

Дифференциальные уравнения

Гарматная Лолита

Май 2022

Вариант 1

№1

a) $\left(2x y^2 + 3x^2 + \frac{1}{x^2} + 3\frac{x^2}{y^2}\right) dx + \left(2x^2 y + 3y^2 + \frac{1}{y^2} - 2\frac{x^3}{y^3}\right) dy = 0$

$$P'_y = 4x y - \frac{6x^2}{y^3}$$

$$Q'_x = 4x y - \frac{6x^2}{y^3}$$

$P'_y = Q'_x \Rightarrow$ Уравнение в полных дифференциалах.

Для решения использовать формулу:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy$$

b) $x y (1+y^2) dx + (1+x^2) dy = 0$

Уравнение с разделяющимися переменными.

С помощью интегрирующего множителя $\mu(x, y) = (y(1+x^2))^{-1}$ приводим уравнение к уравнению в полных дифференциалах и используем формулу из пункта a) + решаем уравнение $y(1+x^2) = 0$.

c) $2x y dx - (x^2 - y^2) dy = 0$

Уравнение в нормальной дифференциальной форме.

Ищем интегрирующий множитель в виде $w = y^2 + x^2$:

$$\psi(w) = \frac{4x}{-(x^2-y^2)^2 x - 2y 2x y} = \frac{-2}{x^2+y^2}.$$

$$\mu(w) = e^{-\int_1^w \frac{2}{\tau} d\tau}$$

С помощью полученного интегрирующего множителя $\mu(x^2 + y^2) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}$ приводим уравнение к уравнению в полных дифференциалах и решаем его, используя формулу из пункта a).

d) $y' \operatorname{ctg} x - y = 2 \cos^2(x) \operatorname{ctg} x$

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка.

Для решения используют метод вариации произвольной постоянной.

Также существует метод основанный на представлении искомой функции y в виде $y(x) = u(x)v(x)$.

e) $x^2 y^2 y' + x y^3 = a^2, \quad a \in R$

$$y' + \frac{1}{x} y = \frac{a^2}{x^2} y^{-2}$$

Дифференциальное уравнение Бернулли.

Дифференциальное уравнение Бернулли сводится к линейному дифференциальному уравнению подстановкой $z = y^{1-(-2)}$.

f) $y' = 4y^2 - 4x^2 y + x^4 + x + 4$

Уравнение Риккати.

Пусть $y_1(x)$ – частное решение. Подстановкой $y = y_1 + u$ уравнение Риккати приводится к уравнению Бернулли.

g) $y x' - 2x + y^2 = 0$

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка.

Для решения используют метод вариации произвольной постоянной.

№2

$$(x^3(1 + \ln(x)) + 2y) dx + x(3y^2x^2 - 1) dy = 0; \quad \mu = \mu(x), \mu = \mu(y).$$

$$\psi(x) = \frac{2-9y^2x^2+1}{x(3y^2x^2-1)} = \frac{-3}{x}$$

$$\psi(y) \neq \frac{2-9y^2x^2+1}{-(x^3(1+\ln(x))+2y)}$$

Интегрирующий множитель будет иметь вид :

$$\mu(x) = e^{\int_1^x \frac{3}{\tau} d\tau} = \frac{1}{x^3}$$

Домножая уравнение на интегрирующий множитель, получим уравнение в полных дифференциалах :

$$(1 + \ln(x) + 2\frac{y}{x^3}) dx = 0 + (3y^2 - \frac{1}{x^2}) dy = 0$$

$$P'_y = \frac{2}{x^3}$$

$$Q'_x = \frac{2}{x^3}$$

$$P'_y = Q'_x$$

$$u(x, y) = \int_1^x (1 + \ln(x)) dx + \int_0^y (3y^2 - \frac{1}{x^2}) dy =$$

$$= [\int_1^x \ln(x) = [u = \ln(x), du = \frac{1}{x} dx, dv = dx, v = x] = x \ln(x) - x + 1] =$$

$$= x \ln(x) + y^3 - \frac{y}{x^2}$$

$$\text{Ответ : } y^3 + x \ln(x) = c + \frac{y}{x^2}$$

№3

$$y(x + \ln(y)) + (x - \ln(y)) y' = 0$$

$$\text{Замена : } u = \ln(y), \quad y = e^u, \quad u' = \frac{y'}{y}, \quad y' = u' e^u.$$

$$e^u(x + u) + e^u u'(x - u) = 0,$$

$$(x + u) + u'(x - u) = 0,$$

$$u' = \frac{du}{dx},$$

$$(x - u)du = -(x + u)dx,$$

$$\text{Замена : } u = vx, \quad du = vdx + sdv,$$

$$(-v^2x + 2vx + x)dx + (x^2 - vx^2)dv = 0$$

$$P'_v = -2vx + 2x,$$

$$Q'_x = 2x - 2vx,$$

$$P'_v = Q'_x \Rightarrow \text{уравнение в полных дифференциалах.}$$

$$u(x, y) = \int_0^x x dx + \int_0^v (x^2 - vx^2) dv = \frac{x^2}{2} + x^2v - \frac{v^2x^2}{2}$$

$$vx^2 + \frac{x^2}{2} - \frac{v^2x^2}{2} = c.$$

$$\text{К замене } v = \frac{u}{x}:$$

$$ux + \frac{x^2}{2} - \frac{u^2}{2} = c.$$

$$\text{К замене } u = \ln(y):$$

$$x \ln(y) + \frac{x^2}{2} - \frac{\ln^2(y)}{2} = c.$$

$$\text{Ответ : } x \ln(y) - \frac{\ln^2(y)}{2} = c - \frac{x^2}{2}.$$

№4

$$dy = (y - 2)^{\frac{2}{3}} dx, \quad y(1) = 2$$

$$\frac{dy}{(y-2)^{\frac{2}{3}}} = dx,$$

$$3(y-2)^{\frac{1}{3}} = x + c,$$

$$y = \left(\frac{x+c}{3}\right)^3 + 2.$$

Используя начальные условия, найду с :

$$2 = \left(\frac{1+c}{3}\right)^3 + 2,$$

$$c = -1.$$

$$y = \left(\frac{x-1}{3}\right)^3 + 2,$$

$$y = \frac{x^3}{27} - \frac{x^2}{9} + \frac{x}{9} + \frac{53}{27}.$$

$$\text{Ответ : } y = \frac{x^3}{27} - \frac{x^2}{9} + \frac{x}{9} + \frac{53}{27}.$$

Вариант 2

№1

a) $xy(1+y^2)dx - (1+x^2)dy = 0$

Уравнение с разделяющимися переменными.

С помощью интегрирующего множителя $\mu(x, y) = (y(1+y^2)(1+x^2))^{-1}$ приводим уравнение к уравнению в полных дифференциалах и используя формулу $u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy$, решаем полученное уравнение.

Решаем уравнение $y(1+y^2)(1+x^2) = 0$.

b) $\frac{x^2 dy - y^2 dx}{(x-y)^2} = 0$

$$P'_y = -\frac{2y(x-y)^2 + 2(x-y)y^2}{(x-y)^4} = \frac{-2y}{(x-y)^3},$$

$$Q'_x = \frac{2x(x-y)^2 - 2(x-y)x^2}{(x-y)^4} = \frac{-2x}{(x-y)^3},$$

$P'_y = Q'_x \Rightarrow$ Уравнение в полных дифференциалах.

Для решения использовать формулу :

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy.$$

c) $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$

Уравнение в нормальной дифференциальной форме.

Ищем интегрирующий множитель в виде $w = x^2 - y^2$:

$$\psi(w) = \frac{4y}{-2xy(2x) - (x^2 + y^2)(-2y)} = \frac{-2}{x^2 - y^2}.$$

$$\mu(w) = e^{-\int_1^w \frac{2}{\tau} d\tau}$$

С помощью полученного интегрирующего множителя $\mu(x^2 - y^2) = \frac{1}{(x^2 - y^2)^2}$ приводим уравнение к уравнению в полных дифференциалах и решаем его, используя формулу :

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy.$$

Решить уравнение $x^2 - y^2 = 0$.

d) $(4 - x^2)y' + xy = 4$

$y' + \frac{x}{4-x^2}y = \frac{4}{4-x^2}$ – линейное дифференциальное уравнение первого порядка.

Для решения использовать метод вариации произвольной постоянной.

e) $y' \operatorname{tg}(x) + 2y \operatorname{tg}^2(x) = ay^2, \quad a \in R$

$y' + 2y \operatorname{tg}(x) = \frac{a}{\operatorname{tg}(x)}y^2 -$ дифференциальное уравнение Бернулли.

Дифференциальное уравнение Бернулли сводится к линейному дифференциальному уравнению подстановкой $z = y^{1-2}$.

f) $x y' = x^2 y^2 - y + 1$

$y' = x y^2 - \frac{y}{x} + \frac{1}{x} -$ уравнение Риккати.

Пусть $y_1(x)$ – частное решение. Подстановкой $y = y_1 + u$ уравнение Риккати приводится к уравнению Бернулли.

g) $dx + (x + y^2) dy = 0$

Уравнение в нормальной дифференциальной форме.

Ищем интегрирующий множитель в виде $w = y$:

$$\psi(y) = \frac{-1}{y} = 1.$$

$$\mu(y) = e^{\int_1^y d\tau}$$

С помощью полученного интегрирующего множителя $\mu(y) = e^y$ приводим уравнение к уравнению в полных дифференциалах и решаем его, используя формулу:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy.$$

№2

$$y^2(x-y) dx + (1-x)y^2 dy = 0; \quad \mu = \mu(x), \mu = \mu(y).$$

$$\psi(x) \neq \frac{2y x - 2y^2}{1-x y^2},$$

$$\psi(y) = \frac{2y x - 2y^2}{-y^2(x-y)} = \frac{2y(x-y)}{-y^2(x-y)} = -\frac{2}{y},$$

$$\mu = \mu(y) = e^{-\int_1^y \frac{2}{\tau} d\tau} = \frac{1}{y^2},$$

Домножая уравнение на интегрирующий множитель, получим уравнение в полных дифференциалах:

$$(x-y)dx + \left(\frac{1}{y^2} - x\right)dy = 0$$

$$u(x, y) = \int_0^x x dx + \int_0^y \left(\frac{1}{y^2} - x\right) dy = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{y} - xy.$$

$$\text{Ответ: } -xy - \frac{1}{y} = c - \frac{x^2}{2}, y = 0.$$

№3

$$y' = x + e^{x+2y}$$

$$\text{Замена: } u = e^{-2y}, \quad y = -\frac{\ln(u)}{2}, \quad y' = -\frac{u'}{2u}, \quad u' = -2e^{-2y}.$$

Получается:

$$\begin{aligned} -\frac{u'}{2u} &= x + \frac{e^x}{u}, \\ u' + 2ux &= -2e^x \end{aligned}$$

Линейное однородное дифференциальное уравнение.

Для решения используется метод вариации произвольной постоянной.

№4

$$dy = x \sqrt{y} dx, \quad y(1) = 0.$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = x dx,$$

$$2y^{\frac{1}{2}} = \frac{x^2}{2} + c,$$

$$y = \left(\frac{x^2}{4} + c \right)^2,$$

При подстановке начальных данных :

$$\left(\frac{1}{4} + c\right)^2 = 0 \Rightarrow c = -\frac{1}{4}.$$

$$\text{Ответ : } y = \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{4} \right)^2.$$