblíquos a α, com as extremidades P', A, B, C, D, ... em α, então:





1º)

O segmento perpendicular é *menor* que qualquer dos oblíquos.

Demonstração

De fato, $\overline{PP'}$ é cateto de triângulos retângulos, que têm, respectivamente, $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$, $\overline{PD}$, ... como hipotenusa.

Logo, $\overline{PP'} < \overline{PA}$, $\overline{PP'} < \overline{PB}$, $\overline{PP'} < \overline{PC}$, $\overline{PP'} < \overline{PD}$, ...

2º)

> a) Segmentos oblíquos com *projeções congruentes* são *congruentes*.

$$\overline{P'A} \equiv \overline{P'B} \implies \overline{PA} \equiv \overline{PB}$$

Demonstração

$(\overline{PP'}$ comum, $\widehat{PP'A} \equiv \widehat{PP'B}$, $\overline{P'A} \equiv \overline{P'B}) \implies \triangle PP'A \equiv \triangle PP'B \implies$
$\implies \overline{PA} \equiv \overline{PB}$.

> b) Segmentos oblíquos *congruentes* têm *projeções congruentes*.

$$\overline{PA} \equiv \overline{PB} \implies \overline{P'A} \equiv \overline{P'B}$$

Demonstração

$(\overline{PP'}$ comum, $\widehat{PP'A} \equiv \widehat{PP'B}$, $\overline{PA} \equiv \overline{PB}) \implies \triangle PP'A \equiv \triangle PP'B \implies$
$\implies \overline{P'A} \equiv \overline{P'B}$.

3º)

> a) De dois segmentos oblíquos de projeções não congruentes, o de *maior projeção* é *maior*.

$$\overline{P'C} > \overline{P'A} \implies \overline{PC} > \overline{PA}$$

Demonstração

Considerando $A' \in \overline{P'C}$ tal que $\overline{P'A'} \equiv \overline{P'A}$, temos:

$$\overline{P'A'} \equiv \overline{P'A} \implies \overline{PA'} \equiv \overline{PA}$$

O ângulo $PA'C$ é obtuso por ser ângulo externo do $\triangle PP'A'$ em que $PP'A'$ é reto. Logo, no triângulo $PA'C$, temos: $\widehat{PA'C} > \widehat{PCA'}$ e, como ao maior ângulo está oposto o maior lado, vem que $\overline{PC} > \overline{PA'}$, ou seja, $\overline{PC} > \overline{PA}$.

b) De dois segmentos oblíquos não congruentes, o *maior* tem *projeção maior*.

$$\overline{PC} > \overline{PA} \Longrightarrow \overline{P'C} > \overline{P'A}$$

Demonstração

Se $\overline{P'C} \leqslant \overline{P'A}$, por casos anteriores, teríamos $PC \leqslant PA$, o que contraria a hipótese. Logo, $\overline{P'C} > \overline{P'A}$.

4º)

a) De dois segmentos oblíquos não congruentes, o *maior* forma com a sua projeção um *ângulo menor*.

$$\overline{PD} > \overline{PC} \Longrightarrow P\widehat{D}P' < P\widehat{C}P'$$

Demonstração

$\overline{PD} > \overline{PC} \Longrightarrow \overline{P'D} > \overline{P'C}$

Tomando um ponto $C' \in \overline{P'D}$ tal que $\overline{P'C'} \equiv \overline{P'C}$, temos:

$\triangle PP'C \equiv \triangle PP'C'$ e daí $P\widehat{C}P' \equiv P\widehat{C'}P'$.

No triângulo $PC'D$ vem $P\widehat{D}C' < P\widehat{C'}P'$, pois, em qualquer triângulo, um ângulo externo é maior que qualquer um dos ângulos internos não adjacentes a ele.

Daí, então:

$P\widehat{D}C' < P\widehat{C'}P' \Longrightarrow P\widehat{D}P' < P\widehat{C'}P' \Longrightarrow P\widehat{D}P' < P\widehat{C}P'$.

b) De dois segmentos oblíquos não congruentes, aquele que forma com a sua projeção um *ângulo menor* é *maior*.

$$P\widehat{D}P' < P\widehat{C}P' \Longrightarrow \overline{PD} > \overline{PC}$$

Demonstração

Se $\overline{PD} \leqslant \overline{PC}$, por congruência de triângulos ou pelo item anterior, teríamos: $PDP' \geqslant PCP'$, o que contraria a hipótese. Logo, $\overline{PD} > \overline{PC}$.

Nota: É importante ressaltar que nas propriedades acima todos os segmentos têm uma extremidade em P e a outra em α.

III. Distâncias geométricas

48. Distância entre dois pontos

Definição

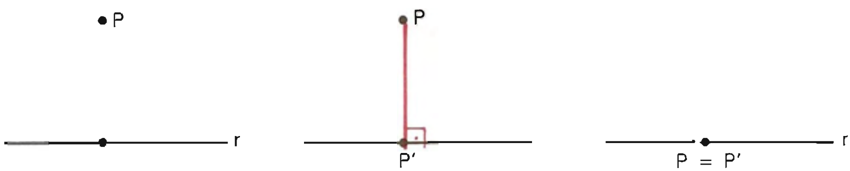
Chama-se distância entre dois pontos distintos A e B ao segmento de reta $\overline{AB}$ ou a qualquer segmento congruente a $\overline{AB}$. Se $A = B$, a distância entre A e B é nula.

Indicação: $d_{A,B}$ = distância entre A e B.

49. Distância entre um ponto e uma reta

Definição

Chama-se distância entre um *ponto* e uma *reta* à distância entre esse ponto e o pé da perpendicular à reta conduzida pelo ponto.



distância entre P e r = $d_{P,P'}$
($d_{P,r} = d_{P,P'}$)

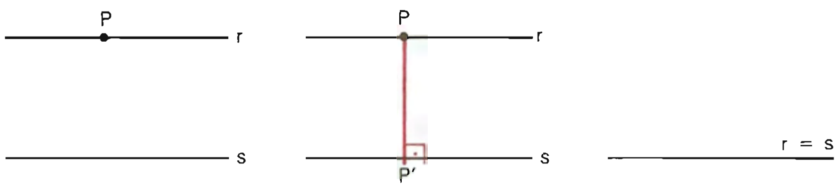
$P \in r$, distância nula
($d_{P,r}$ é nula)

Nota: É fundamental diferençar o conceito de distância entre o *ponto P* e a *reta r* da distância entre o *ponto* P e um *ponto* da reta r.

50. Distância entre duas retas paralelas

Definição

Chama-se distância entre *duas retas paralelas* à distância entre um ponto qualquer de uma delas e a outra reta.



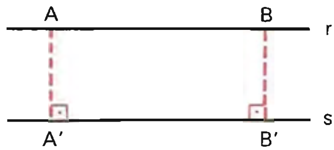
distância entre r e s = distância entre P e s = $d_{P,P'}$
($d_{r,s} = d_{P,s} = d_{P,P'}$)

$r = s$, distância nula
($d_{r,s}$ é nula)

A definição anterior é justificada pela seguinte propriedade:

Se duas retas distintas são paralelas, os pontos de uma estão a igual distância (são eqüidistantes) da outra.

De fato, tomando dois pontos distintos A e B em r e achando as distâncias $\overline{AA'}$ entre A e s, e $\overline{BB'}$ entre B e s, o retângulo $AA'B'B$ nos dá: $\overline{AA'} \equiv \overline{BB'}$, isto é, $d_{A,s} = d_{B,s}$.

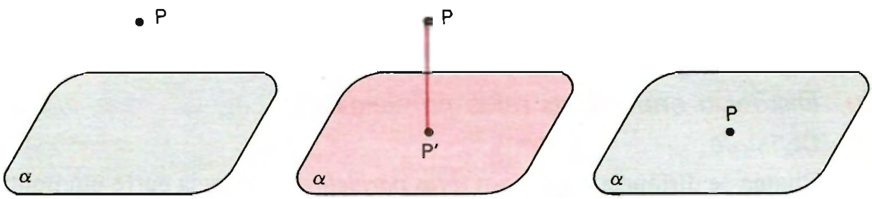


No caso de as retas serem coincidentes, todas as distâncias acima são nulas.

51. *Distância entre ponto e plano*

Definição

Chama-se distância entre um *ponto* e um *plano* à distância entre esse ponto e o pé da perpendicular ao plano conduzida pelo ponto.



distância entre P e $\alpha = d_{P,P'}$
$(d_{P,\alpha} = d_{P,P'})$

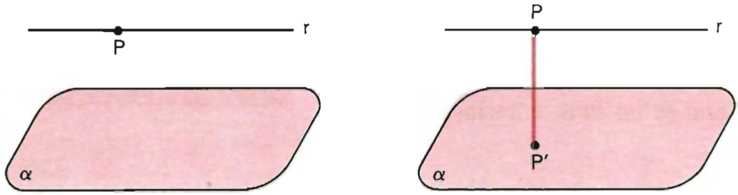
$P \in \alpha$, distância nula
($d_{P,\alpha}$ é nula)

A distância entre um ponto P e um plano α é o segmento de reta $\overline{PP'}$, perpendicular ao plano, com uma extremidade no ponto P e a outra P' no plano α ou qualquer segmento congruente a $\overline{PP'}$. O segmento $\overline{PP'}$ (ou qualquer segmento congruente a ele) é indicado para ser a distância entre P e α, porque de todos os segmentos com uma extremidade em P e a outra em α, $\overline{PP'}$ é o menor. Logo, a distância entre o ponto P e o plano α é a menor das distâncias entre o ponto P e os pontos de α.

52. *Distância entre reta e plano paralelos*

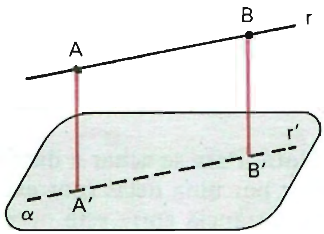
Definição

Chama-se distância entre uma *reta* e um *plano* paralelos à distância entre um ponto qualquer da reta e o plano.



A definição acima é justificada pela propriedade que segue:

> Se uma reta e um plano são paralelos, os pontos da reta estão a igual distância (são eqüidistantes) do plano.



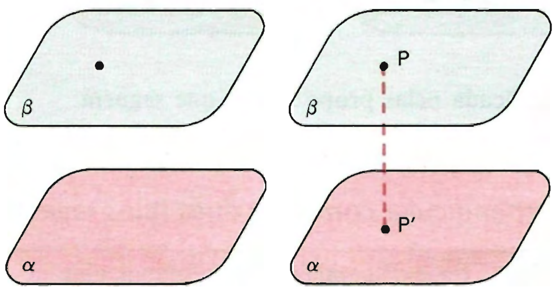
AA'B'B é retângulo $\Rightarrow \overline{AA'} \equiv \overline{BB'} \Rightarrow$
$\Rightarrow d_{A,\alpha} = d_{B,\alpha}$

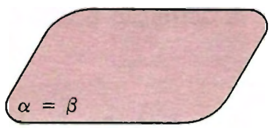
Nota: Se uma reta está contida num plano, a distância entre eles é nula.

53. *Distância entre planos paralelos*

Definição

Chama-se distância entre *dois planos* paralelos à distância entre um ponto qualquer de um deles e o outro plano.





$\alpha = \beta$, $d_{\alpha,\beta}$ é nula

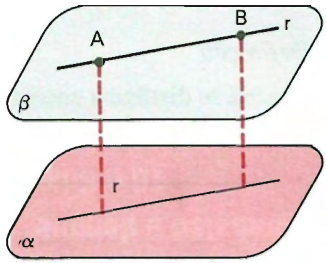
$$d_{\alpha,\beta} = d_{P,\alpha} = d_{P,P'}$$

A propriedade que justifica a definição é:

> Se dois planos distintos são paralelos, os pontos de um deles são eqüidistantes do outro.

$(A \neq B;\ A, B \in \beta) \implies r = \overleftrightarrow{AB} \subset \beta$

Recai-se no item anterior.



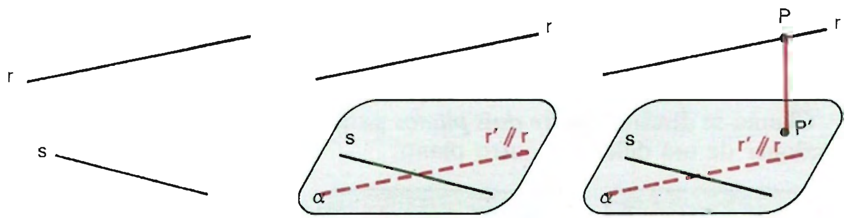
54. *Distância entre duas retas reversas*

Definição

Chama-se distância entre *duas retas reversas* à distância entre um ponto qualquer de uma delas e o plano que passa pela outra e é paralelo à primeira.

Nota: Para se achar a distância de duas retas reversas (r e s) é suficiente conduzir por uma delas (por exemplo s) um plano (α) paralelo à outra (r) e obter a distância entre esta outra reta (r) e o plano (α).

$$d_{r,s} = d_{r,\alpha} = d_{P,\alpha} = d_{P,P'}$$

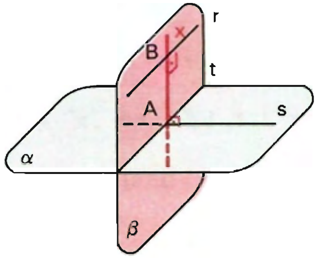


A definição acima é justificada pelas propriedades que seguem:

55. 1ª) *Existência da perpendicular comum a duas retas reversas*

> Dadas duas retas reversas r e s, existe uma reta x, perpendicular comum a essas retas ($x \perp r$, $x \perp s$).

a) Construção da reta x



Por s conduzimos um plano α paralelo a r.

Por r conduzimos um plano β perpendicular a α e seja $\alpha \cap \beta = t$.

$(r /\!/ \alpha,\ r \subset \beta,\ \beta \cap \alpha = t) \implies r /\!/ t.$

$(r /\!/ t;\ r$ e s reversas; $t \subset \alpha,\ s \subset \alpha) \Rightarrow$
$\Rightarrow\ s$ e t são concorrentes.

Seja A o ponto de concorrência de s e t.

Por A conduzimos a reta x perpendicular a r e chamamos de B a interseção dessas retas.

b) Prova de que $x \perp r$ e $x \perp s$.

A reta x é perpendicular a r por construção. Falta provar que $x \perp s$. É o que segue:

Em β, temos: $(r /\!/ t,\ x \perp r) \implies x \perp t.$

Agora,

$(\alpha \perp \beta,\ t = \alpha \cap \beta,\ x \subset \beta,\ x \perp t) \implies x \perp \alpha$

$(x \perp \alpha,\ s \subset \alpha,\ x \cap s = \{A\}) \implies x \perp s$ em A.

56. *2ª) Unicidade da perpendicular comum a duas retas reversas*

> Dadas duas retas reversas r e s, a reta x, perpendicular comum a essas retas, é *única*.

Nota: Usaremos nomenclatura e conclusões do item anterior.

Se existe outra reta x', distinta de x, perpendicular comum a r e s com $r \cap x' = \{B'\}$ e $s \cap x' = \{A'\}$, temos dois casos a considerar:

1º caso: $A = A'$ ou $B = B'$.

Neste caso teríamos, por um ponto ($A = A'$, por exemplo), duas retas distintas x e x' perpendiculares a uma reta (r), o que é absurdo, pois as três retas (x, x' e r) estão num mesmo plano (β).

2º caso: $A \neq A'$ e $B \neq B'$

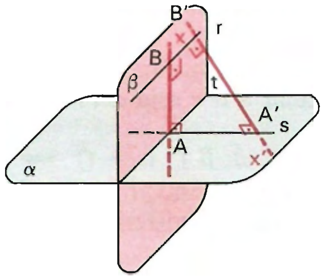
De $x' \perp r$ e $x' \perp s$ vem:

$x' \perp r,\ t \,/\!/\, r \implies x' \perp t$

$(x' \perp t,\ x' \perp s) \implies x' \perp (s, t)$

$\implies x' \perp \alpha$

$(x' \perp \alpha,\ x \perp \alpha) \implies x \,/\!/\, x'$.



As retas x e x', sendo paralelas e distintas, determinam um plano que contém r (pois contém B e B') e contém s (pois contém A e A'), o que é absurdo, pois r e s são reversas.

Logo, a reta x, perpendicular comum a r e s reversas, é única.

57. 3ª) Dadas duas retas reversas r e s, de todos os segmentos que têm uma extremidade em cada uma das retas, o menor é aquele da perpendicular comum.

Nota: Usaremos nomenclatura e conclusões dos dois itens anteriores.

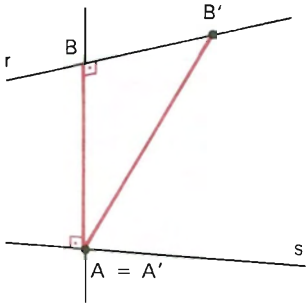
Seja $\overline{AB}$ o segmento da perpendicular comum e $\overline{A'B'}$ outro segmento nas condições do enunciado.

Provaremos que $\overline{AB} < \overline{A'B'}$.

Demonstração

1º caso: $A = A'$ ou $B = B'$

Neste caso, $\overline{A'B'}$ é hipotenusa de um triângulo retângulo que tem $\overline{AB}$ por cateto, então $\overline{AB} < \overline{A'B'}$.



2º caso: $A \neq A'$ e $B \neq B'$

Conduzindo $\overleftrightarrow{B'C} \perp t$ com $C \in t$

$\overleftrightarrow{B'C} \perp \alpha$ e $\overline{CB'} \equiv \overline{AB}$

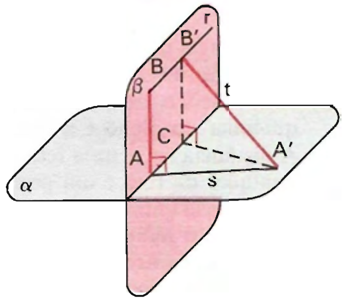
$\overleftrightarrow{B'C} \perp \alpha \Longrightarrow \overleftrightarrow{B'C} \perp \overleftrightarrow{CA'} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \triangle B'CA'$ é retângulo em C $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \overline{CB'} < \overline{A'B'}$

$(\overline{CB'} < \overline{A'B'}, \overline{CB'} \equiv \overline{AB}) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \overline{AB} < \overline{A'B'}$.



58. *4ª) A distância entre r e α é igual à distância entre A e B*

De fato, pela definição de distância entre reta e plano paralelos e sendo $x = \overleftrightarrow{AB}$ perpendicular a α, vem:

$$d_{r,\alpha} = d_{B,\alpha} = d_{B,A}$$

Observações

1ª) Com construções análogas podemos concluir que a distância entre s e o plano por r, paralelo a s, é igual à distância entre A e B, o que completa a justificação da definição dada.

2ª) A distância entre as retas reversas s e r é também a distância entre A e B, em que A e B são as interseções de s e r com a reta x, perpendicular comum a r e s.

EXERCÍCIOS

101. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Se $\overline{PA}$ é um segmento oblíquo a um plano α, com A em α, então a distância entre P e A é a distância entre P e α.

b) A distância entre um ponto e um plano é a distância entre o ponto e qualquer ponto do plano.

c) A distância entre um ponto e um plano é a reta perpendicular ao plano pelo ponto.
d) A distância de um ponto P a um plano α é a distância de P ao ponto P' de interseção de α com a reta r, perpendicular a α por P.
e) A distância entre uma reta e um plano paralelos é a distância entre um ponto qualquer do plano e a reta.
f) A distância entre uma reta e um plano paralelos é a distância entre um ponto qualquer da reta e um ponto qualquer do plano.
g) A distância entre reta e plano paralelos é a distância entre um ponto qualquer da reta e o plano.
h) A distância entre dois planos paralelos é a distância entre um ponto qualquer de um e um ponto qualquer do outro.
i) A distância entre dois planos paralelos distintos é igual à distância entre uma reta de um deles e o outro plano.
j) A distância entre duas retas reversas é a distância entre um ponto qualquer de uma e a outra reta.
k) A distância de duas retas reversas é a reta perpendicular comum a essas retas.

102. **Todo plano que passa pelo ponto médio de um segmento é eqüidistante das extremidades do segmento.**

Solução

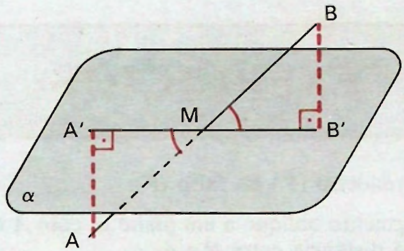
Hipótese $\quad$ *Tese*

$$(\overline{AM} \equiv \overline{MB},\ M \in \alpha) \implies (d_{\alpha,A} = d_{\alpha,B})$$

Demonstração

1º) $\alpha \supset \overline{AB}$.

$$\overline{AB} \subset \alpha \implies d_{\alpha,A} = d_{\alpha,B} = \text{distância nula}$$



2º) $\alpha \not\supset \overline{AB}$ e α não é perpendicular a $\overline{AB}$.

Conduzindo os segmentos $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$ perpendiculares a α, com $A', B' \in \alpha$, e observando os triângulos coplanares $AA'M$ e $BB'M$, temos:

$(\hat{A}' \equiv \hat{B}'$ (reto), $A\widehat{M}A' \equiv B\widehat{M}B'$ (opostos pelo vértice)) $\implies \hat{A} \equiv \hat{B}$

$(A\widehat{M}A' \equiv B\widehat{M}B', \overline{AM} \equiv \overline{BM}, \hat{A} \equiv \hat{B}) \implies \triangle AA'M \equiv \triangle BB'M \implies$
$\overline{AA'} \equiv \overline{BB'} \implies d_{\alpha,A} = d_{\alpha,B'}$

3º) $\alpha \perp AB$ por M.

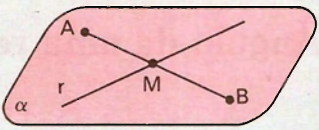
Neste caso $A' = B' =$ M e então $\overline{AA'} \equiv \overline{BB'}$, ou seja, $d_{\alpha,A} = d_{\alpha,B}$.

103. Todo plano eqüidistante dos extremos de um segmento passa pelo ponto médio do segmento?

104. Dados dois pontos distintos A e B e uma reta r, construa um plano que passa por r e é eqüidistante de A e B. Discuta.

Solução

1º caso: r e $\overleftrightarrow{AB}$ são concorrentes.



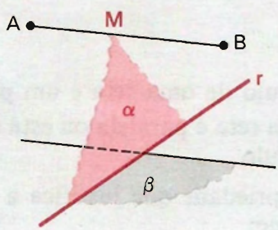
a) Se r passa pelo ponto médio do segmento $\overline{AB}$, qualquer plano que contém r é solução do problema. Infinitas soluções.

b) Se r não passa pelo ponto médio do segmento $\overline{AB}$, a solução é o plano $\alpha = (r, \overleftrightarrow{AB})$. α passa por r e tem distância nula a A e a B.

2º caso: r e $\overleftrightarrow{AB}$ são paralelas

O problema admite infinitas soluções, pois qualquer plano α que passa por r é eqüidistante de A e B, visto que $\overleftrightarrow{AB} /\!/ \alpha$ ou $\overleftrightarrow{AB} \subset \alpha$.

3º caso: r e $\overleftrightarrow{AB}$ são reversas.



O problema admite duas soluções.

1ª) O plano α determinado por r e pelo ponto médio M de $\overline{AB}$.

2ª) O plano β que passa por r é paralelo à reta $\overleftrightarrow{AB}$.

105. Dados dois pontos distintos A e B e uma reta r, construa um plano eqüidistante de A e B e que seja paralelo à reta r.

106. Dados dois pontos distintos A e B e uma reta r, construa um plano eqüidistante de A e B e que seja perpendicular à reta r.

107. Dados dois pontos distintos A e B e um plano α, construa um plano eqüidistante dos dois pontos e que seja paralelo ao plano dado. Discuta.

108. Dados dois pontos distintos A e B e um plano α, construa um plano eqüidistante dos dois pontos que seja perpendicular ao plano dado. Discuta.

109. Dados três pontos não colineares A, B e C, determine os planos tais que cada um deles seja eqüidistante dos três pontos dados.

110. Dados três pontos não colineares A, B e C, construa por um ponto P, um plano eqüidistante de A, B e C.

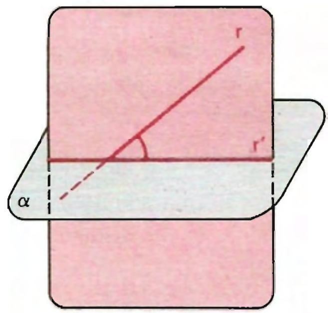
111. Dados quatro pontos não coplanares A, B, C e D, determine os planos tais que cada um deles seja eqüidistante dos quatro pontos dados.

IV. Ângulo de uma reta com um plano

59. *Definição*

Chama-se ângulo de uma reta e um plano oblíquos ao ângulo agudo que a reta forma com a sua projeção ortogonal sobre o plano.

Na figura ao lado o ângulo rr' é o ângulo entre r e α.



O ângulo de uma reta e um plano perpendiculares é reto.

Se uma reta é paralela ou está contida num plano, o ângulo da reta com o plano é nulo.

A propriedade que justifica a definição de ângulo de reta com o plano é a que segue:

60. *Teorema*

> Se uma reta é oblíqua a um plano α e o intercepta em A, então o ângulo agudo de r com sua projeção ortogonal r' sobre α é menor que o ângulo agudo de r com qualquer outra reta de α que passa por A.

Hipótese — *Tese*

$$\left(\begin{array}{l} r \cap \alpha = \{A\},\ r' = \text{proj}_\alpha\, r \\ r \text{ não é perpendicular a } \alpha \\ A \in s,\ s \subset \alpha \end{array}\right) \Longrightarrow (rr' \text{ (agudo)} < rs \text{ (agudo)})$$

Demonstração

Seja $P' = proj_\alpha P$ e B um ponto de s tal que $\overline{AB} \equiv \overline{AP'}$.

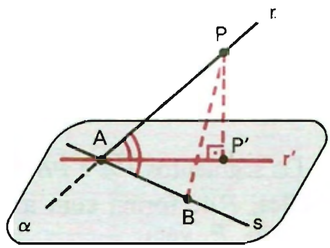
Notemos que $\overline{PP'} < \overline{PB}$, pois $\overline{PP'}$ é perpendicular a α e $\overline{PB}$ oblíquo a α.

Dos triângulos PAP' e PAB, vem:

$(\overline{AP} \text{ comum}, \overline{AP'} \equiv \overline{AB}, \overline{PP'} < \overline{PB}) \Longrightarrow$

$P\hat{A}P' < P\hat{A}B \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \widehat{rr'} \text{ (agudo)} < \widehat{rs} \text{ (agudo)}.$



V. Reta de maior declive de um plano em relação a outro

61. *Definição*

Se dois planos α e β são oblíquos, toda reta de α perpendicular à interseção dos planos é chamada reta de maior declive de α em relação a β.

A propriedade que justifica a definição acima é a que segue:

62. *Teorema*

> Se dois planos α e β são oblíquos, r é a interseção deles, e por um ponto P de α, não pertencente a r, conduzimos duas retas concorrentes, a e b, sendo a perpendicular a r, então o ângulo $\widehat{a\beta}$ é maior que o ângulo $\widehat{b\beta}$.

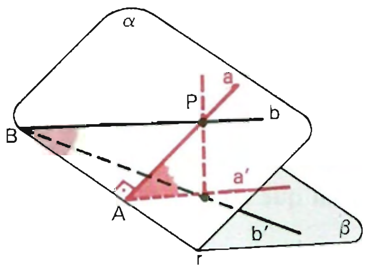
Hipótese | *Tese*

$$\left(\begin{array}{l} r = \alpha \cap \beta,\ \alpha \text{ não é perpendicular a } \beta, \\ a \subset \alpha,\ b \subset \alpha,\ a \cap b = \{P\},\ a \perp r,\ P \notin r \end{array}\right) \Longrightarrow (\widehat{a\beta} > \widehat{b\beta})$$

Demonstração

a) Se a reta b é paralela à reta r, então a reta b é paralela a β. Neste caso o ângulo $\widehat{b\beta}$ é nulo e temos $\widehat{a\beta} > \widehat{b\beta}$.

b) Se b não é paralela a r, sendo $a \cap r = \{A\}$ e $b \cap r = \{B\}$, no triângulo PAB retângulo em A, temos $\overline{PA} < \overline{PB}$.



Os segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ são oblíquos a α, com A e B em α, então o menor deles, $\overline{PA}$, forma com a sua projeção um ângulo maior. Logo, sendo $P' = proj_\alpha P$, vem:

$$\overline{PA} < \overline{PB} \Longrightarrow P\widehat{A}P' > P\widehat{B}P' \Longrightarrow \widehat{a\beta} > \widehat{b\beta}.$$

EXERCÍCIOS

112. Por um ponto P, de um plano α, construa uma reta que forme um ângulo θ (agudo, dado) com o plano α.

113. Por um ponto P, não pertencente a um plano α, construa uma reta que forme um ângulo θ (agudo, dado) com o plano α.

114. Por um ponto P, não pertencente a um plano α, construa um plano β, cuja reta de maior declive forme um ângulo θ (agudo, dado) com o plano α.

VI. Lugares geométricos

63. *Definição*

Lugar geométrico é um conjunto de pontos caracterizado por uma propriedade.

Como todo conjunto definido por uma propriedade de seus elementos, uma figura é um lugar geométrico se:

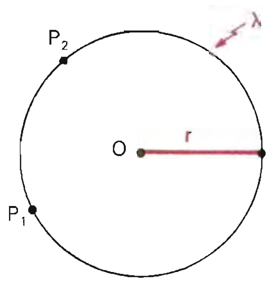
a) *todos os seus pontos* têm essa propriedade
(todo elemento do conjunto satisfaz a propriedade);

b) *só os seus pontos* têm essa propriedade
(todo elemento que tem a propriedade pertence ao conjunto).

64. *Circunferência — definição*

Dados um plano α, uma distância r, não nula, e um ponto $O \in \alpha$, chama-se circunferência de centro O e raio r o conjunto:

$$\lambda(O, r) = \{P \in \alpha \mid d_{O,P} = r\}.$$



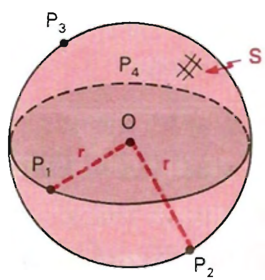
Assim, uma circunferência é um lugar geométrico. *Todos* os seus pontos e *só eles* têm a propriedade de distar r (raio) de um ponto O (centro) de seu plano.

65. *Superfície esférica — definição*

Dados um ponto O e uma distância r, não nula, chama-se *superfície esférica* de centro O e raio r ao lugar geométrico dos pontos que distam r de O.

$$S(O, r) = \{P \mid d_{O,P} = r\}$$

Subentende-se nesse caso que os pontos P são do espaço.



66. *Esquema prático para lugares geométricos*

Para se provar que uma figura F é o lugar geométrico dos pontos que têm uma propriedade p, procedemos da seguinte forma:

1ª parte: Prova-se que todos os pontos de F têm a propriedade p.

$$(\forall X)\ (X \in F \implies X \text{ tem } p)$$

2ª parte: Prova-se que só os pontos de F têm a propriedade p.

1º modo: $(\forall Y)\ (Y \text{ tem } p \implies Y \in F)$

ou

2º modo: $(\forall Z)\ (Z \notin F \implies Z \text{ não tem } p)$.

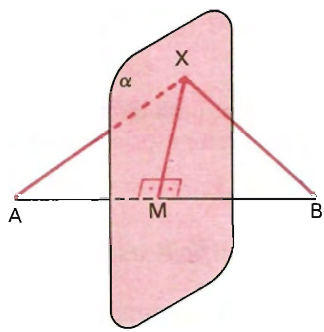
Se o lugar geométrico pedido não for de ponto e sim de outro elemento geométrico, adapta-se o procedimento acima, substituindo-se ponto pelo *elemento*.

67. *Exemplos*

1º) Estabelecer o lugar geométrico dos pontos eqüidistantes de dois pontos distintos A e B.

Solução

Seja α o plano perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ pelo ponto médio M de $\overline{AB}$.



1ª parte: Todos os pontos de α são eqüidistantes de A e B.

Hipótese *Tese*

$$(\forall X)\ (X \in \alpha) \implies (d_{X,A} = d_{X,B})$$

Demonstração

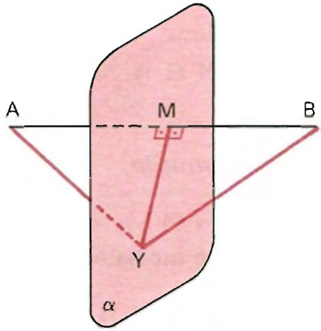
Se $X = M$, temos:

$$(X = M,\ \overline{MA} \equiv \overline{MB}) \implies \overline{XA} \equiv \overline{XB} \implies d_{X,A} = d_{X,B}$$

Se $X \neq M$, temos:

$$(\overline{AM} \equiv \overline{BM},\ A\hat{M}X \equiv B\hat{M}X,\ \overline{MX} \text{ comum}) \implies$$
$$\implies \triangle XMA \equiv \triangle XMB \implies \overline{XA} \equiv \overline{XB} \implies d_{X,A} = d_{X,B}$$

2ª parte: Só os pontos de α são eqüidistantes de A e B.



Hipótese		*Tese*
$(\forall Y), (d_{Y,A} = d_{Y,B})$	$\Longrightarrow$	$(Y \in \alpha)$

Demonstração

Se $Y \in \overline{AB}$, temos:

$(Y \in \overline{AB}, \overline{YA} \equiv \overline{YB}) \Longrightarrow Y = M$

$(Y = M, M \in \alpha) \Longrightarrow Y \in \alpha.$

Se $Y \notin \overline{AB}$, temos:

$(\overline{YA} \equiv \overline{YB}, \overline{AM} \equiv \overline{BM}, \overline{YM} \text{ comum}) \Longrightarrow \triangle YMA \equiv \triangle YMB \Longrightarrow$

$\Longrightarrow Y\hat{M}A \equiv Y\hat{M}B \Longrightarrow \overline{YM} \perp \overline{AB}.$

Sendo $\overline{YM} \perp \overline{AB}$ e α perpendicular a $\overline{AB}$ por M, então $Y \in \alpha$.
Logo, o plano α é o lugar geométrico pedido.

Notas

a) Plano mediador — definição

Chama-se *plano mediador* de um segmento ao plano perpendicular ao segmento pelo seu ponto médio.

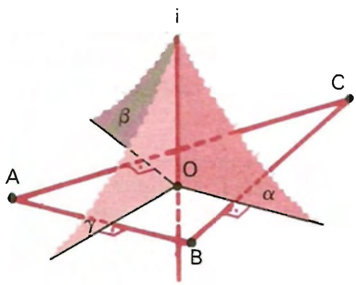
b)

O lugar geométrico dos pontos eqüidistantes de dois pontos distintos é o plano mediador do segmento que tem esses pontos por extremidades.

2º) Estabelecer o lugar geométrico dos pontos eqüidistantes de três pontos A, B e C *não* colineares.

Solução

Seja α o plano mediador de $\overline{BC}$ e γ o plano mediador de $\overline{AB}$. Como A, B e C não são colineares, então α e γ são secantes. Seja i a interseção de α e γ.



1ª parte

Hipótese *Tese*

$$(\forall X)\ (X \in i) \implies (d_{X,A} = d_{X,B} = d_{X,C})$$

Demonstração

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}(X \in i,\ i = \alpha \cap \gamma) \Rightarrow X \in \alpha \\ \alpha \text{ é mediador de } \overline{BC}\end{array}\right\} \Rightarrow d_{X,B} = d_{X,C} \\ \\ \left.\begin{array}{r}(x \in i,\ i = \alpha \cap \gamma) \Rightarrow x \in \gamma \\ \gamma \text{ é mediador de } \overline{AB}\end{array}\right\} \Rightarrow d_{X,A} = d_{X,B}\end{array}\right\} \Rightarrow d_{X,A} = d_{X,B} = d_{X,C}$$

2ª parte

Hipótese *Tese*

$$(\forall Y),\ (d_{Y,A} = d_{Y,B} = d_{Y,C}) \implies y \in i$$

Demonstração

$$d_{Y,B} = d_{Y,C} \implies Y \in \alpha; \qquad d_{Y,A} = d_{Y,B} \implies y \in \gamma$$
$$(Y \in \alpha,\ Y \in \gamma,\ i = \alpha \cap \gamma) \implies y \in i$$

Logo, a reta *i* é o lugar geométrico procurado.

Observações

1ª) Os pontos da reta *i*, sendo eqüidistantes de *A* e *C*, estão no plano β mediador de $\overline{AC}$. Então a reta *i* é a *interseção dos planos mediadores dos lados do triângulo ABC*, isto é, $i = \alpha \cap \beta \cap \gamma$.

2ª) As interseções de α, β e γ com o plano (A, B, C) são as respectivas *mediatrizes* dos lados do triângulo *ABC*. Essas mediatrizes interceptam-se num ponto chamado *circuncentro* do triângulo.

3ª)

O lugar geométrico dos pontos eqüidistantes de três pontos não colineares é a reta perpendicular ao plano do triângulo determinado pelos pontos, conduzida pelo circuncentro desse triângulo.

68. *Determinação da superfície esférica*

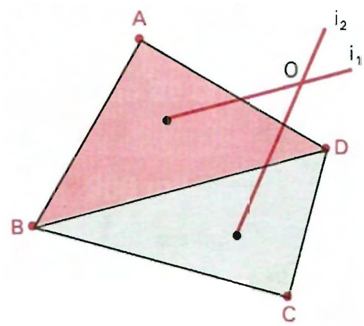
> Existe um único ponto eqüidistante de quatro pontos A, B, C e D não coplanares.

Solução

1ª parte: Existência

Sejam i_1 e i_2 tais que:

$i_1 \perp (A, B, D)$ pelo circuncentro do $\triangle ABD$
$i_2 \perp (B, C, D)$ pelo circuncentro do $\triangle BCD$



As retas i_1 e i_2 são coplanares, pois estão no plano mediador de $\overline{BD}$, e não são paralelas, pois A, B, C e D não são coplanares. Logo i_1 e i_2 são concorrentes e O é o ponto de concorrência.

$$\left.\begin{array}{l} O \in i_1 \implies d_{O,A} = d_{O,B} = d_{O,D} \\ O \in i_2 \implies d_{O,B} = d_{O,C} = d_{O,D} \end{array}\right\} \implies$$

$$\Rightarrow d_{O,A} = d_{O,B} = d_{O,C} = d_{O,D}$$

Então o ponto O é eqüidistante de A, B, C e D, isto é, existe pelo menos uma superfície esférica (a de centro O) que passa por A, B, C e D.

2ª parte: Unicidade

Se existe outro ponto O' eqüidistante de A, B, C e D, temos:

$$d_{O',A} = d_{O',B} = d_{O',D} \implies O' \in i_1$$
$$d_{O',B} = d_{O',C} = d_{O',D} \implies O' \in i_2$$
$$(O' \in i_1,\ O' \in i_2,\ i_1 \cap i_2 = \{O\}) \implies O' = O.$$

Logo, a superfície esférica que passa por A, B, C e D é única.

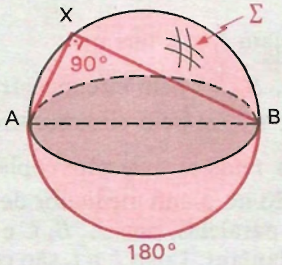
Nota: Outros enunciados para o problema acima: "Quatro pontos não coplanares determinam uma única superfície esférica" ou "Existe uma única superfície esférica circunscrita a um tetraedro".

EXERCÍCIOS

115. Estabeleça o lugar geométrico dos pontos que vêem um segmento AB, dado, sob ângulo reto.

Solução

Seja Σ o conjunto constituído da superfície esférica de diâmetro $\overline{AB}$ menos os pontos A e B.

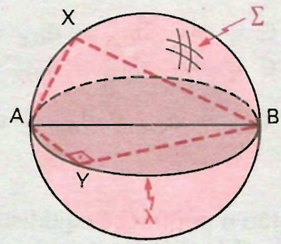


1ª parte

Hipótese		*Tese*
$(\forall X), (X \in \Sigma)$	$\Longrightarrow$	$(A\hat{X}B$ é reto$)$

Demonstração

O plano (X, A, B) determina em Σ uma circunferência de diâmetro $\overline{AB}$, menos os pontos A e B, que contém X, logo $A\hat{X}B$ é reto.



2ª parte

Hipótese		*Tese*
$(\forall Y), (A\hat{Y}B$ é reto$)$	$\Longrightarrow$	$Y \in \Sigma$

Demonstração

O plano (Y, A, B) determina em Σ uma circunferência de diâmetro $\overline{AB}$, menos os pontos A e B, que chamamos de λ, sendo $\lambda \subset \Sigma$.

No plano (Y, A, B), com $A\hat{Y}B$ reto, vem que $Y \in \lambda$.

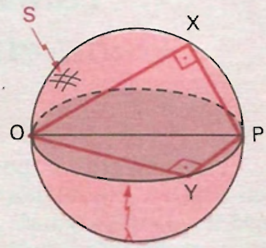
$$(Y \in \lambda, \lambda \subset \Sigma) \Longrightarrow Y \in \Sigma$$

Conclusão: O lugar geométrico dos pontos que vêem um segmento sob um ângulo reto é a superfície esférica cujo diâmetro é o segmento, menos as extremidades do segmento.

116. Dados dois pontos distintos O e P, estabeleça o lugar geométrico dos pés das perpendiculares conduzidas por P às retas que passam por O.

Solução

Seja S a superfície esférica de diâmetro $\overline{OP}$:



1ª parte

Hipótese *Tese*

$(\forall X)\ (X \in S) \implies (\overleftrightarrow{OX} \perp \overleftrightarrow{PX})$

Se $X \neq O$ e $X \neq P$, o plano (X, O, P) determina em S uma circunferência λ de diâmetro $\overline{OP}$, à qual X pertence.

$(X \in \lambda,\ x \neq O,.X \neq P) \implies O\hat{X}P$ é reto $\implies \overleftrightarrow{OX} \perp \overleftrightarrow{PX}$

2ª parte

Hipótese *Tese*

$(\forall Y),\ (\overleftrightarrow{OY} \perp \overleftrightarrow{PY}) \implies (Y \in S)$

O plano (Y, O, P) determina em S uma circunferência λ de diâmetro $\overline{OP}$. No plano (Y, O, P), com $\overleftrightarrow{OY} \perp \overleftrightarrow{PY}$, vem que $Y \in \lambda$.

$$(Y \in \lambda,\ \lambda \subset S) \implies Y \in S.$$

Por O (ou por P) passam infinitas retas perpendiculares à reta $\overleftrightarrow{OP}$; logo, O e P têm a propriedade do lugar.

Conclusão

O lugar geométrico pedido é a superfície esférica de diâmetro $\overline{OP}$.

117. Dados dois pontos distintos O e P, estabeleça o lugar geométrico dos pés das perpendiculares conduzidas por P aos planos que passam por O.

118. Num plano α, há um feixe de retas concorrentes em O. Fora de α e da perpendicular α por O, há um ponto P.

Estabeleça o lugar geométrico dos pés das perpendiculares às retas do feixe, conduzidas por P.

119. Dados uma reta r e um ponto P fora de r. Estabeleça o lugar geométrico dos pés das perpendiculares, conduzidas por P, aos planos do feixe que contém r.

LEITURA

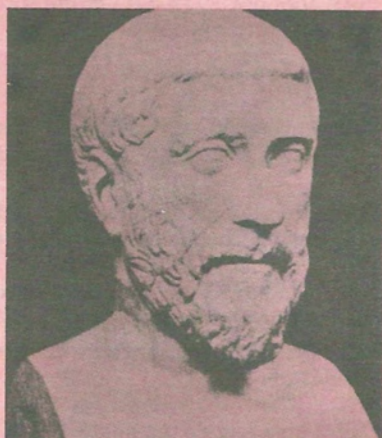
Tales, Pitágoras e a Geometria Demonstrativa

Hygino H. Domingues

Obviamente é impossível precisar as origens da geometria. Mas essas origens sem dúvida são muito remotas e muito modestas. Nessa longa trajetória, segundo alguns historiadores, a geometria passou por três fases: (a) a fase subconsciente, em que, embora percebendo formas, tamanhos e relações espaciais, graças a uma aptidão natural, o homem não era capaz ainda de estabelecer conexões que lhe proporcionassem resultados gerais; (b) a fase científica, em que, embora empiricamente, o homem já era capaz de formular leis gerais (por exemplo, a razão entre uma circunferência *qualquer* e seu diâmetro é constante); (c) a fase demonstrativa, inaugurada pelos gregos, em que o homem adquire a capacidade de deduzir resultados gerais mediante raciocínios lógicos.

O primeiro matemático cujo nome se associa à matemática demonstrativa é Tales de Mileto (c. 585 a.C.). Tales teria provado algumas poucas e esparsas proposições, como, por exemplo, "os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais". Mas o aparecimento de cadeias de teoremas, em que cada um se demonstra a partir dos anteriores, parece ter começado com Pitágoras de Samos (c. 532 a.C.) ou na escola pitagórica.

Pitágoras nasceu na ilha de Samos, colônia grega situada na Jônia. Quando jovem viajou pelo Egito, pela Babilônia e, talvez, pela Índia, onde, a par de conhecimento científico, certamente absorveu muito da religião e do misticismo desses lugares. Com cerca de 40 anos de idade fixou-se em Crotona, também uma colônia grega, mas do sul da Itália, onde fundou sua escola. Esta escola na verdade tinha muito de uma comunidade religiosa, pois era em meio a uma vida comunitária, mística e ascética que se cultivavam a filosofia e a ciência.

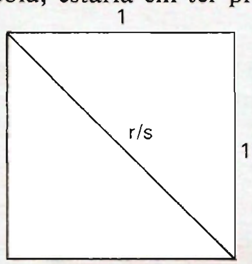


Pitágoras.

Os ensinamentos na escola pitagórica eram transmitidos oralmente e sob promessa de segredo (talvez a matemática fugisse a essas normas) e as descobertas acaso realizadas eram atribuídas ao líder — daí não se saber hoje quais as contribuições do próprio Pitágoras e quais as de seus discípulos. De qualquer maneira, não restou nenhum documento original da matemática pitagórica, que, apesar de toda a influência que exerceu, só é conhecida através de fontes indiretas.

Os pitagóricos atribuíam aos números (para eles apenas os elementos de $\mathbb{N}^*$) e às razões entre esses números um papel muito especial. Daí a afirmação de Aristóteles de que para eles os números eram a componente última dos objetos reais e materiais. Essa valorização da idéia de número na concepção do Universo (ditada pela própria experiência), aliada à grande ênfase que davam às investigações teóricas, levou-os a criar a teoria dos números (*aritmética*, como era chamada por eles). Os cálculos práticos, que para os gregos constituíam a *logística*, não interessavam aos pitagóricos.

A limitação das concepções numéricas dos pitagóricos iria aflorar, curiosamente, através do teorema hoje conhecido pelo nome do líder da escola, mas já conhecido muito tempo antes dele: "o quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados de seus catetos". (O grande mérito de Pitágoras, ou de sua escola, estaria em ter provado pela primeira vez esse resultado.)



Entendendo que a diagonal de um quadrado de lado unitário deveria ser uma razão numérica r/s (em que $r, s \in \mathbb{N}^*$ e, pode-se supor, $\text{mdc}(r, s) = 1$), os pitagóricos obtiveram $(r/s)^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Daí $r^2 = 2s^2$. Logo, r^2 é par e portanto r também é par, digamos $r = 2t$. Daí $(2t)^2 = 2s^2$, do que resulta $s^2 = 2t^2$ e portanto s é par. Absurdo, pois $\text{mdc}(r, s) = 1$.

A crise gerada por essa contradição levaria a matemática grega a deixar os rumos da aritmética e a trilhar decididamente os da geometria.

CAPÍTULO V

Diedros

I. Definições

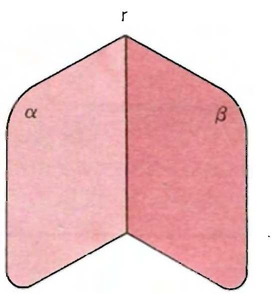
69. Diedro

Ângulo diedro ou *diedro* ou *ângulo diédrico* é a reunião de dois semiplanos de mesma origem não contidos num mesmo plano.

A origem comum dos semiplanos é a *aresta* do diedro e os dois semiplanos são suas *faces*.

Assim, α e β são dois semiplanos de mesma origem r, distintos e não opostos.

$$\alpha \widehat{r} \beta = \alpha \cup \beta$$



$\alpha \widehat{r} \beta = \alpha \cup \beta$

Indica-se também o diedro $\alpha \widehat{r} \beta$ por:

$$\alpha\, r\, \beta, \quad \widehat{\alpha\beta}, \quad \alpha\beta, \quad \text{di}\,(\alpha\, r\, \beta), \quad \text{di}\,(\alpha \widehat{r} \beta), \quad \text{di}\,(r).$$

70. Interior e exterior de um diedro

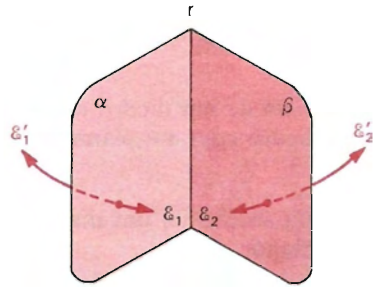
Dados dois semiplanos $r\alpha$ e $r\beta$ de mesma origem, distintos e não opostos, consideremos os *semi-espaços* abertos (que não contêm as respectivas origens) $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}'_1$, $\mathcal{E}_2$ e $\mathcal{E}'_2$, como segue:

$\mathcal{E}_1$, com origem no plano de $r\alpha$ e contendo $r\beta$;

$\mathcal{E}'_1$, oposto a $\mathcal{E}_1$;

$\mathcal{E}_2$, com origem no plano de $r\beta$ e contendo $r\alpha$;

$\mathcal{E}'_2$, oposto a $\mathcal{E}_2$.



$\alpha \hat{r} \beta = \widehat{\alpha\beta} = \text{di}(\alpha, \beta) = \text{di}(r)$

1º) **Interior**

Chama-se *interior* do diedro $\widehat{\alpha\beta}$ à interseção de $\mathcal{E}_1$ com $\mathcal{E}_2$.

$$\text{Interior de } \widehat{\alpha\beta} = \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2.$$

O interior de um diedro é convexo.

Os pontos do interior de um diedro são pontos *internos* ao diedro.

A reunião de um diedro com seu interior é um *setor diedral* ou *diedro completo*, também conhecido por *diedro convexo*.

2º) **Exterior**

Chama-se exterior do diedro $\widehat{\alpha\beta}$ à reunião de $\mathcal{E}'_1$ e $\mathcal{E}'_2$.

$$\text{Exterior de } \widehat{\alpha\beta} = \mathcal{E}'_1 \cup \mathcal{E}'_2.$$

O exterior de um diedro é côncavo.

Os pontos do exterior de um diedro são pontos *externos* ao diedro.

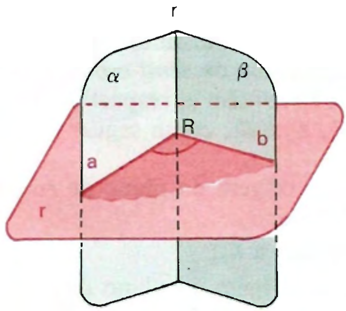
A reunião de um diedro com seu exterior é também conhecida por *diedro côncavo*.

71. Diedro nulo e diedro raso

Pode-se estender o conceito de diedro para se ter o *diedro nulo* (cujas faces são coincidentes) ou o *diedro raso* (cujas faces são semiplanos opostos).

II. Secções

72. Secção de um diedro

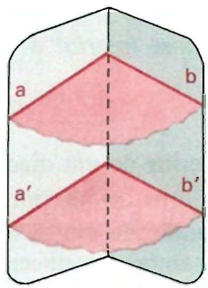


Secção de um diedro é a interseção do diedro com um plano secante à aresta.

Uma secção de um diedro é um ângulo plano.

Na figura, $a\widehat{R}b$ ou $\widehat{ab}$ é secção de $\alpha\widehat{r}\beta$.

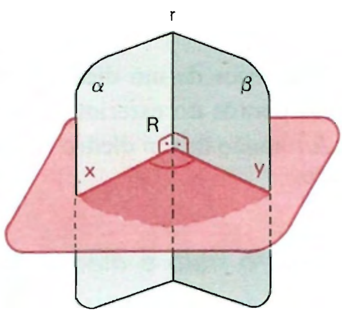
73. Propriedade



Duas secções paralelas de um diedro são congruentes.

De fato, as secções são dois ângulos de lados com sentidos respectivamente concordantes, e então elas são congruentes.

74. Secção reta ou secção normal



Secção reta ou *secção normal* de um diedro é uma secção cujo plano é perpendicular à aresta do diedro.

Se $\widehat{xy}$ é secção reta do diedro de aresta r, então o plano (xy) é perpendicular a r, isto é,

$$x \perp r \quad \text{e} \quad y \perp r.$$

Na figura, $x\widehat{R}y$ ou $\widehat{xy}$ é secção reta ou normal de $\alpha\widehat{r}\beta$.

75. *Propriedade*

Secções normais de um mesmo diedro são congruentes.

De fato, duas secções normais de um mesmo diedro são secções paralelas e, portanto, são congruentes.

76. *Diedro reto*

Um diedro é *reto* se, e somente se, sua secção normal é um *ângulo reto*.

77. *Diedro agudo*

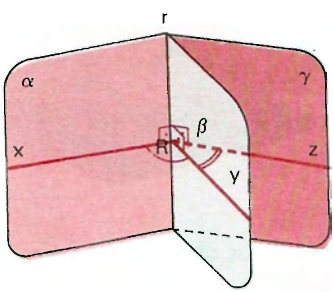
Um diedro é *agudo* se, e somente se, sua secção normal é um *ângulo agudo*.

78. *Diedro obtuso*

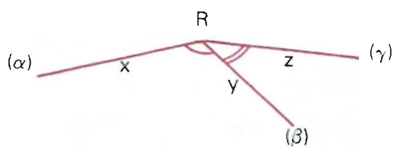
Um diedro é *obtuso* se, e somente se, sua secção normal é um *ângulo obtuso*.

79. *Diedros adjacentes*

Dois diedros são *adjacentes* se, e somente se, as secções normais são *ângulos adjacentes*.



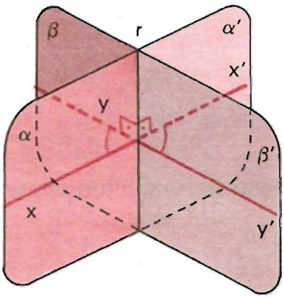
Num plano perpendicular a r, temos:

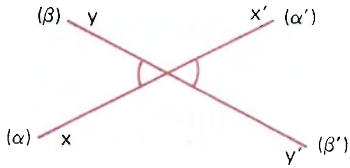


Para mais, acesse: http://fuvestibular.com.br/

80. *Diedros opostos pela aresta*

Dois diedros são *opostos pela aresta* se, e somente se, as secções normais são *ângulos opostos pelo vértice*.



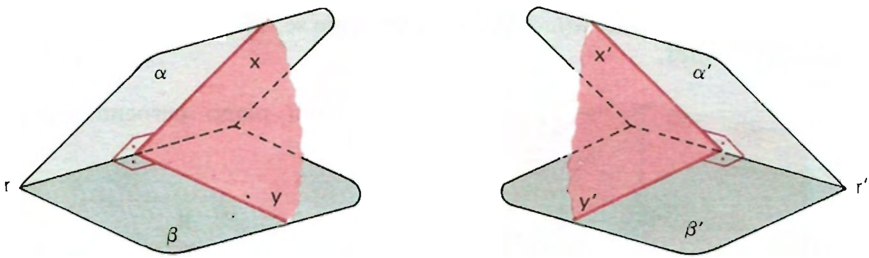


$\alpha\, r\, \beta$ e $\alpha' r \beta'$ são diedros opostos pela aresta, pois as secções normais $\widehat{xy}$ e $\widehat{x'y'}$ são opostas pelo vértice.

III. Diedros congruentes — Bissetor — Medida

81. *Congruência — definição*

Dois diedros são congruentes se, e somente se, uma secção normal de um é congruente a uma secção normal do outro.



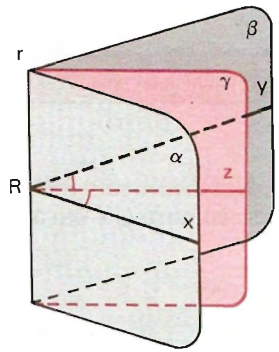
Se $\widehat{xy}$ e $\widehat{x'\ y'}$ são as respectivas secções retas dos diedros $\alpha\ r\ \beta$ e $\alpha'\ r'\ \beta'$, temos:

$$\alpha\ r\ \beta\ =\ \alpha' r' \beta' \iff \widehat{xy} \equiv \widehat{x'y'}.$$

82. *Bissetor de um diedro*

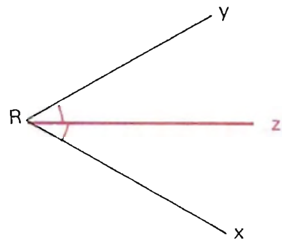
Um semiplano é *bissetor* de um diedro se, e somente se, ele possui origem na aresta do diedro e o divide em dois diedros adjacentes e congruentes.

No diedro



γ é bissetor do diedro $\alpha\ r\ \beta$

Na secção reta



z é bissetriz do ângulo $\widehat{xy}$

83. *Medida de um diedro*

Usando analogia com ângulo plano podemos:

- definir *soma* de diedros; teremos:

"A secção normal do diedro soma (ou diferença) de dois diedros é congruente à soma (ou diferença) das secções normais dos diedros considerados".

- definir *desigualdade* entre diedros; teremos:

"Se um diedro é maior (ou menor) que outro, a secção reta do primeiro é maior (ou menor) que a secção reta do segundo e reciprocamente".

Como

a *congruência* entre dois diedros é dada pela congruência de suas secções retas;

a secção reta do diedro *soma* é a soma das secções retas dos diedros parcelas;

a *desigualdade* entre dois diedros é dada pela desigualdade entre suas secções retas,

podemos provar que

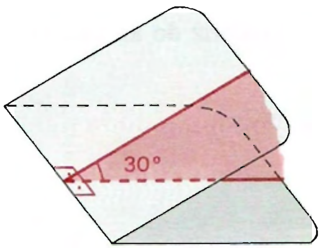
"todo diedro é proporcional à respectiva secção reta"

e daí sai que:

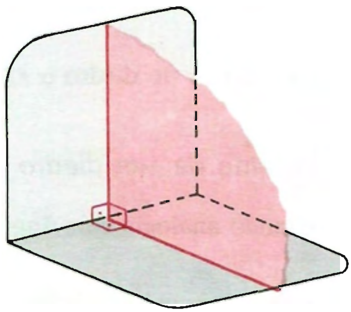
"A medida de um diedro é a medida de sua secção reta".

Assim, um diedro de *30°* é um diedro cuja secção normal mede *30°*.

Um diedro reto mede *90°*, pois sua secção normal é um ângulo reto.



Diedro de *30°*.



Diedro reto.

84. *Diedros complementares — diedros suplementares*

Dois diedros são complementares se, e somente se, suas secções normais forem complementares (ou a soma de suas medidas for *90°*).

Dois diedros são suplementares se, e somente se, a soma de suas medidas for *180°* (ou suas secções normais são suplementares).

EXERCÍCIOS

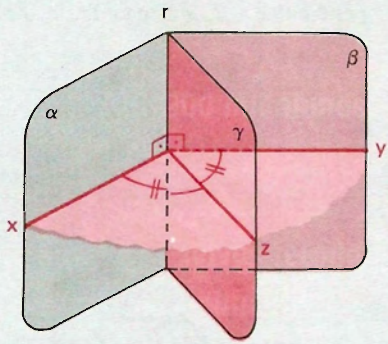
120. Construa o plano bissetor de um diedro dado.

Solução

1) Conduzimos uma secção reta $x\hat{y}$ do *di* ($\alpha\ r\ \beta$) dado.

3) z e r determinam o plano bissetor do *di* ($\alpha\ r\ \beta$).

2) Construímos a bissetriz z de $x\hat{y}$.

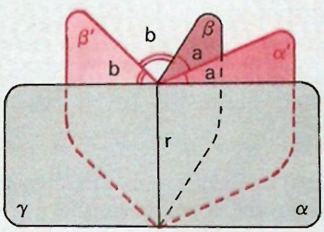


121. Se dois semiplanos são bissetores de dois diedros adjacentes e suplementares, então eles formam um diedro reto.

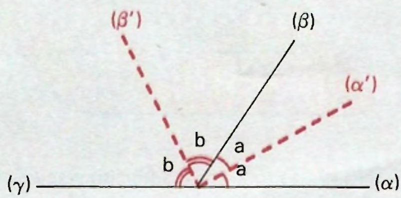
Solução

Sendo $\alpha\ r\ \beta$ e $\beta\ r\ \gamma$ os diedros, α' e β' os respectivos bissetores, num plano perpendicular a r (que determina secções retas nos diedros), temos a situação da figura abaixo.
Sendo a e b as medidas dos diedros indicados, vem:

No espaço



Na secção reta



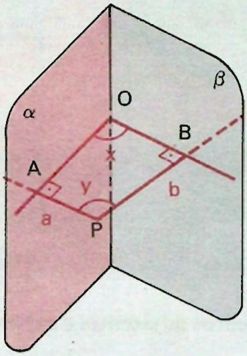
$$a + a + b + b = 180° \implies a + b = 90° \implies \text{di } (\alpha'\beta') \text{ é reto.}$$

122. Que relação existe entre a medida de um diedro e a medida do ângulo determinado por duas semi-retas de mesma origem respectivamente perpendiculares às faces do diedro?

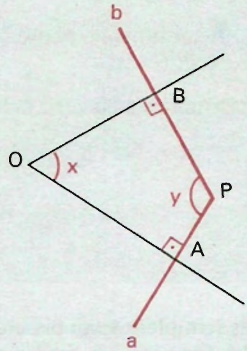
Solução

Sejam: $\alpha\beta$ o diedro, Pa a semi-reta perpendicular a α, Pb a semi-reta perpendicular a β, x a medida do diedro e y a medida do ângulo aPb.

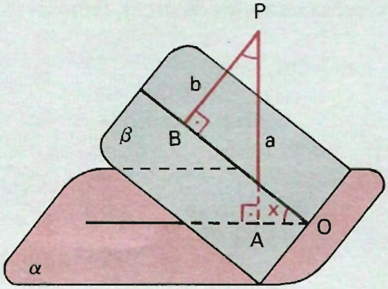
No espaço



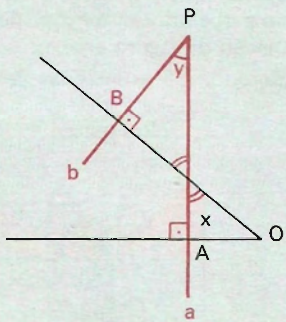
Na secção reta



No espaço



Na secção reta



No plano (ab), que determina secção normal no diedro, temos as situações das figuras acima (dentre outras possíveis) e daí concluímos que:

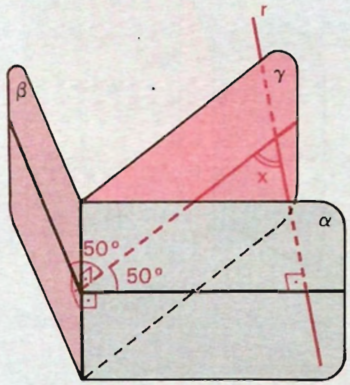
$$x = y \quad \text{ou} \quad x + y = 180^\circ$$

123. Um diedro mede *100°*. Quanto mede o ângulo que uma reta perpendicular a uma das faces do diedro forma com o bissetor dele?

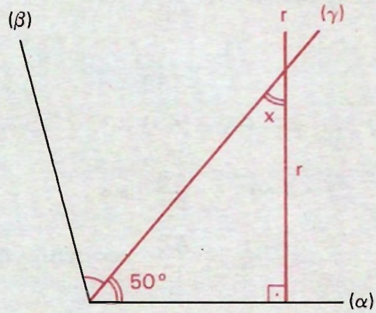
Solução

Sejam $\alpha\beta$ o diedro, γ seu bissetor e a reta r, perpendicular a α.

No espaço



Na secção reta



Os diedros $\alpha\gamma$ e $\gamma\beta$ medem *50°* cada um.
Na secção reta que passa por r temos a situação da figura acima à direita.
Sendo x a medida do ângulo pedido, temos:

$$x + 50° = 90° \implies x = 40°$$

Nota-se que o ângulo pedido é o complemento da metade do diedro dado independentemente da figura.

124. Dois semiplanos são bissetores de dois diedros adjacentes e complementares. Quanto mede o diedro por eles formado?

125. Duas semi-retas Or e Os são respectivamente perpendiculares às faces α e β de um diedro. Se o ângulo $r\widehat{O}s$ mede *50°*, quanto mede o diedro $\alpha\beta$?

126. Uma reta perpendicular a uma face de um diedro forma um ângulo de *50°* com o bissetor desse diedro. Quanto mede o diedro?

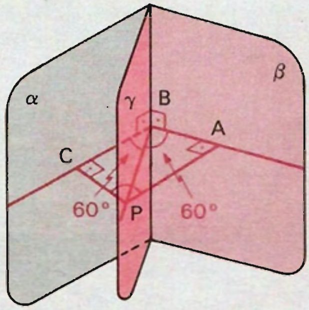
127. Prove que dois diedros opostos pela aresta são congruentes.

128. Dois diedros têm faces respectivamente paralelas. Conhecendo a medida a de um deles, qual será a medida do outro?

129. Um diedro mede *120°*. De um ponto situado no seu plano bissetor, a *12 cm* da aresta, traçam-se perpendiculares às duas faces e dos pés dessas perpendiculares traçam-se perpendiculares à aresta do diedro. Calcule o perímetro do quadrilátero assim formado.

Solução

Sendo $PB = 12\ cm$, temos:



1) $\text{sen } 60° = \dfrac{PA}{PB} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{PA}{12} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow PA = 6\sqrt{3}$

2) $\cos 60° = \dfrac{AB}{PB} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{AB}{12} \Longrightarrow AB = 6$

Da mesma maneira, $BC = 6\ cm$ e $PC = 6\sqrt{3}\ cm$.

Portanto, o perímetro do quadrilátero *PABC* vale:

$$PA + AB + BC + CP = 6\sqrt{3} + 6 + 6\sqrt{3} + 6$$

isto é

$$(12\sqrt{3} + 12)\ \text{cm} \quad \text{ou} \quad 12(\sqrt{3} + 1)\ \text{cm}.$$

Resposta: $12(\sqrt{3} + 1)$ cm.

130. Um diedro mede *120°*. Um ponto *P* do plano bissetor desse diedro dista *10 cm* da aresta do diedro. Calcule a distância de *P* às faces do diedro.

131. A distância de um ponto *M*, interior a um diedro, às suas faces é de *5 cm*. Encontre a distância do ponto *M* à aresta do diedro se o ângulo formado pelas perpendiculares às faces é de *120°*.

132. Um ponto *M* dista *12 cm* de uma face de um diedro reto, e *16 cm* de outra face. Encontre a distância desse ponto à aresta do diedro.

133. Um ponto *M* de uma face de um diedro dista *15 cm* da outra face. Encontre a distância de *M* à aresta do diedro, sabendo que a medida do diedro é de 60°.

134. Calcule o comprimento de um segmento $\overline{AB}$ do interior de um diedro reto com A e B nas faces, sabendo que as projeções ortogonais $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ desse segmento sobre as faces medem respectivamente *21 cm* e *25 cm* e que a medida de $\overline{CD}$ é *15 cm*.

Solução

Na figura ao lado, temos:

AD = 21 cm, BC = 25 cm, e CD = 15 cm.

Os triângulos ACD e BDC são retângulos.

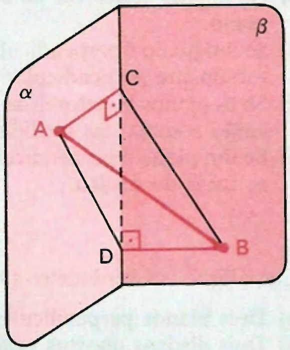
Aplicando Pitágoras no $\triangle BDC$, temos:

$BD^2 + CD^2 = BC^2 \Rightarrow BD^2 + 15^2 = 25^2 \Rightarrow BD = 20$ cm.

Sendo $di(\alpha\beta) = 90°$, o $\triangle ADB$ e o $\triangle ACB$ são retângulos, portanto:

$AD^2 + BD^2 = AB^2 \Rightarrow 21^2 + 20^2 = AB^2 \Rightarrow \overline{AB} = 29$.

Resposta: 29 cm.



135. Um segmento $\overline{AB}$ de *75 cm* tem as extremidades nas faces de um diedro reto. Sendo $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ as respectivas projeções de $\overline{AB}$ sobre as faces do diedro, a medida de $\overline{AC}$ igual a *50 cm* e a de $\overline{BD}$ igual a *55 cm*, calcule a medida do segmento $\overline{CD}$.

136. Seja um diedro $\alpha\beta$. A distância de dois pontos de α ao plano β são respectivamente *9 cm* e *12 cm*. A distância do segundo ponto à aresta do diedro é *20 cm*. Encontre a distância do primeiro ponto à aresta do diedro.

137. Um plano α passa pela hipotenusa $\overline{AB}$ de um triângulo retângulo ABC; α forma um diedro de *60°* com o plano do triângulo ABC. Encontre a distância do vértice C do triângulo ao plano α, sabendo que os lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ medem respectivamente *6 cm* e *8 cm*.

138. Um diedro mede *120°*. A distância de um ponto interior P às suas faces é de *10 cm*. Ache a distância entre os pés das perpendiculares às faces conduzidas por P.

139. ABC e DBC são dois triângulos equiláteros que têm um lado comum $\overline{BC}$, e cujos planos formam um diedro de $120°$. Sabendo que o lado desses triângulos têm medidas iguais a m, calcule o segmento $\overline{AD}$ e a distância do ponto D ao plano ABC.

140. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Os planos bissetores de dois diedros adjacentes suplementares são perpendiculares.
b) Os planos bissetores de dois diedros opostos pela aresta estão num mesmo plano.
c) Se um plano é perpendicular a uma das faces de um diedro, então será obrigatoriamente perpendicular à outra face.
d) Se os planos bissetores de dois diedros adjacentes formam um ângulo de $26°$, então a soma das medidas dos dois diedros vale $90°$.
e) Se um plano é perpendicular à aresta de um diedro, então será perpendicular às faces do diedro.

141. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Dois planos perpendiculares determinam quatro diedros retos.
b) Dois diedros opostos pela aresta são congruentes.
c) Dois diedros congruentes são opostos pela aresta.
d) Duas secções paralelas de um mesmo diedro são congruentes.
e) Duas secções congruentes de um mesmo diedro são paralelas.
f) Duas secções normais de um diedro são congruentes.
g) Toda secção de um diedro reto é um ângulo reto.
h) Um diedro reto pode ter uma secção que é um ângulo reto.
i) Dois planos secantes determinam quatro diedros.
j) Se um diedro é reto, suas faces estão contidas em planos perpendiculares entre si.

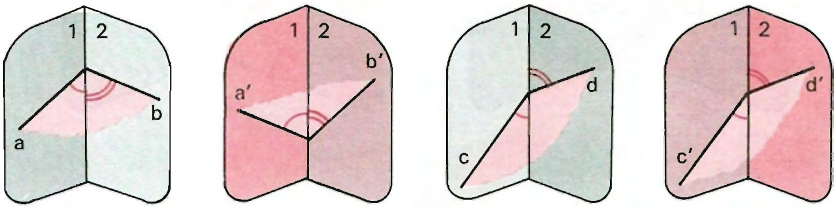
142. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) A soma de todos os diedros consecutivos formados em torno de uma mesma aresta vale 4 retos.
b) Por um ponto qualquer da aresta de um diedro, considerando-se em cada face a semi-reta perpendicular à aresta, obtém-se uma secção reta do diedro.
c) Se a $= 90°$ e $b = 30°$ são as medidas de dois diedros adjacentes, o ângulo formado pelos bissetores desses diedros mede $60°$.
d) Se dois diedros adjacentes são complementares, os seus bissetores formam um diedro de $45°$.
e) O lugar geométrico dos centros das esferas tangentes às faces de um diedro é o bissetor do diedro.
f) O lugar geométrico dos pontos do espaço eqüidistantes das faces de um diedro é o bissetor desse diedro.

IV. Secções igualmente inclinadas — Congruência de diedros

85. *Secções igualmente inclinadas ou secções de lados igualmente inclinados — definição*

Duas secções de dois diedros (distintos ou não) são chamadas *secções igualmente inclinadas* (secções *ii*), se, e somente se, os lados de uma formam com uma mesma semi-reta da aresta correspondente ângulos ordenadamente congruentes aos ângulos que os lados da outra formam com uma mesma semi-reta da aresta correspondente a essa outra.



Nas figuras acima

$\widehat{ab}$ e $\widehat{a'b'}$ são secções igualmente inclinadas
$\widehat{cd}$ e $\widehat{c'd'}$ são secções igualmente inclinadas

Notemos que as secções $\widehat{ab}$ e $\widehat{cd}$, $\widehat{a'b'}$ e $\widehat{cd}$, $\widehat{ab}$ e $\widehat{c'd'}$, $\widehat{a'b'}$ e $\widehat{c'd'}$ não são igualmente inclinadas.

86. *Teorema*

> Se dois diedros são congruentes, então eles apresentam secções igualmente inclinadas congruentes.

Notação:

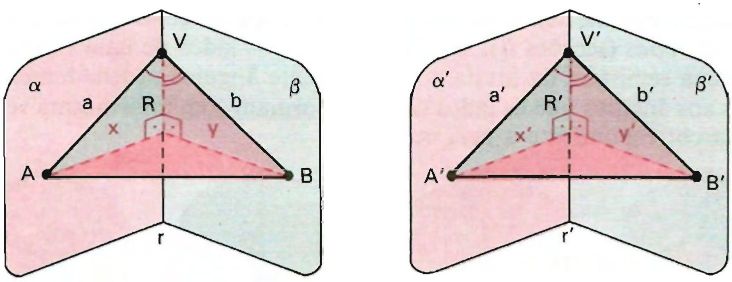
$\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ — diedros
$\widehat{ab}$, $\widehat{a'b'}$ — secções igualmente inclinadas
$\widehat{xy}$, $\widehat{x'y'}$ — secções retas

Hipótese — *Tese*

$$(\alpha\beta \equiv \alpha'\beta' \text{ ou } \widehat{xy} \equiv \widehat{x'y'}) \implies \widehat{ab} \equiv \widehat{a'b'}$$

Demonstração

1º caso: Os lados das secções *ii* formam ângulos agudos (os quatro) ou obtusos (os quatro) com uma mesma semi-reta da aresta correspondente. (Vide $\widehat{ab}$ e $\widehat{a'b'}$ na figura.)



1) Consideremos em r e r' (arestas dos diedros), respectivamente, R e R' tais que $\overline{VR} \equiv \overline{V'R'}$

(V e V' são vértices das secções igualmente inclinadas e $R \neq V$).

2) Por R e R' consideremos as secções retas $\widehat{xy}$ e $\widehat{x'y'}$ que determinam $A \in a$, $B \in b$, $A' \in a'$ e $B' \in b'$.

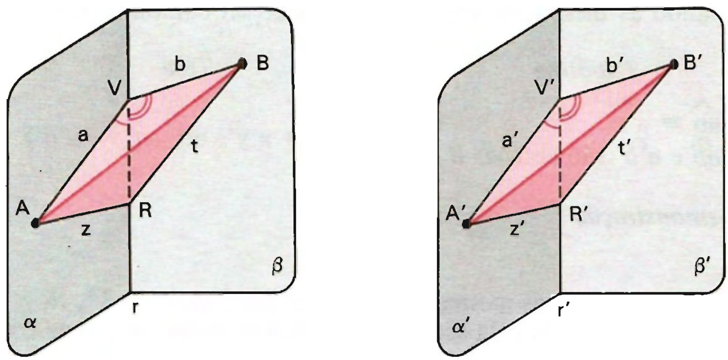
3) Chegamos à tese pela seqüência de quatro congruências de triângulos, como segue:

$\triangle VRA \equiv \triangle V'R'A'$ (caso ALA)
$\triangle VRB \equiv \triangle V'R'B'$ (caso ALA)
$\triangle ARB \equiv \triangle A'R'B'$ (caso LAL — note que $\widehat{xy} \equiv \widehat{x'y'}$ por hipótese)
$\triangle AVB \equiv \triangle A'V'B'$ (caso LLL).

Dessa última congruência vem:

$$A\widehat{V}B \equiv A'\widehat{V'}B' \implies \widehat{ab} \equiv \widehat{a'b'}.$$

2º caso: Dois lados, um de cada secção, formam ângulos agudos com uma das semi-retas da aresta correspondente e os outros dois formam ângulos obtusos (ou retos) com a mesma semi-reta da aresta correspondente. (Vide $\widehat{ab}$ e $\widehat{a'b'}$ na figura.)



1) Consideremos em r e r', respectivamente, R e R' tais que:

$$\overline{VR} \equiv \overline{V'R'} \quad \text{com} \quad R \neq V.$$

2) Artifício: consideremos as retas z e t por R, e z' e t' por R', que interceptam, respectivamente, a e b, e a' e b' nos pontos A e B, e A' e B', de forma que:

$$\widehat{ARV} \equiv \widehat{A'R'V'} \text{ (agudos) e } \widehat{BRV} \equiv \widehat{B'R'V'} \text{ (agudos).}$$

3) Chegamos à tese pela seqüência de quatro congruências de triângulos, como segue:

$\triangle VRA \equiv \triangle V'R'A'$ (caso ALA)
$\triangle VRB \equiv \triangle V'R'B'$ (caso ALA)
$\triangle ARB \equiv \triangle A'R'B'$ (caso LAL — note que aplicamos o primeiro caso $\widehat{ARB} \equiv \widehat{A'R'B'}$)
$\triangle AVB \equiv \triangle A'V'B'$ (caso LLL)

Dessa última congruência vem:

$$\widehat{AVB} \equiv \widehat{A'V'B'} \implies \widehat{ab} \equiv \widehat{a'b'}.$$

87. *Teorema — recíproco do anterior*

> Se dois diedros apresentam secções igualmente inclinadas congruentes, então eles são congruentes.

Usando as mesmas notações e figuras do teorema anterior, temos:

Hipótese | *Tese*

$$\left(\begin{array}{l}\widehat{ab} \equiv \widehat{a'b'} \\ \widehat{ab} \text{ e } \widehat{a'b'} \text{ são secções } ii\end{array}\right) \Longrightarrow \quad (\widehat{xy} \equiv \widehat{x'y'} \text{ ou } \alpha\beta \equiv \alpha'\beta')$$

Demonstração

1º caso: Usando as mesmas construções para obter V, V', R, R', A, A', B e B', chegamos à tese pela seqüência de quatro congruências de triângulos, como segue:

$\triangle VRA \equiv \triangle V'R'A'$ (caso ALA)
$\triangle VRB \equiv \triangle V'R'B'$ (caso ALA)
$\triangle AVB \equiv \triangle A'V'B'$ (caso LAL — usando a hipótese)
$\triangle ARB \equiv \triangle A'R'B'$ (caso LLL)

Dessa última congruência: $A\widehat{R}B \equiv A'\widehat{R'}B'$.

$$A\widehat{R}B \equiv A'\widehat{R'}B' \Longrightarrow \widehat{xy} \equiv \widehat{x'y'} \Longrightarrow \widehat{\alpha\beta} \equiv \widehat{\alpha'\beta'}$$

2º caso: Usando as mesmas construções para obter V, V', R, R' e o mesmo artifício para obter A, A', B, B' usados no 2º caso do teorema anterior, chegamos à tese pela seqüência de quatro congruências de triângulos, como segue:

$\triangle VRA \equiv \triangle V'R'A'$ (caso ALA)
$\triangle VRB \equiv \triangle V'R'B'$ (caso ALA)
$\triangle AVB \equiv \triangle A'V'B'$ (caso LAL — usando a hipótese)
$\triangle ARB \equiv \triangle A'R'B'$ (caso LLL)

Dessa última congruência vem: $A\widehat{R}B \equiv A'\widehat{R'}B'$.

Sendo $A\widehat{R}B$ e $A'\widehat{R'}B'$ agudos, conforme artifício, e congruentes, recaímos no 1º caso. Daí sai a tese.

88. *Condição necessária e suficiente*

Resumindo os dois teoremas acima, temos:

> Uma condição necessária e suficiente para dois diedros serem congruentes é possuírem secções igualmente inclinadas congruentes.

EXERCÍCIOS

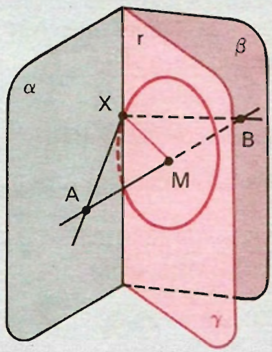
143. Dados os pontos A e B, um em cada face de um diedro e nenhum na aresta, conduza por AB um plano que determina no diedro uma secção que é um ângulo reto.

Solução

a) Construção:

Seja o diedro $di(\alpha\ r\ \beta)$, $A \in \alpha$ e $B \in \beta$, M o ponto médio de AB e γ o plano determinado por M e r.

No plano γ, com centro em M, conduzimos uma circunferência de diâmetro congruente a $\overline{AB}$.



O ponto X, interseção da circunferência com r, determina com A e B o plano pedido.

O problema pode ter duas, uma ou nenhuma solução conforme posição relativa de r e da circunferência.

b) Prova de que $A\widehat{X}B$ é reto:

No triângulo AXB, a mediana $\overline{XM}$ é metade de $\overline{AB}$, o que implica que o triângulo é retângulo em X. Logo $A\widehat{X}B$ é reto.

144. Dois triângulos isósceles congruentes ACD e BCD têm a base $\overline{CD}$ comum. Seus planos α e β são perpendiculares. Sendo M o ponto médio de $\overline{AB}$, N o ponto médio de $\overline{CD}$, $CD = 2x$, e designando os lados congruentes dos triângulos por a:

a) demonstre que $\overline{MN}$ é perpendicular a $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$;

b) calcule, em função de m e x, os comprimentos de $\overline{AB}$ e $\overline{MN}$;

c) para que valores de x, o diedro de faces CAB e DAB é um diedro reto?

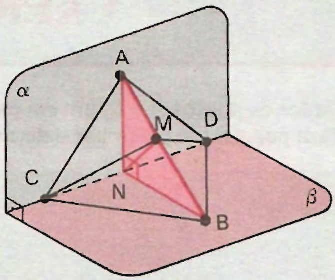
Solução

a) O triângulo ABN é retângulo isósceles, pois $\overline{AN} \equiv \overline{BN}$ (medianas de dois triângulos congruentes).

$A\hat{N}B$ é a secção reta do diedro, portanto $A\hat{N}B \equiv 90°$.

$$\left.\begin{array}{l} \overline{DC} \perp \overline{NB} \\ \overline{DC} \perp \overline{NA} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \overline{DC} \perp (ABN) \Rightarrow \\ \Rightarrow \overline{CD} \perp \overline{MN} \end{array}$$

Daí concluímos que $\overline{NM}$ é perpendicular a $\overline{AB}$.



b) Cálculo de $\overline{AB}$ e $\overline{MN}$:

$AB = 2\,MN$, pois o triângulo ABN é retângulo isósceles.

$$AB = AN\sqrt{2} \Rightarrow AB = \sqrt{2(a^2 - x^2)} \quad MN = \frac{AB}{2} \Rightarrow MN = \frac{\sqrt{2(a^2-x^2)}}{2}$$

c) Cálculo de x:

Os triângulos ACB e ADB são também isósceles, de base comum $\overline{AB}$. Para que a secção reta do novo diedro seja um ângulo reto, é necessário que $C\hat{M}D = 90°$, o que ocorre se $\overline{MN} = \frac{\overline{CD}}{2}$; portanto:

$$\frac{\sqrt{2(a^2 - x^2)}}{2} = x \implies 2(a^2 - x^2) = 4x^2 \implies x = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

145. Uma condição necessária e suficiente para que uma reta, não coplanar com a aresta de um diedro, forme ângulos congruentes com as faces do diedro e intercepte essas faces em pontos eqüidistantes da aresta.

146. Estabeleça o lugar geométrico dos pontos eqüidistantes de dois planos secantes.

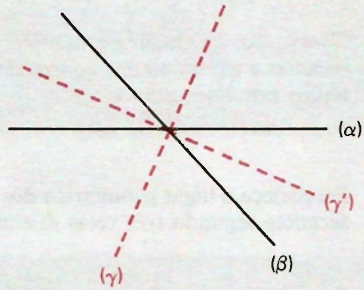
Solução

Dados: α e β secantes em r ($\alpha \cap \beta = r$).

Consideremos a reunião de dois planos γ e γ' dos semiplanos (quatro) bissetores dos diedros determinados por α e β.

Seja $\sum = \gamma \cup \gamma'$.

Provemos que $\sum$ é o lugar geométrico.



1ª parte

Hipótese		*Tese*
$(\forall X), X \in \sum$	$\Longrightarrow$	$d_{X,\alpha} = d_{X,\beta}$

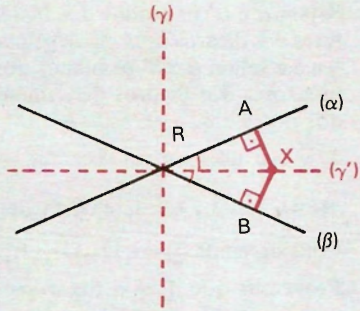
$x \in \sum \Longrightarrow (x \in \gamma \text{ ou } x \in \gamma')$

Demonstração

Se $X \in r$, distâncias nulas, então:

$d_{X,A} = d_{X,B}$ (ou $d_{X,\alpha} = d_{X,\beta}$).

Se $X \notin r$, (XAB) determina secções retas nos diedros determinados por α e β.



Em (XAB) temos: $(X \in \gamma$ ou $X \in \gamma') \Longrightarrow X$ pertence à bissetriz de $\widehat{ARB} \Longrightarrow d_{X,A} = d_{X,B}$ (ou $d_{X,\alpha} = d_{X,\beta}$).

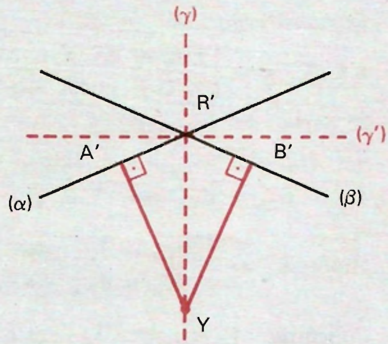
2ª parte

Hipótese		*Tese*
$(\forall Y), (d_{Y,A'} = d_{Y,B'})$	$\Longrightarrow$	$Y \in \sum$

Demonstração

Sendo

$d_{Y,A'} = d_{Y,\alpha}$, $d_{Y,B'} = d_{Y,\beta}$, o plano (Y, A', B') determina secções retas $A'R'B'$ nos diedros determinados por α e β.



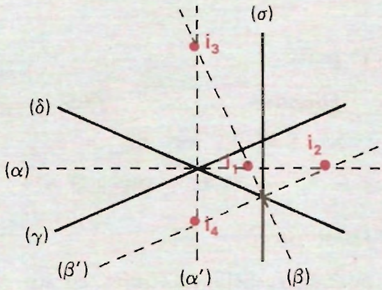
Em (Y, A', B') temos:

$d_{Y,A'} = d_{Y,B'} \Longrightarrow$ Y pertence à bissetriz de $\widehat{A'R'B'} \Longrightarrow y \in \gamma$ ou $y \in \gamma' \Longrightarrow y \in \Sigma$.

Conclusão: "O lugar geométrico dos pontos eqüidistantes de dois planos secantes é a reunião dos quatro semiplanos bissetores dos diedros determinados por esses planos".

147. Estabeleça o lugar geométrico dos pontos eqüidistantes de três planos dois a dois secantes segundo três retas distintas.

Solução



Dados δ, γ, σ.

Sejam α e α' os planos dos bissetores dos diedros determinados por γ e δ e sejam β e β' os planos dos bissetores dos diedros determinados por δ e σ.

δ, γ e σ dois a dois secantes $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, i_1, i_2, i_3, i_4 \mid i_1 = \alpha \cap \beta;\ i_2 = \alpha \cap \beta';\ i_3 = \alpha' \cap \beta;\ i_4 = \alpha' \cap \beta'$.

Consideremos $\Sigma = i_1 \cup i_2 \cup i_3 \cup i_4$.

Provemos que Σ é o lugar geométrico.

1ª parte

Hipótese *Tese*

$X \in \Sigma \Longrightarrow d_{X,\gamma} = d_{X,\delta} = d_{X,\sigma}$

Demonstração

$$x \in \Sigma \Longrightarrow \left\{\begin{matrix} x \in \alpha \text{ ou } X \in \alpha' \Longrightarrow d_{X,\delta} = d_{X,\gamma} \\ X \in \beta \text{ ou } X \in \beta' \Longrightarrow d_{X,\delta} = d_{X,\sigma} \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \text{Tese}$$

2ª parte

Hipótese *Tese*

$d_{Y,\delta} = d_{Y,\gamma} = d_{Y,\sigma} \Longrightarrow Y \in \Sigma$

$$\text{Hipótese} \Longrightarrow \left\{\begin{matrix} d_{Y,\delta} = d_{Y,\gamma} \Longrightarrow X \in \alpha \text{ ou } X \in \alpha' \\ d_{Y,\delta} = d_{Y,\sigma} \Longrightarrow X \in \beta \text{ ou } X \in \beta' \end{matrix}\right\} \Longrightarrow X \in \Sigma$$

Conclusão: $\Sigma = i_1 \cup i_2 \cup i_3 \cup i_4$ é o lugar geométrico procurado.

CAPÍTULO VI

Triedros

I. Conceito e elementos

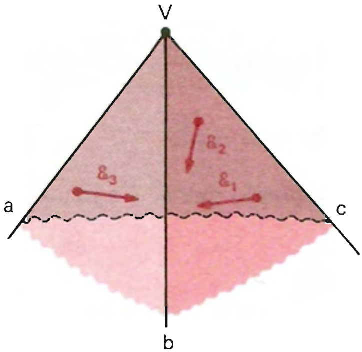
89. *Definição*

Dadas três semi-retas V_a, V_b, V_c, de mesma origem V, não coplanares, consideremos os semi-espaços $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ e $\mathcal{E}_3$, como segue:

$\mathcal{E}_1$, com origem no plano (bc) e contendo V_a;

$\mathcal{E}_2$, com origem no plano (ac) e contendo V_b;

$\mathcal{E}_3$, com origem no plano (ab) e contendo V_c.

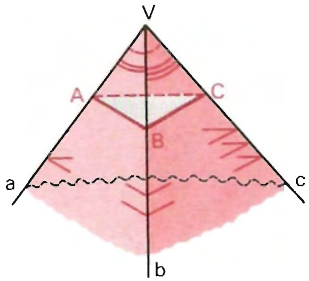


Triedro determinado por V_a, V_b e V_c é a intersecção dos semi-espaços $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ e $\mathcal{E}_3$.

$$V\ (a,\ b,\ c) = \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \cap \mathcal{E}_3$$

Sob uma outra orientação, o ente definido acima é chamado *setor triedral* ou *ângulo sólido de três arestas*. Segundo essa orientação, o triedro é a reunião dos três setores angulares definidos por V_a, V_b e V_c.

90. *Elementos*



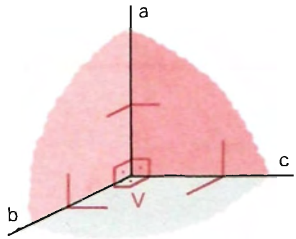
V é o vértice;

V_a, V_b, V_c são as arestas;

$\widehat{aVB}$, $\widehat{aVc}$ e $\widehat{bVc}$ ou $\widehat{ab}$, $\widehat{ac}$ e $\widehat{bc}$ são as faces ou ângulos de face.

$di(a)$, $di(b)$, $di(c)$ são os *diedros* do triedro; cada um deles é determinado por duas faces do triedro.

O triângulo ABC com um único vértice em cada aresta é uma secção do triedro.



Um triedro notável é aquele cujas faces são ângulos retos e cujos diedros são diedros retos. Esse triedro é chamado do *triedro tri-retângulo* (ou triedro tri-retangular).

II. Relações entre as faces

91. *Teorema*

Em todo triedro, qualquer face é menor que a soma das outras duas.

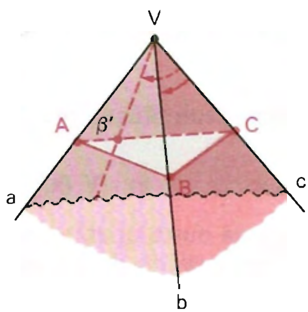
Demonstração

Supondo que $\widehat{ac}$ é a maior face do triedro $V(a, b, c)$, vamos provar que

$$\widehat{ac} < \widehat{ab} + \widehat{bc}. \quad \text{(tese)}$$

Para isso, construímos em $\widehat{ac}$ um ângulo $\widehat{b'c}$ tal que

$$\widehat{b'c} \equiv \widehat{bc}. \quad (1)$$



Tomando-se um ponto B em b e um ponto B' em b', tais que $\overline{VB} \equiv \overline{VB'}$, e considerando uma secção ABC, como indica a figura, temos:

1º) Da congruência dos triângulos $B'VC$ e BVC, vem que $\overline{B'C} \equiv \overline{BC}$;

2º) No triângulo ABC,

$\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC} \implies \overline{AB'} + \overline{B'C} < \overline{AB} + \overline{BC} \implies \overline{AB'} < \overline{AB}$.

De $\overline{AB'} < \overline{AB}$ decorre, considerando os triângulos $B'VA$ e BVA, que

$$\widehat{ab'} < \widehat{ab}. \quad (2)$$

Somando-se as relações (2) e (1), temos:

$\widehat{ab'} + \widehat{b'c} < \widehat{ab} + \widehat{bc} \implies \widehat{ac} < \widehat{ab} + \widehat{bc}$.

Sendo a maior face menor que a soma das outras duas, concluímos que *qualquer face* de um triedro é menor que a soma das outras duas.

92. Nota

Se f_1, f_2 e f_3 são as medidas das faces de um triedro, temos:

$$f_1 < f_2 + f_3. \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} f_2 < f_1 + f_3 \iff f_2 - f_3 < f_1 \\ f_3 < f_1 + f_2 \iff f_3 - f_2 < f_1 \end{array}\right\} \iff |f_2 - f_3| < f_1 \quad (2)$$

De (1) e (2) vem: $\boxed{|f_2 - f_3| < f_1 < f_2 + f_3}$

93. Teorema

> A soma das medidas em graus das faces de um triedro qualquer é menor que $360°$.

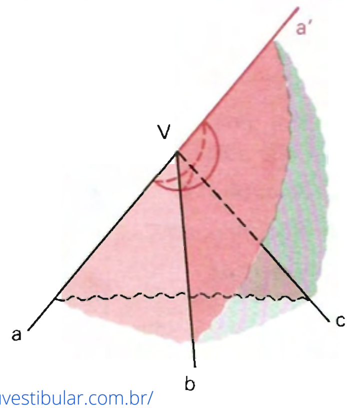
Demonstração

Sendo $\widehat{ab}$, $\widehat{ac}$ e $\widehat{bc}$ as medidas das faces de um triedro $V(a, b, c)$, provemos que:

$$\widehat{ab} + \widehat{ac} + \widehat{bc} < 360°. \quad \text{(tese)}$$

Para isso, consideremos a semi-reta Va' oposta a Va; observemos que $V(a', b, c)$ é um triedro e

$$\widehat{bc} < \widehat{ba'} + \widehat{ca'}. \quad (1)$$



Os ângulos $\widehat{ab}$ e $\widehat{ba'}$ são adjacentes e suplementares, o mesmo ocorrendo com $\widehat{ac}$ e $\widehat{ca'}$.

Então:

$$\left.\begin{matrix} \widehat{ab} + \widehat{ba'} = 180^\circ \\ \widehat{ac} + \widehat{ca'} = 180^\circ \end{matrix}\right\} \overset{+}{\Longrightarrow} \widehat{ab} + \widehat{ac} + \underbrace{\widehat{ba'} + \widehat{ca'}}_{(1)} = 360^\circ \Longrightarrow \widehat{ab} + \widehat{ac} + \underbrace{\widehat{bc}}_{(1)} < 360^\circ$$

94. *Resumo*

1) Em qualquer triedro:

Cada face é menor que a soma das outras duas e a soma das medidas (em graus) das faces é menor que *360°*.

2) Uma condição necessária e suficiente para que f_1, f_2 e f_3 sejam medidas (em graus) das faces de um triedro é:

$0^\circ < f_1 < 180^\circ \quad , \quad 0^\circ < f_2 < 180^\circ \quad , \quad 0^\circ < f_3 < 180^\circ$

$f_1 + f_2 + f_3 < 360^\circ$ e $|f_2 - f_3| < f_1 < f_2 + f_3$

EXERCÍCIOS

148. Existem triedros cujas faces medem respectivamente:

a) 40°, 50°, 90°
b) 90°, 90°, 90°
c) 200°, 100°, 80°
d) 150°, 140°, 130°
e) 3°, 5°, 7°

Solução

a) Não, pois, sendo $|f_2 - f_3| < f_1 < f_2 + f_3$, temos
$|50^\circ - 40^\circ| < 90^\circ < 50^\circ + 40^\circ$ (que é falso).

b) Sim, pois
$|90^\circ - 90^\circ| < 90^\circ < 90^\circ + 90^\circ$; $90^\circ + 90^\circ + 90^\circ < 360^\circ$; $0^\circ < 90^\circ < 180^\circ$.

c) Não, pois $0^\circ < 200^\circ < 180^\circ$ (que é falso).

d) Não, pois $150^\circ + 140^\circ + 130^\circ < 360^\circ$ (que é falso).

e) Sim, pois
$|7^\circ - 3^\circ| < 5^\circ < 7^\circ + 3^\circ$; $3^\circ + 5^\circ + 7^\circ < 360^\circ$; $0^\circ < 3^\circ < 180^\circ$
$0^\circ < 5^\circ < 180^\circ$; $0^\circ < 7^\circ < 180^\circ$.

149. Duas faces de um triedro medem respectivamente *100°* e *135°*. Determine o intervalo de variação da terceira face.

Solução

Sendo x a medida da terceira face, temos:

$0° < x < 180°$ (1) $\qquad 100° + 135° + x < 360° \Longrightarrow x < 125°$ (2)

$|135° - 100°| < x < 135° + 100° \Longrightarrow 35° < x < 235°$ (3)

((1), (2), (3)) $\Longrightarrow 35° < x < 125°$

150. Num triedro duas faces medem respectivamente *110°* e *140°*. Determine o intervalo de variação da medida da terceira face.

151. Determine o intervalo de variação de x, sabendo que as faces de um triedro medem $f_1 = x$, $f_2 = 2x - 60°$, $f_3 = 30°$.

152. Se um triedro tem suas faces iguais, entre que valores poderá estar compreendida cada uma de suas faces?

153. Prove que pelo menos uma face de um triedro tem medida menor que *120°*.

Solução

Se $f_1 > 120°$, $f_2 > 120°$ e $f_3 > 120°$, então $f_1 + f_2 + f_3 > 360°$ (absurdo).

154. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Existe triedro cujas faces medem respectivamente *40°*, *90°* e *50°*.
b) Existe triedro com as faces medindo respectivamente *70°*, *90°* e *150°*.
c) Existe triedro com as três faces medindo *120°* cada uma.
d) Se num triedro duas faces medem respectivamente *150°* e *120°*, então a terceira face é obrigatoriamente a menor.
e) Se dois triedros são congruentes, então eles são opostos pelo vértice.
f) Três semi-retas de mesma origem determinam um triedro.
g) Num triedro tri-retângulo cada aresta é perpendicular ao plano da face oposta.

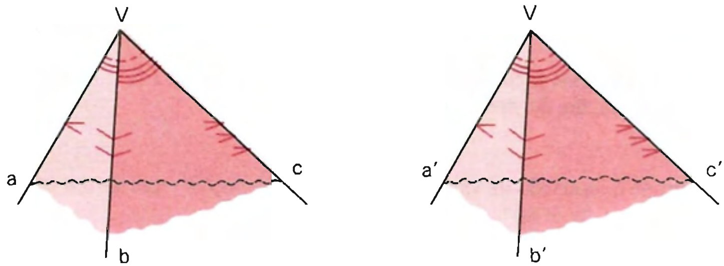
155. Três retas, r, s e t, coplanares e incidentes num ponto V, quantos triedros determinam?

III. Congruência de triedros

95. *Definição*

Um triedro é congruente a outro se, e somente se, é possível estabelecer uma correspondência entre suas arestas e as do outro, de modo que:

seus diedros são ordenadamente congruentes aos diedros do outro e suas faces são ordenadamente congruentes às faces do outro.



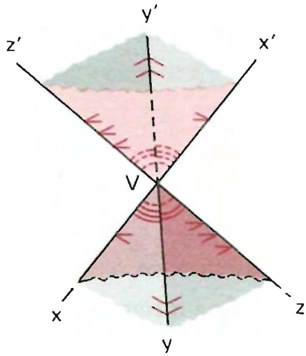
$$V(a, b, c) \equiv V(a', b', c') \iff \begin{cases} \widehat{ab} \equiv \widehat{a'b'},\ \widehat{bc} \equiv \widehat{b'c'},\ \widehat{ca} \equiv \widehat{c'a'} \\ di(a) \equiv di(a'),\ di(b) \equiv di(b'),\ di(c) \equiv di(c') \end{cases}$$

Por exemplo, dois diedros *opostos pelo vértice*, como $V(x, y, z)$ e $V(x', y', z')$ da figura ao lado, são congruentes, pois:

$\widehat{xy} \equiv \widehat{x'y'}$, $\widehat{xz} \equiv \widehat{x'z'}$, $\widehat{yz} \equiv \widehat{y'z'}$

e

$di(x) \equiv di(x')$, $di(y) \equiv di(y')$, $di(z) \equiv di(z')$.



96. *Tipos de congruência*

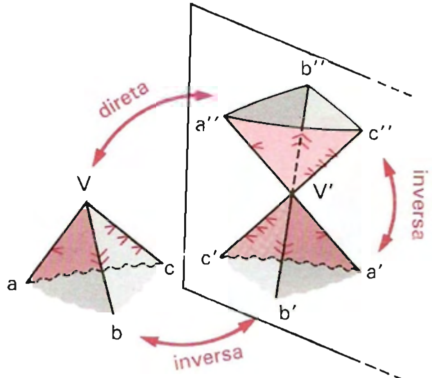
Existem dois tipos de congruência entre triedros.

1º tipo: *Congruência direta* — "quando os triedros podem ser superpostos por movimento de rotação e translação".

2º tipo: *Congruência inversa* — "quando os triedros são congruentes (satisfazem a definição), mas não são superponíveis".

Exemplos: Dois triedros opostos pelo vértice (ou simétricos em relação a um ponto) são *inversamente congruentes*.

Dois triedros simétricos em relação a um plano (um é imagem especular do outro) são *inversamente congruentes*.



$V(a, b, c)$ e $V'(a', b', c')$ inversamente congruentes
$V'(a', b', c')$ e $V'(a'', b'', c'')$ inversamente congruentes
$V(a, b, c)$ e $V'(a'', b'', c'')$ diretamente congruentes

Observação

Para descobrir qual o tipo de congruência entre os triedros $V(a, b, c)$ e $V'(a', b', c')$, consideram-se dois "observadores" identificados com as arestas correspondentes Va e $V'a'$, com as "cabeças" voltadas para os vértices e "olhando para dentro" dos triedros.

a) Se Vb está à direita (ou à esquerda) do primeiro observador e $V'b'$ está à direita (ou à esquerda) do segundo, a congruência é direta.

b) Se Vb está à direita (ou à esquerda) do primeiro e $V'b'$ está à esquerda (ou à direita) do segundo, a congruência é inversa.

IV. Triedros polares ou suplementares

97. *Definição*

Um triedro é polar de outro se, e somente se:

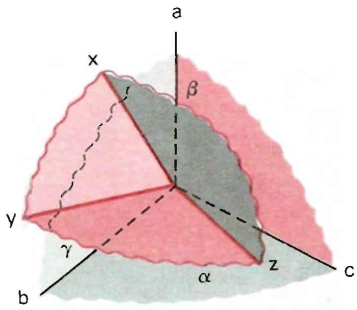
1º) tem mesmo vértice do outro,

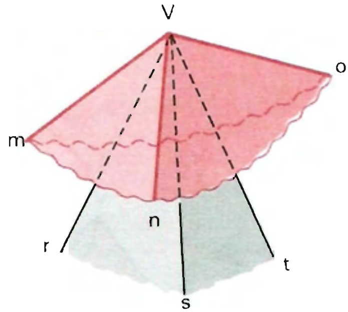
2º) suas arestas são respectivamente perpendiculares aos planos das faces do outro e

3º) formam ângulos agudos com as arestas correspondentes do outro.

Assim, $V(x, y, z)$ é polar de $V(a, b, c)$ se, e somente se:

Vx, Vy, Vz são respectivamente perpendiculares aos planos (b, c), (a, c), (a, b), e $\widehat{ax}$, $\widehat{by}$ e $\widehat{cz}$ são agudos.





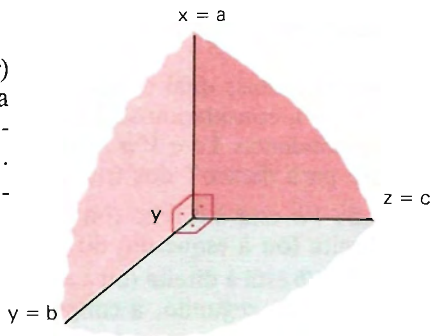
$V(m, n, o)$ é polar de $V(r, s, t)$ se, e somente se:

Vm, Vn, Vo são respectivamente perpendiculares aos planos (s, t), (r, t), (r, s), e $\widehat{mr}$, $\widehat{ns}$, $\widehat{ot}$ são agudos.

98. Nota

Notemos que, se o triedro $V(a, b, c)$ é *tri-retângulo*, então, pela unicidade da perpendicular a um plano por um ponto, ele coincide com seu polar $V(x, y, z)$.

O triedro tri-retângulo é autopolar.



99. Propriedade

> Se um triedro $V(x, y, z)$ é polar do triedro $V(a, b, c)$, então esse triedro $V(a, b, c)$ é polar do primeiro $V(x, y, z)$.

Hipótese		*Tese*
V(x, y, z) é polar de V(a, b, c)	$\Longrightarrow$	V(a, b, c) é polar de V(x, y, z)

Demonstração

$$\text{Hip.} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Vx \perp (b,\ c) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Vx \perp Vb \\ Vx \perp Vc \end{array}\right. \\ Vy \perp (a,\ c) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Vy \perp Va \\ Vy \perp Vc \end{array}\right. \\ Vz \perp (a,\ b) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Vz \perp Va \\ Vz \perp Vb \end{array}\right. \\ (\widehat{xa},\ \widehat{xb} \text{ e } \widehat{xc} \text{ são agudos}) \implies (\widehat{ax},\ \widehat{by} \text{ e } \widehat{cz} \text{ são agudos}) \end{array}\right. \begin{array}{l} \Rightarrow Va \perp (y,\ z) \\ \Rightarrow Vb \perp (x,\ z) \\ \Rightarrow Vc \perp (x,\ y) \end{array} \Bigg\} \Rightarrow \text{Tese}$$

100. *Propriedade fundamental de triedros polares*

Veremos a seguir três itens que caracterizam os triedros polares: primeiro um *lema* (teorema auxiliar) sobre diedros, depois um *teorema*, que é a propriedade em si, e, por fim, as conseqüências de aplicações práticas.

101. *Lema*

(Antes do enunciado, veja a primeira das figuras de triedros polares, notando β, γ, y, z, a e V.)

"Se por um ponto V da aresta a de um diedro $(\beta\gamma)$ conduzimos as semi-retas:

Vy, perpendicular a β, situada no semi-espaço que contém γ e tem origem no plano de β, e

Vz, perpendicular a γ, situada no semi-espaço que contém β e tem origem no plano de γ,

então o ângulo $\widehat{yz}$ obtido é suplemento da secção reta do diedro $(\beta\gamma) = di(a)$."

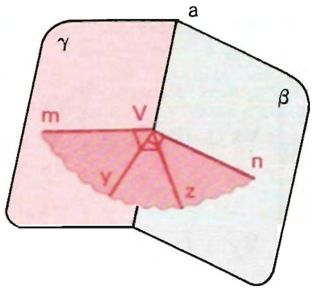
Demonstração

Vamos demonstrar para o caso em que o diedro é obtuso. Nos outros casos a demonstração é análoga.

1) $\left.\begin{array}{l} Vy \perp \beta \implies Vy \perp a \\ Vz \perp \gamma \implies Vz \perp a \end{array}\right\} \implies$

$\implies a \perp (y,\ z) \implies \widehat{mn} = (y,\ z) \cap di(\beta\gamma)$

é secção normal do diedro $(\beta\gamma)$.



2) No plano de y, z, m e n, temos:

$$\left.\begin{array}{r} \widehat{my} + \widehat{yz} = \widehat{mz} = 1 \text{ reto} \\ \widehat{yz} + \widehat{zn} = \widehat{yn} = 1 \text{ reto} \end{array}\right\} \implies \widehat{yz} + \underbrace{\widehat{my} + \widehat{yz} + \widehat{zn}}_{} = 2 \text{ retos} \implies \widehat{yz} + \widehat{mn} = 2 \text{ retos}$$

Logo, o ângulo $\widehat{yz}$ é suplemento da secção normal $\widehat{mn}$ do diedro $\beta\gamma$.

102. *Teorema*

"Se dois triedros são polares, cada face de um é suplementar da secção reta do diedro oposto no polar."

Identificando os diedros com suas secções retas (notemos que a medida do diedro é a medida de sua secção reta), temos:

Hipótese / *Tese*

$$\left(\begin{array}{l} V(a,\ b,\ c) \text{ e } V(x,\ y,\ z) \\ \text{são polares} \end{array}\right) \left(\begin{array}{ll} \widehat{yz} + di(a) = 2r & \widehat{bc} + di(x) = 2r \\ \widehat{zx} + di(b) = 2r & \widehat{ac} + di(y) = 2r \\ \widehat{xy} + di(c) = 2r & \widehat{ab} + di(z) = 2r \end{array}\right)$$

Demonstração

A primeira expressão da tese $\widehat{yz} + di(a) = 2r$ é uma simples adaptação da expressão $\widehat{yz} + \widehat{mn} = 2$ *retos* provada no lema. Pode-se dizer que ela é o próprio lema.

As outras cinco expressões têm demonstrações análogas à primeira, bastando fazer as adaptações de letras.

103. Conseqüências

> 1ª) Se dois triedros são congruentes entre si, então seus polares também são congruentes entre si.

Hipótese *Tese*

$$\left(\begin{array}{l} V(x,\ y,\ z) \text{ e } V(a,\ b,\ c) \text{ são polares} \\ V'(x',\ y',\ z') \text{ e } V'(a',\ b',\ c') \text{ são polares} \\ V(a,\ b,\ c) \equiv V'(a',\ b',\ c') \end{array}\right) \implies V(x,\ y,\ z) \equiv V'(x',\ y',\ z')$$

Demonstração

Se $V(a,\ b,\ c) \equiv V'(a',\ b',\ c')$, concluímos seis congruências (pela definição), uma das quais é:

$$di(a) \equiv di(a').$$

Dessa congruência entre diedros podemos concluir uma congruência entre faces dos polares, como segue:

$$di(a) \equiv di(a') \implies 2r - di(a) \equiv 2r - di(a') \implies \widehat{yz} \equiv \widehat{y'z'}.$$

Ainda da congruência entre $V(a,\ b,\ c)$ e $V'(a',\ b',\ c')$, outra das congruências que concluímos é:

$$\widehat{bc} \equiv \widehat{b'c'}.$$

Dessa congruência entre faces podemos concluir uma congruência entre diedros dos polares, como segue:

$$\widehat{bc} \equiv \widehat{b'c'} \implies 2r - \widehat{bc} \equiv 2r - \widehat{b'c'} \implies di(x) \equiv di(x').$$

Assim, das seis congruências entre faces e diedros que saem de $V(a,\ b,\ c) \equiv V'(a',\ b',\ c')$, concluímos seis outras congruências entre diedros e faces de $V(x,\ y,\ z)$, e $V'(x',\ y',\ z')$. Logo, $V(x,\ y,\ z) \equiv V'(x',\ y',\ z')$.

> 2ª) Em qualquer triedro, a medida de um diedro (em graus) aumentada em *180°* supera a soma dos outros dois.

Demonstração

Sejam d_1, d_2 e d_3 as medidas (em graus) dos diedros de um triedro e f_1, f_2 e f_3 as medidas (em graus) das respectivas faces opostas no polar.

Das relações entre as faces temos $f_1 < f_2 + f_3$. Como $f_1 = 180^o - d_1$, $f_2 = 180^o - d_2$ e $f_3 = 180^o - d_3$, temos:

$$f_1 < f_2 + f_3 \Longrightarrow 180^o - d_1 < (180^o - d_2) + (180^o - d_3) \Longrightarrow d_2 + d_3 < 180^o + d_1.$$

Logo, $d_2 + d_3 < 180^o + d_1$.

Analogamente: $d_1 + d_3 < 180^o + d_2$

$d_1 + d_2 < 180^o + d_3$

> 3ª) A soma dos diedros de um triedro está compreendida entre *2* retos (*180°*) e *6* retos (*540°*).

$$2r < di(a) + di(b) + di(c) < 6r$$

Demonstração

Pela definição de triedro, cada diedro é menor que *2* retos, logo

$$di(a) + di(b) + di(c) < 6r.$$

Considerando as faces $\widehat{xy}$, $\widehat{xz}$ e $\widehat{yz}$ do polar, temos:

$$\widehat{xy} + \widehat{xz} + \widehat{yz} < 4r \Longrightarrow [2r - di(c)] + [2r - di(b)] + [2r - di(a)] < 4r \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow di(a) + di(b) + di(c) > 2r$$

104. *Nota*

Da relação

$|f_2 - f_3| < f_1 < f_2 + f_3$

entre as faces de um triedro sai a relação

$2r - |d_3 - d_2| > d_1 > (d_2 + d_3) - 2r$

entre os diedros de um triedro.

De fato, considerando f_1, f_2 e f_3 as faces do polar respectivamente opostas a d_1, d_2 e d_3, temos:

$|f_2 - f_3| < f_1 < f_2 + f_3$.

E, aplicando o teorema fundamental, vem:

$$|2r - d_2 - (2r - d_3)| < 2r - d_1 < 2r - d_2 + 2r - d_3 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow |2r - d_2 - 2r + d_3| < 2r - d_1 < 4r - (d_2 + d_3) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow |d_3 - d_2| < 2r - d_1 < 4r - (d_2 + d_3) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow -2r + |d_3 - d_2| < -d_1 < 2r - (d_2 + d_3) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow 2r - |d_3 - d_2| > d_1 > -2r + (d_2 + d_3)$$

EXERCÍCIOS

156. Pode haver triedro cujos diedros meçam $40°$, $120°$ e $15°$? Por quê?

Solução

Não, pois, sendo $d_1 = 40°$, $d_2 = 120°$ e $d_3 = 15°$ no polar, temos:
$f_1 = 140°$, $f_2 = 60°$ e $f_3 = 165°$ e $140° + 165° + 60° < 360°$ (que é falso).

157. Existem ângulos triedros cujos diedros medem respectivamente:

a) 90°, 90°, 90°
b) 60°, 60°, 60°
c) 200°, 300°, 100°
d) 120°, 200°, 15°
e) 125°, 165°, 195°
f) 175°, 99°, 94°
g) 100°, 57°, 43°
h) 110°, 100°, 70°

158. Podem os diedros de um triedro medir respectivamente $40°$, $50°$ e $60°$? Por quê?

159. Se um diedro de um triedro é reto, entre que valores deve estar compreendida a soma das medidas dos outros dois diedros?

160. Dois diedros de um triedro medem respectivamente $60°$ e $110°$. Dê o intervalo de variação da medida do terceiro diedro.

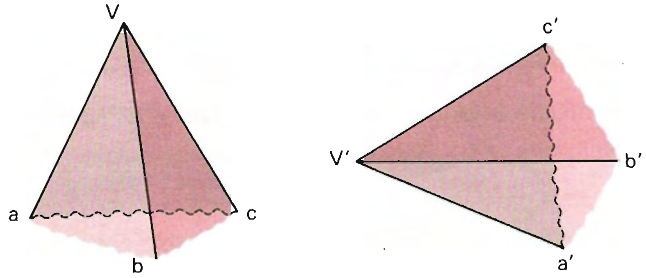
V. Critérios ou casos de congruência entre triedros

105. *Preliminar*

1º) A definição de congruência de triedros dá *todas* as condições fundamentais que devem ser satisfeitas para que dois triedros sejam congruentes. Essas condições (seis congruências: três entre faces e três entre diedros) são totais, porém existem *condições mínimas* para que dois triedros sejam congruentes. Estas condições mínimas são chamadas *casos* ou *critérios* de congruência.

Cada caso ou critério traduz uma condição necessária e suficiente para que dois triedros sejam congruentes.

2º) *Figura e elementos para as demonstrações*



Notação: T = V(a, b, c) T' = V'(a', b', c')
P polar de *T* *P'* polar de *T'*

106. 1º critério: FDF

> Se dois triedros têm, ordenadamente congruentes, duas faces e o diedro compreendido, então eles são congruentes.

Hipótese *Tese*

$$\left(\begin{array}{lr} \widehat{ab} \equiv \widehat{a'b'} & (1) \\ di(b) \equiv di(b') & (2) \\ \widehat{bc} \equiv \widehat{b'c'} & (3) \end{array}\right) \Longrightarrow T \equiv T'$$

Demonstração

As faces $\widehat{ac}$ e $\widehat{a'c'}$ são secções igualmente inclinadas ((1) e (3)) de diedros congruentes (2); então, $\widehat{ac} \equiv \widehat{a'c'}$ (4).

As faces $\widehat{bc}$ e $\widehat{b'c'}$ são secções igualmente inclinadas ((1) e (4)) e congruentes ((3)) dos diedros $di(a)$ e $di(a')$, respectivamente. Então, $di(a) \equiv di(a')$ (5).

As faces $\widehat{ab}$ e $\widehat{a'b'}$ são secções igualmente inclinadas ((3) e (4)) e congruentes (1) dos diedros $di(c)$ e $di(c')$, respectivamente. Então, $di(c) \equiv di(c')$ (6).

((1), (2), (3), (4), (5), (6)) $\Longrightarrow$ T ≡ T'

107. 2º critério: DFD

> "Se dois triedros têm, ordenadamente congruentes, dois diedros e a face compreendida, então eles são congruentes."

Demonstração

Se T e T' têm *DFD*, pelo teorema fundamental, os polares P e P' têm *FDF* e, pelo caso anterior, são congruentes. Ora, se P e P' são congruentes, seus polares T e T' também o são.

108. 3º critério: FFF

> "Se dois triedros têm, ordenadamente congruentes, as três faces, então eles são congruentes."

Hipótese *Tese*

$$\begin{pmatrix} \widehat{ab} \equiv \widehat{a'b'} & (1) \\ \widehat{bc} \equiv \widehat{b'c'} & (2) \\ \widehat{ac} \equiv \widehat{a'c'} & (3) \end{pmatrix} \Longrightarrow T \equiv T'$$

Demonstração

As faces $\widehat{ac}$ e $\widehat{a'c'}$ são secções igualmente inclinadas ((1) e (2)) e congruentes ((3)) dos diedros $di(b)$ e $di(b')$, respectivamente.

Então, $di(b) \equiv di(b')$ (4).

Analogamente: $di(c) \equiv di(a')$ (5)

$di(c) \equiv di(c')$ (6)

$((1), (2), (3), (4), (5), (6)) \Longrightarrow T \equiv T'$

109. 4º critério: DDD

> "Se dois triedros têm, ordenadamente congruentes, os três diedros, então eles são congruentes."

Demonstração

Se T e T' têm *DDD*, pelo teorema fundamental, os polares P e P' têm *FFF* e, pelo caso anterior, são congruentes. Ora, se P e P' são congruentes, seus polares T e T' também o são.

110. Nota

Para efeito de memorização é bom comparar os casos *FDF*, *DFD* e *FFF* com os casos de congruência entre triângulos *LAL*, *ALA* e *LLL*.

EXERCÍCIOS

161. Num triedro $V(a, b, c)$ as faces $\widehat{ac}$ e $\widehat{bc}$ medem cada uma $45°$ e formam um diedro reto. Determine a medida da face $\widehat{ab}$.

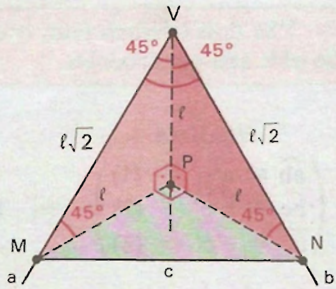
Solução

Por um ponto P da aresta c a uma distância ℓ de V conduzimos uma secção reta do diedro $di(c)$.

Sendo os triângulos VPN e VPM retângulos isósceles, temos:

$\overline{VM} \equiv \overline{VN} = \ell\sqrt{2}$.

Mas o $\triangle PMN$ também é retângulo isósceles e $\overline{MN} = \ell\sqrt{2}$.

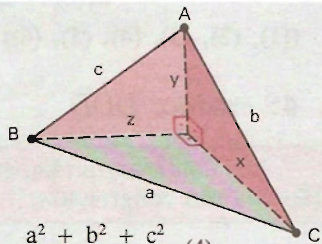


Portanto, $\overline{VM} \equiv \overline{VN} \equiv \overline{MN} \implies \triangle VMN$ equilátero, logo $\widehat{ab} = 60°$.

162. Um plano intercepta as arestas de um triedro tri-retângulo, determinando um triângulo de lados a, b e c. Determine as distâncias dos vértices desse triângulo ao vértice do triedro tri-retângulo.

Solução

Sendo $\triangle AVC$, $\triangle AVB$, $\triangle BVC$, retângulos, temos:



$$\left.\begin{array}{ll}(1) & x^2 + z^2 = a^2 \\ (2) & x^2 + y^2 = b^2 \\ (3) & y^2 + z^2 = c^2\end{array}\right\} \overset{+}{\implies} x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \quad (4)$$

$$(4) - (3) \implies x^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \implies x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}}$$

$$(4) - (1) \implies y^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} \implies y = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}}$$

$$(4) - (2) \implies z^2 = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} \implies z = \sqrt{\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}}$$

163. A que distância do vértice de um triedro tri-retângulo deve passar um plano para que a secção obtida seja um triângulo equilátero de lado ℓ?

164. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Em todo triedro tri-retângulo, cada aresta é perpendicular ao plano da face oposta.
b) Se dois diedros de um triedro medem respectivamente $40°$ e $70°$, o terceiro diedro pode medir $70°$.
c) Se um plano intercepta as arestas de um triedro tri-retângulo nos pontos A, B, C eqüidistantes de seu vértice V, a secção determinada é um triângulo equilátero.
d) Se um plano intercepta as arestas de um triedro nos pontos A, B, C eqüidistantes de seu vértice V, a secção determinada é um triângulo equilátero.
e) Cada face de um triedro é maior que a soma das outras duas.
f) Três retas r, s e t incidentes num ponto V determinam 8 triedros.
g) Três retas r, s e t não coplanares e incidentes num ponto V determinam 8 triedros.
h) Se dois triedros são opostos pelo vértice, então eles são congruentes.

165. Demonstre que, se um triedro tem um diedro reto, o cosseno da face oposta ao diedro reto é igual ao produto dos cossenos das faces que formam o diedro reto.

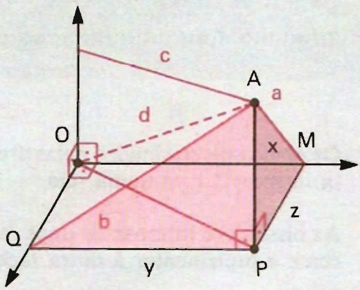
166. Seja um triedro de vértice V, cujos ângulos das faces medem $60°$ cada um. Considere os segmentos $\overline{VA} \equiv \overline{VB} \equiv \overline{VC} = 9\ cm$ sobre suas arestas. Determine o comprimento do segmento $\overline{AP}$, sendo P o pé da perpendicular à face oposta à aresta VA.

167. Um ponto A é interior a um triedro tri-retângulo. As distâncias desse ponto às arestas do triedro medem a, b e c. Calcule a distância $\overline{OA}$, sendo O o vértice do triedro.

Solução

Seja $\overline{OA} = d$.

Traçando $\overline{AP}$, perpendicular a uma face do triedro (vide figura), temos:



$$\left.\begin{array}{l} x^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 = b^2 \\ y^2 + z^2 = c^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

Sendo $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Longrightarrow d = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2}}$.

168. Dado um triedro $V(a, b, c)$, construa uma semi-reta Vx que forme ângulos congruentes com as arestas do triedro.

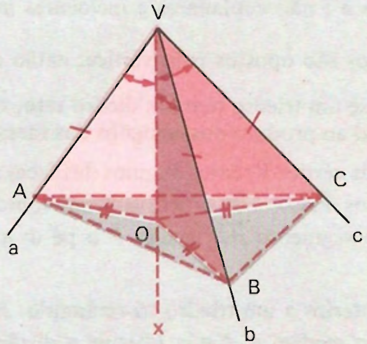
Solução

a) Construção:

1º) Construímos uma secção ABC, com $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$ e tal que $\overline{VA} \equiv \overline{VB} \equiv \overline{VC}$.

2º) No triângulo ABC, consideramos o ponto O, a igual distância dos vértices: $\overline{OA} \equiv \overline{OB} \equiv \overline{OC}$.

3º) Construímos a semi-reta Vx passando por O.



b) Prova:

$\triangle OVA \equiv \triangle OVB \equiv \triangle OVC \implies x\widehat{V}a \equiv x\widehat{V}b \equiv x\widehat{V}c$

Logo, Vx forma ângulos congruentes com Va, Vb e Vc.

169. Os planos determinados pelas arestas de um triedro e pela bissetriz da face oposta interceptam-se numa reta.

170. As bissetrizes internas de duas faces de um triedro e a bissetriz do ângulo adjacente e suplementar à outra face são coplanares.

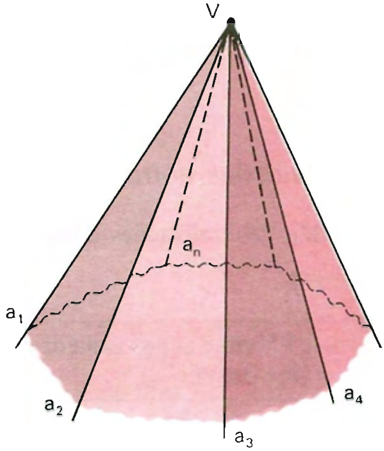
171. Sendo α, β e γ os planos conduzidos pelas arestas de um triedro e perpendiculares aos planos das faces opostas, prove que α, β e γ têm uma reta comum.

172. No plano de cada face de um triedro conduz-se pelo vértice a perpendicular à aresta oposta. Prove que as três retas assim obtidas são coplanares.

VI. Ângulos poliédricos convexos

111. *Conceito e elementos*

Dado um número finito n $(n \geqslant 3)$ de semi-retas Va_1, Va_2, Va_3, ..., Va_n, de mesma origem V, tais que o plano de duas consecutivas (Va_1 e Va_2, Va_2 e Va_3, ..., Va_n e Va_1) deixa as demais num mesmo semi-espaço, consideremos n semi-espaços E_1, E_2, E_3, ..., E_n, cada um deles com origem no plano de duas semi-retas consecutivas e contendo as restantes.

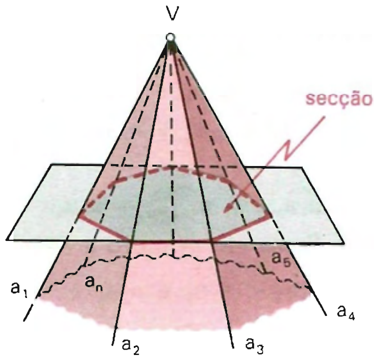


$$V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n$$

Ângulo poliédrico convexo determinado por Va_1, Va_2, Va_3, ..., Va_n é a interseção dos semi-espaços E_1, E_2, E_3, ..., E_n.

O ponto V é o vértice, as semi-retas Va_1, Va_2, Va_3, ..., Va_n são as n arestas e os ângulos $\widehat{a_1a_2}$, $\widehat{a_2a_3}$, ..., $\widehat{a_na_1}$ são as *n faces* do ângulo poliédrico. Ele também possui *n diedros*, cada um deles determinado por duas faces consecutivas.

Superfície de um ângulo poliédrico é a reunião de suas faces.



112. *Secção* é um polígono plano com um único vértice em cada aresta.

113. Notas

1º) O ângulo poliédrico convexo acima definido pode assumir outros nomes: *pirâmide ilimitada* ou *limitada* ou *ângulo sólido*.

2º) O triedro é um ângulo poliédrico convexo de *3* arestas.

114. Relações entre as faces

São generalizações das duas propriedades válidas para triedros:

1ª)

> "Num ângulo poliédrico convexo, qualquer face é menor que a soma das demais".

Hipótese		*Tese*
($\widehat{a_1a_2}$ é a maior face)	$\Longrightarrow$	$(\widehat{a_1a_2} < \widehat{a_2a_3} + \ldots + \widehat{a_1a_n})$

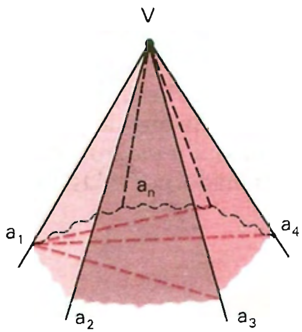
Demonstração

Os planos (a_1, a_3), (a_1, a_4), ..., (a_1, a_{n-1}) dividem o ângulo poliédrico em $(n - 2)$ triedros. Aplicando a relação entre faces a cada um deles, vem:

$$\widehat{a_1a_2} < \widehat{a_2a_3} + \widehat{a_1a_3}$$
$$\widehat{a_1a_3} < \widehat{a_3a_4} + \widehat{a_1a_4}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\widehat{a_1a_{n-1}} < \widehat{a_{n-1}a_n} + \widehat{a_1a_n}$$

Somando membro a membro:

$$\widehat{a_1a_2} < \widehat{a_2a_3} + \widehat{a_3a_4} + \ldots + \widehat{a_1a_n}$$



2ª)

> "Num ângulo poliédrico convexo, a soma das faces é menor que quatro ângulos retos".

Hipótese *Tese*

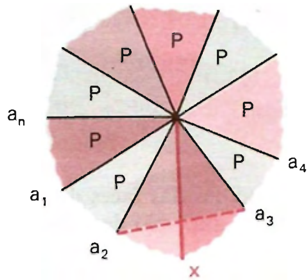
$$(\widehat{a_1 a_2} + \widehat{a_2 a_3} + \ldots + \widehat{a_n a_1} = S_n) \implies S_n < 4r$$

Demonstração

Os planos (a_1, a_2) e (a_3, a_4) têm a reta x comum.

Consideremos:

O ângulo poliédrico convexo $V(a_1, x, a_4, \ldots, a_n)$, cujas $(n - 1)$ faces somam $S_{(n-1)}$.



O triedro $V(a_2, x, a_3)$, em que temos:

$$\widehat{a_2 a_3} < \widehat{a_2 x} + \widehat{x a_3} \quad (1)$$

e ainda a soma:

$$\widehat{a_1 a_2} + \widehat{a_3 a_4} + \widehat{a_4 a_5} + \ldots + \widehat{a_n a_1} = S_p.$$

Com isso temos:

$$S_n = S_p + \widehat{a_2 a_3}$$

$$S_{n-1} = S_p + \widehat{a_2 x} + \widehat{x a_3}$$

e, em vista de (1), vem:

$$S_n < S_{n-1}.$$

Repetindo-se o processo, vem:

$$S_{n-1} < S_{n-2} < \ldots < S_3.$$

Então: $S_n < S_3$ e, como $S_3 < 4r$, conclui-se que: $S_n < 4r$.

115. *Congruência*

Dois ângulos poliédricos são congruentes quando é possível estabelecer uma correspondência entre as arestas de um e as do outro, de modo que as faces e os diedros correspondentes sejam ordenadamente congruentes.

116. *Ângulo poliédrico regular*

Um ângulo poliédrico convexo é regular se, e somente se, as faces são todas congruentes entre si.

EXERCÍCIOS

173 As faces de um ângulo poliédrico convexo medem respectivamente *10°*, *20°*, *30°*, *40°* e x. Dê o intervalo de variação de x.

Solução

$$\left.\begin{array}{l} x < 10° + 20° + 30° + 40° \implies x < 100° \\ 10° + 20° + 30° + 40° + x < 360° \implies x < 260° \end{array}\right\} \implies x < 100°$$

174. As medidas das faces de um ângulo tetraédrico convexo são *120°*, *140°*, *90°* e x. Dê o intervalo de variação de x.

175. Qual é o intervalo de variação de x para que *20°*, *30°*, *120°* e x sejam as medidas das faces de um ângulo poliédrico convexo?

176. As faces de um ângulo heptaédrico convexo medem respectivamente *10°*, *20°*, *30°*, *40°*, *50°*, x e *160°*. Entre que valores x pode variar?

177. Existem ângulos poliédricos convexos cujas faces medem, respectivamente:

a) 40°, 60°, 30°, 150°
b) 100°, 120°, 130°, 70°
c) 4°, 5°, 6°, 7°, 8°
d) 60°, 60°, 60°, 60°, 60°
e) 108°, 108°, 108°

178. Quantos tipos de ângulos poliédricos convexos podemos formar:

a) com todas as faces iguais a 60°
b) com todas as faces iguais a 90°
c) com todas as faces iguais a 120°

179. Qual é o número máximo de arestas de um ângulo poliédrico convexo cujas faces são todas de *70°*?

CAPÍTULO VII

Poliedros Convexos

I. Poliedros convexos

117. *Superfície poliédrica limitada convexa*

Superfície poliédrica limitada convexa é a reunião de um número finito de polígonos planos e convexos (ou regiões poligonais convexas), tais que:

a) dois polígonos não estão num mesmo plano;

b) cada lado de polígono não está em mais que dois polígonos;

c) havendo lados de polígonos que estão em um só polígono, eles devem formar uma única poligonal fechada, plana ou não, chamada contorno;

d) o plano de cada polígono deixa os demais num mesmo semi-espaço (condição de convexidade).

As superfícies poliédricas limitadas convexas que têm contorno são chamadas *abertas*. As que não têm contorno são chamadas *fechadas*.

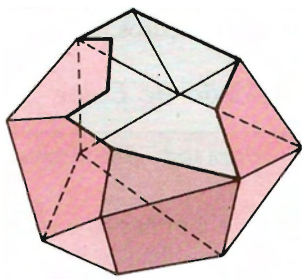
Elementos: uma superfície poliédrica limitada convexa tem:

faces: são os polígonos;

arestas: são os lados dos polígonos;

vértices: são os vértices dos polígonos;

ângulos: são os ângulos dos polígonos.



118. Nota

Uma superfície poliédrica limitada convexa aberta ou fechada não é uma região convexa.

119. Poliedro convexo

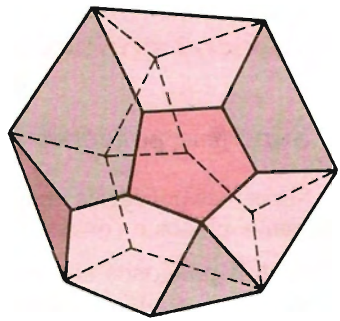
Consideremos um número finito n $(n \geqslant 4)$ de polígonos planos convexos (ou regiões poligonais convexas) tais que:

a) dois polígonos não estão num mesmo plano;

b) cada lado de polígono é comum a dois e somente dois polígonos;

c) o plano de cada polígono deixa os demais polígonos num mesmo semi-espaço.

Nessas condições, ficam determinados n semi-espaços, cada um dos quais tem origem no plano de um polígono e contém os restantes. A interseção desses semi-espaços é chamado *poliedro convexo.*



Um poliedro convexo possui: *faces*, que são os polígonos convexos; *arestas*, que são os lados dos polígonos e *vértices*, que são os vértices dos polígonos.

A reunião das faces é a *superfície* do poliedro.

120. Congruência

Dois poliedros são congruentes se, e somente se, é possível estabelecer uma correspondência entre seus elementos de modo que as faces e os ângulos poliédricos de um sejam ordenadamente congruentes às faces e ângulos poliédricos do outro.

Da congruência entre dois poliedros sai a congruência das faces, arestas, ângulos e diedros.

121. Relação de Euler

Para todo poliedro convexo, ou para sua superfície, vale a relação

$$V - A + F = 2$$

em que V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces do poliedro.

Demonstração

a) Por indução finita referente ao número de faces, vamos provar, em *caráter preliminar*, que, para uma superfície poliédrica limitada convexa *aberta*, vale a relação:

$$\boxed{V_a + A_a + F_a = 1}$$

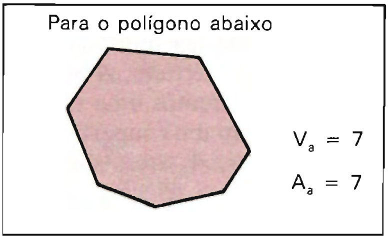
em que

V_a é o número de vértices,
A_a é o número de arestas e
F_a é o número de faces

da superfície poliédrica limitada aberta.

1) Para $F_a = 1$.

Neste caso a superfície se reduz a um polígono plano convexo de n lados e, então, $V_a = n$, $A_a = n$. Temos:



$$V_a - A_a + F_a = n - n + 1 = 1 \implies V_a - A_a + F_a = 1.$$

Logo, a relação está verificada para $F_a = 1$.

2) Admitindo que a relação vale para uma superfície de F' faces (que possui V' vértices e A' arestas), vamos provar que também vale para uma superfície de $F' + 1$ faces (que possui $F' + 1 = F_a$ faces, V_a vértices e A_a arestas).

Por hipótese, para a superfície de F' faces, A' arestas e V' vértices vale:

$$V' - A' + F' = 1.$$

Acrescentando a essa superfície (que é aberta) uma face de p arestas (lados) e considerando que q dessas arestas (lados) coincidem com arestas já existentes, obtemos uma nova superfície com F_a *faces*, A_a arestas e V_a vértices tais que:

$F_a = F' + 1$

$A_a = A' + p - q$ (q arestas coincidiram)

$V_a = V' + p - (q + 1)$ (q arestas coincidindo, $q + 1$ vértices coincidem)

Formando a expressão $V_a - A_a + F_a$ e substituindo os valores acima, vem:

$$V_a - A_a + F_a = V' + p - (q + 1) - (A' + p - q) + (F' + 1) =$$

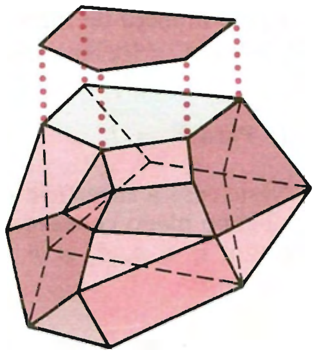
$$= V' + p - q - 1 - A' - p + q - F' + 1 = V' - A' + F'$$

Com $V_a - A_a + F_a = V' - A' + F'$ provamos que essa expressão não se altera se acrescentamos (ou retiramos) uma face da superfície.

Como, por hipótese, $V' - A' + F' = 1$, vem que

$$V_a - A_a + F_a = 1$$

o que prova a relação preliminar.



b) Tomemos a superfície de qualquer poliedro convexo ou qualquer superfície poliédrica limitada convexa fechada (com V vértices, A arestas e F faces) e dela retiremos uma face. Ficamos, então, com uma superfície aberta (com V_a vértices, A_a arestas e F_a faces) para a qual vale a relação

$$V_a - A_a + F_a = 1.$$

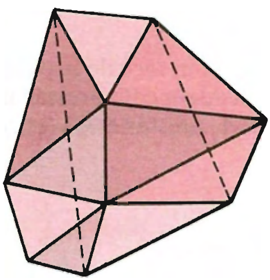
Como

$V_a = V$, $A_a = A$ e $F_a = F - 1$, vem $V - A + (F - 1) = 1$, ou seja:

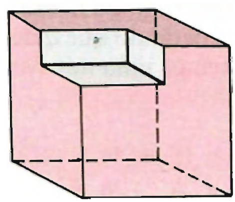
$$\boxed{V - A + F = 2}$$

Nota: O teorema de Euler está ligado a um conceito que engloba o de poliedro convexo, razão pela qual vale para este.

Exemplos



$V - A + F = 9 - 18 + 11 = 2$



$V - A + F = 14 - 21 + 9 = 2$

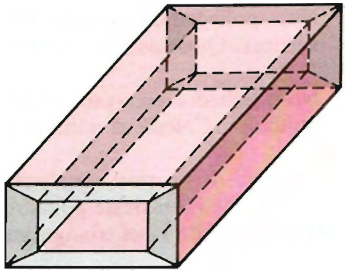
Veja ao lado a figura de um poliedro para o qual não vale a relação de Euler.

Note que ele possui:

V = 16, A = 32 e F = 16.

Então:

V − A + F = 16 − 32 + 16 = 0.



122. *Poliedro euleriano*

Os poliedros para os quais é válida a relação de Euler são chamados poliedros eulerianos.

> Todo poliedro convexo é euleriano, mas nem todo poliedro euleriano é convexo.

EXERCÍCIOS

180. Um poliedro convexo de onze faces tem seis faces triangulares e cinco faces quadrangulares. Calcule o número de arestas e de vértices do poliedro.

Solução

Número de arestas:
nas *6* faces triangulares temos *6* × *3* arestas e nas *5* faces quadrangulares *5* × *4* arestas.
Cada aresta é comum a duas faces; todas as arestas foram contadas *2* vezes. Então:

$2A = 6 \times 3 + 5 \times 4 \implies 2A = 38 \implies A = 19.$

Número de vértices:
com $F = 11$ e $A = 19$ na relação $V - A + F = 2$, temos:
$V - 19 + 11 = 2$, ou seja, $V = 10$.

181. Determine o número de vértices de um poliedro convexo que tem *3* faces triangulares, *1* face quadrangular, *1* pentagonal e *2* hexagonais.

182. Num poliedro convexo de *10* arestas, o número de faces é igual ao número de vértices. Quantas faces tem esse poliedro?

183. Num poliedro convexo o número de arestas excede o número de vértices em *6* unidades. Calcule o número de faces desse poliedro.

184. Um poliedro convexo apresenta faces quadrangulares e triangulares. Calcule o número de faces desse poliedro, sabendo que o número de arestas é o quádruplo do número de faces triangulares e o número de faces quadrangulares é igual a *5*.

185. Um poliedro convexo tem *11* vértices, o número de faces triangulares igual ao número de faces quadrangulares e uma face pentagonal. Calcule o número de faces desse poliedro.

186. Calcule o número de faces triangulares e o número de faces quadrangulares de um poliedro com *20* arestas e *10* vértices.

187. Um poliedro de sete vértices tem cinco ângulos tetraédricos e dois ângulos pentaédricos. Quantas arestas e quantas faces tem o poliedro?

Solução

Arestas: O número de arestas dos *5* ângulos tetraédricos é 5×4 e o número de arestas dos *2* pentaédricos é 2×5; notando que cada aresta foi contada duas vezes, pois é comum a dois ângulos poliédricos, temos:

$2A = 5 \times 4 + 2 \times 5 \implies 2A = 30 \implies A = 15.$

Faces: Com $V = 7$ e $A = 15$ em $V - A + F = 2$, vem $F = 10$.

188. Ache o número de faces de um poliedro convexo que possui *16* ângulos triedros.

189. Determine o número de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo formado por cinco triedros, sete ângulos tetraédricos, nove ângulos pentaédricos e oito ângulos hexaédricos.

190. Um poliedro convexo possui *1* ângulo pentaédrico, *10* ângulos tetraédricos, e os demais triedros. Sabendo que o poliedro tem: número de faces triangulares igual ao número de faces quadrangulares, *11* faces pentagonais, e no total *21* faces, calcule o número de vértices do poliedro convexo.

191. O "cubo-octaedro" possui seis faces quadradas e oito triangulares. Determine o número de faces, arestas e vértices desse sólido euleriano.

192. O tetraexaedro possui *4* faces triangulares e *6* faces hexagonais. Determine o número de faces, arestas e vértices desse sólido, sabendo que ele é euleriano.

193. Num poliedro convexo, *4* faces são quadriláteros e as outras triângulos. O número de arestas é o dobro do número de faces triangulares. Quantas são as faces?

194. Um poliedro convexo possui apenas faces triangulares e quadrangulares. Sabendo que os números de faces triangulares e quadrangulares são diretamente proporcionais aos números *2* e *3* e que o número de arestas é o dobro do número de vértices, calcule o número total de faces desse poliedro.

195. Um poliedro convexo possui, apenas, faces triangulares, quadrangulares e pentagonais. O número de faces triangulares excede o de faces pentagonais em duas unidades. Calcule o número de faces de cada tipo, sabendo que o poliedro tem *7* vértices.

196. Um poliedro convexo de *24* arestas é formado apenas por faces triangulares e quadrangulares. Seccionado por um plano convenientemente escolhido, dele se pode destacar um novo poliedro convexo, sem faces triangulares, com uma face quadrangular a mais e um vértice a menos que o poliedro primitivo. Calcule o número de faces do poliedro primitivo.

197. Ache o número de vértices de um poliedro convexo que tem a faces de ℓ lados, b faces de m lados e c faces de n lados. Discuta.

123. *Propriedade*

> A soma dos ângulos de todas as faces de um poliedro convexo é
> $$S = (V - 2) \cdot 4r$$
> em que V é o número de vértices e r é um ângulo reto.

Demonstração

V, A e F são, nessa ordem, os números de vértices, arestas e faces do poliedro. Sejam $n_1, n_2, n_3, \dots, n_F$ os números de lados das faces *1, 2, 3, ... F*, ordenadamente. A soma dos ângulos de uma face é $(n - 2) \cdot 2r$.

Para todas as faces, temos:

$$S = (n_1 - 2) \cdot 2r + (n_2 - 2) \cdot 2r + (n_3 - 2) \cdot 2r + \dots + (n_F - 2) \cdot 2r =$$
$$= n_1 \cdot 2r - 4r + n_2 \cdot 2r - 4r + n_3 \cdot 2r - 4r + \dots + n_F \cdot 2r - 4r =$$
$$= (n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_F) \cdot 2r - \underbrace{4r - 4r - \dots - 4r}_{F \text{ vezes}}$$

Sendo

$n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_F = 2A$

(pois cada aresta foi contada duas vezes em $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_F$), substituindo, vem:

$$S = 2A \cdot 2r - F \cdot 4r \implies S = (A - F) \cdot 4r. \quad (1)$$

Como vale a relação de Euler,

$$V - A + F = 2 \implies V - 2 = A - F. \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), temos:

$$\boxed{S = (V - 2) \cdot 4r}$$

II. Poliedros de Platão

124. *Definição*

Um poliedro é chamado poliedro de Platão se, e somente se, satisfaz as três seguintes condições:

a) todas as faces têm o mesmo número (n) de arestas,
b) todos os ângulos poliédricos têm o mesmo número (m) de arestas,
c) vale a relação de Euler ($V - A + F = 2$).

125. *Propriedade*

Existem cinco, e somente cinco, *classes* de poliedros de Platão.

Demonstração

Usando as condições que devem ser verificadas por um poliedro de Platão, temos:

a) cada uma das F faces tem n arestas ($n \geqslant 3$), e como cada aresta está em duas faces:

$$n \cdot F = 2A \implies F = \frac{2A}{n}. \quad (1)$$

b) cada um dos V ângulos poliédricos tem m arestas ($m \geqslant 3$), e como cada aresta contém dois vértices:

$$m \cdot V = 2A \implies V = \frac{2A}{m}. \quad (2)$$

c) $V - A + F = 2 \quad (3)$

Substituindo (1) e (2) em (3) e depois dividindo por $2A$, obtemos:

$$\frac{2A}{m} - A + \frac{2A}{n} = 2 \implies \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A} \qquad (4)$$

Sabemos que $n \geqslant 3$ e $m \geqslant 3$. Notemos, porém, que se m e n fossem simultaneamente maiores que 3 teríamos:

$$\left.\begin{aligned} m > 3 \Rightarrow m \geqslant 4 \Rightarrow \frac{1}{m} \leqslant \frac{1}{4} \\ n > 3 \Rightarrow n \geqslant 4 \Rightarrow \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leqslant 0$$

o que contraria a igualdade (4), pois A é um número positivo.

Concluímos então que, nos poliedros de Platão, $m = 3$ ou $n = 3$ (isto significa que um poliedro de Platão possui, obrigatoriamente, *triedro* ou *triângulo*):

1º) Para $m = 3$ (supondo que tem *triedro*).

Em (4) vem:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A} \implies \frac{1}{n} > \frac{1}{6} \implies n < 6.$$

m	n
3	3
3	4
3	5

Então, $n = 3$ ou $n = 4$ ou $n = 5$ (respectivamente faces triangulares ou quadrangulares ou pentagonais).

2º) Para $n = 3$ (supondo que tem *triângulo*).

Em (4):

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A} \implies \frac{1}{m} > \frac{1}{6} \implies m < 6.$$

m	n
3	3
4	3
5	3

Então, $m = 3$ ou $m = 4$ ou $m = 5$ (respectivamente ângulos triédricos ou tetraédricos ou pentaédricos).

Resumindo os resultados encontrados no 1º e no 2º, concluímos que os poliedros de Platão são determinados pelos pares (m, n) da tabela ao lado, sendo, portanto, cinco, e somente cinco, as classes de poliedros de Platão.

m	n
3	3
3	4
3	5
4	3
5	3

Conseqüência

Para saber o número de arestas A, o número de faces F e o número de vértices V de cada poliedro de Platão, basta substituir em (4) os valores de m e n encontrados e depois trabalhar com (1) e (2).

Exemplo

Uma das possibilidades encontradas para m e n foi $m = 3$ e $n = 5$.

Com esses valores em (4), temos:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1}{A} \implies \frac{1}{30} = \frac{1}{A} \implies A = 30.$$

Em (2): $V = \dfrac{2 \cdot 30}{3} \implies V = 20.$

Em (1): $F = \dfrac{2 \cdot 30}{5} \implies F = 12.$

Como é o número de faces que determina nome, o poliedro de nosso exemplo é *dodecaedro*.

Notemos que $m = 3$ significa ângulos *triédricos* (ou triedros) e $n = 5$, faces *pentagonais*.

126. *Nomes dos poliedros de Platão*

Procedendo como indicamos no problema acima, temos, em resumo:

m	n	A	V	F	nome
3	3	6	4	4	Tetraedro
3	4	12	8	6	Hexaedro
4	3	12	6	8	Octaedro
3	5	30	20	12	Dodecaedro
5	3	30	12	20	Icosaedro

III. Poliedros regulares

Um poliedro convexo é regular quando:

a) suas faces são polígonos regulares e congruentes,

b) seus ângulos poliédricos são congruentes.

127. *Propriedade*

Existem cinco, e somente cinco, *tipos* de poliedros regulares.

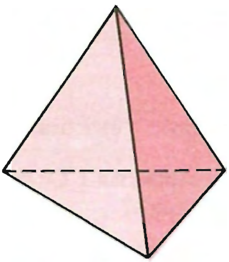
Demonstração

Usando as condições para um poliedro ser regular, temos:

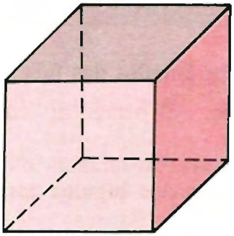
a) suas faces são polígonos regulares e congruentes, então todas têm o mesmo número de arestas;

b) seus ângulos poliédricos são congruentes, então todos têm o mesmo número de arestas.

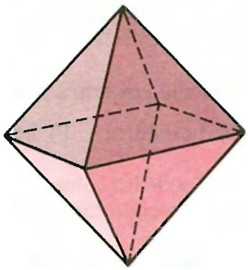
Por essas conclusões temos que os poliedros regulares são poliedros de Platão e portanto existem cinco e somente cinco tipos de poliedros regulares: *tetraedro regular*, *hexaedro regular*, *octaedro regular*, *dodecaedro regular* e *icosaedro regular*.



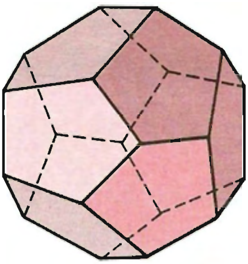
Tetraedro regular



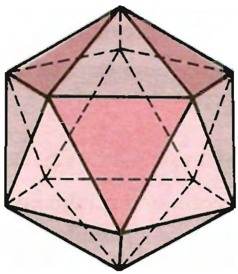
Hexaedro regular



Octaedro regular



Dodecaedro regular



Icosaedro regular

128. *Observação*

Todo poliedro regular é poliedro de Platão, mas nem todo poliedro de Platão é poliedro regular.

EXERCÍCIOS

198. Um poliedro convexo de *15* arestas tem somente faces quadrangulares e pentagonais. Quantas faces tem de cada tipo se a soma dos ângulos das faces é *32* ângulos retos?

Solução

$S = 32r \implies (V - 2) \cdot 4r = 32r \implies V = 10$
$(A = 15,\ V = 10,\ V - A + F = 2) \implies F = 7$
x faces quadrangulares e y pentagonais, então:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 4x + 5y = 30 \end{cases} \implies x = 5 \text{ e } y = 2$$

199. Calcule em graus a soma dos ângulos das faces de um:

a) tetraedro; b) hexaedro; c) octaedro; d) dodecaedro; e) icosaedro.

200. Um poliedro convexo de *28* arestas possui faces triangulares e heptagonais. Quantas tem de cada espécie, se a soma dos ângulos das faces é *64* retos?

201. A soma dos ângulos das faces de um poliedro convexo é *720°*. Calcule o número de faces, sabendo que é os *2/3* do número de arestas.

202. Primeira generalização das relações entre número de vértices, arestas e faces de um poliedro euleriano.

Solução

Seja um poliedro convexo em que:

F_3 representa o número de faces triangulares,
F_4 representa o número de faces quadrangulares,
F_5 representa o número de faces pentagonais,
F_6 representa o número de faces hexagonais,
$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

Então $F = F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + \ldots$ (1)
Sendo cada aresta comum a duas faces, teremos:
$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + 6F_6 + \ldots$ (2)

203. Um poliedro apresenta faces triangulares e quadrangulares. A soma dos ângulos das faces é igual a *2 160°*. Determine o número de faces de cada espécie desse poliedro, sabendo que ele tem *15* arestas.

204. Da superfície de um poliedro regular de faces pentagonais tiram-se as três faces adjacentes a um vértice comum. Calcule o número de arestas, faces e vértices da superfície poliédrica aberta que resta.

205. Demonstre que, em qualquer poliedro convexo, é par o número de faces que têm número ímpar de lados.

Solução

Tese $\{F_3 + F_5 + F_7 + \ldots$ é par

De fato, da relação (2) temos:

$$3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + 6F_6 + 7F_7 + \ldots = 2A \implies$$
$$\implies F_3 + F_5 + F_7 + \ldots = 2A - 2F_3 - 4F_4 - 4F_5 - 6F_6 - \ldots \implies$$
$$\implies F_3 + F_5 + F_7 + \ldots = 2(A - F_3 - 2F_4 - 2F_5 - 3F_6 - 3F_7 - \ldots)$$

o que prova a tese.

206. Segunda generalização das relações entre número de vértices, arestas e faces de um poliedro euleriano.

Solução

Seja um poliedro convexo em que:

V_3 representa o número de ângulos triédricos,
V_4 representa o número de ângulos tetraédricos,
V_5 representa o número de ângulos pentaédricos,
V_6 representa o número de ângulos hexaédricos,
⋮ ⋮ ⋮ ⋮

Então:

$$V = V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + \ldots \quad (3)$$

Se cada aresta une dois vértices, temos:

$$2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + 6V_6 + \ldots \quad (4)$$

207. Demonstre que, em qualquer poliedro convexo, é par o número de ângulos poliédricos que têm número ímpar de arestas.

208. Demonstre que em qualquer poliedro convexo vale a relação:

$$2F = 4 + V_3 + 2V_4 + 3V_5 + 4V_6 + 5V_7 + \ldots$$

209. Demonstre que em qualquer poliedro convexo vale a relação:
$2V = 4 + F_3 + 2F_4 + 3F_5 + 4F_6 + 6F_7 + \ldots$

Solução

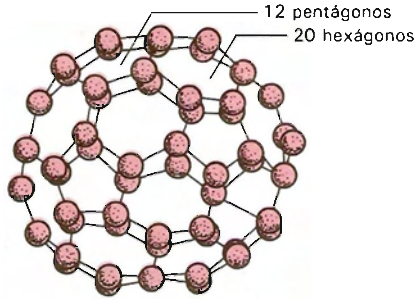
Tomando as relações (1) e (2) do exercício 204, a relação de Euler e eliminando *A* nessas relações, obtemos:
$2V = 4 + F_3 + 2F_4 + 3F_5 + 4F_6 + \ldots$

210. Em qualquer poliedro euleriano, a soma do número de faces triangulares com o número de triedros é superior ou igual a *8*.

211. Demonstre que os números *F*, *V*, *A*, das faces, vértices e arestas de um poliedro qualquer estão limitados por:

a) $A + 6 \leqslant 3F \leqslant 2A$ b) $A + 6 \leqslant 3V \leqslant 2A$

212. Numa molécula tridimensional de carbono, os átomos ocupam os vértices de um poliedro convexo com *12* faces pentagonais e *20* faces hexagonais regulares, como em uma bola de futebol.
Qual é o número de átomos de carbono na molécula? E o número de ligações entre esses átomos?



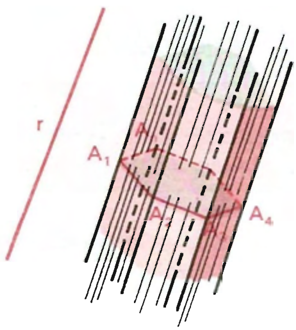
CAPÍTULO VIII

Prisma

I. Prisma ilimitado

129. *Definição*

Consideremos uma região poligonal convexa plana (polígono plano convexo) $A_1 A_2 \ldots A_n$ de n lados e uma reta r não paralela nem contida no plano da região (polígono). Chama-se *prisma ilimitado convexo* ou *prisma convexo indefinido* à reunião das retas paralelas a r e que passam pelos pontos da região poligonal dada.



Se a região poligonal (polígono) $A_1 A_2 \ldots A_n$ for côncava, o prisma ilimitado resultará côncavo.

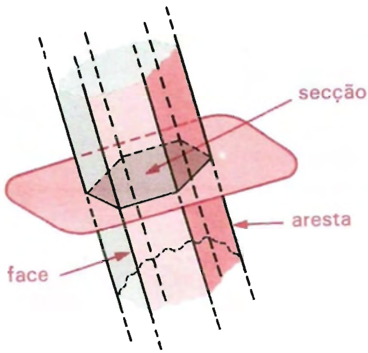
130. *Elementos*

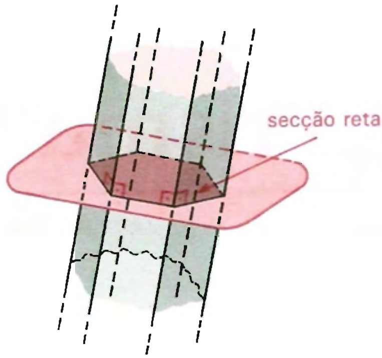
Um prisma ilimitado convexo possui: n arestas, n diedros e n faces (que são faixas de plano).

131. Secções

Secção é uma região poligonal plana (polígono plano) com um só vértice em cada aresta.

Secção reta ou *secção normal* é uma secção cujo plano é perpendicular às arestas.



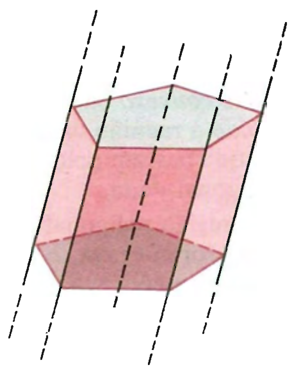


132. Superfície

A superfície de um prisma ilimitado convexo é a reunião das faces desse prisma. É chamada *superfície prismática convexa ilimitada* ou *indefinida*.

133. Propriedades

1ª) Secções paralelas de um prisma ilimitado são polígonos congruentes.



De fato, pelo paralelismo das arestas e pelo paralelismo dos planos de duas secções, podemos concluir que estas secções têm lados congruentes (lados opostos de paralelogramos) e ângulos congruentes (ângulos de lados respectivamente paralelos). Logo, as secções são congruentes.

2ª) A soma dos diedros de um prisma ilimitado convexo de n arestas é igual a $(n - 2) \cdot 2$ *retos*.

Demonstração

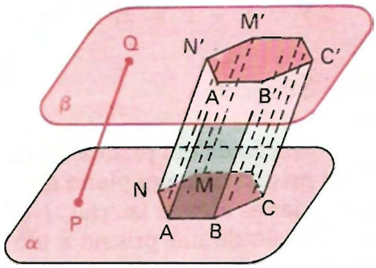
Sabemos que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo é igual a $(n - 2) \cdot 2$ *retos*.

Como a secção reta do prisma é um polígono convexo de n lados, e a medida de cada ângulo desse polígono é a medida do diedro correspondente, pois o plano do polígono determina secção reta no diedro, então a soma dos diedros é igual a $(n - 2) \cdot 2$ *retos*.

II. Prisma

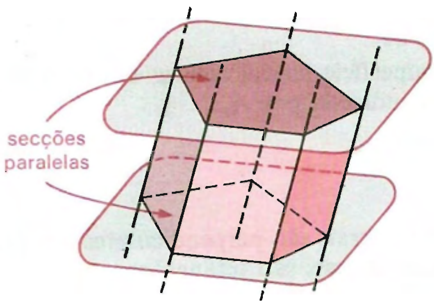
134. *Definição*

Consideremos um polígono convexo (região poligonal convexa) $ABCD \ldots MN$ situado num plano α e um segmento de reta $\overline{PQ}$, cuja reta suporte intercepta o plano α. Chama-se *prisma* (ou prisma convexo) à reunião de todos os segmentos congruentes e paralelos a $\overline{PQ}$, com uma extremidade nos pontos do polígono e situados num mesmo semi-espaço dos determinados por α.

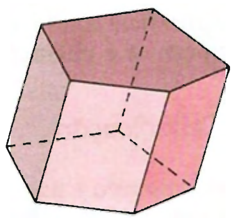


Podemos também definir o prisma como segue:

Prisma convexo limitado ou *prisma convexo definido* ou *prisma convexo* é a reunião da parte do prisma convexo ilimitado, compreendida entre os planos de duas secções paralelas e distintas, com essas secções.



Prisma ilimitado



Prisma

135. *Elementos*

O prisma possui:

2 bases congruentes (as secções citadas acima),

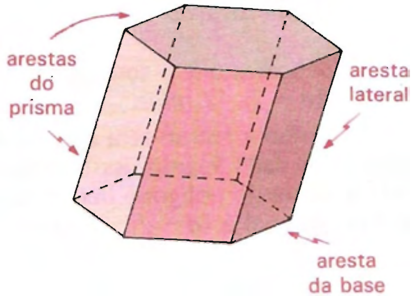
n faces laterais (paralelogramos),

($n + 2$) faces,

n arestas laterais,

3n arestas, *3n* diedros,

2n vértices e *2n* triedros.



Prisma (hexagonal)

136.

A *altura* de um prisma é a distância *h* entre os planos das bases.

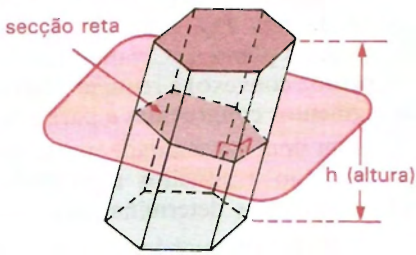
Devemos observar que para o prisma é válida a relação de Euler:

$$V - A + F = 2n - 3n + (n + 2) = 2 \implies V - A + F = 2.$$

137. *Secções*

Secção de um prisma é a interseção do prisma com um plano que intercepta todas as arestas laterais. Notemos que a secção de um prisma é um polígono com vértice em cada aresta lateral.

Secção reta ou *secção normal* é uma secção cujo plano é perpendicular às arestas laterais.



138. *Superfícies*

Superfície lateral é a reunião das faces laterais. A área desta superfície é chamada área lateral e indicada por A_ℓ.

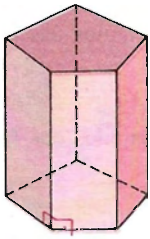
Superfície total é a reunião da superfície lateral com as bases. A área desta superfície é chamada área total e indicada por A_t.

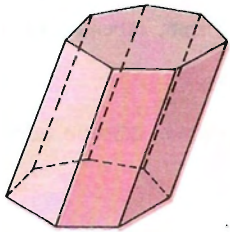
139. *Classificação*

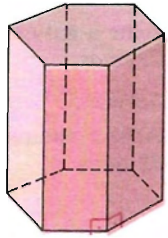
Prisma reto é aquele cujas arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases. Num prisma reto as faces laterais são retângulos.

Prisma oblíquo é aquele cujas arestas são oblíquas aos planos das bases.

Prisma regular é um prisma reto cujas bases são polígonos regulares.


Prisma reto
(pentagonal)


Prisma oblíquo
(heptagonal)


Prisma regular
(hexagonal)

140. *Natureza de um prisma*

Um prisma será triangular, quadrangular, pentagonal, etc., conforme a *base* for um triângulo, um quadrilátero, um pentágono, etc.

EXERCÍCIOS

213. Ache a natureza de um prisma, sabendo que ele possui:

a) 7 faces; b) 8 faces; c) 15 arestas; d) 24 arestas.

214. Prove que a soma dos ângulos de todas as faces de um prisma de n faces laterais vale $S = (n - 1) \cdot 8r$, em que $r = 90°$.

1ª solução

Se o prisma tem n faces laterais, sua base é um polígono convexo de n lados, e a soma dos ângulos internos desse polígono é dada por $(n - 2) \cdot 2r$.
Cada face lateral é um paralelogramo e a soma dos ângulos internos de cada uma é $4r$.
Como o prisma possui 2 bases e n faces laterais, vem:
$S = 2 \cdot (n - 2) \cdot 2r + n \cdot 4r \Rightarrow S = n \cdot 4r - 8r + n \cdot 4r \Rightarrow S = n \cdot 8r - 8r \Rightarrow$
$\Rightarrow S = (n - 1) \cdot 8r.$

2ª solução

O prisma possui $2n$ vértices. Sendo a soma dos ângulos das faces dada por $S = (V - 2) \cdot 4r$, temos:

$$S = (2n - 2) \cdot 4r \implies S = (n - 1) \cdot 8r.$$

215. Ache a natureza de um prisma, sabendo que a soma dos ângulos das faces é *72 retos*.

216. Ache a natureza de um prisma, sabendo que a soma dos ângulos das faces é *32 retos*.

217. Calcule a soma dos ângulos internos de todas as faces de um prisma oblíquo, sabendo que o prisma tem *8 faces*.

218. A soma dos ângulos internos de todas as faces de um prisma é igual a *96r*. Calcule a soma dos ângulos internos de uma de suas bases.

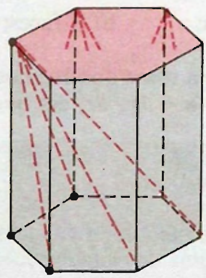
219. Quantas diagonais possui um prisma cuja base é um polígono convexo de n lados?

Solução

Observemos que, quando nos referimos às diagonais de um prisma, não levamos em consideração as diagonais das bases e das faces laterais do prisma. Seja então um prisma cuja base é um polígono convexo de n lados.

Unindo um vértice de uma das bases aos vértices da outra base, temos $(n - 3)$ diagonais (eliminamos duas diagonais de face e uma aresta).

Como existem n vértices na base tomada, o número total de diagonais do prisma é $n \cdot (n - 3)$.



220. Prove que o número de diagonais de um prisma é igual ao dobro do número de diagonais de uma de suas bases.

221. Calcule a soma dos ângulos internos de todas as faces de um prisma que possui *40* diagonais.

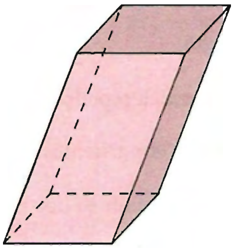
222. Calcule a soma dos ângulos diedros de um prisma que tem por base um polígono convexo de n lados.

III. Paralelepípedos e romboedros

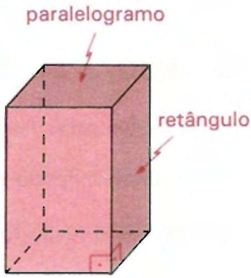
141. *Paralelepípedo* é um prisma cujas bases são paralelogramos. A superfície total de um paralelepípedo é a reunião de seis paralelogramos.

142. *Paralelepípedo reto* é um prisma reto cujas bases são paralelogramos. A superfície total de um paralelepípedo reto é a reunião de quatro retângulos (faces laterais) com dois paralelogramos (bases).

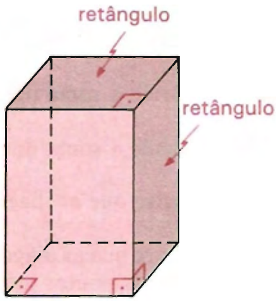
143. *Paralelepípedo reto-retângulo* ou *paralelepípedo retângulo* ou *ortoedro* é um prisma reto cujas bases são retângulos. A superfície total de um paralelepípedo retângulo é a reunião de seis retângulos.



Paralelepípedo (oblíquo)



Paralelepípedo reto



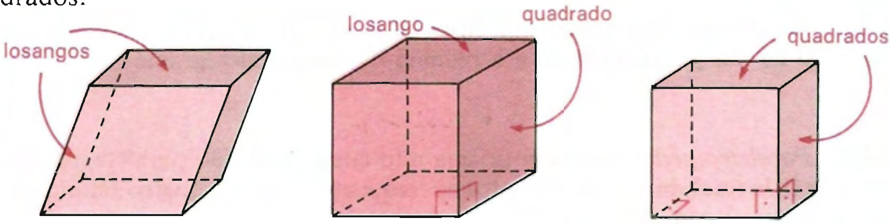
Paralelepípedo reto-retângulo

144. *Cubo* é um paralelepípedo retângulo cujas arestas são congruentes.

145. *Romboedro* é um paralelepípedo que possui as doze arestas congruentes entre si. A superfície total de um romboedro é a reuniao de seis losangos.

146. *Romboedro reto* é um paralelepípedo reto que possui as doze arestas congruentes entre si. A superfície total de um romboedro reto é a reunião de quatro quadrados (faces laterais) com dois losangos (bases).

147. *Romboedro reto-retângulo* ou *cubo* é um romboedro reto cujas bases são quadrados. A superfície de um romboedro reto é a reunião de seis quadrados.



Romboedro (oblíquo) Romboedro reto Romboedro reto-retângulo

EXERCÍCIOS

223. Calcule a soma dos ângulos das faces de um paralelepípedo.

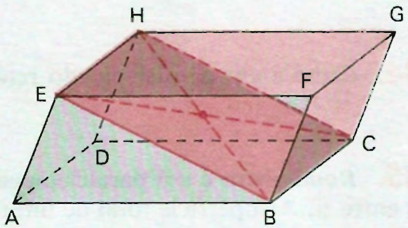
224. Calcule a soma dos diedros formados pelas faces de um paralelepípedo.

225. Mostre que as diagonais de um paralelepípedo retângulo são congruentes.

226. Mostre que as diagonais de um paralelepípedo retângulo interceptam-se nos respectivos pontos médios.

Solução

Pelas arestas opostas (BC e EH, AD e FG) passam planos diagonais que determinam no paralelepípedo secções que são paralelogramos. As diagonais do paralelepípedo são diagonais desses paralelogramos. Como as diagonais de um paralelogramo se interceptam nos respectivos pontos médios, as diagonais do paralelepípedo também o fazem.

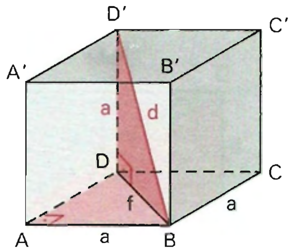


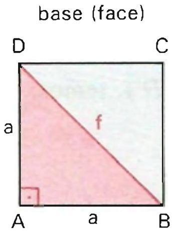
227. Mostre que a secção feita em um paralelepípedo, por um plano que intercepta *4* arestas paralelas, é um paralelogramo.

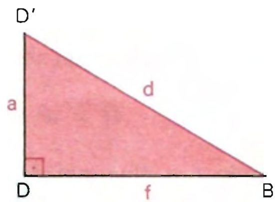
IV. Diagonal e área do cubo

148. Dado um cubo de aresta a, calcular sua diagonal d e sua área total S.

Solução







a) Cálculo de d

Inicialmente calculemos a medida f de uma diagonal de face:

No $\triangle BAD$: $f^2 = a^2 + a^2 \implies f^2 = 2a^2 \implies f = a\sqrt{2}$.

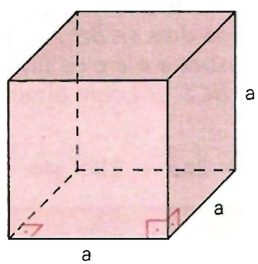
No $\triangle BDD'$: $d^2 = a^2 + f^2 \implies d^2 = a^2 + 2a^2 \implies d^2 = 3a^2 \implies$

$$\implies \boxed{d = a\sqrt{3}}$$

b) Cálculo de S

A superfície total de um cubo é a reunião de seis quadrados congruentes de lado a. A área de cada um é a^2. Então, a área total do cubo é:

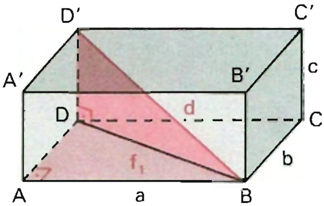
$$\boxed{S = 6a^2}$$

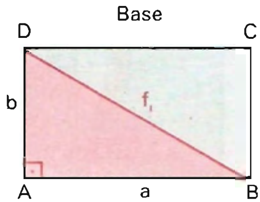


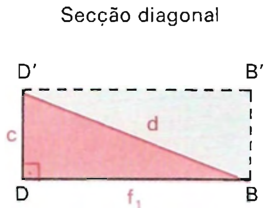
V. Diagonal e área do paralelepípedo retângulo

149. Dado um paralelepípedo retângulo de dimensões a, b e c, calcular as diagonais f_1, f_2 e f_3 das faces, a diagonal do paralelepípedo e sua área total S.

Solução







a) Cálculo de f_1, f_2 e f_3.

Sendo f_1 a diagonal da face $ABCD$ (ou $A'B'C'D'$), temos:

$$f_1^2 = a^2 + b^2 \implies f_1 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Sendo f_2 a diagonal da face $ABB'A'$ (ou $DCC'D'$) e f_3 a diagonal da face $ADD'A'$ (ou $BCC'B'$), temos:

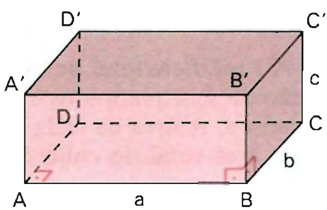
$$f_2^2 = a^2 + c^2 \implies f_2 = \sqrt{a^2 + c^2} \qquad f_3^2 = b^2 + c^2 \implies f_3 = \sqrt{b^2 + c^2}$$

b) Cálculo de d.

No $\triangle BDD'$: $d^2 = f_1^2 + c^2 \Rightarrow \boxed{d^2 = a^2 + b^2 + c^2} \Rightarrow d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

c) Cálculo da área total S.

A área total do paralelepípedo é a soma das áreas de seis retângulos: dois deles ($ABCD$, $A'B'C'D'$) com dimensões a e b, outros dois ($ABB'A'$, $DCC'D'$) com dimensões a e c e os últimos dois ($ADD'A'$, $BCC'B'$) com dimensões b e c. Logo,



$S = 2ab + 2ac + 2bc \implies$

$$\boxed{S = 2(ab + ac + bc)}$$

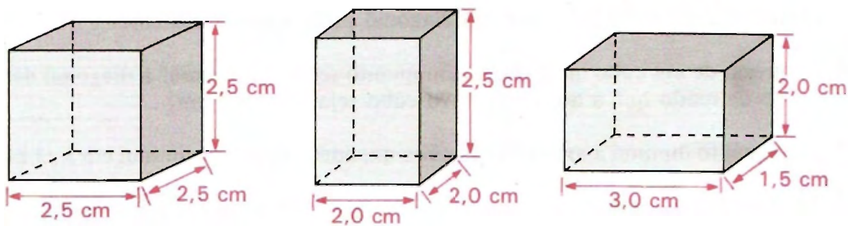
EXERCÍCIOS

Calcule a medida da diagonal e a área total dos paralelepípedos, cujas medidas estão indicadas abaixo:

a) cubo

b) paralelepípedo retângulo

c) paralelepípedo retângulo

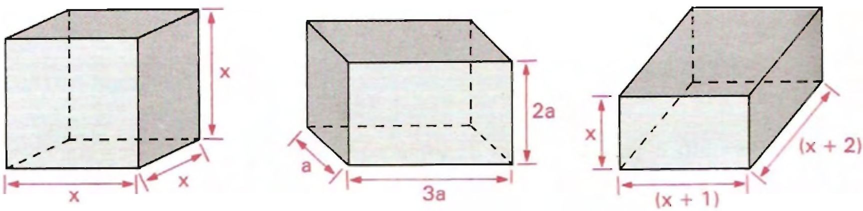


Represente através de expressões algébricas a medida da diagonal e a área total dos paralelepípedos, cujas medidas estão indicadas abaixo:

a) cubo

b) paralelepípedo retângulo

c) paralelepípedo retângulo



230. Calcule a medida da aresta de um cubo de $36\ m^2$ de área total.

231. Calcule a diagonal de um paralelepípedo retângulo de dimensões y, $(y + 1)$ e $(y - 1)$.

232. Calcule a medida da diagonal de um cubo, sabendo que a sua área total mede $37{,}5\ cm^2$.

233. Calcule a medida da terceira dimensão de um paralelepípedo, sabendo que duas delas medem $4\ cm$ e $7\ cm$ e que sua diagonal mede $3\sqrt{10}\ cm$.

234. Calcule a medida da aresta de um cubo, sabendo que a diagonal do cubo excede em *2 cm* a diagonal da face.

Solução

$d - f = 2 \Rightarrow a\sqrt{3} - a\sqrt{2} = 2 \Rightarrow a(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 2 \Rightarrow a = 2(\sqrt{3} + \sqrt{2})$

Resposta: $2(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ cm.

235. Sabe-se que a diagonal de um cubo mede *2,5 cm*. Em quanto se deve aumentar a aresta desse cubo para que sua diagonal passe a medir *5,5 cm*?

236. A aresta de um cubo mede *2 cm*. Em quanto se deve aumentar a diagonal desse cubo de modo que a aresta do novo cubo seja igual a *3 cm*?

237. Em quanto diminui a aresta de um cubo quando a diagonal diminui em $3\sqrt{3}$ *cm*?

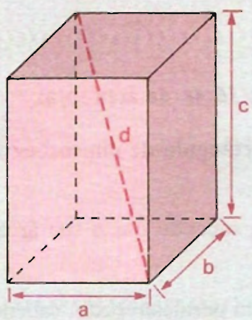
238. A diferença entre as áreas totais de dois cubos é $164{,}64\ cm^2$. Calcule a diferença entre as suas diagonais, sabendo que a aresta do menor mede *3,5 cm*.

239. Calcule a aresta de um cubo, sabendo que a soma dos comprimentos de todas as arestas com todas as diagonais e com as diagonais das seis faces vale *32 cm*.

240. Determine a área total de um paralelepípedo retângulo cuja diagonal mede $25\sqrt{2}$ *cm*, sendo a soma de suas dimensões igual a *60 cm*.

Solução

Considerando o paralelepípedo de dimensões *a*, *b* e *c*, com a diagonal $d = 25\sqrt{2}$:



$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow (25\sqrt{2})^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 1\,250$

Dados: $a + b + c = 60$.

Sabendo que $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$ e observando que $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ e $2(ab + ac + bc) = S$, temos:

$$(a + b + c)^2 = d^2 + S.$$

Substituindo os valores, vem:

$$(60)^2 = 1\,250 + S \implies S = 2\,350.$$

Resposta: A área total do paralelepípedo é 2 350 cm^2.

241. Determine a diagonal de um paralelepípedo, sendo *62* cm^2 sua área total e *10 cm* a soma de suas dimensões.

242. Prove que em um paralelepípedo retângulo a soma dos quadrados das quatro diagonais é igual à soma dos quadrados das doze arestas.

243. Dois paralelepípedos retângulos têm diagonais iguais, e a soma das três dimensões de um é igual à soma das três do outro. Prove que as áreas totais de ambos são iguais.

244. Determine as dimensões de um paralelepípedo retângulo, sabendo que são proporcionais aos números *1, 2, 3* e que a área total do paralelepípedo é *352* cm^2.

Solução

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = k \implies (a = k,\ b = 2k,\ c = 3k) \quad (1)$$

$$S = 352 \implies 2(ab + ac + bc) = 352 \implies ab + ac + bc = 176 \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2), vem:

$$1k \cdot 2k + 1k \cdot 3k + 2k \cdot 3k = 176 \implies 11k^2 = 176 \implies k^2 = 16 \implies k = 4.$$

Retornando a (1), temos: $a = 4$, $b = 8$ e $c = 12$.

Resposta: As dimensões são *4 cm*, *8 cm* e *12 cm*.

245. Calcule as dimensões de um paralelepípedo retângulo, sabendo que são proporcionais aos números *5*, *8*, *10* e que a diagonal mede *63 cm*.

246. As dimensões de um paralelepípedo são inversamente proporcionais aos números *6*, *4* e *3*. Determine-as, sabendo que a área total desse paralelepípedo é *208* m^2.

247. As dimensões x, y e z de um paralelepípedo retângulo são proporcionais a a, b e c. Dada a diagonal d, calcule essas dimensões.

248. Com uma corda disposta em cruz, deseja-se amarrar um pacote em forma de ortoedro, cujas dimensões são *1,40 m*, *0,60 m* e *0,20 m*. Se para fazer os nós gastam-se *20 cm*, responda: Quantos metros de corda serão necessários para amarrar o pacote?

249. As dimensões de um ortoedro são inversamente proporcionais a *r*, *s* e *t*. Calcule essas dimensões, dada a diagonal *d*.

Solução

Sejam *x*, *y* e *z* as dimensões:

$$x^2 + y^2 + z^2 = d^2 \qquad (1)$$

$$x = \frac{1}{r}k \qquad y = \frac{1}{s}k \qquad z = \frac{1}{t}k \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x = \frac{s\,t}{\boxed{r\,s\,t}}\boxed{k} \qquad y = \frac{r\,t}{\boxed{r\,s\,t}}\boxed{k} \qquad z = \frac{r\,s}{\boxed{r\,s\,t}}\boxed{k}$$

Mudando a constante para $K = \dfrac{k}{r\,s\,t}$, vem:

$$x = s\,t\,K \qquad y = r\,t\,K \qquad z = r\,s\,K \qquad (2)$$

(2) em (1): $K^2(s^2t^2 + r^2t^2 + r^2s^2) = d^2 \Longrightarrow K = \dfrac{d}{\sqrt{s^2t^2 + r^2t^2 + r^2s^2}}$

Substituindo em (2), vem a resposta:

$$x = \frac{s\,t\,d}{\sqrt{s^2t^2 + r^2t^2 + r^2s^2}}; \qquad y = \frac{r\,t\,d}{\sqrt{s^2t^2 + r^2t^2 + r^2s^2}};$$

$$z = \frac{r\,s\,d}{\sqrt{s^2t^2 + r^2t^2 + r^2s^2}}.$$

250. As dimensões de um paralelepípedo retângulo são inversamente proporcionais a *r*, *s*, *t*. Calcule essas dimensões, sabendo que a área é *S*.

251. As áreas de três faces adjacentes de um ortoedro estão entre si como *p*, *q* e *r*. A área total é $2\ell^2$. Determine as três dimensões.

252. Se a aresta de um cubo mede *100 cm*, encontre a distância de um vértice do cubo à sua diagonal.

VI. Razão entre paralelepípedos retângulos

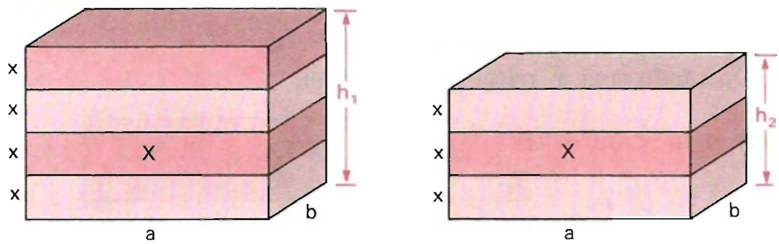
150. A razão entre dois paralelepípedos retângulos de bases congruentes é igual à razão entre as alturas.

Sejam $P(a, b, h_1)$ e $P(a, b, h_2)$ os paralelepípedos em que a, b, h_1 e a, b, h_2 são as respectivas dimensões.

Trata-se de demonstrar que: $\dfrac{P(a, b, h_1)}{P(a, b, h_2)} = \dfrac{h_1}{h_2}$.

Demonstração

1º caso: h_1 e h_2 são *comensuráveis*



$P(a, b, h_1)$ $\qquad$ $P(a, b, h_2)$

Sendo h_1 e h_2 comensuráveis, existe um segmento x submúltiplo comum de h_1 e h_2:

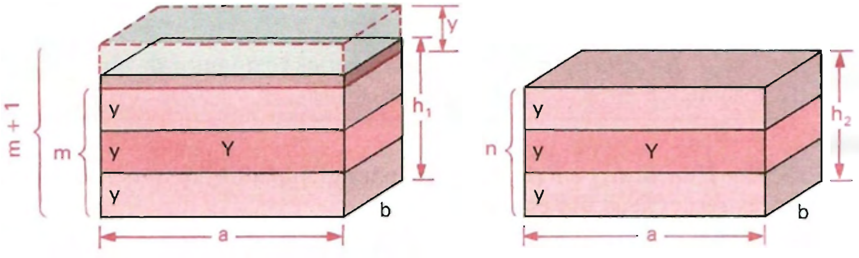
$$\left.\begin{array}{l} h_1 = p \cdot x \\ h_2 = q \cdot x \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{p}{q} \qquad (1)$$

Construindo os paralelepípedos $X(a, b, x)$, temos:

$$\left.\begin{array}{l} P(a, b, h_1) = p \cdot X \\ P(a, b, h_2) = q \cdot X \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{P(a, b, h_1)}{P(a, b, h_2)} = \frac{p}{q} \qquad (2)$$

De (1) e (2) vem: $\dfrac{P(a, b, h_1)}{P(a, b, h_2)} = \dfrac{h_1}{h_2}$.

2º caso: h_1 e h_2 são *incomensuráveis*



Sendo h_1 e h_2 incomensuráveis, não existe segmento submúltiplo comum de h_1 e h_2.

Tomemos um segmento y submúltiplo de h_2 (y "cabe" um certo número inteiro n de vezes em h_2, isto é, $h_2 = ny$).

Por serem h_1 e h_2 incomensuráveis, marcando sucessivamente y em h_1, temos que, chegando a um certo número inteiro m de vezes, acontece que:

$$my < h_1 < (m + 1)y.$$

Operando com as relações acima, vem:

$$\left.\begin{array}{r} my < h_1 < (m + 1)y \\ ny = h_2 = ny \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\frac{m}{n} < \frac{h_1}{h_2} < \frac{m + 1}{n}} \qquad (3)$$

Construindo os paralelepípedos $Y(a, b, y)$, temos:

$$\left.\begin{array}{r} mY < P(a, b, h_1) < (m + 1)Y \\ nY = P(a, b, h_2) = nY \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{m}{n} < \frac{P(a, b, h_1)}{P(a, b, h_2)} < \frac{m + 1}{n} \qquad (4)$$

Ora, sendo y submúltiplo de h_2, pode variar, e dividindo y, aumentamos n. Nessas condições,

$$\frac{m}{n} \text{ e } \frac{m + 1}{n}$$

formam um *par de classes contíguas* que definem *um único* número real, que é $\frac{h_1}{h_2}$ pela expressão (3) e $\frac{P(a, b, h_1)}{P(a, b, h_2)}$ pela expressão (4).

Como esse número é *único*, então:

$$\frac{P(a, b, h_1)}{P(a, b, h_2)} = \frac{h_1}{h_2}.$$

VII. Volume de um sólido

151. Volume de um sólido ou medida do sólido é um número real positivo associado ao sólido de forma que:

1º) sólidos congruentes têm volumes iguais;

2º) se um sólido S é a reunião de dois sólidos S_1 e S_2 que não têm pontos *interiores* comuns, então o volume de S é a soma dos volumes de S_1 com S_2.

Os sólidos são medidos por uma *unidade* que, em geral, é um *cubo*. Assim, o volume desse cubo é 1. Se sua aresta medir $1\ cm$ (um centímetro), seu volume será $1\ cm^3$ (um centímetro cúbico). Se sua aresta medir $1\ m$, seu volume será $1\ m^3$.

152. Dois sólidos são *equivalentes* se, e somente se, eles têm *volumes iguais* na mesma unidade de volume.

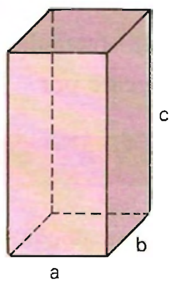
VIII. Volume do paralelepípedo retângulo e do cubo

153. Seja $P(a, b, c)$ o paralelepípedo retângulo de dimensões a, b e c.

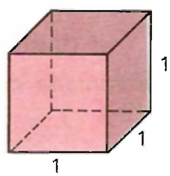
Vamos medir esse paralelepípedo com o cubo unitário, isto é, com o paralelepípedo $P(1, 1, 1)$. Para isso, estabeleceremos a razão $\dfrac{P(a, b, c)}{P(1, 1, 1)}$, que será o volume procurado.

$$V = \frac{P(a, b, c)}{P(1, 1, 1)}$$

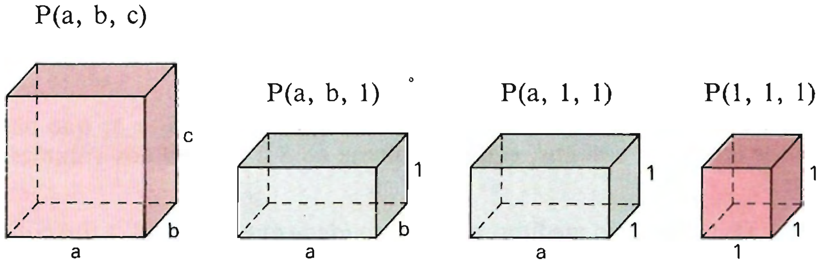
P(a, b, c)



P(1, 1, 1)



Consideremos, então, os paralelepípedos $P(a, b, c)$, $P(a, b, 1)$, $P(a, 1, 1)$ e $P(1, 1, 1)$ em que 1 é a unidade de comprimento.



Com base na propriedade do item anterior, temos:

$$\frac{P(a, b, c)}{P(a, b, 1)} = \frac{c}{1} \quad (1) \qquad \text{bases } (a, b) \text{ congruentes}$$

$$\frac{P(a, b, 1)}{P(a, 1, 1)} = \frac{b}{1} \quad (2) \qquad \text{bases } (a, 1) \text{ congruentes}$$

$$\frac{P(a, 1, 1)}{P(1, 1, 1)} = \frac{a}{1} \quad (3) \qquad \text{bases } (1, 1) \text{ congruentes}$$

Multiplicando-se membro a membro (1), (2) e (3):

$$\frac{P(a, b, c)}{P(a, b, 1)} \cdot \frac{P(a, b, 1)}{P(a, 1, 1)} \cdot \frac{P(a, 1, 1)}{P(1, 1, 1)} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} \cdot \frac{c}{1} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{P(a, b, c)}{P(1, 1, 1)} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} \cdot \frac{c}{1} \Longrightarrow V = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} \cdot \frac{c}{1} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow V = (\text{medida de } a) \cdot (\text{medida de } b) \cdot (\text{medida de } c)$$

que será representada simplesmente por

$$\boxed{V = a \cdot b \cdot c}$$

em que a, b e c são as *medidas* das dimensões do paralelepípedo retângulo na unidade escolhida.

154. Conclusões

1ª) O volume de um paralelepípedo retângulo é o produto das medidas de suas três dimensões.

2ª) Tomando como base a face de dimensões a e b, indicando por B a área dessa base ($B = a \cdot b$) e a altura c por h, podemos escrever:

$$\boxed{V = B \cdot h}$$

Isto é:

O volume de um paralelepípedo retângulo é igual ao *produto* da *área da base* pela medida da *altura*.

3ª) Volume do cubo

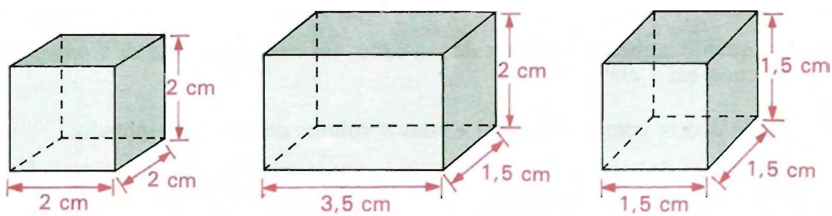
No cubo de aresta a, temos $b = a$ e $c = a$.

$$V = a \cdot b \cdot c \implies V = a \cdot a \cdot a \implies \boxed{V = a^3}$$

EXERCÍCIOS

253. Calcule a área total e o volume dos paralelepípedos, cujas medidas estão indicadas abaixo.

a) cubo b) paralelepípedo retângulo c) cubo

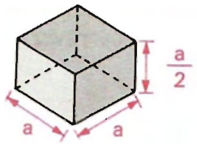


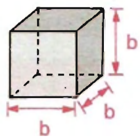
254. Represente através de expressões algébricas a área total e o volume dos paralelepípedos, cujas medidas estão indicadas abaixo.

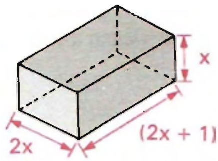
a) paralelepípedo retângulo

b) cubo

c) paralelepípedo retângulo







255. Calcule a medida da aresta de um cubo de $27\ m^3$ de volume.

256. Calcule a diagonal, a área total e o volume de um paralelepípedo retângulo, sabendo que as suas dimensões são $5\ cm$, $7\ cm$ e $9\ cm$.

257. Determine as medidas da aresta e da diagonal de um cubo cujo volume é $1728\ cm^3$.

258. Calcule o volume de um cubo cuja área total mede $600\ cm^2$.

259. Determine o volume de um cubo de área total $96\ cm^2$.

260. Quer-se confeccionar um cubo por meio de uma folha de zinco de $8{,}64\ m^2$. Qual será o comprimento da aresta do cubo? Qual será o volume do cubo?

261. Calcule a medida da diagonal, a área total e o volume de um cubo, cuja soma das medidas das arestas vale $30\ cm$.

262. Calcule a medida da diagonal, a área total e o volume de um cubo, sabendo que a diagonal de uma face mede $5\sqrt{2}\ cm$.

263. Expresse a área total e o volume de um cubo:

a) em função da medida da diagonal da face (f);
b) em função da medida da sua diagonal (d).

264. Calcule as medidas da aresta e da diagonal de um cubo, sabendo que seu volume é oito vezes o volume de um outro cubo que tem $2\ cm$ de aresta.

265. Se aumentamos a aresta de um cubo em $2\sqrt{5}\ cm$, obtemos um outro cubo cuja diagonal mede $30\ cm$. Determine a área total e o volume do cubo primitivo.

266. Em quanto aumenta o volume de um cubo, em cm^3, se a aresta de *1 metro* é aumentada em $1\ cm$?

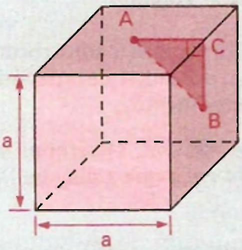
267. O que ocorre com a área total e com o volume de um cubo quando:

a) a aresta dobra;
b) a aresta é reduzida a $1/3$;
c) a aresta é reduzida à metade;
d) sua aresta é multiplicada por k.

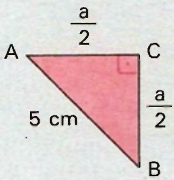
268. Enche-se um recipiente cúbico de metal com água. Dado que um galão do líquido tem um volume de *21 600* cm^3 e sendo *120 cm* a aresta do recipiente, calcule o número de galões que o recipiente pode conter.

269. Calcule o volume de um cubo, sabendo que a distância entre os centros de duas faces contíguas é de *5 cm*.

Solução



Sejam *A* e *B* os centros das duas faces contíguas e *C* ponto médio da aresta comum às faces consideradas.



Aplicando a relação de Pitágoras, vem:

$$5^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2a^2}{4} = 25 \Rightarrow a = 5\sqrt{2}$$

Volume:

$$V = a^3 \Rightarrow V = (5\sqrt{2})^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = 250\sqrt{2}$$

Resposta: O volume do cubo é $250\sqrt{2}\ cm^3$.

270. O segmento de reta que liga um dos vértices de um cubo ao centro de uma das faces opostas mede *60 cm*. Calcule o volume desse cubo.

271. Calcule o volume de um cubo, sabendo que quando se aumenta sua aresta em *1 metro* a área lateral do mesmo cresce *164* m^2.

272. A medida da superfície total de um cubo é *726* cm^2. Quanto devemos aumentar sua diagonal para que o volume aumente *1 413* cm^3?

273. Calcule a aresta e a área total de um cubo de volume igual ao do ortoedro cujas dimensões são *8 cm*, *27 cm* e *125 cm*.

274. Calcule o comprimento da aresta e a área total de um cubo equivalente a um paralelepípedo retângulo, cujas dimensões são *8 cm*, *64 cm* e *216 cm*.

275. O volume de um paralelepípedo retângulo vale *270* dm^3. Uma de suas arestas mede *5 dm* e a razão entre as outras duas é *2/3*. Determine a área total desse paralelepípedo.

276. As dimensões de um paralelepípedo retângulo são proporcionais aos números *3*, *6* e *9*. Calcule essas dimensões, a área total e o volume do paralelepípedo, sabendo que a diagonal mede *63 cm*.

277. As dimensões *a*, *b* e *c* de um ortoedro são proporcionais a *6*, *3* e *2*. Sabendo que a área total é $288\ cm^2$, calcule as dimensões, a diagonal e o volume do paralelepípedo.

278. A altura de um ortoedro mede *10 cm* e as bases são quadrados de diagonal $5\sqrt{2}\ cm$. Calcule a área da superfície lateral e o volume.

279. Determine a área de uma placa de metal necessária para a construção de um depósito em forma de ortoedro (aberto em cima), sabendo que o depósito tem *2 m* de largura, *1,50 m* de altura e *1,20 m* de comprimento.

280. A área de um paralelepípedo reto-retângulo é $720\ cm^2$. Determine seu volume, sabendo que a soma de suas dimensões vale *34 cm* e que a diagonal de uma das faces vale *20 cm*.

Solução

Sendo *x*, *y* e *z* as dimensões, temos:

$S = 720 \implies xy + xz + yz = 360$ (1)

$x + y + z = 34$ (2)

$x^2 + y^2 = f_1^2 \implies x^2 + y^2 = 400$ (3)

De (2) vem:

$$(x + y + z)^2 = 34^2 \implies \underbrace{x^2 + y^2}_{400} + z^2 + 2\underbrace{(xy + xz + yz)}_{360} = 1\ 156.$$

Com (3) e (1), temos:

$400 + z^2 + 720 = 1\ 156 \implies z^2 = 36 \implies z = 6.$

Substituindo $z = 6$ em (2), ficamos com: $x + y = 28$.

$(x + y = 28,\ x^2 + y^2 = 400) \implies x = 16$ e $y = 12$ (ou $x = 12$ e $y = 16$).

Volume: $V = x \cdot y \cdot z \implies V = 12 \cdot 16 \cdot 6 \implies V = 1\ 152.$

Resposta: O volume é $1\ 152\ cm^3$.

281. Determine as dimensões e o volume de um ortoedro, sendo a soma de suas dimensões igual a *45 cm*, a diagonal da base igual a *25 cm* e a área total igual a $1\ 300\ cm^2$.

282. Determine o volume e a área total de um paralelepípedo retângulo, dada a soma de suas dimensões *43a*, a diagonal *25a* e a área de uma face $180a^2$.

283. Calcule as dimensões de um ortoedro cuja diagonal mede *13 cm*, de área total *192 cm²*, e sabendo que a área da secção por um plano por duas arestas opostas é *60 cm²*.

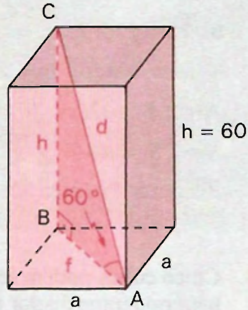
284. Determine o volume de um ortoedro de *90 cm²* de superfície, supondo que quatro faces do ortoedro são retângulos congruentes e que cada uma das outras é um quadrado de área igual à metade da área do retângulo.

285. Um cubo e um ortoedro têm ambos soma das arestas igual a *72 cm*. A dimensão menor do ortoedro é *2/3* da aresta do cubo e a dimensão maior do ortoedro é *4/3* da dimensão menor do ortoedro. Determine a relação entre os volumes de ambos os sólidos.

286. Uma banheira tem a forma de um ortoedro cujas dimensões são *1,20 m* de comprimento, *0,90 m* de largura e *0,50 m* de altura. Quantos litros de água pode conter? Se toda a água da banheira for colocada em um depósito em forma de cubo de *3 m* de aresta, que altura alcançará a água?

287. A altura *h* de um paralelepípedo retângulo mede *60 cm*, sendo a sua base um quadrado. A diagonal do paralelepípedo forma um ângulo de *60°* com o plano da base. Determine o volume do paralelepípedo retângulo.

Solução



Com os elementos caracterizados na figura ao lado, temos:
No triângulo *ABC*, vem

$$\operatorname{sen} 60° = \frac{h}{d} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{60}{d} \Rightarrow$$

$$\Longrightarrow d = 40\sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} 60° = \frac{h}{f} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{60}{f} \Longrightarrow f = 20\sqrt{3}$$

Na base, temos: $f = a\sqrt{2} \Rightarrow a\sqrt{2} = 20\sqrt{3} \Rightarrow a = 10\sqrt{6}$.

Volume: $V = B \cdot h \Rightarrow V = a^2 \cdot h \Rightarrow V = (10\sqrt{6})^2 \cdot 60 = 36\,000$.

Resposta: O volume é *36 000 cm³*.

288. Calcule a área total *S* de um paralelepípedo retângulo em função de seu volume *V* e do lado *ℓ* de sua base, sabendo que a base é um quadrado.

289. Calcule as dimensões de um paralelepípedo retângulo, sabendo que a soma de duas delas é *25 m*, o volume *900 m³* e a área total *600 m²*.

290. Determine o volume de um paralelepípedo retângulo, sabendo que duas dimensões têm igual medida e que a diagonal mede *9 cm*, sendo *144 cm²* sua área total.

291. A área da superfície total de um cubo é igual à de um ortoedro de área *216 cm²*. A altura do ortoedro é de *3 cm* e uma das dimensões da base é *1/3* da outra. Determine a relação entre os volumes de ambos os sólidos.

292. Calcule a área total de um paralelepípedo retângulo, sendo *192 cm³* o seu volume, a diagonal o triplo da diagonal de uma das faces de menor área, que é o triplo da menor dimensão do paralelepípedo.

Solução

Sendo x, y e z (com $x > y > z$) as medidas das dimensões, temos:

$x \cdot y \cdot z = 192 \quad (1)$

$d = 3f \implies \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 3\sqrt{y^2 + z^2} \quad (2)$

$f = 3z \implies \sqrt{y^2 + z^2} = 3z \quad (3)$

$(3) \implies y^2 + z^2 = 9z^2 \implies y^2 = 8z^2 \implies y = 2\sqrt{2}\,z$

$(2) \implies x^2 + y^2 + z^2 = 9(y^2 + z^2) \implies x^2 = 72z^2 \implies x = 6\sqrt{2}\,z$

Substituindo y e x em (1), temos:

$6\sqrt{2}\,z \cdot 2\sqrt{2}\,z \cdot z = 192 \implies 24z^3 = 192 \implies z = 2.$

Temos, então: $z = 2$, $y = 4\sqrt{2}$ e $x = 12\sqrt{2}$.

Área: $S = 2(xy + xz + yz) \implies S = 2(96 + 8\sqrt{2} + 24\sqrt{2}) \implies$

$\implies S = 64(3 + \sqrt{2}).$

Resposta: A área total é $64(3 + \sqrt{2})$ *cm²*.

293. Cinco cubos podem ser dispostos um sobre o outro, formando um ortoedro. Também podemos dispor *6* cubos iguais aos anteriores, pondo *3* sobre *3*, obtendo um outro ortoedro. Determine a razão entre os volumes e a razão entre as áreas dos ortoedros obtidos.

294. Com seis cubos iguais, construímos um ortoedro, dispondo os cubos um sobre o outro de maneira que suas faces estejam exatamente superpostas. Determine a relação entre as áreas do ortoedro e de um cubo, sendo os volumes dos cubos os mesmos.

295. Dos ortoedros que podemos formar dispondo de oito cubos iguais, determine o ortoedro de menor superfície.

296. Sobre a base quadrada de um ortoedro, constrói-se exteriormente a ele um cubo que tem por base o quadrado cujos vértices são os pontos médios da base do ortoedro. Determine o volume e a área da superfície do sólido assim obtido, sabendo que a altura do ortoedro é os *2/3* do lado da base e a soma de suas dimensões é de *16 cm*.

297. Calcule as medidas x e y das arestas de dois cubos, conhecendo a soma $x + y = \ell$ (ℓ dado) e a soma dos volumes v^3 (v é dado). Discuta.

Solução

$x + y = \ell$ (1) $\qquad$ $x^3 + y^3 = v^3$ (2)

$$(2) \Longrightarrow (x + y)(x^2 - xy + y^2) = v^3 \Longrightarrow x^2 - xy + y^2 = \frac{v^3}{\ell} \quad (3)$$

$$(1) \Longrightarrow (x + y)^2 = \ell^2 \Longrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = \ell^2 \quad (4)$$

Fazendo (4) − (3), vem:

$$3xy = \ell^2 - \frac{v^3}{\ell} \Longrightarrow xy = \frac{\ell^3 - v^3}{3\ell} \quad (\text{com } \ell^3 - v^3 > 0)$$

Sabendo a soma (S) e o produto (P) de x e y dados por (1) e (4), montamos a equação $z^2 - Sz + P = 0$, cujas raízes são x e y. Assim,

$$z^2 - \ell z + \frac{\ell^3 - v^3}{3\ell} = 0 \Longrightarrow 3\ell z^2 - 3\ell^2 z + \ell^3 - v^3 = 0$$

$$\text{Então, } x = z_1 = \frac{3\ell^2 + \sqrt{3\ell(4v^3 - \ell^3)}}{6\ell} \text{ e } y = z_2 = \frac{3\ell^2 - \sqrt{3\ell(4v^3 - \ell^3)}}{6\ell}.$$

Discussão: 1) $3\ell(4v^3 - \ell^3) \geqslant 0 \Longrightarrow 4v^3 - \ell^3 \geqslant 0 \Longrightarrow \ell \leqslant v\sqrt[3]{4}$

2) $\ell^3 - v^3 > 0 \Longrightarrow \ell > v$

Logo, $v < \ell \leqslant v\sqrt[3]{4}$.

298. Demonstre que:

a) em um cubo as arestas são igualmente inclinadas em relação a uma diagonal qualquer.

b) em um cubo as projeções das arestas sobre qualquer das diagonais são iguais à terça parte da diagonal.

299. Sabendo que as faces de um cubo são inscritíveis em círculos de $7{,}29\pi\ cm^2$ de área, calcule:

a) a medida da sua diagonal;

b) a medida de sua área total;

c) a medida de seu volume.

300. Demonstre que, em todo paralelepípedo, a soma dos quadrados das áreas das secções, determinadas pelos seis planos diagonais, é igual ao dobro da soma dos quadrados das áreas das seis faces.

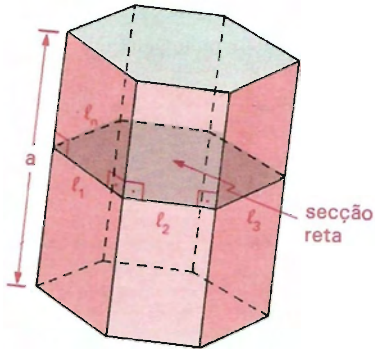
301. a) Entre todos os paralelepípedos retângulos de mesmo volume, qual o de menor superfície?

b) Entre todos os paralelepípedos retângulos de mesma superfície, qual o de maior volume?

IX. Área lateral e área total do prisma

155. A *área lateral* (A_ℓ) de um prisma é a soma das áreas das faces laterais.

Seja um prisma de aresta lateral medindo a e ℓ_1, ℓ_2, ... ℓ_n as medidas dos lados de uma secção reta. Cada face lateral é um paralelogramo de base a e altura igual a um lado da secção reta.



Assim,

$$A_\ell = a\ell_1 + a\ell_2 + \ldots + a\ell_n = \underbrace{(\ell_1 + \ell_2 + \ldots + \ell_n)}_{2p} \cdot a \implies$$

$$\implies \boxed{A_\ell = 2p \cdot a}$$

em que $2p$ é a medida do perímetro da secção reta
a é a medida da aresta lateral.

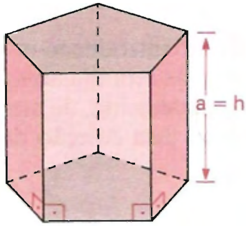
156. A *área total* de um prisma é a soma das áreas das faces laterais (A_ℓ) com as áreas das bases (duas bases).

Assim,

$$A_t = A_\ell + 2B \implies \boxed{A_t = 2p \cdot a + 2B}$$

em que B é a área de uma base.

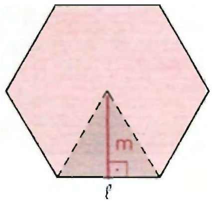
157. No *prisma reto* a aresta lateral é igual à altura ($a = h$) e a base é secção reta. Então:



$$A_\ell = 2p \cdot a \implies \boxed{A_\ell = 2ph}$$

$$A_t = A_\ell + 2B \implies \boxed{A_t = 2p \cdot h + 2B}$$

158. No *prisma regular*, a aresta lateral é igual à altura ($a = h$) e a base, que é secção reta, é um polígono regular.



Cálculo da área de base B

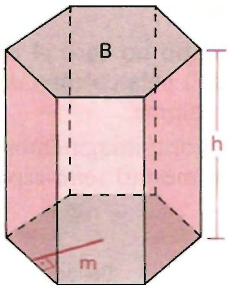
A área da base (B) é a soma de n triângulos de base ℓ (medida do lado) e altura m (medida do apótema). Então:

$$B = n \cdot \left(\frac{\ell \cdot m}{2}\right) \implies B = \frac{(n \cdot \ell)m}{2}$$

mas,

$n\ell = 2p =$ medida do perímetro

Daí,



$$B = \frac{2p \cdot m}{2} \implies \boxed{B = p \cdot m}$$

Cálculo da área total: A_t

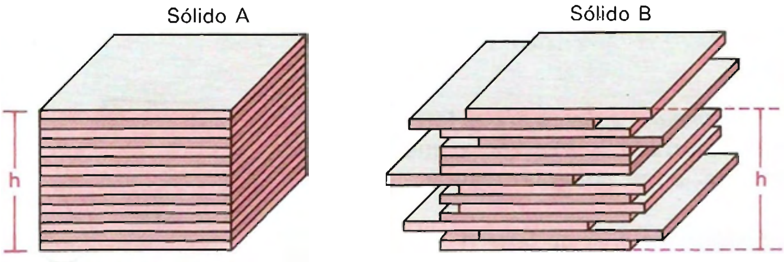
$$A_\ell = 2p \cdot a \implies A_\ell = 2p \cdot h$$

$$A_t = A_\ell + 2B \implies A_t = 2p \cdot h + 2p \cdot m \implies A_t = 2p(h + m)$$

$$\boxed{A_t = 2p\,(h + m)}$$

X. Princípio de Cavalieri

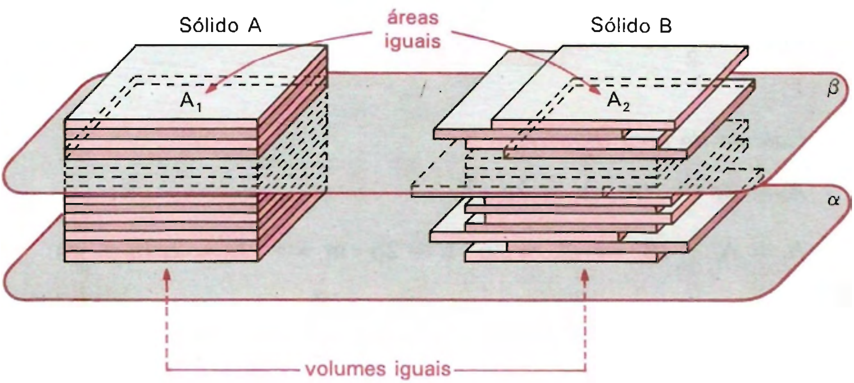
159. Como introdução intuitiva, suponhamos a existência de uma coleção finita de chapas retangulares (paralelepípedos retângulos) de mesmas dimensões e, conseqüentemente, de mesmo volume. Imaginemos ainda a formação de dois sólidos com essa coleção de chapas, como indicam as figuras A e B abaixo.



(pilhas de livros ou de folhas)

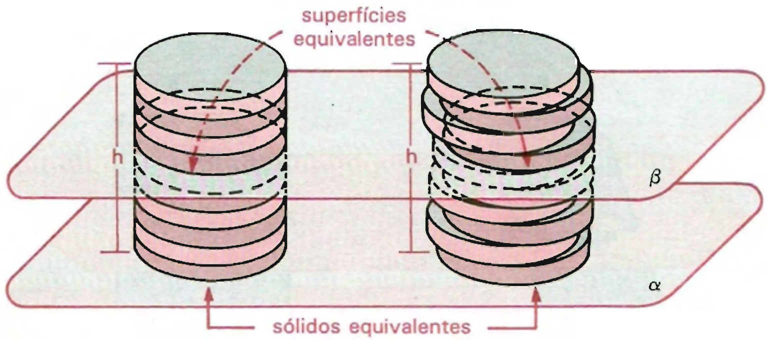
Tanto no caso A como no B, a parte de espaço ocupada (o "volume ocupado") pela coleção de chapas é o mesmo, isto é, os sólidos A e B têm o mesmo volume.

Agora, imaginemos esses sólidos com base num mesmo plano α e situados num mesmo semi-espaço dos determinados por α.



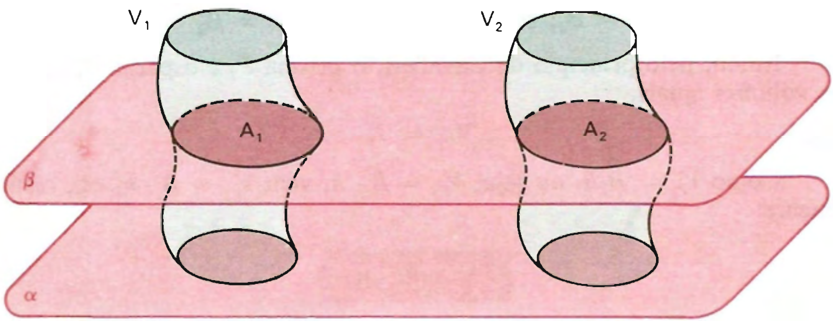
Qualquer plano β, secante aos sólidos A e B, paralelo a α, determina em A e em B superfícies de áreas iguais (superfícies equivalentes).

A mesma idéia pode ser estendida para duas pilhas com igual número de moedas congruentes.



O fato que acabamos de caracterizar intuitivamente é formalizado pelo *princípio de Cavalieri* ou *postulado de Cavalieri* (Francesco Bonaventura Cavalieri, 1598-1647) que segue:

160. Dois sólidos, nos quais todo plano secante, paralelo a um dado plano, determina superfícies de áreas iguais (superfícies equivalentes), são sólidos de volumes iguais (sólidos equivalentes).

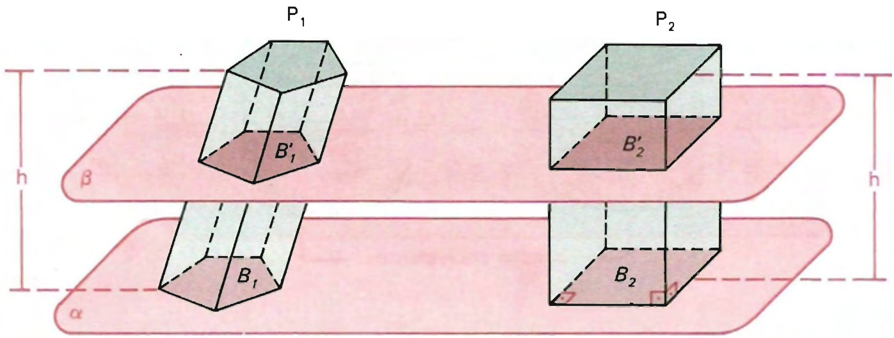


$$(A_1 = A_2 \implies V_1 = V_2)$$

A aplicação do princípio de Cavalieri, em geral, implica a colocação dos sólidos com base num mesmo plano, paralelo ao qual estão as secções de áreas iguais (que é possível usando a congruência).

XI. Volume do prisma

161. Consideremos um prisma P_1 de altura h e área da base $B_1 = B$ e um paralelepípedo retângulo de altura h e área de base $B_2 = B$ (o prisma e o paralelepípedo têm alturas congruentes e bases equivalentes).



Suponhamos, sem perda de generalidade, que os dois sólidos têm as bases num mesmo plano α e estão num dos semi-espaços determinados por α.

Qualquer plano β paralelo a α, que secciona P_1, também secciona P_2, e as secções (B'_1 e B'_2, respectivamente) têm áreas iguais, pois são congruentes às respectivas bases.

$$(B'_1 = B_1,\ B'_2 = B_2,\ B_1 = B_2 = B) \implies B'_1 = B'_2$$

Então, pelo princípio de Cavalieri, o prisma P_1 e o paralelepípedo P_2 têm volumes iguais.

$$V_{P_1} = V_{P_2}$$

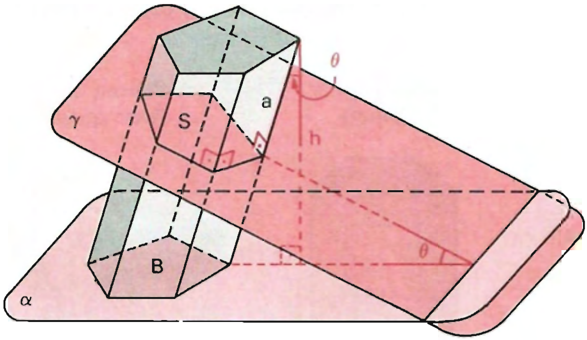
Como $V_{P_2} = B_2 h$, ou seja, $V_{P_2} = B \cdot h$, vem $V_{P_1} = B \cdot h$; ou, resumidamente:

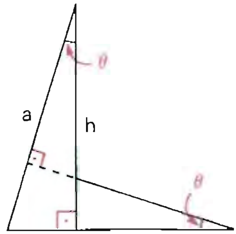
$$\boxed{V = B \cdot h}$$

162. *Conclusão*

O volume de um prisma é o *produto* da *área da base* pela medida da *altura*.

163. *Observação*





Consideremos um prisma oblíquo de área da base B, altura h e aresta lateral a. Seja α o plano da base e S uma secção reta situada num plano γ que forma com α um diedro de medida θ.

Notemos que S é a projeção ortogonal de B sobre o plano γ. Daí vem:

$$S = B \cdot \cos \theta.$$

O ângulo entre a e h também é θ (ângulos de lados respectivamente perpendiculares). Donde sai:

$$h = a \cdot \cos \theta.$$

Substituindo B e h na expressão do volume do prisma, vem:

$$V = B \cdot h \implies V = \frac{S}{\cos \alpha} \cdot a \cos \alpha \implies \boxed{V = S \cdot a}$$

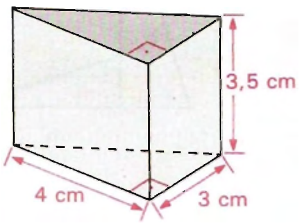
Notando que a expressão também é válida para um prisma reto, em que $B = S$ e $a = h$, temos:

O volume de um prisma é o *produto* da área da *secção reta* pela medida da *aresta lateral*.

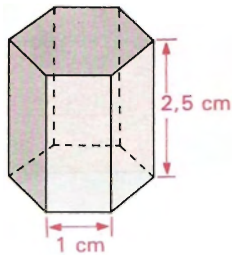
EXERCÍCIOS

302. Calcule a área lateral, a área total e o volume dos prismas, cujas medidas estão indicadas nas figuras abaixo.

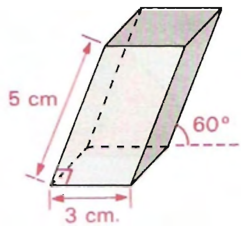
a) Prisma reto (triangular)



b) Prisma regular (hexagonal)

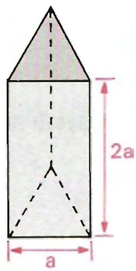


c) Prisma oblíquo (base quadrada)

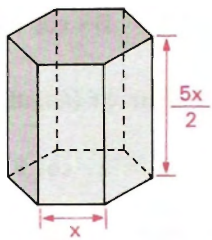


303. Represente através de expressões algébricas a área lateral, a área total e o volume dos prismas, cujas medidas estão indicadas nas figuras abaixo.

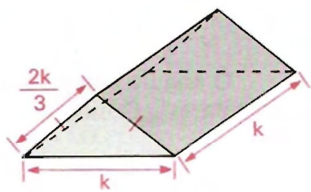
a) Prisma regular (triangular)



b) Prisma regular (hexagonal)



c) Prisma reto (triangular)



304. A base de um prisma de $10\ cm$ de altura é um triângulo retângulo isósceles de $6\ cm$ de hipotenusa. Calcule a área lateral e o volume do prisma.

305. Calcule o volume e a área total de um prisma, sendo sua secção reta um trapézio isósceles cujas bases medem $30\ cm$ e $20\ cm$ e cuja altura mede $10\sqrt{2}\ cm$ e a área lateral $640\ cm^2$.

306. Determine a área lateral e o volume de um prisma reto de $25\ cm$ de altura, cuja base é um hexágono regular de apótema $4\sqrt{3}\ cm$.

307. Determine a medida da aresta da base de um prisma triangular regular, sendo seu volume $8\ m^3$ e sua altura $80\ cm$.

308. Um prisma reto tem por base um hexágono regular. Qual é o lado do hexágono e a altura do prisma, sabendo que o volume é de $4\ m^3$ e a superfície lateral de $12\ m^2$?

309. Num prisma oblíquo a aresta lateral mede $5\ cm$, a secção reta é um trapézio isósceles cuja altura mede $8\ cm$ e as bases medem $7\ cm$ e $19\ cm$, respectivamente. Calcule a área lateral desse prisma.

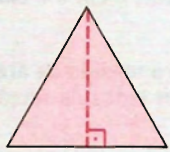
310. Determine a área total de um prisma triangular oblíquo, sendo a sua secção reta um triângulo equilátero de $16\sqrt{3}\ cm^2$ de área e um dos lados da secção igual à aresta lateral do prisma.

311. Um prisma triangular regular tem a aresta da base medindo $10\ dm$. Em quanto se deve aumentar a altura, conservando-se a mesma base, para que a área lateral do novo prisma seja igual à área total do prisma dado?

Solução

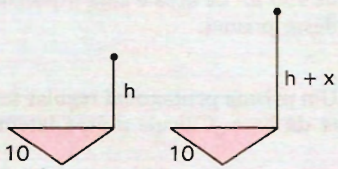
Área de um triângulo equilátero de lado a:

$$A_\triangle = \frac{1}{2}a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A_\triangle = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$



Sejam A_{ℓ_1} e A_{t_1} as áreas lateral e total do prisma e A_{ℓ_2} a área lateral do novo prisma.
Sendo B a área da base, temos:

$$B = \frac{10^2\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}.$$



Supondo que a altura h do prisma teve um aumento x, vem:

$$A_{t_1} = A_{\ell_1} + 2B \Longrightarrow A_{t_1} = 3(10 \cdot h) + 2 \cdot 25\sqrt{3} \Longrightarrow A_{t_1} = 30h + 50\sqrt{3}$$

$$A_{\ell_2} = 3 \cdot (10 \cdot h_2) \Longrightarrow A_{\ell_2} = 30 \cdot (h + x)$$

$$A_{t_1} = A_{\ell_2} \Longrightarrow 30h + 50\sqrt{3} = 30(h + x) \Longrightarrow 30x = 50\sqrt{3} \Longrightarrow x = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

Resposta: $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ dm.

312. Um prisma tem por base um triângulo equilátero cujo lado é a e a altura desse prisma é igual ao dobro da altura do triângulo da base. Determine o seu volume.

313. A aresta da base de um prisma hexagonal regular é r e a aresta lateral é s. Sabendo que esse prisma é equivalente a um outro triangular regular, cuja aresta da base é s e cuja aresta lateral é r, calcule a relação entre r e s.

314. Calcule o volume de um prisma hexagonal regular com $3\ m$ de altura, sabendo que se a altura fosse de $5\ m$ o volume do prisma aumentaria em $6\ m^3$.

315. A aresta da base de um prisma hexagonal regular mede $8\ cm$. Em quanto se deve diminuir a altura desse prisma de modo que se tenha um novo prisma com área total igual à área lateral do prisma dado?

316. Calcule o volume de um prisma triangular regular de $5\sqrt{3}\ cm$ de altura, sabendo que a área lateral excede a área da base em $56\sqrt{3}\ cm^2$.

317. A altura de um prisma reto mede $15\ cm$ e a base é um triângulo cujos lados medem $4\ cm$, $6\ cm$ e $8\ cm$. Calcule a área lateral e o volume do sólido.

318. Calcule a medida da aresta lateral de um prisma cuja área lateral mede $72\ dm^2$, sendo os lados da secção reta respectivamente $3\ dm$, $4\ dm$ e $5\ dm$.

319. A aresta lateral de um prisma reto mede $12\ m$; a base é um triângulo retângulo de $150\ m^2$ de área e cuja hipotenusa mede $25\ m$. Calcule a área total e o volume desse prisma.

320. Um prisma pentagonal regular tem $8\ cm$ de altura, sendo $7\ cm$ a medida da aresta da base. Calcule a área lateral desse prisma.

321. Calcule a área lateral do prisma oblíquo, cuja secção reta é um triângulo equilátero de $4\sqrt{3}\ m^2$ de área, sabendo que a aresta lateral é igual ao perímetro da secção reta.

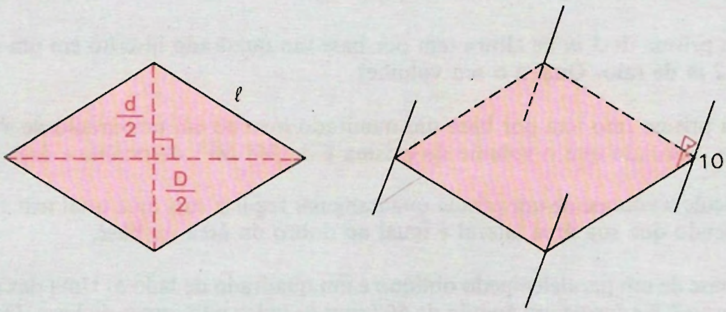
322. Calcule a área total e o volume de um prisma hexagonal regular de $12\ m$ de aresta lateral e $4\ m$ de aresta da base.

323. Um prisma hexagonal regular tem a área da base igual a $96\sqrt{3}\ cm^2$. Calcule a área lateral e o volume do prisma, sabendo que sua altura é igual ao apótema da base.

324. A secção reta de um prisma oblíquo é um losango, cujas diagonais são diretamente proporcionais a *3* e *4*. Calcule a área lateral do prisma, sabendo que sua aresta lateral mede *10 cm* e que a área de sua secção reta é igual a *54 cm²*.

Solução

Sendo B a área, ℓ o lado, d e D as diagonais do losango, temos:



$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{D}{4} = \dfrac{d}{3} = k \\[2ex] B = 54 \cdot B = \dfrac{D \cdot d}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{4k \cdot 3k}{2} = 54 \Longrightarrow k = 3$$

$$\ell^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \Longrightarrow \ell^2 = 4k^2 + \frac{9}{4}k^2 = \frac{25k^2}{4} \Longrightarrow \ell = \frac{5k}{2}$$

$$\ell = \frac{5k}{2} \Longrightarrow \ell = \frac{5 \cdot 3}{2} \Longrightarrow \ell = \frac{15}{2}.$$

Sendo A_ℓ a área lateral, temos:

$$A_\ell = 4 \cdot (\ell \cdot a) \Longrightarrow A_\ell = 4 \cdot \frac{15}{2} \cdot 10 \Longrightarrow A_\ell = 300.$$

Resposta: 300 cm².

325. Um prisma reto tem por base um losango em que uma de suas diagonais é os *3/4* da outra, e a soma de ambas é *14 cm*. Calcule a área total e o volume desse prisma, sabendo que sua altura é igual ao semiperímetro da base.

326. Calcule a área lateral de um prisma oblíquo, sendo *8 cm* a medida de sua aresta lateral, a secção reta do prisma um losango de *125 cm²* de área e a razão das diagonais desse losango igual a *2/5*.

327. Determine a medida da aresta e a área total de um prisma reto que tem por base um triângulo equilátero, sendo a altura do prisma igual à medida do lado do triângulo equilátero, e o volume, $2\sqrt{3}\ cm^3$.

328. Calcule o volume e a área total de um prisma cuja base é um triângulo equilátero de $6\ dm$ de perímetro, sendo a altura do prisma o dobro da altura da base.

329. Calcule o volume de um prisma triangular regular, sendo todas suas arestas de mesma medida e sua área lateral $33\ m^2$.

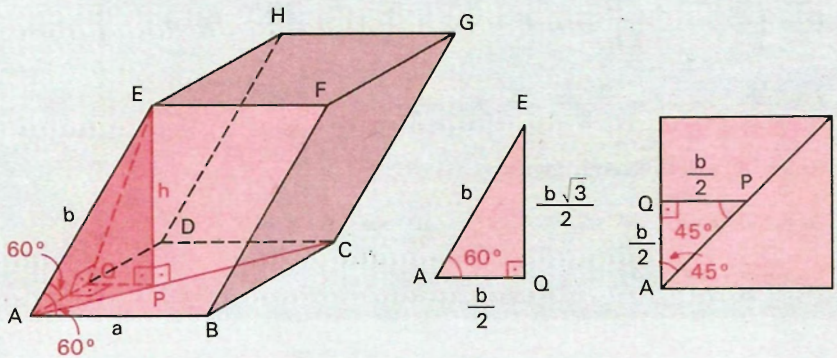
330. Um prisma de $3\ m$ de altura tem por base um quadrado inscrito em um círculo de $2\ m$ de raio. Qual é o seu volume?

331. Um prisma reto tem por base um quadrado inscrito em um círculo de $8\ cm$ de raio. Sabendo que o volume do prisma é de $768\ cm^3$, determine a área total.

332. Calcule o volume de um prisma quadrangular regular cuja área total tem $144\ m^2$, sabendo que sua área lateral é igual ao dobro da área da base.

333. A base de um paralelepípedo oblíquo é um quadrado de lado a. Uma das arestas laterais é b e forma um ângulo de $60°$ com os lados adjacentes da base. Determine o volume do paralelepípedo.

Solução



$V = B \cdot h \implies V = a^2 \cdot h \quad (1)$

A aresta lateral $AE = b$ é igualmente inclinada em relação aos lados $AB = a$ e $AD = a$ da base. A altura $EP = h$ tem extremidade P sobre a diagonal AC da base. Conduzindo PQ perpendicular ao lado AD com Q em AD, temos os triângulos retângulos AQE e AQP e EPQ (notemos que o plano (EQP) é perpendicular a AD).

No triângulo AQE, temos:

$$\cos 60° = \frac{AQ}{AE} \Longrightarrow \frac{1}{2} = \frac{AQ}{b} \Longrightarrow AQ = \frac{b}{2}$$

$$\operatorname{sen} 60° = \frac{EQ}{AE} \Longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{EQ}{b} \Longrightarrow EQ = \frac{b\sqrt{3}}{2}.$$

O triângulo AQP é isósceles, então: $QP = AQ \Longrightarrow QP = \frac{b}{2}$.

Aplicando a relação de Pitágoras no triângulo EPQ, vem:

$$(EP)^2 = (EQ)^2 - (QP)^2 \Longrightarrow h^2 = \left(\frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \Longrightarrow h = \frac{b\sqrt{2}}{2}.$$

Substituindo em (1), temos:

$$V = a^2 \cdot \frac{b\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow V = \frac{a^2 b\sqrt{2}}{2}.$$

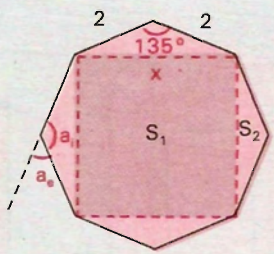
Resposta: O volume é $\frac{a^2 b\sqrt{2}}{2}$.

334. Determine o volume de um prisma triangular oblíquo, sendo a base um triângulo equilátero de lado $a = 4\ dm$ e a aresta lateral de $4\ dm$, que forma um ângulo de $60°$ com a base do prisma.

335. Calcule o volume de um paralelepípedo reto, que tem por altura $10\ cm$ e por base um paralelogramo cujos lados medem $8\ cm$ e $12\ cm$, sabendo que o ângulo entre esses lados vale $60°$.

336. Qual é o volume de um prisma reto no qual a base é um octógono regular de $2\ m$ de lado e a superfície lateral é $28\ m^2$?

Solução



$V = B \cdot h$

$A_\ell = 28 \Rightarrow 8 \cdot 2h = 28 \Rightarrow h = \frac{7}{4}$

Cálculo da área da base:

$A_{\text{octógono}} = A_{\text{quadrado}} + 4A_{\text{triângulo}}$

$B = S_1 + 4S_2$

O ângulo externo a_e do octógono regular é $a_e = \frac{360°}{8} = 45°$.

Conseqüentemente, o ângulo interno a_i vale:

$a_i = 180° - a_e \implies a_e = 180° - 45° = 135°$.

O lado x é obtido pela lei dos cossenos:

$$x^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cos 135° \implies x^2 = 4 + 4 + 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \implies$$

$$\implies x^2 = 4(2 + \sqrt{2}) \implies S_1 = 4(2 + \sqrt{2})$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \text{sen } 135° \implies S_2 = \sqrt{2}.$$

Substituindo, temos:

$$B = S_1 + 4S_2 \implies B = 4(2 + \sqrt{2}) + 4\sqrt{2} \implies B = 8(\sqrt{2} + 1).$$

Cálculo do volume:

$$V = B \cdot h \implies V = 8(\sqrt{2} + 1) \cdot \frac{7}{4} \implies V = 14(\sqrt{2} + 1)$$

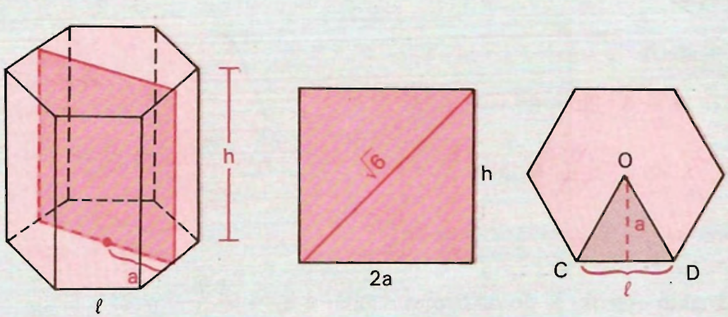
Resposta: O volume é $14(\sqrt{2} + 1)\ m^3$.

337. Calcule o volume de um prisma regular cuja área lateral mede *240* m^2, sendo a base um dodecágono regular de *2 m* de lado.

338. Um prisma regular hexagonal é cortado por um plano perpendicular a uma aresta de uma base, segundo um quadrado de diagonal $\sqrt{6}$ *m*. Calcule a área da base, a área lateral. a área total e o volume do prisma.

Solução

Prisma Secção Base



Cálculo dos elementos (indicados na figura):

Do quadrado vem: $2a = h = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} \implies h = \sqrt{3}$ e $a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Do triângulo equilátero OCD, vem: $\dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} = a \implies \ell = 1$.

1º) Área da base: B

$$B = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot a \implies B = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \implies B = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

2º) Área lateral: A_ℓ

$$A_\ell = 6 \cdot \ell \cdot h \implies A_\ell = 6 \cdot 1 \cdot \sqrt{3} \implies A_\ell = 6\sqrt{3}$$

3º) Área total: A_t

$$A_t = A_\ell + 2B \implies A_t = 6\sqrt{3} + 2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \implies A_t = 9\sqrt{3}$$

4º) Volume

$$V = B \cdot h \implies V = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} \implies V = \frac{9}{2}$$

Resposta: $B = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ m²; $A_\ell = 6\sqrt{3}$ m²; $A_t = 9\sqrt{3}$ m² e $V = \dfrac{9}{2}$ m³.

339. Calcule o volume de um prisma hexagonal regular, sabendo que o plano que contém a menor diagonal da base e o centro do sólido produz uma secção quadrada de *2 m* de lado.

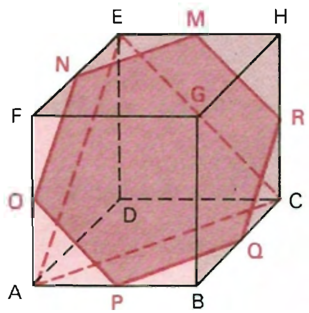
340. Calcule o volume de um prisma hexagonal regular de área total igual a *12 dm²*, sendo *1 dm* a altura do prisma.

341. Calcule o lado da base e a altura de um prisma hexagonal regular, sendo A sua área lateral e volume V.

342. Calcule o perímetro da base de um prisma hexagonal regular, sabendo que o prisma é equivalente a um cubo de aresta a, cuja diagonal tem medida igual à altura do prisma.

XII. Secções planas do cubo

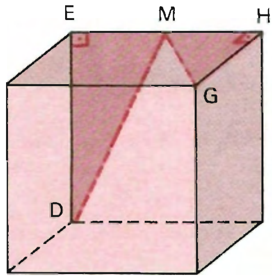
164. *Secção hexagonal do cubo*



Consideremos o cubo $ABCDEFGH$ (vide figura) e sejam M, N, O, P, Q e R os respectivos pontos médios de $\overline{EH}$, $\overline{EF}$, $\overline{AF}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CH}$.

1º) Os pontos M, N, O, P, Q e R pertencem ao plano mediador da diagonal DG.

Demonstração



Os segmentos

DM e GM, DN e GN, DO e GO, DP e GP, DQ e GQ, DR e GR

são congruentes entre si por serem hipotenusas de triângulos retângulos congruentes entre si.

Por exemplo:
$\triangle DME \equiv \triangle GMH \Rightarrow DM \equiv GM$.

Portanto, os pontos M, N, O, P, Q e R, sendo eqüidistantes de D e G, estão no plano mediador de DG.

Note-se que esse plano é perpendicular à *diagonal* do cubo pelo *centro* dele.

2º) $MNOPQR$ é um hexágono regular.

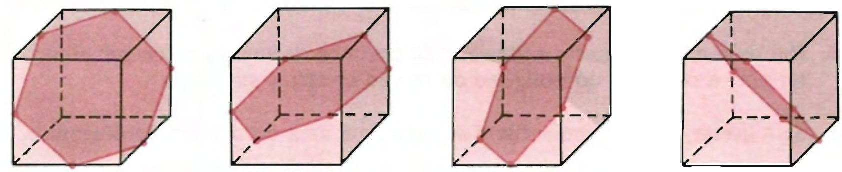
Demonstração

Os lados são congruentes, pois a medida deles é metade da medida da diagonal da face do cubo.

(Sendo a a aresta do cubo, temos $MN = NO = OP = PQ = QR = $
$= RM = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.)

Os ângulos internos do hexágono $MNOPQR$ são todos congruentes entre si por serem congruentes ao ângulo externo do triângulo equilátero ACE (ângulos de lados respectivamente paralelos).

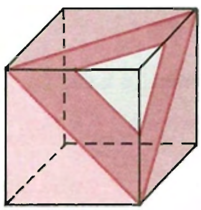
3º) Fixado um cubo, como ele possui quatro diagonais, os planos mediadores dessas diagonais determinam quatro hexágonos regulares como secção no cubo.



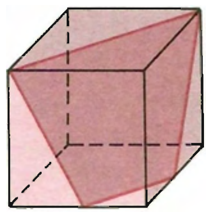
165. Outras secções planas do cubo

As secções planas de um cubo podem ser polígonos de *3*, *4*, *5* e *6* lados, isto é, triângulo, quadrilátero, pentágono e hexágono.

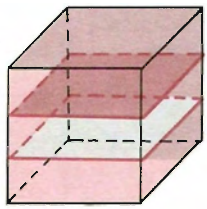
Vejamos isso nas figuras:



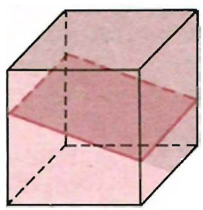
Triângulo



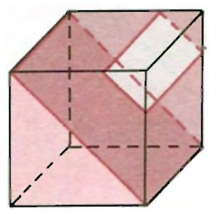
Trapézio



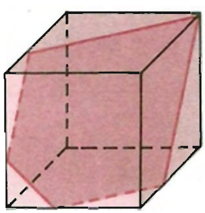
Quadrado



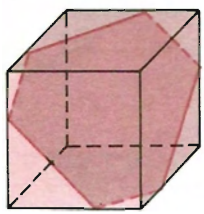
Retângulo



Retângulo (secção diagonal)



Pentágono



Hexágono

EXERCÍCIOS

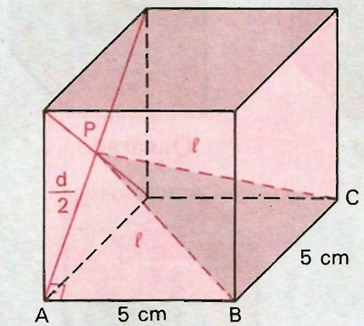
343. Por duas arestas opostas e paralelas de um cubo de aresta a passa um plano. Determine a natureza do polígono da secção e calcule sua área.

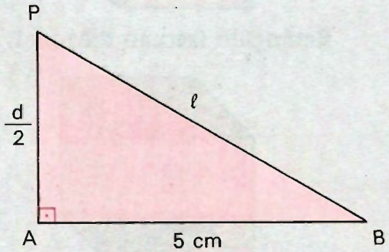
344. Se a aresta de um cubo mede $6\ m$, calcule a área da sua secção diagonal.

345. Secciona-se um cubo de aresta a por um plano que contém duas arestas opostas, obtendo-se um retângulo cuja área mede S. Exprima a área total do sólido em função da área da secção diagonal.

346. Calcule a área do triângulo que se obtém unindo-se o centro de uma face de um cubo com as extremidades de uma aresta da face oposta, sabendo que a medida da aresta do cubo vale $5\ cm$.

Solução





Cálculo dos elementos indicados na figura:

$d^2 = 5^2 \implies d = 5\sqrt{2}$.

Do triângulo ABP, em que P é o centro de uma das faces opostas a $\overline{BC}$:

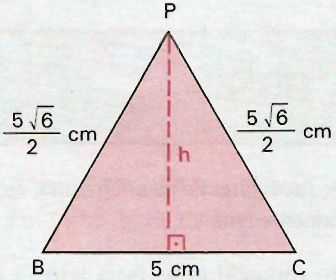
$$\ell^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + 5^2 \implies$$

$$\implies \ell^2 = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 5^2 \implies$$

$$\implies \ell^2 = \frac{50}{4} + 25 \implies$$

$$\implies \ell = \frac{5\sqrt{6}}{2}.$$

Da secção *BPC*, temos:



$$\left(\frac{5\sqrt{6}}{2}\right)^2 = h^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{150}{4} = h^2 + \frac{25}{4} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow h = \frac{5\sqrt{5}}{2}.$$

Cálculo da área do $\triangle BPC$:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow S = \frac{25\sqrt{5}}{4}.$$

Resposta: A área da secção é $\frac{25\sqrt{5}}{4}$ cm^2.

347. A secção determinada por um plano em um cubo é um hexágono regular. Calcule a razão entre a área desse hexágono e a área do círculo circunscrito a ele.

348. Um cubo de área total igual a $31,74\ cm^2$ é cortado por um plano, de modo a se obter uma secção hexagonal regular. Calcule o lado do quadrado inscrito no triângulo equilátero de perímetro igual ao do hexágono obtido.

349. Seja dado um cubo *ABCDEFGH* cuja aresta mede *a*. Pela diagonal *BE* de uma das faces e o ponto médio *P* da aresta *GH*, paralela a essa face, faz-se passar um plano.

a) Demonstre que a secção do cubo por esse plano é um trapézio isósceles.
b) Calcule os lados do trapézio e a área da secção em função da aresta do cubo.

350. Pelas extremidades de três arestas que partem de um vértice *A* de um cubo traçamos um plano. Mostre que a secção é um triângulo equilátero. Mostre também que a diagonal do cubo que parte de *A* é perpendicular ao plano da secção e precise a posição dò ponto onde ela é perpendicular. Calcule também a área do triângulo equilátero.

XIII. Problemas gerais sobre prismas

EXERCÍCIOS

351. Calcule os ângulos formados pelos pares de faces laterais de um prisma, cuja secção reta é um triângulo de lados respectivamente iguais a $13\ m$, $13\sqrt{2}\ m$ e $13\ m$.

352. Calcule a medida do menor ângulo diedro formado pelas faces laterais de um prisma, sabendo que os lados da secção reta desse prisma triangular medem, respectivamente, $3\ cm$, $3\sqrt{3}\ cm$ e $6\ cm$.

353. Calcule a medida do ângulo que a diagonal de um cubo forma com:

a) as faces; b) as arestas.

354. Calcule o ângulo que a diagonal de um prisma quadrangular regular de $64\sqrt{2}\ m^3$ de volume forma com as arestas laterais, sabendo que as arestas da base do prisma medem $4\ m$.

355. Dado um prisma hexagonal regular de $2\ m$ de aresta da base e $2\sqrt{3}\ m$ de altura, considere duas diagonais paralelas de uma das bases e as diagonais da outra base paralelas àquelas. Calcule o volume de um dos prismas triangulares em que fica dividido o prisma hexagonal dado, quando são traçados os quatro planos diagonais definidos por pares daquelas quatro diagonais das bases.

356. Calcule o volume de um prisma triangular oblíquo cujos lados da base medem $13a$, $14a$ e $15a$, uma aresta lateral mede $26a$ e sua projeção sobre o plano da base mede $10a$.

357. Calcule o volume de um prisma quadrangular oblíquo, sendo $20\ cm$ a medida de sua aresta lateral, sabendo que a secção reta é um paralelogramo em que dois lados consecutivos medem $9\ cm$ e $12\ cm$ e formam um ângulo de $30°$.

358. A secção de um paralelepípedo oblíquo é um quadrilátero que tem um ângulo de $45°$ compreendido entre lados que medem $4\ cm$ e $8\ cm$. O comprimento da aresta lateral é igual ao semiperímetro dessa secção. Calcule o volume do poliedro.

359. Calcule o volume de um prisma oblíquo, sabendo que a base é um hexágono regular de lado $R = 2\ cm$ e que a aresta L, inclinada $60°$ em relação ao plano da base, mede $5\ cm$.

360. Determine o volume e a área lateral de um prisma reto de $10\ cm$ de altura e cuja base é um hexágono regular de apótema $3\sqrt{3}\ cm$.

361. Qual é a altura de um prisma reto cuja base é um triângulo equilátero de lado a, para que o seu volume seja igual ao volume de um cubo de aresta a?

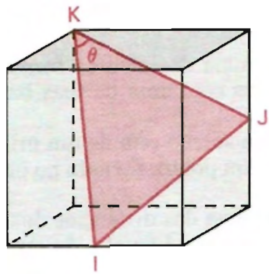
362. Se um cubo tem suas arestas aumentadas em 50%, em quanto aumentará seu volume?

363. Procura-se construir um cubo grande empilhando cubos pequenos e todos iguais. Quando se coloca um certo número de cubos pequenos em cada aresta, sobram cinco; se se tentasse acrescentar um cubo a mais em cada aresta, ficariam faltando trinta e dois. Quantos são os cubos pequenos?

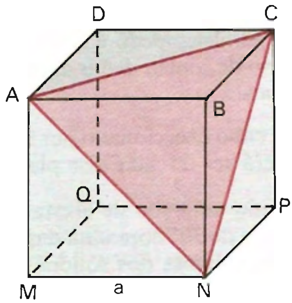
364. Os pontos J e I são os pontos médios das arestas do cubo sugerido na figura.

a) Calcule, em função da medida e da aresta do cubo, a distância de I a J.

b) Determine a medida θ do ângulo $\widehat{IKJ}$.



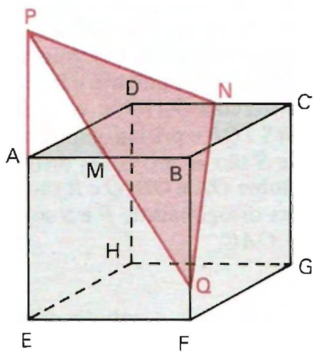
365. No cubo abaixo, faz-se um corte pelo plano que passa pelos vértices A, C e N, retirando-se o sólido $(ABCN)$ assim obtido. Determine o volume do sólido restante em função de a, sabendo que a é a medida do lado.



366. Considere um cubo $ABCDEFGH$ de lado 1 unidade de comprimento, como na figura. M e N são os pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, respectivamente. Para cada ponto P da reta AE, seja Q o ponto de interseção das retas PM e BF.

a) Prove que o $\triangle PQN$ é isósceles.

b) A que distância do ponto A deve estar o ponto P para que o $\triangle PQN$ seja retângulo?



367. Uma caixa d'água com a forma de um paralelepípedo reto de $1\ m \times 1\ m$ de base e $\frac{\sqrt{3}}{2}\ m$ de altura está sobre uma laje horizontal com água até a altura h. Suponhamos que a caixa fosse erguida lateralmente, apoiada sobre uma das arestas da base (que é mantida fixa), sem agitar a água. Assim sendo, a água começaria a transbordar exatamente quando o ângulo da base da caixa com a laje medisse $30°$. Calcule a altura h.

368. Calcule as dimensões de um paralelepípedo retângulo, sabendo que elas estão em progressão aritmética, que a área total é S e a diagonal é d. Discuta.

369. A soma dos diedros formados pelas faces laterais de um prisma triangular com uma de suas bases está compreendida entre dois e quatro retos.

370. A soma dos diedros formados pelas faces laterais de um prisma convexo de n faces com uma de suas bases é superior a 2 retos e inferior a $2(n - 1)$ retos.

371. Se a secção reta de um prisma é um polígono equilátero, a soma das distâncias de um ponto, tomado no interior do sólido às faces laterais e às bases, é constante.

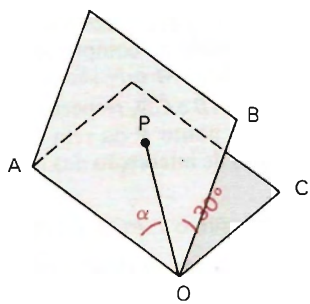
372. A soma das distâncias dos vértices de um paralelepípedo a um plano que não o intercepta é igual a 8 vezes a distância do ponto de concurso de suas diagonais a esse plano.

373. A soma dos quadrados das distâncias de um ponto qualquer aos oito vértices de um paralelepípedo é igual a oito vezes o quadrado da distância desse ponto ao ponto de concurso das diagonais, mais a metade da soma dos quadrados das diagonais.

374. Um cubo é seccionado por um plano que passa por uma de suas diagonais. Como deverá ser traçado esse plano para que a área da secção seja mínima?

375. É dado um cubo de aresta a. Secciona-se o cubo por um plano que forma um ângulo de $30°$ com uma das faces e passa por uma diagonal dessa face. Determine os volumes dos sólidos resultantes.

376. Na figura ao lado, os planos OAB e OAC formam entre si um ângulo de $30°$. As retas OB e OC são perpendiculares à reta OA. O segmento OP, do plano OAB, é unitário e forma um ângulo α com OA $(0 < \alpha < 90°)$. Seja $ORSTQP$ o prisma assim construído: T e S são as projeções ortogonais de P sobre OA e OB; Q e R são as projeções ortogonais de P e S sobre o plano OAC.



a) Determine o volume do prisma em função de α.
b) Qual o valor de $tg\ \alpha$ quando o volume do prisma é máximo?

LEITURA

Cavalieri e os Indivisíveis

Hygino H. Domingues

Ao início do século XVII, os métodos deixados pelos gregos para cálculos de áreas e volumes, apesar de sua beleza e rigor, mostravam-se cada vez menos adequados a um mundo em franco progresso científico. Pois faltavam a eles operacionalidade e algoritmos para implementá-los. E como não havia ainda condições matemáticas de obter esses requisitos, os métodos então surgidos eram sempre passíveis de críticas — como o mais famoso deles, a geometria dos indivisíveis, de Bonaventura Cavalieri (1598-1647).

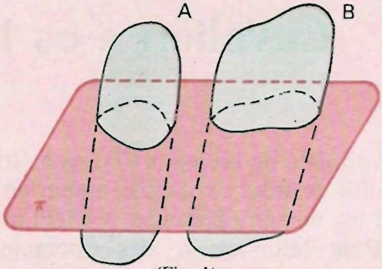
O milanês Cavalieri foi um dos matemáticos mais influentes de sua época. De família nobre, Cavalieri seguiu paralelamente a carreira religiosa e a atividade científica. Discípulo de Galileu Galilei (1564-1642), por indicação deste ocupou desde 1629 a cátedra de Matemática da Universidade de Bolonha, ao mesmo tempo que era o superior do monastério de São Jerônimo. Cavalieri foi também astrônomo, mas, se ainda é lembrado, isso se deve em grande parte ao *método dos indivisíveis* que desenvolveu a partir de 1626.

Cavalieri não definia, em suas obras sobre o assunto, o que vinham a ser os indivisíveis. Segundo ele, porém, uma figura plana seria formada por uma infinidade de cordas paralelas entre si e uma figura sólida por uma infinidade de secções planas paralelas entre si — a essas cordas e a essas secções chamava de *indivisíveis*. Num de seus livros "explicava" que um sólido é formado de indivisíveis, assim como um livro é composto de páginas. Do ponto de vista lógico, essas idéias envolviam uma dificuldade insuperável. Como uma figura de extensão finita poderia ser formada de uma infinidade de indivisíveis, tanto mais que estes não possuem espessura?

Bonaventura Cavalieri.

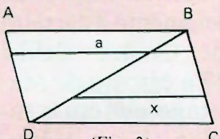
O *princípio de Cavalieri*, ainda bastante usado no ensino de geometria métrica no espaço, facilita bastante a aceitação da idéia de indivisível:

"Sejam dois sólidos A e B. Se todos os planos numa certa direção, ao interceptarem A e B, determinam secções (indivisíveis) de áreas iguais, então A e B têm mesmo volume" (fig. 1).



(Fig. 1)

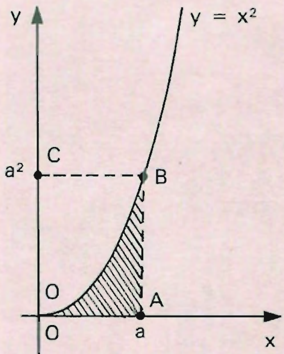
De alcance maior foram certos teoremas estabelecidos por Cavalieri relacionando os indivisíveis de um paralelogramo com aqueles dos triângulos determinados por uma de suas diagonais. Se a indica genericamente os primeiros e x os segundos (fig. 2), Cavalieri "provou" que



(Fig. 2)

$$\sum a = 2\sum x; \quad \sum a^2 = 3\sum x^2; \quad \ldots \quad (*)$$

onde os somatórios não têm o sentido atual (são infinitos e correspondem à idéia de "integrar" os indivisíveis para formar as figuras). Se o paralelogramo é um retângulo de altura b, sua área $\sum a$ é igual ao produto de um divisível pelo "número" b de indivisíveis, isto é, $\sum a = ab$. Usando então a primeira das relações de (*), obtém-se a área do triângulo: $\sum x = \frac{1}{2}\sum a = \frac{1}{2}ab$.



(Fig. 3)

A segunda das relações de (*) permite calcular a área compreendida entre a curva $y = x^2$ e o eixo x, de O até a (fig. 3). Segundo as idéias de Cavalieri, essa área vale $\sum x^2$, pois cada um de seus indivisíveis (ordenadas) vale x^2. Mas, pela relação citada:

$$\sum x^2 = \frac{1}{3}\sum a^2,$$

onde $\sum a^2$ é a área do retângulo $OABC$. Mas essa área é dada também por $a \cdot a^2 = a^3$ (base vezes altura). Logo, a área sombreada é $a^3/3$, resultado correto.

Foram tantas as críticas que Cavalieri recebeu pelo seu método, embora este funcionasse (como no exemplo anterior), que certa vez disse: "O rigor é algo que diz respeito à filosofia e não à matemática".

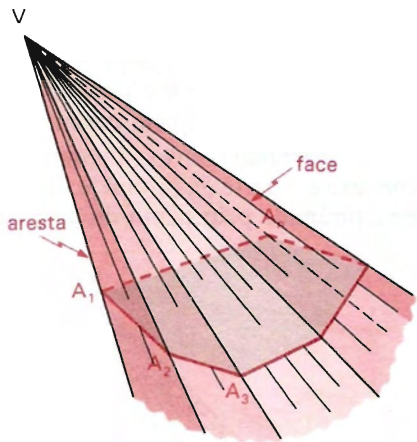
CAPÍTULO IX

Pirâmide

I. Pirâmide ilimitada

166. *Definição*

Consideremos uma região poligonal plano-convexa (polígono plano-convexo) $A_1 A_2 \ldots A_n$ de n lados e um ponto V fora de seu plano. Chama-se *pirâmide ilimitada convexa* ou *pirâmide convexa indefinida* (ou ângulo poliédrico ou ângulo sólido) à reunião das semiretas de origem em V e que passam pelos pontos da região poligonal (polígono) dada.



Se a região poligonal (polígono) $A_1 A_2 \ldots A_n$ for côncava, a pirâmide ilimitada resulta côncava.

167. *Elementos*

Uma pirâmide ilimitada convexa possui: n arestas, n diedros e n faces (que são ângulos ou setores angulares planos).

168. *Secção*

É uma região poligonal plana (polígono plano) com um só vértice em cada aresta.

169. *Superfície*

A superfície de uma pirâmide ilimitada convexa é a reunião das faces dessa pirâmide. É uma superfície poliédrica convexa ilimitada.

II. Pirâmide

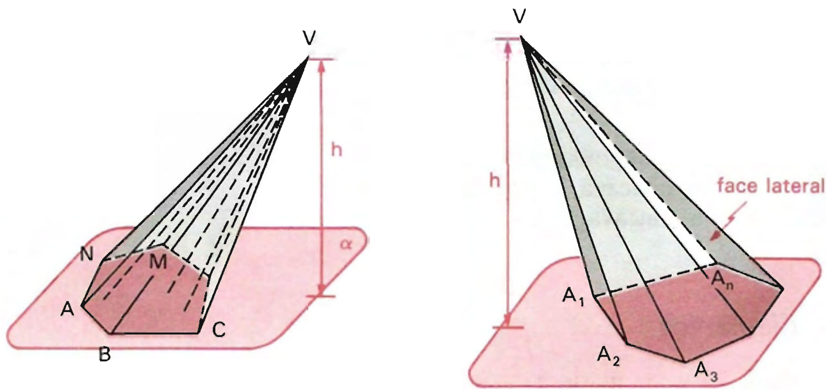
170. *Definição*

Consideremos um polígono convexo (região poligonal convexa) $ABC \dots MN$ situado num plano α e um ponto V fora de α. Chama-se *pirâmide* (ou pirâmide convexa) à reunião dos segmentos com uma extremidade em V e a outra nos pontos do polígono.

V é o vértice e o polígono $ABC \dots MN$, a base da pirâmide.

Podemos também definir a pirâmide como segue:

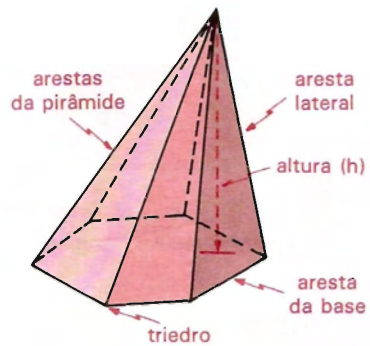
Pirâmide convexa limitada ou *pirâmide convexa definida* ou *pirâmide convexa* é a parte da pirâmide ilimitada que contém o vértice quando se divide essa pirâmide pelo plano de uma secção, reunida com essa secção.



171. *Elementos*

Uma pirâmide possui:

1 base (a secção acima citada), n faces laterais (triângulos), $n + 1$ faces, n arestas laterais, $2n$ arestas, $2n$ diedros, $n + 1$ vértices, $n + 1$ ângulos poliédricos e n triedros.



Para uma pirâmide é válida a relação de Euler:

$$V - A + F = (n + 1) - 2n + (n + 1) = 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow V - A + F = 2$$

172. *Altura*

A *altura* de uma pirâmide é a distância h entre o vértice e o plano da base.

173. *Superfícies*

Superfície lateral é a reunião das faces laterais da pirâmide. A área dessa superfície é chamada área lateral e indicada por A_ℓ.

Superfície total é a reunião da superfície lateral com a superfície da base da pirâmide. A área dessa superfície é chamada área total e indicada por A_t.

174. *Natureza*

Natureza de uma pirâmide: uma pirâmide será triangular, quadrangular, pentagonal, etc., conforme a *base* for um triângulo, um quadrilátero, um pentágono, etc.

175. *Pirâmide regular*

Pirâmide regular é uma pirâmide cuja base é um polígono regular e a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro da base. Numa pirâmide regular as arestas laterais são congruentes e as faces laterais são triângulos isósceles congruentes.

Chama-se *apótema* de uma pirâmide regular à altura (relativa ao lado da base) de uma face lateral.