

Difusões Estocásticas com Comutação: Aplicações, Métodos Numéricos e Controle Ótimo

Saul Leite

Centro de Matemática, Computação e Cognição
Universidade Federal do ABC
Santo André, SP

28 Janeiro de 2021

Conteúdo

1. Introdução, definição das difusões estocásticas com comutação;
2. Métodos numéricos para a simulação de funções amostras (ou caminhos);
3. Métodos numéricos para resolução de problemas de controle ótimo;
4. Exemplo de Aplicações em Filas.

Conteúdo

Conteúdo será apresentado com viés computacional e assume pouco conhecimento prévio da área de processos estocásticos.

O objetivo é divulgar a área de pesquisa e falar sobre alguns avanços e linha de pesquisa que estamos desenvolvendo atualmente.

Difusão Estocásticas com Comutação

Difusões (estocásticas) com comutação podem ser descritas como sendo processos estocásticos compostos por duas componentes:

$$(X(\cdot), \alpha(\cdot)) = (\text{contínua}, \text{discreta}),$$

em que $X(\cdot)$ se comporta como uma difusão estocástica e $\alpha(\cdot)$ é um processo de saltos. Muitas vezes $X(\cdot)$ e $\alpha(\cdot)$ são acoplados, no sentido que $X(\cdot)$ depende de $\alpha(\cdot)$ e $\alpha(\cdot)$ também depende de $X(\cdot)$.

Em qualquer caso, o par $(X(\cdot), \alpha(\cdot))$ possui (*conjuntamente*) a propriedade de Markov:

$$\mathbb{E} \left[f(X(t), \alpha(t)) \middle| X(u), \alpha(u); u \leq s \right] = \mathbb{E} \left[f(X(t), \alpha(t)) \middle| X(s), \alpha(s) \right],$$

para qualquer f adequada e $s \leq t$.

Algumas Aplicações

1. **Finanças** ($[15, 16, 8]$): preço de uma ação pode ser representado pela parte contínua e estado discreto pode representar fatores externos, como se o mercado está com tendência de alta ou baixa;
2. **Sistemas de manufatura** ($[2, 14]$): nível de produção pode ser representado pela parte contínua e estados das máquinas pode ser representado pelo processo discreto;
3. **Sistemas de fila** ($[6]$): sistemas de filas em condições de tráfego pesado podem ser modeladas com difusões estocásticas, parte discreta pode representar modo de operação;
4. **Biologia** ($[1, 7]$): Modelos epidemiológicos SIR; sistemas de reações químicas, utilizado para modelar, por exemplo, redes de regulação gênica.

Referências podem ser encontradas no final dos slides.

Definição

Uma difusão estocástica com comutação é um processo estocástico $(X(\cdot), \alpha(\cdot))$ definido no espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ satisfazendo as seguintes equações:

$$(1) \quad dX(t) = b(X(t), \alpha(t))dt + \sigma(X(t), \alpha(t))dW(t)$$

$$(2) \quad \mathbb{P}\left(\alpha(t+h) = j \mid \alpha(t) = i, X(s), \alpha(s), s \leq t\right) \\ = q_{ij}(X(t))h + o(h),$$

$i, j \in E$, $i \neq j$, com a condição inicial $(X(0), \alpha(0)) = (X_0, \alpha_0)$

Definição

Uma difusão estocástica com comutação é um processo estocástico $(X(\cdot), \alpha(\cdot))$ definido no espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ satisfazendo as seguintes equações:

$$(1) \quad dX(t) = b(X(t), \alpha(t))dt + \sigma(X(t), \alpha(t))dW(t)$$

$$(2) \quad \mathbb{P}\left(\alpha(t+h) = j \mid \alpha(t) = i, X(s), \alpha(s), s \leq t\right) \\ = q_{ij}(X(t))h + o(h),$$

$i, j \in E$, $i \neq j$, com a condição inicial $(X(0), \alpha(0)) = (X_0, \alpha_0)$ em que:

1. $E = \{1, \dots, m\}$ conjunto finito de estados para α ;
2. $b : \mathbb{R}^d \times E \rightarrow \mathbb{R}^d$ termo de deriva;
3. $\sigma : \mathbb{R}^d \times E \rightarrow \mathbb{R}^d$ termo de dispersão;
4. $W(\cdot)$ é um *Movimento Browniano*;
5. $Q(x) := \{q_{ij}(x)\}_{i,j \in E}$, com $q_{ij} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, satisfazendo a “ q -propriedade”: $q_{ij}(\cdot)$ uniformemente limitada, $q_{ij}(x) \geq 0$, $i \neq j$, $q_{ii}(x) = -\sum_{j \neq i} q_{ij}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$.

Movimento Browniano

Um Movimento Browniano “escalar” padrão, também conhecido como processo de Wiener padrão, é o processo estocástico $W(\cdot)$ com as seguintes propriedades:

1. $W(0) = 0$;
2. para $0 \leq s \leq t$ o incremento $W(t) - W(s)$ tem distribuição Normal com média zero e variância $t - s$. Ou de forma equivalente,

$$W(t) - W(s) \sim \sqrt{t - s} \xi,$$

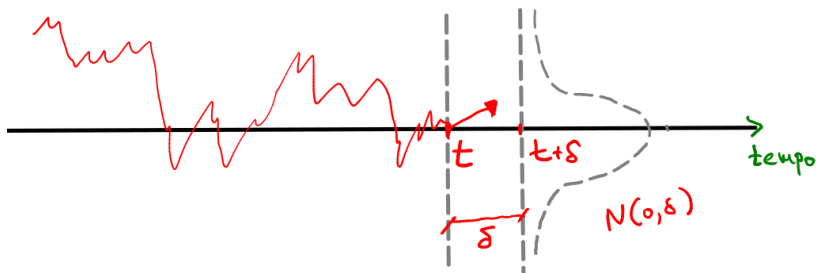
em que ξ é uma variável aleatória com distribuição Normal com média zero e desvio padrão 1.

3. Para $0 \leq s < t < u < v$ os incrementos $W(t) - W(s)$ e $W(v) - W(u)$ são *independentes*.

Movimento Browniano

Como W é um processo estocástico, para cada $\omega \in \Omega$ (espaço amostral), temos que $W(\omega, \cdot)$ é uma função $[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ representando o caminho percorrido.

Uma ilustração destes caminhos gerados por um movimento Browniano escalar é dado abaixo:



É possível mostrar que estes caminhos são: *contínuos* e *não diferenciáveis* em qualquer ponto.

Definição

Outra forma de escrever a equação (1) é de forma integral:

$$(1) \quad X(t) = X_0 + \int_0^t b(X(s), \alpha(s))dt + \int_0^t \sigma(X(s), \alpha(s))dW(s).$$

A integral em relação ao movimento Browniano é conhecida com integral de Itô (a noção de integral de Lebesgue–Stieltjes não é adequada já que os caminhos de $W(\cdot)$ não tem variação limitada).

De forma simplificada, a integral de Itô $\int_0^t f(s)dW(s)$ pode ser pensada como limites de expressões como a dada abaixo:

$$\sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) \left(W(t_{j+1}) - W(t_j) \right)$$

em que $t_j = j\Delta$ e $\Delta = T/N$ (o fato que avaliarmos $f(\cdot)$ no ponto t_j é importante aqui). Uma boa introdução para EDEs com mesma abordagem da usada aqui é [3].

Equações Diferenciais Estocásticas (EDE) com comutação

Existência e unicidade de soluções para este tipo de equação pode ser obtido sob hipóteses usuais de crescimento linear e continuidade de Lipschitz para os parâmetros b e σ .

Precisamos, além disso, que Q seja contínua e limitada.

Teo.([13, p. 30]) Suponha que $b(\cdot, \cdot)$ e $\sigma(\cdot, \cdot)$ satisfazem:

$$|b(x, i)| + |\sigma(x, i)| \leq K(1 + |x|), \quad i \in E,$$

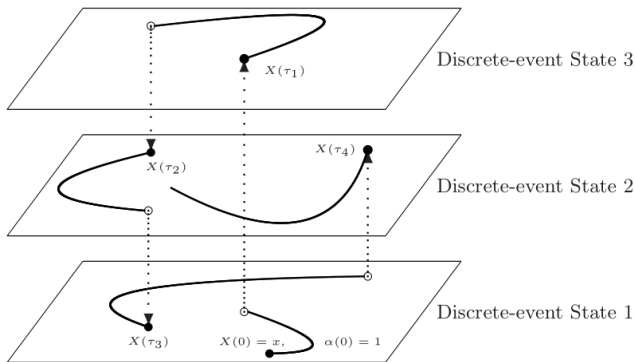
e que para cada $N \geq 1$, existe uma constante positiva M_N tal que para todos os $t \geq 0$, $i \in E$, e todos $x, y \in \mathbb{R}^d$ com $|x| \vee |y| \leq N$,

$$|b(x, i) - b(y, i)| \vee |\sigma(x, i) - \sigma(y, i)| \leq M_N |y - x|.$$

Então existe uma única solução $(X(\cdot), \alpha(\cdot))$ para a equação (1) e (2).

Equações Diferenciais Estocásticas (EDE) com comutação

Prop.([13, p. 33]) $(X(\cdot), \alpha(\cdot))$ possui funções amostras contínuas a direita e com limites a esquerda.



Como $(X(\cdot), \alpha(\cdot))$ é um processo estocástico, podemos pensar que este induz uma medida de probabilidade sobre o espaço de funções contínuas a direita com limite a esquerda. Cada *realização* deste processo terá caminhos diferentes.

Exemplo

Vamos considerar como exemplo o modelo apresentado em:

Stock trading: An Optimal Selling Rule por Zhang [15]:

$$\begin{cases} dX(t) = \mu(\alpha(t))X(t)dt + \sigma(\alpha(t))X(t)dW(t) \\ X(0) = X_0, \end{cases}$$

em que:

1. $X(\cdot)$ representa o preço de uma ação no mercado financeiro (exceto pela dependência em $\alpha(\cdot)$, o modelo acima é conhecido como “Movimento Browniano Geométrico” e é muito usado como modelo para preço de ações).
2. $\alpha(\cdot)$ representa períodos de alta e baixa do mercado financeiro, medido por algum índice. O processo toma valor em $E = \{1, 2\}$, 1 = alta, e 2 = baixa. Parâmetro Q é dado por:

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & -\lambda_2 \end{bmatrix}.$$

λ_i é a taxa com que $\alpha(\cdot)$ sai do estado $i \in E$.

Exemplo



Up-trend	1/2-4/22	6/16-7/20	9/11-9/23	10/9-12/31
Down-trend	4/23-6/15	7/21-9/10	9/24-10/8	

Usando dados de ações da Microsoft durante o ano de 1999 e usando o índice NASDAQ para o mercado, Zhang estimou os seguintes parâmetros:

$$\mu(1) = 1,5968; \quad \mu(2) = -1,41155$$

$$\sigma(1) = 0,44; \quad \sigma(2) = 0,63$$

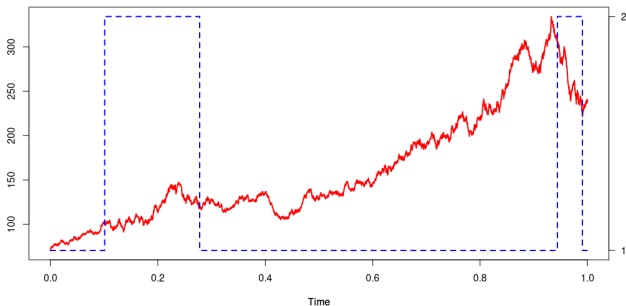
$$\lambda_1 = 6,04; \quad \lambda_2 = 8,90$$

$X_0 = 70,4$ e α_0 tem distribuição inicial $p_0 = (1/2; 1/2)'$.

Exemplo

Como $(X(\cdot), \alpha(\cdot))$ solução da EDE com comutação acima é um processo estocástico, o par induz uma medida de probabilidade sobre o espaço de funções contínuas a direita com limite a esquerda.

Cada realização $\omega \in \Omega$ corresponde à um ensaio ou possibilidade de caminho para o processo. Abaixo temos a ilustração de *um destes caminhos*:



Exemplo

A dinâmica do processo $\alpha(\cdot)$ pode ser descrita da seguinte forma:

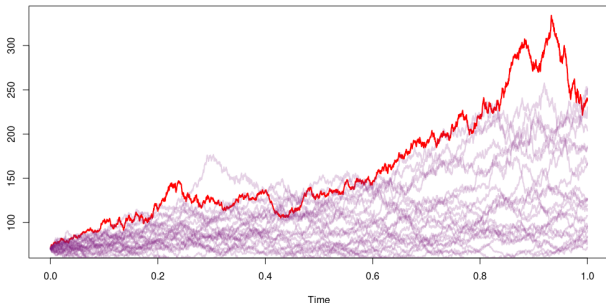
1. processo permanece em um estado $i \in E$ por um tempo com duração aleatória com distribuição exponencial e taxa $-q_{ii} = \lambda_i$ (se $q_{ij}(x)$ depende do estado, a taxa é alterada de acordo com o valor de $X(\cdot)$);
2. quando este tempo se encerra, o processo $\alpha(\cdot)$ salta para outro estado.

O caminho ilustrado acima foi gerado por um *método numérico* que será apresentado a seguir.

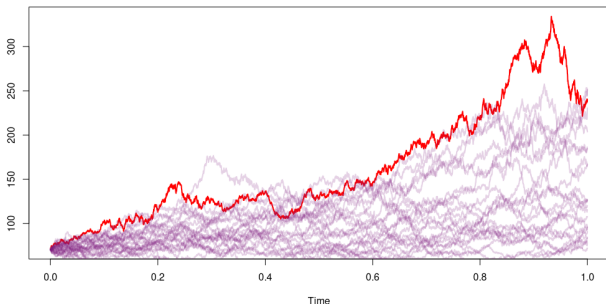
Métodos Numéricos para Simulação

Muitas vezes métodos numéricos são usados para estimar propriedades do processo $(X(\cdot), \alpha(\cdot))$, repetindo a simulação em um processo de Monte Carlo.

Por exemplo, poderíamos estimar a probabilidade da difusão com comutação atingir um preço x dentro de um intervalo de tempo $[0, T]$ repetindo a simulação várias vezes e estimando a probabilidade.



Exemplo



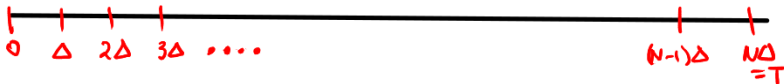
Nestas simulações, obtive a probabilidade de 0,73 para o caminho ultrapassar \$100 antes de cair abaixo de \$50.

Obs.: No trabalho do Zhang mencionado acima, foi encontrado uma forma analítica para o problema de “parada ótima.” Ou seja, momento ótimo para vender a ação.

Métodos Numéricos para Simulação

O método numérico utilizado para simular estes caminhos é uma adaptação do método “Euler-Maruyama”. Esta adaptação foi primeiro proposta por [9] e posteriormente estendida por [13] para o caso em que $Q(\cdot)$ depende do estado x .

A ideia é a seguinte, discretizamos o intervalo de tempo $[0, T]$ que desejamos fazer a simulação com uma malha de pontos espaçados por $\Delta > 0$:



em que $\Delta = \frac{T}{N}$ e N é o número de subintervalos de $[0, T]$.

Métodos Numéricos para Simulação

Para cada ponto do conjunto discretizado acima,
 $n \in \{1, 2, \dots, N\}$, definimos a seguinte variável aleatória:

$$X_n = X_{n-1} + \Delta b(X_{n-1}, \alpha_{n-1}) + \sqrt{\Delta} \sigma(X_{n-1}, \alpha_{n-1}) \xi_n,$$

em que $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ são variáveis aleatórias com distribuição Normal padrão (i.e. média zero e variância unitária).

A ideia é que uma realização do caminho de $\{X_n\}_{n \geq 0}$ seja uma aproximação para os caminhos de $X(\cdot)$.

Note que precisamos também gerar os caminhos de $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$, que seria uma versão discretizada do processo $\alpha(\cdot)$. Vejamos como isso é feito no próximo slide.

Métodos Numéricos para Simulação

Suponha primeiramente que $Q = \{q_{ij}\}_{i,j \in E}$ não dependa de x . Então, sabe-se da teoria de cadeias de Markov a tempo contínuo com espaços de estados finitos, que a matriz de transição satisfaz:

$$p_{ij}(t) = \mathbb{P}(\alpha(t) = j \mid \alpha(0) = i) = \left(\exp(Qt) \right)_{ij},$$

que é a solução do sistema diferencial de Kolmogorov.

Como $\exp(Qt)$ é definida da seguinte forma:

$$\exp(Qt) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (Qt)^n,$$

podemos aproximar:

$$\exp(Qt) \approx I + tQ,$$

com erro na ordem de $O(t^2)$.

Métodos Numéricos para Simulação

Para o caso geral, em que Q depende de $X(\cdot)$, a ideia é definir $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$ como sendo uma cadeia de Markov a tempo discreto com matriz de transição dada por:

$$P^\Delta = I + \Delta Q(X_{n-1}),$$

com distribuição inicial dada por p_0 .

Note que a matriz P^Δ acima é uma matriz de transição, já que soma 1 nas linhas e os elementos são todos não negativos:

- as linhas da matriz Q somam zero pela “q-propriedade”.

Métodos Numéricos para Simulação

Para gerar os caminhos de $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$ podemos fazer o seguinte:

1. para a condição inicial, geramos um valor de acordo com a distribuição inicial de $\alpha(\cdot)$ dada por p_0 ;
2. durante a simulação, se estamos no tempo $n - 1$ no estado $\alpha_{n-1} = i$, o valor de α_n será gerado de acordo com uma v.a. com distribuição

$$p_i = \left(I + \Delta Q(X_{n-1}) \right)_i.$$

(ou seja, a i -ésima linha de P^Δ).

Convergência do Método

Em [13], os autores mostraram que:

Teo. Sob as hipóteses anteriores $(X^\Delta(\cdot), \alpha^\Delta(\cdot))$ converge fracamente para $(X(\cdot), \alpha(\cdot))$, solução da EDE com comutação.

No resultado acima, $(X^\Delta(\cdot), \alpha^\Delta(\cdot))$ é uma interpolação a tempo contínuo de $\{(X_n, \alpha_n)\}$. Geralmente é possível demonstrar esse tipo de resultado com condições mais fracas sobre os parâmetros b e σ .

Teo. Sob as mesmas hipóteses acima, temos o seguinte resultado mais forte:

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| X^\Delta(t) - X(t) \right|^2 \right] = O(\Delta).$$

Logo a diferença vai para zero quando $\Delta \rightarrow 0$.

Obs.: Note que:

1. no primeiro resultado, estamos comparando as distribuições de probabilidade induzidas sobre o espaço de funções contínuas a direita com limite a esquerda;
2. no segundo resultado, temos que cada caminho de $X^\Delta(\cdot)$ converge para os caminhos de $X(\cdot)$ (estamos comparando os caminhos).

Obs.: Note que:

1. no primeiro resultado, estamos comparando as distribuições de probabilidade induzidas sobre o espaço de funções contínuas a direita com limite a esquerda;
2. no segundo resultado, temos que cada caminho de $X^\Delta(\cdot)$ converge para os caminhos de $X(\cdot)$ (estamos comparando os caminhos).

No slide anterior, discutimos a convergência das aproximações para o processo original. Mas a **taxa** com que esta convergência acontece também é importante.

Taxa de Convergência do Método

Existem duas noções mais usuais para taxas de convergência:

1. Taxa de convergência **forte** é γ se existe uma constante C tal que:

$$\mathbb{E}\left[|X_n - X(\tau)|\right] \leq C\Delta^\gamma,$$

para qualquer $\tau = n\Delta \in [0, T]$ e Δ suf. pequeno.

Obs. Note que o resultado anterior nos diz que $\gamma = 1/2$ para o método de Euler–Maruyama. Esta é a mesma taxa obtida para equações diferenciais estocásticas usuais.

Taxa de Convergência do Método

Existem duas noções mais usuais para taxas de convergência:

2. Taxa de convergência **fraca** é γ se existe uma constante C tal que para todas as funções f em uma certa classe adequada verifica-se:

$$\left| \mathbb{E}[f(X_n)] - \mathbb{E}[f(X(\tau))] \right| \leq C\Delta^\gamma,$$

para qualquer $\tau = n\Delta \in [0, T]$ e Δ suf. pequeno.

Obs. Geralmente f incluem polinômios (em regiões limitadas). Portanto, podemos pensar que estamos verificando a proximidades dos momentos destas v.a.s.

Taxa de Convergência do Método

Obs. Desconheço resultados que demostram a taxa de convergência fraca do método apresentado aqui. Mas para EDEs usuais, sabe-se que a ordem de convergência para o método de Euler–Maruyama é de $\gamma = 1$.

Métodos numéricos para EDEs usuais foram extensivamente estudados, veja por exemplo o livro de Kloeden & Platen [5].

- Existem vários métodos de mais alta ordem de convergência e estes ainda não foram adaptados para o caso com comutação. Uma exceção é o método de Milstein para o caso em que $Q(x)$ não depende de x , publicado em 2017 [11]

Obs. O método de Milstein possui ordem de convergência forte $\gamma = 1$.

Controle Ótimo

Vamos agora introduzir problemas de controle ótimo envolvendo estas difusões estocásticas com comutação. Vamos primeiramente considerar um problema de *parada ótima* (que é um dos problemas mais simples de controle).

Suponha que $X(t)$ toma valor em \mathbb{R} e que $\tau = \inf \left\{ t \geq 0 : X(t) \in B \right\}$ em que B é um conjunto na forma $B = (a, b)^c$, para $a < b$.

Seja $k : \mathbb{R} \times E \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \times E \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas. Defina o seguinte custo:

$$W(x, i, \tau) := \mathbb{E}_{(x, i)} \left[\int_0^\tau k(X(s), \alpha(s)) ds + g(X(\tau), \alpha(\tau)) \right].$$

Gostaríamos de encontrar o tempo de parada τ (ou o conjunto B associado) que faz esse custo ser mínimo.

Exemplo

Zhang [15] considerou o seguinte problema de parada ótima: encontrar τ que minimiza:

$$\mathbb{E}_x \left[g(S(\tau)) e^{-\beta \tau} \right] = \mathbb{E}_x \left[\left(\frac{S(\tau) - S_0}{S_0} \right) e^{-\beta \tau} \right],$$

em que $S(t)$ é o preço da ação modelada por uma difusão com comutação:

$$\begin{cases} dS(t) = \mu(\alpha(t))S(t)dt + \sigma(\alpha(t))S(t)dW(t) \\ S(0) = S_0, \end{cases}$$

A constante $\beta > 0$ é um fator de desconto. Em nossa discussão, iremos considerar o caso sem desconto para simplificar.

Controle Ótimo

Para isso, podemos começar caracterizando o custo mínimo, que é dado por

$$V(x, i) := \inf_{\tau} W(x, i, \tau),$$

onde τ varia dentro do conjunto de “tempos de parada” na forma dada acima.

Vamos supor que B é um conjunto ótimo de parada (supondo que ele exista). Então, teremos que:

$$\begin{cases} V(x, i) < g(x, i) & \text{se } x \notin B \\ V(x, i) = g(x, i) & \text{se } x \in B \end{cases}$$

Eq. Programação Dinâmica

A equação de programação dinâmica caracteriza o custo ótimo $V(x, i)$. Vamos ilustrar sua derivação neste slide.

Suponha que o processo anda em passos de tamanho Δ no tempo. A cada tempo $n\Delta$, temos a decisão de **parar** ou **continuar**:

$$\text{parar} \rightarrow g(x, i)$$

$$\text{continuar} \rightarrow k(x, i)\Delta + \mathbb{E}_{(x, i)} \left[V(X(\Delta), \alpha(\Delta)) \right],$$

supondo que $(X(n\Delta), \alpha(n\Delta)) = (x, i)$.

Note que $\mathbb{E}_{(x, i)} \left[V(X(\Delta), \alpha(\Delta)) \right]$ seria a quantidade que ganhamos se continuarmos a partir do tempo $n\Delta$ de forma ótima.

Eq. Programação Dinâmica

Logo, como desejamos minimizar o custo, escolheríamos o menor destes dois valores. Desta forma:

$$V(x, i) = \min \left\{ g(x, i), k(x, i)\Delta + \mathbb{E}_{(x, i)} \left[V(X(\Delta), \alpha(\Delta)) \right] \right\}.$$

Subtraindo $V(x, i)$ de ambos os lados, tem-se:

$$0 = \min \left\{ g(x, i) - V(x, i), \mathbb{E}_{(x, i)} \left[V(X(\Delta), \alpha(\Delta)) \right] - V(x, i) + k(x, i)\Delta \right\}$$

No caso em que $x \in B$, teríamos $V(x, i) = g(x, i)$. Mas no caso em que $x \notin B$, o segundo termo deve ser zero. Isso implica que:

$$\frac{\mathbb{E}_{(x, i)} \left[V(X(\Delta), \alpha(\Delta)) \right] - V(x, i)}{\Delta} + k(x, i) = 0$$

Eq. Programação Dinâmica

Tomando o limite $\Delta \rightarrow 0$, temos que:

$$(\star) \begin{cases} \mathcal{L}V(x, i) + k(x, i) = 0 & \text{para } x \notin B \\ V(x, i) = g(x, i) & \text{para } x \in B, \end{cases}$$

em que \mathcal{L} é conhecido como “*gerador infinitesimal*” da difusão estocástica com comutação e é dado por:

$$\mathcal{L}f(x, i) = b(x, i)f_x(x, i) + \frac{1}{2}\sigma^2(x, i)f_{xx}(x, i) + \sum_{j \in E} q_{ij}(x)f(x, j),$$

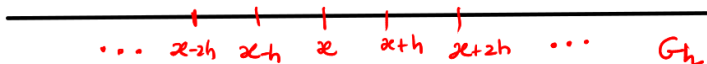
para funções $f(\cdot)$ suf. regulares (f_x e f_{xx} são a primeira e segunda derivadas em relação a x).

A equação (\star) é conhecida como equação de **programação dinâmica** e pode ser usada para determinar $V(\cdot)$. Veremos a seguir o método da Cadeia de Markov aproximada para resolver este problema numericamente.

Método da Cadeia de Markov Aproximada

Queremos uma aproximação discreta para $V(x, i)$, dada por $V^h(x, i)$ tomando valor em um conjunto

$G_h := \{\dots, x - h, x, x + h, \dots\}$, como ilustrado abaixo:



Para isso, usaremos **diferenças finitas** para aproximar a equação de programação dinâmica que discutimos anteriormente.

Método da Cadeia de Markov Aproximada

Usaremos diferenças finitas dadas abaixo:

$$D_h^+ f(x, i) = \frac{f(x + h, i) - f(x, i)}{h},$$

$$D_h^- f(x, i) = \frac{f(x, i) - f(x - h, i)}{h},$$

$$D_h^2 f(x, i) = \frac{f(x + h, i) - 2f(x, i) + f(x - h, i)}{h^2}.$$

Logo, temos a seguinte aproximação para o gerador infinitesimal

$$\begin{aligned} L^h f(x, i) &= D_h^+ f(x, i) b^+(x, i) + D_h^- b^-(x, i) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sigma^2(x, i) D_h^2 f(x, i) + \sum_{j \in E} q_{ij}(x) f(x, j), \end{aligned}$$

em que $b^+(x, i) = \max\{0, b(x, i)\}$ e $b^-(x, i) = \min\{0, b(x, i)\}$.

Método da Cadeia de Markov Aproximada

Desta forma, temos a seguinte versão discretizada da equação de programação dinâmica:

$$\begin{cases} L^h V^h(x, i) + k(x, i) = 0 & \text{para } x \notin B \\ V^h(x, i) = g(x, i) & \text{para } x \in B, \end{cases}$$

Método da Cadeia de Markov Aproximada

Desta forma, temos a seguinte versão discretizada da equação de programação dinâmica:

$$\begin{cases} L^h V^h(x, i) + k(x, i) = 0 & \text{para } x \notin B \\ V^h(x, i) = g(x, i) & \text{para } x \in B, \end{cases}$$

Substituindo a expressão para L^h e rearranjando os termos, teremos o seguinte para $x \notin B$:

$$\begin{aligned} V^h(x, i) = & \left\{ V^h(x + h, i) \left[\frac{hb^+(x, i) + \frac{1}{2}\sigma^2(x, i)}{M(x, i)} \right] \right. \\ & + V^h(x - h, i) \left[\frac{-hb^+(x, i) + \frac{1}{2}\sigma^2(x, i)}{M(x, i)} \right] \\ & \left. + \sum_{j \neq i} V(x, j) q_{ij}(x) \Delta t^h(x, i) + k(x, i) \Delta t^h(x, i) \right\}, \end{aligned}$$

em que $M(x, i) = |b(x, i)|h + \sigma^2(x, i) - q_{ii}(x, i)h^2$ e $\Delta t^h(x, i) = h^2/M(x, i)$.

Método da Cadeia de Markov Aproximada

Note que, se definirmos uma cadeia de Markov a tempo discreto $\{(\zeta_n^h, \vartheta_n^h)\}_{n \geq 0}$ tomando valor no conjunto $G_h \times E$, com probabilidade de transição dada por:

$$\begin{aligned}p((x+h, i)|(x, i)) &= \frac{hb^+(x, i) + \frac{1}{2}\sigma^2(x, i)}{M(x, i)} \\p((x-h, i)|(x, i)) &= \frac{-hb^-(x, i) + \frac{1}{2}\sigma^2(x, i)}{M(x, i)} \\p((x, j)|(x, i)) &= q_{ij}(x)\Delta t^h(x, i), \quad i \neq j,\end{aligned}$$

podemos escrever a equação acima da seguinte forma:

$$V^h(x, i) = \mathbb{E}_{(x, i)}[V^h(\zeta_1^h, \vartheta_1^h)] + k(x, i)\Delta t^h(x, i),$$

para $x \notin B$ e $V^h(x, i) = g(x, i)$ para $x \in B$.

Método da Cadeia de Markov Aproximada

De forma equivalente, poderíamos escrever:

$$V^h(x, i) = \min \left\{ g(x, i), \mathbb{E}_{(x, i)}[V^h(\zeta_1^h, \vartheta_1^h)] + k(x, i)\Delta t^h(x, i) \right\},$$

para $(x, i) \in G_h \times E$.

Da teoria dos processos de decisão de Markov (MDP), sabe-se que esta é a equação de programação dinâmica do seguinte problema: encontrar “tempo de parada” N que minimiza:

$$W^h(x, i, N) = \mathbb{E}_{(x, i)} \left[\sum_{n=1}^{N-1} k(\zeta_n^h, \vartheta_n^h)\Delta t^h(x, i) + g(\zeta_N^h, \vartheta_N^h) \right],$$

Tem-se que $V^h(x, i) = \inf_N W^h(x, i, N)$.

Método da Cadeia de Markov Aproximada

Existem algoritmos eficientes para resolver tais problemas. Por exemplo, podemos definir $V_0^h \equiv 0$ e repetir o processo iterativo:

$$V_{n+1}^h(x, i) = \min \left\{ g(x, i), \mathbb{E}_{(x, i)}[V_n^h(\zeta_1^h, \vartheta_1^h)] + k(x, i)\Delta t^h(x, i) \right\}.$$

É possível mostrar que $V_n^h \rightarrow V^h$.

Conhecendo V^h , podemos determinar se devemos ou não parar a cada par (x, i) verificando qual valor é mínimo:

$$V^h(x, i) = \min \left\{ g(x, i), \mathbb{E}_{(x, i)}[V^h(\zeta_1^h, \vartheta_1^h)] + k(x, i)\Delta t^h(x, i) \right\}.$$

Este algoritmo é conhecido como “Iteração de Valor.”

Método da Cadeia de Markov Aproximada

Para mostrar que este método é adequado, mostra-se que:

1. $\{(\zeta_n^h, \vartheta_n^h)\}_{n \geq 0}$ (ou uma versão interpolada) converge em distribuição para a solução da EDE com comutação - para isso, geralmente precisamos que esta cadeia de Markov seja “localmente consistente” com a difusão com comutação.
2. $V^h(x, i)$ converge para $V(x, i)$ quando $h \rightarrow 0$.

Estes resultados de convergência para o problema de parada ótima foram demonstrados por [12], para o caso em que q_{ij} não depende do estado.

Exemplo de Aplicação

Para ilustrar a aplicação do método, podemos resolver o problema de parada ótima apresentado por Zhang [15].

- Código está disponível para download em um repositório no github (link no final dos slides).
- Resultados ficaram um pouco diferentes dos apresentados em [15] (usando abordagem diferente). Por exemplo, para $\beta = 10$, o valor de venda foi \$86,97 enquanto em [15] tem-se \$81,00 (diferença é maior para valores de β menores).

Uma observação aqui é que o modelo é desenvolvido para:

$$dX(t) = \left(\mu(\alpha(t)) - \frac{1}{2}\sigma^2(\alpha(t)) \right) dt + \sigma(\alpha(t))dW(t),$$

em que $S(t) = S_0 e^{X(t)}$. Usando a *fórmula de Itô*, é possível mostrar que $S(t)$ será um Movimento Brownian Geométrico com comutação.

Exemplo de Aplicação

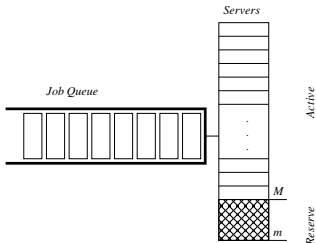
Motivação: Sistemas computacionais que dão suporte para empresas baseadas na Internet são compostos por centenas de computadores em paralelo.

Geralmente computadores são mantidos ligados para atender momentos de pico de demanda. Computadores ligados sem processamento podem consumir até 60% do consumo energético de quando estão processando.

Em estudo feito pela EPA, estimou que mais do que 1,5% do total do consumo elétrico nos Estados Unidos foi dedicado a estes centros computacionais.

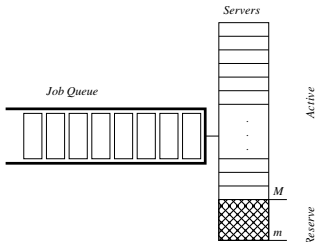
Gostaríamos de estudar políticas de controle que desativam ou ativam servidores para reduzir o consumo de energia. A ideia é modelar estes sistemas de filas utilizando difusões estocásticas com comutação.

Modelo de Filas



Um sistema composto por uma fila e vários servidores idênticos. Uma parte dos servidores chamada de **reservas** podem ser ligados e desligados.

Modelo de Filas

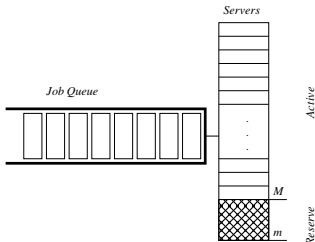


Um sistema composto por uma fila e vários servidores idênticos. Uma parte dos servidores chamada de **reservas** podem ser ligados e desligados.

Δ_l^a : tempo entre a chegada do cliente l e $l - 1$. (iid)

Δ_l^d : tempo de processamento para cliente l . (iid)

Modelo de Filas



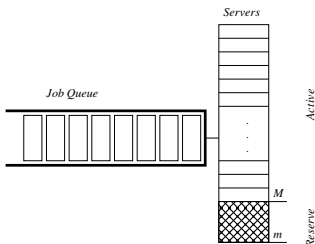
Um sistema composto por uma fila e vários servidores idênticos. Uma parte dos servidores chamada de **reservas** podem ser ligados e desligados.

Δ_l^a : tempo entre a chegada do cliente l e $l - 1$. (iid)

Δ_l^d : tempo de processamento para cliente l . (iid)

Quando Δ_l^a e Δ_l^d possuem distribuição exponencial, o processo do número de clientes na fila é Markoviano “Teoria de Filas clássica” (caso tratado por Mitrani 2013 [10]).

Modelo de Filas



Um sistema composto por uma fila e vários servidores idênticos. Uma parte dos servidores chamada de **reservas** podem ser ligados e desligados.

Δ_l^a : tempo entre a chegada do cliente l e $l - 1$. (iid)

Δ_l^d : tempo de processamento para cliente l . (iid)

Quando Δ_l^a e Δ_l^d possuem distribuição exponencial, o processo do número de clientes na fila é Markoviano “Teoria de Filas clássica” (caso tratado por Mitrani 2013 [10]).

Caso contrário, o processo **não** é Markoviano.

Modelo de Filas

Para tratar casos em que Δ_l^a e Δ_l^d não possuem distribuição exponencial, podemos utilizar aproximações por difusão que aparecem em situação limite - tráfego pesado.

Modelo de Filas

Para tratar casos em que Δ_l^a e Δ_l^d não possuem distribuição exponencial, podemos utilizar aproximações por difusão que aparecem em situação limite - tráfego pesado.

Escrevemos a carga de trabalho total no sistema no tempo t como sendo (assumimos paralelismo entre as máquinas):

$$X(t) = X(0) + \sum_{l=1}^{A(t)} \Delta_l^d - \int_0^t f(\alpha(s)) ds + Z(t),$$

Modelo de Filas

Para tratar casos em que Δ_l^a e Δ_l^d não possuem distribuição exponencial, podemos utilizar aproximações por difusão que aparecem em situação limite - tráfego pesado.

Escrevemos a carga de trabalho total no sistema no tempo t como sendo (**assumimos paralelismo entre as máquinas**):

$$X(t) = X(0) + \sum_{l=1}^{A(t)} \Delta_l^d - \textcolor{red}{n} \int_0^t f(\alpha(s)) ds + Z(t),$$

em que:

$\textcolor{red}{n}$: número de servidores

$A(t)$: número de clientes até o tempo t

$\alpha(\cdot)$: estado dos servidores reserva $\{0,1,2,3\}$

$f(\cdot)$: fração dos servidores ativos

$Z(\cdot)$: processo de reflexão, mantém X positivo.

Modelo de Filas

Para tratar casos em que Δ_l^a e Δ_l^d não possuem distribuição exponencial, podemos utilizar aproximações por difusão que aparecem em situação limite - tráfego pesado.

Escrevemos a carga de trabalho total no sistema no tempo t como sendo (**assumimos paralelismo entre as máquinas**):

$$X^n(t) = X^n(0) + \sum_{l=1}^{A^n(t)} \Delta_l^d - n \int_0^t f^n(\alpha^n(s)) ds + Z^n(t),$$

em que:

n : número de servidores

$A(t)$: número de clientes até o tempo t

$\alpha(\cdot)$: estado dos servidores reserva $\{0,1,2,3\}$

$f(\cdot)$: fração dos servidores ativos

$Z(\cdot)$: processo de reflexão, mantém X positivo.

Quando $n \rightarrow \infty$, $x^n = \frac{X}{\sqrt{n}}$ converge em distribuição para uma difusão com comutação, em regime de tráfego pesado.

Aproximação em Tráfego Pesado

O regime de **tráfego pesado** é representado através da seguinte hipótese:

$$\sqrt{n}(\rho^n - f^n(i)) = b^n(i) \rightarrow b(i), \quad n \rightarrow \infty$$

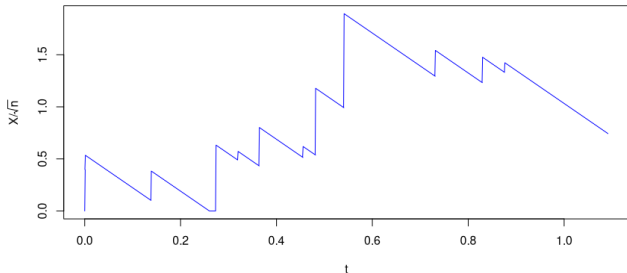
para cada $i \in E = \{0, 1, 2, 3\}$, em que

$$\rho^n = \frac{\mathbb{E}[\Delta_l^d]}{n\mathbb{E}[\Delta_l^{a,n}]} = \frac{\lambda^{a,n}}{n\lambda^d}$$

é chamado de **intensidade de tráfego**. Em particular implica que $\rho^n \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$.

Aproximação em Tráfego Pesado

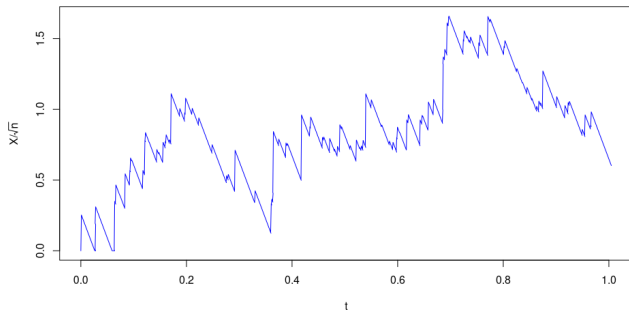
Exemplo com $\mathbb{E}[\Delta_t^a] = 1/0.9$, $\mathbb{E}[\Delta_t^d] = 1$, $n = 10$ ($\rho^n = 0.9$ - supondo todos os servidores ativos):



Este é o caminho do processo escalonado: $x^n(\cdot) = X^n(\cdot)/\sqrt{n}$.

Aproximação em Tráfego Pesado

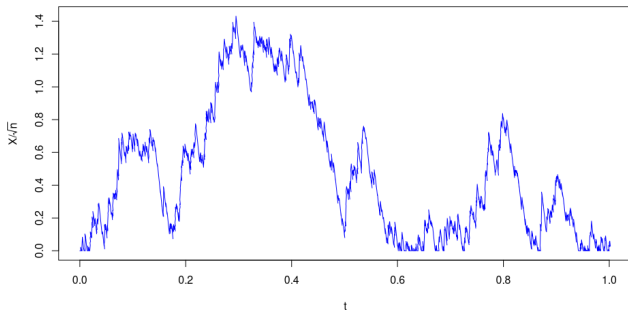
Exemplo com $\mathbb{E}[\Delta_t^a] = 1/0.9$, $\mathbb{E}[\Delta_t^d] = 1$, $n = 100$ ($\rho^n = 0.9$ - supondo todos os servidores ativos):



Este é o caminho do processo escalonado: $x^n(\cdot) = X^n(\cdot)/\sqrt{n}$.

Aproximação em Tráfego Pesado

Exemplo com $\mathbb{E}[\Delta_l^a] = 1/0.9$, $\mathbb{E}[\Delta_l^d] = 1$, $n = 1000$ ($\rho^n = 0.9$ - supondo todos os servidores ativos):



Este é o caminho do processo escalonado: $x^n(\cdot) = X^n(\cdot)/\sqrt{n}$. Note que o caminho acima se assemelha a um caminho de uma difusão estocástica.

Modelo para o estado dos servidores reservas

Consideramos que α^n é um processo de salto a tempo contínuo controlado tomando valor no seguinte conjunto E de estados:

- 0: reserva desligada
- 1: reserva ligando
- 2: reserva desligando
- 3: reserva ligada

Modelo para o estado dos servidores reservas

Consideramos que α^n é um processo de salto a tempo contínuo controlado tomando valor no seguinte conjunto E de estados:

- 0: reserva desligada
- 1: reserva ligando
- 2: reserva desligando
- 3: reserva ligada

Para controles tomando valor no conjunto \mathcal{U} , α^n possui a seguinte taxa de transição entre estados $i, j \in E$, $j \neq i$:

$$\begin{aligned} q_{ij}^{n,v}(x^n(t)) &= \int_{\mathcal{U}} q_{ij}^n(u) v(x^n(t), i)(du) \\ &= \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{\delta} \mathbb{P}(\alpha^n(t + \delta) = j | \alpha^n(t) = i, x^n(s), \alpha^n(s), s \leq t), \end{aligned}$$

Modelo para o estado dos servidores reservas

Consideramos que α^n é um processo de salto a tempo contínuo controlado tomando valor no seguinte conjunto E de estados:

- 0: reserva desligada
- 1: reserva ligando
- 2: reserva desligando
- 3: reserva ligada

Para controles tomando valor no conjunto \mathcal{U} , α^n possui a seguinte taxa de transição entre estados $i, j \in E$, $j \neq i$:

$$\begin{aligned} q_{ij}^{n,v}(x^n(t)) &= \int_{\mathcal{U}} q_{ij}^n(u) v(x^n(t), i)(du) \\ &= \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{\delta} \mathbb{P}(\alpha^n(t + \delta) = j | \alpha^n(t) = i, x^n(s), \alpha^n(s), s \leq t), \end{aligned}$$

Usamos a representação do controle de forma relaxada. O controle $v(\cdot, \cdot)$ é uma medida de probabilidade sobre o conjunto \mathcal{U} .

Resultado Limite

Teo.([6]) Suponha que a condição inicial para o n -ésimo sistema é $(x^n(0), \alpha^n(0))$ e converge fracamente para (x_0, α_0) , uma variável aleatória tomando valor em $\mathbb{R}_+ \times E$. Seja (x^n, α^n) o modelo para o n -ésimo sistema de fila usando o controle v . Então (x^n, α^n) converge em distribuição para uma **difusão estocástica refletida com comutação** satisfazendo as equações abaixo:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t b(\alpha(s))ds + \sigma w(t) + r(t),$$

$$\mathbb{P}(\alpha(t + \delta) = j | \alpha(t) = i, x(s), \alpha(s), s \leq t) = q_{ij}^v(x(t)) + o(\delta),$$

em que $b(\cdot)$ é dado como acima e $\sigma := \sqrt{\lambda^s(\bar{\Delta}^d)^2(\sigma_a^2 + \sigma_d^2)}$.

Obs. Do melhor do nosso conhecimento, este é o primeiro modelo utilizando difusões estocásticas com comutação e reflexão.

Utilização da aproximação na prática

Na prática aproximamos $X^n \approx \frac{\tilde{x}^n}{\sqrt{n}}$ em que:

$$\tilde{x}^n(t) = x^n(0) + \int_0^t b^n(\alpha^n(s))ds + \sigma w(t) + z(t), \quad t \geq 0$$

e $b^n(i) = \sqrt{n}(\rho^n - f(i))$.

Utilização da aproximação na prática

Na prática aproximamos $X^n \approx \frac{\tilde{x}^n}{\sqrt{n}}$ em que:

$$\tilde{x}^n(t) = x^n(0) + \int_0^t b^n(\alpha^n(s)) ds + \sigma w(t) + z(t), \quad t \geq 0$$

e $b^n(i) = \sqrt{n}(\rho^n - f(i))$.

Problema de Controle

Agora podemos definir o nosso problema de controle: encontrar v que minimiza o custo:

$$\limsup_T \frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{E}_{(x_0, i_0)}^v [N(\alpha^n(s))] ds,$$

em que $N(\alpha(t))$ representa o número de servidores consumindo energia no tempo t , sujeito a seguinte restrição em relação a carga de trabalho média do sistema:

$$\limsup_T \frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{E}_{(x_0, i_0)}^u [\sqrt{n}\tilde{x}^n(s)] ds \leq W,$$

Problema de Controle

Vamos primeiro considerar o problema de controle sem restrições. Ou seja, o problema é determinar uma política de controle v que minimiza o custo:

$$\gamma(x_0, \alpha_0, v) := \limsup_T \frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{E}_{(x_0, \alpha_0)}^v [k(x(s), \alpha(s))] ds, \quad (1)$$

onde (x, α) satisfaz a difusão com comutação, $(x_0, \alpha_0) \in G \times E$ são condições iniciais e $k : G \times E \rightarrow \mathbb{R}$ é o custo corrente.

Este tipo de problema de controle é chamado de problema de controle Ergódico.

Equação de Programação Dinâmica

A equação de programação dinâmica para este problema é:

$$\begin{cases} \inf_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{L}^u V(x, i) - \gamma + k(x, i) = 0, & (x, i) \in G \times E \\ V_x(x, i) = 0, & \text{for } (x, i) \in \{0, B\} \times E \end{cases}$$

em que $V : G \times E \rightarrow \mathbb{R}$, γ é uma constante real, e para cada $u \in \mathcal{U}$, define-se

$$\mathcal{L}^u f(x, i) := b(x, i) f_x(x, i) + \frac{1}{2} \sigma^2(x, i) f_{xx}(x, i) + \sum_{j \in E} q_{ij}(u) f(x, j),$$

para f_x e f_{xx} representando a primeira e segunda derivada de f em relação ao primeiro argumento.

A ideia é utilizar o método da cadeia de Markov aproximada para encontrar uma solução para este problema.

Solução Numérica

Utilizando

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} \{ \mathcal{L}^u V(x, i) - \gamma + k(x, i) \} = 0,$$

aplicamos as seguintes aproximações:

$$b(i)V_x(x, i) \approx \begin{cases} b^+(i) \frac{V(x+h)-V(x)}{h} & \text{for } b(i) \geq 0 \\ b^-(i) \frac{V(x)-V(x-h)}{h} & \text{for } b(i) < 0, \end{cases}$$

em que $b^+(i) = b(i) \vee 0$, $b^-(i) = b(i) \wedge 0$, e

$$V_{xx}(x, i) \approx \frac{V(x+h) + V(x-h) - 2V(x)}{h^2},$$

Tem-se:

$$\begin{aligned}
 V(x, i) \approx \inf_u \bigg\{ & \Delta t^h k(x, i) + V(x, i) \left[1 - \frac{M^h(i, u)}{M^h} \right] \\
 & + V(x + h, i) \left[\frac{\sigma^2/2 + hb^+(i)}{M^h} \right] \\
 & + V(x - h, i) \left[\frac{\sigma^2/2 - hb^-(i)}{M^h} \right] \\
 & + \sum_{j \neq i} q_{ij}(u) \Delta t^h V(x, j) - \bar{\gamma} \bigg\},
 \end{aligned}$$

em que $\bar{\gamma} := \Delta t^h \gamma$, $M^h(i, u) := |b(i)|h + \sigma^2 - q_{ii}(u)h^2$,
 $M^h := \max_{i,u} M^h(i, u)$, e $\Delta t^h := h^2/M^h$.

Tem-se:

$$\begin{aligned} V(x, i) = \inf_u \bigg\{ & \Delta t^h k(x, i) + V(x, i) p^h((x, i), (x, i) | u) \\ & + V(x + h, i) p^h((x, i), (x + h, i) | u) \\ & + V(x - h, i) p^h((x, i), (x - h, i) | u) \\ & + \sum_{j \neq i} p^h((x, i), (x, j) | u) V(x, j) - \bar{\gamma} \bigg\}, \end{aligned}$$

em que $\bar{\gamma} := \Delta t^h \gamma$, $M^h(i, u) := |b(i)|h + \sigma^2 - q_{ii}(u)h^2$,
 $M^h := \max_{i,u} M^h(i, u)$, e $\Delta t^h := h^2/M^h$.

Solução Numérica

Tem-se:

$$\begin{aligned} V(x, i) = \inf_u \bigg\{ & \Delta t^h k(x, i) + V(x, i) p^h((x, i), (x, i) | u) \\ & + V(x + h, i) p^h((x, i), (x + h, i) | u) \\ & + V(x - h, i) p^h((x, i), (x - h, i) | u) \\ & + \sum_{j \neq i} p^h((x, i), (x, j) | u) V(x, j) - \bar{\gamma} \bigg\}, \end{aligned}$$

em que $\bar{\gamma} := \Delta t^h \gamma$, $M^h(i, u) := |b(i)|h + \sigma^2 - q_{ii}(u)h^2$,
 $M^h := \max_{i,u} M^h(i, u)$, e $\Delta t^h := h^2/M^h$.

Esta é a equação de programação dinâmica associado a um processo de decisão de Markov (MDP).

Condição Localmente Consistente

Def. Seja $\{(\zeta_k^h, \vartheta_k^h)\}_{k \geq 0}$ uma cadeia de Markov tomando valores em $G_h \times E$ e seja $\Delta \zeta_k^h := \zeta_{k+1}^h - \zeta_k^h$, para $k \geq 0$. Esta cadeia de Markov é dita ser localmente consistente com a solução da equação diferencial estocástica com comutação e reflexão se satisfaz: $\sup_{k, \omega} |\Delta \zeta_k^h| \rightarrow 0$ as $h \rightarrow 0$, for $0 < x < B$ and $i, j \in E$, $j \neq i$:

$$\mathbb{E}_{(x,i)}^{u,h} \left[\Delta \zeta_k^h \right] = b(x, i) \Delta t^h + o(\Delta t^h),$$

$$\mathbb{E}_{(x,i)}^{u,h} \left[\left(\Delta \zeta_k^h - \mathbb{E}_{(x,i)}^{u,h} \left[\Delta \zeta_k^h \right] \right)^2 \right] = \sigma(x, i)^2 \Delta t^h + o(\Delta t^h),$$

$$\mathbb{P}_{(x,i)}^{u,h} \left\{ \vartheta_{k+1}^h = j \right\} = \Delta t^h q_{ij}(u) + o(\Delta t^h),$$

$$\mathbb{P}_{(x,i)}^{u,h} \left\{ \vartheta_{k+1}^h = i \right\} = 1 + q_{ii}(u) \Delta t^h + o(\Delta t^h),$$

além de algumas outras condições sobre os estados da fronteira $x \in \{0, B\}$.

Resultados sobre Convergência

Primeiro resultados:

Teo. Suponha que (x^h, α^h) é uma interpolação contínua da cadeia de Markov que aproxima a solução da EDE com comutação e reflexão e é localmente consistente. Suponha que $(x^h(0), \alpha^h(0))$ converge em distribuição para $(x(0), \alpha(0))$ e que (x^n, α^n) é controlada pelo controle v . Então (x^h, α^h) converge fracamente para a solução da EDE com comutação e reflexão usando o controle v .

Obs. Sob algumas hipóteses sobre o controle v .

Resultados sobre Convergência

Segundo resultados:

Teo. Assuma que o custo corrente $k(\cdot, \cdot)$ é contínuo em relação ao primeiro argumento. Além disso, suponha que para cada $\epsilon > 0$, existe um controle v^ϵ que é ϵ -ótimo e que, usando este controle, a solução associada da EDE com comutação e reflexão tenha uma única medida invariante. Assuma ainda que a cadeia de Markov a tempo discreto é irreduzível sob a política ótima, com custo dado por $\bar{\gamma}^h$. Então, tem-se que

$$\bar{\gamma}^h \longrightarrow \bar{\gamma}, \quad \text{as } h \rightarrow 0,$$

em que $\bar{\gamma} = \inf_v \gamma(x_0, \alpha_0, v)$.

Obs. Estamos estudando a possibilidade de obter este resultado sob condições mais fracas.

Controlando Consumo Sem Restrições

O método numérico acima foi desenvolvido para um problema de controle sem restrições. Para ilustrar a aplicação neste caso, consideramos a formulação considerada por Mitrani em [10]. Comparação direta com o resultado apresentado por Mitrani não pode ser feita com o modelo que discutimos, já que ele não assume paralelismo.

Sem hipótese de paralelismo, temos aproximação por difusão somente quando ($\Delta_t^d \sim \exp$) (caso contrário, processo limite complicado [4]).

Controlando Consumo Sem Restrições

O método numérico acima foi desenvolvido para um problema de controle sem restrições. Para ilustrar a aplicação neste caso, consideramos a formulação considerada por Mitrani em [10]. Comparação direta com o resultado apresentado por Mitrani não pode ser feita com o modelo que discutimos, já que ele não assume paralelismo.

Sem hipótese de paralelismo, temos aproximação por difusão somente quando $(\Delta_t^d \sim exp)$ (caso contrário, processo limite complicado [4]).

Neste caso, obtemos uma aproximação por difusão que satisfaz a seguinte EDE com comutação e reflexão:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \lambda^a - \lambda^d [nf(\alpha(s)) \wedge \sqrt{n}x(s)] ds + \sigma w(t) + r(t),$$

em que λ^a é a taxa de chegada, λ^d é a taxa de serviço e $\sigma = \sqrt{\lambda^a(\sigma_a^2 + 1)}$.

Comparação com o resultado em Mitrani 2013

Utilizamos a mesma função de custo utilizada por Mitrani, dada abaixo:

$$\gamma(x_0, \alpha_0, v) = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \mathbb{E}_{(x_0, i_0)}^v \left[\int_0^T c_1 Q(s) + c_2 N(\alpha(s)) ds \right],$$

em que $Q(t) = \sqrt{n}x(t)$ representa o número de clientes no sistema no tempo t e $N(\alpha(t))$ representa o número de servidores consumindo energia no instante t .

Os pesos c_1 e c_2 devem ser escolhidos pelo usuário do modelo.

Comparação com o resultado em Mitrani 2013

Temos os seguintes resultados numéricos:

Ex. 1	U	D	Custo Médio	Ex. 2	U	D	Custo Médio
DP	19	17	33.066862*	DP	10	9	14.123313*
HR	19	10	37.356842*	HR	9	4	17.309647*
Ex. 3	U	D	Custo Médio (sim)	Ex. 4	U	D	Custo Médio (sim)
DP	21	17	37.230 (37.227, 37.233)	DP	12	9	16.521 (16.517, 16.525)
HR	19	10	39.020 (39.016, 39.023)	HR	9	4	17.491 (17.487, 17.495)

*calculado usando fórmula fechada apresentada por Mitrani 2013.

Em todos os senários, tem-se $c_1 = 1$ e $c_2 = 2$

Ex 1 e 2 são: $\Delta_l^a \sim \exp(\lambda)$, $\lambda = 10$, $n = 20$ e $m = 9$ e $\lambda = 4$, $n = 10$ e $m = 5$ respectivamente.

Ex 3 e 4 são: $\Delta_l^a \sim \text{hyperexp}(\lambda, \sigma)$, com $\sigma^2 = 10$, $\lambda = 10$, $n = 20$, $m = 9$ e $\lambda = 4$, $n = 10$, $m = 5$, respectivamente.

Método Numérico Para o Problema com Restrições

Suponha que $(\xi^h, \vartheta^h) := \{(\xi_l^h, \vartheta_l^h)\}_{l=1}^\infty$ é uma cadeia de Markov controlada tomando valores em $\{0, h, \dots, B\} \times E$ com probabilidade de transição $p^h((x, i), (y, j)|u)$. Então o problema de controle original é aproximado pelo problema de encontrar a política u^h que minimiza o custo:

$$\begin{aligned} \gamma(\xi_0, \vartheta_0, u^h) &= \limsup_N \frac{1}{N} \mathbb{E}_{(\xi_0, \vartheta_0)}^{u^h} \left[\sum_{l=0}^N N(\vartheta_l^h) \right] \\ \text{s.t.:} \quad & \limsup_N \frac{1}{N} \mathbb{E}_{(\xi_0, \vartheta_0)}^{u^h} \left[\sum_{l=0}^N \sqrt{n} \xi_l^h \right] \leq W, \end{aligned} \tag{2}$$

Método Numérico Para o Problema com Restrições

Suponha que $(\xi^h, \vartheta^h) := \{(\xi_l^h, \vartheta_l^h)\}_{l=1}^\infty$ é uma cadeia de Markov controlada tomando valores em $\{0, h, \dots, B\} \times E$ com probabilidade de transição $p^h((x, i), (y, j)|u)$. Então o problema de controle original é aproximado pelo problema de encontrar a política u^h que minimiza o custo:

$$\begin{aligned} \gamma(\xi_0, \vartheta_0, u^h) &= \limsup_N \frac{1}{N} \mathbb{E}_{(\xi_0, \vartheta_0)}^{u^h} \left[\sum_{l=0}^N N(\vartheta_l^h) \right] \\ \text{s.t.:} \quad & \limsup_N \frac{1}{N} \mathbb{E}_{(\xi_0, \vartheta_0)}^{u^h} \left[\sum_{l=0}^N \sqrt{n} \xi_l^h \right] \leq W, \end{aligned} \tag{2}$$

Este problema discretizado pode ser resolvido utilizando sua formulação via programação linear.

Método Numérico Para o Problema com Restrições

Suponha que $(\xi^h, \vartheta^h) := \{(\xi_l^h, \vartheta_l^h)\}_{l=1}^\infty$ é uma cadeia de Markov controlada tomando valores em $\{0, h, \dots, B\} \times E$ com probabilidade de transição $p^h((x, i), (y, j)|u)$. Então o problema de controle original é aproximado pelo problema de encontrar a política u^h que minimiza o custo:

$$\begin{aligned} \gamma(\xi_0, \vartheta_0, u^h) &= \limsup_N \frac{1}{N} \mathbb{E}_{(\xi_0, \vartheta_0)}^{u^h} \left[\sum_{l=0}^N N(\vartheta_l^h) \right] \\ \text{s.t.:} \quad & \limsup_N \frac{1}{N} \mathbb{E}_{(\xi_0, \vartheta_0)}^{u^h} \left[\sum_{l=0}^N \sqrt{n} \xi_l^h \right] \leq W, \end{aligned} \tag{2}$$

Este problema discretizado pode ser resolvido utilizando sua formulação via programação linear.

Obs. Nenhum resultado sobre a convergência do método numérico para este problema é conhecida (trabalho em andamento).

Resultado numérico

Um simulador a tempo discreto do sistema de filas foi implementado, tivemos os seguintes resultados:

σ_a^2	W	MWL (OC)	Std. (OC)	MWL (NCO)	Std. (NCO)	MS
1	3	2.772 ± 0.015	2.612 ± 0.022	2.500 ± 0.028	2.547 ± 0.034	135
10	20	17.12 ± 0.146	16.63 ± 0.138	23.03 ± 0.237	26.07 ± 0.346	130
20	50	45.21 ± 0.446	41.97 ± 0.420	62.91 ± 1.170	69.63 ± 1.640	125

OC = sistema utilizando controle ótimo

NCO = sistema sem controle, mas com número ótimo de servidores

Obrigado

saul.leite@ufabc.edu.br

Código:

https://github.com/lisaul/minicurso_lncc2021.git

Referências



Zhongwei Cao, Xu Liu, Xiangdan Wen, Liya Liu, and Li Zu.

A regime-switching SIR epidemic model with a ratio-dependent incidence rate and degenerate diffusion.
Scientific Reports, 9(1):10696, July 2019.



M. Ghosh, A. Arapostathis, and S. Marcus.

Optimal Control of Switching Diffusions with Application to Flexible Manufacturing Systems.
SIAM Journal on Control and Optimization, 31(5):1183–1204, September 1993.



D. Higham.

An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations.
SIAM Review, 43(3):525–546, January 2001.



Haya Kaspi and Kavita Ramanan.

SPDE limits of many-server queues.

The Annals of Applied Probability, 23(1):145–229, February 2013.



Peter E. Kloeden and Eckhard Platen.

Numerical Solution of Stochastic Differential Equations.

Stochastic Modelling and Applied Probability.

Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1992.



Saul C. Leite, Marcelo Fragoso, and Rodolfo S. Teixeira.

Switching Diffusion Approximations for Optimal Power Management in Parallel Processing Systems.

To appear Stochastic Models, 2021.



Saul C. Leite and Ruth J. Williams.

A constrained Langevin approximation for chemical reaction networks.

The Annals of Applied Probability, 29(3):1541–1608, June 2019.



Siyu Lv, Zhen Wu, and Qing Zhang.

Optimal switching under a hybrid diffusion model and applications to stock trading.

Automatica, 94:361–372, August 2018.



Xuerong Mao, Chenggui Yuan, and G. Yin.

Approximations of Euler–Maruyama type for stochastic differential equations with Markovian switching, under non-Lipschitz conditions.

Journal of Computational and Applied Mathematics, 205(2):936–948, August 2007.



Isi Mitrani.

Trading Power Consumption against Performance by Reserving Blocks of Servers.

In Mirco Tribastone and Stephen Gilmore, editors, *Computer Performance Engineering*, number 7587 in Lecture Notes in Computer Science, pages 1–15. Springer Berlin Heidelberg, 2013.



S. Nguyen, T. Hoang, D. Nguyen, and G. Yin.

Milstein-Type Procedures for Numerical Solutions of Stochastic Differential Equations with Markovian Switching.

SIAM Journal on Numerical Analysis, 55(2):953–979, January 2017.



Q. S. Song, G. Yin, and Z. Zhang.

Numerical methods for controlled regime-switching diffusions and regime-switching jump diffusions.

Automatica, 42(7):1147–1157, July 2006.



George Yin and Chao Zhu.

Hybrid Switching Diffusions: Properties and Applications.
Stochastic Modelling and Applied Probability.
Springer-Verlag, New York, 2010.



Caojin Zhang, George Yin, Qing Zhang, and Le Yi Wang.

Pollution control for switching diffusion models:
Approximation methods and numerical results.
Discrete & Continuous Dynamical Systems - B, 24(8):3667,
2019.



Q. Zhang.

Stock Trading: An Optimal Selling Rule.
SIAM Journal on Control and Optimization, 40(1):64–87,
January 2001.



Xun Yu Zhou and G. Yin.

Markowitz's Mean-Variance Portfolio Selection with Regime Switching: A Continuous-Time Model.

SIAM Journal on Control and Optimization,
42(4):1466–1482, January 2003.